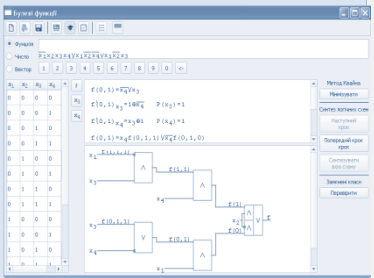
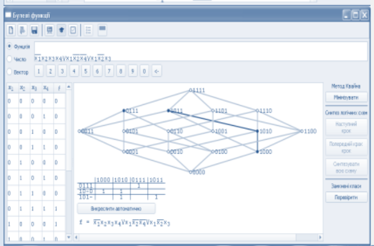
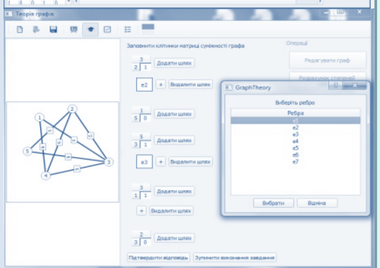
Л.О.Олійник

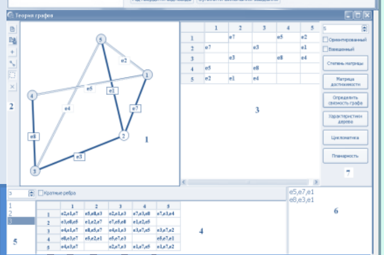
Дискретна математика

Навчальний посібник

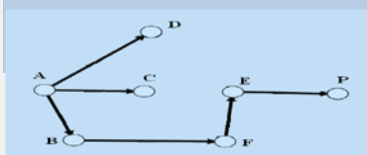


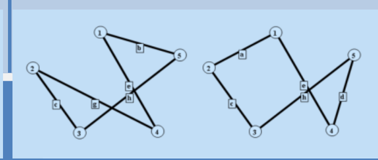


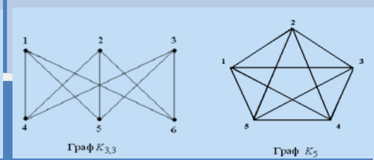


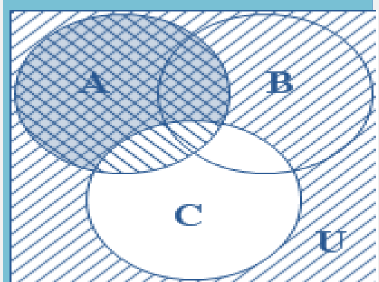


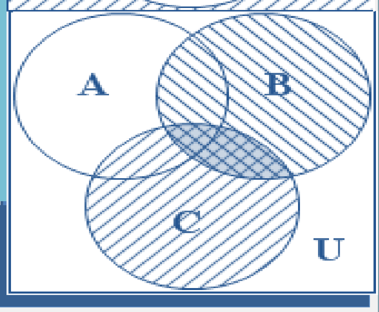
2015











Дніпродзержинськ

Міністерство освіти і науки України
Дніпродзержинський державний технічний університет

Л.О.Олійник

Дискретна математика

Дніпродзержинськ 2015

ББК
УДК 519.1

Олійник Л.О. «Дискретна математика». Навч.посібник.- 2015.- 256с.,іл.123.

Рекомендовано як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів напрямів підготовки 6.040301 «Прикладна математика», 6.050101 «Комп'ютерні науки», 6.050102 «Комп'ютерна інженерія».

Друкується за рішенням Вченої Ради Дніпродзержинського державного технічного університету.

У навчальному посібнику представлено матеріали з навчальної дисциплін «Дискретна математика», викладено основні розділи нормативного курсу дисципліни, а саме: теорія множин та бінарних відношень, теорія булевих алгебр, комбінаторика і теорія графів. Теоретичний матеріал, що викладено у посібнику, проілюстровано великою кількістю прикладів з детальними розв'язками і поясненнями. Посібник має тестові завдання для перевірки як теоретичного так і практичного рівня засвоєння матеріалу студентами. Ці тестові завдання розподілені за змістовними модулями згідно до програми курсу і складають основу модульного контролю.

Посібник призначений для використання студентами напряму підготовки 6.040301 «Прикладна математика» галузі знань 0403 «Системні науки та кібернетика», а також напрямів підготовки 6.050101 «Комп'ютерні науки» та 6.050102 «Комп'ютерна інженерія».

Навчальний посібник може також використовуватись при викладанні курсу «Основи дискретної математики» у навчальних закладах І-ІІ рівнів акредитації для підготовки молодших спеціалістів за спеціальностями «Прикладна математика» та «Розробка програмного забезпечення».

Рис. 123. Бібіліогр.19:

Рецензенти: д.т.н, професор Байбуз Олег Григорович
д.т.н., професор Алексєєв Михайло Олександрович
к.ф.-м.н, професор Холькін Олександр Михайлович

ISBN

Вступ

Математичні методи обробки інформації є важливим елементом застосування математики у різноманітних галузях наукових досліджень. Досить широке коло процесів моделюють засобами скінченої або дискретної математики. Досить часто і неперервні процеси дискретизують, тобто створюють дискретні моделі і розв'язують методами дискретного аналізу. Крім того дискретні моделі пристосовані до ефективної обробки за допомогою комп'ютерної техніки. А певні розділи дискретної математики є ефективним інструментом розвитку самої комп'ютерної техніки, програмного забезпечення, алгоритмізації процесів.

Навчальний посібник створено згідно зі стандартною програмою курсу «Дискретна математика» і призначений для використання студентами математичних спеціальностей прикладного характеру, зокрема, спеціальності «Прикладна математика», а також спеціальностей напряму «Програмна інженерія», зокрема «Розробка програмного забезпечення».

У посібнику викладено основні розділи нормативного курсу «Дискретної математики», а саме: теорія множин та бінарних відношень, теорія булевих алгебр, комбінаторика і теорія графів. Викладення матеріалу є досить загальним, велику увагу приділено алгебраїчним аспектам. З єдиних алгебраїчних позицій викладено теорію представлення елементів булевої алгебри та їх мінімізація. У теорії графів поряд з іншими досить детально розглядаються алгебраїчні метооди дослідження графів, наведено описання матричних алгоритмів розв'язання певного кола задач.

Структура посібника, досить детально відображається у змісті. Посібник складається з розділів, кожний з яких поділено на параграфи. У кінці кожного параграфу наведено теоретичні питання для самоконтролю. Посібник має досить широкий перелік літературних джерел, як навчального призначення, так і монографій. Посібник має велику кількість прикладів із наведеними детальними розв'язками. Посібник містить термінологічний словник та список позначень, що спрощує пошук основних термінів та понять курсу.

Посібник має три додатки. У Додатку 2 навдено тестові завдання для перевірки як теоретичного, так і практичного рівня засвоєння матеріалу студентами. Ці тестові завдання розподілені за змістовими модулями і складають основу контролю якості засвоєння матеріалу курсу. Причому, вони можуть використовуватись як у паперовому варіанті, за розробленими бланками відповідей, так і в електронному для проведення ком'ютерного тестування.

Автор висловлює подяку випускниці кафедри Прикладної математики Дніпродзержинського державного технічного університету, Чорноусенко Н.В., за участь у створенні електронної версії навчального посібника.

У Додатку 3 наведено описання програмного забезпечення, (програми-тренажери «Множини», «Булеві функції» та «Теорія графів»), розробленого у співавторстві з випускником кафедри Прикладної математики Дніпродзержинського державного технічного університету магістром Крушельницьким О.В. Ці програми можна віднести до так званих автоматизованих навчальних систем, що дозволяють викладачу під час лекцій ілюструвати за допомогою мультимедійних технологій методи розв'язання задач та забезпечують можливість опрацювання студентами певного кола задач курсу «Дискретна математика». Крім того, необхідно відмітити, що більшість рисунків виконано саме в програмах «Множини», «Булеві функції» та «Теорія графів».

У Додатку 4 приведено застосування програмного модуля «Булеві функції» до проектування безконтактних схем керування електроприводами на логічних елементах та розглядається приклад розв'язання цієї задачі.

Посібник може використовуватись при викладанні курсу «Дискретна математика» для студентів напрямів підготовки 6.040301 «Прикладна математика», 6.050101 «Комп'ютерні науки», 6.050102 «Комп'ютерна інженерія».

Автор сподівається, що навчальний посібник «Дискретна математика» буде корисним не тільки студентам, а й викладачам, які працюють у даному напрямку.

Список позначень

Множини. Відображення. Відношення.

$a \in A$ - елемент *a* належить множині A

$a \notin A$ - елемент *a* не належить множині A

$\subset$ - строге включення

$\subseteq$ - нестроге включення

$\varnothing$ - порожня множина

U - універсум

$|A|$ - потужність множини A

$\mathbf{N}$ - множина натуральних чисел

$\mathbf{Z}$ - множина цілих чисел

$\mathbf{Q}$ - множина раціональних чисел

$\mathbf{R}$ - множина дійсних чисел

$\mathbf{C}$ - множина комплексних чисел

$\bigcup$ - символ операції об'єднання

$\bigcap$ - символ операції перетину

$\backslash$ - символ операції різниці

Δ - символ операції симетричної різниці

$\bar{\ }$ - символ операцій доповнення

$\times$ - символ операції декартового добутку

A^n - декартовий степінь множини A

$f : A \to B$ - відображення множини A в множину B

$\mathfrak{R}$ - бінарне відношення

$\mathfrak{R}^{-1}$ – обернене бінарне відношення

$\prec$ - лексикографічний порядок

Sup - верхня межа

Inf - нижня межа

Алгебри. Булеві алгебри. Булеві функції

$\circ$ - адитивна операція

$*$ - мультиплікативна

e - нейтральний елемент алгебри

$\langle M, \circ, *, \bar{\ } \rangle$ - булева алгебра

$\langle B(U), \bigcap, \bigcup, \bar{\ } \rangle$ - алгебра Кантора

$\langle \mathfrak{I}, \vee, \wedge, \bar{\ } \rangle$ - алгебра висловлювань

$\{\mathfrak{I}; \oplus, \wedge, 1\}$ - алгебра Жегалкіна

$\vee$ - символ операцій диз'юнкції

$\wedge$ - символ операцій кон'юнкції

$\to$ - символ операції імплікації

$\Leftrightarrow$ - символ операції еквівалентності

$\oplus$ - символ операції логічного додавання

$|$ - символ операції штрих Шефера

$\downarrow$ - символ операції стрілка Пірса

$m_i^{\sigma_i}$ - первинний терм

K_0 - клас функцій, які зберігають 0

K_1 - клас функцій, які зберігають 1

$K_л$ - клас лінійних булевих функцій

$K_м$ - клас монотонних булевих функцій

$K_с$ - клас самодвоїстих булевих функцій

$\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ - похідна булевої функції

Елементи комбінаторики

C_n^k - сполучення з n елементів по k

P_n - перестановки множини з n елементів

A_n^k - розміщення з n елементів по k

$C_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \overline{C}_n^m$ - перестановки з повтореннями з n елементів по m

f_n^k - сполучення з повтореннями n елементів по k

Елементи теорії графів

$G = \langle V, E \rangle$ - граф G

$\Im$ - відношення інцидентності

S - відношення суміжності

K_n - повний граф з n вершинами

$K_{n,n}$ - двохдольний регулярний граф з $2n$ вершинами

$\rho(v_i)$ - степень вершини графа

$d(G)$ - діаметр графа

$r(G)$ - радіус графа

$D(G)$ - матриця досяжності

$\mathrm{S}(G)$ - матриця суміжності

$\mathrm{C}(G)$ - цикломатична матриця

$\mathrm{K}(G)$ – матриця Кірхгофа

$k(G)$ - зв'язність графа

$\lambda(G)$ - реберна зв'язність

$\delta(G)$ - мінімальний степінь вершин графа

$d\,(v', v'')$ - метрика на графі

Z_i - цикл

$\nu(G)$ - цикломатичне число графа G

$\chi(G)$ – ранг розрізу графа G

$\mu(e)$ – вага ребра

f - кількість граней графа

$t(G)$ - товщаграфа

G^* - абстрактно двоїстий граф

$\varepsilon_0(G)$ - число вершинної незалежності графа

$\varepsilon_1(G)$ - число реберної незалежності графа

$\pi_0(G)$ - число вершинного покриття графа

$\pi_1(G)$ - число реберного покриття графа

$\eta\,(G)$ – хроматичне число

$\varphi(e)$ - поток на дузі e

$G(v_0)$ - окіл вершини

$\overline{G}(v_0)$ - неокіл вершини

Розділ І. Множини. Відображення множин. Відношення.

§ 1. Множини. Операції над множинами.

1.1 Поняття множини.

На кожному кроці у повсякденному житті нам доводиться мати справу з поняттям множини, якому важко дати чітке визначення. Наприклад, можна говорити про такі множини: вищих навчальних закладів країни; студентів даного навчального закладу; підприємств міста; гравців та болільників на стадіоні; літер українського алфавіту; слів у словнику і так далі. У математиці постійно доводиться працювати з множинами різної природи, наприклад: множиною дійсних чисел, множиною прямокутних трикутників, множиною векторів у тривимірному просторі.

Поняття множини є одним із загальних початкових понять, тому неможливо дати йому означення, спираючись на інші більш прості й загальні поняття, на зразок того, як визначається поняття розв'язку рівняння або похідної.

Поняття множини базується на інтуїтивному уявленні про об'єкти, зібрані в деяку сукупність, яке дає змогу добре відрізняти їх одне від одного.

Отже, множина - це сукупність певних об'єктів, що називаються елементами множини, які можна добре розрізняти.

Довільна множина сама може бути елементом деякої множини, яка може входити як елемент до складу інших множин.

Надалі елементи, з яких складаються множини, будемо позначати малими латинськими літерами, а самі множини позначатимемо великими латинськими літерами. Запис $a \in A$ означає, що елемент a належить множині A. Якщо a не є елементом множини A, то пишуть $a \notin A$.

Означення 1.1 Множина *A* називається *підмножиною* множини *B*, якщо всі елементи множини *A* є елементами множини *B*. Позначається це так: $A \subset B$ або $A \subseteq B$.

Означення 1.2 Дві множини називаються рівними, якщо всі елементи однієї множини є елементами другої множини і навпаки. Тобто, $A = B$ означає, що $A \subseteq B$ та $B \subseteq A$.

Означення 1.3 Множина, яка не містить жодного елемента називається *порожньою* і позначається $\varnothing$.

Означення 1.4 Кількість елементів множини *A* називається її *потужністю* і позначається $|A|$.

Множини поділяються на скінчені та нескінчені.

Для позначення нескінчених числових множин, з якими доводиться працювати в неперервній математиці, зокрема, в математичному аналізі, загальноприйнятими є такі позначення: $\boldsymbol{N}$ - множина натуральних чисел; $\boldsymbol{Z}$ - множина цілих чисел; $\boldsymbol{Q}$ - множина раціональних чисел; $\boldsymbol{R}$ - множина дійсних чисел; $\boldsymbol{C}$ - множина комплексних чисел.

Потужності цих множин поділяються на два типи. Множини $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ називаються *зліченими*, тобто кожному елементу цих множин можна присвоїти певний номер. Множини $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ не є зліченими, тобто їхні елементи не можна перерахувати, потужність останніх множин називається *континуум*.

Множиною скінченої потужності є, наприклад, множина коренів рівняння $x^2 - 2x - 3 = 0$. Позначимо її M_0. Розглянемо ще множину чисел -1 та 3, позначимо її M_1, а також, множину чисел -2, -1, 0, 1, 2, 3, позначимо її M_2. Про ці множини можна сказати, що вони всі мають скінчену потужність, тобто є скінченими, і між ними мають місце співвідношення:

$$M_0 = M_1, M_0 \subset M_2, M_1 \subset M_2, |M_0| = |M_1| = 2, |M_2| = 6.$$

1.2 Нескінчені множини.

Множини, які мють таку ж потужність, що й множина натуральних чисел, тобто елементам якої можна привласнити номери, інакше кажучи перенумерувати, називаються *зліченими.* Наприклад, множина усіх точок площини з цілими координатами злічена. Дійсно, якщо вести рахунок, як показано на Рис.1, тобто розташувавши пари натуральних чисел (точки площини) за зростанням суми їхніх координат, то кожна з діагоналей матиме скінчену кількість пар, а, отже, їх можна занумерувати. Цей принцип нумерації привласнює кожній із точок площини з цілими координатами певний номер. Цей факт дає змогу стверджувати, що множина раціональних чисел Q є зліченою, бо кожне раціональне число цілком визначається парою натуральних чисел (m,n) (дійсно, довільне раціональне число має вигляд $q=\frac{m}{n}$).

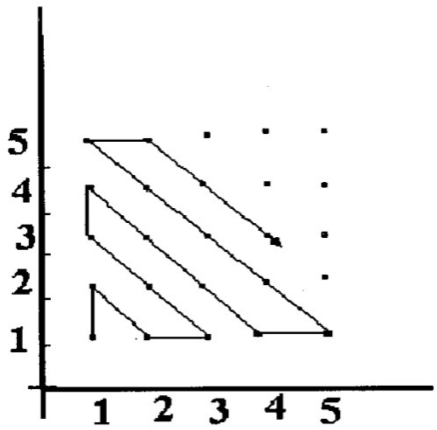


Рис. 1

Теорема 1.1 (Кантор Г.) Множина дійсних чисел, що міститься у відрізку [0,1] не є зліченою.

Доведення. Припустимо, що множина дійсних чисел відрізку [0,1] є зліченою, тоді можна всі елементи цієї множини занумерувати. Розташуємо всі числа згідно з порядковими номерами та представимо їх у вигляді десяткових дробів:

$$\begin{array}{l} 0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ 0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots \\ 0,a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots \\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots \end{array}$$

Розглянемо нескінчений десятковий дріб $0,b_1b_2b_3\ldots$, де $b_1\neq a_{11}, b_2\neq a_{22},\ldots$. Цей дріб відрізняється від кожного з дробів, що наведені вище, тобто не має номера. Отже, не можна перенумерувати всі дійсні числа відрізку [0,1], тобто ця множина незлічена. Потужність множини [0,1] називається ***континуум***. ∇

Потужність континуум має довільний відрізок дійсної числової вісі, а також і сама числова пряма.

1.3 Способи визначення множин.

Існує кілька способів визначення множини.

1) *Перерахування елементів для скінчених множин.* У цьому випадку елементи множин записуються у фігурних дужках:

$$M_2 = \{-2,-1,0,1,2,3\}.$$

2) *Визначення множини за допомогою породжуючої процедури.* Це індуктивні або рекурентні правила або формули:

а) індуктивне або рекурсивне визначення:

$$M_3 = \left\{ a_k \in R, \quad a_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in N \right\},$$

тобто M_3 - це множина дійсних чисел, які обчислюються за формулою $a_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ при кожному натуральному k;

б) рекурентне визначення:

$$M_4 = \{a_k \in R, \quad a_k = 5 + \sqrt{a_{k-1}}, \quad a_k > 0, \quad k \in N\}.$$

3) *Описання властивостей елементів множини.* $M_5 =$ {натуральні числа менші за число 100}. Для цього способу визначення множини важливим є існування розпізнавальної процедури, яка дає змогу точно визначити, чи буде даний об'єкт елементом множини, чи ні. Наприклад, множина $M_6 =$ {хороші книжки, видані у XX столітті} не може вважатися заданою коректно, бо поняття "хороша книга" суб'єктивне, а, отже, неоднозначне. Але множина $M_7 =$ {літературні твори, що удостоєні Нобелівської премії} задана цілком коректно. Розпізнавальною процедурою тут є перерахування всіх творів, удостоєних цієї премії.

4) Визначення множини за допомогою *операцій* над іншими множинами.

1.4 Булеан.

Означення 1.5 Булеаном довільної множини A називається множина $B(A)$, елементами якої є всі підмножини множини A.

При цьому множина A входить до булеану і називається *простором* або *універсумом.* Для універсума часто приймається одне з позначень U або 1.

Приклад 1.1 Нехай $A=\{a,b,c\}$. Побудуємо множину всіх підмножин A, тобто $B(A)$. Це зробити неважко, перераховуючи всі підмножини в A. Зрозуміло, що $\varnothing \subset A$ та $\varnothing \subseteq A$. Ці підмножини називаються тривіальними. Крім них необхідно розглянути нетривіальні одноелементні та двохелементні підмножини. Отже, $B(A)=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.

У розглянутому випадку $|\mathrm{B}(A)|=8=2^3$. Насправді, має місце теорема про визначення потужності булеану.

Теорема 1.2. Потужність булеану визначається формулою

$$|\mathrm{B}(A)|=2^{|A|}.$$

Цю теорему можна довести застосуванням поняття бієктивного відображення, що буде введено пізніше (§2, Означення 2.7).

Зауваження 1.1 Для нескінчених множин має місце такий факт. *Потужність булеану довільної зліченої множини є континуум.* Взагалі, потужність булеану множини вище, ніж у самої множини. Тому не існує множини максимальної потужності.

1.5 Двійкове представлення множин.

Нехай U скінчений універсум. Занумеруємо всі його елементи a_i, $i=\overline{1,n}$. Кожній підмножині $A\subseteq U$, поставимо у відповідність вектор $v=\{v_1,\ldots,v_n\}$ за правилом: $v_i=\begin{cases}0, a_i\notin A\\ 1, a_i\in A\end{cases}$.

Вектор $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$, складений з нулів та одиниць, називається двійковим кодом або двійковим представленням підмножини A. Саме так множини представляються для роботи з ЕОМ.

1.6 Операції над множинами.

Для ілюстрації наступних означень використовуються так звані круги Ейлера або діаграми Венна. Множини зображуються
на площині у вигляді кругів або інших плоских фігур, незалежно від їхньої потужності. Результат виконання операцій позначається відповідно кольором або штриховкою.

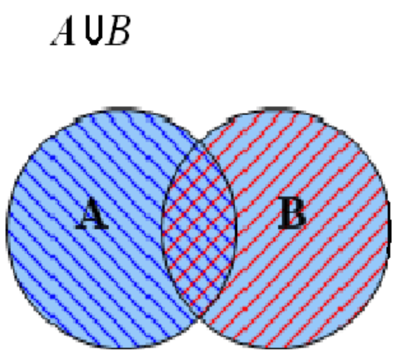


Рис. 2

Означення 1.6 Об'єднанням двох множин A та B називається множина C, яка складається тільки з елементів множини A таелементів множини B, взятих по одному разу. Позначення $C = A \bigcup B$ (Рис 2).

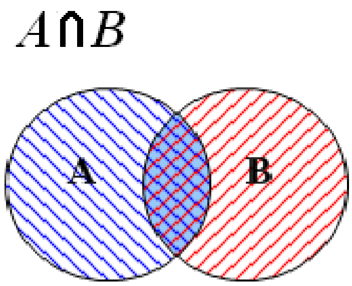
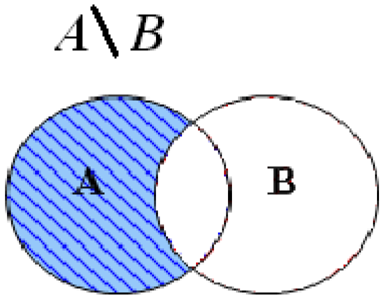


Рис. 3

Означення 1.7 Перетином двох множин A та B називається множина C, елементами якої є ті і тільки ті елементи, що належать одночасно множинам A і B. Позначення $C = A \bigcap B$ (Рис 3).



Означення 1.8 Різницею двох множин A та Bназивається множина C, елементами якої є ті і тільки ті елементи множини A, що не є елементами множини B. Позначення $C = A \setminus B$(Рис 4).

Означення 1.9 Симетричною різницею двох множин Aта B називається множина C, елементами якої є ті і тільки ті елементи множин A та B, що не належать цим множинам одночасно. Позначення $C = A\Delta B$ (Рис 5).

За означення симетричної різниці також приймають очевидну рівність: $A\Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$.

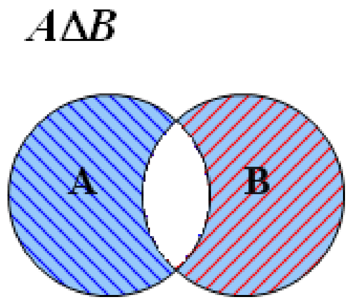


Рис. 5

Означення 1.10 Якщо $A \supseteq B$, різниця $A \setminus B$ називається доповненням множини B у множині A і позначається $\overline{B}_A$.

Як правило доповнення розглядається в універсумі, тобто $\overline{A} = U \setminus A$ (Рис.6).

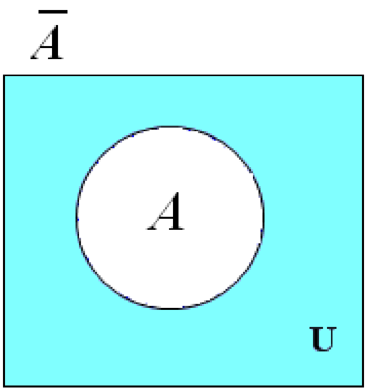


Рис. 6

Зауваження 1.2 Важливо також з'ясувати, як виконуються в алгебрі Кантора операції, якщо множини задані двійковим представленням. Розглянемо приклад. Нехай множина A має код 01010111, а множина B – 11100011, тоді: $A \bigcup B$ має код 11110111 (умовно кажучи, операції об'єднання відповідає «майже сума», для якої 1+1=1), $A \bigcap B$ має код 01000011 (операції перетину відповідає звичайний добуток), $\overline{A}$ має код 10101000 (операції доповнення відповідає так звана операція інверсії, яка нулі замінює одиницями і навпаки), $A\Delta B$ має код 10110100 (операції симетричної різниці відповідає так зване логічне додавання, або додавання за модулем 2, для якої 1+1=0), і, нарешті, $A \setminus B$ має код 10100000.

Контрольні запитання

- Які існують способи визначення множин?
- Як визначається потужність множини?
- Як визначається булеан даної множини?
- Чому дорівнює потужність булеану?

- Як визначається операція об'єднання множин?
- Як визначається операція перетину множин?
- Як визначається операція різниці множин?
- Як визначається операція доповнення множини?
- Як визначається операція симетричної різниці множин?
- Як визначається двійковий код множини?

§2. Декартовий добуток. Відображення множин.

2.1 Декартовий добуток.

Означення 2.1 Декартовим або прямим добутком множин $A_1, \ldots, A_n$ називається множина всіх впорядкованих наборів $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, $a_i \in A_i$, що називаються векторами або кортежами. Декартів добуток має таке позначення:

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n .$$

Якщо всі A_i рівні між собою, то декартів добуток позначається A^n і називається степенем множини A.

Приклад 2.1 1). Нехай $A = B = R$, тоді $A \times B = R^2$ є множиною пар (x, y) дійсних чисел. Зображаються елементи цього добутку точками на площині у декартовій системі координат.

Точку тривимірного простору визначають трійкою дійсних чисел (x, y, z), де $x, y, z \in R$, отже, $(x, y, z) \in R$.

2) Кожній клітинці на шаховій дошці присвоєне ім'я у вигляді пари, де перший елемент належить множині $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, а другий - множині $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Таким чином для запису шахової партії використовуються елементи декартового добутку $A \times B$.

3) Нехай A - алфавіт української мови, тоді елементами множини A^5 є всеможливі набори з п'яти літер, серед яких містяться всі слова української мови, що складаються з п'яти літер.

4) Числова таблиця $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, де $a_{ij} \in R$, що називається матрицею, може представлятись, як вектор-стовпчик $A=\begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \end{pmatrix}$, де $\overline{a_i} = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) \in R^3$, i=1,2. Отже, сама матриця є елементом простору $\left(R^3\right)^2$, але не R^6, бо елементи R^6 - це вектори довжини 6, що ніяк не пов'язано з матрицею *A*. Отже, для декартових степенів маємо $\left(R^3\right)^2 \neq R^6$.

Наступна теорема визначає потужність декартового добутку.

Теорема 2.1 Нехай A_i, $(i=1,\ldots,n)$ скінчені множини, потужності яких дорівнюють m_i відповідно, тоді:

$\left| \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} A_i \right| = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n = \prod\limits_{i=1}^{n} m_i$. Звідси випливає, що $\left|A^n\right| = |A|^n$.

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції (Додаток 2). Для $n=1$, теорема тривіальна. Нехай теорема виконується при $n=k$, доведемо її справедливість для $n=k+1$. Нехай $\langle a_1,\ldots,a_n \rangle$, $a_i \in A_i$ - довільний вектор. Допишемо до нього праворуч елемент $a_{k+1} \in A_{k+1}$. Це можна зробити m_{k+1} способами, тобто одержимо m_{k+1} різних векторів із декартового добутку $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k+1}$. Множина $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ складається, згідно з припущенням, з $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ векторів. Дописуванням до кожного з векторів елемента a_{k+1} одержимо $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k \cdot m_{k+1}$ різних векторів з $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k+1}$. Інших векторів у множині $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k+1}$ немає. Отже, для $n=k+1$ твердження теореми виконується. Принцип математичної індукції дозволяє стверджувати, що теорема є вірною для довільного n. ∇.

Означення 2.2. Проекцією вектора $\overline{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$, $a_i \in A_i$, на множину A_i, яку називають *i*-тою віссю і позначають $np_i \overline{a}$, називається його *i*-та компонента, тобто $np_i \overline{a} = a_i$.

Проекцією вектора $\overline{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$, $a_i \in A_i$, на вісі з номерами $i_1, i_2, ..., i_k$ називається вектор $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \rangle$ (позначається $np_{i_1, i_2, \dots, i_k} \overline{a}$).

Нехай V - множина векторів однакової довжини, тоді проекцією множини V на *i*-ту вісь називається множина всіх проекцій всіх векторів цієї множини на *i*-ту вісь, тобто: $np_i V = \{ np_i \overline{a} \mid \overline{a} \in V \}$.

Якщо $V = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, то $np_{i_1, i_2, ..., i_k} V = A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_k}$.

Приклад 2.2. $V = \{(a, b, c, d), (c, b, a, d), (d, d, c, b), (a, a, b, a)\}$, тоді $np_1 V = \{a, c, d\}$, $np_2 V = \{b, d, a\}$, $np_3 V = \{c, b, a\}, np_4 V = \{d, b, a\}$, $np_{2,3} V = \{(b, c), (b, a), (d, c), (a, b)\}, np_{1,4} V = \{(a, d), (c, d), (d, b), (a, a)\}$.

2.2 Відношення. Відображення множин.

Означення 2.3 Відношенням на декартовому добутку множин A та B називається підмножина $G \subset A \times B$. $\langle a, b \rangle \in G$ означає, що елементу $a \in A$ поставлено у відповідність елемент $b \in B$.

Означення 2.4. Множина елементів $b \in B$, які відповідають елементові $a \in A$, називається *образом* елемента *a* відношення *G*.

Множина елементів $a \in A$, які співставляються елементу $b \in B$, називається *прообразом* елемента *b* відношення *G*.

Нехай $A_1 \subseteq A$ і $B_1 \subseteq B$ такі, що $G \subset A_1 \times B_1$*1*, тоді $A_1 = np_1 G$ називається *областю визначення* відношення *G*, а $B_1 = np_2 G$ - *областю значень.*

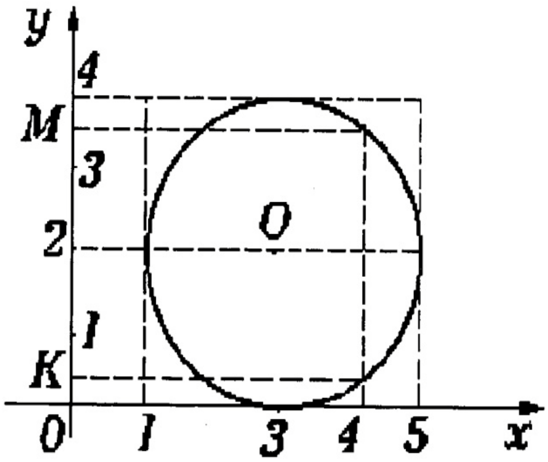
Означення 2.5. Відношення *G* називається *функціональним,* якщо образ кожного елемента $a \in np_1 G$ є одноелементною множиною в np_2G. Функціональне відношення називається *відображенням* множини *A* у множину *B*.

Надалі розглядатимемо відображення множин. Якщо $A_1 = np_1G = A$, то відображення називається *скрізь визначеним.* У протилежному випадку - *частково визначеним.* Якщо $B_1 = np_2G = B$, то відображення називається *відображенням на* або *сюр'єктивним.* У протилежному випадку - *відображенням в.*

Означення 2.6. Нехай $\langle a_i, b_i \rangle \in G, i = 1,2$. Відображення *G* називається *ін'єктивним* або *однозначним*, якщо $\forall a_1, a_2 \in np_1G$ таких, що $a_1 \neq a_2$, їхні образи теж різні, тобто $b_1 \neq b_2$.

Означення 2.7. Якщо відображення *G* скрізь визначене, сюр'єктивне та ін'єктивне, то воно називається *бієктивним* або *взаємно однозначним*.

Приклад 2.3 1) Нехай $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Розглянемо відношення $G = \{\langle 1,2\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 5,6\rangle, \langle 7,8\rangle\}$. Воно є функціональним, бо образ кожного елемента з *A* є одноелементною множиною в *B*, отже, маємо справу з відображенням, яке є скрізь визначеним, не сюр'єктивним і не ін'єктивним.



2) Прикладом відношення може слугувати словник. Причому, таке відношення частково визначене, не сюр'єктивне і не ін'єктивне. Дійсно, ні один словник не охоплює всієї множини слів мови, одне слово (наприклад, англійське) може мати кілька значень при перекладі.

3) Розглянемо круг радіуса 2 з центром у точці $O(3,2)$ (Рис.7), тобто множину $G = \{(x, y) : (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$, яка є підмножиною в R^2, а також в [1,5]×[0,4]. Отже, *G* - відношення.

Розглянемо детальніше це відношення. Якщо його розглядати в R^2, то воно частково визначене і не сюр'єктивне. Якщо ж розглядати його на множині $[1,5]\times[0,4]$, то воно скрізь визначене і сюр'єктивне. Образом числа 5 є єдине число 2, образом 4 - є нескінчена множина чисел, зображуваних точками відрізка [K,M]. Прообразом числа 4 є єдине число 3, прообразом числа 2 - відрізок [1,5].

Розглянемо декартовий добуток $[1,3]\times[0,4]$, відношення вигляду $H = \{(x, y) : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4;\ y \geq 2\}$ є відображенням множини [1,3] у множину [2,4]. Воно є бієктивним і може бути представленим формулою: $y = \sqrt{4-(x-3)^2} + 2$.∇

4) Кодування - це однозначне відображення, бо інакше не було б можливості дешифрації закодованої інформації. Однак, таке відображення не завжди може бути сюр'єктивним, тобто довільний код може не мати сенсу. Наприклад, довільний набір з десяти цифр може являти собою номер телефона, але не всі десятизначні коди використовуються для телефонних номерів.

Приклад 2.4 Множина перетворень множини натуральних чисел, що називаються підстановками і позначаються P_n.

Підстановкою порядку n називається взаємно однозначне відображення множини з *n* елементів на себе. Розглянемо множину {1,2,3,4}. Підстановка на цій множині має вигляд: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Цей запис означає, що встановлено відповідність: $1\leftrightarrow2$, $2\leftrightarrow1$, $3\leftrightarrow2$, $4\leftrightarrow4$.

Перший рядок - область визначення підстановки, другий рядок - область значень. Дві підстановки рівні між собою, якщо їхні області визначення співпадають і однаковим елементам області визначення відповідають однакові значення. Підстановка вигляду $E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ називається тотожньою або одиничною.

Зауваження 2.1 Має місце твердження*: якщо між множинами A та B встановлено бієктивне відображення, то їхні потужності рівні* $|A|=|B|$.

Для нескінчених множин це твердження приймається за означення рівності потужностей.

Доведення теореми 1.2 (§1). Нехай A скінчена множина, яка має потужність *n,* доведемо, що потужність булеану визначається за формулою $|B(A)| = 2^n = 2^{|A|}$**.**

Дійсно, розглянемо двійкові коди кожної підмножини $B \subseteq A$, тобто кожного елемента булеану $B(A)$.

Таким чином, встановлюється взаємно однозначна відповідність між множиною $B(A))$ та V_n - множиною всіх двійкових векторів довжини *n*, отже $|B(A)|=|V_n|$. Потужність множини V_n легко визначити, бо $V_n = \{0,1\}^n$, отже $|V_n|= 2^n$. ∇.

2.3 Функції.

Відображення будемо називати просто функціями. Для них будемо використовувати одне з позначень: $f: A \to B$ або $y = f(a)$, $a \in A$ та $b \in B$ ($\boldsymbol{f}$ - функція типу $A \to B$). $\forall a \in A, y = f(a)$ позначення *образу* елемента a функції f, а $\forall b \in B, x = f^{-1}(b)$ - позначення *прообразу* елемента b.

Якщо $f: A \to A$, то f називається перетворенням множини A. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$. Якщо вона матиме тип $R_+ \to R$ (R_+ - множина додатніх дійсних чисел), то вона скрізь визначена, але не сюр'єктивна. Якщо ж тип цієї функції буде $R_+ \to R_+$, то вона буде бієктивною.

Означення 2.8 Функція f типу $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ називається n-місцевою або n-вимірною.

Означення 2.9 Нехай $G \subset A \times B$. Якщо відношення $H \subset B \times A$таке, що $\langle b, a \rangle \in H$ тоді і тільки тоді, коли $\langle a, b \rangle \in G$, то відношення H називається оберненим до Gі позначається G^{-1}.

Якщо відношення обернене до функції *f* є також функцією, то воно називається оберненою функцією і позначається f^{-1}.

Обернена функція існує тоді і тільки тоді, коли функція f бієктивна.

Розглянемо функцію $f(x) = \sin x$. Якщо вона має тип $R \to R$, то оберненої для неї не існує, якщо ж її тип буде $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$, то обернена, як відомо, існує, це є функція $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

Означення 2.10 Нехай задано дві функції $f: A \to B$ та $g: B \to C$. Тоді функція $h: A \to C$ називається композицією функцій *f* та *g*, якщо $\forall x \in A: h(x) = g(f(x))$.

Якщо *f* та *g* багатомісцеві функції, наприклад, $f: A \to B$ та $g: B^n \to C$, то многовид функцій, які можна отримати шляхом композиції даних двох, досить великий. Відмітимо, що композицію функцій в дискретному аналізі часто називають просто *формулою*.

Контрольні запитання.

- Що називається декартовим добутком множини?
- Як визначається потужність декартового добутку множин?
- Що називається відношенням на декартовому добутку множин?
- Як визначається обернене відношення?
- Яке відношення називається функціональним?
- Яке відображення називається сюр'єктивним?
- Яке відображення називається ін'єктивним?
- Яке відображення називається бієктивним?

§ 3. Бінарні відношення. Еквівалентність. Порядок.

3.1 Бінарні відношення.

Означення 3.1. Підмножина $\Re \subseteq A^n$ називається n-місцевим (n-арним) відношенням на множині A.

Одномісцеве відношення - це просто підмножина в A. Найчастіше доводиться мати справу з двомісцевими відношеннями, які називають бінарними, тобто бінарне відношення на множині A- це підмножина в A^2.

Той факт, що елементи a та b знаходяться у відношенні $\Re$, позначається так: $a\Re b$.

Приклад 3.1 1) Нехай $A = N$. Відношення: $\Re_1$- мати спільний дільник, відмінний від 1; $\Re_2$- елемент a є дільником елемента b; $\Re_3$ - $a < b$. Розглянемо пари чисел $\langle 5,8\rangle$, $\langle 7,13\rangle$, $\langle 4,12\rangle$, $\langle 9,6\rangle$. Зрозуміло, що $4\Re_1 12$, $9\Re_1 6$, $9\Re_2 6$, $5\Re_3 8$, $7\Re_3 13$, $4\Re_3 12$.

2) Нехай $A = R$. Відношення: $\Re_4$ - точки площини знаходяться на однаковій відстані r_0 від початку координат; $\Re_5$ - точки площини симетричні відносно даної прямої l. $x\Re_4 y$ означає, що $x^2+y^2=r_0^2$, при $r_0 = 5$ прикладом таких пар можуть бути: $\langle 3,4\rangle$, $\langle \sqrt{12}, \sqrt{13}\rangle$. Нехай l - є вісь OX. Тоді координати всіх точок, що належать графікам функцій $y = \pm\sqrt{x}$, знаходяться у відношенні $\Re_5$.

Означення 3.2. Відношення $\Re'$ називається звуженням відношення $\Re$ із множини A на її підмножину A_1, якщо $\Re' = \Re \cap (A_1)^2$.

Означення 3.3. Оберненим відношенням для бінарного відношення $\Re$ називається множина $\Re^{-1} = \{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \Re\}$.

Означення 3.4. Добутком бінарних відношень $\Re_1$ та $\Re_2$ називається $\Re_1 \circ \Re_2 = \{\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle : \exists \mathrm{z} : \langle x, z\rangle \in \Re_1, \langle z, y\rangle \in \Re_2\}$.

Приклад 3.2 Знайти $\Re_1^{-1}, \Re_2^{-1}, \Re_1 \circ \Re_2$ ($\Re_1, \Re_2$ з прикладу 1)

Розв'язок, $\Re_1^{-1}$={$\langle y, x\rangle : \langle x, y\rangle \in \Re_1$}={$\langle y, x\rangle$: x та y мають спільний дільник, відмінний від 1}=$\Re_1$. $\Re_2^{-1}=\{\langle y, x\rangle : \langle x, y\rangle \in \Re_2\}$ ={⟨x,y⟩: y є дільником x}. $\Re_1 \circ \Re_2$ = {$\langle y, x\rangle$: існує z таке, що $\langle x, z\rangle \in \Re_1$ та $\langle z, e\rangle \in \Re_2$}={$\langle y, x\rangle$: існує z, таке, що x та z мають спільний дільник, відмінний від 1 і z дільник y}={$\langle y, x\rangle$: x та y мають спільний дільник, відмінний від 1}=$\Re_1$.

3.2 Способи представлення бінарних відношень.

Бінарне відношення на скінченій множині представляється: 1) перерахуванням пар його елементів; 2) матрицею.

Означення 3.5 Матрицею бінарного відношення $\Re$ на множині $A = \{a_1,..., a_n\}$ називається квадратна матриця C порядку n, елементи якої визначаються за формулою: $c_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i \Re a_j \\ 0, & \langle a_i, a_j\rangle \notin \Re \end{cases}$.

Приклад 3.3 Розглянемо відношення $\Re_1, \Re_2$, $\Re_3$, з прикладу 3.2 на множині A={1,2,3,4,5,6}.Ці відношення мають матриці::

$$\Re_1 \; \begin{array}{c|cccccc} A & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \Re_2 \; \begin{array}{c|cccccc} A & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \Re_3 \; \begin{array}{c|cccccc} A & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

3) Бінарне відношення на множині A можна представляти діаграмами, що називаються графами.

Означення 3.6 Сукупність множини A з заданим на ній бінарним відношенням $\Re$ називається графом G ($G = \langle A, \Re\rangle$). A називається носієм графа (множина вершин), а $\Re$ - сигнатурою графа (множина ребер).

Граф $G = \langle A, \Re_1 \rangle$, що зображує відношення $\Re_1$, згадане вище, на множині $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ наведено на Рис.8. Вершини графа відповідають елементам множини A. Якщо елементи знаходяться у даному відношенні, то відповідні вершини з'єднуються.

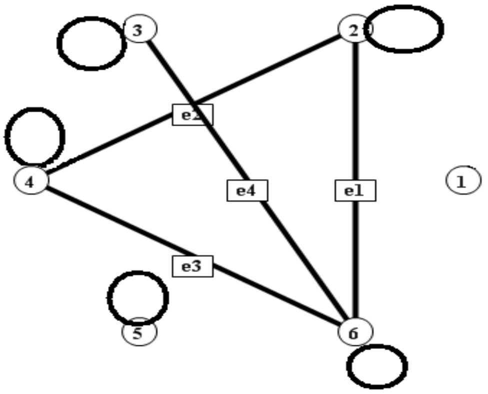


Рис. 8

3.3 Властивості відношень.

Серед властивостей бінарних відношень виділяють три найважливіші.

Означення 3.7 Бінарне відношення $\Re$ називається *рефлексивним* на множині *A,* якщо для довільного $a \in A : a\Re a$.

Означення 3.8 Бінарне відношення $\Re$ називається *симетричним,* якщо для довільних $a, b \in A$ з $a\Re b$ випливає $b\Re a$.

Означення 3.9 Бінарне відношення $\Re$ називається *транзитивним,* якщо для довільних $a, b, c \in A$ з того, що $a\Re b$ та $b\Re c$, випливає $a\Re c$.

Зауваження 3.1 Матриця рефлексивного відношення має на головній діагоналі всі одиниці, наприклад: $\Re_2$, а граф має петлі в кожній вершині. Якщо властивість рефлексивності не має місця для кожного елемента множини, то відношення називається *антирефлексивним*. Головна діагональ матриці антирефлексивного відношення складається тільки з нулів, наприклад: $\Re_3$, $\Re_5$.

Матриця симетричного відношення є симетричною і на графі ребра не мають напрямленності.

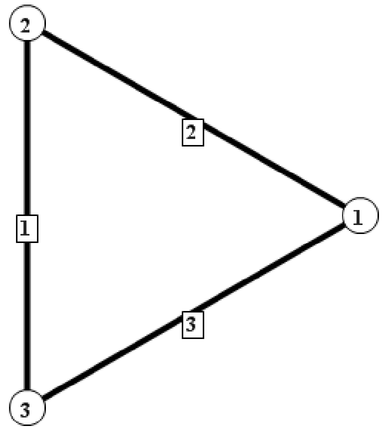


Рис. 9

Означення 3.10 Відношення $\Re$ називається *антисиметричним,* якщо з того, що $a\Re b$та $b\Re a$ випливає $b = a$.

Прикладом симетричного відношення є відношення "рівності" (якщо $b = a$, то $a = b$). Відношення "$\le$" на числових множинах дає приклад антисиметричного відношення, дійсно, якщо $b \le a$ та $a \le b$, то $b = a$.

Граф транзитивного відношення характеризується тим, що для пари ребер таких, що кінець першого (1) є початком другого (2), існує ребро (3), що називається транзитивним замиканням, і з'єднує початок першого з кінцем другого ребра (Рис. 9). Транзитивними є відношення "=", "$\le$", "навчатися в одній групі". Прикладом нетранзитивного відношення є відношення перпендикулярності на множині прямих на площині.

3.4 Еквівалентність, порядок. Діаграми Хасе.

Означення 3.11 Бінарне відношення $\Re$ називається *еквівалентністю,* якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.

Нехай $\Re$ - еквівалентність на деякій множині A. Виберемо елемент $a_1 \in A$та утворимо клас суміжності A_1(підмножину в A), що складається з усіх елементів, які еквівалентні a_1. Виберемо елемент a_2, $a_1 \ne a_2$ і побудуємо клас A_2, що складається з елементів еквівалентних a_2, і т.д. У результаті одержимо систему класів суміжності $A_1, A_2, \ldots$ таку, що для довільного $a \in A$ існує такий клас суміжності A_i, що $a \in A_i$, різні класи суміжності не мають спільних елементів та об'єднання усіх класів суміжності співпадає з множиною A. Ця процедура називається розбиттям множини *A* на класи суміжності (еквівалентності).

Приклад 3.4 1) Відношення "=" - еквівалентність. Всі класи еквівалентності цього відношення містять по одному елементу.

2) Відношення "конгруентності" на множині плоских фігур - еквівалентність.

3) Відношення на множині натуральних чисел "мати однаковий залишок при діленні на число p". Наприклад, при $p=5$, множина натуральних чисел розбивається на 5 класів еквівалентності, які складаються з чисел, що дають при діленні на 5 залишки 0, 1, 2, 3, 4.

Означення 3.12 Бінарне відношення $\Re$ називається *відношенням нестрогого порядку,* якщо воно є рефлексивним, антисиметричним, транзитивним. Якщо відношення $\Re$ є антирефлексивним, антисиметричним та транзитивним, то воно називається *відношенням строгого порядку.*

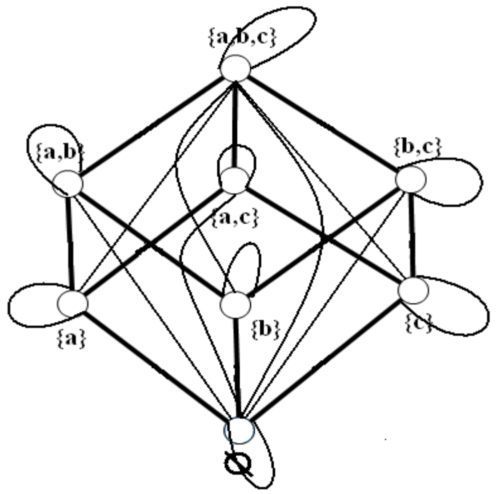


Рис. 10

Якщо довільні два елементи множини можна порівняти, тобто вони знаходяться у відношенні порядку (строгого чи нестрогого), то таку множину називають *лінійно впорядкованою* або повністю впорядкованою. В іншому випадку, множину називають *частково впорядкованою*.

Приклад 3.5. 1) Відношення "≥" "≤" - нестрогий порядок, 2) ">" "<" - строгий порядок. 3) Відношення вкладення "$\subseteq$" на булеані трьохелементної множини $A=\{a,b,c\}$ (Рис.10). Матрицю останнього відношення наведено нижче. Якщо в графі цього відношення (Рис.10) виключити транзитивно замикаючі дуги та петлі, то він матиме більш простий вигляд (Рис.11) і називатиметься *діаграмою Хасе* або гіперкубом даного відношення. На

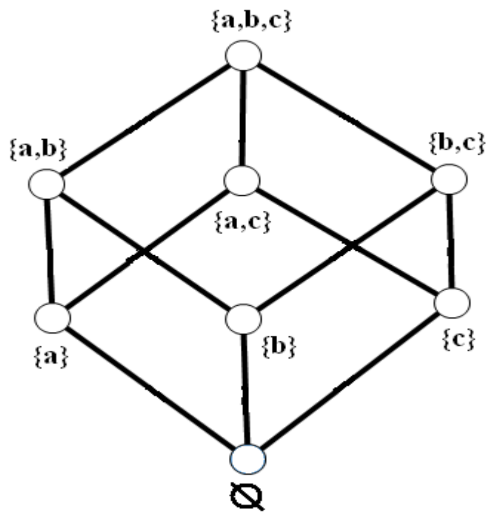


Рис. 11

діаграмі Хасе (Рис.11) усі дуги мають напрямок, а саме, знизу до гори, у випадку відношення вкладення це означає від менших множин до більш широких множин.

	∅	{a}	{b}	{c}	{a,b	{b,c	{a,c	{a,b,c}
∅	1	1	1	1	1	1	1	1
{a}	0	1	0	0	1	0	1	1
{b}	0	0	1	0	1	1	0	1
{c}	0	0	0	1	0	1	1	1
{a,b}	0	0	0	0	1	0	0	1
{b,c}	0	0	0	0	0	1	0	1
{a,c}	0	0	0	0	0	0	1	1
{a,b,c}	0	0	0	0	0	0	0	1

4) Лексико-графічний порядок.

Позначатимемо його символом $\prec$. Нехай у скінченому алфавіті A порядок слідування літер фіксований. Тоді A є лінійно впорядкована множина, тобто $a_i \prec a_j$, якщо a_i, в списку літер стоїть раніше a_j. Виходячи з впорядкованості літер, впорядковуються слова. Нехай α_1 та α_2 два слова. Тоді $\alpha_1 \prec \alpha_2$, в тому і тільки в тому випадку, коли: або $\alpha_1 = \beta a_i \gamma$, $\alpha_2 = \beta a_2 \delta$ та $a_i \prec a_j$, а β, γ, δ -деякі слова, можливо пусті, a_i та a_j- літери; або $\alpha_2 = \alpha_1 \beta$, де β - непусте слово. Таким чином визначається порядок слів у словнику.

Наприклад: а) ліс$\prec$лісник , бо α_1= ліс, α_2= лісник $=\alpha_1\beta$, де β = ник. б) або α_1= рівень, α_2= рівняння, тоді $\alpha_1 \prec \alpha_2$, так як $\alpha_1 = \beta a_i \gamma$, $\alpha_2 = \beta a_2 \delta$, де β= рів, $a_i = e \prec a_j$ = н, γ = нь, δ = яння.

3.5 Властивості впорядкованих множин.

Розглянемо підмножину M^* множини *M.* Якщо знайдеться такийелемент $m_a \in M$, що $\forall m_i \in M^*$, $m_i \le m_a$, то m_a-називається *мажорантою* підмножини M^*. Якщо $m_b \in M$ такий, що $\forall m_i \in M^*$ $m_i \ge m_b$, то m_b- називається *мінорантою* підмножини M^*.

Якщо $m_a \in M^*$ та $m_b \in M^*$, то вони називаються *максимальним та мінімальним елементами* підмножини M^*. Для пари елементів лінійно впрядкованої множини завжди існує максимальний (рівний одному з них) та мінімальний (рівний другому).

Якщо множина мажорант (мінорант) має максимальний (мінімальний) елемент, то його називають верхньою (нижньою) межею підмножини M^* та позначають $\sup M^*$ ($\inf M^*$).

Найменшою верхньою межею (найбільшою нижньою межею) називається верхня (нижня) межа менша (більша) довільної іншої верхньої (нижньої) межі. Підмножина впорядкованої множини має не більше однієї найменшої верхньої межі та однієї найбільшої нижньої межі. Верхня (нижня) межа підмножини M^* називається найбільшим (найменшим) елементом підмножини M^*, якщо вона належить до M^*.

Теорема 3.1 Впорядкована множина містить не більше одного найбільшого (найменшого) елемента.

Дійсно, якби m_a та m_b були два найбільших (найменших) елементи, то $m_b \le m_a$ та $m_a \le m_b$. Звідки, за умови антисиметричності відношення "≤", $m_a = m_b$.

Принцип двоїстості. *Відношення, обернене до відношення порядку, також є відношенням порядку.*

Контрольні запитання

- Що називається бінарним відношенням на множині?
- Як визначається добуток бінарних відношень?
- Яке відношенням називається рефлексивним?
- Яке відношенням називається симетричним?
- Яке відношенням називається транзитивним?
- Яке відношенням називається антисиметричним?
- Яке відношення називається еквівалентністю?
- Яке відношення називається відношенням порядку?

Розділ ІІ. Булева алгебра.

§ 4. Алгебри. Структури. Булеві алгебри.

4.1 Алгебраїчні структури.

Означення 4.1 Алгеброю називається сукупність множини M, яка називається носієм алгебри, з заданою на ній сукупністю операцій $S = \{f_{11}, \dots f_{1n}, f_{21}, \dots f_{2m}, \dots, f_{k1}, \dots f_{kp}\}$, яка називається сигнатурою алгебри, і позначається: **A**=$\langle M, S\rangle$. У позначенні операції f_{mp} перший індекс вказує на кількість місць операції.

Означення 4.2 Алгебра **A**=$\langle M, f\rangle$, сигнатура якої має одну бінарну (двохмісцеву) операцію f, називається *групоїдом.*

Бінарні операції поділяються на два типи, а саме: *адитивні* операції або операції типу додавання (надалі позначається $\circ$); *мультиплікативні* операції або операції типу множення (надалі будемо позначати $*$). Групоїд $\langle M, \circ\rangle$ називається *адитивним.* Групоїд $\langle M, *\rangle$ називається *мультиплікативним.*

Означення 4.3 Нехай **A**=$\langle M, f\rangle$ - групоїд. Елемент $e \in M$ називається *нейтральним* елементом, якщо для довільного $m \in M$ виконується рівність $mfe = efm = m$.

Групоїд не може мати більше одного нейтрального елемента. Дійсно, нехай $e, e' \in M$ два нейтральних елементи. Тоді $e' = e'fe = efe' = e$.

Якщо групоїд мультиплікативний, то нейтральний елемент називається *одиницею* і позначається 1, якщо групоїд адитивний, то нейтральний елемент називається - *нулем* і позначається 0.

Означення 4.4 Групоїд **A**=$\langle M, f\rangle$ називається *ідемпотентним,* якщо операція задовольняє закону ідемпотентності: для довільного $m \in M$, $mfm = m$.

Означення 4.5 Групоїд **A**=$\langle M, f \rangle$, в якому виконується закон *асоціативності*: для довільних $x, y, z \in M$, $xf(yfz) = (xfy)fz$, називається *напівгрупою.*

Означення 4.6 Напівгрупа **A**=$\langle M, f \rangle$, в якій операція f задовольняє закону комутативності: для довільних $x, y \in M$, $xfy = yfx$, називається *комутативною* або *абелевою.*

Означення 4.7 Напівгрупа **A**=$\langle M, f \rangle$, в якій кожний елемент має обернений, тобто для довільного $x \in M$, знайдеться y такий, що $xfy = e$ називається *группою* (елемент y називається оберненим до елемента x і позначається так: $y = x^{-1}$).

Означення 4.8 Алгебра **A**=$\langle M, \circ, * \rangle$ називається *кільцем*, якщо вона відносно операції $\circ$ утворює абелеву групу, а відносно операції $*$ - абелеву напівтрупу і виконується перший закон дистрибутивності: для довільних $x, y, z \in M$ $x*(y \circ z) = (x*y)\circ(x*z)$.

Означення 4.9 Кільце **A**=$\langle M, \circ, * \rangle$, в якому елементи відмінні від нуля утворюють групу відносно операції $*$ - називається *тілом,* а якщо ця група комутативна, то - *полем.*

Приклад 4.1 **A**=$\langle N, + \rangle$ - абелева напівгрупа без нуля.

A=$\langle N, \times \rangle$ - абелева напівгрупа з одиницею.

A=$\langle Z, +, \times \rangle$ - кільце цілих чисел.

A=$\langle Q, +, \times \rangle$ - поле раціональних чисел.

A=$\langle R, +, \times \rangle$ - поле дійсних чисел.

A=$\langle P(x), +, \times \rangle$ - кільце поліномів ($P(x)$ – множина поліномів).

A=$\langle P_n, * \rangle$ - група відносно добутку підстановок P_n.

Нехай $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ дві підстановки. Послідовна дія цих підстановок $P * Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ називається їхнім добутком.

Дійсно: а) $P*(Q*F)=(P*Q)*F$; б) $P*E=E*P=P$ (E – одинична підстановка); б) якщо P та Q такі, що $P*Q=Q*P=E$, то Q називається оберненою до підстановки P. Для довільної підстановки завжди існує обернена, щоб її визначити, необхідно переставити місцями верхній та нижній рядки.

4.2 Гратки або структури.

Означення 4.10 Алгебра **A**=$\langle M,\circ,*\rangle$ називається *дистрибутивною*, якщо операції для довільних $x,y,z\in M$ задовольняють законам дистрибутивності:

1) $x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z)$; 2) $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$.

Означення 4.11 В алгебрі **A**=$\langle M,\circ,*\rangle$ два елементи m_a та m_b називаються такими, що доповнюють друг друга, якщо: $m_a*m_b=0,\quad m_a\circ m_b=1$. Елемент m_b позначають $\overline{m_a}$ і називають доповненням елемента m_a в алгебрі **A.** Причому для довільного $m\in M$ виконується закон подвійного доповнення $\overline{\overline{m}}=m$.

Означення 4.12 Алгебра **A**=$\langle M,\circ,*\rangle$ називається алгеброю з доповненням, якщо вона має структурний нуль і для кожного $m\in M$ існує його доповнення $\overline{m}$. Крім того для довільних $m,n\in M$ виконуються закони де Моргана $\overline{m\circ n}=\overline{m}*\overline{n}$, $\overline{m*n}=\overline{m}\circ\overline{n}$.

Означення 4.13 Алгебра **A**=$\langle M,\circ,*\rangle$, що відносно кожної операції є ідемпотентною абелевою напівгрупою, називається *граткою* або *структурою*, якщо операції підкоряються закону поглинання $a\circ(a*b)=a$, $a*(a\circ b)=a$ $\forall a,b\in M$

Означення 4.14 Якщо структуру побудовано на алгебрі **A**= $\langle M,\circ,*,\overline{}\rangle$, що є дистрибутивною і має доповнення, то вона називається *булевою алгеброю.*

Окрім перерахованих законів булевої алгебри, мають місце й інші, серед яких виділимо такі:

а) закони склеювання: $a*b\circ a*\overline{b}=a$, $(a\circ b)*(a\circ\overline{b})=a$;

б) закони Порецького: $a\circ\overline{a}*b=a\circ b$, $a*(\overline{a}\circ\overline{b})=a*b$.

Контрольні запитання

- Що називається алгеброю?
- Як визначається напівгрупа?
- Як визначається група?
- Як визначається кільце?
- Як визначається поле?
- Що називається структурою (граткою)?
- Що називається булевою алгеброю?
- Як визначається підстановка?

§ 5. Алгебра Кантора

Розглянемо алгебру **К**$=\left\langle B(U), \cap, \cup, \overline{} \right\rangle$, де носій алгебри $B(U)$ – булеан на множині U (універсум), сигнатура складається з операцій об'єднання, перетину та доповнення множин.

Теорема 5.1 Алгебра Кантора є булевою алгеброю.

Доведення. Доведення теореми випливає з того, що в алгебрі Кантора виконуються наступні закони.

1) $A\cup\varnothing=A$, $A\cap U=A$;

2) комутативність: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

3) асоціативність: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

4) дистрибутивність: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

5) ідемпотентність: $A\cup A=A$, $A\cap A=A$;

6) закон поглинання $A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$;

7) $A\cup\overline{A}=U$, $A\cap\overline{A}=\varnothing$;

8) закони де Моргана $\left.\begin{array}{l}\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}\\ \overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}\end{array}\right\}$; 9) $\overline{\overline{A}}=A$.

З наведених рівностей випливає, що алгебра має структурні нуль та одиницю, відносно кожної з операцій об'єднання та перетину утворює ідемпотентні абелеві напівгрупи, дистрибутивна і має доповнення, а отже є булевою алгеброю

Залишилося довести усі вищезгадані рівності. Усі дев'ять рівностей тут доводити не будемо. Доведемо одну з формул дистрибутивності $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$.

Нехай a довільний елемент з множини $A\bigcup(B\bigcap C)$, тоді згідно з означенням об'єднання $a\in A$ або $a\in(B\bigcap C)$. З означення операції перетину одержимо: $a\in A$ або ($a\in B$ та $a\in C$), що є еквівалентним твердженню $a\in A$ або $a\in B$ та $a\in A$ або $a\in C$ та $a\in A$, але тоді, за означенням перетину, одержимо: $a\in A\bigcup B$ та $a\in A\bigcup C$. Нарешті, згідно з означенням об'єднання, одержимо $a\in(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$. Так як a - довільний елемент, то з доведеного випливає, що: $A\bigcup(B\bigcap C)\subseteq(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$.

Навпаки, нехай a довільний елемент із множини $(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$. За означенням перетину, одержимо $a\in A\bigcup B$ та $a\in A\bigcup C$. З означення об'єднання випливає, що $a\in B$ та $a\in A$ або $a\in C$ та $a\in A$, але це є еквівалентним тому, що: $a\in A$ або ($a\in B$ та $a\in C$). Це, згідно з означенням перетину, дає: $a\in A$ або $a\in(B\bigcap C)$. Нарешті, за означенням об'єднання, одержимо: $a\in A\bigcup(B\bigcap C)$. Так як a - довільний елемент, то з доведеного випливає, що: $A\bigcup(B\bigcap C)\supseteq(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$. Отже, одержимо рівність: $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$. ∇

Можна показати, що сигнатура алгебри Кантора підкоряється законам склеювання $A\bigcap B\bigcup A\bigcap\overline{B}=A$, $(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup\overline{B})=A$.

Рівність $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$ можна проілюструвати за допомогою кругів Ейлера (діаграм Венна) (рис 12).

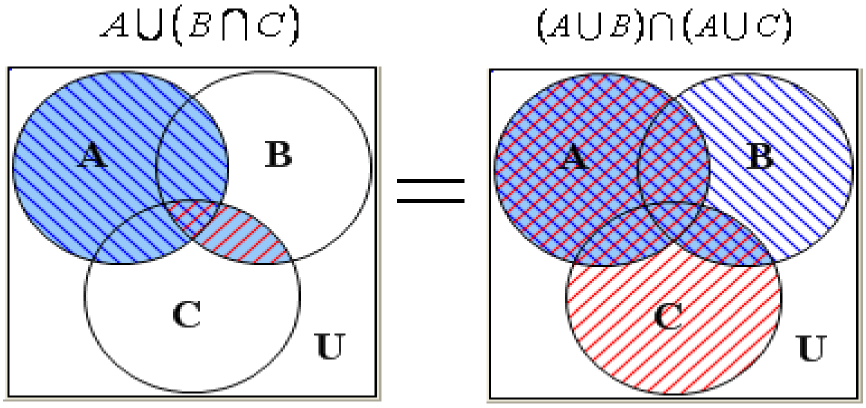


Рис. 12

Важливим є питання про потужність об'єднання двох і більше множин. Має місце формула, що пов’язує потужності об'єднання і перетину двох множин:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|.$$

У випадку, коли *A* та *B* не перетинаються, потужність об'єднання множин співпадає з сумою потужностей множин, що об'єднуються, тобто натуральні числа можна інтерпретувати як потужності множин, а операції над натуральними числами - як операції над множинами. Це говорить про те, що операція об’єднання є операцією адитивного типу.

У випадку трьох множин формула матиме вигляд:

$$|A\bigcup B\bigcup C|=|A|+|B|+|C|-|A\bigcap B|-|A\bigcap C|-|B\bigcap C|+|A\bigcap B\bigcap C|.$$

Цю формулу можна узагальнити для обчислення потужності довільної скінченної кількості множин. Вона матиме вигляд:

$$|A_1\bigcup A_2\bigcup\ldots\bigcup A_n|=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|-$$
$$-\left(|A_1\bigcap A_2|+|A_1\bigcap A_3|+\cdots+|A_1\bigcap A_n|+\cdots+|A_{n-1}\bigcap A_n|\right)+$$
$$+\left(|A_1\bigcap A_2\bigcap A_3|+|A_1\bigcap A_2\bigcap A_4|+\cdots+|A_{n-2}\bigcap A_{n-1}\bigcap A_n|\right)+$$
$$+(-1)^{n-1}|A_1\bigcap A_2\bigcap\ldots\bigcap A_{n-1}\bigcap A_n|.$$

В алгебрі Кантора представляють самостійний інтерес операції різниці та операція симетричної різниці.

Властивості різниці множин.

1) $A \setminus \varnothing = A,\ A \setminus A = \varnothing$**;** **2)** $A \bigcup (B \setminus A) = A \bigcup B$**;**

3) дистрибутивність: $A \bigcap (B \setminus C) = (A \bigcap B) \setminus C = B \bigcap (A \setminus C)$;

4) закони де Моргана: $A \setminus (B \bigcap C) = (A \setminus B) \bigcup (A \setminus C)$,

$$A \setminus (B \bigcup C) = (A \setminus B) \bigcap (A \setminus C);$$

5) $A \setminus B = A \setminus (A \bigcap B)$, ця властивість дає зв'язок для потужностей різниці та перетину двох множин: $|A \setminus B| = |A| - |A \bigcap B|$.

Припустимо в рівності 2), що $A \subseteq B$, тоді $A \bigcup (B \setminus A) = B$. Це є аналог операцій над натуральними числами $a + (b - a) = b$.

Властивості симетричної різниці:

1) $A\Delta b = B\Delta A$ - комутативність;

2) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ - асоціативність;

3) $A \bigcap (B\Delta C) = (A \bigcap B)\Delta(A \bigcap C)$ - дистрибутивність;

4) $A\Delta\varnothing = A,\ A\Delta A = \varnothing$.

Відмітимо, що, якщо $A \bigcap B = \varnothing$, то $A\Delta B = A \bigcup B$.

Крім того, із властивостей 2) та 4) випливає, що $A\Delta(A\Delta C) = C$. Дійсно: $A\Delta(A\Delta C) = (A\Delta A)\Delta C = \varnothing\Delta C = C$.

Розглянемо рівняння $A\Delta X = C$. Віднімемо симетрично від обох частин рівняння множину *A,* тоді: $A\Delta(A\Delta X) = A\Delta C$ або $X = A\Delta C$, що й є розв'язком рівняння $A\Delta X = C$.

Зауваження 5.1 Алгебра Кантора не може бути кільцем, бо відносно операцій перетину та об'єднання вона не утворює групу. Дійсно, рівняння $M \bigcup X = C,\ M \bigcap X = C$ не мають розв'язку, наприклад, коли $M \bigcap C = \varnothing$.

§ 6. Алгебра висловлювань

Висловлюванням називають оповідальне речення тієї чи іншої мови, про яке можна сказати, що воно або хибне, або істинне.

Поставимо кожному висловлюванню числове значення, за таким правилом: якщо висловлювання істинне, то йому відповідає 1, якщо - хибне то - 0.

6.1 Операцій над висловлюваннями.

Операції визначатимемо за допомогою так званих таблиць істинності, які визначають істинність або хибність новоутвореного висловлювання.

Означення 6.1 Заперечення – унарна операція. Нехай *A* – висловлювання, то його заперечення позначається $\overline{A}$ і визначається таблицею істинності:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Висловлювання $\overline{A}$ істинне тоді і тільки тоді, коли *A* є хибним, читається “не *A*”.

Означення 6.2 Кон’юнкція – бінарна операція. Позначається $A \wedge B$. Визначається таблицею істинності. Висловлювання $A \wedge B$ – істинне лише тоді і тільки тоді, коли *A* і *B* – істинні, читається “А і В”.

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

Означення 6.3 Диз’юнкція бінарна операція. Позначається через $A \vee B$. Визначається таблицею істинності:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Висловлювання $A \vee B$ хибне тоді і лише тоді, коли *A* і *B* хибні, читається “А або В”.

Розглянемо алгебру **B**$=\left\langle \mathfrak{I}, \vee, \wedge, \bar{} \right\rangle$, де носій алгебри $\mathfrak{I}$ – множина всіх висловлювань, сигнатура складається з операцій кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення.

Теорема 6.1 Алгебра **B**$=\left\langle \mathfrak{I}, \vee, \wedge, \bar{} \right\rangle$ висловлювань є булевою алгеброю.

Доведення. Необхідно довести, що сигнатура алгебри **B**$=\left\langle \mathfrak{I}, \vee, \wedge, \bar{} \right\rangle$, підкоряється наступним законам:

1) $A \vee 0 = A,\ A \wedge 0 = 0,\ A \vee 1 = 1,\ A \wedge 1 = A;$

2) комутативність: $A \vee B = B \vee A,\ A \wedge B = B \wedge A;$

3) асоціативність: $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C,$

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C;$$

4) дистрибутивність: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C),$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C);$$

5) ідемпотентність: $A \vee A = A, A \wedge A = A;$

6) закон поглинання $A \vee (A \wedge B) = A,\ A \wedge (A \vee B) = A;$

7) закон протиріччя: $(A \wedge \overline{A}) = 0;$

8) закон виключеного третього $(A \vee \overline{A}) = 1;$

9) закони де Моргана $\left.\begin{array}{l} \overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B} \\ \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B} \end{array}\right\};$ 10) $\overline{\overline{A}} = A.$

З наведених рівностей випливає. Що алгебра має структурні нуль та одиницю, відносно кожної з операцій диз'юнкції та кон'юнкції утворює ідемпотентні абелеві напівгрупи, дистрибутивна і має доповнення (заперечення), тобто є *булевою алгеброю*.

Для прикладу розглянемо доведення дистрибутивності операції диз'юнкції. Доведення полягає в побудові та порівнянні таблиць істинності для лівої та правої частин рівності.

Можна показати, що сигнатура алгебри висловлювань підкоряється законам склеювання $A \wedge B \vee A \wedge \overline{B} = A$**,** $(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) = A$**.**$\nabla$

A	B	C	$B \vee C$	$A \vee B$	$A \vee (B \vee C)$	$(A \vee B) \vee C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

В алгебрі висловлювань важливу роль відіграють й інші логічні операції.

Означення 6.4 Імплікація - бінарна операція. Позначається $A \to B$. Висловлювання $A \to B$ хибне, тоді і лише тоді, коли *A* – істинне, а *B* – хибне.

Читається “якщо *A*, то *B*”, де *A* – умова, а *B* – висновок.

Визначається таблицею істинності:

A	B	$A \to B$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

Для операції імплікації мають місце такі закони:

1) закон контрапозиції: $A \to B = \overline{A} \to \overline{B}$;

2) закон силогізму: $(A \to B) \wedge (B \to C) = A \to C$.

Означення 6.5 Еквівалентність - бінарна операція. Позначається $A \Leftrightarrow B$ (або $A \equiv B$). Висловлювання $A \Leftrightarrow B$ істинне, тоді і лише тоді, коли *A* і *B* – істинні, або А і *B* – хибні.

Читається “*A* тоді і тільки тоді, коли *B*”.

Має місце формула: $A \Leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A)$.

Визначається таблицею істинності:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Означення 6.6 Логічне додавання - бінарна операція. Позначається $A \oplus B$. Висловлювання $A \oplus B$ хибне, тоді і лише тоді, коли A і B – істинні, або А і B – хибні, тобто має місце рівність $A \oplus B = \overline{A \Leftrightarrow B}$, яка означає, що логічне додавання є запереченням еквівалентності.

Визначається таблицею істинності:

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Для операції логічного додавання виконуються такі закони:

1. $A \oplus A = 0,\ A \oplus 0 = A,\ A \oplus 1 = \overline{A}$.
2. Комутативність $A \oplus B = B \oplus A$.
3. Асоціативність $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.
4. Дистрибутивність $A \wedge (B \oplus C) = (A \wedge B) \oplus (A \wedge C)$.

Означення 6.7 Штрих Шефера - бінарна операція. Позначається $A|B$. Висловлювання $A|B$ істинне, тоді і лише тоді, коли хоча б одне з висловлень А і В хибне. Тобто операція штрих Шефера є запереченням операції кон’юнкції.

Визначається таблицею істинності:

A	B	$A\|B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Має місце рівність $A|B = \overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$.

Означення 6.8 Стрілка Пірса або функція Вебба. Позначається $A \downarrow B$. Висловлювання $A \downarrow B$ істинне, тоді і лише тоді, коли А і B – хибні. Тобто операція стрілка Пірса є запереченням операції диз'юнкції.

Визначається таблицею істинності:

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Має місце рівність $A \downarrow B = \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$.

Зауваження 1.1 Можна навести означення структури, що є еквівалентним означенню 4.13.

Означення 6.9 *Структурою* називається впорядкована множина $\langle M, \leq\rangle$, довільні два елементи m_i та m_j, якої мають найбільшу нижню межу $m_i \inf m_j$, та найменшу верхню межу $m_i \sup m_j$.

Еквівалентність означень 4.13 та 6.9 доведено в [1].

В алгебрі Кантора можна ввести частковий порядок наступним чином $A \leq B$ означає, що $A \bigcap B = A$, або $A \bigcup B = B$. Визначений таким чином частковий порядок співпадає з частковим порядком, який породжується відношенням вкладення множин, тобто $A \subseteq B$, при цьому $m_i \inf m_j = m_i \bigcap m_j$ і $m_i \sup m_j = m_i \bigcup m_j$. Аналогічно в алгебрі висловлень можна ввести частковий порядок наступним чином $A \leq B$ означає, що $A \wedge B = A$, або $A \vee B = B$, при цьому $m_i \inf m_j = m_i \wedge m_j$ і $m_i \sup m_j = m_i \vee m_j$.

6.2 Булеві функції. Булеві функції двох змінних

Враховуючи те, що кожному висловлюванню співставлене одне з двох числових значень 0 або 1, надалі будемо ототожнювати висловлення з їхніми значеннями і позначати $x_i, i \in N$.

Означення 6.10 Булевою функцією *n* змінних називається відображення вигляду $\{0,1\}^n \ni \langle x_1,\ldots,x_n \rangle \xrightarrow{f} f(x_1,\ldots,x_n) \in \{0,1\}$, яке набуває значень 0 та 1 і аргументи якого, є вектори, складені з 0 та 1. Булеву функцію *n* змінних називають, ще *n*-арною операцією на множині $\{0,1\}$. Множина усіх функцій вигляду $\{0,1\}^n \ni \langle x_1,\ldots,x_n \rangle \xrightarrow{f} f(x_1,\ldots,x_n) \in \{0,1\}$ утворює двозначну алгебру логіки.

Булевих функцій двох змінних усього 16, кожна з яких може приймати всього по чотири значення. Розташуємо їх у таблиці, де в рядках стоять значення функції для фіксованого набору значень аргументів x_1, x_2, а в стовпчиках усі значення функцій.

Ця таблиця є фактично таблицею істинності для усіх булевих функцій двох змінних. Серед цих функцій є ті, що визначені вище.

x_1	x_2	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Дійсно: $\varphi_1(x_1,x_2) = x_1x_2$ - *кон'юнкція;*

$\varphi_6(x_1,x_2) = \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 = x_1 \oplus x_2$ - *логічне додавання;*

$\varphi_7(x_1,x_2) = x_1 \vee x_2$ - *диз'юнкція;*

$\varphi_8(x_1,x_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \downarrow x_2$ - *стрілка Пірса;*

$\varphi_9(x_1,x_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 = x_1 \equiv x_2$ - *еквівалентність*;

$\varphi_{13}(x_1,x_2) = \bar{x}_1 \vee x_2 = x_1 \to x_2$ - *імплікація*;

$$\varphi_{14}(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = x_1 | x_2 \text{ - } \textit{штрих Шеффера.}$$

Функції $\varphi_{10}(x_1, x_2) = \bar{x}_2$ та $\varphi_{12}(x_1, x_2) = \bar{x}_1$ – *заперечення*. Вони мають так звані фіктивні змінні.

Змінна x_i, називається *фіктивною*, якщо

$$f(x_1, \ldots x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots x_n) = f(x_1, \ldots x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots x_n)$$

при довільних значеннях решти змінних.

Функції сталі - $\varphi_0(x_1, x_2) = 0$ – *константа нуль,*

$\varphi_{15}(x_1, x_2) = 1$ – *константа одиниця.*

Крім того, функції привласнення значення однієї з змінних (також із фіктивними змінними) $\varphi_3(x_1, x_2) = x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 = x_1$, $\varphi_5(x_1, x_2) = \bar{x}_1x_2 \vee x_1x_2 = x_2$. І, нарешті, функції, що представляють собою різновиди імплікацій: $\varphi_{11}(x_1, x_2) = \bar{x}_2 \vee x_1 = x_1 \leftarrow x_2$ – права імплікація (читається "якщо x_2, то x_1"), $\varphi_2(x_1, x_2) = x_1\bar{x}_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee x_2} = \overline{x_1 \to x_2}$ – *ліва коімплікація* (читається "ні, якщо x_1, то x_2", префікс *ко* – від лат. conversus – обернений), $\varphi_4(x_1, x_2) = \bar{x}_1x_2 = \overline{x_1 \vee \bar{x}_2} = \overline{x_1 \leftarrow x_2}$ - *права коімплікація.*

З таблиці функцій двох змінних видно, що для усіх функцій має місце рівність $\varphi_k = \overline{\varphi_{15-k}}$, $k = \overline{0,15}$.

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_1 \wedge x_2 \vee x_3$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	0
0	0	1	1
1	1	0	0
0	1	0	1
1	0	0	0
0	0	0	1

Множину усіх булевих функцій n змінних двозначної алгебори логіки позначимо через $P_2(n)$. Логічна функція n змінних задається таблицею істинності, де усім можливим наборам значень аргументу співставляються значення функції. Наприклад: $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \wedge x_2 \vee x_3$ має таблицю істинності:

Кількість усіх функцій з $P_2(n)$ дорівнює 2^{2^n}. Отже, $|P_2(1)| = 4$, $|P_2(2)| = 16$, $|P_2(3)| = 256$, $|P_2(4)| = 65536$ і т.д.

6.3 Ізоморфізм алгебр. Теорема Стоуна.

Означення 6.11 Дві алгебри **A₁**=$\langle M_1, S_1 \rangle$ та **A₂**=$\langle M_2, S_2 \rangle$ називаються ізоморфними, якщо між носіями та сигнатурами встановлено взаємно однозначну відповідність η таку, що:

$$f_i(m_{a1}, m_{a2}, \ldots, m_{ak-1}) = m_{ak} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \eta(f_i)(\eta(m_{a1}), \eta(m_{a2}), \ldots, \eta(m_{ak-1})) = \eta(m_{ak})$$

де $m_{aj} \in M_1$, $\eta(m_{aj}) \in M_2$, $j = \overline{1,k}$, $f_i \in S_1$, $\eta(f_i) \in S_2$.

Теорема 6.2 (Стоуна). Алгебра висловлювань і алгебра Кантора є ізоморфними булевими алгебрами. Для цих алгебр має місце такий ізоморфізм:

$$x \vee y \leftrightarrow M_x \bigcup M_y,\ x \wedge y \leftrightarrow M_x \bigcap M_y,\ \bar{x} \leftrightarrow \overline{M}_x.$$

Доведення. Розглянемо множину V двійкових векторів $v = \{v_1, \ldots, v_n\} \in \{0,1\}^n$. На цій множині розглянемо такі операції:

диз'юнктивне додавання векторів $a + b = c$, тобто диз'юнктивною сумою є такий вектор c, координати якого одержуються в результаті покоординтаного додавання за правилами: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 1$;

множення, тобто добутком двох векторів $a \cdot b = c$ є такий вектор c, координати якого одержуються в результаті покоординтаного множення за правилами: $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$;

інверсія вектора $\bar{a} = c$ - це операція, в результаті якої всі нульові координати вектора a замінюються одиницями, а одиничні – нулями.

Неважко переконатись, що алгебра $\mathbf{A}=\langle V,+,\cdot,^{-}\rangle$ з носієм $V=\{0,1\}^n$ та сигнатурою, що складається з наведених операцій над двійковими векторами, є булевою алгеброю. Дійсно, алгебра має нульовий та одиничний вектори, при чому, для довільних векторів $a,b,c\in V$:

1) $a+0=a$, $a\cdot 0=0$, $a+1=1$, $a\cdot 1=a$;

2) комутативність: $a+b=b+a$,; $a\cdot b=b\cdot a$

3) асоціативність: $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$;

4) дистрибутивність: $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$,

$$a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c);$$

5) ідемпотентність: $a+a=a, a\cdot a=a$;

6) закон поглинання $a+(a\cdot b)=a$, $a\cdot(a+b)=a$;

7) $(a\cdot\overline{a})=0$; $(a+\overline{a})=1$; 8) закони де Моргана $\left.\begin{array}{l}\overline{a\cdot b}=\overline{a}+\overline{b}\\ \overline{a+b}=\overline{a}\cdot\overline{b}\end{array}\right\}$;

9) $\overline{\overline{a}}=a$.

Як видно з таблиці істинності для операцій алгебри висловлювань, що ця алгебра є ізоморфною побудованій алгебрі двійкових векторів, а саме: $x\vee y\leftrightarrow a+b$, $x\wedge y\leftrightarrow a\cdot b$, $\overline{x}\leftrightarrow\overline{a}$.

x	y	$x\wedge y$	$x\vee y$	$\overline{x}$
1	1	1	1	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
0	0	0	0	1
a	b	$a\cdot b$	$a+b$	$\overline{a}$

Аналогічно, якщо для множин з алгебри Кантора розглядати їхні двійкові представлення, то, очевидно, має місце така відповідність операцій: $a+b\leftrightarrow A\bigcup B$, $a\cdot b\leftrightarrow A\bigcap B$, $\overline{a}\leftrightarrow\overline{A}$.

Таким чином, алгебра Кантора і алгебра висловлювань є ізоморфні булевій алгебрі двійкових векторів, а отже, ізоморфні між собою.

$$\mathbf{K} = \left\langle B(U), \cap, \cup, {}^{-} \right\rangle \leftrightarrow \mathbf{B} = \left\langle \mathfrak{I}, \vee, \wedge, {}^{-} \right\rangle \leftrightarrow \mathbf{A} = \left\langle V, +, \cdot, {}^{-} \right\rangle . \nabla$$

Зауважимо, що операції симетричної різниці в алгебрі Кантора при описаному ізоморфізмі відповідає операція логічного додавання: $A_x \Delta B_y \leftrightarrow x \oplus y$.

Контрольні запитання

- Що називається висловлюванням?
- Як визначається операція диз'юнкції висловлювань?
- Як визначається операція кон'юнкції висловлювань?
- Як визначається операція заперечення висловлювань?
- Як визначається операція імплікації висловлювань?
- Як визначається операція логічного додавання?
- Як визначається операція штрих Шефера?
- Як визначається операція стрілка Пірса?
- Як визначається ізоморфізм алгебр?
- Як формулюється теорема Стоуна?
- Яким законам підкоряються операції перетину та об'єднання множин?
- Яким законам підкоряються операції різниці та доповнення множин?

Розділ III. Представлення елементів булевої алгебри. Мінімізація представлення.

Важливим питанням для вивчення булевих алгебр є питання про представлення їхніх єлементів. Так в алгебрі Кантора – це представлення довільної множини за допомогою операцій перетину, об'єднання і доповнення через певну фіксовану сукупність множин, що називається твірною. В алгебрі висловлювань це представлення булевих функцій від фіксованої кількості змінних через логічні змінні та операції кон'юнкції, диз'юнкції і заперечення. Для одного й того ж елемента булевої алгебри існують різні предсталення. Виникає потреба у відшуканні серед усіх представлень елементів булевої алгебри представлення найменшої складності (мінімальне представлення). Послідовність перетворень, що приводять до побудови мінімального представлення, називається стратегією перетворень.

§ 7. Нормальна форма представлення елементів булевої алгебри.

7.1 Конституенти та їхні властивості.

Розглянемо булеву алгебру $A = \left\langle M, \circ, *, ^{-} \right\rangle$. Нехай $\Omega = \{m_1, \ldots, m_n\}$ довільна система елементів носія алгебри M, які не співпадають між собою. Така система елементів називається породжуючою або *твірною* системою. Розглянемо питання про представлення довільного елемента булевої алгебри $A = \left\langle M, \circ, *, ^{-} \right\rangle$через елементи даної твірної системи Ω та її основні структурні операції.

Означення 7.1 Нехай $m_i \in \Omega$. Вираз $m_i^{\sigma_i} = \begin{cases} m_i, \sigma_i = 1 \\ \overline{m_i}, \sigma_i = 0 \end{cases} i = \overline{1, n}$

називається *первинним термом*.

Розглянемо множину усіх первинних термів даної твірної системи, яку позначимо $\tilde{\Omega} = \left\{ m_1^{\sigma_1}, \ldots, m_n^{\sigma_n} \right\}$.

Якщо зафіксовано твірну систему, то кожному набору первинних термів $m_1^{\sigma_1}, \ldots, m_n^{\sigma_n}$ відповідає один і тільки один двійковий вектор $\overline{\sigma} = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n \rangle, \quad \sigma_i = 0{,}1$.

Означення 7.2 Вираз $C_{\overline{\sigma}} = \mathop{*}\limits_{i=1}^{n} m_i^{\sigma_i} = m_1^{\sigma_1} * m_2^{\sigma_2} * \ldots * m_n^{\sigma_n}$, де $\overline{\sigma} = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n \rangle, \quad \sigma_i = 0{,}1$, називається *конституентою.*

Загальна кількість конституент не перевищує *2*^{n}. З кожною конституентою, $C_{\overline{\sigma}} = \mathop{*}\limits_{j=1}^{n} m_j^{\sigma_j}$, пов'язується двійковий вектор $\overline{\sigma} = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n \rangle, \quad \sigma_i = 0{,}1$. Якщо m_j входить як множник до складу конституенти $C_{\overline{\sigma}} = \mathop{*}\limits_{j=1}^{n} m_j^{\sigma_j}$, то відповідний йому індекс $\sigma_j = 1$, якщо ж $\overline{m_j}$ не входить як множник до складу конституенти, то відповідний йому індекс $\sigma_j = 0$. Вектор $\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n \rangle, \quad \sigma_i = 0{,}1$ називається *двійковим еквівалентом* конституенти $C_{\overline{\sigma}} = \mathop{*}\limits_{j=1}^{n} m_j^{\sigma_j}$, а число $d(C_{\overline{\sigma}}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i 2^{i-1}$ називається її *десятковим еквівалентом.*

Приклад 7.1. Нехай *n=2,* породжуюча система $\Omega = \{m_1, m_2\}$ така, що $\overline{m_1} = m_2$, тоді кількість конституент, які можна побудувати на відповідній системі первинних термів, дорівнює чотирьом, і вони мають вигляд:

$$C_1 = m_1^0 * m_2^0 = \overline{m_1} * \overline{m_2} = m_2 * \overline{m_2} = 0;$$

$$C_2 = m_1^0 * m_2^1 = \overline{m_1} * m_2 = m_2 \neq 0;$$

$$C_3 = m_1^1 * m_2^0 = m_1 * \overline{m_2} = m_1 * \overline{\overline{m_1}} = m_1 \neq 0;$$

$$C_4 = m_1^1 * m_2^1 = m_1 * m_2 = m_1 * \overline{m_1} = 0.$$

Перейдемо до розгляду властивостей конституент.

Лема 7.1 Нижня межа двох різних конституент є нуль.

Доведення. Якщо конституенти $C_{\overline{\sigma}} = \underset{i=1}{\overset{n}{*}} m_i^{\sigma_i}$, $C_{\overline{\sigma}^*} = \underset{i=1}{\overset{n}{*}} m_i^{\sigma_i^*}$ різні, то знайдеться такий номер *k*, що $\sigma_k = \sigma_k^*$, але тоді $m_k^{\sigma_k} * m_k^{\sigma_k^*} = 0$, звідки випливає $C_{\overline{\sigma}} * C_{\overline{\sigma}^*} = 0$.∇

Лема 7.**2** Верхня межа усіх конституент дорівнює носію алгебри *M***.**

Доведення. Множину *M* можна представити у такому вигляді $M = \underset{i=1}{\overset{n}{*}} \left(m_i^0 \circ m_i^1\right)$. Розкривши дужки в правій частині, одержимо верхню межу усіх конституент.∇

Лема 7.**3** Відображення $f\left(m_1,\ldots,m_n\right) = m_i$ дорівнює верхній межі конституент, кожна з яких містить m_i^1.

Доведення. Згідно з лемою 2, $M = C_0 \circ C_1 \circ \ldots \circ C_p = \underset{i=1}{\overset{p}{\circ}} C_i$, де C_i (*i=1,...,p*) – конституанти індексовані своїми десятковими еквівалентами. Розглядаючи нижні межы обох частин цього виразу з елементом m_i, одержимо: $m_i = \left(m_i * C_1\right) \circ \left(m_i * C_2\right) \circ \ldots \circ \left(m_i * C_p\right)$.∇

Якщо C_j містить m_i^1, то $C_j * m_i = C_j$. Якщо ж C_j містить m_i^0, то $C_j * \overline{m}_i = 0$. Отже, m_i є верхня межа тих конституент, що містять в собі m_i^1.

7.2 Нормальна форма представлення елементів булевої алгебри.

Теорема 7.1 Кожний ненульовий елемент булевої алгебри є верхньою гранню деякої кількості конституент, побудованих за даною твірною системою $\Omega = \left\{m_1,\ldots,m_n\right\}$.

Доведення. Згідно з лемою 7.3, твердження теореми випливає для елементів $m_1,\dots m_n$. Покажемо, що якщо довільні елементи представляються у вигляді верхньої грані деякої кількості конституент, то й $m_a \circ m_b$, $m_a * m_b$, $\overline{m_a}$, якщо вони не нульові, також представляються у вигляді верхньої грані конституент.

Нехай $m_a = \underset{i}{\circ} C_{ai}$, $m_b = \underset{k}{\circ} C_{bk}$, тоді

$$m_a \circ m_b = \left(\underset{i}{\circ} C_{ai} \right) \circ \left(\underset{k}{\circ} C_{bk} \right) = \underset{i,k}{\circ} \left(C_{ai} \circ C_{bk} \right)$$

$$m_a * m_b = \left(\underset{i}{\circ} C_{ai} \right) * \left(\underset{k}{\circ} C_{bk} \right) = \underset{i,k}{\circ} \left(C_{ai} * C_{bk} \right),$$

де, у випадку, коли $C_{a\alpha} \neq C_{b\beta}$, $C_{a\alpha} * C_{b\beta} = 0$, інакше $C_{a\alpha} = C_{b\beta}$. Отже, $m_a * m_b$ або дорівнює 0, або є верхньою гранню конституент.

Нарешті, покажемо, що $\overline{m_a}$ також представляється у вигляді верхньої грані конституент. Згідно з законом де Моргана одержимо:

$$\overline{m_a} = \overline{\underset{i}{\circ} C_{ai}} = \underset{i}{*} \overline{C_{ai}} = \underset{i}{*} \underset{j}{*} \overline{m_j^{\sigma_{ij}}} = \underset{i}{*} \underset{i}{\circ} \overline{m_j^{\sigma_{ij}}} .$$

Розкриваючи дужки і, враховуючи, що $m_p * \overline{m_p} = 0$, $m_p \circ \overline{m_p} = M$, одержимо представлення множини $\overline{m_a}$ у вигляді верхньої грані конституент. ∇

Теорема 7.2 Існує не більше ніж 2^{2^n} елементів булевої алгебри $A = \left\langle M, \circ, *, \overline{} \right\rangle$, які породжуються твірною системою $\Omega = \{ m_1, \dots, m_n \}$.

Доведення. Кожний елемент, породжуваний твірною системою $\Omega = \{ m_1, \dots, m_n \}$ згідно з теоремою 7.1, є верхньою гранню конституент, кількість яких не перевищує 2^n. Отже, кількість різних верхніх граней не перевищує 2^{2^n}. При цьому, якщо елементи твірної системи $\Omega = \{m_1, \ldots, m_n\}$ незалежні, тобто всі конституенти відмінні від нульового елемента, то кількість різних конституент дорівнює 2^n, а, отже, елементів алгебри (з урахуванням нульового), що можна утворити з цих конституент дорівнює 2^{2^n}. ∇

Нехай $\Omega = \{m_1, \ldots, m_n\}$ твірна система незалежних елементів**,** тоді довільний елемент m з $A = \langle M, \circ, *, \bar{\ } \rangle$ можна задати у вигляді деякої верхньої грані конституент: $m = \circ \mathop{*}\limits_{j=1}^{n} m_j^{\sigma_j}$.

Довільному елементу m з алгебри $A = \langle M, \circ, *, \bar{\ } \rangle$ можна співставити двійковий вектор довжиною 2^n, в якому i-тому розряду відповідає конституента з десятковим еквівалентом, що дорівнює i. Вектор $\langle v_1, \ldots, v_{2^n} \rangle$ визначається за правилом $v_i = 1$, якщо конституента з номером i входить до представлення $m = \circ \mathop{*}\limits_{j=1}^{n} m_j^{\sigma_j}$, і $v_i = 0$, якщо конституента з номером i не входить до представлення $m = \circ \mathop{*}\limits_{j=1}^{n} m_j^{\sigma_j}$. Вектору $\langle v_1, \ldots, v_{2^n} \rangle$, що визначає елемент m з $A = \langle M, \circ, *, \bar{\ } \rangle$відповідає десятковий еквівалент $d(m) = \sum_{i=0}^{2^n} v_i 2^i$. Отже, довільний елемент m з $A = \langle M, \circ, *, \bar{\ } \rangle$ визначається своїми двійковим або десятковим еквівалентами.

Відмітимо, що представлення елемента m з $A = \langle M, \circ, *, \bar{\ } \rangle$ взаємно однозначно визначається вектором $\langle v_1, \ldots, v_{2^n} \rangle \in \{0,1\}^{2^n}$, компоненти якого є значеннями булевої функції $f\left(\sigma_1^j, \ldots, \sigma_n^j\right) = v_j$, де $\langle \sigma_1^j, \ldots, \sigma_n^j \rangle$ двійковий еквівалент конституенти з десятковим номерм j.

Виходячи з цього представлення, елемнт з алгебри $A = \langle M, \circ, *, \bar{\ } \rangle$ визначається у вигляді двійкової таблиці, в рядках якої записуються двійкові еквіваленти конституент. Множина рядків таблиці впорядкована за зростанням десяткових еквівалентів конституент. В останньому стовпчику записується значення двійкового вектора $\langle v_1, \ldots, v_{2^n} \rangle$ довжини 2^n. Одиниця в цьому стовпчику вказує на те, що відповідна конституента входить до представлення даного елемента.

Представлення елемента у вигляді верхньої грані деякої кількості конституент називається *нормальною формою* (НФ) елемента булевої алгебри.

Для графічного зображення нормальної форми представлення елемента булевої алгебри використовується n-вимірний гіперкуб.

Означення 7.3 Гіперкубом називається граф *H,* кожна вершина якого взаємно однозначно відповідає певній конституенті, а ребра з’єднують ті вершини, двійковий код яких відрізняється лише в одному розряді. Приклад графічного зображення нормальної форми представлення елемента буде розглянуто нижче.

§ 8. Мінімізація представлення елемента булевої алгебри. Метод Квайна.

8.1 Мінімальна нормальна форма.

Означення 8.1 *Складністю* представлення елемента булевої алгебри називається кількість символів m_i та $\overline{m_i}$ у виразі, що визначає цей елемент.

Задача знаходження стратегії, що приводить до представлення елемента з булевої алгебри у вигляді з найменшою складністю називається задачею **мінімізації представлення.**

Одним з методів одержання **мінімальної нормальної форми** (МНФ) представлення для елементів з великою складністю є метод Квайна.

Означення 8.2 Елемент булевої алгебри, що є нижньою гранню попарно різних термів $*m_i^{\sigma_i}$ називається *елементарним.*

Означення 8.3 Представлення елемента булевої алгебри у вигляді верхньої грані різних елементарних елементів, називається **нормальною формою** (НФ) представлення. Якщо ж елемент булевої алгебри є верхньою гранню певної кількості конституент, то таке представлення цього елемента називається ***досконалою*** **нормальною формою** (ДНФ).

Означення 8.4 ***Мінімальною*** **нормальною формою** елемента алгебри називається нормальна форма цього елемента найменшої складності.

8.2 Метод Квайна.

Пошук мінімальної нормальної форми елемента алгебри методом Квайна розглянемо на прикладі. Розв'язання задачі методом Квайна полягає в послідовному виконанні певних кроків.

Приклад 8.1 Побудувати мінімальну нормальну форму для елемента булевої алгебри, що має десятковий еквівалент *d(M)*=19357.

1 крок. Побудова досконалої нормальної форми елемента булевої алгебри. Якщо десятковий еквівалент елемента алгебри дорівнює *d(M)*=19357, то його двійковим еквівалентом є вектор $\langle 0100101110011101 \rangle$. Скористаємось табличним представленням елемента алгебри, з якого видно, що складність розглядуваного елемента дорівнює 36. Досконалу НФ тут виписувати не будемо, бо вона досить громіздка, але рекомендуємо виписати її самостійно.

Для подальшого викладення нам потрібне буде, також, представлення множини за допомогою гіперкубу (Рис.13).

d(c)	m_1	m_2	m_3	m_4	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

2 крок. ***Виділення максимальних інтервалів на гіперкубі.***

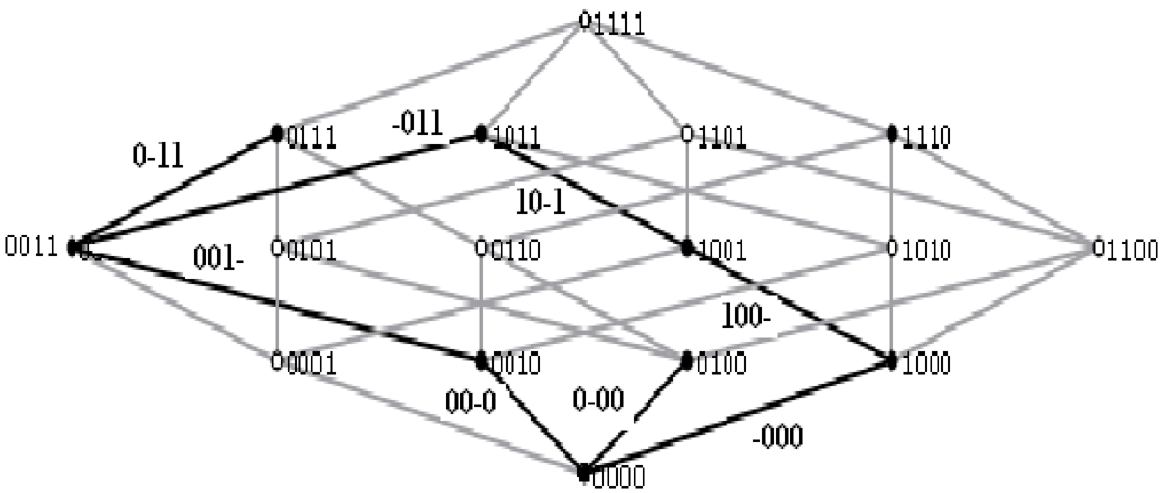


Рис. 13

Означення 8.5. Інтервалом на гіперкубі називається множина конституент представлення елемента булевої алгебри, яка утворює гіперкуб деякого порядку (розмірності). Очевидно, що інтервали можуть мати порядок, який дорівнює лише степеням двійки.

Означення 8.6 Інтервал називається максимальним, якщо не існує серед конституент представлення елемента булевої алгебри, інтервалу, в якому він міститься.

Множина інтервалів для даного прикладу має вигляд: {0000, 0010, 0011, 0100, 0111, 1000, 1001, 1011, 1110, -000, 0-00, 00-0, 001-, 100-, 0-11, -011, 10-1}. "-" в запису інтервалу означає, що терм, який відповідає цьому розряду в нижній грані, відсутній, тобто по ньому відбулося склеювання конституент. Наприклад, інтервал 0-00, одержується в результаті перетворення

$$\overline{m_1} * \overline{m_2} * \overline{m_3} * \overline{m_4} \circ \overline{m_1} * m_2 * \overline{m_3} * \overline{m_4} = \overline{m_1} * \overline{m_3} * \overline{m_4}\,.$$

В даному випадку є 9 максимальних інтервалів 1110, -000, 0-00, 00-0, 001, 100-, 0-11, -011,10-1, кожен з яких, крім першого, утворює гіперкуб першого порядку (ребро).

Означення 8.7 Нижня межа $*\,m_i^{\sigma_i}$, що відповідає максимальному інтервалу елемента булевої алгебри, називається ***простою імплікантою*** цього елемента.

Означення 8.8 Верхня межа простих імплікант елемента алгебри, називається **скороченою нормальною формою** (СНФ) цього елемента.

Побудовою скороченої нормальної форми закінчується другий крок методу Квайна. Отримана СНФ елемента булевої алгебри має складність 28.

Означення 8.9 Тупіковою нормальною формою представлення елемента булевої алгебри називається така нормальна форма цього елемента, яка при викреслюванні хоча б одного первинного терму не визначає даного елемента булевої алгебри.

Має місце такий факт.

Теорема 8.1 Мінімальна нормальна форма міститься в тупіковій нормальній формі, яка належить до скороченої нормальної форми представлення цього елемента.

Означення 8.10 Покриттям стовпчиків рядками в двохвимірній таблиці називається така множина рядків, в якій для кожного стовпчика знайдеться хоча б один рядок з цієї множини, на перетині з яким стовпчик має одиницю, причому, при викреслювані хоча б одного елемента з цієї множини рядків, описана властивість не має місця.

3 крок. *Побудова покриття таблиці Квайна.*

Таблиця Квайна - двохвимірна таблиця, кожному рядку якої взаємно однозначно відповідає максимальний інтервал, а стовпчику - конституента. На перетині *i*-того рядка з *j*-тим стовпчиком знаходиться одиниця, якщо *j*-та конституента входить до *i*-того максимального інтервалу, в іншому випадку клітину (*i,j*) не заповнюють або вписують у неї 0.

Означення 8.11 Максимальний інтервал називається ***обов'язковим,*** якщо існує конституента, яка належить тільки йому.

Множина обов'язкових інтервалів утворює ***ядро покриття.***

Для нашого прикладу таблиця Квайна має вигляд:

Макс.	Конституента								
інтерв.	0000	0010	0011	0100	0111	1000	1001	1011	1110	
-000	1					1				a
0-00	1			1						b
00-0	1	1								c
001-		1	1							d
100-						1	1			e
0-11			1		1					f
-011			1					1		g
10-1							1	1		h
1110									1	k

У даному випадку ядром покриття є множина інтервалів {0-00, 0-11, 1110}, яка покриває 1, 3, 4, 5, 9-ий стовпчики. Для утворення покриття усієї таблиці є декілька варіантів. Наприклад, до ядра можна додати множину інтервалв {001-, 100-, 10-1}. У результаті одержимо покриття {0-00, 0-11, 1110, 001-, 100-, 10-1}. Воно дає мінімальну нормальну форму представлення зі складністю 19. Як видно таке покриття не єдине. Мінімальні нормальні форми знаходять, перебираючи всі покриття.

8.3 Метод Петрика знаходження усіх мінімальних форм представлення елемента булевої алгебри.

Перебирання покриттів таблиці Квайна здійснюють за допомогою перетворення мультиплікативно-адитивної форми в адитивно-мультиплікативну форму. Розглянемо це на даному прикладі. Присвоїмо рядкам таблиці Квайна назви у вигляді літер латинського алфавіту (останній стовпчик таблиці Квайна). Випишимо множину рядків, що покривають *j*-тий стовпчик:

$$j=1,\ A_1=\{a,b,c\};\ j=2,\ A_2=\{c,d\};\ j=3,\ A_3=\{d,f,g\};$$
$$j=4,\ A_4=\{b\};\ j=5,\ A_5=\{f\};\ j=6,\ A_6=\{a,e\};$$
$$j=7,\ A_7=\{e,h\};\ j=8,\ A_8=\{g,h\};\ j=9,\ A_9=\{k\}.$$

Якщо кожну множину A_i представити у вигляді об'єднання її елементів та знайти перетин всіх множин A_i, то кожний перетин в одержаній адитивній формі відповідатиме покриттю, а кількість всіх покрить дорівнює кількості різних перетинів в одержаній адитивно-мультиплікативній формі. Отже, маємо:

$$\bigcap_i A_i=(a\cup b\cup c)\cap(c\cup d)\cap(d\cup f\cup g)\cap$$
$$\cap b\cap f\cap(a\cup e)\cap(e\cup h)\cap(g\cup h)\cap k=$$
$$=b\cap f\cap k\cap(c\cup d)\cap(a\cup e)\cap(e\cup h)\cap(g\cup h)=$$
$$=b\cap f\cap k\cap(c\cup d)\cap(a\cap h\cup e\cap g\cup e\cap h)=$$
$$=(a\cap b\cap c\cap f\cap h\cap k)\ \cup\ (e\cap b\cap c\cap f\cap g\cap k)\cup$$
$$\cup\ (e\cap b\cap c\cap f\cap h\cap k)\ \cup\ (a\cap b\cap d\cap f\cap h\cap k)\ \cup$$
$$\cup\ (e\cap b\cap d\cap f\cap g\cap k)\ \cup\ (e\cap b\cap d\cap f\cap h\cap k).$$

Отримані перетини породжують шість покриттів, кожне з яких відповідає мінімальній нормальній формі. Серед цих покриттів знаходиться і те, що ми виписували вище: {0-00, 0-11, 1110, 001-, 100-, 10-1}. Воно відповідає перетину $b \cap f \cap k \cap d \cap e \cap h$. Отже, розв'язок поставленої задачі можна представити у вигляді:

$$m = \overline{m_1} * \overline{m_3} * \overline{m_4} \circ \overline{m_1} * m_3 * m_4 \circ m_1 * m_2 * m_3 * \overline{m_4} \circ$$
$$\circ \overline{m_1} * \overline{m_2} * m_3 \circ m_1 * \overline{m_2} * \overline{m_3} \circ m_1 * \overline{m_2} * m_4.$$

Спрощення представлення елемента алгебри можна продовжувати й далі, але за межами класу нормальних форм представлення.

Контрольні запитання

- Що називається первинним термом?
- Що називається конституентою?
- Які є властивості конституент?
- Як формулюється теорема про нормальне представлення?
- Що таке скорочена нормальна форма?
- Що таке тупікова нормальна форма?
- Як елемент булевої алгебри зобразити на гіперкубі?
- Як формулюється задача про мінімізацію представлення?
- У чому полягає метод мінімізації Квайна?
- Що таке покриття таблиці Квайна?

§ 9. Реалізації представлень в алгебрі Кантора та алгебрі висловлювань.

Розглянемо приклади наведеної теорії представлення елементів булевої алгебри у відомих реалізаціях булевих алгебр, а саме: булевій алгебрі висловлювань та алгебрі Кантора.

Враховуючи ізоморфізм булевої алгебри висловлювань та алгебри Кантора (теорема Стоуна), наведений метод Квайна застосовується як для спрощення представлення множини в алгебрі Кантора, так і для спрощення булевих функцій.

Представлення булевої функції у вигляді диз'юнкції конституент логічних термів називається **диз'юнктивно-кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ).**

Представлення множини, заданої десятковим еквівалентом, у вигляді об'єднання конституент називається **нормальною формою Кантора** (НФК).

9.1 Алгебра Кантора.

Для алгебри Кантора є можливість зображення конституент на діаграмах Венна (якщо кількість множин породжуючої системи невелика). Розглянемо простір, що породжується системою твірних з трьох множин $\{A, B, C\}$.

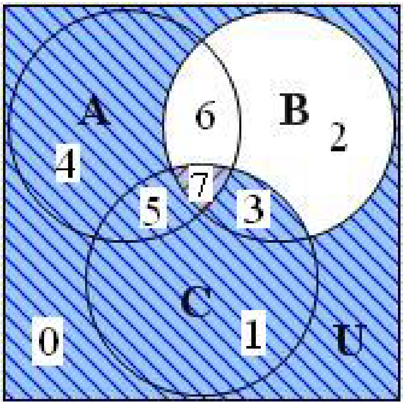


Рис. 14

Побудуємо представлення множини M із десятковим еквівалентом $d(M) = 187$. Так як $187=1\cdot2^7+0\cdot2^6+1\cdot2^5+1\cdot2^4+1\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0$, то множина M має двійковий еквівалент (1,0,1,1,1,0,1,1), який визначає включення конституент до складу множини M. Множину M у даному випадку можна зобразити не на гіперкубі, а явно за допомогою кругів Ейлера (рис.14) (позначено штриховкою).

d	A	B	C	M
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

9.2 Булева алгебра висловлювань.

Об’єктом представлення є булева функція n змінних. На відміну від алгебри Кантора для булевих функцій має місце більш загальне представлення у диз’юнктивно-конюнктивній нормальній формі, а саме, так званий розклад Шеннона.

Теорема 9.1 Будь-яку булеву функцію $f(x_1,\ldots,x_n)$ можна представити у вигляді розкладу Шеннона:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\underset{\forall(\sigma_1,\cdots,\sigma_k)}{\vee}\left(\underset{j=1}{\overset{k}{\wedge}} x_j^{\sigma_j}\right)\wedge f(\sigma_1,\ldots\sigma_k,x_{k+1},\ldots x_n),$$

де $\sigma_j \in \{0,1\}$, $x_j^{\sigma_j} = \begin{cases} x_j, & \sigma_j = 1 \\ \bar{x}_j, & \sigma_j = 0 \end{cases} \quad j=1,\ldots,k$.

Доведення: Довільна булава функція приймає одне зі значень 0 або 1. Первинний терм $x_j^{\sigma_j} = \begin{cases} x_j, & \sigma_j = 1 \\ \bar{x}_j, & \sigma_j = 0 \end{cases} \quad j=1,\ldots,k$.

Неважко перевірити, що $x_j^{\sigma_j} = 1 \leftrightarrow x_j = \sigma_j$. Цей факт є очевидним (дивись таблицю).

x_j	σ_j	$x_j^{\sigma_j}$
0	0	$\bar{0}=1$
0	1	0
1	0	$\bar{1}=0$
1	1	1

Підставимо в обидві частини формули, що доводиться, довільним чином замість перших k змінних їхні значення: $(x_1,\ldots x_k)=(\sigma_1^*,\ldots\sigma_k^*)$. Тоді ліва частина формули, дорівнює $f(\sigma_1^*,\ldots,\sigma_k^*,x_{k+1},\ldots,x_n)$. Права частина формули являє собою диз’юнкцію вигляду $x_1^{\sigma_1}\wedge\ldots\wedge x_k^{\sigma_k}\wedge f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,x_{k+1},\ldots,x_n)$, які цією підстановкою розіб'ються на два класи. До першого класу відноситься кон'юнкція, для якої $(\sigma_1,\ldots\sigma_k)=(\sigma_1^*,\ldots\sigma_k^*)$, при цьому вона дорівнюватиме

$$\left(\sigma_1^*\right)^{\sigma_1^*}\wedge\ldots\wedge\left(\sigma_k^*\right)^{\sigma_k^*}\wedge f\left(\sigma_1^*,\ldots,\sigma_k^*,x_{k+1},\ldots,x_n\right)= f\left(\sigma_1^*,\ldots,\sigma_k^*,x_{k+1},\ldots,x_n\right),$$

а, отже, лівій частині формули. До другого класу відноситься 2^k-1 кон'юнкцій, у кожної з яких хоча б для однієї змінної x_i, $\sigma_i^*\neq\sigma_i$. Отже, кожна з таких конституент дорівнює нулю. Таким чином, враховуючи ідемпотентність операції кон'юнкції, одержимо рівність лівої і правої частин розкладу при будь-якій підстановці змінних $(x_1,\ldots x_k)$. ∇

Наслідок 9.1 Граничний розклад Шеннона *(k = n)* булевої функції $f(x_1,\ldots,x_n)$, яка не дорівнює 0, має вигляд

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee_{\substack{\forall(\sigma_1,\cdots,\sigma_n),\\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}}\left(\bigwedge_{j=1}^{n}x_j^{\sigma_j}\right).$$

Граничний розклад Шеннона булевої функції $f(x_1,\ldots,x_n)$ називається її ***досконалою диз'юнктивно-кон'юнктивною нормальною формою*** (ДДКНФ).

Згідно з принципом двоїстості, маємо двоїстий розклад Шеннона булевої *функції* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *по k змінним*

$$\bar f(x_1,\ldots,x_n)=\bigwedge_{\forall(\sigma_1,\cdots,\sigma_k)}\left(\bigvee_{j=1}^{k}\overline{x_j^{\sigma_j}}\right)\vee\bar f(\sigma_1,\ldots\sigma_k,x_{k+1},\ldots x_n)$$

та *двоїстий граничний розклад*

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\bigwedge_{\substack{\forall(\sigma_1,\cdots,\sigma_n),\\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=0}}\left(\bigvee_{j=1}^{n}\overline{x_j^{\sigma_j}}\right).$$

Двоїстий граничний розклад Шеннона булевої функції $f(x_1,\ldots,x_n)$ називається її ***досконалою кон'юнктивно-диз'юнктивною нормальною формою*** (ДКДНФ).

Булеву функцію $f(x_1,\dots,x_n)$ зручно зображати на гіперкубі, кожній вершині якого взаємно однозначно відповідає двійковий вектор $\langle \sigma_1,\dots,\sigma_n \rangle$ значень аргументів. Вершини упорядковані по ярусах за кількістю одиниць у двійковому векторі.

Вершини, в яких $f(x_1,\dots,x_n)$ = 1 і які, в свою чергу, утворюють гіперкуб, породжують *одиничний інтервал* цієї функції. Одиничний інтервал I_a булевої функції *f* називається *максимальним,* якщо не знайдеться одиничного інтервалу I_b, що включає I_a. Множина вершин гіперкуба, на яких функція дорівнює 0 і які утворюють гіперкуб, називається *нульовим інтервалом.*

При фіксованому порядку змінних та впорядкованості двійкових кодів конституент за зростанням десяткових еквівалентів, таблиці істинності функцій з однаковою кількістю змінних відрізняються лише останнім стовпчиком. Тому можна булеві функції задавати скорочено, виписуванням одиничного інтервалу функції. Розглянемо приклад визначення булевої функції трьох змінних $f(x_1,x_2,x_3)\big|_1 = \vee(0,1,2,3,7)$. Такий спосіб визначення булевої функції означає, що на конституентах з десятковими еквівалентами 0,1,2,3,7 функція приймає значення 1, а на усіх інших - значення 0. Тобто дану функцію можна визначити таблицею істинності:

Десятковий еквівалент	x_1	x_2	x_2	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

У даному прикладі одиничними інтервалами є множини вершин: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{7\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 7\}$, $\{0, 1, 2, 3\}$, а максимальними интервалами - $\{0,1, 2, 3\}$, $\{3, 7\}$.

Кон'юнкція, що відповідає максимальному одиничному інтервалу, функції, *називається простою* імплікантою цієї функції: $\{0,1,2,3\} \leftrightarrow x_1$, $\{3,7\} \leftrightarrow x_1 x_2$.

Будемо задавати одиничний інтервал перерахуванням вершин, а також за допомогою послідовності символів 0, 1 - , де риска означає відсутність у кон'юнкції відповідної змінної: $\{0,1,2,3\} \leftrightarrow 0--$, $\{3,7\} \leftrightarrow -11$.

Контрольні запитання

- Що називається диз’юнктивно-кон’юнктивною формою представлення булевої функції?
- Що називається простою імплікантою?
- Що називається нормальною формою Кантора представлення множини?
- Як визначається двійковий код елемента булевої?
- Як визначається десятковий код булевої?
- Як формулюється теорема Шеннона?
- Як визначається граничний розклад Шеннона?

9.3 Слабко визначені булеві функції та їх мінімізація

Велике значення для практичних застосувань мають *слабко визначені* булеві функції.

Означення 9.1 Булева функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ називається слабко визначеною, якщо виконуються наступні умови: 1) кількість змінних *n* велика; 2) потужність об'єднання одиничної V_1 і нульової V_0 областей набагато менше, ніж 2^n, де одиничну і нульову області утворюють вершини, в яких функція дорівнює відповідно 1 і 0; 3) одинична і нульова області задаються відповідними інтервалами.

Скорочену ДНФ слабко визначених функцій будують за допомогою таблиць розходжень.

Означення 9.2 *Таблицею розходжень* називається двохвимірна таблиця розміру $n \times |V_0|$, кожному рядку якої взаємно однозначно відповідає розряд розглядуваного одиничного інтервалу, стовпчику - нульовий інтервал, а на перетині *i*-го рядка з *j*-м стовпчиком знаходиться результат операції:

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 1 \oplus 0 = 1, \quad - \oplus 0 = 0,$$
$$0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0, \quad - \oplus 1 = 0,$$
$$0 \oplus - = 0, \quad 1 \oplus - = 0, \quad - \oplus - = 0,$$

причому першим доданком береться значення *i*-го розряду одиничного інтервалу, а другим - значення *i*-го розряду нульового інтервалу, що відповідає *j*-му стовпчику.

Виділення максимальних інтервалів зводиться до покриття стовпчиків рядками таблиці розходжень. Справді, максимальні інтервали в слабко визначених функціях складаються з вершин одиничної і недовизначеної областей. Одиниця в клітині (*i, j*) таблиці розходжень показує, що якщо залишити *i*-й розряд у кон'юнкції, то *j*-й нульовий інтервал не входить у гіперкуб, що відповідає цій кон'юнкції. Отже, покриття стовпчиків рядками породжує максимальний інтервал аналізованої слабко визначеної булевої функції.

Приклад 9.**1.** Розглянемо представлення мінімальної ДНФ булевої функції

$$f(x_1,\ldots,x_5)=\begin{cases}1 & 0-110,\ 01-10,\ -1001\\ 0 & -1000,\ 1-010,\ 0001-\end{cases}$$

або функції, заданої за допомогою десяткових еквівалентів мінімальних і максимальних елементів відповідних інтервалів, що утворюються в результаті підстановки нульового 00...0 й одиничного 11...1 коду замість прочерків

$$f(x_1,\ldots,x_5)=\begin{cases}1 & (6,14),(10,14),(9,25)\\ 0 & (8,24),(18,26),(2,3)\end{cases}.$$

Виділимо множину максимальних інтервалів $\{I_{\text{макс}}\}$, які містять одиничний інтервал (6,14), по таблиці розходжень (табл.1), в якій рядки ідентифіковані літерами *a, b, c, d, e,* .

Покриття цієї таблиці утворюється рядком *c*. Максимальний інтервал цього покриття - - 1 - - або (4, 31). Йому відповідає проста імпліканта x_3.

Таблиця1

Одиничний інтервал (6,14)		Нульові інтервали (8, 24) -1000	(18,26) 1-010	(2,3) 0001-	
a	0	0	1	0	x_1
b	-	0	0	0	x_2
c	1	1	1	1	x_3
d	1	1	0	0	x_4
e	0	0	0	0	x_5

Аналогічно будуються таблиці розходжень для інших двох одиничних інтервалів.

Одиничний інтервал (10,14)		Нульові інтервали (8, 24) -1000	(18,26) 1-010	(2,3) 0001-	
a	0	0	1	0	x_1
b	1	0	0	1	x_2
c	-	0	0	0	x_3
d	1	1	0	0	x_4
e	0	0	0	0	x_5

Покриття цієї таблиці утворюється рядками *a*, *b* та *d*. Максимальний інтервал цього покриття 0 1 -1 - або (10, 15). Йому відповідає проста імпліканта $\overline{x}_1 x_2 x_4$.

Одиничний інтервал (9,25)		Нульові інтервали (8, 24) -1000	(18,26) 1-010	(2,3) 0001-	
a	-	0	0	0	x_1
b	1	0	0	1	x_2
c	0	0	0	0	x_3
d	0	0	1	1	x_4
e	1	1	1	0	x_5

Існує два покриття цієї таблиці рядками *b, e* та *d, e*. Інтервали відповідні цим покриттям: -1 - -1 або (9,31) та - - -01 або (1,29). Проста імпліканта, що відповідає інтервалу (9,31), має вигляд $x_2 x_5$, а імпліканта, що відповідає інтервалу (1,29) - $\bar{x}_4 x_5$.

Диз'юнкція всіх простих імплікант булевої функції називається *скороченою* ДНФ цієї функції. У результаті отримано скорочену ДНФ булевої функції $\tilde{f}(x_1,\ldots,x_5)$, що є вже цілком визначеною.

Одинична область $\tilde{V}_1$ функції $\tilde{f}$ містить одиничну область V_1 функції *f*, $\tilde{V}_1 \supset V_1$, нульова область $\tilde{V}_0$ функції $\tilde{f}$ - нульову область V_0 функції *f*, $\tilde{V}_0 \supset V_0$: $\tilde{f}(x_1,\ldots,x_5) = x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_2 x_5 \vee \bar{x}_4 x_5$.

На наступних гіперкубах і наведено зображення початкової функції $f(x_1,\ldots,x_5)$ (рис.15) та функції $\tilde{f}(x_1,\ldots,x_5)$ (рис.16). Зафарбовані чорним вершини п'ятивимірного гіперкубу – це одинична область $f(x_1,\ldots,x_5)$. Зафарбовані сірим вершини – це нульова область $f(x_1,\ldots,x_5)$. Виділення максимальних інтервалів, побудова скороченої ДНФ функції *f*- перший етап мінімізації в класі ДНФ. Другим етапом є перехід від скороченої ДНФ функції *f* до тупікової ДНФ цієї функції. *Тупіковою* ДНФ *булевої функції* $f(x_1,\ldots,x_n)$ називається ДНФ, що не визначає функцію *f* з точністю до невизначеної області при викреслюванні хоча б одного довільного первинного терма $x_i^{\sigma_i}$.

Тупікова ДНФ булевої функції утворюється в результаті покриття стовпчиків рядками імплікантної таблиці (двовимірної таблиці, кожному рядку якої взаємно однозначно відповідає максимальний інтервал, стовпчику - одиничний інтервал, а на перетині *i*-го рядка з *j*-м стовпчиком знаходиться 1, якщо *j*-й одиничний інтервал входить у *i*-й максимальний інтервал, у супротивному випадку на перетині знаходиться 0).

Побудуємо для аналізованого прикладу імплікантну таблицю. Взагалі краще будувати таблицю Квайна і знаходити її покриття, але це більш трудомістка робота.

Таблиця має два покриття, які утворюються першими двома рядками та одним з двох останніх рядків. Ці покриття породжують дві тупикові ДНФ функції:

$$\tilde{f}(x_1,\ldots,x_5) = x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_2 x_5,\ \tilde{f}(x_1,\ldots,x_5) = x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee \bar{x}_4 x_5.$$

Максимальні одиничні інтервали	Одиничні інтервали функції f		
	(6, 14) 0-110	(10, 14) 01-10	(9, 25) - 1001
(4, 31) - - 1 - -	1	1	1
(10, 15) 01-1-	0	1	0
(9, 31) - 1 - - 1	0	1	1
(1, 29) - - -01	1	1	1

Теоретично кількість тупікових ДНФ булевої функції $f(x_1,\ldots,x_n)$ при $n \to \infty$ росте як число всіх різноманітних булевих функцій від n змінних 2^{2^n}. Практично ж кількість тупикових ДНФ збільшується значно повільніше, ніж 2^{2^n}, через велику кількість невідомих вершин гіперкуба. Перебір усіх тупикових ДНФ булевої функції f визначає вибір мінімальної ДНФ цієї функції.

У аналізованому прикладі тупикових ДНФ дві. Складність кожної з них дорівнює 6, отже, кожну з них можна взяти за мінімальну. Булева функція, яку отримано з функції $f(x_1,\ldots,x_n)$ фіксуванням i-ї змінної, $i \in$ {l, 2,...,n}, називається *залишковою.* Якщо x_i=1, то залишкова функція називається *одиничною,* якщо $x_i = 0$ - *нульовою.* Булева функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ *несуттєво* залежить від i-ї змінної, якщо її залишкові функції по цій змінній рівні.

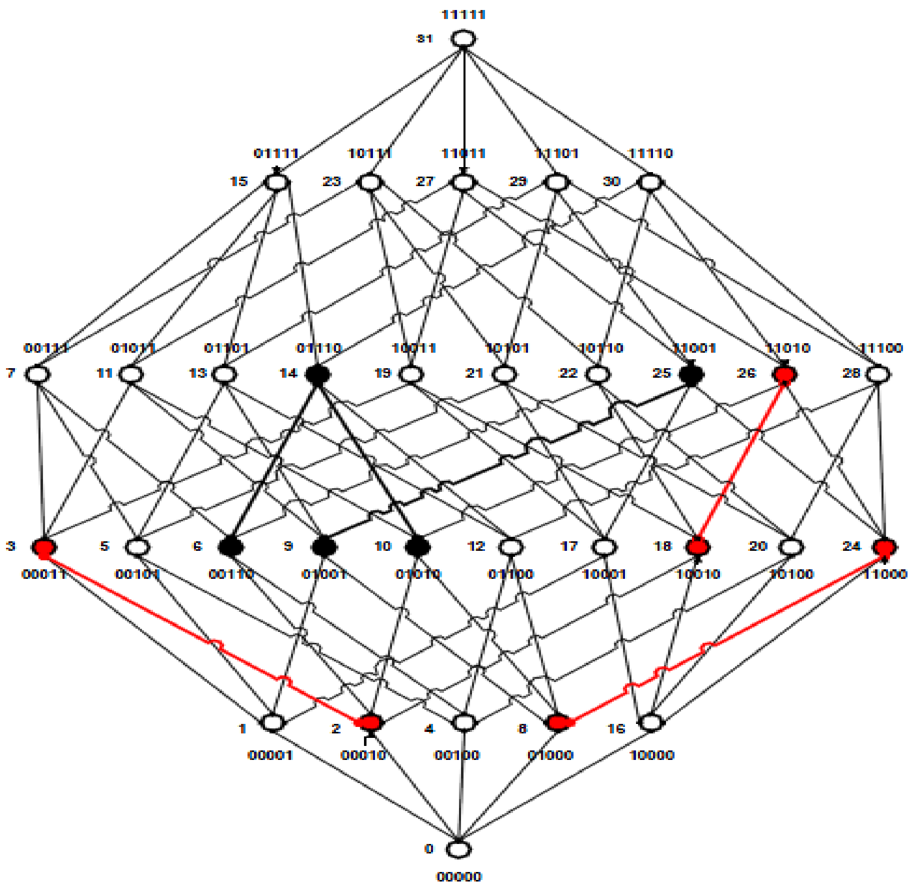

11111
31
01111 10111 11011 11101 11110
15 23 27 29 30
00111 01011 01101 01110 10011 10101 10110 11001 11010 11100
7 11 13 14 19 21 22 25 26 28
3 5 6 9 10 12 17 18 20 24
00011 00101 00110 01001 01010 01100 10001 10010 10100 11000
1 2 4 8 16
00001 00010 00100 01000 10000
0
00000

Рис. 15

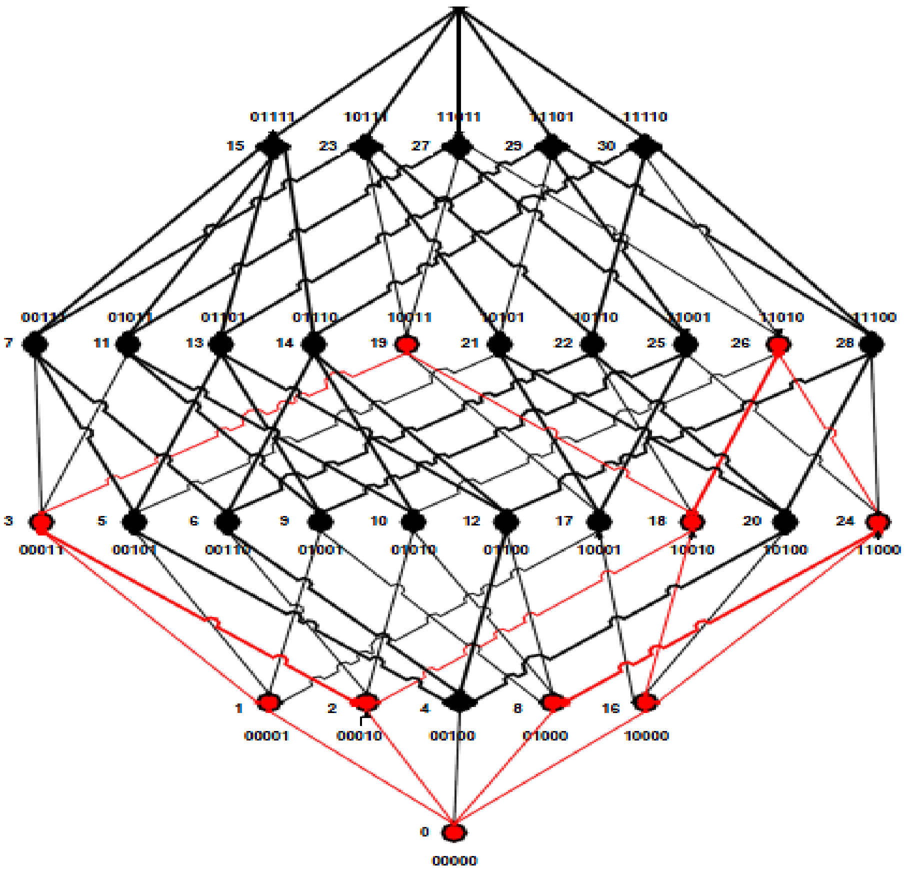

01111 10111 11011 11101 11110
15 23 27 29 30
00111 01011 01101 01110 10011 10101 10110 11001 11010 11100
7 11 13 14 19 21 22 25 26 28
3 5 6 9 10 12 17 18 20 24
00011 00101 00110 01001 01010 01100 10001 10010 10100 11000
1 2 4 8 16
00001 00010 00100 01000 10000
0
00000

Рис. 16

§ 10. Властивості булевих функцій

10.1 Повнота систем булевих функцій

Як відомо, кожне складне висловлювання можна дістати з простих шляхом операцій кон'юнкцій, диз'юнкцій, заперечення. Розглянемо можливість подання будь-якої булевої функції у вигляді суперпозиції функцій деякої фіксованої системи S.

Означення 10.1 Нехай S система булевих функцій, $S = \{\varphi_1(x_1,\dots x_n), \varphi_2(x_1,\dots x_n), \dots, \varphi_m(x_1,\dots x_n)\}$. Суперпозицією функцій цієї системи називають будь-яку функцію f, яка утворюється:

1) з $\varphi_j(x_1,\dots x_n)$ перейменуванням змінних;

2) заміною деяких змінних функції $\varphi_j(x_1,\dots x_n)$ функціями з системи *S*.

Означення 10.2 Систему *S* називають повною, якщо будь-яку булеву функцію *f*, можна визначити як суперпозицію функцій цієї системи, і базисом, якщо повнота *S* втрачається при видаленні з неї хоча б однієї з функцій.

Означення 10.3 Довільна сукупність функцій алгебри логіки, замкнена відносно суперпозиції, називається функціонально замкнутим класом булевих функцій

Визначимо наступні п'ять класів булевих функцій.

Означення 10.4 Класом K_0 булевих функцій $f(x_1,\dots,x_n)$, які зберігають константу 0, називають множину всіх функцій вигляду $K_0 = \{f(x_1,\dots,x_n) : f(0,\dots,0) = 0\}$.

Означення 10.5 Класом K_1 булевих функцій $f(x_1,\dots,x_n)$, які зберігають константу 1, називають множину всіх функцій вигляду $K_1 = \{f(x_1,\dots,x_n) : f(1,\dots,1) = 1\}$.

Означення 10.6 Класом лінійних булевих функцій називають множину всіх функцій вигляду:

$$K_л = \left\{ f(x_1,\ldots,x_n):\ f(x_1,\ldots,x_n) = c_0 \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{n} c_j x_j \right) \right\} c_j = 0{,}1, \quad j = \overline{0,n}$$

Означення 10 .7 Класом самоспряжених (самодвоїстих) булевих функцій $f(x_1,\ldots,x_n)$ називають множину усіх булевих функцій вигляду : $K_c = \left\{ f(x_1,\ldots,x_n):\ f(x_1,\ldots,x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n) \right\}$.

На множині двійкових векторів довжини n введемо такий порядок: $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \le (\sigma_1^*,\ldots,\sigma_n^*) \Leftrightarrow \sigma_k^* \ge \sigma_k, \quad k = \overline{1,n}$

Означення 10.8 Класом монотонних булевих функцій $f(x_1,\ldots,x_n)$ називають множину усіх булевих функцій вигляду

$$K_м = \left\{ f(x_1,\ldots,x_n): (\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \le (\sigma_1^*,\ldots,\sigma_n^*) \Rightarrow \right.$$
$$\left. \Rightarrow f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \le f(\sigma_1^*,\ldots,\sigma_n^*) \right\}$$

Теорема 10.1 (Поста). Класи $K_0, K_1, K_л, K_c, K_м$ - замкнені.

Доведення. Розглянемо доведення для одного з п’яти класів, наприклад, для класу лінійних функцій.

Нехай $f_0, f_1, f_2 \in K_л$. Розглянемо функцію, що є композицією f_1, f_2 $\Phi = f_0\left(f_1(x_1,\ldots,x_n), f_1(x_1,\ldots,x_n) \right)$.

Так як $f_j = C_0^j \oplus C_1^j x_1 \oplus \ldots \oplus C_n^j x_n, \quad j = 0{,}1{,}2$, то

$$\Phi = C_0^0 \oplus C_1^0 \left(C_0^1 \oplus C_1^1 x_1 \oplus \ldots \oplus C_n^1 x_n \right) \oplus C_2^0 \left(C_0^2 \oplus C_1^2 x_1 \oplus \ldots \oplus C_n^2 x_n \right) =$$
$$= D_0 \oplus D_1 x_1 \oplus \ldots \oplus D_n x_n,$$

де $D_0 = C_0^0 \oplus C_1^0 C_0^1 \oplus C_2^0 C_0^2$, $D_j = C_1^0 C_j^1 \oplus C_2^0 C_j^2$.

Отже, Φ – є лінійною функцією. ∇

Аналогічно доводиться замкненість інших класів.

Теорема 10.2 Критерій повноти

Система S булевих функцій є повною тоді і тільки тоді, коли вона не належить цілком ні одному з п’яти замкнених класів булевих функцій $K_0, K_1, K_л, K_c, K_м$.

Застосування критерію повноти розглянемо на прикладі.

Приклад 10.1 Перевірити повноту системи S=$\{\vee, \Leftrightarrow, 0\}$.

Перевіримо виконання умов критерію повноти для даної системи булевих функцій і результат перевірки занесемо у таблицю, що називається таблицею Поста. Таблицю Поста будують таким чином: рядкам відповідають функції системи; стовпчикам п'ять вище наведених функціонально замкнених класів; у клітинках таблиці записуємо 1, якщо функція належить замкненому класу, і - нуль, якщо ні. Система є повною, якщо в кожному рядку таблиці Поста є хоча б один нуль. Перейдемо до обчислень.

1) $1 \vee 1 = 1$, $1 \Leftrightarrow 1 = 1$, $0(1) = 0$. 2) $0 \vee 0 = 0$, $0 \Leftrightarrow 0 = 1$, $0(0) = 0$.

1) Нехай $x \vee y = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y$, тобто є лінійною. Тоді:

$$0 \vee 0 = c_0 \oplus c_1 0 \oplus c_2 0 \to c_0 = 0,$$

$$0 \vee 1 = c_1 0 \oplus c_2 1 \to c_2 = 1,$$

$$1 \vee 0 = c_1 1 \oplus c_2 0 \to c_1 = 1.$$

Отже, $x \vee y = x \oplus y$, що не є вірною рівність, бо $1 \vee 1 \neq 1 \oplus 1$. Таким чином, диз'юнкція не є лінійною функцією.

Аналогічно перевіряємо функцію $\Leftrightarrow$. Нехай $x \Leftrightarrow y = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y$, тобто є лінійною. Тоді:

$$1 = 0 \vee 0 = c_0 \oplus c_1 0 \oplus c_2 0 \to c_0 = 1,$$

$$0 \Leftrightarrow 1 = 1 \oplus c_1 0 \oplus c_2 1 \to 1 \oplus c_2 = 0 \to c_2 = 1,$$

$$1 \Leftrightarrow 0 = 1 \oplus c_1 1 \oplus c_2 0 \to 1 \oplus c_1 = 0 \to c_1 = 1.$$

Отже, $x \Leftrightarrow y = 1 \oplus x \oplus y$. Залишилось перевірити цю рівність для одиничних значень змінних, тобто $1 \Leftrightarrow 1 = 1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$. Таким чином, еквівалентність є лінійною функцією. Зрозуміло, що константа 0 також є лінійною функцією.

4) Самоспряженість функції перевіряється таким чином. Якщо в таблиці істинності функції конституентам вигляду $x_1 \ldots x_n$ та $\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n$ відповідають різні значення, то функція самоспряжена, якщо ж є хоча б одна пара рівних значень, то функція не є самоспряженою.

Дв. код	00	01	10	11
Дес. екв.	0	1	2	3
$\vee$	0	1	1	1

Дв. код	00	01	10	11
Дес. екв	0	1	2	3
$\Leftrightarrow$	1	0	0	1

Дв. код	0	1
Дес. екв	0	1
$\overline{\ }$	1	0

Враховуючи, що вище згадані конституенти знаходяться на однакових відстанях від країв таблиці істинності, легко визначити - є функція самоспряженою, чи ні.

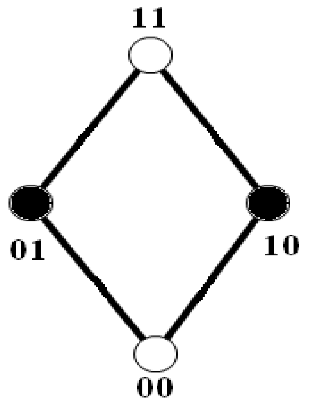


Рис. 17

5) З таблиць істинності досліджуваних функцій видно, що диз'юнкція є монотонною, а дві інші функції не монотонні. Монотонність легко визначається, якщо функцію зобразити на гіперкубі (рис17). Тоді, якщо при переході з нижчого ярусу на верхній є хоча б одне переключення функції з 1 на 0, то функція не є монотонною. Наприклад, для $\Leftrightarrow$ матимемо значення 1 для конституанти 00 і значення 0 для більшої конституенти 01, що означє немонотонність цієї функції.

Нарешті, можемо скласти таблицю Поста:

	K_1	K_0	$K_л$	$K_с$	$K_м$
$\vee$	1	1	0	0	1
$\Leftrightarrow$	1	0	1	0	0
$\overline{\ }$	0	1	1	1	0

Отже, приходимо до висновку, що дана система є повною. При чому вона утворює базис, бо викреслювання хоча б одного з рядків приведе до появи стовпчика, в якому немає жодного нуля.

Неважко перевірити, що система функцій або операцій $\left\{\wedge,\vee,\overline{\ }\right\}$ є повною, але не є базисною. Насправді, базисними будуть тут такі системи: $\left\{\wedge,\overline{\ }\right\}$ - кон'юнктивний базис; $\left\{\vee,\overline{\ }\right\}$ -

диз’юнктивний базис. Можна показати що на двозначній алгебрі логіки існує 17 різних базисів. Тут ми це робити не будемо. Ми лише наведемо деякі з них у вигляді прикладу і залишаємо перевірку базисності як вправу для самостійного виконання, а саме: $\{\circ\}$ – *базис Вебба* (*Пірса*) , $\{\,|\,\}$ – *базис Шеффера;* $\{\to, 0\}$ – *імплікативний базис;* $\{\oplus, \wedge, 1\}$ – *базис Жегалкіна*.

10.2 Алгебра Жегалкіна.

Розглянемо алгебру $\{\mathfrak{I}; \oplus, \wedge, 1\}$. Як ми вже з’ясували, система булевих функцій $\{\oplus, \wedge, 1\}$ є базисом. Надалі операцію кон’юнкції будемо позначати як множення в числовій алгебрі. Тобто базис Жегалкіна має такий вигляд $\{\oplus, \cdot, 1\}$. Отже, довільна булева функція може бути представленою в цьому базисі.

Представлення функції в базисі Жегалкіна називається поліномом Жегалкіна.

Означення 10.9 Поліномом Жегалкіна називається булева функція, що має вигляд:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=c_0\oplus\bigoplus_{k=1}^{n}c_k x_k\oplus\bigoplus_{\substack{k\neq j\\ k,j=1}}^{n}c_{kj}x_k x_j\oplus\ldots$$

$$\ldots\oplus\bigoplus_{\substack{k_1\neq k_2,k_1\neq k_3,\ldots,k_{j-1}\neq k_j\\ k_1,\ldots,k_j=1}}^{n}c_{k_1,\ldots,k_j}x_{k_1}\ldots x_{k_j}\oplus\ldots\oplus c_{12\ldots n}x_1\ldots x_n$$

де $c_0, c_k, c_{jk},\ldots,c_{12\ldots n}=0{,}1$ - константи.

Приклад 10.2. Представити функцію $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\vee x_1\bar{x}_3$ у вигляді поліному Жегалкіна. Функція трьох змінних має наступне представлення у вигляді полінома Жегалкіна:

$$f(x_1,x_2,x_3)=c_0\oplus c_1x_1\oplus c_2x_2\oplus c_3x_3\oplus c_{12}x_1x_2\oplus$$
$$\oplus c_{13}x_1x_3\oplus c_{23}x_2x_3\oplus c_{123}x_1x_2x_3$$

Для визначення коефіцієнтів цього представлення прирівняємо значення лівої і правої частин цієї рівності. Одержимо 8 рівнянь, з яких визначаються шукані коефіцієнти.

З рівнянь одержимо значення коефіцієнтів: $1 \oplus c_{13} = 0 \rightarrow c_{13} = 1$, $1 \oplus c_{12} = 0 \rightarrow c_{12} = 0$, $1 \oplus 1 \oplus c_{123} = 1 \rightarrow c_{123} = 1$

Отже, маємо таке представлення даної функції:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_3.$$

Систему рівнянь наведено у таблиці.

x_1	x_2	x_3	$f = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_3$	рівняння
0	0	0	0	$c_0 = 0$
0	0	1	0	$c_3 = 0$
0	1	0	0	$c_2 = 0$
0	1	1	0	$c_{23} = 0$
1	0	0	1	$c_1 = 1$
1	0	1	0	$1 \oplus c_{13} = 0$
1	1	0	1	$1 \oplus c_{12} = 1$
1	1	1	1	$1 \oplus c_{12} \oplus c_{13} \oplus c_{123} = 1$

Означення 10.10 Похідною булевої функції по змінній x_k називається функція вигляду:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = f(x_1, \ldots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \ldots, x_n) \oplus f(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

де $f(x_1, \ldots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ називається залишковою одиничною функцією, а $f(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ називається залишковою нульовою функцією.

Похідна від функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ по змінній x_k визначає умови, за яких функція змінює своє значення (переключається) при переключенні змінної x_k.

Мішаною похідною порядку n булевої функції називається вираз вигляду $\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}\right)$

Зрозуміло, що $\frac{\partial(f \oplus g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \oplus \frac{\partial g}{\partial x}$ і $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\underset{j=1}{\overset{n}{\wedge}} x_j\right) = \underset{\substack{j=1\\ j\neq k}}{\overset{n}{\wedge}} x_j$.

Обчислимо значення функції $f(x_1,\ldots,x_n)$ та її похідних при $(x_1,\ldots,x_n)=(0,\ldots,0)$, враховуючи, що $x \oplus x = 0$. $f(0,\ldots,0)=c_0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = c_0 \oplus \underset{\substack{k=1\\ k\neq j}}{\overset{n}{\oplus}} c_k x_k \oplus c_j \oplus \underset{\substack{k\neq i, k\neq j, i\neq j\\ k,i=1}}{\overset{n}{\oplus}} c_{ki} x_k x_i \oplus \ldots$$

$$\ldots \oplus \underset{\substack{k_1\neq k_2, k_1\neq k_3,\ldots,k_{j-1}\neq k_j\\ k_1,\ldots,k_j=1,\quad k_1,\ldots,k_j\neq j}}{\overset{n}{\oplus}} c_{k_1,\ldots,k_j} x_{k_1}\ldots x_{k_j} \oplus \ldots$$

$$\oplus\, c_{12\ldots n} x_1 \ldots x_{j-1} x_{j+1} \ldots x_n \oplus c_0 \oplus \underset{\substack{k=1\\ k\neq j}}{\overset{n}{\oplus}} c_k x_k$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{(0,\ldots 0)} = c_j .$$

Аналогічно $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_m}\right|_{(0,\ldots 0)} = c_{jm}$, $\left.\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}\right|_{(0,\ldots 0)} = c_{12\ldots n}$.

Отже, має місце такий факт.

Теорема 10.3 Довільна булева функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ визначається значеннями в точці $(x_1,\ldots,x_n)=(0,\ldots,0)$ її самої та усіх її похідних, а саме:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = f(0,\ldots,0) \oplus \underset{k=1}{\overset{n}{\oplus}} \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{(0,\ldots,0)} x_k \oplus \underset{\substack{k\neq j\\ k,j=1}}{\overset{n}{\oplus}} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}\right|_{(0,\ldots,0)} x_k x_j \oplus \ldots$$

$$\ldots \oplus \underset{\substack{k_1\neq k_2, k_1\neq k_3,\ldots,k_{j-1}\neq k_j\\ k_1,\ldots,k_j=1}}{\overset{n}{\oplus}} \left.\frac{\partial^j f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_j}}\right|_{(0,\ldots,0)} x_{k_1}\ldots x_{k_j} \oplus \ldots \oplus \left.\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}\right|_{(0,\ldots 0)} x_1 \ldots x_n$$

Приклад 10.3 Виходячи з вигляду полінома Жегалкіна $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2x_3$ можемо написати значення похідних цієї функції в нульовій точці, а саме:

$$\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}\right|_{(0,\ldots 0)} = 1, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}\right|_{(0,\ldots 0)} = 1, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(0,\ldots 0)} = 1$$ інші похідні дорівнюють нулю.

Приклад 10.4 Знайти мішану похідну другого порядку по змінних x_1, x_3 функції $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \vee \bar{x}_3.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_3}(x_2 \vee \bar{x}_3) = x_2 \vee \bar{1} \oplus x_2 \vee \bar{0} = x_2 \oplus 1 = \bar{x}_2.$$

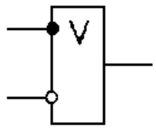
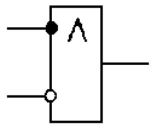
Умова $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1$ є умовою переключення вихідного каналу f при переключенні вхідного каналу x_1. Якщо на другий канал подається 1 або на третій канал – 0, то переключення x_1 з σ на $\bar{\sigma}$ дає переключення вихідного каналу f також з σ на $\bar{\sigma}$.

10.3 Синтез логічних схем.

Розглянемо застосування описаних вище властивостей алгебри логіки до конструювання (проектування) схем, що реалізують логічні функції.

Моделювання логічних схем базується на тих чи інших фізичних явищах. Так, наприклад, властивості напівпровідників відповідають функції Шефера, а за допомогою магнітних явищ можна реалізувати імплікативний базис.

Базисні елементи графічно зображують у вигляді прямокутників з позначками логічних операцій. Прямокутники мають інверсні входи і виходи, що зображаються у вигляді кружків. Заперечення позначається незафарбованим кружком на вході змінної до прямокутника-зображення логічної операції. Нижче наведено приклади позначень деяких логічних операцій.

Елемент	Диз’юнкція $x \vee y$	Кон’юнкція $x \wedge y$
Позначення		

Розглянемо один із методів проектування логічних схем, заснований на застосуванні формули Шеннона. Цей метод носить назву методу ***каскадів***. Метод дозволяє шляхом виключення змінних спрощувати функцію, що реалізується. Важливо, щоб виключення змінних було оптимальним. Якщо шукати оптимальне виключення перебором, то задача матиме дуже великий обсяг обчислень. Тому оптимальне виключення змінних базується на евристичних критеріях. Один із них використовує поняття похідної булевої функції, і полягає в тому, що спочатку виключаються змінні, при перемиканні яких булева функція перемикається за максимальної кількості умов. Максимальна кількість умов визначається ***вагою похідної***, тобто кількістю конституент цієї похідної.

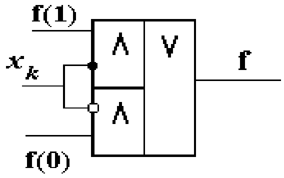


Рис. 18

Розглянемо дію метода каскадів на прикладі, використовуючи блоки виключення однієї змінної (рис. 18). З розкладу Шеннона одержимо:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = x_k \wedge f(x_1,\ldots x_{k-1},1,x_{k+1},\ldots x_n) \vee$$
$$\vee\, \bar{x}_k \wedge f(x_1,\ldots x_{k-1},0,x_{k+1},\ldots x_n) = x_k f(1) \vee \bar{x}_k f(0).$$

Ця формула реалізується у вигляді блоку виключення.

Приклад 10.5 Синтезувати логічну схему, що реалізує булеву функцію $f(x_1,\ldots,x_5) = x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_2 x_5$.

Для визначення змінної, що виключається першою, обчислимо ваги похідних даної функції за всіма змінними.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \left(x_3 \vee x_2 x_5\right) \oplus \left(x_3 \vee x_2 x_4 \vee x_2 x_5\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \left(x_3 \vee \bar{x}_1 x_4 \vee x_5\right) \oplus x_3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 1 \oplus \left(\bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_2 x_5\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = \left(x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 x_5\right) \oplus \left(x_3 \vee x_2 x_5\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_5} = \left(x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_2\right) \oplus \left(x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4\right).$$

Побудуємо таблицю значень похідних.

				$\frac{\partial f}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f}{\partial x_2}$	$\frac{\partial f}{\partial x_3}$	$\frac{\partial f}{\partial x_4}$	$\frac{\partial f}{\partial x_5}$
0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0
P				1	5	11	1	3

Перші чотири стовпчики – це конституенти для чотирьох змінних, які залишаються вільними при обчислення похідної і залежать від того, яку саме похідну обчислюємо.

Наприклад, для $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ це набір змінних x_1, x_3, x_4, x_5. З таблиці видно, що виключенню підлягає змінна x_3, вага якої найбільша. Отже, дану функцію можна записати у наступному вигляді. $f = x_3 f(1) \vee \bar{x}_3 f(0) = x_3 \vee \bar{x}_3(\bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_2 x_5)$, де $f(1) = 1$, $f(0) = \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_2 x_5$. Аналогічно обчислюються ваги для залишкових функцій $f(1) = 1$ та $f(0) = \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_2 x_5$. У даному випадку обчислюються ваги тільки для $f(0)$.

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x_1} = x_2 x_5 \oplus (x_2 x_4 \vee x_2 x_5), \quad \frac{\partial f(0)}{\partial x_2} = \bar{x}_1 x_4 \vee x_5,$$

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x_4} = (\bar{x}_1 x_2 \vee x_2 x_5) \oplus x_2 x_5, \quad \frac{\partial f(0)}{\partial x_5} = (\bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_2) \oplus \bar{x}_1 x_2 x_4.$$

З наступної таблиці видно, що виключенню підлягає змінна x_2, вага якої найбільша.

			$\frac{\partial f(0)}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f(0)}{\partial x_2}$	$\frac{\partial f(0)}{\partial x_4}$	$\frac{\partial f(0)}{\partial x_5}$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1
P			1	5	1	3

Отже, дану функцію можна записати у наступному вигляді:

$$f(0) = x_2 f(0,1) \vee \bar{x}_2 f(0,0) = x_2(\bar{x}_1 x_4 \vee x_5),$$

де $f(0,1) = \bar{x}_1 x_4 \vee x_5$, $f(0,0) = 0$.

Таким чином початкова функція набирає вигляду:

$$f = x_3 f(1) \vee \bar{x}_3(x_2 f(0,1) \vee \bar{x}_2 f(0,0)) = x_3 \vee \bar{x}_3 x_2(\bar{x}_1 x_4 \vee x_5).$$

Логічну схему для даної булевої функції наведено на рис 19.

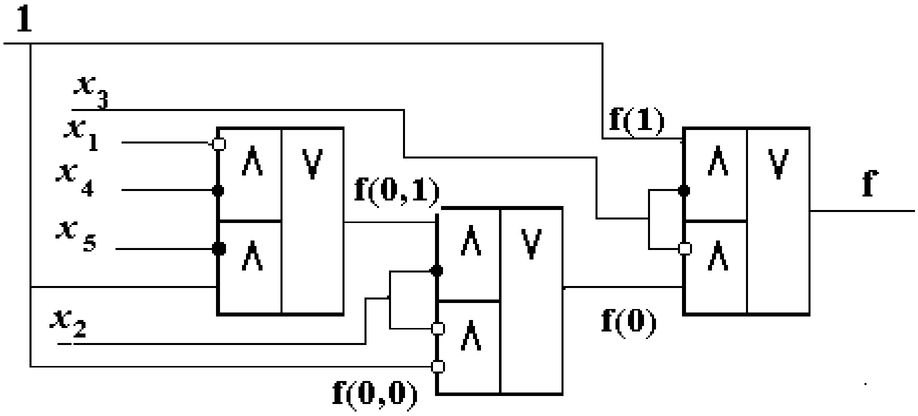


Рис. 19

Контрольні запитання

- Що називається суперпозицією булевих функцій?
- Що називається повною системою булевих функцій?
- Що називається базисом?
- Як визначається клас функцій, що зберігають 0?
- Як визначається клас функцій, що зберігають 1?
- Як визначається клас лінійних функцій?
- Як визначається клас самоспряжених функцій?
- Як визначається клас монотонних функцій?
- Як формулюється теорема Поста?
- Що називається поліномом Жегалкіна?
- Що називається похідною булевої функції?
- У чому полягає процес синтезу логічних схем?
- На чому базується метод каскадів?
- Який вигляд має блок виключення змінної?
- Як визначається вага змінної?

Розділ IV. Елементи комбінаторики

Центральною задачею *комбінаторики* вважається задача про вибір із деякої множини тих об’єктів, що мають задані властивості, розміщення їх у відповідності зі спеціальними правилами та знаходження кількості способів, якими це можна зробити. Якщо правила прості, то головним у цій задачі є підрахування кількості можливостей для здійснення шуканого розв’язку. Якщо ж правила складні, то головною проблемою стає питання про існування таких розміщень та знаходження методів їх побудови.

Комбінаторика має важливе значення для теорії ймовірностей, математичної логіки, теорії чисел.

§ 11 Основне правило комбінаторики

11.1 Приклади комбінаторних задач.

Приклад 11.1 Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, якщо: 1) цифри в числі не повторюються; 2) цифри можуть повторюватись; 3) цифри повинні бути парними?

Розв’язок. 1) Першою цифрою числа може бути одна з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Якщо першу цифру вибрано, то другу можна вибрати сімома способами, третю – шістьма способами, четверту – п’ятьма способами. Отже, всього способів вибору цифр для чотиризначного числа $7\times7\times6\times5=1470$.

2) Першою цифрою числа може бути одна з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Кожну з останніх цифр можна вибирати вісьмома способами. Отже, кількість чотиризначних чисел, в яких допускається повторювання цифр, дорівнює: $7\times8\times8\times8=3584$.

3) Першою цифрою числа може бути одна з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Останньою – одна з цифр 0, 2, 4, 6. Тому кількість парних чисел дорівнює $7\times8\times8\times4=1792$.

Приклад 11.2 Нехай *A* та *B* – скінчені множини, причому $|A| = n,\ |B| = m$. Скільки існує різних відображень з *A* в *B*?

Розв'язок. Побудувати відображення $f : A \to B$- означає для кожного елемента з *A* знайти його образ у множині *B*. Побудова відображення *f* складається з *n* незалежних між собою актів, кожний з яких полягає у виборі образу для даного елемента з множини *A*. Кожний такий акт можна здійснити *m* способами, тому всього таких відображень тому всього відображень можна побудувати $m \cdot m \cdot ... \cdot m$ (в добуток входить *n* множників). Отже, існує m^n відображень.

При розв'язанні кожної з задач ми використовували один і той же спосіб обчислення можливих варіантів. Цей спосіб носить назву *основного правила комбінаторики або правила добутку*, яке має таке загальне формування.

Правило добутку. *Нехай необхідно виконати послідовно k дій, кожну з яких можна здійснити* n_i *(i=1,...,k) способами. Тоді всі k дій можна здійснити* $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$ *способами.*

§ 12 Сполучення. Перестановки. Розміщення.

12.1 Сполучення.

Нехай *A* довільна множина, що складається з *n* елементів. Позначимо $M_k(A)$ множину всіх підмножин з *A*, що складаються з *k* елементів. Скільки *k*–елементних підмножин входить до множини *A*? Інакше кажучи, яка потужність множини $M_k(A)$? Відповідь на це питання дає формула:

$$|M_k(A)| = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

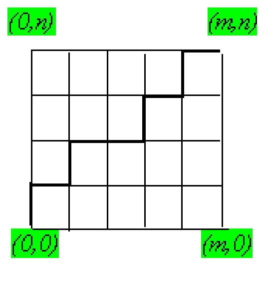
де $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ - добуток всіх чисел від одиниці до *n* (за означенням 0!=1).

Означення 12.1 Довільна k–елементна підмножина n–елементної множини називається **сполученням** з n елементів по k і позначається одним із символів C_n^k або $\binom{n}{k}$.

Доведемо формулу $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Одноелементних підмножин в A стільки ж, скільки елементів, тобто n. Отже, $C_n^1 = n$ Двохелементні підмножини одержуються приєднанням до кожної одноелементної підмножини одного елемента, що не входить до неї. Такий елемент можна вибрати (n-1)–м способом. Згідно з правилом добутку, одержимо $n(n$-$1)$ підмножин. Кожну з яких, можна побудувати двома способами, приєднуючи спочатку один елемент, а потім – другий. Отже, $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!}$. Продовжуючи ці міркування, одержимо, що k–елементну підмножину можна побудувати приєднанням до (k-1)-елементної підмножини одного з (n–k+1) елементів, що залишились. Згідно з правилом добутку, одержимо $(n–k+1)C_n^{k-1}$ підмножин, серед яких кожна зустрічається k раз. Отже, $C_n^k = \dfrac{(n-k+1)}{k} C_n^{k-1}$. Завершимо доведення, застосувавши метод математичної індукції (Додаток 2). При n=1 та n=2 формула справедлива. Нехай вона є вірною при n=k-1, тоді:

$$C_n^k = \frac{(n-k+1)}{k} C_n^{k-1} = \frac{(n-k+1)}{k} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Згідно з принципом математичної індукції формула є вірною при довільному натуральному n.



Приклад 12.1 Прямокутник поділено на $m \times n$ квадратів. Визначити кількість різних найкоротших шляхів з лівого нижнього кута до правого

верхнього.

Розв'язок. Кожний найкоротший шлях є ламана, що складається з $n+m$ відрізків, причому серед них m горизонтальних та n вертикальних. Різні шляхи відрізняються порядком чергування горизонтальних та вертикальних відрізків. Тому кількість потрібних шляхів дорівнює кількості способів, якими можна вибрати з $n+m$ відрізків, наприклад, n вертикальних відрізків, тобто C_{n+m}^{n}. Враховуючи горизонтальні відрізки, прийдемо до тієї ж кількості, але представленої інакше: C_{n+m}^{m}. Отже, задачу розв'язано і доведено рівність $C_{n+m}^{n} = C_{n+m}^{m}$.

З'ясуємо тепер, скільки всього підмножин має множина A, яка складається з n елементів.

З одного боку, кількість усіх підмножин множини A одержується, якщо скласти кількість всіх одноелементних, двохелементних і т.д. підмножин, $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i$ (тут враховано також порожню множину). З іншого боку, кількість всіх підмножин можна знайти так. Занумеруємо всі елементи множини A. Побудуємо відображення множини всіх підмножин множини A на множину векторів довжини n, координати яких є нулі та одиниці, тобто на множину двійкових кодів. Отже, кількість всіх підмножин множини A дорівнює кількості двійкових кодів. Потужність множини двійкових кодів дорівнює 2^n.

Отже, ми знайшли кількість усіх підмножин даної множини та довели тотожність:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$$

Довести самостійно тотожність: $C_k^i + C_k^{i-1} = C_{k+1}^i$.

Розглянемо застосування еквівалентності множин для розв'язання деяких комбінаторних задач.

Приклад 12.2 Нехай А множина послідовностей $\{x_i\}$, $i=1,\ldots,n$, де x_i приймають значення 0 або 1 та серед цих чисел рівно k одиниць. Скільки елементів у множині A?

Розв'язок. Множина A еквівалентна множині всіх k–елементних підмножин множини $\{1,\ldots,n\}$. Дійсно, поставимо у відповідність послідовності $\{x_i\}$ множину чисел $\{i_1,\ldots,i_k\}$ таких, що $x_{i_1}=1, x_{i_2}=1,\ldots, x_{i_k}=1$. Отже, $|A|=C_n^k$.

Приклад 12.3 Знайти кількість розміщень з n однакових предметів у m різних урнах.

Розв'язок. Перенумеруємо урни. Поставимо у відповідність кожному розміщенню предметів у урнах послідовність нулів та одиниць так, що кількість нулів у запису послідовності відповідає кількості предметів в урні, а одиниця слугує відокремлювачем між низками нулів. У цій послідовності n нулів та m одиниць, всього $n+m-1$ чисел 0 та 1. Отже, кількість розміщень C_{m+n-1}^{m-1}.

12.2 Перестановки та розміщення.

Множина A ($|A|=n$) називається *упорядкованою*, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність натуральне число від 1 до n, тобто присвоєно номер, при чому ця відповідність є бієктивною.

Упорядковані множини вважаються різними, якщо вони відрізняються елементами або їхнім порядком.

Означення 12.2 Різні упорядковані множини, які відрізняються тільки порядком елементів називаються **перестановками** даної множини, бо можуть бути отримані з елементів однієї множини.

Теорема 12.1 Кількість перестановок даної множини з n елементів позначається P_n і дорівнює $P_n=n!$.

Доведення. Будемо вибирати елементи з множини та розташовувати їх на n місцях у визначеному порядку. На перше місце можна поставити довільний з n елементів. На друге місце, після того як заповнили перше, можна поставити один з $n-1$ елементів, що залишились, і т.д. За правилом множення всі n місць можна заповнити $n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n!$ способами. ∇

Приклад 12.4 Скількома способами можна розташувати на шахівниці 8 тур так, щоб вони не мали змоги бити одна одну?

Розв'язок. При розташуванні, що вимагається, на кожній вертикалі та на кожній горизонталі буде знаходитись тільки одна тура. Якщо турам присвоїти номери, то шукане розташування відповідає деякій перестановці чисел 1,…,8. Отже, кількість способів розташування тур дорівнює $P_8 = 8! = 40320$.

Розглянемо упорядковані підмножини даної множини *A*.

Означення 12.3 Упорядковані k–елементні підмножини множини з n елементів називаються **розміщеннями** з n по k і позначаються A_n^k.

Кількість розміщень з n по k визначається за формулою:

$$A_n^k = k!C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Приклад 12.5 Скільки різних цілих чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри в числах не повторюються?

Розв'язок. З даних п'яти цифр можна скласти P_5 п'ятизначних чисел, A_5^4 - чотиризначних і т.д. Всього можна скласти різних цілих чисел

$$P_5 + A_5^4 + A_5^3 + A_5^2 + A_5^1 = 5! + \frac{5!}{1!} + \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{4!} = 325.$$

12.3 Перестановки з повтореннями.

Нехай $A = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m$, де $|B_1| = k_1, |B_2| = k_2, \ldots, |B_m| = k_m$, $k_i \geq 0$, $k_1 + \ldots + k_m = n$ та $B_i \cap B_j = \varnothing, i \neq j$.

Скільки існує розкладів множини *A*, що задовольняють наведеним умовам? Відповідь на це питання така.

Теорема 12.2 Нехай $k_i \geq 0$, $k_1 + ... + k_m = n$. Кількість способів, якими можна представити множину A у вигляді об'єднання множин B_i дорівнює $C_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \overline{C}_n^m = \frac{n!}{k_1!...k_m!}$. Числа $C_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \overline{C}_n^m$ називаються перестановками з повтореннями з n по m або поліноміальними коефіцієнтами.

Доведення. Візьмемо довільну k_1-елементну підмножину B_1 множини A. Це можна зробити $C_n^{k_1}$ способами. Серед n-k_1 елементів, що залишилися, виберемо k_2-елементну підмножину B_2. Це можна зробити $C_{n-k_1}^{k_2}$ способами і т.д. Застосовуючи правило добутку, одержимо загальну кількість способів, якими можна одержати розбиття множини A:

$$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-k_1-\ldots-k_m}^{k_m} = \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!}.$$

Цю теорему можна сформулювати інакше, а саме.

Теорема 12.2* Кількість різних перестановок, які можна скласти з n елементів, серед яких є k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу, …, k_m елементів m-того типу, дорівнює

$$C_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \overline{C}_n^m = \frac{n!}{k_1!...k_m!}.$$

12.4 Сполучення з повтореннями

Означення 12.4. Сполучення з m по n з повтореннями f_m^n називаються групи, що містять n елементів, при чому кожний елемент належить до одного з m типів.

Наприклад, з трьох елементів a, b, c можна скласти такі сполучення по два з повтореннями: aa, bb, cc, ab, ac, bc.

Теорема 12.3 Кількість різних сполучень з m елементів по n з повтореннями дорівнює: $f_m^n = C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m-1}^n$.

Прикладом, що може ілюструвати дану теорему, є доміно, а саме: кості доміно можна розглядати як сполучення з повтореннями по два з семи цифр 0, 1,…,6. Кількість цих сполучень дорівнює 28.

§ 13 Біном Ньютона. Поліноміальна формула.

13.1 Біном Ньютона.

Теорема 13.1 Має місце формула:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k .$$

Ця формула називається *біномом Ньютона*, а терема – біноміальною. Числа C_n^k називаються біноміальними коефіцієнтами.

У випадку коли $n=2$ та $n=3$ формула являє собою формули скороченого множення, квадрат суми та куб суми.

Доведення. Доведемо теорему за індукцією. Для $n=2$ та $n=3$ формула бінома є вірною. Припустимо, що вона є вірною для деякого $n=k$ і доведемо її для $n=k+1$. Отже, одержимо:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b) =$$

$$= \left(C_k^0 a^k b^0 + C_k^1 a^{k-1} b^1 + \ldots + C_k^i a^{k-i} b^i + \ldots + C_k^k a^0 b^k\right)(a+b) =$$

$$= C_k^0 a^{k+1} b^0 + C_k^1 a^k b^1 + \ldots + C_k^i a^{k-i+1} b^i + \ldots + C_k^k a^1 b^k +$$

$$+ C_k^0 a^k b^1 + C_k^1 a^{k-1} b^2 + \ldots + C_k^i a^{k-i} b^{i+1} + \ldots + C_k^k a^0 b^{k+1}$$

Після зведення подібних одержимо:

$$(a+b)^{k+1} = C_k^0 a^{k+1} b^0 + \left(C_k^1 + C_k^0\right) a^k b^1 + \ldots$$

$$\ldots + \left(C_k^i + C_k^{i-1}\right) a^{k-i} b^{i+1} + \ldots + C_k^k a^0 b^{k+1}$$

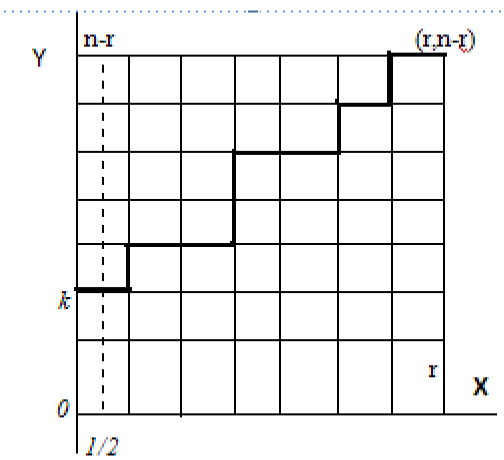
Враховуючи, що $C_k^0 = C_{k+1}^0 = C_k^k = C_{k+1}^{k+1} = 1$ та тотожність $C_k^i + C_k^{i-1} = C_{k+1}^i$, яку легко перевірити за означенням, одержимо формулу для $n=k+1$. Згідно з принципом математичної індукції (Додаток1), теорема є вірною при всіх натуральних n.∇

При $a=b=1$ з біному Ньютона випливає формула $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^{n-1}+C_n^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i=2^n$. При $a=1$ $b=-1$ одержимо ще одну важливу тотожність $C_n^0-C_n^1+C_n^2-...+(-1)^nC_n^n=0$.

Теорема 13.2 (Поліноміальна теорема).

$$(a_1+a_2+...+a_k)^n=\sum_{\substack{r_1+...r_k=n\\ r_1\ge 0,...,r_k\ge 0}}\frac{n!}{r_1!...r_k!}a_1^{r_1}...a_k^{r_k}.$$

Доведення. Перемножимо послідовно $a_1+...+a_k$ n разів. Тоді одержимо k^nдоданків вигляду $d_1,...,d_k$, де кожен з множників d_i дорівнює або a_1, або a_2,…, або a_k. Позначимо $B(r_1,...,r_k)$ сукупність всіх тих доданків, де a_1 зустрічається множником r_1 раз, a_2 – r_2 раз,…, a_k – r_k – раз. Кількість таких доданків дорівнює $C_n(r_1,...,r_k)$ - кількості способів представлення множин з n елементів $\{1,2,…,n\}$ у вигляді суми k множин $B_1,...,B_k$, так, щоб множина B_s мала r_s елементів ($r_i\ge 0, r_1+...+r_k=n$, множина B_s – це множина тих i, для яких $d_i=a_s$). Ми вже показали, що $C_n(r_1,r_2,...,r_k)=\dfrac{n!}{r_1!...r_k!}$. ∇



Біноміальні коефіцієнти мають ряд цікавих і важливих властивостей, які представляються у вигляді тотожностей. Розглянемо кілька прикладів такого характеру.

Приклад 13.1. Довести $C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-2}^{k-1}+...+C_{k-1}^{k-1}$.

Доведення 1. Розглянемо всі k-елементні підмножини множини $A=\{a_1,...,a_n\}$. Кількість цих підмножин дорівнює C_n^k.

Розіб'ємо всі ці підмножини на класи $T_1,...,T_{n-k+1}$, віднісши до класу T_r всі k-елементні підмножини множини A, в яких елемент з найменшим індексом дорівнює a_r. Так як кожна підмножина із класу T_r може бути одержана приєднанням до a_r деякої $(k-1)$-елементної підмножини множини $a_{r+1}, a_{r+21},..., a_n$, то клас T_r складається з C_{n-r}^{k-1}. Отже, одержуємо потрібну рівність.

Доведення 2. Розглянемо друге доведення рівності (1), яке використовує геометричну інтерпретацію чисел C_n^k. Розглянемо всі найкоротші ламані, що з'єднують точку (0,0) з точкою $(k, n-k)$. Кількість всіх таких ламаних є C_n^k. B_r - клас тих ламаних, що перетинають пряму $x = \frac{1}{2}$ в точці $(\frac{1}{2}, r)$ $(r = 0,1,..., n-1)$.

Клас B_r складається з C_{n-r-1}^{k-1} ламаних. Тому $C_n^k = \sum_{r=0}^{n-k} C_{n-r-1}^{k-1}$.

Приклад 13.2. Довести: $C_{n+m}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + ... + C_n^k C_m^0$.

Доведення. Для доведення скористаємось тим фактом, що коли два поліноми рівні при всіх значеннях x, то коефіцієнти цих поліномів при однакових степенях рівні. Розглянемо рівність: $(1+x)^n (1+x)^m = (1+x)^{n+m}$.

Використовуючи формулу бінома Ньютона, переконаємось, що коефіцієнт при x^k в правій частині рівності дорівнює C_{n+m}^k, а в лівій відповідно: $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + ... + C_n^k C_m^0$.

§ 14 Методи розв'язання комбінаторних задач.

14.1 Метод рекурентних співвідношень.

Метод рекурентних співвідношень полягає в тому, що розв'язок комбінаторної задачі з n елементами представляється через розв'язок аналогічної задачі з меншою кількістю елементів за допомогою деякого співвідношення, яке називається *рекурентним* (зворотним).

Проілюструємо цей метод таким прикладом. Нехай f_n^r є кількість сполучень з n елементів $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ по r з повтореннями. Кожне сполучення з n по r або містить, або не містить a_1. Кількість сполучень, які не містять a_1, дорівнює f_{n-1}^r (це сполучення з $a_2,\ldots,a_n$ елементів по r). Кожне сполучення, що містить a_1, може бути одержане приєднанням до a_1 деякого сполучення з n елементів по r-1 (кількість таких сполучень f_n^{r-1}). Отже, $f_n^r = f_{n-1}^r + f_n^{r-1}$.

Ми одержали рекурентне співвідношення, з якого можна знайти f_n^r. Послідовно застосовуючи це співвідношення, одержимо:

$$f_n^r = f_{n-1}^r + f_n^{r-1} = f_n^{r-1} + (f_{n-1}^{r-1} + f_{n-2}^r) = f_n^{r-1} + f_{n-1}^{r-1} + \ldots + f_2^{r-1} + f_1^r$$

Зрозуміло, що $f_n^1 = n, \quad f_1^r = 1$. Вважаючи в (3) $r=2$, одержимо:

$$f_n^2 = \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2.$$

При $r=3$ з рівності (3) одержимо:

$$f_n^3 = C_{n+1}^2 + C_n^2 + \ldots + C_3^2 + C_2^2 = C_{n+2}^3.$$

Тут використана тотожність, доведення якої виконати самостійно.

Повторюючи ці кроки, на r-1 кроці одержимо: $f_n^r = C_{n+r-1}^r$.

14.2 Метод твірних функцій.

Метод твірних функцій є найбільш ефективним методом розв’язання комбінаторних задач. Для його описання необхідно ввести поняття ряду. Це поняття детально вивчається у курсі математичного аналізу, тому тут наведемо лише найнеобхідніші означення і теореми без доведень.

Розглянемо нескінчену суму $a_1+a_2+\ldots+a_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ця нескінчена сума називається числовим рядом. З кожним рядом пов’язана послідовність скінчених сум вигляду $s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$. Ці скінчені суми називаються частинними сумами ряду. Якщо послідовність $\{s_n\}$ має скінчену границю s при $n\to\infty$, то ряд називається збіжним, а число s його сумою. Інакше ряд називається розбіжним.

Розглянемо приклади рядів.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Частинна сума цього ряду має вигляд

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

отже, послідовність $\{s_n\}$ має границю при $n\to\infty$ і ця границя дорівнює 1, тобто ряд збігається і його сума є 1.

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Частинна сума цього ряду має вигляд

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n},$$

отже, послідовність $\{s_n\}$ при $n\to\infty$ необмежено зростає, тобто ряд розбігається.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1+(-1)+1+(-1)+\ldots$$

Частинна сума цього ряду має вигляд $s_n=\begin{cases}0, & n=2k\\ 1, & n=2k+1\end{cases}$, отже, послідовність $\{s_n\}$ при $n\to\infty$ границі не має, тобто ряд розбігається.

Поряд із числовими рядами розглядаються, так звані функціональні ряди, тобто такі, де кожен доданок є функцією від деякого змінного. Серед таких рядів виділяється клас *степеневих рядів*, які мають вигляд:

$$a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n.$$

Сумою степеневого ряду є функція $s(x)$.

Степеневі ряди мають багато цікавих властивостей і застосувань.

Виділимо такі важливі властивості:

а) областю збіжності степеневого ряду є інтервал на числовій вісі симетричний відносно початку координат, до якого можуть входити кінцеві точки;

б) степеневі ряди можна перемножувати, збираючи коефіцієнти при однакових степенях x;

в) якщо два степеневих ряди мають однакову суму при всіх x з області збіжності, то коефіцієнти при однакових степенях x цих рядів рівні між собою.

Розглянемо приклади степеневих рядів.

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n .$$

Цей ряд є сумою нескінченої геометричної прогресії. Як відомо, ця сума може бути обчислена, якщо $|x|<1$. При цьому $s(x)=\dfrac{1}{1-x}$. У випадку, коли $|x|\geq 1$, ряд розбігається.

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

Як видно, цей ряд є узагальненням формули бінома Ньютона для двох доданків при довільному показникові. Цей ряд носить *назву біноміального ряду*, і його область збіжності є множина $|x|<1$. При $\alpha=-1$ ряд має вигляд $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$.

Означення 14.1. Твірною функцією послідовності $\{a_n\}$ називається сума степеневого ряду $A(s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n s^n$.

Наприклад: 1) твірною функцією послідовності $\{a_n\}$, $a_n=a^n$ $(n=0,1,\ldots)$ є функція

$$A(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n s^n=\frac{1}{1-as} \text{ при } |as|<1;$$

2)твірною функцією послідовності $\{a_n\}$, $a_n=C_n^k$ (k=0,1,…,n) є функція $A(s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n^k s^n=(1+s)^n$.

Означення 14.2. Згорткою двох послідовностей $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$ називається послідовність $\{c_n\}$, загальний член якої має вигляд: $c_n=a_0b_n+\ldots a_nb_0$.

Теорема 14.1 Твірна функція згортки двох послідовностей дорівнює добутку твірних функцій цих послідовностей.

Доведення. Нехай $\{c_n\}$ – згортка послідовностей $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$, а

$$A(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n s^n,\quad B(s)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n s^n,\quad C(s)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n s^n$$

- твірні функції цих послідовностей. Перемножуючи ряди, що є твірними функціями послідовностей $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$, та збираючи коефіцієнти при однакових степенях s^n, одержимо новий ряд з коефіцієнтами $c_n = a_0 b_n + \ldots a_n b_0$. Отже, $A(s)B(s)=C(s)$. ∇

Ідея застосування методу твірних функцій. Нехай потрібно відшукати всі члени деякої послідовності. Виходячи з рекурентних чи комбінаторних міркувань, знаходять твірну функцію, розкладають її в ряд. Коефіцієнти цього ряду і є членами досліджуваної послідовності.

Приклад 14.1 Нехай дано $\{a_n\}$, де $a_n = f_n^r$. Ми вже показали, що має місце рекурентне співвідношення $f_n^r = f_{n-1}^r + f_n^{r-1}$, причому $f_n^1 = n$, а щоб співвідношення виконувалось при $r=1$, досить покласти $f_n^0 = 1$.

Нехай: $A_n(s)=\sum_{r=0}^{\infty} f_n^r s^r$. Помножимо на s^r обидві частини рекурентної рівності і додамо всі одержані рівності почленно: $\sum_{r=1}^{\infty} f_n^r s^r = s\sum_{r=1}^{\infty} f_n^{r-1} s^{r-1} + \sum_{r=1}^{\infty} f_{n-1}^r s^r$. Але $\sum_{r=1}^{\infty} f_n^r s^r = A_n(s)-1$, $\sum_{r=1}^{\infty} f_{n-1}^r s^r = A_{n-1}(s)-1$, $\sum_{r=1}^{\infty} f_n^{r-1} s^{r-1} = \sum_{i=0}^{\infty} f_n^i s^i = A_n(s)$ $i=r-1$. Отже, одержимо рівність: $A_n(s)=\dfrac{A_{n-1}(s)}{1-s}$, $A_1(s)=\dfrac{1}{1-s}$. З цієї рівності випливає: $A_n(s)=\dfrac{1}{(1-s)^n}$. Розкладаючи в ряд цю функцію, одержимо $f_n^r = C_{n+r-1}^r$.

Припустимо, що послідовність $\{a_n\}$ $(n=0,1,\ldots)$ задовольняє рекурентному співвідношенню порядку r, тобто $a_{n+r} = b_1 a_{n+r+1} + \ldots b_r a_n$, де b_i $(i=1,2,\ldots,r)$ – постійні коефіцієнти. Тоді, якщо $g(x)$ – твірна функція для послідовності $\{a_n\}$ та, якщо через $k(x)$ позначено поліном вигляду $k(x)=1-$

b_1x-b_2x^2-…-b_rx^r, то: $g(x)k(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_{r-1}x^{r-1}=C(x)$, де $C(x)$ – поліном степеня не вищого за r-1. Дійсно, якщо c_{n+r} коефіцієнт при x^{n+r}, в добутку $g(x)k(x)$, то $c_{n+r}=a_{n+r}-b_1a_{n+r-1}-b_2a_{n+r-2}-\ldots-b_ra_n=0$. Таким чином, для послідовності $\{a_n\}$, яка задовольняє вище згаданому лінійному рекурентному співвідношенню, твірною функцією $g(x)$ буде раціональна функція $g(x)=\dfrac{C(x)}{k(x)}$.

З лінійним рекурентним співвідношенням зв'язують так званий *характеристичний поліном*, який має вигляд: $f(x)=x^r-b_1x^{r-1}-b_2x^{r-2}-\ldots-b_r$, ($b_r\neq0$).

Розглянемо розклад цього полінома на лінійні множники:

$$f(x)=(x-\alpha_1)^{l_1}\ldots(x-\alpha_s)^{l_s},\quad l_1+\ldots+l_s=r.$$

де $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ – корені (можливо, комплексні) полінома $f(x)$. Порівнюючи $f(x)$ та $k(x)$, бачимо, що $k(x)=x^r f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, і у відповідності з розкладом (6) одержуємо розклад на множники для $k(x)$: $k(x)=(1-\alpha_1x)^{l_1}\ldots(1-\alpha_sx)^{l_s},\quad l_1+\ldots+l_s=r.$

Отже, враховуючи відомий факт з алгебри, можемо функцію $g(x)$ представити у вигляді суми простих дробів: $g(x)=\dfrac{C(x)}{k(x)}=\sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{k=1}^{l_i}\dfrac{\beta_{ik}}{(1-\alpha_ix)^k}$, де β_{ik} – деякі сталі.

Таким чином, ми одержали представлення твірної функції у вигляді суми функцій $\beta\cdot(1-\alpha\cdot x)^{-k}$. Розкладуючи ці функції у біноміальні ряди, одержимо коефіцієнт при x^n, який дорівнює $\beta\cdot C_{n+k-1}^{k-1}\alpha^n$. Отже, зводячи подібні, одержимо: $g(x)=\dfrac{C(x)}{k(x)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{s}P_i(n)\alpha_i^nx^n$, де $P_i(n)=\sum\limits_{k=1}^{l_i}\beta_{ik}C_{n+k-1}^{k-1}$ - поліном степеня не вище l_i-1. З іншого боку

$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Порівнюючи коефіцієнти в представленнях твірної функції, одержимо: $a_n=\sum_{i=1}^{s} P_i(n)\alpha_i^n$.

Одержаний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 14.2. Нехай послідовність $\{a_n\}$ задовольняє лінійному рекурентному співвідношенню порядку r з постійними коефіцієнтами b_i (i=1,2,…,r), тобто $a_{n+r}=b_1a_{n+r-1}+b_2a_{n+r-2}+\ldots+b_ra_n$, $n\geq 0$. Тоді $a_n=\sum_{i=1}^{s} P_i(n)\alpha_i^n$, де $P_i(n)$ – поліном степеня не вище l_i-1, α_i (i=1,…,s) – корені характеристичного полінома, а l_i – їхня кратність. Коефіцієнти полінома $P_i(n)$ визначаються початковими значеннями послідовності $\{a_i\}$.

Приклад 14.2 Розглянемо множину $\{1,2,\ldots,m\}$ натуральних чисел. Нехай a_m, $m\geq 2$ – кількість способів знайти перестановку $u_1,u_2,\ldots,u_m$ цих чисел таку, що для кожного i число a_i знаходиться в i-тому стовпчику таблиці

	1	2	3	…	m-3	m-2	m-1
1	2	3	4	…	m-2	m-1	m
2	3	4	5	…	m-1	m	

Знайти a_m.

Розв'язок. Безпосередньо знаходимо, що a_2=2, a_3=3, a_4=5. Число m повинно бути використане або в m-му або в (m-1)-му стовпчику. Таким чином, маємо дві можливості:

	1	2	3	…	m-3	m-2	***m***			1	2	3	…	m-3	***m***	***m-1***
1	2	3	4	…	m-2	m-1		або	1	2	3	4	…	m-2		
2	3	4	5	…	m-1				2	3	4	5	…			

В обох випадках вибрані числа виділені жирним шрифтом. Кількість способів вибору чисел 1,2,…,m-1 в першому варіанті дорівнює $a_{m\text{-}1}$, а в другому - $a_{m\text{-}2}$. Додаючи, ці числа одержимо всі способи вибору $a_m=a_{m-1}+a_{m-2}$, тобто лінійне рекурентне співвідношення другого порядку. Поклавши a_0=1, a_1=1, що узгоджується з рекурентним співвідношенням (хоча задача при цих значеннях m не має сенсу), можемо застосувати теорему 14.2. Характеристичний поліном рекурентного співвідношення має вигляд:

$f(x)=x^2-x-1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, де $\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Отже, за теоремою 14.2. легко знайти, що $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha_1^{n+1}-\alpha_2^{n+1}\right)$.

Знайдена послідовність є не що інше, як відома послідовність чисел Фібоначчі.

14.3 Метод включень і виключень.

В теорії множин для сукупності $A_1,A_2,\ldots,A_n$ має місце формула:

$$
\begin{gathered}
|\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\right|=\left|A_1\right|+\left|A_2\right|+\cdots+\left|A_n\right|-\\
-\left(\left|A_1\cap A_2\right|+\left|A_1\cap A_3\right|+\cdots+\left|A_1\cap A_n\right|+\cdots+\left|A_{n-1}\cap A_n\right|\right)+\\
+\left(\left|A_1\cap A_2\cap A_3\right|+\left|A_1\cap A_2\cap A_4\right|+\cdots+\left|A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n\right|\right)+\\
+(-1)^{n-1}\left|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}\cap A_n\right|.
\end{gathered}
$$

яку з деякими незначними змінами використовують при розв'язанні комбінаторних задач, де потрібно знаходити кількості елементів із заданими властивостями. Застосування модифікованої формули і носить назву *методa включень і виключень*.

Отже, нехай є N елементів та деяка кількість властивостей $P(1)$, $P(2),\ldots,P(n)$. Нехай N_i – кількість елементів, що мають властивість $P(i)$, а взагалі $N_{i_1,i_2,\ldots,i_r}$ - кількість елементів із властивостями $P(i_1)$, $P(i_2),\ldots$, $P(i_r)$. Тоді кількість $N(0)$ елементів, що не мають жодної властивості, задається формулою:

$$N(0)=N-\sum N_i+\sum_{i_1<i_2}N_{i_1,i_2}+\ldots+(-1)^s\sum_{i_1<\ldots<i_s}N_{i_1,\ldots,i_s}+\ldots+(-1)^n N_{12\ldots n}$$

Доведемо цю формулу. Елемент, що не має жодної властивості, враховується один раз в доданку N і більше ні в які доданки не входить. Елемент із властивістю $P(j)$ враховується по одному разу в N та N_j, тому в першому доданку дає вклад +1, а в другому –1, а разом 1-1=0 в правій частині рівності. Елемент, що має точно r властивостей, наприклад, l_1, $l_2,\ldots,l_r$ дає 1 в доданку $\sum\limits_{i_1<\ldots<i_s}N_{i_1,\ldots,i_s}$, де $s\le r$, для кожного набору $i_1,i_2,\ldots,i_s$ з набору l_1, $l_2,\ldots,l_r$, тобто для C_r^s наборів. Отже, вклад у праву частину цього елемента дорівнює:

$$1 - C_r^1 + C_r^2 + \ldots + (-1)^s C_r^s + \ldots + (-1)^r C_r^r = (1-1)^r = 0.$$

Права частина формули враховує кожний елемент, що не має жодної властивості, точно по одному разу, а всі інші елементи – 0 разів, отже, вона дає кількість $N(0)$.

Таким же шляхом можна знайти формулу для визначення кількості елементів $N(r)$ з точно r властивостями.

$$N(r) = \sum_{i_1<\ldots<i_r} N_{i_1,\ldots,i_r} + \ldots + (-1)^s C_s^r \sum_{i_1<\ldots<i_s} N_{i_1,\ldots,i_s} + \ldots.$$

Приклад 14.3. *Задача про безладдя.* Скільки існує перестановок $u_1,u_2,\ldots,u_n$ чисел $1,2,\ldots,n$, таких, що $u_i \neq i$ при довільному i?

Розв'язок. В даній задачі N дорівнює $n!$ перестановок $u_1,u_2,\ldots,u_n$, а властивість $P(i)$ виражається рівністю $u_i=i$. Тоді $N_{i_1,i_2,\ldots,i_r} = (n-r)!$ - кількість перестановок, що залишають на місці r визначених символів. Далі, у $\sum N_{i_1,i_2,\ldots,i_r}$ є C_n^r доданків – по кількості способів вибору $i_1, i_2,\ldots,i_r$ з $1,2,\ldots,n$. Застосовуючи наведену вище формулу, знаходимо:

$$N(0) = n! - n(n-1)! + C_n^2(n-2)! + \ldots + (-1)^r C_n^r (n-r)! + \ldots + (-1)^n \cdot 1 =$$

$$= n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^r \frac{1}{r!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Якщо нас цікавить не тільки кількість безладь з $1,2,\ldots,n$, а й кількість перестановок $u_1,u_2,\ldots,u_n$ чисел $1,2,\ldots,n$, для яких $u_i=i$ точно в r місцях при деякому $r=0,1,\ldots,n$, то виникає задача, що носить назву *задачі про зустрічі*.

14.4 Метод траєкторій.

Для багатьох комбінаторних задач можна навести таку геометричну інтерпретацію, яка зводить задачу до підрахування кількості шляхів (траєкторій), що мають задану властивість. У цьому і полягає метод траєкторій.

Приклад 14.4. (Задача про балотування). Кандидат А зібрав на виборах a голосів, кандидат В зібрав – b голосів ($a>b$). Виборці голосували послідовно. Скільки існує таких способів голосування, при яких А завжди буде попереду В по кількості поданих за нього голосів?

Розв'язок. Нехай $\varepsilon_i=+1$, якщо i-тий голос подано за А, та $\varepsilon_i=-1$, коли i-тий голос подано за В. Покладено $s_k=\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_k$ і розглянемо в системі координат XOY ламану, що з'єднує точки O, $(1,s_1),\ldots,(k,s_k),\ldots,(a+b,s_{a+b})$. Зрозуміло, що $s_{a+b}=a-b$. Кожному способу подання голосів відповідає визначена ламана лінія (траєкторія), що з'єднує точки O та ($a+b$, $a-b$). Траєкторія складається з $a+b$ відрізків, причому a з них напрямлено вгору. Загальна кількість траєкторій дорівнює C_{a+b}^{a}. Кандидат A завжди буде попереду B, якщо відповідна траєкторія проходить через точку (1,1) (перший голос повинен бути поданий за A) і не перетинає вісь OX. Кількість таких траєкторій може бути підрахована за формулою $C_{m+n}^{n} - C_{m+n}^{n+1} = C_{m+n}^{n} \dfrac{n+1-m}{n+1}$, де необхідно покласти $n=a-1$, $m=b$. Отже, шукана кількість подання голосів дорівнює: $C_{a+b-1}^{a-1} \dfrac{a-1+1-b}{a-1+1} = \dfrac{a-b}{a+b} C_{a+b}^{a}$.

Перейдемо до розгляду загальних властивостей траєкторій.

Означення 14.3 Нехай $x>0$ та y – цілі числа. Траєкторію з початку координат в точку (x,y) називається ламана, що з'єднує точки O, $(1,s_1),\ldots,(k,s_k),\ldots\ \ldots,(x,s_x)$, де $s_x = y, \quad s_i - s_{i-1} = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$.

Нехай $N_{x,y}$ – кількість всіх траєкторій, що з'єднують точку (0,0) з точкою (x,y). Мають місце теореми.

Теорема 14.3 $N_{x,y} = \dfrac{x!}{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)!\left(\dfrac{x-y}{2}\right)!}$, якщо числа x та y мають однакову парність, та $N_{x,y}=0$ в протилежному випадку.

Доведення. Припустимо, що траєкторія складається з p відрізків, напрямлених угору, та q відрізків, напрямлених донизу. Тоді $p+q=x$, $p-q=y$, звідки $p=(x+y)/2$, $q=(x-y)/2$ (оскільки p й q цілі, то x та y повинні мати однакову парність). Так як траєкторія повністю визначається, якщо вказати, які відрізки напрямлені вгору, загальна кількість траєкторій з точки O в точку (x,y) дорівнює: $N_{x,y} = C_x^{{x+y}/{2}} \dfrac{x!}{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)!\left(\dfrac{x-y}{2}\right)!}$.

Теорема 14.4. (Принцип дзеркального відбивання). Нехай A(a,α), B(b,β) – точки з цілочисельними координатами, причому $b>a\geq 0$, $\alpha>0$, $\beta>0$, а A'($a,-\alpha$) – точка, симетрична до A відносно вісі OX. Тоді кількість траєкторій з A в B, які перетинають вісь OX або мають з нею спільну точку, дорівнює кількості траєкторій з A' в B.

Доведення. Кожній траєкторії T з A в B, що перетина вісь OX або має з нею спільну точку, поставимо у відповідність траєкторію з A' в B по правилу: берем дільницю траєкторії T до першої точки зустрічі з віссю OX і відображуємо її відносно вісі OX, а далі траєкторії T та T' співпадають. Таким чином, кожній траєкторії T з A в B, що перетинає вісь OX, відповідає єдина траєкторія T' з A' в B. І навпаки це співставлення траєкторій також однозначне. Встановлено взаємно однозначну відповідність між множиною траєкторій, що перетинають вісь OX або мають з нею спільну точку, та множиною всих траєкторій з A' в B. Отже, їхні кількості співпадають. ∇

Теорема 14.5. Нехай $x>0$, $y>0$. Тоді кількість траєкторій з точки O в точку (x,y) таких, що не мають вершин на вісі OX (окрім точки O), дорівнює $\frac{y}{x}N_{x,y}$.

Доведення. Всі траєкторії, що з'єднують точку O з точкою (x,y) і не перетинають вісь OX, проходять через точку A(1,1). Загальна кількість траєкторій, що ведуть з A в B, дорівнює $N_{x-1,y-1}$. Загальна кількість траєкторій, що ведуть з A в B і перетинають вісь OX, дорівнює, кількості траєкторій, що ведуть A' в B, тобто $N_{x-1,y+1}$. Отже, шукана кількість траєкторій дорівнює

$$N_{x-1,y-1}-N_{x-1,y+1}=\frac{(x-1)!}{\left(\frac{x+y}{2}-1\right)!\left(\frac{x-y}{2}\right)!}-\frac{(x-1)!}{\left(\frac{x+y}{2}\right)!\left(\frac{x-y}{2}-1\right)!}=$$

$$=\frac{y}{x}\frac{x!}{\left(\frac{x+y}{2}\right)!\left(\frac{x-y}{2}\right)!}=\frac{y}{x}N_{x,y}.$$

Теорема 14.6. Нехай траєкторії з'єднують точку O з точкою $(2n,0)$ на вісі OX і позначимо $L_{2n}=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$. Тоді серед C_{2n}^{n} траєкторій, що з'єднують точку O з точкою $(2n,0)$ існує: а) рівно L_{2n-2} траєкторій, що лежать вище вісі OX і не мають спільних точок з нею, окрім точок O та $(2n,0)$; б) рівно L_{2n} траєкторій, що не мають вершин на вісі OX.

Доведення. а) Всі траєкторії, що з'єднують O з $(2n,0)$, лежать вище вісі OX і не мають других спільних точок з OX, обов'язково проходять через точку $(2n\text{-}1,1)$. Кількість траєкторій, що з'єднують O з $(2n\text{-}1,1)$ і не перетинають вісь OX, дорівнює $\frac{1}{2n-1}N_{2n-1,1} = \frac{1}{2n-1}C_{2n-1}^{n} = \frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1} = L_{2n-2}$.

б) Розглянемо траєкторію, що з'єднує O з точкою M$(2n,0)$ і не має вершин нижче вісі OX. Додамо ще один відрізок, що з'єднує O з O_1 (-1, -1). Приймаємо O_1 за новий початок системи координат $X_1O_1Y_1$. У новій системі координат точка M має координати $(2n+1,1)$, а точка O – (1,1). Кількість траєкторій, що з'єднують точку O з точкою M і не мають вершин нижче вісі OX, дорівнює кількості траєкторій, що з'єднують O_1 з M і розташовані вище вісі O_1X_1. Остання кількість дорівнює

$$\frac{1}{2n+1}N_{2n+1,1} = \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{n} = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n} = L_{2n}$$

Приклад 14.5. Біля каси зібралося $m+n$ осіб, причому n з них мають купюри вартістю 50 одиниць, а інші m мають тільки по 100 одиниць. У касі є p купюр вартістю 50 одиниць, білет коштує 50 одиниць. Скільки всього є способів розміщення $m+n$ покупців у черзі так, щоб ні один покупець не чекав решти ($m\leq n$)?

Розв'язок. Задача зводиться до підрахування кількості траєкторій з точки O в точку $(m+n,\ n\text{-}m)$, які не перетинають пряму $y=-(p+1)$. Кількість тих траєкторій, що перетинають цю пряму, дорівнює кількості траєкторій з точки $(0,\ -2/(p+1))$ в точку $(m+n,\ n\text{-}m)$, тобто $C_{m+n}^{p+n+1} = C_{m+n}^{m-p-1}$. Шукана кількість траєкторій дорівнює: $C_{m+n}^{m} - C_{m+n}^{m-p-1}$.

Контрольні запитання

- Як формулюється основне правило комбінаторики?
- Що таке сполучення?
- Що називається перестановкою?
- Як визначається розміщення?
- Що таке перестановки з повтореннями?
- Що таке сполучення з повтореннями?
- Який вигляд має поліноміальна формула?
- Що таке біном Ньютона?
- Які тотожності мають місце для біноміальних коефіцієнтів?

Розділ V. Елементи теорії графів

Теорія графів є одним з розділів математики з досить широкою областю застосування. Оперуючи множинами точок та ліній, що їх з'єднують, ця теорія дає багатий різновид форм, які мають цікаві властивості, корисні для дослідження різноманітних проблем.

Це робить теорію графів досить корисним інструментом, який використовується у багатьох галузях наукових досліджень, починаючи з дослідження операцій та лінгвістики і закінчуючи хімією та генетикою. Методи теорії графів дозволяють досить успішно розв'язувати задачі впорядкування об'єктів та побудови різних моделей. До таких задач можна віднести наступні: календарне планування промислового виробництва; мережеве планування та управління; побудова систем зв'язку та дослідження процесів передачі інформації; вибір оптимальних маршрутів та потоків у мережах; побудова електричних мереж та електронних схем; ідентифікація у хімії та інші.

§ 15. Поняття графа, основні означення. Матричне представлення графів.

15.1 Означення основних понять.

З поняттям графа ми вже зустрічались при вивченні теорії множин та математичної логіки, де було наведено абстрактне означення графа. Нагадаємо його.

Означення 15.1 Графом G називається множина V із заданим на ній бінарним відношенням $E \subset V^2$, тобто $G = \langle V, E \rangle$.

Можна граф визначити інакше, спираючись на більш елементарні геометричні поняття точки та лінії. Причому геометричні характеристики цих ліній до уваги не приймаються.

Означення 15.2 Граф G – це сукупність двох множин V та E (V – множина точок (вершин), E – множина ліній (ребер), що з'єднують точки, на якій визначено відношення інцидентності $\Im$, тобто кожний елемент $e \in E$ інцидентний двом елементам $v', v'' \in V$.

Відношення інцидентності $\Im$ дозволяє розглядати граф як сім'ю пар (v', v''), $v'v' \in V$, що визначає, які вершини сполучені лініями. Якщо порядок елементів у парі відіграє певну роль, то граф називається *орієнтованим*, в іншому випадку – *неорієнтованим*. Ребра орієнтованого графа зображаються стрілками, які вказують на порядок слідування вершин. Часто орієнтовані ребра називають *дугами*.

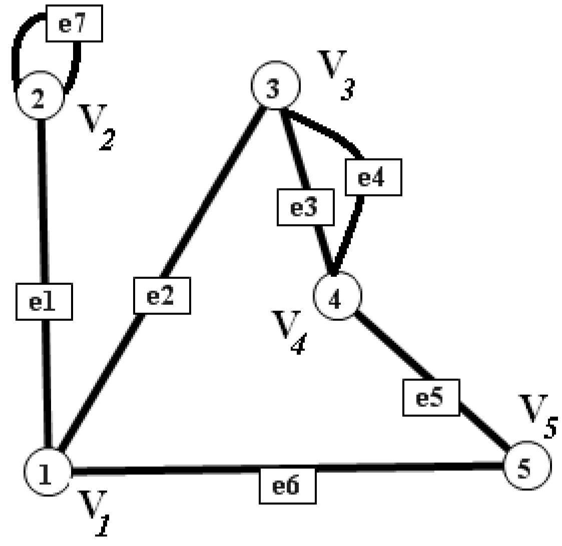


Рис. 20

Граф зображується на площині у вигляді геометричної фігури, що має вершини з'єднані відрізками прямих або кривих ліній (Рис. 20).

Означення 15.3 Граф G' називається *підграфом* G, якщо: $V(G') \subset V(G)$ та $E(G') \subset E(G)$.

Означення 15.4 Два ребра називаються *суміжними*, якщо вони інцидентні одній вершині; дві вершини – *суміжні*, якщо вони інцидентні одному ребру. Відношення суміжності вершин v_i та v_j позначається так: $v_i S v_j$

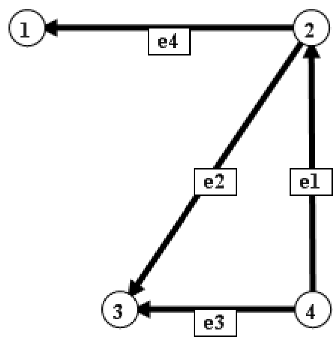


Рис. 21

Означення 15.5 Граф називається *простим*, якщо його суміжні вершини з'єднані не більше, як одним ребром. Інакше граф називається *загальним*.

У загальному графі допускаються кратні ребра, тобто кілька ребер з'єднують одну й ту саму пару вершин (ребра e4,e3 Рис.20) та петлі, тобто ребро замкнене на одну вершину (e_7 Рис.20).

Розрізняють графи: 1) орієнтовані (Рис.21) та неорієнтовані (на Рис.20 зображено неорієнтований загальний граф); скінчені та нескінчені.

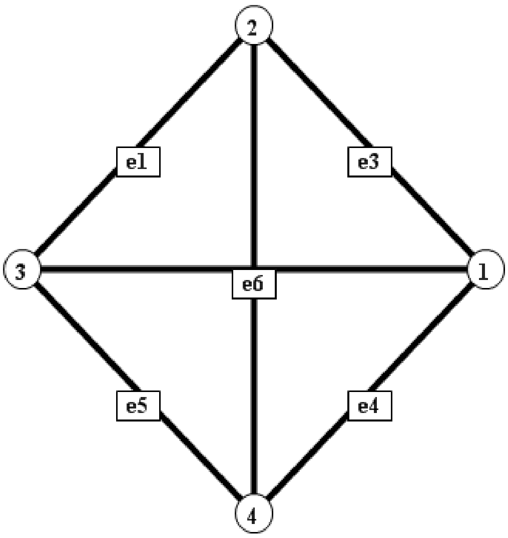


Рис. 22

Означення 15.6 Простий граф називається *повним*, якщо довільні дві вершини суміжні. Повний граф з n вершинами позначається K_n. На Рис. 22 зображено граф K_4.

Означення 15.7 Граф називається *зірчаним*, якщо одна вершина суміжна з усіма іншими вершинами (Рис.23).

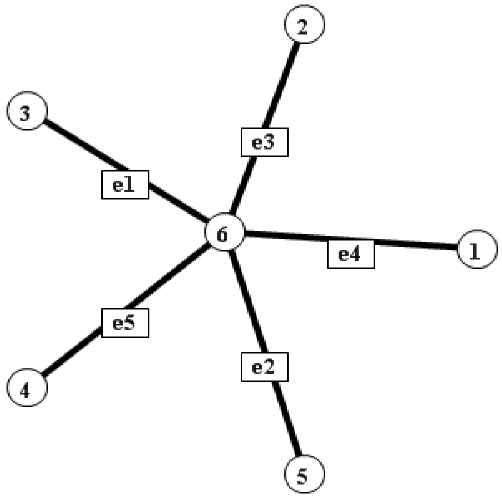


Рис. 23

Означення 15.8 Кількість ребер, інцидентних даній вершині називається її *степенем*. При визначенні степеня вершини ребро, що утворює петлю, враховується двічі.

Вершина степеня 0 називається *ізольованою*, а вершина степеня 1 – *підвішеною* або *кінцевою*.

Має місце лема Ейлера про «потискання рук».

Лема 15.1 Сума степенів усіх вершин – парна, це парне число дорівнює подвоєній кількості ребер.

Цю лему можна сформулювати неформально у вигляді: якщо кілька осіб потиснуть один одному руки, то загальна кількість рук, які потиснуто, парна. Зрозуміло, що в кожному потисканні беруть участь дві руки.

Наслідком наведеної леми є таке твердження: в довільному графі *кількість вершин непарного степеня є парною*.

Означення 15.9 Якщо степені всіх вершин графа рівні між собою, наприклад n, то граф називається *однорідним* або *регулярним* степеня n.

Кожний повний граф є регулярним степеня n-1.

Означення 15.10 Граф називається *зваженим*, якщо кожній вершині та кожному ребру ставиться у відповідність елемент деякої множини, яка називається *вагою* вершини або *вагою* ребра:

$$v_i \in V \to w_i \in W = \{w_i ... w_n\},$$

$$e_i \in E \to p_i \in P = \{p_i ... p_n\}.$$

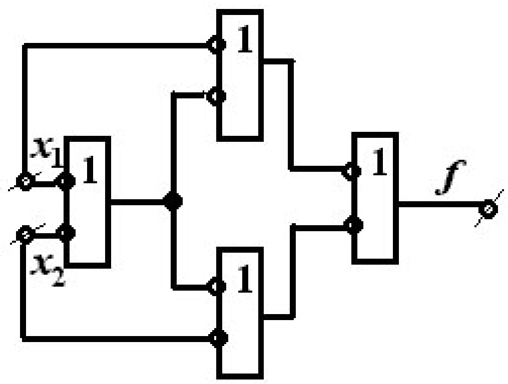


Рис. 24

Розглянемо побудову зваженого графа на прикладі логічної схеми, що реалізує операцію додавання по модулю два $x_1 \oplus x_2$ в базисі Шефера (Рис. 24). Кожній вершині графа, що відповідає цій схемі (Рис.25), присвоєно вагу, а саме: вершинам v_1 , v_2 відповідають змінні x_1, x_2; вершинам v_3 - v_6 відповідає вага $\varphi(\alpha,\beta) = \overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$; вершині v_1 – вага $f = x_1 \oplus x_2$.

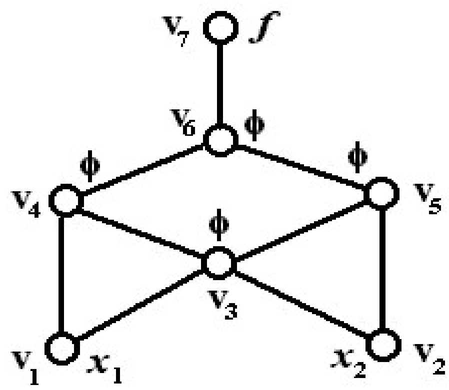


Рис. 25

15.2 Ізоморфізм графів.

Один і той же граф може мати різні зображення, тому важливу роль відіграє поняття *ізоморфних* графів, яке дає можливість різні зображення одного графа вважати представниками одного класу і не розрізняти їх при дослідженнях.

Означення 15.11 Два графи G та G' називають ізоморфними, якщо існує взаємно однозначна відповідність між множинами вершин така, що вершини одного графа сполучені тоді і тільки тоді, коли сполучені вершини другого графа. Якщо графи орієнтовані, то напрямок дуг теж повинен збігатися.

На Рис. 26 зображено два графи, які є ізоморфними при відповідності $u \leftrightarrow 1, v \leftrightarrow m,\quad x \leftrightarrow p, y \leftrightarrow q$ $z \leftrightarrow r$. Ці графи можна вважати одним графом, представленним різними зображеннями.

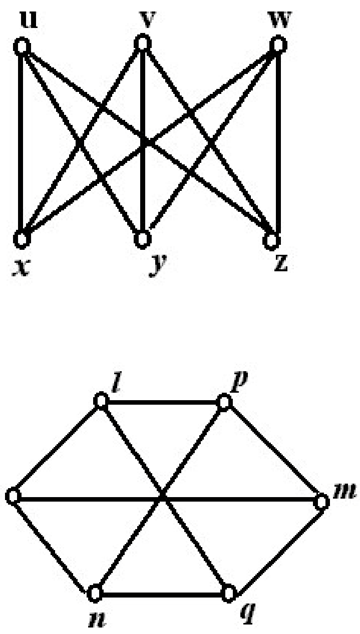


Рис. 26

15.3 Представлення графів матрицями.

Означення 15.12 Нехай $G = \langle V, E \rangle$ граф, де $V = \{v_1, ..., v_n\}$, $E = \{e_1, ..., e_m\}$. Позначимо матрицю з m рядків та n стовпчиків:

$$\Xi = \left(\xi_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}, \text{ де } \xi_{ij} = \begin{cases} 1, & e_i \Im v_j, \\ 0, & e_s \overline{\Im} v_j, \\ 2, & e_i \Im v_j, (v_j, v_j) \end{cases} \qquad \text{граф неорієнтований,}$$

$$\xi_{ij} = \begin{cases} -1, & e_s \Im v_{j,} (v_j, .), \\ 1, & e_i \Im v_j, (., v_j), \\ 0, & e_s \overline{\Im} v_j, \\ \alpha, & e_i \Im v_j, (v_j, v_j)., \end{cases} \qquad \text{граф орієнтований.}$$

для орієнтованого. Ця матриця називається матрицею *інцидентності* графа G. Стовпчикам відповідають вершини, а рядкам – ребра графа. Запис $(v_j,.)$, $(.,v_j)$ та (v_j,v_j) означають, відповідно початок, кінець дуги та петлю при вершині v_j, α - довільне число, відмінне від 1, -1, 0. $e_i \Im v_j$ - означає, що ребро e_i інцидентне вершині v_j, $e_i \overline{\Im} v_j$ - означає, що ребро e_i не є інцидентним вершині v_j.

Означення 15.13 Нехай $G = \langle V, E \rangle$ граф, де $V = \{v_1,...,v_n\}$, $E = \{e_1,...,e_m\}$. Позначимо квадратну матрицю порядку n: $\Delta = (\delta_{ij})_{i,\, j=\overline{1,n}}$, де для неорієнтованого графа

$$\delta_{ij} = \begin{cases} k, & v_i S v_j \\ 2, & v_i S v_i \\ 0, & v_i \overline{S} v_j \end{cases}$$

k – кратність ребер, що з'єднують вершини v_i та v_j, і для орієнтованого графа

$$\delta_{ij} = \begin{cases} -k, & v_i S\, v_j, \\ l, & v_j S\, v_i, \\ \alpha, & v_i S v_i \\ 0, & v_i \overline{S}\, v_j. \end{cases}$$

k, l – кратності ребер. Ця матриця називається матрицею *суміжності* графа G. Стовпчикам і рядкам відповідають вершини. Для неорієнтованого графа матриця суміжності симетрична, тобто $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, для орієнтованого графа це не так.

15.4 Степені вершин графа.

Матричне представлення графа дає можливість визначити степені вершин графа (позначаються $\rho(v_i)$) через елементи матриці інцидентності чи суміжності. Так сума елеметів j – того стовпчика матриці інцидентності неорієнтованого графа дорівнює степені вершини v_j. Має місце формула: $\rho(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \xi_{ij}$.

З іншого боку степінь вершини можна визначити через елементи матриці суміжності: $\rho(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}$.

Кількість ребер неорієнтованого графа дорівнює:

$$m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \rho(v_k) = \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n} \delta_{ij} = \sum_{\substack{k=1 \\ j \ge k}}^{n} \delta_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} \xi_{kj}\right).$$

Для прикладу побудуємо матриці інцидентності та суміжності для графа, зображеного на Рис.20.

$\Xi =$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
e_1	1	1	0	0	0
e_2	1	0	1	0	0
e_3	0	0	1	1	0
e_4	0	0	1	1	0
e_5	0	0	0	1	1
e_6	1	0	0	0	1
e_7	0	2	0	0	0
	$\rho(v_1)=3$	$\rho(v_2)=3$	$\rho(v_3)=3$	$\rho(v_4)=3$	$\rho(v_5)=2$

$$m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \rho(v_k) = 7$$

$\Delta =$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
v_1	0	1	1	0	1	$\rho(v_1)=3$
v_2	1	2	0	0	0	$\rho(v_2)=3$
v_3	1	0	0	2	0	$\rho(v_3)=3$
v_4	0	0	2	0	1	$\rho(v_4)=3$
v_5	1	0	0	1	0	$\rho(v_5)=2$
	$\rho(v_1)=3$	$\rho(v_2)=3$	$\rho(v_3)=3$	$\rho(v_4)=3$	$\rho(v_5)=2$	

$$m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \rho(v_k) = 7$$

15.5 Дії над графами.

З графами або з їхніми частинами можна виконувати певні операції, які спираються на поняття теорії множин.

Нехай є граф $G(V,E), |V| = n, |E| = m$ і деякі його підграфи $G_1(V_1,E_1), |V_1| = p, |E_1| = m_1$ та $G_2(V_2,E_2), |V_2| = q, |E_2| = m_2$.

Означення 15.14 Доповненням $\overline{G_1}$ частини G_1 графа $G(V,E)$називається граф, який складається з усіх ребер графа G, що не належать частині G_1, тобто $\overline{G_1} = G \setminus G_1$.

Означення 15.15 *Перетином* $G_1 \cap G_2$ підграфів $G_1(V_1,E_1)$ та $G_2(V_2,E_2)$ називається граф, що складається з усіх ребер і вершин, які належать до кожної з частин одночасно.

Означення 15.16 *Об'єднанням* $G_1 \cup G_2$ підграфів $G_1(V_1,E_1)$ та $G_2(V_2,E_2)$ називається граф, множини вершин і ребер якого є об'єднанням множин вершин і ребер кожного з графів.

Означення 15.17 *Симетричною різницею* $G_1 \Delta G_2$ підграфів $G_1(V_1,E_1)$ та $G_2(V_2,E_2)$ називається граф, множини вершин і ребер якого є об'єднанням множин вершин і ребер кожного з графів, за винятком вершини і ребер перетину цих підграфів.

Означення 15.18 Сумою $G_1 + G_2$ підграфів $G_1(V_1,E_1)$ та $G_2(V_2,E_2)$ називається граф, що є об'єднанням симетричної різниці цих підграфів, у якій кожну вершину графа G_1 з'єднано з кожною вершиною графа G_2, з перетином цих підграфів.

Розглянемо матричне представлення цих операцій.

Так як $V_1, V_2 \subseteq V$, то можна ввести двійкові коди для носіїв підграфів, тобто двійковий вектор $\bar{s}_k = \left(s_1^k, s_2^k, ..., s_n^k\right)$, де

$$s_i = \begin{cases} 0, v_i \notin G_k \\ 1, v_i \in G_k \end{cases}, \quad k = 1,2.$$

Зрозуміло, що код носія графа $G(V,E)$ є вектор довжини n, усі компоненти якого дорівнюють одиниці.

Позначимо матрицю графа $G(V,E)$ $A(G)=(a_{ij})_{i,\,j=\overline{1,n}}$ і матриці підграфів $G_1(V_1,E_1)$ та $G_2(V_2,E_2)$ відповідно $A(G_1)$ і $A(G_2)$. Матрці $A(G_k),\, k=1,2$ є мінорами матриці $A(G)$, які отримуються викреслюванням з $A(G)$тих стовпчиків і рядків, що відповідають нульовим компонентам двійкового кода підграфа $G_k,\, k=1,2$.

Для побудови матриць графів, що отримуються в результаті операцій над ними, скористаємось теоремою Стоуна про ізоморфізм алгебр Кантора та булевої алгебри двійкових векторів. А саме: $G_1 \bigcup G_2 \Leftrightarrow \bar{s}_1 \vee \bar{s}_2 = S_{\bigcup}$ - це двійковий код об'єднання підграфів, у якому одиничні значення компонент вказують на вершини, що входять до графа об'єднання. Так як матриці неорієнтованих графів симетричні, то досить відслідковувати перетворення векторів лише за одним індексом *i* або *j*.

Аналогічно

$G_1 \bigcap G_2 \Leftrightarrow \bar{s}_1 \wedge \bar{s}_2 = S_{\bigcap}$, $G_1 \Delta G_2 \Leftrightarrow \bar{s}_1 \oplus \bar{s}_2 = S_{\Delta}$, $\overline{G_1} \Leftrightarrow \bar{s}_1$.

Зрозуміло, що визначивши двійковий код результату тієї чи іншої операції, легко отримати матрицю графа, що є результатом застосованої операції.

Наприклад, для операції об'днання матриця матиме вигляд: $A(G_1 \bigcup G_2)=(C_{ij})_{i,\,j=\overline{1,n}}$, де $C_{ij}=\begin{cases}0, & s_i=0\\ a_{ij}, & s_i=1\end{cases}$, s_i компоненти вектора $S_{\bigcup}$.

Матриця суми будується наступним чином:

$$G_1+G_2=(G_1 \Delta G_2) \bigcup G_1 \bigcap G_2 \Leftrightarrow \bar{s}_1 \oplus \bar{s}_2 \vee \bar{s}_1 \wedge \bar{s}_2 = S_+$$

визначаються вершини, що належать сумі графів. Нехай вектор $\bar{s}_1 \wedge \bar{s}_2 = S_{\bigcap}$ має q ненульових компонент. Тоді матриця суми графів визначається формулою: $A(G_1+G_2)=(C_{ij})_{i,\,j=\overline{1,n}}$, де

$$C_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & s_i^1=s_i^2=1, 1\le i,j\le q \\ a_{ij}, & s_i^1\ne s_i^2, (1\le i,j\le p-q)\vee(p-q+1\le i,j\le m) \\ 1, & s_i^1\ne s_i^2, (1\le i\le p-q, p-q+1\le j\le m)\vee(p-q+1\le i\le m, 1\le i\le p-q) \end{cases}$$

На Рис. 27 зображено приклад суми графів.

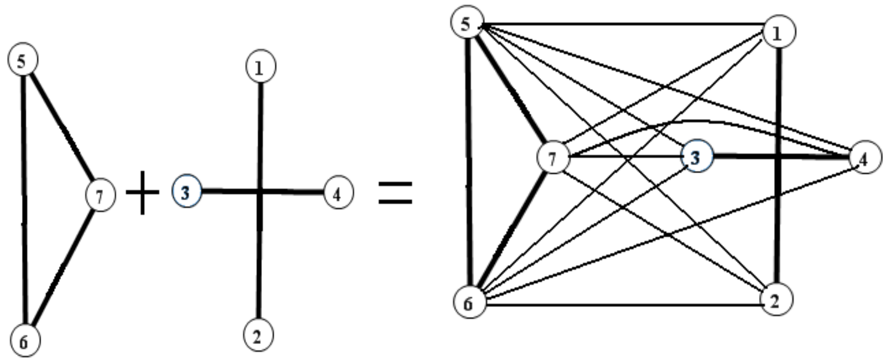


Рис. 27

Означення 15.19 Добутком графів G_1 та G_2 $(G_1 \times G_2)$ називається граф, множини вершин і ребер якого є декартовими добутками, множин вершин і множин ребер, відповідно, кожного з графів. На рисунку 28 зображено приклад декартового добутку графів.

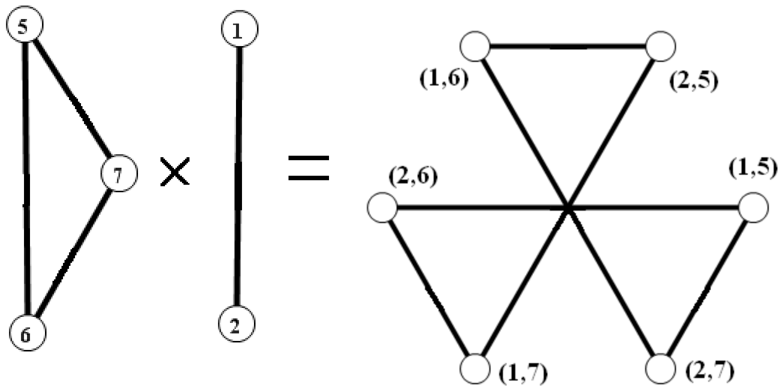


Рис. 28

Контрольні запитання

- Що таке граф?
- Які існують основні типи графів?

- Як визначаються відношення інцидентності та суміжності на графах?
- Як визначається матриця інцидентності?
- Як визначається матриця суміжності?
- Як визначається степінь вершини графа?
- Як визначається зважений граф?
- Які графи називаються ізоморфними?
- За якими ознаками можна класифікувати графи?

§ 16. Маршрути, ланцюги та цикли. Зв'язність. Метрика

16.1 Маршрути, ланцюги та цикли.

Нехай G – неорієнтований граф.

Означення 16.1 *Маршрутом* в G називається скінчена або нескінчена послідовність ребер, кожна послідовна пара яких має спільну інцидентну вершину. Одне й те саме ребро може зустрічатися кілька разів. Кількість ребер маршрута називається його *довжиною*.

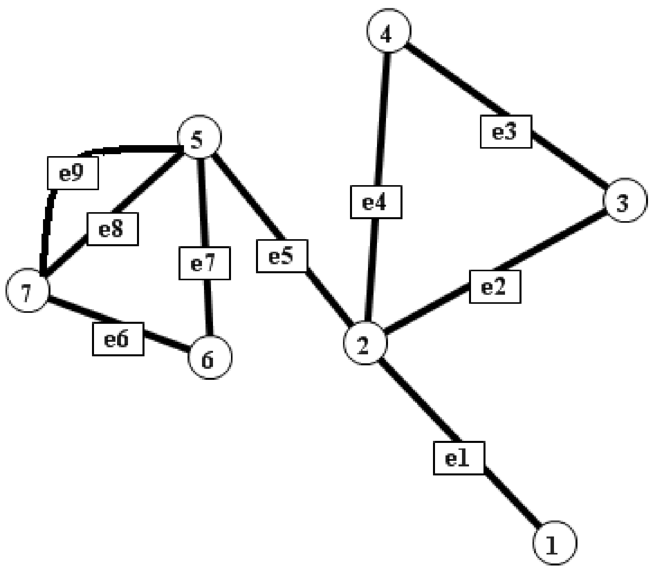


Рис. 29

Довільний скінчений маршрут має перше й останнє ребро, початкову та кінцеву вершини. Розглянемо для прикладу граф, що зображений на Рис.29. Послідовність ребер (e_2, e_5, e_9, e_7, e_6, e_5, e_1) являє собою маршрут довжиною 7.

Якщо маршрут скінчений (e_0, e_1, …, e_n) і v_0=v_n, то маршрут називається замкненим або циклічним. Наприклад, маршрут (e_2, e_3, e_4, e_{10}) циклічний (Рис.29).

Означення 16.22 Маршрут називається *ланцюгом*, якщо кожне ребро в ньому зустрічається не більше одного разу, та простим ланцюгом, якщо довільна вершина G інцидента не більше ніж двом ребрам. Маршрут називається *циклічним,* якщо його початкова та кінцева вершини співпадають.

Наприклад, маршрут (e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8) є ланцюг, але не простий, бо вершини v_2 та v_5 інцидентні більше ніж двом ребрам. Приклад простого ланцюга: (e_3, e_4, e_5) (Рис.29).

Означення 16.3 Циклічний маршрут, що є ланцюгом, називається *циклом.* Якщо він - простий ланцюг, то *простим циклом*.

Приклад циклу нами вже наведено, але це не простий цикл. Простих циклів у графі, зображеному на Рис. 29, чотири. Серед них: (e_2, e_3, e_4), (e_6, e_7, e_8), (e_8, e_9).

16.2 Зв'язність.

Означення 16.4 Вершини $v', v'' \in G$ називаються *зв'язаними,* якщо існує маршрут з початком у вершині v'та кінцем у v''.

Якщо вершина ізольована, то вона зв'язана сама з собою.

Для довільних двох зв'язаних вершин існує простий ланцюг, яких їх з'єднує. Дійсно, нехай вершина v інцидентна більше ніж двом ребрам маршрута $M = (e_0, e_1, ..., e_n)$, який з'єднує вершини v', v''. Нехай e_i – перше з цих ребер, а e_j – останнє ($j > i+1$). Тоді з маршрута можна виключити ребра $e_{i+1}, ..., e_{j-1}$.Одержимо маршрут, де вершина v інцидентна тільки двом ребрам. Якщо одержаний маршрут не є простим ланцюгом, то розглянуту процедуру необхідно зробити з кожною вершиною, що інцидентна більше ніж двом ребрам. Після цього маршрут стане простим ланцюгом.

Таким чином, на множині вершин довільного графа можна ввести відношення зв'язності.

Теорема 16.1 Відношення зв'язності є еквівалентністю.

Доведення. *Рефлексивність.* Якщо вершина ізольована, то вона зв'язана сама з собою (за означенням). Якщо вершина v'

зв’язана з v'', то вершина v' зв’язана сама з собою. Нехай маршрут $(e_1,...,e_n)$ – зв’язує v' та, v'', тоді маршрут $(e_1, \ldots, e_n, e_{n\text{-}1}, \ldots, e_1)$ – є циклічним, отже, зв’язує v' з собою.

Симетричність. Якщо v зв’язана з v', то той же маршрут, пройдений у зворотньому порядку, зв’яже v' з v.

Транзитивність. Якщо v' зв’язана з v'', та v'' зв’язана з v''', тобто існують маршрути $M'(e_1,\ldots, e_n)$ та $M''(e_1, \ldots ,e_p)$, що зв’язують v' з v'' та v'' з v''' відповідно, маршрут $M\ (e'_1, \ldots, e'_n, e''_1, \ldots, e''_p)$ зв’язує v' з v'''. Теорему доведено.∇

Наслідком теореми 1 є існуваня розбиття вершин графа на неперетинні підмножини V_i і граф представляється у вигляді $G = \bigcup G(V_i)$, де $G(V_i)$ – зв’язний підграф або компонента зв’язності.

Якщо граф складається з однієї компоненти, то його називають зв’язним.

Розглянемо процедуру визначення зв’язності графа та кількості його зв’язних компонент.

Позначимо $S=(s_{ij})$ – матрицею суміжності графа G, елементи якої визначаються таким чином: s_{ij}=0, якщо вершини v_i та v_j не суміжні, s_{ij}= ідентифікатор ребра, що з’єднує вершини v_i та v_j.

Теорема 16.2 Елемент матриці S^n являє собою множину ланцюгів довжини n, що з’єднують вершини v_i та v_j.

При піднесенні до n-того степеня матриці S операція добутку елементів матриці полягає в дописуванні праворуч до ідентифікатора, що ві-

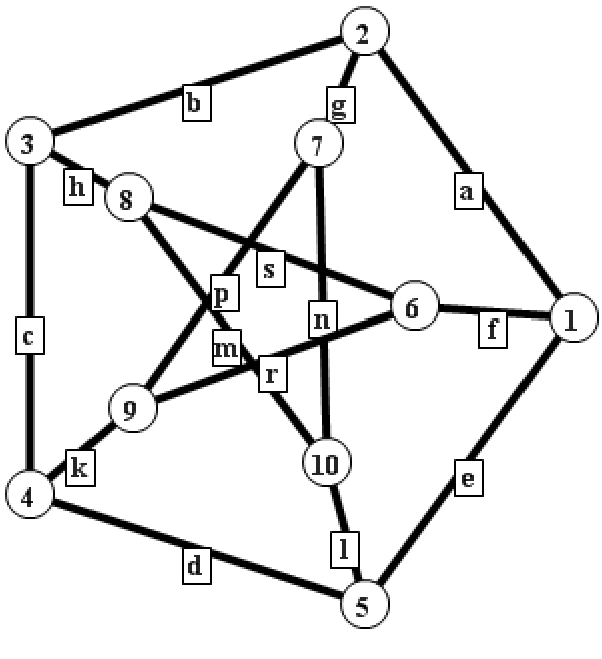


Рис. 30

дповідає i-тому рядку, ідентифікатор, що відповідає j-тому стовпчику, а операція суми – полягає в об’єднанні слів, що одержані в результаті такого «множення».

Доведення теореми 16.2 проводити не будемо, але розглянемо приклад, який дає ілюстрацію його. Розглянемо неорієнтований граф Петерсена (Рис.30). Матриця суміжності S визначає розподіл ребер (ланцюгів одиничної довжини). Для визначення ланцюгів довжини 2 необхідно піднести матрицю S до квадрату. Матриці S та S^2 наведено нижче.

$S=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		a;			e;	f;				
2	a;		b;				g;			
3		b;		c;				h;		
4			c;		d;				k;	
5	e;			d;						l;
6	f;							s;	r;	
7		g;							p;	n;
8			h;			s;				m;
9				k;		r;	p;			
10					l;		n;	m;		

$S^2=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	a,a;e,e;f,f;		a,b;	e,d;			a,g;	f,s;	f,r;	e,l;
2		a,a;b,b;g,g;		b,c;	a,e;	a,f;		b,h;	g,p;	g,n;
3	b,a;		b,b;c,c;h,h;		c,d;	h,s;	b,g;		c,k;	h,m;
4	d,e;	c,b;		c,c;d,d;k,k;		k,r;	k,p;	c,h;		d,l;
5		e,a;	d,c;		e,e;d,d;l,l;	e,f;	l,n;	l,m;	d,k;	
6		f,a;	s,h;	r,k;	f,e;	f,f;s,s;r,r;	r,p;			s,m;
7	g,a;		g,b;	p,k;	n,l;	p,r;	g,g;p,p;n,n;	n,m;		
8	s,f;	h,b;		h,c;	m,l;		m,n;	h,h;s,s;m,m	s,r;	
9	r,f;	p,g;	k,c;		k,d;			r,s;	k,k;r,r;p,p;	p,n;
10	l,e;	n,g;	m,h;	l,d;		m,s;			n,p;	l,l;n,n;m,m

Додаючи матриці S та S^2, бачимо, що в матриці сумі відсутні нульові елементи. Отже, між кожною вершиною графа Петерсена існують ланцюги довжини 1 або 2, тобто граф зв’язний.

Означення 16.5 Матриця A називається блочною або k–*кліткового*, якщо її можна привести до вигляду:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix},$$

де матриці A_i (i=1, … , k), не містять ні одного нульового елемента (окрім, може бути, діагональних).

Теорема 16.3 (Без доведення). Граф G складається з k компонент зв'язності тоді і тільки тоді, коли його матриця *досяжності* $D(G)$ k-кліткова. Матриця досяжності визначається за формулою: $D(G)=\sum_{i=1}^{d(G)} S^{i}(G)$, де S($G$)–матриця суміжності, $d(G)$ - діаметр графа (означення діаметра графа наведено у 16.4).

Означення 16.5 Найменша кількість вершин $k(G)$, видалення яких робить граф незв'язним або тривіальним (таким, що має одну вершину), називається *зв'язністю* графа.

З цього означення випливає, що довільний незв'язний граф має зв'язність $k(G)$=0. Повний граф K_n стає тривіальним, якщо видалити n–1 вершин і тому $k(K_n) = n$-1. Якщо $k(G) \geq n$, то граф називається n-зв'язним.

Позначатимемо $\delta(G) = \min S(v_i),\ v_i \in G$– мінімальний степінь вершин графа.

Означення 16.6 Число $\lambda(G)$ називається реберною зв'язністю графа і дорівнює найменшій кількості ребер, видалення яких приводить до незв'язного графа.

Незв'язний граф - $\lambda(G)$=0.

Для довільного графа G мають місце нерівності $k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

16.3 Теорема Менгера. Розріз.

Важливим питанням у дослідженні графів є таке: наскільки сильна зв'язність графа? Це питання можна поставити й так: скільки ребер необхідно вилучити з графа, щоб він втратив зв'язність?

Наступні означення та теореми дають опис понять, пов'язаних з цим питанням.

Означення 16.7 Прості ланцюги називаються *реберно неперетинними*, якщо ніякі два з них не мають спільного ребра. Якщо такі ланцюги не мають спільних вершин, то вони називаються *вершинно неперетинними*.

Нехай – зв'язний граф та *u,v* його вершини.

Означення 16.8 Множина ребер *E* називається *u,v – розділяючою* в *G,* якщо довільний простий ланцюг включає ребро з *E*.

Означення 16.9 Множина вершин графа *V*, яка не містить в собі *u,v*   називається *u,v–відокремлюючою*, якщо довільний звичайний ланцюг з *u* до *v* проходить через вершину з множини *V*.

Якщо $|E| = k$, то кількість реберно неперетинних звичайних ланцюгів з *u* до *v* не перевищує *k*.

Нижче наведемо декілька теорем (без доведення), які характеризують степінь зв'язності графа.

Теорема 16.4 Максимальна кількість реберно неперетинних простих ланцюгів з *u* до *v* дорівнює мінімальній кількості ребер в *u,v* - розділяючій множині.

Теорема 16.5 Максимальна кількість вершинно неперетинних простих ланцюгів з *u* до *v* дорівнює мінімальній кількості вершин в *u,v* – відокремлюючий множині.

Теорема 16.6 (Менгера). Для довільних двох множин вершин V_α та V_β найбільша кількість неперетинних ланцюгів, що з'єднують V_α та V_β дорівнює найменшій кількості вершин, відокремлюючих V_α та V_β.

Означення 16.10 Відокремлюючою множиною зв'язного графа *G* –називається така множина ребер, вилучення яких з *G* робить його незв'язним.

Означення 16.11 *Розрізом* називається мінімальна відокремлююча множина в графі G, яка не має власної відокремлюючої підмножини. Розріз, що містить одне ребро називається *мостом*.

Розглянемо граф, що зображено на Рис.29. Для вершин 3 та 6 цього графа матимемо: $\{3,6\}$ - розділяючою множиною буде, наприклад, $\{e_2, e_4\}$; $\{3,6\}$-відкремлюючою множиною буде $\{2,5\}$; вікремлюючою множиною графа буде множина ребер $\{e_7, e_6, e_5\}$; розрізом-$\{e_2, e_3\}$; мостом $-\{e_5\}$.

16.4 Метрика.

Означення 16.12 Метричним простором називається множина M деяких елементів з заданою на ній числовою функцією $d\,(v',v'')\ (\forall\ v',v''\in M)$, яка задовольняє наступним аксіомам:

1) $d\,(v',v'')\geq 0$, причому $d(v',v'')=0$ тоді і тільки тоді, коли $v'=v''$;

2) $d(v',v'')=d(v'',v')$;

3) $d(v',v'')+d(v'',v''')\geq d(v',v''')$ - нерівність трикутника.

Функція $d\,(v',v'')$ називається метрикою.

Нехай G – зв'язний неорієнтований граф, v' та v''– довільні його дві вершини, тоді існує $(e_1, \ldots, e_n)$ – простий ланцюг, що зв'язує v' та v''.

Означення 16.13 Довжина мінімального ланцюга, який зв'язує v' та v'' називається відстанню між v' та v''. Позначимо відстань між v' та v'' – $d(v',v'')$.

Зрозуміло, що $d(v',v'')=0$, якщо $v'=v''$ і $d(v',v'')>0$, якщо $v'\neq v''$. Крім того, $d(v',v'')=d(v'',v')$.

Нехай M'(v',v'') та M''(v'',v''') мінімальні прості ланцюги, тоді M$(e'_1, \ldots, e'_p, e''_1, \ldots, e''_p)$ зв'язує (v',v'''), його довжина $d(v',v'')+d(v'',v''')$, якщо це не простий ланцюг, то існує більш короткий маршрут $\overline{\mathrm{M}}$. Отже, $d(v',v'')+d(v'',v''')\geq d(v',v''')$. Таким чином відстань $d(v',v'')$ на графі має всі властивості метрики, тобто граф можна розглядати як метричний простір.

Означення 16.14 Нехай G скінчений неорієнтований зв'язний граф. ***Діаметром*** графа G називається число $d(G) = \max\limits_{v',v''\in G} d(v',v'')$.

Найкоротші прості ланцюги, що зв'язують v' та v'' з максимальною відстанню між ними, називаються діаметральними ланцюгами.

Означення 16.15 Нехай $v \in G$ довільна фіксована вершина. ***Максимальним віддаленням*** (або ексцентриситетом) вершини v в графі G називається величина $r(v) = \max\limits_{v'\in G} d(v,v')$.

Означення 16.16 Величина $r(G) = \min\limits_{v'\in G} r(v')$ називається ***радіусом*** графа. Вершина v називається ***центром*** графа G, якщо максимальне віддалення від неї дорівнює $r(G)$. Найкоротший простий ланцюг від центру до максимально віддаленої вершини називається радіальним ланцюгом.

Центр не обов'язково єдиний. Для графа, зображеного на Рис.29, метричні характеристики такі: $d(G)=3$, $r(G)=2$, граф має два центри, це вершини 2 та 5.

Контрольні запитання

- Що таке маршрут на графі?
- Який маршрут називається ланцюгом, циклом, простим ланцюгом?
- Як визначаються відношення зв'язності на графах?
- Як визначається матриця досяжності?
- Як визначається розріз?
- Що таке міст?
- Як визначається відстань на графах?
- Як визначається метрика на графі?
- Як визначається діаметр графа?
- Як визначається радіус та центр графа?

§ 17. Ейлерові та гамільтонові графи. Цикломатика графа.

17.1 Розбиття ребер. Ейлерові графи.

Розглянемо задачу про розбиття ребер графа на найменшу кількість підмножин, що не перетинаються, кожна з яких є або ланцюгом, або циклом. Розбиття такого типу будемо називати реберними відокремленнями, а розбиття, що складаються з найменшої кількості ланцюгів та циклів – мінімальними реберними відокремленнями. Про мінімальне реберне відокремлення будемо казати, що воно покриває граф.

Кожне ребро графа являє собою ланцюг, а у випадку петлі цикл. Отже, реберне відокремлення існує у кожному скінченому графі. Крім того, так як графи скінчені, то завжди існує мінімальне реберне відокремлення, тобто покриття графа. Мінімальне реберне відокремлення для незв'язного графа одержується об'єднанням мінімальних реберних відокремлень кожної компоненти зв'язності, отже, надалі будемо розглядати тільки однозв'язні графи.

На Рис. 31 представлено приклад графа і його реберного відокремлення.

Серед графів важливе місце займають такі реберні відокремлення, в яких є єдиний ланцюг або цикл, тобто графи, сукупність ребер яких утворює ланцюг або цикл.

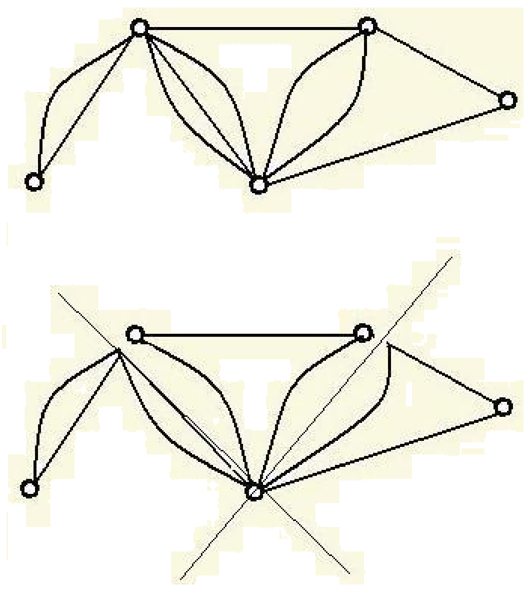


Рис. 31

Означення 17.1. Граф називається ***унікурсальним***, якщо його реберне відокремлення являє собою єдиний ланцюг або цикл.

В унікурсальному графі існує можливість неперервного руху вздовж усіх ребер без повторного проходження якогось ребра.

Відмітимо, що властивості мінімальних реберних відокремлень суттєво залежать від наявності в графі вершин непарного степеня.

Означення 17.2 Граф називається ***ейлеровим***, якщо всі його вершини мають парний степінь.

Теорема 17.1 Якщо $G = <V,U>$ - зв'язний ейлеровий граф, то U - цикл, який утворює єдине мінімальне реберне відокремлення, що покриває граф G.

Доведення. Якщо граф G містить петлі, то вилучимо їх і розглянемо новий граф, всі вершини якого мають парний степінь.

Почнемо рухатись з довільної вершини v_1 вздовж деякого ребра до другої вершини v_2. Вершина має парний степінь, отже, інцидентна, якнайменше, іншому ребру, вздовж якого продовжимо рух до вершини v_3. Продовжуючи цей процес обходу, ми дійдемо до вершини $v_n=v_1$, бо парність всіх вершин гарантує можливість покинути вершину вздовж ребра, відмінного від того, вздовж якого до цієї вершини ми прийшли. Отже, ребра, які пройдені таким чином, утворюють цикл. Якщо при цьому з'ясовується, що пройдено всі ребра, то теорему доведено.

Якщо ж ще не всі ребра пройдено, то вилучимо з графа цикл, який вже пройдено, і застосуємо описану процедуру до підграфа, що залишився. Кожна вершина цього підграфа має парний степінь, отже, прийдемо до побудови ще одного циклу. Якщо ребер більше немає, то теорему доведено, якщо ж ще не всі ребра пройдено, то продовжимо описану процедура доти, доки ребра не скінчаться. Так як граф скінчений, то ця процедура на якомусь кроці приведе до того, що ребер не залишиться.

Множина циклів разом з початковими петлями, яку одержимо, і є реберним відокремленням графа G. А так, як граф зв'язний, то об'єднання всіх циклів знову є циклом. ∇

Означення 17.3 Цикл, який покриває граф, називається ейлеревим.

Згідно з теоремою 1, кожний зв'язний ейлеровий граф, має ейлеровий цикл. Вірне й обернене твердження. Граф, який має ейлеровий цикл, є ейлеревим зв'язним графом.

Мають місце наступні факти.

Теорема 17.2 (Без доведення). Якщо зв'язний граф має $2n$ вершин непарного степеня, де $n \geq 1$, то довільне мінімальне реберне відокремлення графа складається з ланцюгів, кожний з яких з'єднує дві вершини непарного степеня.

Теорема 17.3 (Без доведення). Зв'язний граф є унікурсальним тоді і тільки тоді, коли він має 0 або 2 вершини непарного степеня. В першому випадку він покривається циклом, в другому – ланцюгом, який з'єднує вершини непарного степеня.

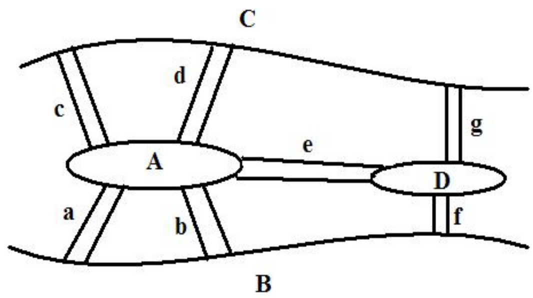


Рис. 32

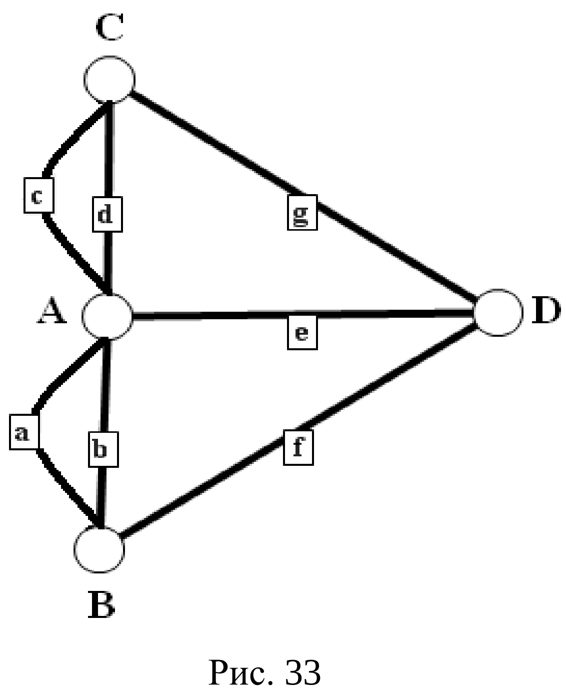


Рис. 33

Класичним прикладом, що має відношення до унікурсальних графів, є задача про Кенігсберзькі мости. Задача полягала в тому, щоб дати відповідь на питання: чи можна виїхавши з деякої точки міста, пройти кожен з мостів по одному разу та повернутися в початкову точку? (Рис.32). Цю задачу сформулював Л.Ейлер у 1736 р. у вигляді: "з'ясувати, чи існує неперервний маршрут, який проходить по кожному з мостів точно один раз”. Граф цієї задачі зображено на Рис. 33. Задача про мости еквівалентна питанню: чи є цей граф унікурсальним?

Так як він має всі чотири вершини непарного степеня, то він не є унікурсальним. Згідно з теоремою 2, потрібно, принаймні, два ланцюги, щоб покрити цей граф.

Наведемо метод побудови ейлеревого ланцюга у даному ейлеревому графі, який носить назву **алгоритм Фльорі.** Він полягає у виконанні наступної процедури, яка завжди є можливою і приводить до побудови ейлеревого ланцюга.

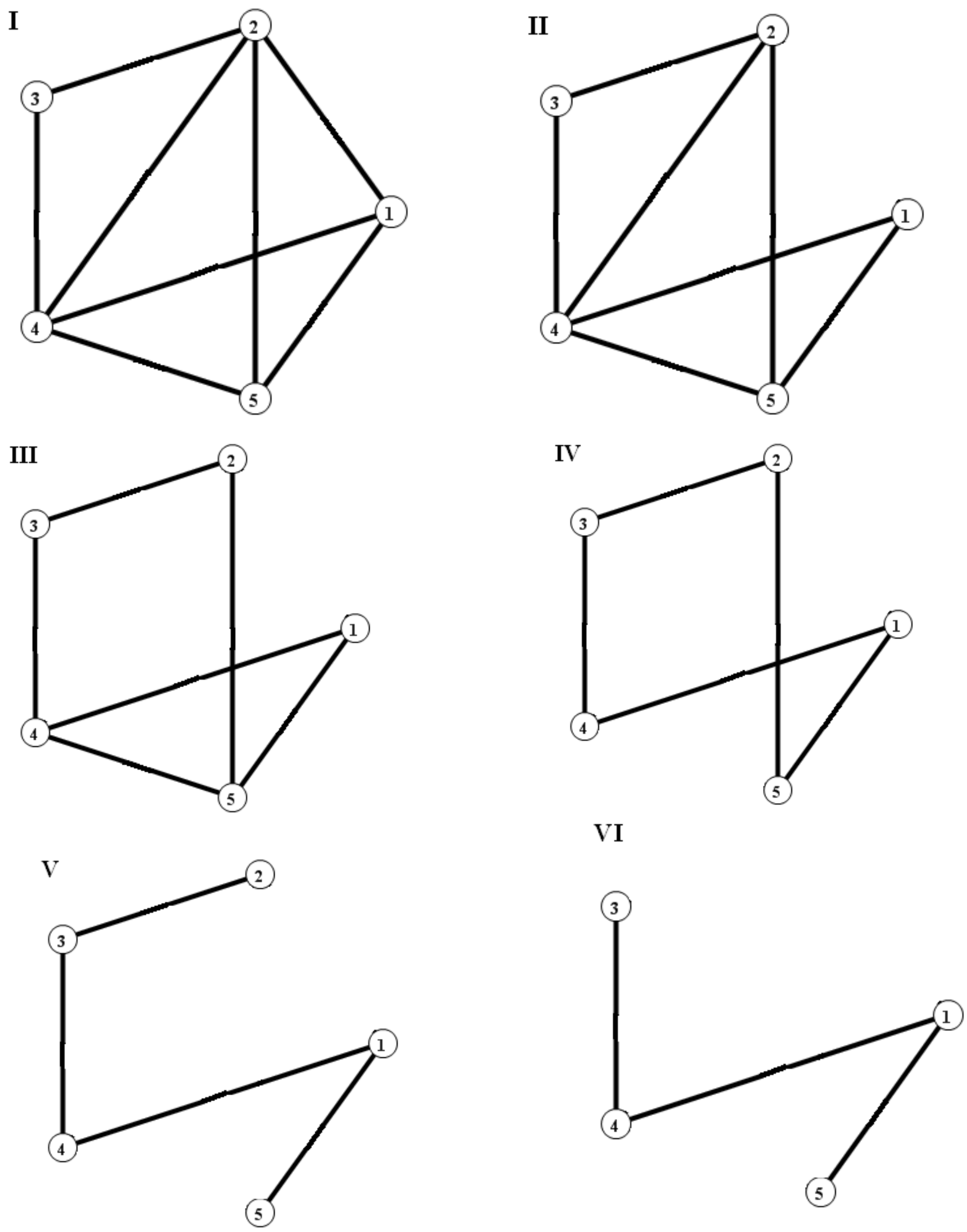


Рис. 34

Виходячи з довільної вершини графа, виконуємо обхід вершин, дотримуючись наступних правил:

1) витираємо ребра після їх проходження, а також ізольовані вершини, що при цьому утворюються;

2) на кожному етапі проходимо по мосту тільки тоді, коли немає інших можливостей.

На Рис. 34 наведено побудову ейлеревого ланцюга методом Фльорі. Рух починається з вершини з номером 1 (на кожному етапі вершини, через які ми проходимо виділені). Отже, на першому етапі викреслюється ребро (1,2), II етап – викреслюється ребро (2,4), III етап – ребро (4,5), IV етап – ребро (5,2), V етап – ребро (2,3) далі, очевидно, рух продовжуємо по мостах (3,4), (4,1), (1,5). Таким чином одержимо ейлерів ланцюг з початком у вершині 1 і кінцем у вершині 5. Цей граф є напівейлеровий.

17.2 Гамільтонові графи.

Поряд із задачею про визначення унікурсальності графа, важливою є задача, яку можна сформулювати так: знайти при яких умовах скінчений граф містить ланцюг або цикл, що проходить через всі вершини.

Якщо такий ланцюг чи цикл існують, то вони називаються *гамільтоновим* ланцюгом або гамільтоновим циклом.

Означення 17.4 Простий цикл називається *гамільтоновим*, якщо він проходить через кожну вершину графа. Граф, що містить такий цикл називається гамільтоновим.

Якщо граф має гамільтонів цикл, то він має і гамільтонів ланцюг, але оберне твердження, взагалі кажучи, невірне. Наприклад, *дводольний граф, тобто граф, носій якого розбито на дві підмножини попарно несуміжних вершин*, має кілька гамільтонових ланцюгів, але не має гамільтонового циклу.

Повний граф, очевидно, містить гамільтонів цикл, причому не один. У загальному випадку задача про відшукання гамільтоніових ланцюгів та гамільтонових циклів є досить складною. Немає ефективної процедури знаходження гамільтонова ланцюга в довільному графі.

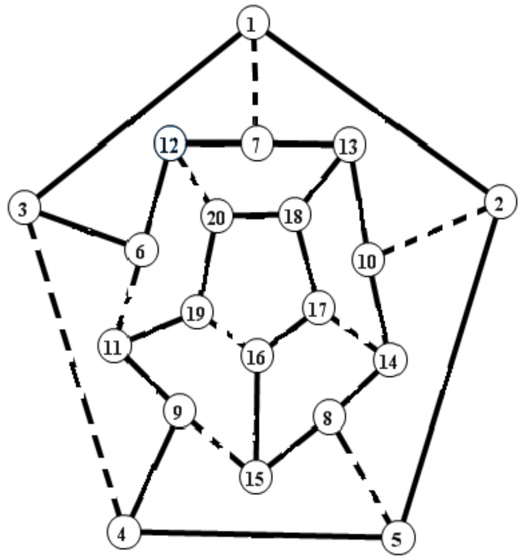


Рис. 35

До питань, пов'язаних з гамільтоновими графами, приводять деякі цікаві задачі. Серед них: задача про вихід з лабіринту; задача про комівояжера, задача Гамільтона про знаходження гамільтонового циклу в графі, що визначається вершинами та ребрами правильного багатогранника, додекаедра (Рис. 35).

Нижче наведено (без доведення) достатні умови гамільтоновості графа.

Теорема 17.4 (Дірак). Якщо $G(V,U),|V| \geq 3$ зв'язний граф та степінь кожної вершини $v_i \in V : \rho(v_i) \geq \left[\frac{1}{2}|v|\right]$, то граф є гамільтоновим.

Теорема 17.5 (Оре). (Без доведення). Якщо у графі $G(V,U),|V| = n \geq 3$ сума степенів довільних двох вершин не менше ніж *n*, то граф є гамільтоновим.

17.3 Цикломатика.

Для дослідження циклів у графі використовують цикломатичну матрицю $C(G)=[C_{ij}]$, яка визначається за правилом $C_{ij} = \begin{cases} 1, e_j \in Z_i \\ 0, e_j \notin Z_i \end{cases}$, де e_j ребро, Z_i - цикл.

Кожному циклу відповідає вектор-рядок матриці. Множина всіх векторів-рядків матриці $C(G)$, кожний з яких відповідає деякому циклу, утворює векторний простір, який називається простором циклів графа G.

Для довільних двох циклів графа мають місце умови:

1. $Z_i Z_j \in C(G), \quad Z_i \cap Z_j \neq 0 \Rightarrow Z_i \oplus Z_j \in C(G)$

2. $Z_i \oplus Z_j = Z_j \oplus Z_i$

3. $\left(Z_i \oplus Z_j\right) \oplus Z_k = Z_i \oplus \left(Z_j \oplus Z_k\right)$.

Крім того, у лінійному просторі $C(G)$ можна ввести скалярний добуток:

$$\left\langle Z_i, Z_j \right\rangle = \bigoplus_{k=1}^{m} z_{ik} z_{jk} .$$

Означення 17.5 *Базисом* векторного простору називається довільна мінімальна система лінійно незалежних векторів, яка породжує цей простір.

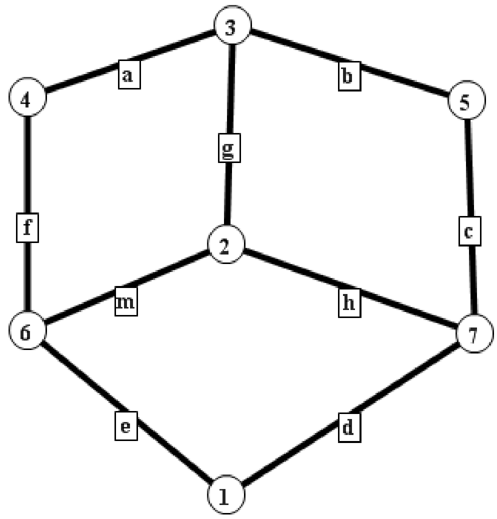


Рис. 36

Базис циклів графа G – базис простору G, що складається з простих циклів.

Вектор Z залежить від простих циклів, якщо він представляється у вигляді $Z = \bigoplus_{i=1}^{n} Z_i$ Довільний вектор-цикл графа може бути представленим у вигляді лінійної комбінації базисних векторів-циклів. Розглянемо, наприклад, цикломатичну матрицю для графа, зображеного на Рис. 36.

Базисом простору циклів даного графа можна вважати систему векторів Z_1, Z_2, Z_3. Можна переконатись, що всі інші цикли цього графа представляються як лінійні комбінації базисних векторів.

$$Z_1 \oplus Z_2 \oplus Z_3 = Z_4,\ Z_1 \oplus Z_2 = Z_5,\ Z_1 \oplus Z_3 = Z_7,\ Z_2 \oplus Z_3 = Z_6.$$

Цикломатична матриця має вигляд:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} a & b & c & d & e & f & m & g & h \end{array} \\
Z = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \end{array}
\end{array}
$$

Означення 17.6. *Деревом* називається зв'язний граф, що не містить ні одного циклу.

Означення 17.7 *Остовним підграфом* графа називається підграф, який містить всі вершини. *Остовом* називається остовний підграф, що є деревом. На Рис. 37 представлено остов графа, зображеного на Рис. 36. *Хордою* остова в графі G називається довільне ребро, що не належить остову.

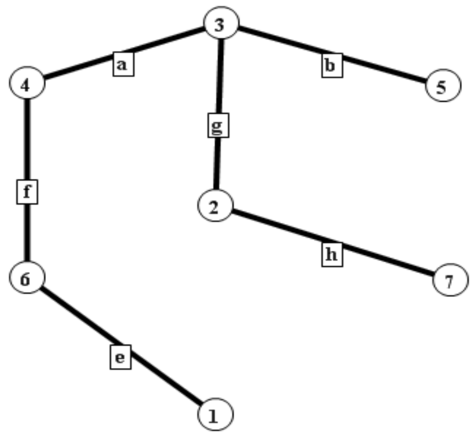


Рис. 37

Довільний підграф, що складається з остова та ребра, що йому не належить, має точно один цикл.

Означення 17.8 Число $\nu(G)$, яке дорівнює кількості хорд довільного остова графа G, називається цикломатичним числом графа G. Якщо у зв'язному графі $|V| = n, |E| = m$, то $\nu(G)= m\text{-}n+1$. Якщо граф має k-компонент зв'язності, то $\nu(G)= m\text{-}n+k$

Теорема 17.6 (Ейлера). Кількість базисних циклів графа дорівнює його цикломатичному числу $\nu(G)$.

Означення 17.9 Базисною системою циклів для даного остова D графа G називається множина всіх циклів, кожний з яких містить тільки одну хорду з остова D.

Будь-яке ребро базисного циклу є хордою. Виконуючи $2^{\nu}-\nu-1$ раз операцію додавання за модулем 2 над базисними циклами, отримуємо всю множину циклів цього простору.

Базисною цикломатичною матрицею графа G називається матриця $Z=\lfloor z_{ij}\rfloor$, що складається з $\nu(G)$ рядків і m стовпців. Елемент цикломатичної матриці $z_{ij}=1$, якщо ребро a_j належить циклу Z_i, і дорівнює 0 в іншому випадку. Припустимо, що система незалежних циклів породжена деяким остовом D графа G. Тоді, якщо ребра, які не належать остову D, послідовно пронумерувати від 1 до $\nu(G)$, а ребра остова D від $\nu(G)+1$ до m, то матриця циклів Z матиме вигляд $Z=(I|Z_{\nu+1})$, де I - одинична матриця розміру $\nu\times\nu$, а $Z_{\nu+1}$ - матриця остову розміру $\nu\times(m-\nu)$. Вертикальна риска означає, що до матриці I дописано зліва матрицю $Z_{\nu+1}$.

У розглянутому прикладі базисна цикломатична матриця має три рядки. Нижче наведено матрицю, яка має чотири рядки.

	e	a	b	h	g	f	c	d	m
Z1	1	0	0	1	0	0	0	1	1
Z2	0	1	0	0	1	1	0	0	1
Z3	0	0	1	1	1	0	1	0	0
Z	1	0	1	0	1	0	1	1	1

ХОРДИ **ОСТОВ**

У четвертому рядку отримуються інші, не базисні, цикли у результаті логічного додавання різних комбінацій перших трьох рядків, зокрема тут наведено логічну суму першого і третього базисних циклів.

17.4 Алгоритм визначення базисної цикломатичної матриці.

Нехай цикломатичне число графа G дорівнює $\nu(G)$.

1. Підносимо матрицю суміжності до степеня n. Клітинки головної діагоналі отриманої матриці будуть непорожніми. Вони

містять усі цикли довжини n даного графа. Можливі наступні варіанти:

а) різних, тобто незалежних, циклів довжини n більше ніж $\nu(G)$, тоді, вибираючи довільні $\nu(G)$ циклів, отримаємо базисну цикломатичну матрицю, що завершує роботу алгоритму;

б) різних, тобто незалежних, циклів довжини n менше ніж $\nu(G)$, наприклад, $k_1 < \nu(G)$, усі ці цикли довжини n утворюють перші k_1 рядків базисної цикломатичної матриці.

2. Підносимо матрицю суміжності до степеня $n+1$. Клітинки головної діагоналі отриманої матриці містять усі цикли довжини $n+1$ даного графа. Можливі наступні варіанти:

а) різних циклів довжини $n+1$ більше ніж $\nu(G)-k_1$, тоді, вибираючи довільні $\nu(G)-k_1$ циклів, отримаємо базисну цикломатичну матрицю, що завершує роботу алгоритму;

б) різних циклів довжини $n+1$ менше ніж $\nu(G)-k_1$, наприклад, $k_2 < \nu(G)-k_1$, усі ці цикли утворюють наступні k_2 рядків базисної цикломатичної матриці.

Розпочинається процедура з n=3. Так як $\nu(G)$ скінчене число, то через скінчену кількість s кроків процедура завершиться, тобто коли буде виконано умову $k_1 + k_2 + \ldots + k_s \geq \nu(G)$.

Зауваження 17.1 Якщо виконуються умови ейлеровості зв'язного графа, тобто усі вершини мають парний степінь, то у разі, коли кількість ребер графа дорівнює m, ейлерів цикл, який покриває граф, буде виписано на головній діагоналі m-ого степеня матриці суміжності. Також ейлеровий цикл можна отримати, виконуючи операцію складання за модулем 2 над базисними циклами. При цьому треба врахувати, що усі компоненти вектора, що відповідає ейлеревому циклу, дорівнюють одиниці.

Зауваження 17.2 Якщо граф напівейлеровий, тобто усі вершини, окрім двох, мають парний степінь, то, у разі коли кількість ребер графа дорівнює m, ейлерів ланцюг між вершинами з непарними степенями, який покриває граф, буде виписано у клітинках m-ого степеня матриці суміжності, які відповідають вершинам із непарними степенями.

Зауваження 17.3 Якщо граф гамільтонів, тобто існує простий цикл, що прходить через усі вершини, то у разі, коли кількість вершин графа дорівнює n, гамільтоновий цикл буде виписано на головній діагоналі n -ого степеня матриці суміжності. Також гамільтоновий цикл можна отримати, виконуючи операцію складання за модулем 2 над базисними циклами. При цьому гамільтоновий цикл це є підграф, матриця суміжності якого в кожному стовпчику і рядку має тільки по два ненульових елементи.

17.5 Алгоритм пошуку гамільтонового шляху, циклу.

Нехай граф має n вершин. Обчислюємо степіь S^{n-1}матриці суміжності. Переглядаються елементи клітинок матриці $s_{ij}, i < j$. У клітинці s_{ij} виписано усі шляхи з вершини v_i до вершини v_j довжини $n-1$. Якщо шлях не проходить через усі вершини, його необхідно видалити з клітинки. Для цього можна використати наступну властивість: якщо шлях не проходить через усі вершини, то він обов'язково має хоча б один цикл. Отже, для підграфа, утвореного шляхом довжини $n-1$, необхідно обчислити цикломатичне число. Якщо воно не дорівнює нулю, то такий шлях не може бути гамільтоновим і видаляється з клітинки s_{ij}. Після такої процедури перевірки шляхи, що залишуться, є гамільтоновими. Можливий випадок, коли усі клітинки виявляться порожніми. Це означатиме, що граф не має гамільтонового шляху.

Для відшукання гамільтонових циклів можна застосувати таку ж процедуру для матриці S^n і її діагональних клітинок.

17.6 Матриця розрізів. Базисна матриця розрізів.

Розрізи і цикли графа мають певний зв'язок.

Означення 17.10 *Рангом* розрізу називається кількість ребер в остові $\chi(G) = n - k$ де k-кількість компонент зв'язності.

Множина розрізів, як і множина циклів, утворює лінійний простір відносно операції логічного додавання.

Можна поряд із базисною системою циклів розглядати базисну систему розрізів.

Базисна матриця розрізів $\Re = \lfloor r_{ij} \rfloor$ визначається аналогічно — як матриця з $\chi(G)$ рядками і m стовпцями, де $r_{ij} = 1$, якщо ребро a_j належить розрізу R_i, і 0 в іншому випадку. При тій же самій нумерації ребер, що і вище, матриця $\Re$ має вигляд $\Re = \left(\Re_{m-\chi} \middle| I\right)$, де I - одинична матриця розміру $\chi \times \chi$, а $\Re_{\chi+1}$ - матриця хорд розміру $m \times (m - \chi)$.

Базисну матрицю розрізів будують таким чином. Вилучається ребро остова. Множина вершин при цьому розпадеться на дві неперетинні підмножини V_1 та V_2. Множина всіх ребер у графі G, кожне з яких з'єднує вершину з V_1 з вершиною з V_2, є розрізом графа G. Множина всіх розрізів для кожного ребра остова є базисною системою розрізів даного остова. Побудована таким чином базисна система розрізів графа називається спряженою з базисною системою циклів для даного остова.

	e	a	b	h	g	f	c	d	m
R1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
R2	0	1	1	0	1	0	0	0	0
R3	0	1	0	0	0	1	0	0	0
R4	0	0	1	0	0	0	1	0	0
R5	1	0	0	0	0	0	0	1	0
R6	1	1	0	0	0	0	0	0	1
R	0	1	1	1	0	0	0	0	1

ХОРДИ **ОСТОВ**

Наведена матриця має сім рядків. У сьомому рядку отримуються інші, не базисні, розрізи, як результат логічного додавання різних комбінацій перших шести рядків, зокрема тут наведено логічну суму першого і шостого базисних розрізів.

Виконуючи $2^{\chi(G)} - \chi(G) - 1$ разів операцію логічного додавання розрізів, одержимо всю множину розрізів графа.

17.7 Алгоритм побудови базисної матриці розрізів спряженої з базисною системою циклів.

Нехай визначено базисну систему циклів. Вилучення певного набору хорд дає остов графа. Кожний розріз містить обов'язково одне ребро цього остова у сукупності з деякими хордами даного графа. Кількість базисних розрізів на одиницю менше кількості ребер остова.

1. Вилучаємо одне з ребер остова, отримаємо двозв'язний граф.

2. Знайдемо матрицю досяжності отриманого графа. Вона має два блоки.

3. До отриманої матриці додаємо початкову матрицю суміжності графа (за умови збереження нумерації стовпчиків і рядків), тоді зовні блоків матриці досяжності з'являться ненульові елементи, що визначають набір хорд шуканого розрізу. Разом з вилученим ребром остова ці хорди утворюють розріз.

Повторюючи цю процедуру для $\chi(G)$ ребер остова, отримаємо весь базисний набір розрізів, тобто побудуємо базисну матрицю розрізів спряжену до базисної системи циклів даного графа.

Нарешті, враховуючи те, що множина усіх розрізів є лінійний простір, довільний розріз графа отримується як лінійна комбінація базисних розрізів, тобто логічним додаванням рядків базисної матриці розрізів.

Теорема 17.6 Матриця фундаментальних циклів Z і транспонована матриця фундаментальних розрізів $\Re'$ ортогональні, тобто $Z \cdot \Re' = 0$. При множенні матриць застосовується операція логічного додавання.

Доведення теореми базується на такому твердженні.

Теорема 17.7 ([6]) Довільний цикл та довільний простий розріз мають парну кількість (можливо нуль) спільних ребер.

Розріз називається простим, якщо він не містить у собі підмножини ребер, яка також є розрізом, тобто він є мінімальним. Базисна система розрізів графа спряжена з базисною системою циклів для даного остова складається тільки з простих розрізів. Звідси випливає, що при перемноженні матриць $Z \cdot \Re'$ вектор-рядок першої (деякий базисний цикл) поелементно перемножується з вектором-стовпчиком другої (деяким базисним простим розрізом) і при логічному додаванні отриманих добутків буде парна кількість одиничних доданків, що в результаті дасть значення 0. Отже, лінійний простір циклів $L^{\nu}(Z)$ є ортогональним до лінійного простору простих розрізів $L^{\chi}(\Re)$ відносно скалярного добутку $\langle \cdot,\cdot \rangle$, тобто:

$$\left\langle Z_i, \Re_j \right\rangle = \bigoplus_{k=1}^{m} z_{ik} r_{jk} = 0, \quad \forall Z_i \in L^{\nu}(Z), \forall \Re_j \in L^{\chi}(\Re).$$

Контрольні запитання

- Що таке покриття графа?
- Який граф називається унікурсальним?
- Які умови унікурсальності графа?
- Який граф називається Ейлеровим?
- Який граф називається гамільтоновим?
- Які умови існування гамільтонового циклу на графі?
- Як визначається цикломатична матриця?
- Що називається хордою графа?
- Як визначається остов графа?
- Як визначається цикломатичне число?
- Як визначається базис циклів графа?
- Як визначається базис розрізів графа?

§ 18. Задача комівояжера

18.1 Задача комівояжера.

Нехай є транспортна система, що сполучує деякі пункти певного призначення. Необхідно відвідати усі ці пункти таким чином, щоб пройдений маршрут був найкоротшим серед усіх можливих.

У термінах теорії графів ця задача формулюється наступним чином: у зваженому зв'язному графі знайти маршрут мінімальної ваги, що проходить через усі вершини. Можливо посилення вимоги щодо проходження маршруту, а саме: пройти усі пункти і повернутися у початковий, тобто у графі необхідно знайти цикл мінімальної ваги, який проходить через усі вершини.

У такій постановці задача комівояжера має розв'язок завжди і називається загальною задачею комівояжера.

Якщо до викладених вище вимог, щодо проходження маршруту, додати ще умову відвідування кожного пункту тільки один раз, то задача значно ускладнюється і розв'язку може не мати. На мові теорії графів така постановка зводиться до відшукання у графі гамільтонового шляху або циклу мінімальної ваги. Ця задача називається гамільтоновою задачею комівояжера.

18.2 Матричний метод відшукання гамільтонова ланцюга або циклу мінімальної ваги.

Поіменуємо ребра даного графа, і побудуємо матрицю суміжності для нього. Згідно з зауваженням 17.3 та алгоритму пошуку гамільнового шляху, циклу п.17.5, шукані шляхи мінімальної ваги знаходяться серед елементів матриці S^{n-1}, а цикли мінімальної ваги знаходяться серед діагональних елементів матриці S^{n}. На останок треба обчислити ваги отриманих шляхів або циклів, і вибрати серед них найменше значення.

Розглянемо роботу алгоритма на прикладі.

Приклад 18.1 На зваженому графі (Рис. 38) розв’язати гамільтонову задачу комівояжера. Ваги ребер мають наступні значення:

$$\mu(a)=5, \mu(b)=6,\ \mu(c)=3,$$
$$\mu(d)=5,\ \mu(e)=8,\ \mu(f)=6,$$
$$\mu(g)=4,\ \mu(h)=5.$$

Будуємо матрицю суміжності даного графа. Послідовно обчислюємо степені цієї матриці четвертого і п’ятого порядку при цьому враховуємо наступне: слова, в яких повторюються літери, вилучаємо з матриці; слова, що складаються з однакового набору літер, незалежно від порядку, вважаються однаковими і вносяться до матриці тільки один раз.

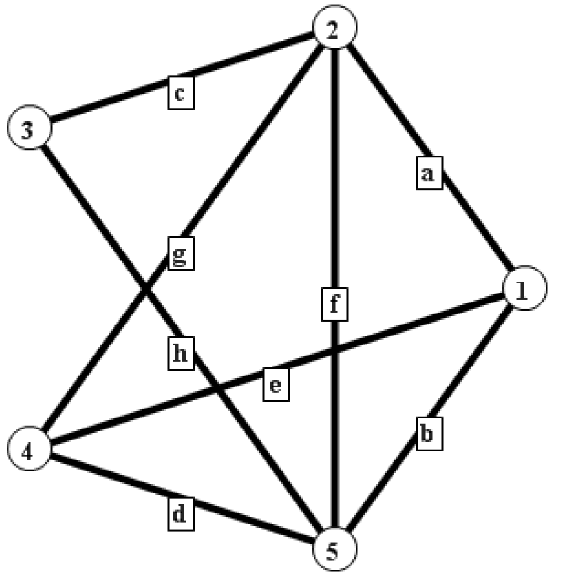


Рис. 38

$S =$

	1	2	3	4	5
1		a;		e;	b;
2	a;		c;	g;	f;
3		c;			h;
4	e;	g;			d;
5	b;	f;	h;	d;	

Залишємо в матриці ті шляхи, що проходять через усі вершини.

$\tilde{S}^4 =$

	1	2	3	4	5
1		edhc	bdgc, edfc egfh, agdh	bhcg achd	egch
2			hbeg, aedh	chbe	
3				eafg, cfbe gabh, cabd	begc deac
4					each
5					

Для четвертого степеня заносимо дані у матрицю тільки для елементів, що стоять вище головної діагоналі. Саму діагональ не розглядаємо, а так як матриця симетрична, то інші елементи нижче головної діагоналі в матрицю не вносимо. Тому розглядаємо не саму матрицю S^4, а її певну модифікацію $\widetilde{S}^4$.Для ланцюгів перелічених у матриці $\widetilde{S}^4$, обчислимо ваги і визначимо шлях з мінімальною вагою. Усі ці дані заносимо у матрицю $\widetilde{S}^4_\mu$.

З останньої матриці видно, що розв'язком задачі є три ланцюги-шляхи $\{bdgc\}$, $\{bhgc\}$, $\{adhc\}$ з вагою 18. Отримали три максимальні ланцюги мінімальної ваги, які мають наступний вигляд (Рис.39,40).

$\widetilde{S}^4_\mu =$

	1	2	3	4	5
1		21	18, 22, 23, 19	18, 18	20
2			23, 23	22	
3				23, 23, 20, 19	21, 21
4					21
5					

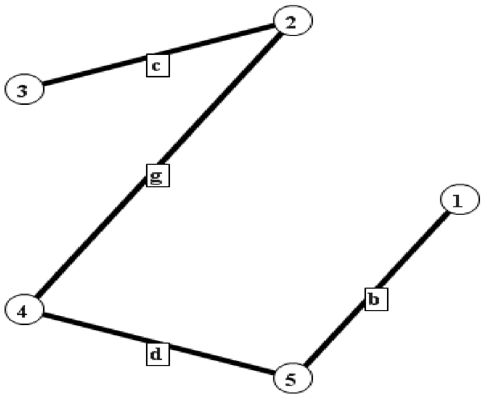


Рис. 39

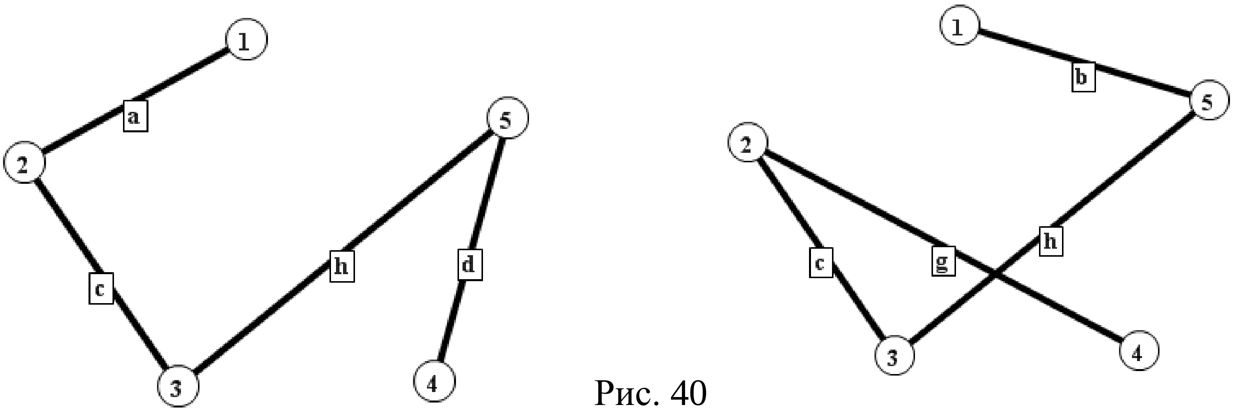


Рис. 40

Для п’ятого степеня заносимо дані у матрицю тільки для елементів, що стоять на головній діагоналі. Тому розглядаємо не саму матрицю S^5, а її головну діагональ $\tilde{S}^5$. Для циклів, перелічених у матрці $\tilde{S}^5$, обчислимо ваги і визначимо цикл з мінімальною вагою. Таких циклів усього два. Отже, маємо: $\mu(achde) = 26$, $\mu(bchge) = 26$. Таким чином знайдені цикли є роз’язками задачі (Рис. 41).

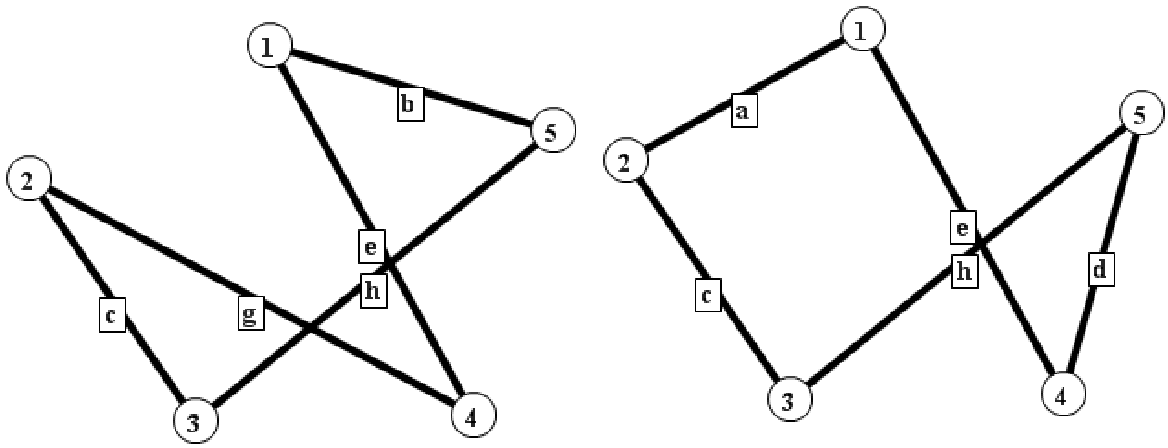


Рис. 41

$\tilde{S}^5 =$

	1	2	3	4	5
1	achde bhcge				
2		achde bhcge			
3			achde bhcge		
4				achde bhcge	
5					achde bhcge

§19. Дерева. Властивості дерев.

19.1 Дерева.

Означення 19.1 Деревом називається зв’язний граф, що не містить ні одного циклу. Незв’язний неорієнтований граф називається *лісом*, якщо його компоненти зв’язності є деревами.

Довільна частина лісу чи дерева також є лісом або деревом. Довільний ланцюг у такому графі – простий.

Теорема 19.1 Граф є деревом тоді і тільки тоді, коли будь-які дві вершини зв'язані єдиним ланцюгом.

Доведення. *Необхідність.* Нехай граф є деревом. Припустимо, від супротивного, що існують дві вершини v_1, v_2, які зв'язані двома ланцюгами l_1, l_2. Тоді ланцюг, який є об'єднанням ланцюгів l_1, l_2 (ланцюг l_2 проходиться в оберненому порядку, тобто від v_2 до v_1), утворює цикл. Прийшли до протиріччя, отже, довільні дві вершини дерева зв'язані єдиним ланцюгом.

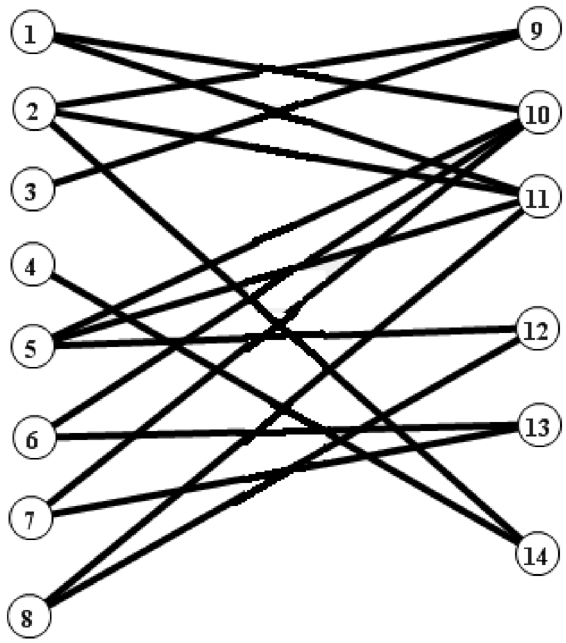


Рис. 42

Достатність. Нехай довільні дві вершини графа зв'язані єдиним ланцюгом, але він не є деревом. Тоді в графі повинен існувати хоча б один цикл, що проходить через вершини, наприклад, v_1, v_2. Але тоді з цього циклу можна утворити два ланцюги, що з'єднують вершини v_1, v_2, що суперечить припущенню. Отже, граф є деревом. ∇

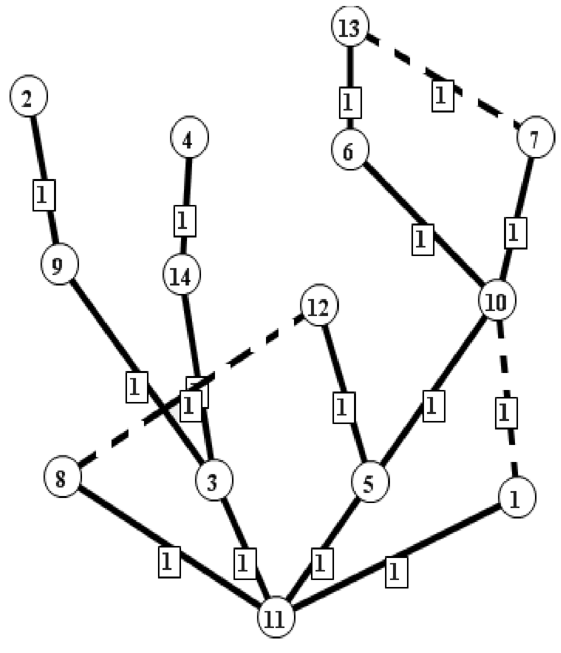


Рис. 43

Дерево у деякому графі будується таким чином: виберемо довільно вершину, наприклад, x_1 і проведемо від неї всі ребра до вершин, що розташовані від неї на відстані 1. Від одержаної сукупності вершин проведемо всі ребра до вершин, що знаходяться на відстані 2 від вершини x_1 і так далі. Для вершин, що знаходяться на відстані 3 або більше, ребра, які утворюють цикли, не можуть належати дереву.

Для прикладу розглянемо побудову дерева у дводольному графі (Рис. 42). Виберемо деяку вершину, наприклад 11, і проводимо від неї всі ребра до вершин 1,3,5,8, що розташовані від неї на відстані 1. Від одержаної сукупності вершин проведемо всі ребра до вершин 9,10,12,14, що знаходяться на відстані 1 від них, а, отже, на відстані 2 від вершини 11. Від вершин 9,10,12,14, проводимо ребра до вершин 2,4,6,7. На цьому кроці не можна з'єднувати вершини 8 і 12, 1 і 10, 7 і 13, бо утворюються цикли. Нарешті, з'єднуємо вершину 6 та 13. Ця процедура приводить до графа, що є деревом (Рис.43), для якого вершина 11 є кореневою.

19.2 Орієнтовані дерева.

Орієнтоване дерево (кореневе орієнтоване дерево) – це орієнтований граф без циклів, що має тільки одну вершину, до якої не заходить ні одне з ребер (ця вершина називається кореневою). Крім того, до кожної вершини, що не є кореневою, заходить тільки одне ребро й існує шлях із кореневої вершини до довільної іншої вершини графа.

Вершина v називається нащадком вершини u, якщо існує шлях із вершини u до вершини v. Вершина u називається в такому випадку предком. Якщо довжина шляху між предком і нащадком є одиниця, то для вершин, вживаються назви батько і син.

Висотою дерева називається довжина максимального шляху, що починається в кореневій вершині.

Дерево називається впорядкованим, якщо множину синів кожної вершини впорядковано зліва направо.

Дерево називається бінарним, якщо воно впорядковане і з кожної вершини може виходити не більше двох ребер.

Приклади орієнтованих дерев.

Геніалогічні дерева. Будуються за принципом від предка до нащадка. Нижче (Рис.44) наведено фрагмент генеалогічного дерева.

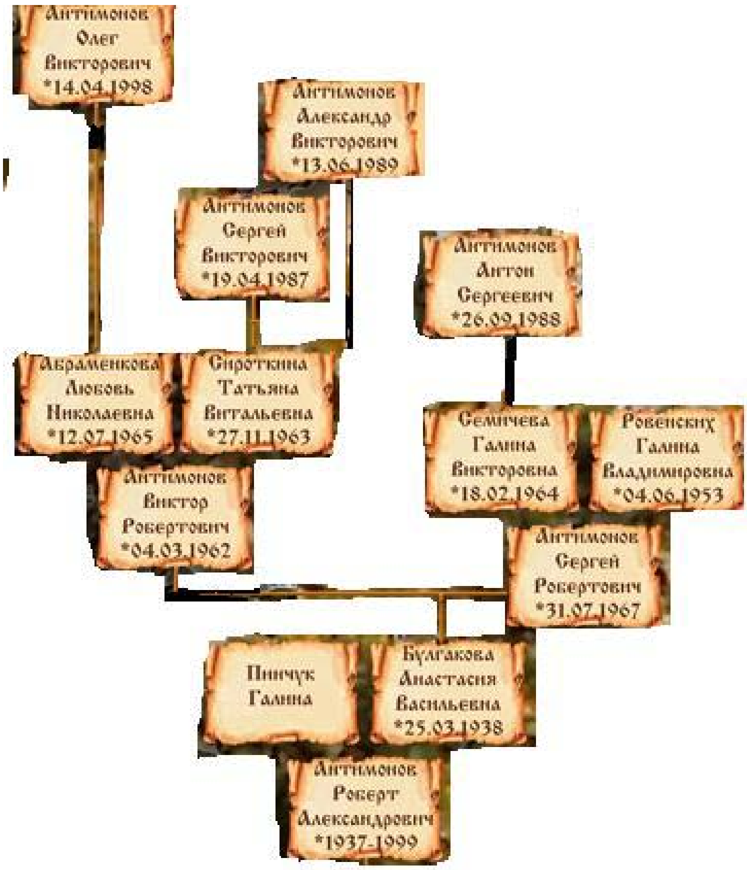


Рис. 44

Лінгвістика. Мова складається зі скінченої множини різних символів, що утворюють *алфавіт*, і скінченої множини правил з’єднання символів. Множина правил називається граматикою Г. Послідовності символів, які утворюються у відповідності з граматикою Г, називаються ланцюгами Σ (словами) мови. Самі символи теж є ланцюгами довжини 1. Отже, довільна мова Λ визначається множиною ланцюгів та граматикою $\Lambda = (\Sigma, \Gamma)$.

Рис. 45

Типова задача математичної лінгвістики полягає у визначенні приналежності заданого ланцюга деякій мові.

При розв'язанні таких задач граматичні типи, що виділяються в них, зображаються у вигляді діаграм-дерев (Рис.45).

19.3 Властивості дерев.

Для довільного дерева мають місце наступні твердження, еквівалентні теоремі 12, а, отже, і між собою.

Теорема 19.2. Зв'язний граф є деревом тоді і тільки тоді, коли кількість вершин на одиницю перевищує кількість ребер.

Теорема19.3. Зв'язний граф є деревом тоді і тільки тоді, коли довільне його ребро є мостом.

19.4 Характеристики вершин графа.

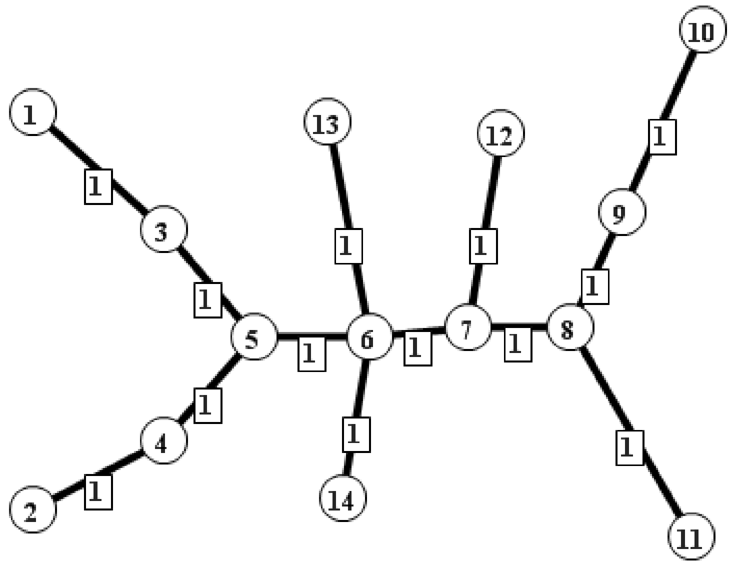
Означення 19.2 Вершину x_0 називають *кінцевою або висячою*, якщо її степінь $\rho(x_0)=1$, тобто існує єдине ребро, яке їй є інцидентним. Це ребро також називають кінцевим.

Твердження 19.1 У довільного дерева, що має більше двох вершин, є, щонайменше, дві кінцеві вершини.

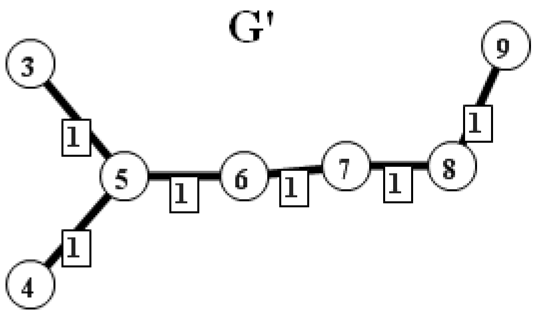
Якщо дерево має більше двох кінцевих вершин, то воно обов'язково має внутрішні вершини, інакше порушиться зв'язність. У цьому неважко впевнитись, згадавши процедуру побудови дерева.

Важливим є питання про відшукання центрів графа, зокрема центрів дерева.

Нехай дано скінчене дерево G (Рис. 46). Його вершини розподіляються за типами таким чином. Будемо відносити до першого типу всі його кінцеві вершини. Вилучимо з графа G вершини першого типу 1,2,13,14,12,10,11 та ребра, що їм інцидентні. Залишиться підграф G', який у свою чергу є деревом. Кінцеві вершини дерева G' називаються вершинами типу 2. Видаливши кінцеві вершини 3, 4, 9 з інцидентними їм ребрами графа G', одержимо новий підграф G''. Кінцеві вершини дерева G'' називаються вершинами типу 3. Видаливши з графа кінцеві вершини 5 та 8, отримаємо вершини 6 та 7 максимального типу, які є центрами даного дерева. При чому радіус даного дерева дорівнює 4, а діаметр 7.



Неважко зрозуміти, що в скінченому дереві вершини мають скінчені типи і вершини максимального типу є центрами дерева. Має місце теорема.



Теорема 19.4 Центрами дерева є вершини максимального типу і тільки вони.

Доведення. Довільний ланцюг S з початком у вершині максимального типу x_0 йде по вершинах типів k-1,k-2 і т.д. Його перше ребро e_1 (x_0,x_1) веде у вершину типу k-1, або ще меншого. Наступні ребра e_2 (x_1,x_2), e_3 (x_2,x_3) обов'язково ведуть у вершини меншого типу від k, оскільки сусідні вершини більшого або однакового типу вже інцидентні використаним ребрам.

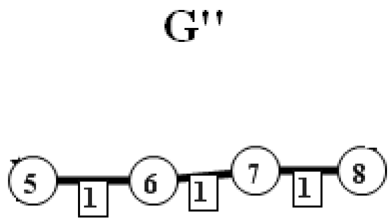


Рис. 46

Якщо є хоча б одна вершина типу k, тоді для ланцюга довжиною 1 з початком у точці x_0 ($\rho(x_0)=k$) маємо, $l(s)\le k$ або $l(s)\le k-1$. Якщо є хоча б одна вершина x' що $\rho(x')$=l, то з вершини максимального типу можна побудувати шлях довжини k-l.

Нехай у дереві G вершина x'' не максимального типу. Тоді вона буде початком ланцюга $S(x'',x_0)$, що зв'язує її з вершиною максимального типу. Цей ланцюг має більшу довжину, ніж ланцюг $S(x',x_0)$. Якщо x_0 - вершина максимального типу, то вона не є висячою і тому зв'язана принаймні з двома вершинами типу k-1. Тоді можна побудувати ланцюг $S(x',x_0)$ довжини k-1, що не проходить через останнє ребро $S(x',x_0)$ і не має з цим ланцюгом спільних вершин; тоді $S = S(x'',x_0) \bigcup S(x',x_0)$ має довжину більшу ніж k-1.

Нехай у дереві існує ще одна вершина x_1, така, що ($\rho(x_1)=k$). Побудуємо $S(x',x_0)$, що проходить через точку x_1. Тоді і $S = S(x'',x_0) \bigcup S(x',x_0)$ має довжину не меншу, ніж k+1.

Нехай $S(x'',x_0)$ не проходить через другу вершину x_1, що ($\rho(x_1)=k$). Тоді ланцюг, який починається у точці x'', має довжину k+1, або більшу, тобто: $S = S(x',x_0) \bigcup (x_0,x_1) \bigcup (x_1,x'')$.

Таким чином, для довільної вершини не максимального типу її максимальне віддалення більше, ніж k. Отже, дерево може мати один або два центри. ∇

Наслідок 19.1 Дерево може мати 1 або 2 центри (наприклад, Рис. 46, де дерево має два центри).

Наслідок 19.2 Нехай максимальний тип дерева дорівнює k. Діаметральні ланцюги проходять через центри дерева і мають довжину 2k-2, якщо дерево має один центр, або 2k-1, якщо в дереві два центри. Ланцюгів, що мають більшу довжину, немає.

19.5 Перелічення дерев.

У різних галузях науки і практики виникають задачі, що призводять до необхідності знаходження кількості різних дерев із заданою кількістю вершин. Ця задача є досить складною. Можна розглядати два її варіанти:

1) перелічення усіх дерев заданого порядку, розрізняючи ізоморфні дерева;

2) перелічення усіх дерев заданого порядку, не розрізняючи ізоморфні дерева.

Для розв'язання першої задачі вводять, так звані, позначення вершин, і тоді дерево також називається позначеним. Два графи не розрізняються, якщо їх вершини однаково позначені й існує ізоморфізм цих графів, що зберігає позначки. Кількість саме позначених дерев з n вершинами визначається у наступній теоремі.

Теорема 19.5 (Келі). Кількість різних дерев, що можна побудувати в повному графі з n вершинами, дорівнює n^{n-2}.

Доведення. При доведенні теореми використаємо комбінаторну тотожність (відому з аналізу), яку приймемо без доведення:

$$\sum_{j=1}^{n-1} C_n^j j^{j-1}(n-j)^{n-j-1} = 2n^{n-2}(n-1).$$

Теорема вірна для графа, який має одну вершину. Припустимо, що теорема має місце для повного графа з кількістю вершин, меншою за n, і доведемо її справедливість для графа з n вершинами. Позначимо T_n кількість дерев повного графа з n вершинами. Розділимо n вершин на дві множини, одну з i елементів, другу з n-i елементів, де i довільне з чисел 1,2,…,n-1. Згідно з припущенням індукції, кількість дерев першого підграфа дорівнює i^{i-2}, а другого $(n-i)^{n-i-2}$. Необхідно дослідити всі способи зв'язку дерева першого підграфа з деревом другого підграфа, при яких утворюється дерево повного графа. Такий зв'язок може бути утвореним між довільною з i вершин першого підграфа та довільною з n-i вершин другого підграфа. Отже, кількість всеможливих зв'язків дорівнює $i(n$-$i)$. Таким чином, кількість дерев у повному графі, які можна утворити при заданому виборі i, дорівнює:

$$i(n-1)\, i^{i-2}(n-i)^{n-i-2} = i^{i-1}(n-i)^{n-i-1}.$$

Серед *n* вершин *i* вершин можна вибрати $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ способами. Візьмемо суму по усіх добутках одержаної вище кількості дерев для одного розбиття на кількість розбиттів при даному *i*, одержимо: $\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i i^{i-1}(n-i)^{n-i-1}$.

Деякі дерева можуть входити в одержану суму більше одного разу. Дійсно, так як існує *n*-1 спосіб вибору підграфа з *i* вершинами, то при збільшенні *i* та наближенні його до *n*-1 величина *n*-1 зменшується до 1. Таким чином, ролі підграфів взаємно змінюються. У результаті виявляється, що існує *n*-1 пара підграфів з (1,*n*-1), (2,*n*-2), … ,(*n*-1,1) вершинами. Кожна з цих пар породжує два дерева у початковому графі. Отже, щоб одержати загальну кількість дерев початкового графа, необхідно останню суму розділити на 2(*n*-1). Враховуючи рівність, що наведено на початку доведення, одержимо шуканий результат. ∇

Розв’язання другої задачі більш складне (воно базується на теорії перелічення конфігурацій Д.Пойа), але кількість непозначених дерев *n* вершинами значно менша. Цікавою є таблиця кількості різних класів дерев у залежності від кількості вершин. Нарешті, важливим класом дерев є кореневі дерева.

Кількість вершин	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Непозначені дерева	1	1	1	2	3	6	11	23	47	106
Кореневі дерева	1	1	2	4	9	20	48	115	286	719
Позначені дерева	1	1	3	16	125	1296	16897	262114	4782969	10^8

19.6 Матриця Кірхгофа. Максимальне дерево. Остов.

Нехай G -зв'язний граф. $\{Z_i\}$ -сукупність усіх його циклів. Максимальний зв'язний граф T, що не містить циклів і покриває всі вершини, називається максимальним деревом у графі G. Максимальне дерево є остовом, так як з графа вилучено всі цикли.

Задача визначення кількості усіх остовів графа G у загальному випадку розв'язується за допомогою матриці Кірхгофа.

Означення 19.3 Матрицею Кірхгофа $K(G)$ простого зв'язного графа $G(V,E)$ $|V| = n$ називається квадратна матриця, елементи якої визначаються за формулою:

$$k_{ij} = \begin{cases} -1, \textit{вершини } v_i, v_j \textit{ суміжні} \\ 0, \textit{вершини } v_i, v_j \textit{ не суміжні} \\ s(v_i), \quad i = j \end{cases}$$, де $s(v_i)$- степінь вершини v_i.

Твердження 19.2 Алгебраїчні доповнення K_{ij} усіх елементів матриці Кірхгофа рівні між собою.

Теорема 19.6 Кількість остовних дерев у простому зв'язному графі з n вершинами дорівнює алгебраїчному доповненню довільного елемента матриці Кірхгофа.

На основі цієї теореми можна довести теорему Келі. Дійсно, усі позначені дерева з n вершинами утворюють множину усіх оствів повного графа K_n. Тоді для доведення теореми Келі досить обчислити алгебраїчне доповнення K_{11}, матриці $K(K_n)$:

$$K(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ . & . & . & \dots & . \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Алгебраїчне доповнення K_{11} дорівнює:

$$K_{11} = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ . & . & . & \dots & . \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}.$$

19.7 Алгоритми побудови остовного дерева.

Задача побудови якого-небудь (одного!) остовного дерева у графі G належить до числа найважливіших для практики і є найпростішою для алгоритмізації і комп'ютерної реалізації. Зрозуміло, що основна ідея побудови повинна полягати у послідовному відборі ребер, що не утворюють цикли з попередніми.

Матричний метод побудови остовного дерева.

На основі цикломатичної матриці для зв’зного графа можна досить просто будувати остовні дерева. Матричний метод побудови деякого остовного дерева полягає у вилученні з матриці суміжності рядків і стовпчиків, що відповідають хордам циклів графа.

Зрозуміло, що для знаходження усіх остовних дерев графа необхідно переглянути усі можливі комбінації хорд даного графа, що є досить складною задачею.

Алгоритм пошуку у глибину

Алгоритм «пошуку у глибину» переглядає по одному разу всі ребра і всі вершини графа G.

У процесі пошуку в глибину вершинам графа G послідовно привласнюються нові номери $N(v_k)$від 1 до n, а ребра одержують позначки двох класів: «пряме ребро» $e(+)$ і «зворотне ребро» $e(-)$. Пошук починається з довільної вершини $v_k \in V$, якій привласнюється номер $N(v_k) = 1$. Далі обирається будь-яке інцидентне до $v_k \in V$ ребро $e_{kj} \in E$. Це ребро отримує позначку $e_{kj}(+)$ «пряме ребро» і вершині $v_j \in V$ привласнюється $N(v_j) = 2$. Продовження процедури пошуку надамо для кроку m. Нехай на попередньому $m-1$- му кроці деяка вершина $v_s \in V$ одержала номер $N(v_s)=m-1$, тоді можливі наступні дві ситуації.

Вершина $v_s \in V$ має інцидентне непозначене ребро $e_{sl} \in E$. Якщо вершина $v_l \in V$ вже має новий номер, то ребро $e_{sl} \in E$ одержує позначку $e_{sl}(-)$ «зворотне», і продовжується пошук непозначеного ребра, що інцидентне вершині $v_s \in V$. Якщо вершина $v_l \in V$ не має раніше привласненого нового номеру, то їй привласнюється номер $N(v_l)=m$, ребро $e_{sl} \in E$ одержує позначку $e_{sl}(-)$ «пряме», і пошук переміщується у вершину $v_l \in V$.

Усі ребра, що інцидентні вершині $v_s \in V$, позначені на попередніх кроках. Тоді пошук повертається у вершину, що має новий номер $m-2$.

Пошук у глибину закінчується, коли всі ребра графа G отримають позначки.

Позначимо E^+ - множину усіх прямих ребер, E^- - множину усіх зворотних ребер. Має місце наступне:

Твердження 19.3 Нехай $G(V,E)$ - зв'язний граф, то підграф $G(V,E^+)$ є остовним деревом. Це дерево є орієнтованим кореневим з коренем $v_k \in V$. Множина E^- зворотних ребер є множиною хорд графа $G(V,E)$

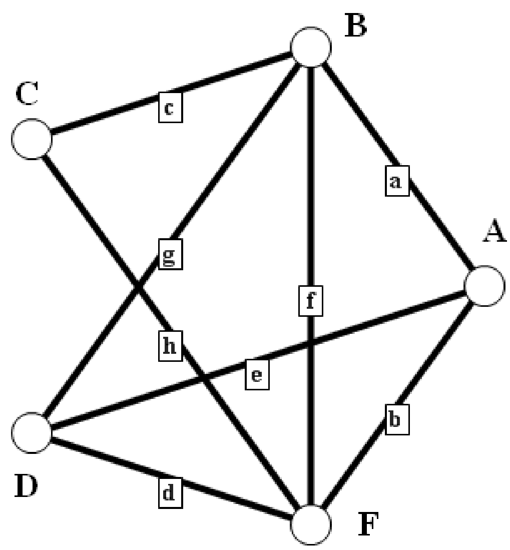


Рис. 47

Приклад 19.1 Знаходження в графі (Рис.47) остову методом пошуку в глибину.

1 крок. Вибирається довільна вершина, наприклад, D. Їй привласнюється номер (1). Вибирається довільне ребро інцидентне вершині D (1), наприклад, ребро *e*. Йому привласнюється позначка +.

2 крок. Вершині *A*, що інцидентна ребру *e*, привласнюється номер (2). І серед ребер інцидентних цій вершині, які не мають позначок, вибираємо довільне ребро, наприклад, *a*. Цьому ребру привласнюється позначка +.

3 крок. Вершині *B*, що інцидентна ребру *a*, привласнюється номер (3). Переглядаються не позначені ребра інцидентні вершині *B*(3). Ребру g привласнюється позначка (-), бо воно інцидентне вершині *D*, яка вже має новий номер. І серед ребер *c* і *f* інцидентних цій вершині, які не мають позначок, вибираємо довільне ребро, наприклад, *f*. Цьому ребру привласнюється позначка +.

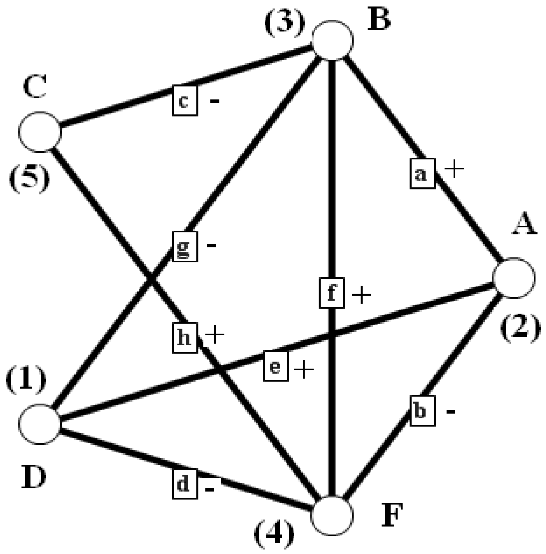


Рис. 48

4 крок. Вершині *F*, що інцидентна ребру *f* привласнюється номер (4). Переглядаються не позначені ребра інцидентні вершині *F*(4). Ребрам *b* і *d* привласнюється позначка (-), бо вони інцидентні вершинам *A* і *D* відповідно, які вже мають нові номери. Є тільки одне ребро *h* інцидентне вершині *F*(3),

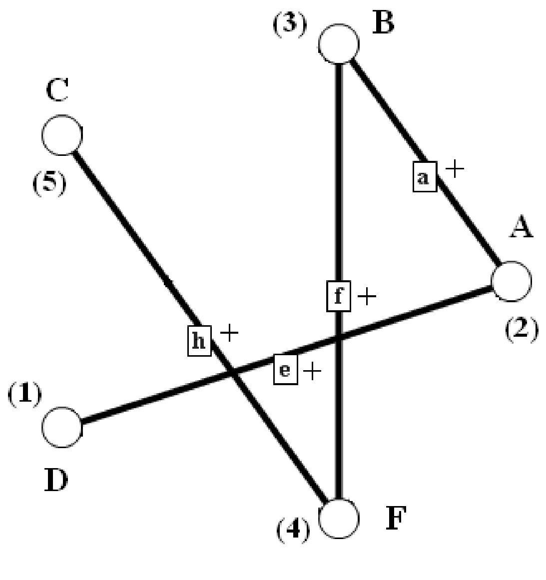


Рис. 49

яке не має позначки. Цьому ребру привласнюється позначка +.

5 крок. Вершині *C*, що інцидентна ребру *h*, привласнюється номер (5). Переглядаються не позначені ребра інцидентні вершині *C*(5). Ребру *c* привласнюється позначка (-), бо воно інцидентне вершинфі *B*, яка вже має новий номер. На цьому алгоритм завершує роботу, бо усі вершини перенумеровані й усі ребра отримали позначки. Множина ребер $E^{+} = \{a, g, d, b\}$ утворює граф $\widetilde{G}(V, E^{+})$, що є остовом. На (Рис. 48) можна побачити послідовне виконання кроків алгоритму, а на (Рис.49) результат – остовне дерево.

Алгоритм пошуку у ширину

Зауважимо, що пошук у глибину не єдиний метод перегляду всіх вершин і ребер графа *G*. Часто використовується перегляд графа «пошуком у ширину», при якому у кожній черговій вершині переглядаються всі інцидентні їй ребра без виключення і всі їх кінцеві вершини (тобто одиничний «окіл» вершини *X*). Рис. 50 є ілюстрацією методу «пошуку у ширину». Довільним чином вибрано вершину *A*, привласнено їй номер (1). Усім вершинам B,D,F з околу вершини A привласнено наступні номери B(2),D(4),F(3), а ребрам, що з'єднують їх з вершиною A – позначка (+). Усі інші ребра підграфа, утвореного на вершинах A,B,D,F, отримують позначку (-). Після цього, по черзі переглядаються околи вершин B,D,F і, якщо в них є непозначені ребра і непонумеровані вершини, то повто-

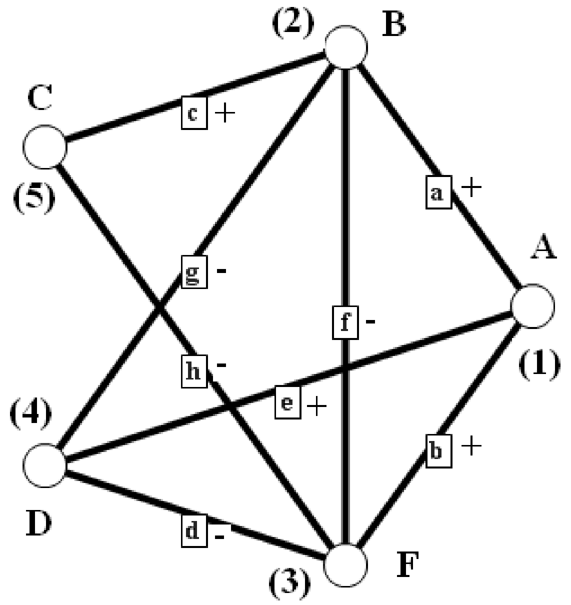


Рис. 50

рюємо процедуру, яку наведено для вершини A. Так, в околі вершини B є вершина С, що є непронумерованою. І вершини D,F, які вже мають номери. Таким чином, вершина С отримує номер (5) і ребро c позначку (+). Переглядаючи околи вершин D і F, бачимо, що непозначеним є тільки ребро f . Йому привласнюємо позначку (-). На цьому алгоритм завершує роботу. Результ пошуку у ширину наведено на Рис. 51.

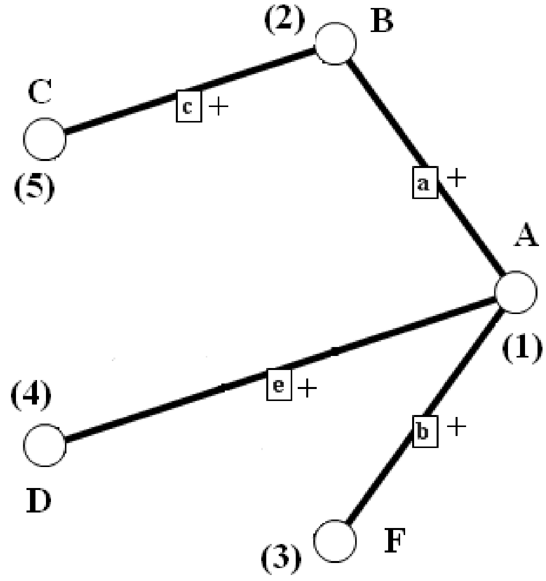


Рис. 51

19.8 Задача про мінімальне сполучення або остов міні мальної ваги.

Нехай G – зважений зв'язний граф, (кожне ребро має певну вагу $\mu(e)$).

Означення 19.3 *Мінімальним сполученням* називається максимальне дерево (остов) $T \subset G$ з мінімальною загальною вагою $\mu(T) = \sum_{e \in T} \mu(e) \to \min$.

Задача про відшукання максимального дерева з мінімальною загальною вагою називається *задачею про мінімальне сполучення (остов мінімальної ваги)* або задачею про з'єднання міст. Розглянемо кілька алгоритмів розв'язання цієї задачі.

Алгоритм Краскла.

Теорема 19.7 Нехай G –зв'язний граф з n вершинами. Наступна процедура дає розв'язок задачі про мінімальне сполучення:

1) вибираємо ребро мінімальної ваги і позначимо його e_1, $\mu(e_1) \to \min$;

2) визначаємо за індукцією послідовність ребер $e_2, \ldots, e_{n-1}$, вибираючи на кожному кроці ребро відмінне від попередніх з найменшою вагою і таке, що не утворює циклів з попередніми ребрами.

Отриманий таким чином підграф і є шуканим деревом.

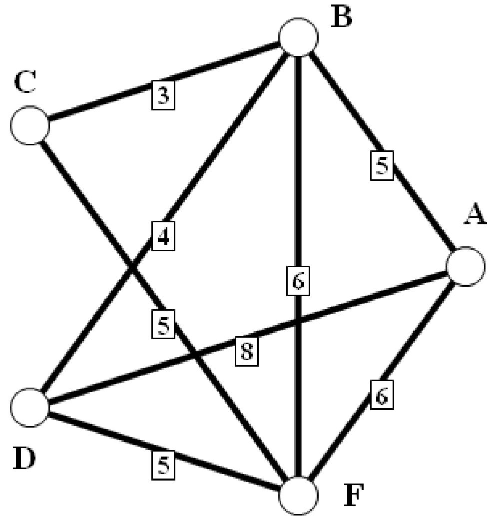


Рис. 52

Приклад 19.2. Для даного графа (Рис.52) за алгоритмом Краскла знайти дерево *T* мінімальної ваги.

Наступні рисунки демонструють покрокову роботу алгоритма.

1 крок. Переглядаються усі ребра графа, і вибирається ребро ВС, яке має найменшу вагу 3. (Рис.53)

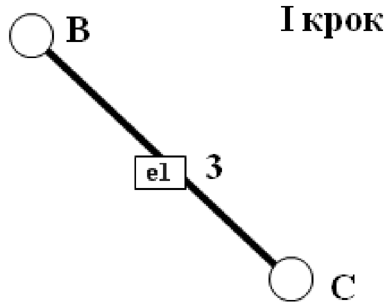


Рис. 53

2 крок. Переглядаються усі ребра, крім ВС, вибирається ребро BD найменшої ваги 4. (Рис.54)

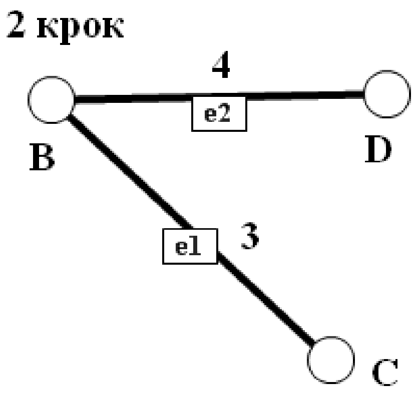


Рис. 54

3 крок. Переглядаються усі ребра, окрім ВС і BD. Найменшу вагу 5 мають три ребра DF, CF, DA, кожне з яких породжує дерево. Отже, на третьому кроці існує три варіанти вибору ребер (Рис.55,56,57).

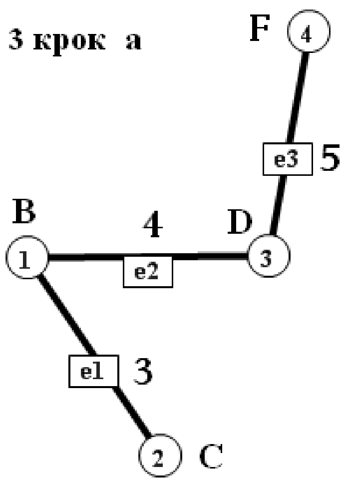


Рис. 55

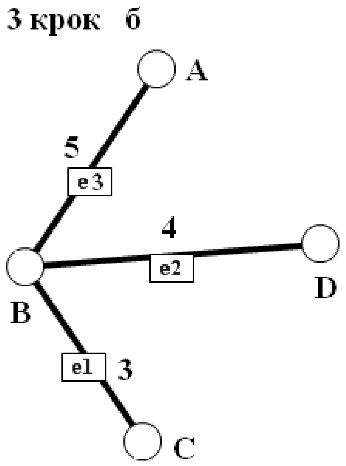


Рис. 56

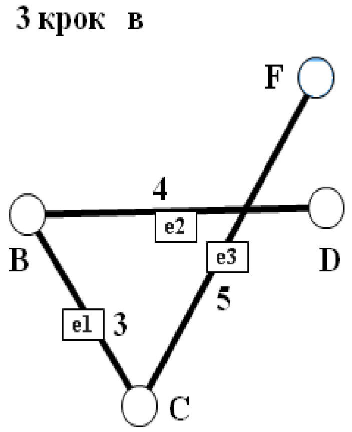


Рис. 57

4 крок. У кожному з отриманих трьох варіантів дерев, переглядаються ребра, що залишились у початковому графі, відкидаються ті, що утворюють цикли, а серед інших вибираємо ребро найменшої ваги. В даному випадку ця процедура приводить до двох остовних дерев мінімальної ваги $\mu(T)=17$ (Рис. 58,59).

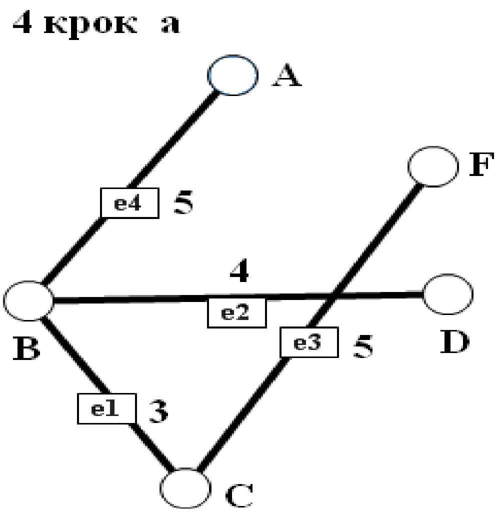


Рис. 58

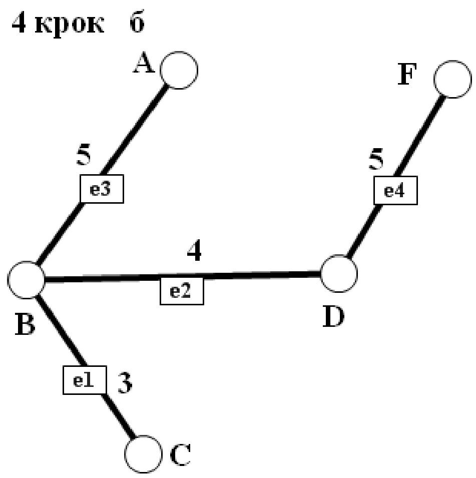


Рис. 59

Алгоритм Прима.

Цей алгоритм подібний до алгоритму Краскла. Відрізняється тим, що на кожному кроці не переглядаються усі ребра початкового графа, що ще не вибрані. На кожному кроці алгоритма Прима множина вершин графа розбивається на дві неперетинні підмножини, і переглядаються саме ті ребра, що з'єднують ці підмножини. Алгоритм складається з наступних кроків.

1крок. Вибираємо ребро мінімальної ваги і позначимо його e_1, $\mu(e_1) \to \min$ будуємо дерево $H_1 = (X_1, Y_1) \subset G(V, E)$, де $X_1 = \{v_1, v_2\}$ $Y_1 = \{e_1\}$ v_1, v_2 - вершини інцидентні ребру e_1.

***k*+1 крок.** Нехай вже побудовано дерево $H_k = (X_k, Y_k) \subset G$. Переглядаємо ребра, що з'єднують вершини з множини $X_k = \{v_1, ..., v_{k+1}\}$ з вершинами множини $V \setminus X_k$. Серед цих ребер вибираємо ті, що не утворюють циклів і мають найменшу вагу. Приєднємо вибране ребро до дерева $H_k = (X_k, Y_k) \subset G$ і отримаємо дерево $H_{k+1} = (X_{k+1}, Y_{k+1}) \subset G$

Приклад 19.3 Пошук остова мінімальної ваги для графа з попереднього прикладу (Рис. 52) методом Прима.

1 крок. Переглядаються усі ребра графа, і вибирається ребро BC, яке має найменшу вагу 3 (Рис. 53). Будуємо дерево $H_1 = (X_1, Y_1) \subset G(V, E)$, де $X_1 = \{B, C\}, Y_1 = \{e_1\}$.

2 крок. Переглядаються усі ребра, що з'днують дерево H_1 з множиною вершин $V \setminus X_1 = \{A, D, F\}$. Вибираємо ребро BD (Рис.54). Будуємо дерево $H_2 = (X_2, Y_2)$, де $X_2 = \{B, C, D\}$, $Y_2 = \{e_1, e_2\}$.

3 крок. Серед ребер, що інцидентні вершинам дерева $H_2 = (X_2, Y_2)$, три мають вагу 5. Це ребра DF, CF, DA. Тому на цьому кроці алгоритм має розгалуження. Будуємо дерева:

а) $H_{3а} = (X_{3а}, Y_{3а})$, де $X_{3а} = \{B, C, D, F\}$, $Y_{3а} = \{e_1, e_2, e_3\}$ (Рис.55).

б) $H_{3б} = (X_{3б}, Y_{3б})$, де $X_{3б} = \{B, C, D, A\}, Y_{3б} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$(Рис. 56).

в) $H_{3в} = (X_{3в}, Y_{3в})$, де $X_{3в} = \{B, C, D, F\}, Y_{3в} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (Рис.57).

4 крок. Для кожного з дерев, отриманого на попередньому кроці, переглядаються ребра, що інцидентні останній вершині початкового графа і з'єднують її з відповідним деревом. Вибирається те ребро, що не утворює циклу і має найменшу вагу. Таким чином, отримаємо шукані остови мінімальної ваги (Рис.58,59). Так , наприклад, для дерева $H_{3a} = (X_{3a}, Y_{3a})$ залишилось переглянути ребра початкового графа, що інцидентні вершині А і вершинам $X_{3a} = \{B, C, D, F\}$. Таких ребер три: BA, DA, FA. Серед них мінімальну вагу має ребро BA. Воно приєднується до попереднього дерева, і ми отримаємо остов мінімальної ваги $H_{4a} = (X_{4a}, Y_{4a})$, де $X_{4a} = \{B, C, D, F, A\}, Y_{4a} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (Рис.58). Як видно, серед отриманих чотирьох остовів є однакові, тому маємо шуканих два остови мінімальної ваги $\mu(T) = 17$.

Матричний метод.

Матричний метод базується на тому, що граф, у якому відсутні вершини степеня 1, є об'єднанням усіх своїх базисних циклів. Кожному циклу відповідає певна хорда, видалення якої розриває цикл. Отже, видаливши усі хорди графа, отримаємо остовне дерево. Якщо граф зважений, то для отримання остова мінімальної ваги, необхідно в кожному базисному циклі видалити хорду максимальної ваги. Якщо граф має вершини першого степеня, то до дерева, отриманого видаленням хорд максимальної ваги, приєднуються ці вершини і інцидентні до них ребра.

Алгоритм матричного методу визначення остова мінімальної ваги.

***q* крок.** Нехай $G_{q-1}(V, E_{q-1}), |V| = n, |E_{q-1}| = m - q + 1$ підграф початкового зваженого графа $G(V, E), |V| = n, |E| = m$, отриманий на попередньому q-1кроці, має цикли. Для $G_{q-1}(V, E_{q-1})$ будується зважена матриця базисних циклів Z_{q-1} за правилом:

$$Z_{kj} = \begin{cases} \mu(e_k), e_k \in R_j \\ 0, \quad\quad e_k \notin R_j \end{cases}, k = \overline{1, m-q+1}, j = \overline{1, m-q-n+2}, \quad \mu(e_k) \text{ -}$$

вага вершини e_k. Позначимо $\mu(G_{q-1}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m-q+1} \sum_{j=1}^{m-q-n+2} Z_{jk}$ загальна вага графа $G_{q-1}(V, E_{q-1})$. Визначається ребро e_{k_q} з максимальною вагою $\mu(e_{k_q}) = \max\limits_{s=\overline{1, m-q+1}} \mu(e_s)$ і вилучається з графа. Позначимо отриманий підграф $G_q(V, E_q), |V| = n, |E_q| = m - q$. Цей граф має на один цикл менше ніж $G_{q-1}(V, E_{q-1})$ і його загальна вага $\mu(G_q) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-n+1} Z_{jk} - \sum_{j=1}^{q}\mu(e_{k_j})$.

***q*+1 крок.** 1. Якщо граф, отриманий на кроці *q*, не має циклів, то підграф $G_q(V, E_q), |V| = n, |E_q| = m - q$ є дерево. Загальна вага цього дерева дорівнює $\mu(G_q) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-n+1} Z_{jk} - \sum_{j=1}^{q}\mu(e_{k_j})$. При цьому $q = \nu(G) = m - n + 1$.

Можливі дві ситуації:

а) граф $G(V, E), |V| = n, |E| = m$ не має висячих вершин;

б) у графі $G(V, E), |V| = n, |E| = m$ існують висячі вершини. У випадку а) граф $G_q(V, E_q), |V| = n, |E_q| = m - q$ є остовне дерево мінімальної ваги $\mu(G_q) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-n+1} Z_{jk} - \sum_{j=1}^{\nu(G)}\mu(e_{k_j})$. У випадку б) до графа $G_q(V, E_q), |V| = n, |E_q| = m - q$ приєднуються усі ребра інцидентні висячим вершинам. Ці ребра легко визначити з матриці суміжності графа $G(V, E), |V| = n, |E| = m$ (рядки і стовпчики, що їм відповідають, мають по одному ненульовому елементу).

Отриманий граф $\tilde{G}_q(V, \tilde{E}_q), |V| = n, |\tilde{E}_q| = m - q + w$ (*w*- кількість висячих вершиин), є шуканим остовом мінімальної ваги $\mu(\tilde{G}_q) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-n+1} Z_{jk} - \sum_{j=1}^{\nu(G)}\mu(e_{k_j}) + \sum_{j=1}^{w}\mu(\tilde{e}_j)$ ($\tilde{e}_j, j = \overline{1, w}$- ребра інцидентні висячим вершинам.

Алгоритм зупиняє роботу.

2. Якщо підграф $G_q(V, E_q), |V| = n, |E_q| = m - q$, отриманий на попередньому кроці q, має цикли, то для нього виконується процедура кроку q.

Приклад 19.4 Для графа (Рис.60) пошук остова мінімальної ваги виконується наступним чином.

1 крок. Початковий граф $G(V, E), |V| = 5, |E| = 8$, його цикломатичне число $\nu(G) = 8 - 5 + 1 = 4$, загальна вага $\mu(G_1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-n+1} Z_{jk} = 42$.

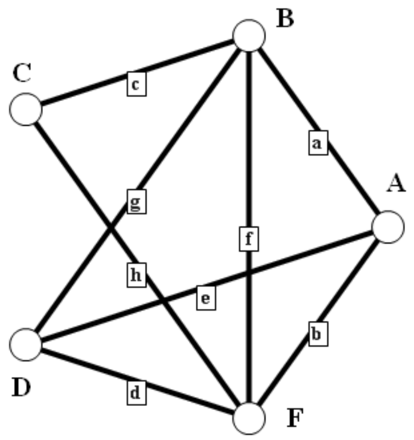


Рис. 60

Будуємо матрицю базисних циклів Видаляємо хорду e, $\mu(e) = 8$, яка має максимальну вагу. Отримаємо підграф $G_1(V, E_1), |V| = 5, |E_7| = 7$ (Рис.61). Загальна вага цього під графа

$$\mu(G_1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-n+1} Z_{jk} - \mu(e) = 42 - 8 = 34$$

$$Z_1 = \begin{pmatrix} & a & b & c & d & e & f & g & h \\ R_1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 4 & 0 \\ R_2 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ R_3 & 0 & 6 & 0 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ R_4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

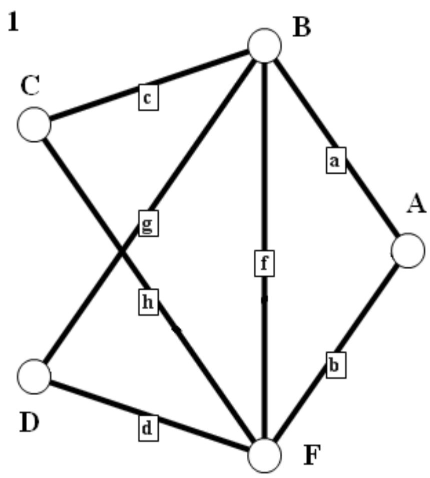


Рис. 61

2 крок. Будуємо цикломатичну матрицю для отриманого підграфа $G_1(V, E_1), |V| = 5, |E_7| = 7$

$$
Z_2 = \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_2 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & f & g & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
$$

Видаляємо ребро $f, \mu(f) = 6$, яка має максимальну вагу. Отримаємо підграф $G_2(V, E_2), |V| = 5, |E_2| = 6$ (Рис.62). Загальна вага цього підграфа.

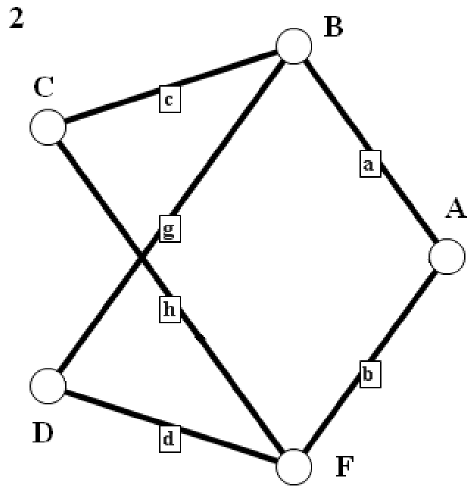


Рис. 62

3 крок. Будуємо цикломатичну матрицю для отриманого підграфа $G_2(V, E_2), |V| = 5, |E_2| = 6$

$$
Z_3 = \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \end{array}
\begin{pmatrix} a & b & c & d & g & h \\ 5 & 6 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 6 & 0 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}
$$

Видаляємо ребро $b, \mu(b) = 6$, яка має максимальну вагу. Отримаємо підграф $G_3(V, E_3), |V| = 5, |E_3| = 5$ (Рис.63). Вага цього підграфа

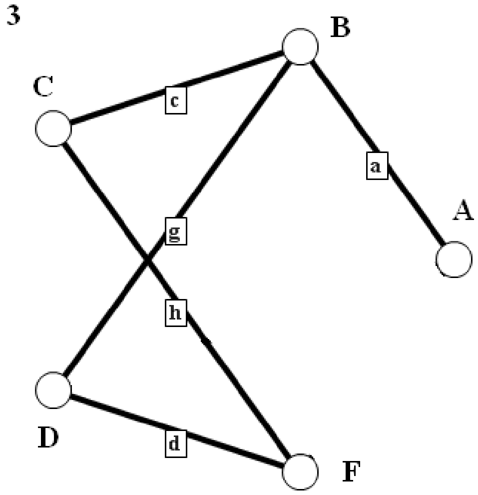


Рис. 63

$$
\mu(G_3) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m-n+1} Z_{jk} - \mu(e) - \mu(f) - \mu(b) = 2
$$

4 крок. Будуємо цикломатичну матрицю для отриманого підграфа $G_3(V, E_3), |V| = 5, |E_3| = 5$

$$
Z_4 = \begin{array}{c} \\ R_1 \end{array}
\begin{pmatrix} a & c & d & g & h \\ 5 & 3 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}.
$$

Видаляємо ребро $d, \mu(d) = 5$ або $h, \mu(h) = 5$, які мають максимальну вагу.

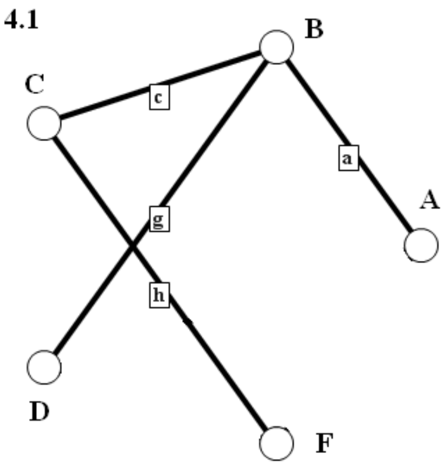


Рис. 64

Ребро a інцидентне висячій ршині і тому його видаляти неможна. Отримаємо два підграфи $G_4^i\left(V, E_4^i\right), |V| = 5, \left|E_4^i\right| = 4, \quad i = 1{,}2$ (Рис.64,65). Загальна вага цих **підграфів**

$$\mu\left(G_4^1\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-n+1} Z_{jk} - \mu(e) - \mu(f) -$$

$$-\mu(b) - \mu(d) = 42 - 8 - 6 - 6 - 5 = 17$$

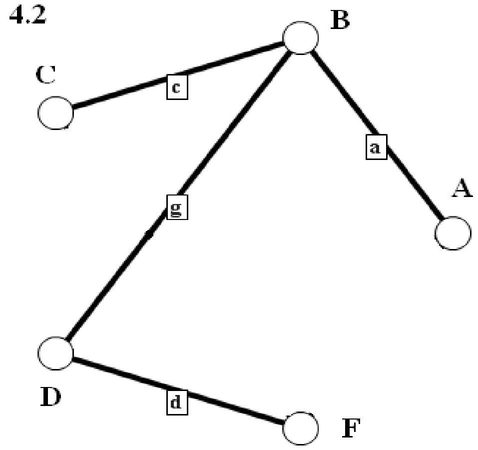


Рис. 65

5 крок. Підграфи $G_4^i\left(V, E_4^i\right), |V| = 5, \left|E_4^i\right| = 4, \quad i = 1{,}2$ не мають циклів. Початковий граф не має висячих вершин. Отже, обидва графи є остовами мінімальної ваги 17. Алгоритм зупиняє роботу.

Контрольні запитання

- Який граф називається деревом?
- Який граф називається орієнтовним деревом?
- Що таке бінарне дерево?
- Що таке остовне дерево?
- Скільки центрів може мати дерево?
- Що таке тип вершини дерева?
- Скільки дерев можна побудувати в повному графі з N вершинами?
- Що таке матриця Кірхгофа, які її властивості?
- Які існують алгоритми пошуку остовних дерев графа?
- Як формулюється задача про мінімальне сполучення?
- Які алгоритми побудови остовів мінімальної ваги вам відомі?

§ 20. Планарні графи

20.1 Топологічні властивості графів.

Розглянемо топологічні властивості графів, тобто властивості інваріантні відносно *гомеоморфних перетворень*.

Означення 20.1 Два графи називаються *гомеоморфними*, якщо вони є ізоморфними з точністю до вершин степеня 2, тобто, якщо вони одержуються з одного графа заміною деяких ребер простими ланцюгами.

На Рис.66 наведено приклад гомеоморфних графів.

Означення 20.2 Родом поверхні називається найбільше число простих замкнених кривих на ній, які не роз 'єднують цю поверхню.

Так, площина та сфера є поверхнями нульового роду, бо довільна замкнена крива розділяє ці поверхні. Прикладом поверхні першого роду є *тор.*

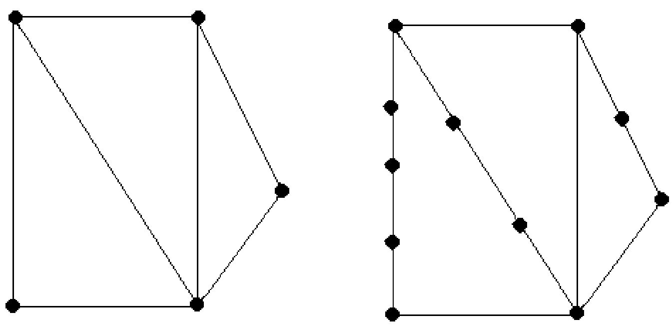


Рис. 66

Означення 20.3 *Родом графа* називається мінімальний рід серед усіх поверхонь, на яких граф можна зобразити, так, щоб його ребра перетинались тільки у вершинах.

Задача про визначення роду графа називається задачею про вкладення графа. Тут ми розглянемо розв'зок задачі про планарність графа.

Означення 20.4 Граф називається ***планарним***, якщо він нульового роду, тобто може бути зображеним на площині (або на сфері) так, щоб його ребра перетинались тільки у вершинах.

20.2 Критерій планарності Понтрягіна-Куратовського

Будемо називати точку площини **диз'юнктною** до графа *G*, якщо вона не співпадає з вершинами *G* і не знаходиться на його ребрах.

Крива лінія називається жордановою, якщо вона є неперервною, самонеперетинною, тобто отримується неперервною деформацією прямолінійного відрізку.

Гранню графа *G*, що містить у собі точку *x*, називається множина точок площини, які з'єднуються з *x* жордановими кривими, кожна точка яких є диз'юнктною до графа *G*.

Теорема 19.1 (Ейлера [12]) Нехай $G = \langle V, E \rangle$ зв'язний плоский граф. $|V| = n$, $|E| = m$, крім того, позначимо $f-$ кількість граней даного графа. Тоді: $n + f = m + 2$.

Доведення. Доведення проводиться за індукцією відносно кількості ребер у графі. Якщо $m = 0$, то $n = 1$(бо граф є зв'язним) і $f = 1$ (наскінчена грань). В цьому випадку теорема є вірною.

Нехай теорема є вірною для довільного графа *G*, який має $m-1$ ребро. Додамо до цього графа нове ребро e. Тоді мають місце наступні випадки додавання цього ребра до графа *G*:

а) ребро eє петлею й утворює нову грань, при цьому кількість вершин є незмінною;

б) ребро e з'єднує дві різні вершини, що призводить до розбиття однієї з граней графа *G* на дві, при цьому кількість вершин є незмінною;

в) ребро e є інцидентним тільки одній вершині графа *G*, при цьому додається нова вершина, але кількість граней залишається незмінною.

У всіх трьох випадках теорема виконується. За індукцією приходимо до висновку, що теорема є вірною для довільного плоского графа.∇

Якщо граф має k компонент зв'зності, то ця формула набере вигляду $n+f=m+k+1$.

Наслідок 20.1 Нехай $G=\langle V,E\rangle$ зв'язний простий плоский граф, де $|V|=n\geq 3$, $|E|=m$, тоді $m\leq 3n-6$.

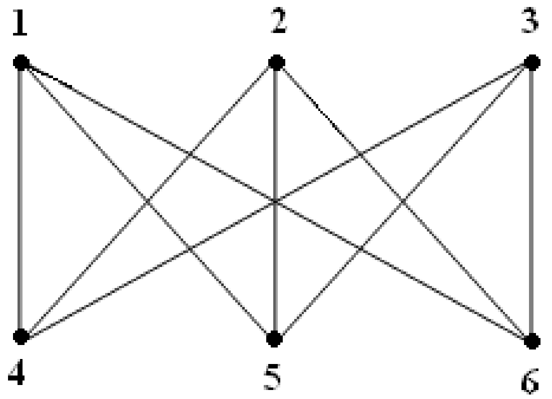
Наслідок 20.2 У довільному простому планарному графі існує вершина, степінь якої не вище 5.

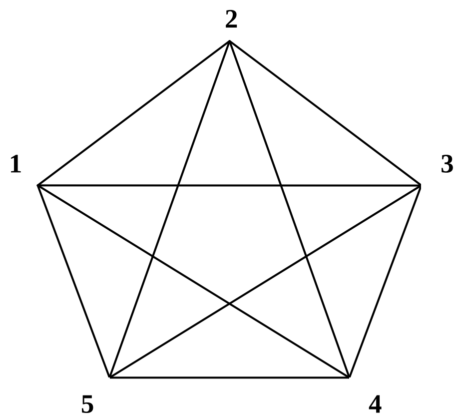
Теорема 20.2 Графи K_5 та $K_{3,3}$ (Рис.67) не є планарними.

Доведення. Якщо K_5 планарний, то з наслідку до теореми Ейлера отримаємо $10\leq 9$, що неможливо.

Розглянемо граф $K_{3,3}$. Кожна його грань є обмеженою чотирма ребрами, отже, $4f\leq 2m$, тобто $2f\leq 9$, що неможливо, бо за теоремою Ейлера маємо $6+f=9+2$ або $f=5$.∇

Означення 20.5 Товщею графа $t(G)$ називається найменша кількість планарних графів, об'єднання яких дає граф G.





Граф $K_{3,3}$ Рис. 67 Граф K_5

За допомогою теореми Ейлера можна довести такий факт.

Теорема 20.3 Нехай $G=\langle V,E\rangle$ простий граф, де $|V|=n\geq 3$, $|E|=m$. Тоді мають місце нерівності:

$$t(G) \geq \left[\frac{m}{3n-6}\right],\ t(G) \geq \left[\frac{m+3n-7}{3n-6}\right],\ t(G) \geq \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} \rho_j - 2}{6(n-2)}\right] + 1,$$

де ρ_j – степінь вершини з номером j.

Теорема 20.4 (Понтрягіна-Куратовського). Граф є планарним тоді і тільки тоді, коли він не містить підграфів гомеоморфних графам K_5 або $K_{3,3}$.

Прикладом задач, що приводять до вивчення питання про планарність, є задача про проектування електронної печатної плати.

Алгоритм визначення планарності графа, базується на критерії Понтрягіна і полягає у відшуканні в графі підграфів гомеоморфних K_5 або $K_{3,3}$. У разі відсутності таких підграфів досліджуваний граф є планарним.

Зрозуміло, що для визначення планарності графа достатньо знайти хоча б одну з заборонених фігур (підграфів гомеоморфних K_5 або $K_{3,3}$). Заборонені фігури поділяються на два типи: I тип - гомеоморфні K_5 та II тип -гомеоморфні $K_{3,3}$.

Якщо граф не планарний, то вилученням із нього певної кількості ребер, його можна зробити планарним, тобто отримати планарний підграф. Тоді постає питання про найменшу кількість ребер, що необхідно вилучити з графа.

Для відповіді на це питання необхідно знаходити усі заборонені фігури і шляхом побудови покриття таблиці заборонених фігур визначати ребра, що вилучаються. Це задача досить складна і призводить до великого обсягу обчислень, тому її розв'язання потребує застосування обчислювальної техніки.

Наступний алгоритм дає розв'язання задачі про планарність графа, і знаходить щонайменше по одній забороненій фігурі кожного типу, якщо такі є.

20.3 Алгоритм матричного методу визначення планарності графа.

Якщо товща графа більше одиниці, тобто граф не є прланарним, тоді в
ньому обов'язково є підграфи гомеоморфні K_5 або $K_{3,3}$. Наступна процедура дає змогу відшукати підграфи гомеоморфні K_5 або $K_{3,3}$ в графі з n вершинами.

Будується матриця суміжності для графа $A = \left(a_{ij}\right)_{i,\,j=\overline{1,n+1}}$, де $a_{n+1\,j} = a_{in+1} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$ (контрольні суми);

ІІ. Пошук підграфа гомеоморфного графу K_5.

Крок 1. За допомогою операції синхронного переставлення рядків і стовпчиків формується головний мінор 5х5 у верхньому лівому куті з нульовою діагоналлю, а саме:

а) переглядається перший стовпчик і вибирається (довільно) один із рядків, для яких виконуються умови $a_{i1} = 0$ та $a_{in+1} = a_{n+1j} \geq 4$, і переставляється з першим рядком;

б) відповідно синхронно відбувається перестановка однойменних стовпчиків;

в) переглядаються з другого до 5 стовпчиків, вибираються рядки за умов $a_{ij} = 0, \quad i > j-1, j = 2,3,4,5$ та $a_{in+1} = a_{n+1j} \geq 4$ і переставляються відповідно з 2, 3, 4, 5 рядками.

При усіх перестановках рядків і стовпчиків початкову нумерацію необхідно зберігати.

Отримаємо матрицю $\widetilde{A} = \left(a_{i_k j_l}\right)_{k,l=\overline{1,n+1}}$

Крок 2. Розглянемо матрицю $B = \left(b_{kl}\right)_{k,l=\overline{1,n+1}}$,

де $b_{kl} = a_{i_k j_l}, \forall k,l$.

Якщо усі клітинки головного мінору 5х5 у верхньому лівому куті, окрім діагональних, відмінні від нуля, то цей мінор і визначає граф K_5. Якщо ж у цьому мінорі є хоча б одна нульова клітинка, наприклад, $b_{kl} = 0,\ k,l \le 5$, то необхідно з’ясувати, чи є у графі простий ланцюг, що з’єднує вершини з номерами i_k та j_l. Якщо такий ланцюг існує, то усі його вершини приєднуються до підграфа, визначеного головним мінором 5х5 у верхньому лівому куті матриці суміжності. Вони мають степінь два, отже, отриманий підграф є забороненою фігурою гомеоморфною K_5. Якщо головний мінор 5х5 у верхньому лівому куті матриці суміжності, має кілька порожніх клітинок, то треба перевірити існування простих ланцюгів між відповідними парами вершин, щоб з’ясувати, чи існує заборонена фігура.

У разі коли виявлено підграф гомеоморфний K_5, непланарність графа доведено. В іншому випадку з початкового графа вилучається підграф, що визначається головним мінором 5х5 у верхньому лівому куті матриці суміжності. Після цього переходимо до кроку 1. Так як граф скінчений, то алгоритм обов’язково закінчить роботу.

ІІІ. Пошук підграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$.

За допомогою операції синхронного переставлення рядків і стовпчиків формується мінори 3х3 на побічній діагоналі у верхньому правому та у нижньому лівому куті матриці, а саме:

Крок 1. а) переглядається перший стовпчик, вибирається (довільно) один із рядків, для яких виконуються умови $a_{i1} = 1$ та $a_{in+1} = a_{n+1j} \ge 3$, і цей рядок переставляється з останнім рядком;

б) відповідно синхронно відбувається перестановка однойменних стовпчиків;

в) переглядається останній рядок і довільні два стовпчики, для яких $a_{nj} \ne 0, \quad j > 1$, переставляються відповідно з другим і третім стовпчиками. У результаті отримаємо $\sum_{j=1}^{3} a_{nj} = 3$.

Крок 2. а) в матриці, що отримано в результаті кроку 1, переглядається перший стовпчик, вибирається (довільно) один із рядків, окрім останнього, для яких виконуються умови $a_{i1} = 1$ та $a_{in+1} = a_{n+1j} \geq 3$, $i \neq n$, і цей рядок переставляється з передостаннім, $n-1$-шим, рядком;

б) відповідно синхронно відбувається перестановка однойменних стовпчиків;

в) переглядається $n-1$-ший рядок і довільні два стовпчики, для яких $a_{nj} \neq 0$, $j > 3$, переставляються відповідно з другим і третім стовпчиками. У результаті отримаємо $\sum_{j=1}^{3} a_{n-1j} = 3$.

Крок 3. а) в матриці, що отримано в результаті кроку 2, переглядається перший стовпчик, вибирається (довільно) один із рядків, окрім останніх двох, для яких виконуються умови $a_{i1} = 1$ та $a_{in+1} = a_{n+1j} \geq 3$, $i \neq n$, і цей рядок переставляється з $n-2$-им, рядком;

б) відповідно синхронно відбувається перестановка однойменних стовпчиків;

в) переглядається $n-2$-гий рядок і довільні два стовпчики, для яких $a_{nj} \neq 0$, $j > 3$, переставляються відповідно з другим і третім стовпчиками. У результаті отримаємо $\sum_{j=1}^{3} a_{n-2j} = 3$.

Якщо в результаті трьох кроків отримаємо рівності $\sum_{j=1}^{3} a_{nj} = 3$, $\sum_{j=1}^{3} a_{n-1j} = 3$, $\sum_{j=1}^{3} a_{n-2j} = 3$, то це означатиме, що лівий нижній кут розміру 3х3 матриці немає жодної нульової клітинки, а разом з ним, так як матриця симетрична, і верхній правий кут розміру 3х3. Тобто отримаємо підграф ізоморфний $K_{3,3}$.

У разі коли порушуються рівності $\sum_{j=1}^{3} a_{nj} = 3$, $\sum_{j=1}^{3} a_{n-1j} = 3$, $\sum_{j=1}^{3} a_{n-2j} = 3$, (хоча б одна з них), лівий нижній кут розміру 3x3 матриці матиме нульові клітинки. У цьому випадку (так як і для пошуку підграфа гомеоморфного графу K_5) необхідно перевірити існування простих ланцюгів між відповідними парами вершин, щоб з'ясувати, чи визначається заборонена фігура.

У разі коли виявлено підграф гомеоморфний $K_{3,3}$, непланарність графа доведено. В іншому випадку з початкового графа вилучається підграф, що визначається лівим нижнім та правим верхнім кутами матриці суміжності розміру 3x3. Після цього переходимо до кроку 1. Так як граф скінчений, то алгоритм обов'язково закінчить роботу.

Процедура пошуку заборонених фігур гомеоморфних K_5 та $K_{3,3}$ може мати два моменти зупинки: коли виявлено хоча б одну заборонену фігуру, або якщо не виявлено жодної забороненої фігури. Якщо ж після виявлення першої забороненої фігури продовжити роботу алгоритму, то можна знайти усі заборонені фігури гомеоморфні K_5 та $K_{3,3}$.

Нарешті, зупинимось на алгоритмі пошуку ланцюгів, що з'єднують вершини заборонених фігур, який застосовується під час пошуку заборонених фігур гомеоморфних K_5 та $K_{3,3}$.

Перший варіант полягає у відшуканні степенів відповідних матриць. Так, припустимо, що у головному мінорі 5x5 у верхньому лівому куті або у лівому нижньому куті розміру 3x3 матриці суміжності, є нульова клітинка. Нехай це b_{kl}, тоді підносимо матрицю у степінь до тих пір, поки клітинка k, l стане ненульовою. Це означатиме, що між вершинами з номерами i_k та j_l існує простий ланцюг, що є умовою існування забороненої фігури. Якщо ж усі степені матриці матимуть нульову клітинку k,l, то такого ланцюга не існує, а, отже, не існує і забороненої фігури. Для спрощення обчислень, усі значення клітинок у головному мінорі 5х5 у верхньому лівому куті або у лівому нижньому куті розміру 3х3 матриці суміжності необхідно покласти рівними нулю.

Другий варіант полягає у перегляді елементів матриці суміжності за наступною схемою. Нехай $b_{kl}=0$, але $b_{ks}=1$, тоді переглядається рядок з номером s. Клітинки s,k не розглядається. Не розглядаються також клітинки, що відповідають номерам ненульових елементів у головному мінорі 5х5 у верхньому лівому куті або у лівому нижньому куті розміру 3х3 матриці суміжності. Нехай, $b_{sm}=1$. Якщо $j=l$, то ланцюг знайдено, якщо $m\neq l$, то переглядається рядок з номером m. Клітинки m,k, m,s. Нехай, $b_{mj}=1$. Якщо $j=l$, то ланцюг знайдено, якщо $j\neq l$, то переглядається рядок з номером j. Процес продовжується до тих пір, поки не буде досягнуто рівність $j=l$, що означатиме існування шуканого ланцюга, або поки у рядку, що переглядається, не буде ненульових клітинок, тобто рівність $j=l$ не досягається, що означатиме відсутність шуканого ланцюга.

Зауваження 20.1 Якщо товща графа дорівнює одиниці, то наведену процедуру необхідно продовжити до повного перебору усіх можливих варіантів комбінування по п’ять або по шість рядків. Алгоритм може бути таким, як запропоновано у [5] .

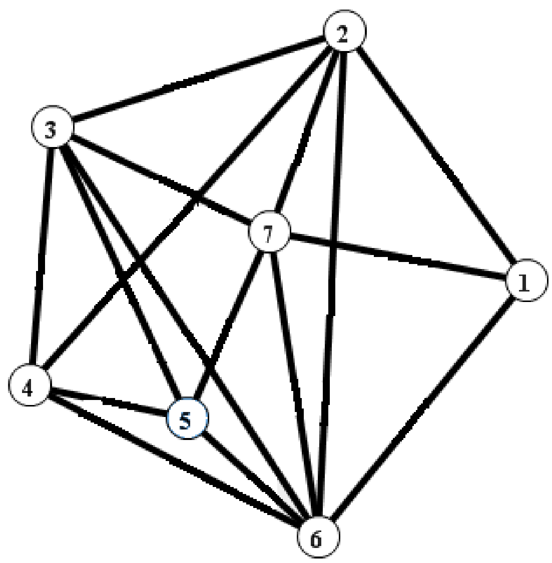


Рис. 68

Приклад 20.1 Нехай є граф (Рис. 68). Тут $n=7$, $m=16$, тоді

$$t(G) \geq \left[\frac{16}{21-6} \right] = 1, t(G) \geq \left[\frac{16+21-7}{21-6} \right] = 2, \quad t(G) \geq \left[\frac{32-2}{6(7-2)} \right] + 1 = 2$$

Отже, граф має товщу більше одиниці і не є планарним. Для визначення ребер, які необхідно видалити, щоб граф став планарним, потрібно знайти заборонені фігури, тобто підграфи гомеоморфні графам K_5 або $K_{3,3}$. Продемонструємо процедуру побудови заборонених фігур за допомогою матриці суміжності. Для прикладу знайдемо одну з таких фігур, хоча матричний алгоритм дозволяє знаходити усі заборонені фігури. Отже, спочатку випишимо матрицю суміжності даного графа. Визначаємо заборонену фігуру гомеоморфну K_5.

	2	3	4	5	6	7	1
2					c;	d;	e;
3					h;	k;	
4					m;		
5					n;	p;	
6	c;	h;	m;	n;		r;	s;
7	d;	k;		p;	r;		t;
1	e;				s;	t;	

	2	3	4	5	6	7	1
2		a;	b;		c;	d;	e;
3	a;		f;	g;	h;	k;	
4	b;	f;		l;	m;		
5		g;	l;		n;	p;	
6	c;	h;	m;	n;		r;	s;
7	d;	k;		p;	r;		t;
1	e;				s;	t;	

	2	3	4	5	6	7	1
2	d,d;e,e;	d,k;		d,p; c,n	d,r;e,s;	e,t;	d,t;
3	k,d;	k,k;		k,p;	k,r;		k,t;
4							
5	p,d; c,n	p,k;		p,p;	p,r;		p,t;
6	r,d;s,e;	r,k;		r,p;	r,r;s,s;	s,t;	r,t;
7	t,e;				t,s;	d,d;k,k;	d,e;r,s;
1	t,d;	t,k;		t,p;	t,r;	e,d;s,r;	e,e;s,s;

Головний мінор отриманої матриці розміру 5х5 представлятиме граф K_5, якщо будуть заповнені одиницями клітинки (2,5) та (5,2).

Розглянемо матрицю з головним мінором 5х5, усі елементи якого є нулі. Другий степінь цієї матриці у клітинці (2,5) має слова *dp* та cn. Це означає існування ланцюгів довжини 2 з вершини 2 до вершини 5. Отже, заборонену фігуру знайдено, взявши до уваги до уваги ланцюг *dp*, отримаємо фігуру Q_2.

Розглянемо другий варіант пошуку заборонених фігур.

	2	3	4	5	6	7	1
2		1	1		1	1	1
3	1		1	1	1	1	
4	1	1		1	1		
5		1	1		1	1	
6	1	1	1	1		1	1
7	1	1		1	1		1
1	1				1	1	

Клітинка $b_{25} = 0$, але є ненульові клітинки $b_{27} = 1$ та $b_{21} = 1$, переглядаємо рядок з номером *7*. Клітинка $7{,}2$, $7{,}3$, $7{,}6$ не розглядається, тоді, $b_{75} = 1$, $b_{71} = 1$. Отже, при $b_{75} = 1$ отримуємо ланцюг $2 \to 7 \to 5$ (фігура Q_2).

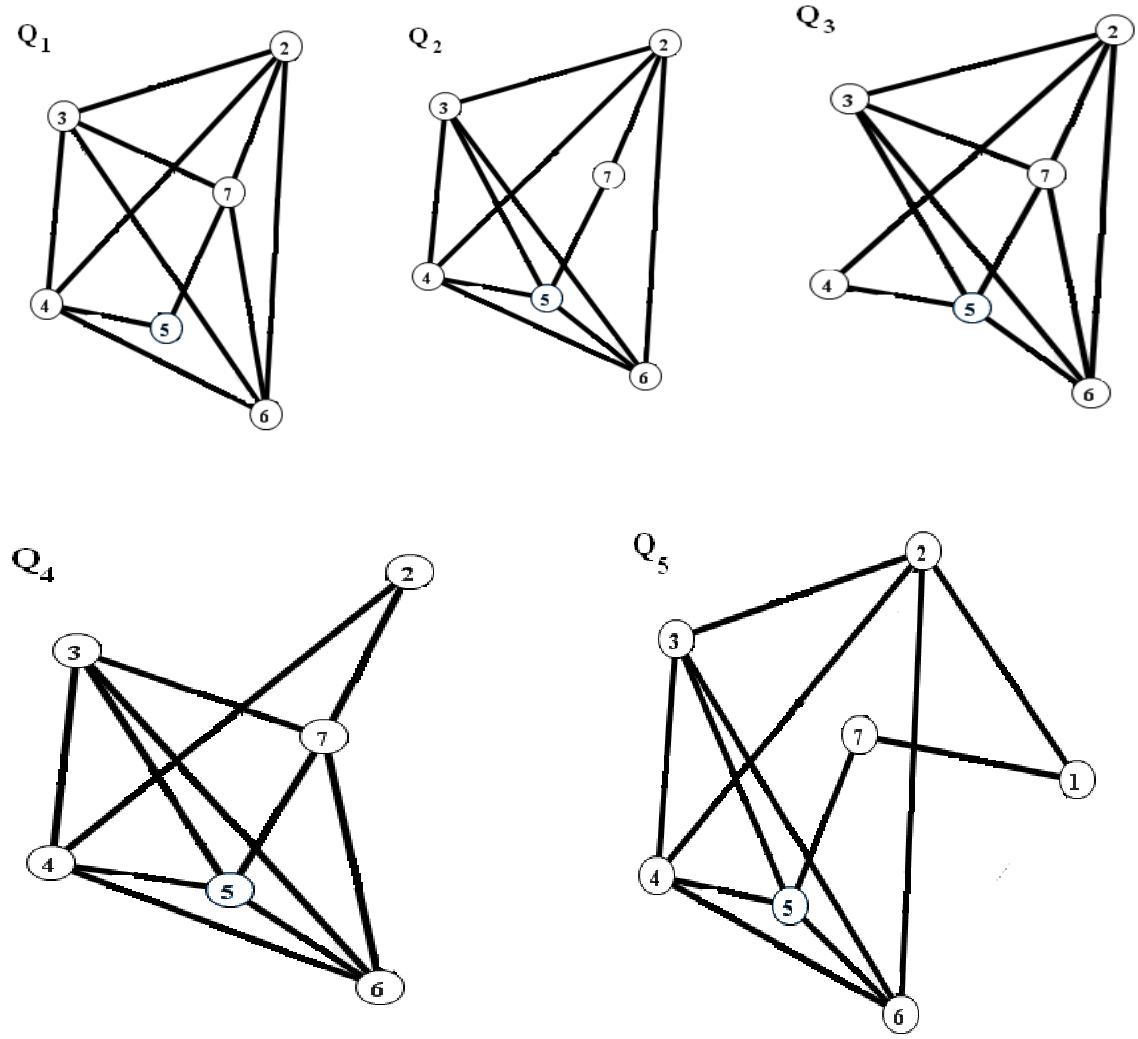


Рис. 69

Переглянемо 1-й рядок. Отримаємо $b_{17} = 1$, а далі $b_{75} = 1$. Таким чином, отримаємо ланцюг 2→1→7→5. Таким чином можна отримати усі заборонені фігури. На Рис. 69 наведено підграфи гомеоморфні графам K_5, а на Рис.70 підграфи гомеоморфні $K_{3,3}$.

Для даного графа знайдено дев’ять заборонених фігур. Побудуємо таблицю, рядки, якої відповідають забороненим фігурам Q_k, а стовпчики - ребрам початкового графа.

Фігури Q_8, Q_9 не враховуємо, бо вони відрізняються від фігур Q_2, Q_4 тільки довжиною ланцюга.

Побудуємо мінімальне покриття цієї таблиці стовпчиками. Це покриття покаже, які ребра необхідно видалити з графа, щоб він став планарним. У даному прикладі покриттями є стовпці, що заповнені одиницями. Вони відповідають тим ребрам, вилучення яких робить граф планарним.

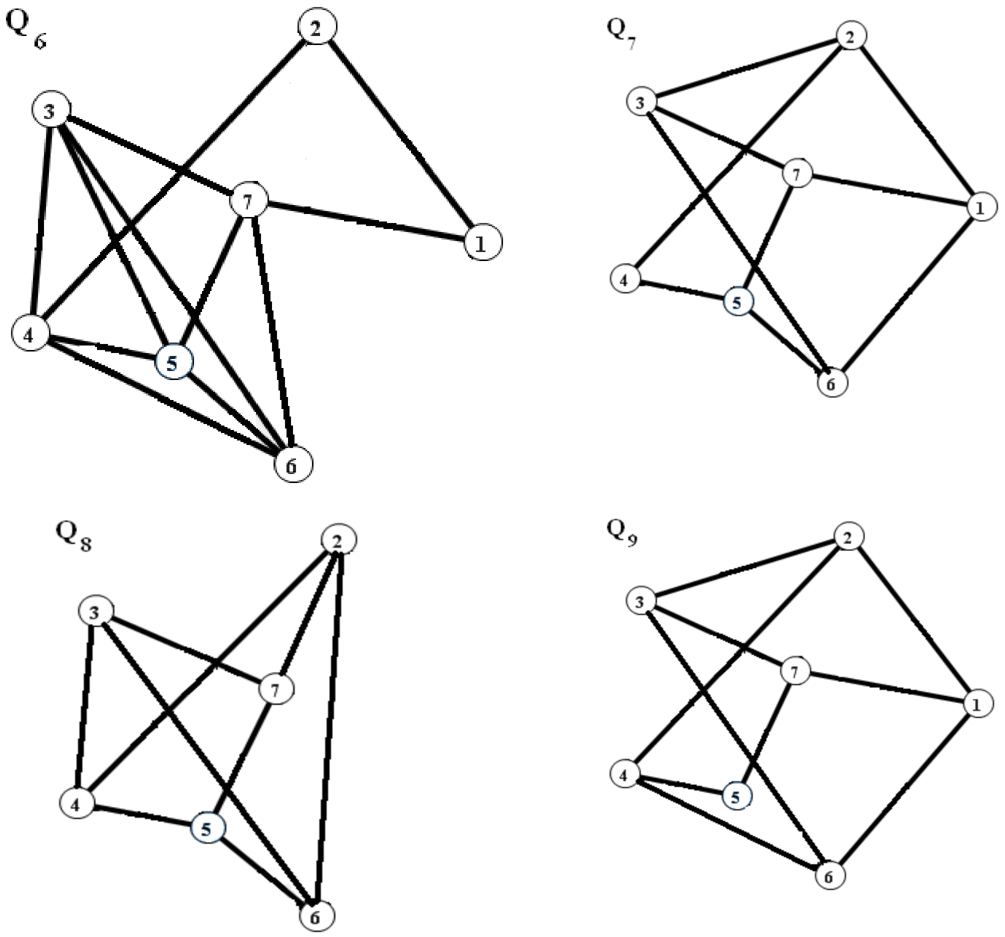


Рис. 70

У даному прикладі таких є декілька варіантів: {2,4}, {3,6}, {4,5}, {5,7}. Отже, видалення з даного графа одного з цих ребер, наприклад, {3,6} зробить граф планарним.

Таблиця заборонених фігур

Q	ребра															
	1,2	1,6	1,7	2,6	2,7	2,3	2,4	3,7	3,4	3,6	4,5	4,6	5,3	5,7	5,6	6,7
Q_1				1	1	1	1	1	1	1	1	1		1		1
Q_2				1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	
Q_3					1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Q_4				1	1	1	1	1		1	1		1	1	1	1
Q_5				1	1		1	1	1	1	1			1	1	
Q_6	1	1	1			1	1	1		1	1			1	1	
Q_7	1	1	1			1	1	1		1	1	1		1		

20.4 Двоїсті графи. Критерій Уїтні.

Розглянемо ще один критерій планарності графів, основою якого є поняття абстрактно двоїстого графа.

Означення 20.5 Граф G^* називається абстрактно двоїстим до графа G, якщо між ребрами цих графів існує взаємно однозначна відповідність і підмножині ребер з графа G, які утворюють у ньому цикл, відповідає підмножина ребер графа G^*, що утворюють у ньому розріз.

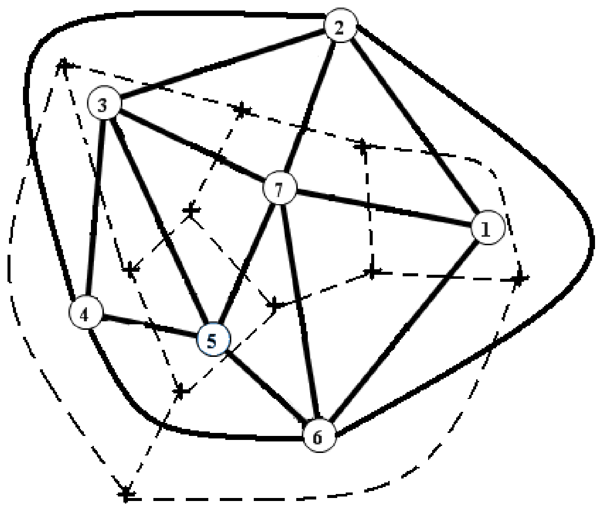


Рис. 71

Процедура побудови двоїстого графа полягає в наступному:

1) всередині кожної грані графа вибираємо по одній точці, це і будуть вершини двоїстого графа;

2) кожному ребру даного графа співставимо лінію, що його перетинає і з'єднує точки суміжних даному ребру граней.

Для прикладу розглянемо двоїстий граф (Рис.71) для графа з попереднього прикладу, після вилучення з нього ребра $\{3,6\}$. Ребра двоїстого графа зображатимемо пунктирною лінією, а вершини – хрестиками.

Теорема 20.5 (Уїтні) Граф є планарним тоді і тільки тоді, коли існує граф абстрактно двоїстий до нього.

Алгоритм побудови абстрактно двоїстого графа методами матричної алгебри.

Нехай $G = \langle V, E \rangle$ зв'язний плоский граф. $|V| = n$, $|E| = m$.

Якщо граф не має циклів, тобто є деревом, то абстрактно двоїстий граф $G^* = \left\langle V^*, E^* \right\rangle$ має єдину вершину (бо дерево має тільки одну грань) і усі його m ребер є петлями.

Якщо граф має цикли, то неважко переконатись, що кожний базисний цикл є гранню графа, а, отже, в абстрактно двоїстому графі йому відповідає вершина. Враховуючи теорему 20.1, отримаємо $f = m - n + 2 = \nu + 1$, де ν - цикломатичне число графа. Таким чином, $\left|V^*\right| = \nu + 1$.

Нехай $I = (I_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ матриця інцидентності графа $G = \langle V, E \rangle$, а $A = (a_{ij})_{i,\, j=\overline{1,n}}$ його матриця суміжності. Має місце наступна формула: $I \cdot I' - B = A$, де I' - транспонована матриця інцидентності, а елементи матриці B обчислюються за формулою

$$b_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} I_{ik} I_{ki}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Перейдемо до описання процедури побудови матриці суміжності абстрактно двоїстого графа $G^* = \left\langle V^*, E^* \right\rangle$. Кожному базисному циклу графа $G=\langle V,E\rangle$ (тобто кожній скінченій грані) поставимо у відповідність вершину абстрактно двоїстого графа (кількість таких вершин дорівнює ν) і $\nu+1$ - вершина відповідає нескінченій грані графа $G=\langle V,E\rangle$. В такому разі C' матриця транспонована до матриці C базисних циклів є матрицею інциде-нтності підграфа абстрактно двоїстого графа $G^*=\left\langle V^*,E^*\right\rangle$, що не містить $\nu+1$-ї вершини. Враховуючи формулу $I\cdot I'-B=A$, отримаємо матрицю суміжності A^*_ν цього підграфа:

$$C\cdot C'-B=A^*_\nu,\quad \text{де } b_{ij}=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m}c_{ik}c_{ki}, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}.$$

Для отримання матриці суміжності A^* залишилось до матриці A^*_ν додати $\nu+1$- й стовпчик і рядок, елементи яких обчислюються за формулами:

$$a^*_{i\nu+1}=a^*_{\nu+1i}=\sum_{k=1}^{m}c_{ki}-\sum_{k=1}^{\nu}a^*_{ik},\quad i<\nu+1\quad,\ a^*_{\nu+1\nu+1}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}-\sum_{\substack{i,j=1\\ i=j\neq\nu+1}}^{\nu+1}a^*_{ij}$$

Перша з формул визначає кількість кратних ребер, що з’єднують *i*-ту вершину, яка відповідає скінченій грані, з $\nu+1$-ю вершиною, яка відповідає нескінченій грані. Друга формула визначає подвоєну кількість петель на $\nu+1$-й вершині, що відповідають ребрам графа $G=\langle V,E\rangle$, які не належать його циклам.

Контрольні запитання

- Що називається родом графа?
- Які графи називаються гомеоморфними?
- Який граф називається планарним?
- Що таке товщина графа?
- Який граф називається абстрактно двоїстим?
- Як формулюється критерій Понтрягіна?

- Що таке заборонена фігура?
- Як формулюється критерій Уїтні?

§ 21. Стійкість. Паросполучення. Розфарбування графів.

21.1 Стійкість. Паросполучення.

При розв'язанні прикладних задач доводиться обчислювати так звані інваріанти графів. Розглянемо задачу: для відслідковування технологічного процесу, який поділяється на певні технологічні модулі, необхідно розташувати камери спостереження таким чином, щоб їхня кількість була мінімальною, і на моніторі або пульті спостерігача було видно усі модулі. Цій задачі співставляється граф, вершини якого відповідають модулям технологічного процесу. Дві вершини з'єднуються ребром, якщо за відповідними модулями можна спостерігати, знаходячись біля одного з них. Для розв'язку цієї задачі необхідно визначити такий інваріант, що називається вершинним числом зовнішньої стійкості данного графа.

Перейдемо до визначення інваріантів графа.

Означення 21.1 Будь-яка сукупність попарно несуміжних вершин називається *внутрішньо стійкою* на графі.

Означення 21.2 Внутрішньо стійка множина називається *порожнім підграфом*, якщо при додаванні до неї хоча б однієї вершини, що не належить даній множині, утворюється щонайменше одне ребро.

Означення 21.3 Потужність максимального порожнього підграфа називається числом *внутрішньої стійкості* або *вершинним числом незалежност*і графа $\varepsilon_0(G)$. Максимальна кількість попарно несуміжних ребер даного графа називається *реберним числом незалежності* графа $\varepsilon_1(G)$.

Якщо ребро інцидентне вершині, то кажуть, що вони покривають одне одного. Множина вершин, що покривають усі ребра графа, називається вершинним покриттям графа.

Означення 21.4 Мінімальна потужність вершинного покриття називається *числом вершинного покриття* графа $\pi_0(G)$. Множина ребер, які покривають усі вершини графа, називається *реберним покриттям*. Мінімальна потужність реберного покриття графа *G* називається *числом реберного покриття* $\pi_1(G)$.

Теорема 20.1 Для довільного зв'язного графа $G = \langle V, E \rangle$ має місце рівність: $\varepsilon_0(G)+\pi_0(G)=\varepsilon_1(G)+\pi_1(G)=|V|$.

Означення 21.5 Граф називається *дводольним*, якщо множина його вершин складається з двох неперетинних підмножин V_1 та V_2, в яких вершини не є попарно суміжними.

Теорема 21.2 Для того, щоб граф був дводольним, необхідно і достатньо, щоб усі його цикли мали парну довжину.

Означення 21.6 Множина ребер графа, в якій ніяка пара ребер не є суміжною, називається *паросполученням* в графі *G*. Паросполучення, у якому кількість ребер дорівнює $\varepsilon_1(G)$, називається *максимальним*.

Для дводольних графів має місце теорема про паросполучення.

Теорема 21.3 (Кеніга). Для дводольного графа кількість ребер у найбільшому паросполученні дорівнює числу вершинного покриття графа, тобто $\varepsilon_1(G)=\pi_0(G)$.

Означення 21.7 Досконалим паросполученням з V_1 у V_2 в двохдольному графі називається бієктивне відображення між вершинами V_1 та V_2, при якому кожна вершина з V_1 з'єднується ребром з деякою вершиною з V_2.

З теореми Менгера випливає наступна важлива теорема, яка пов'язана з відомою задачею про весілля. Задача полягає в тому, що деяку кількість юнаків, які знайомі з кількома дівчатами, необхідно одружити так, щоб кожний одружився зі знайомою дівчиною. За яких умов це можна зробити?

Теорема 21.4 (Холла). Розв'язок задачі про весілля існує тоді і тільки тоді, коли довільні k – юнаків з даної множини знайомі у сукупності щонайменше з k – дівчатами.

Цю теорему можна сформулювати у термінах паросполучень для дводольних графів.

Теорема 21.5 Нехай $G(V_1,V_2)$ - дводольний граф і для довільної підмножини $A \subset V_1$ позначимо $\varphi(A)$ множину тих вершин з V_2, які суміжні щонайменше з однією вершиною з A. Тоді досконале паросполучення з V_1 у V_2 існує в тому і тільки в тому випадку, коли $\forall A \subset V_1 : |A| \leq |\varphi(A)|$ для кожної підмножини $A \subset V_1$.

Задачі, у яких вивчаються паросполучення, пов'язані з досить складними задачами теорії оптимізації лінійного програмування, що виходить за рамки тематики даного посібника. Зокрема, задача пошуку максимального досконалого паросполучення безпосередньо зводиться до так званої «транспортної задачі».

21.2 Розфарбування графів. Проблема чотирьох фарб.

Серед прикладних задач, які приводять до задач розфарбування графів можна назвати такі.

Задача про завантаження або розміщення n предметів по окремих коробках, так зване сортування предметів. Граф цієї задачі має n вершин, а ребро (v_k, v_j) означає, що предмети несумісні, тобто не можуть знаходитись у одній коробці. Отже, задача про розміщення предметів зведеться до задачі розфарбування цього графа.

Задача складання розкладів або планування. Вершини графа відповідають певній події або операції, а їх з'єднання означає їхню несумісність у часі. Отже, побудова оптимального розкладу еквівалентна оптимальному розфарбуванню графа.

Класична задача розфарбування географічних карт, де країнам відповідають вершини графів, ребра - це кордони між країнами. Зрозуміло, що сусідні країни не повинні мати однакові кольори.

Означення 21.8 Нехай граф G не містить петель, тоді він називається k-кольоровим, якщо кожній вершині можна приписати один з k кольорів таким чином, що ніякі дві суміжні вершини не мають однакового кольору. Число k називається хроматичним числом графа, якщо він k-кольоровий, але не (k-1)-кольоровий. Хроматичне число позначається так $\eta(G)$.

Наприклад, $\eta(K_n) = n$. Взагалі, можна побудувати граф з довільним скільки завгодно великим хроматичним числом.

Зрозуміло, що якщо $\eta(G) = 1$, то граф не є зв'язним.

Якщо $\eta(G) = 2$, то граф називається біхроматичним. Має місце така теорема.

Теорема 21.6 (Кеніг) Граф є біхроматичним тоді і тільки тоді, коли усі його цикли мають парну довжину.

Згідно з теоремою 21.2 усякий дводольний граф є біхроматичним.

Виникає питання про визначення хроматичного числа графа.

Теорема 21.7 (Брукс) 1) Якщо G неповний граф і найвищий степінь $S_{\max}(G) \geq 3$, то $\eta(G) \leq S_{\max}(G)$. 2) Для довільних натуральних чисел n, α, γ, які задовольняють умовам $\frac{n}{2} \leq \gamma \leq n + 1 - \alpha$, існує граф з n вершинами і такий, що $\eta(G) = \gamma$, $\alpha = \varepsilon_0(G)$.

Наступний факт дає зв'язок хроматичного числа з степенями вершин графа.

Теорема 21.8 Якщо найвищий степінь вершин графа дорівнює ρ, то цей граф є $(\rho + 1)$-кольоровий.

Для планарних графів має місце теорема про п'ять кольорів.

Теорема 21.9 Довільний планарний граф є 5-кольоровим.

З іншого боку постає питання, чи можна розфарбувати довільний планарний граф чотирма фарбами? Це є досить відома проблема чотирьох фарб.

Гіпотеза 4-х фарб. Довільний планарний граф є 4-кольоровим.

Доведення цього факту поки, що не відоме, але мають місце такі твердження:

- (Герч) довільний планарний граф, що не містить трикутників, є 3-кольоровим;
- (Уітні) гіпотезу чотирьох фарб досить довести для гамільтонових планарних графів .

Відомо, що гіпотезу чотирьох фарб було перевірено Аппелем і Хакеном прямим перебором всеможливих варіантів за допомогою ЕОМ ([7]).

Контрольні запитання

- Що називається внутрішньо стійкою множиною графа?
- Який підграф називається порожнім?
- Що таке реберне число незалежності?
- Що таке реберне покриття?
- Що таке вершинне покриття?
- Який граф називається дводольним?
- Умови дводольності графа?
- Що називається паросполученням?
- Що називається досконалим паросполученням?
- У чому суть теореми Холла про розв'язання задачі про весілля?
- Який граф називається k-кольоровим?
- Які умови біхроматичності графа?
- У чому полягає проблема чотирьох фарб?

§ 22. Орієнтовані графи

22.1 Основні означення.

Нехай $G(V,E)$ - орієнтований граф. Нагадаємо, що в орієнтованому графі (скорочено орграфі) порядок суміжних вершин визначає направленість ребер інцидентних цим вершинам. Наприклад, для пари (v_k, v_j) перша вершина це початок ребра, друга – кінець. Інакше кажучи, множина дуг E - це бінарне відношення (так званої «орієнтованої» суміжності вершин) на множині V, яке є відношенням часткового порядку. Таким чином, на множині вершин орграфа можна розглядати відображення $\Gamma : V \to V$, $\Gamma(x_i) = \{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}\}$, де x_{i_j} - вершина кінцева вершина дуги з початком у вршині x_i.

Ребра орграфа називають *дугами*.

Маршрутом на орграфі є послідовність дуг незалежно від їхньої орієнтації, що зв'язує деяку пару вершин. Маршрут, у якому враховується орієнтації дуг, називається *шляхом* і, якщо кожна дуга цього шляху використовується лише один раз, то він називається *орієнтованим ланцюгом*. Якщо ж орієнтований ланцюг проходить через вершини тільки по одному разу, то він називається *простим шляхом*.

Цикли на орграфі називаються *контурами*. Контур – *орієнтований*, якщо він утворюється орієнтованим ланцюгом. Контур - *простий*, якщо він утворюється простим шляхом.

Вершина називається *початковою* або *витоком* в орграфі, якщо вона не є кінцевою ні для однієї дуги.

Вершина називається *кінцевою* або *стоком* графа, якщо вона не є початковою ні для однієї дуги.

Означення 22.1 Вершина v називається досяжною з вершини u, якщо існує шлях з u до v.

Таким чином на носієві орграфа визначається бінарне відношення – *відношення досяжності*. Легко перевірити, що це відношення є антирефлексивним, антисиметричним і транзитивним, тобто є відношенням строгого часткового порядку.

Теорема 22.1 Відношення досяжності на орієнтованому графі є відношенням строгого часткового порядку тоді і тільки тоді, коли в графі немає жодного контуру.

22.2. Сильна зв'язність.

Означення 22.2 Орграф називається сильно зв'язним, якщо кожна пара вершин поєднується шляхом.

Якщо умова сильної зв'язності порушується, то орграф називається слабко зв'язним, тобто, якщо не враховувати орієнтацію ребер, то слабка зв'язність - це звичайна зв'язність графа як неорієнтованого.

Алгоритм визначення сильної зв'язності графа, так як і алгоритм визначення зв'язності неорієнтованого графа, базується на обчисленні матриці досяжності, яка є сумою степенів матриці суміжності ([5]). Компоненти сильної зв'язності утворюють блоки у матриці сильної досяжності, яка будується точно за тим же правилом, що й матриця досяжності неорієнтованого графа. Однак, у матриці можуть бути інші ненульові елементи, які не входять до блоків сильної зв'язності.

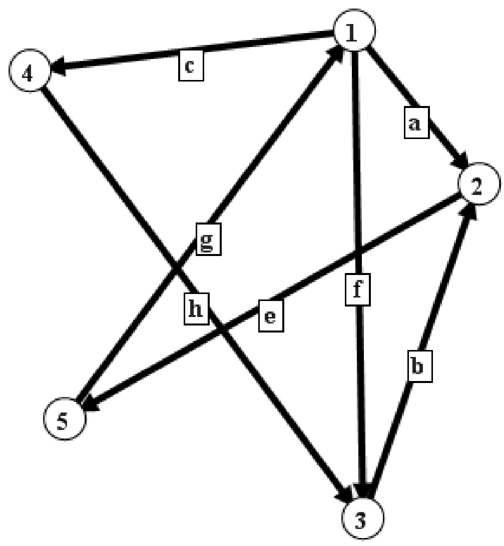


Рис. 72

Приклад 22.1 Знайти компоненти сильної зв'язності графа (Рис.72).

Знайдемо матрицю досяжності данного графа за формулою $D(G)=\sum_{i=1}^{d(G)} S^{i}(G)$, де

$$S(G)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & a & f & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Для даного графа маємо

$$D(G)=S(G)+S^{1}(G)+S^{2}(G)+S^{3}(G)+S^{4}(G)+S^{5}(G).$$

При цьому отримаємо матрицю, усі клітинки якої є ненульовими, тобто цей граф є сильнозв’язним. Якщо ж з нього видалити дугу *b* (Рис. 73), то він стає слабко зв’язним. Матрицю досяжності наведено нижче. Перші три стовпчики і рядки матриці утворюють ненульовий блок, що відповідає компоненту сильної зв’язності – підграфа на трьох вершинах {1,2,5}.

$$D(G)=S(G)+S^{1}(G)+S^{2}(G)+S^{3}(G)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|cc} aeg & a & ae & e & f;ch \\ eg & ega & e & egc & egf \\ g & ga & gae & gc & gf;gch \\ \hline & & & & \\ & & & & h \end{array}\right) \end{array}$$

Означення 22.3 Орієнтований граф називається тотальним, якщо для кожної пари вершин існує шлях хоча б в одному напрямі, що зв’язує їх.

Для тотального графа має місце теорема, що стверджує існування гамільтонових шляхів на орграфі.

Теорема 22.2 Орграф без циклів має точно один гамільтонів шлях то-

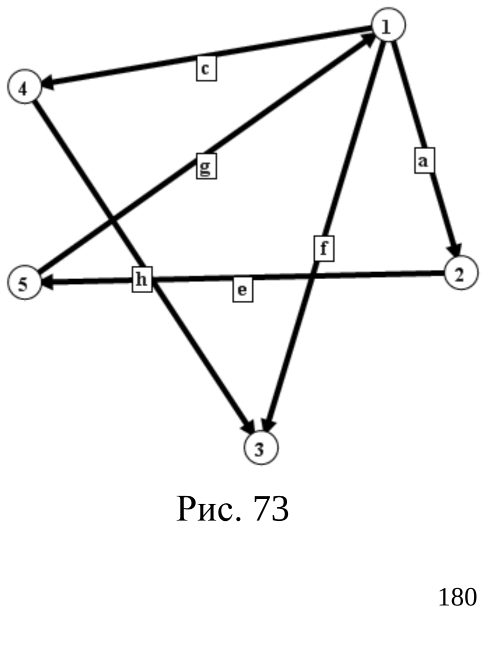


Рис. 73

ді і тільки тоді, коли він є тотальним.

22.3 Задача про найкоротші шляхи.

Нехай є зважений орграф $G(V,E), |V|=n, |E=m|$ і його вагова матриця $C=(c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$. Задача полягає у відшуканні шляху найменшої ваги з деякої початкової вершини s до іншої вершини t. Розглянемо цю задачу за умов, що усі ваги є додатніми, і у графі не існує контурів від'ємної сумарної ваги. (Взагалі цю задачу можна розглядати для графа, де не усі ребра орієнтовані, тоді вважають, що неорієнтоване ребро має два напрямки).

Задача має два варіанти постановки.

Перший, коли необхідно знайти найкоротший шлях між заданими двома вершинами.

Другий, коли треба знайти усі найкоротші шляхи між усіма парами вершин графа. Розглянемо розв'зання цієї задачі за алгоритмом Дейкстри.

Алгоритм Дейкстри.

1 крок. На початкову вершину s навішуємо позначку $l(s)=0$ і вважаємо її постійною. Постійні позначки вирізнятимемо, дописуючи до них плюс.

Для усіх вершин $v_j \neq s$, позначки матимуть вигляд $l(v_j)=\infty$ і вважаються тимчасовими. Покладемо $y=s$

2 крок. Для усіх $v_j \in \Gamma(s)$, позначки яких є тимчасовими, треба виконати заміну позначок, користуючись правилом: $l(v_j)=\min[l(v_j);l(y)+\mu(y,v_i)]$, де $\mu(y,v_i)$ - вага дуги, що з'єднує вершину y та v_j.

3 крок. Серед усіх вершин v_j, що мають тимчасову позначку, визначаємо вершину v^* за правилом: $l(v^*)=\min[l(v_j)]$. Для цієї вершини позначка вважається постійною і покладаємо $y=v^*$

.

4 крок. Якщо виявилось, що $y=t$, то $l(y)$є найкоротша відстань між s і t. Алгоритм завершує роботу. Якщо ж $y \neq t$, то переходимо до 2 кроку.

Якщо необхідно знайти відстані від вершини s до усіх вершин графа, то виконуємо дії за кроками алгоритма доти, доки усі вершини не отримають постійної позначки. Вони і вказують на найкоротші шляхи від вершини s.

Як тільки визначені найкоротші відстані від вершини s, то можна знайти й самі шляхи мінімальної ваги. Наприклад, кінцевою вершиною шляху є деяка v_j. Позначимо z передостанню вершину шляху, що є початковою для дуги (z, v_j). Цю вершину визначаємо, використовуючи правило $l(v_j)=l(z)+\mu(z,v_i)$. Якщо виявиться, що $z=s$, то шлях знайдено, якщо ж $z=v_{j_1} \neq s$, то вважаємо цю вершиину кінцевою і повторюємо процедуру пошуку попередньої вершини шляху.

Приклад 22. 2 Знайти на графі (Рис.74) усі найкоротші шляхи з вершини А до усіх вершин. Для данного графа вагова матриця має вигляд:

$$\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D\\ E\\ F\\ P \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 13 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

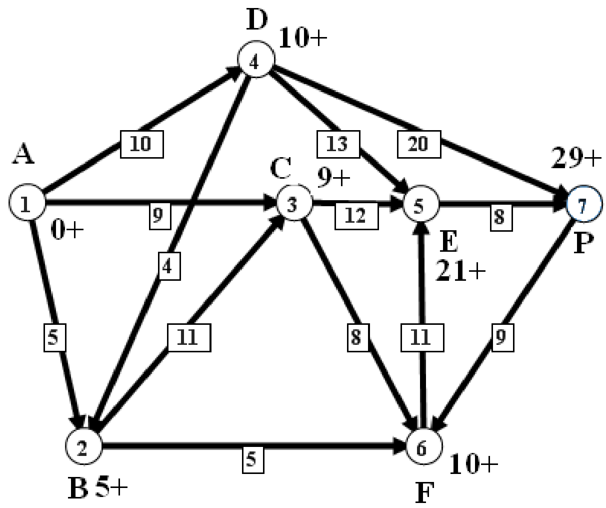


Рис. 74

1 крок. На початкову вершину A навішуємо позначку $l(A)=0+$ і вважаємо її постійною.

На усі вершини $v_j \neq A$ навішуємо тимчасові позначки $l(v_j)=\infty$.

Покладемо $y=A$

І ітерація.

2 крок. Для усіх вершин з $\Gamma(A)=\{B,C,D\}$, позначки яких є тимчасовими, виконуємо заміну позначок:

$$l(B)=\min[l(B);l(y)+\mu(y,B)]=\min[\infty;0+5]=5,$$
$$l(C)=\min[l(C);l(y)+\mu(y,C)]=\min[\infty;0+9]=9,$$
$$l(D)=\min[l(D);l(y)+\mu(y,D)]=\min[\infty;0+10]=10.$$

3 крок. Серед вершин з тимчасовими позначками, визначимо вершину v^* за правилом:

$$l(v^*)\leftrightarrow \min[l(B),l(C),l(D),l(E),l(F),l(P)]=\min[5,9,10,\infty,\infty,\infty]=5$$

Отже, $v^*=B$. Постійна позначка $l(B)=5+$. Покладемо $y=B$.

ІІ ітерація.

2 крок. Для усіх вершин з $\Gamma(B)=\{C,F\}$, позначки яких є тимчасовими, виконуємо заміну позначок:

$$l(C)=\min[l(C);l(y)+\mu(y,C)]=\min[9;5+11]=9,$$
$$l(F)=\min[l(F);l(y)+\mu(y,F)]=\min[\infty;5+5]=10.$$

3 крок. Серед вершин з тимчасовими позначками, визначимо вершину v^* за правилом:

$$l(v^*)\leftrightarrow \min[l(C),l(D),l(F),l(E),l(P)]=\min[9,10,10,\infty,\infty]=9.$$

Отже, $v^*=C$. Постійна позначка $l(C)=9+$. Покладемо $y=C$.

ІІІ ітерація.

2 крок. Для усіх вершин з $\Gamma(C)=\{E,F\}$, позначки яких є тимчасовими, виконуємо заміну позначок:

$$l(E)=\min[l(E);l(y)+\mu(y,E)]=\min[\infty;9+12]=21,$$
$$l(F)=\min[l(F);l(y)+\mu(y,F)]=\min[10;9+8]=10.$$

3 крок. Серед вершин з тимчасовими позначками, визначимо вершину v^* за правилом:

$$l(v^*)\leftrightarrow \min[l(D),l(F),l(E),l(P)]=\min[10,10,21,\infty]=10.$$

Отримуємо два варіанти вибору. Нехай $v^*=F$. Постійна позначка $l(F)=10+$. Покладемо $y=F$.

IV ітерація.

2 крок. Для вершини $\Gamma(F)=\{E\}$ виконуємо заміну позначок:

$$l(E)=\min[l(E);l(y)+\mu(y,E)]=\min[21;10+11]=21.$$

3 крок. Серед вершин з тимчасовими позначками, визначимо вершину v^* за правилом:

$$l(v^*)\leftrightarrow \min[l(D),l(E),l(P)]=\min[10,21,\infty]=10.$$

Отже, $v^*=D$. Постійна позначка $l(D)=10+$. Покладемо $y=D$.

V ітерація.

2 крок. Для вершин з $\Gamma(D)=\{E,P\}$ виконуємо заміну позначок:

$$l(E)=\min[l(E);l(y)+\mu(y,E)]=\min[21;10+13]=21,$$

$$l(P)=\min[l(P);l(y)+\mu(y,P)]=\min[\infty;10+20]=30.$$

3 крок. Серед вершин з тимчасовими позначками, визначимо вершину v^* за правилом:

$$l(v^*)\leftrightarrow \min[l(E),l(P)]=\min[21,30]=21$$

Отже, $v^*=E$. Постійна позначка $l(E)=21+$. Покладемо $y=E$.

VI ітерація.

2 крок. Для вершини $\Gamma(E)=\{P\}$ виконуємо заміну позначок: $l(P)=\min[l(P);l(y)+\mu(y,P)]=\min[30;21+8]=29$

3 крок. Серед вершин з тимчасовими позначками, визначимо вершину v^* за правилом: $l(v^*)\leftrightarrow \min[l(P)]=\min[29]=29$

Отримуємо $v^*=P$. Постійна позначка $l(P)=29+$. Покладемо

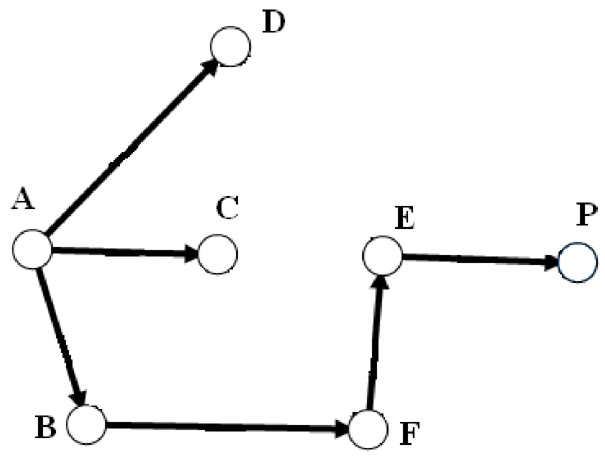


Рис. 75

$y = P$.

Усі вершини мають постійні позначки (Рис.75), які вказують на величини найкоротших шляхів від вершини А до інших вершин графа. Алгоритм закінчує роботу.

Знайдемо дерево найкоротших шляхів даного графа. Нехай кінцевою вершиною шляху є P. Позначимо z передостанню вершину шляху, що є початковою для дуги (z,P).

Дійсно з рівності $l(P)=l(z)+\mu(z,P)=29$ випливає, що $z = E$. Тепер застосуємо ту ж формулу для вершини E $l(E)=l(z)+\mu(z,E)=21$. Звідси випливає $z = C$. Застосуємо ту ж формулу для вершини C $l(C)=l(z)+\mu(z,C)=9$. Отримуємо $z = A$. Отже, знайдено шлях мінімальної ваги $A \to C \to E \to P$. До речі, з рівності $l(E)=l(z)+\mu(z,E)=21$ випливає *також* $z = F$. *Тоді, продовжуючи процедуру, отримаємо* $l(F)=l(z)+\mu(z,F)=10$, звідки $z = B$. Далі $l(B)=l(z)+\mu(z,B)=5$, звідки $z = A$. Отже, знайдено ще один найкортший шлях $A \to B \to F \to E \to P$. Нарешті, нескладно побудувати дерево найкоротших шляхів для даного графа. Воно матиме два варіанти (Рис.75,76).

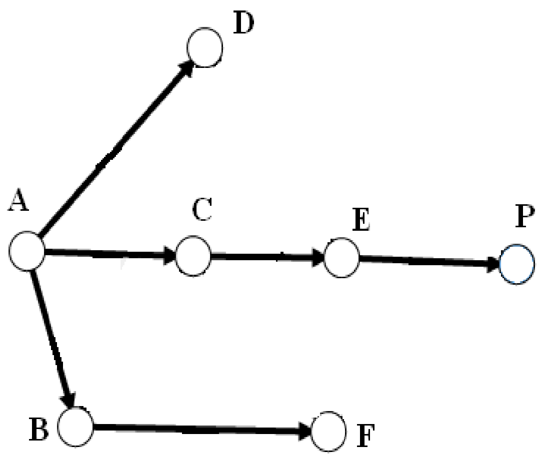


Рис. 76

Матричний метод пошуку шляхів мінімальної ваги.

При дослідженні питання про шляхи мінімальної ваги на орієнтованому графі можна використовувати степені матриці суміжності графа. При обчисленні степенів необхідно видаляти слова, що містять дублювання ідентифікаторів ребер та слова у клітинках головної діагоналі, якщо такі присутні в даному графі. Так як матриця суміжності графа є нільпотентною, то необхідно знайти максимальний степінь, що дає ненульову матрицю. Додавши усі нетривіальні степені матриці суміжності, отримаємо матрицю, в клітинках якої містяться усі шляхи між вершинами графа. Для кожної клітинки обчислюємо ваги її шляхів і залишаємо мінімальне значення. Отримаємо матриці мінімальних шляхів (Рис. 78).

Приклад 22. 3 Розглянемо приклад орієнтованого графа, що має один виток і один стік. Знайти: 1) шляхи мінімальної ваги від витоку до стоку; 2) усі шляхи мінімальної ваги.

Сьомий степінь матриці суміжності графа (Рис. 77) дорівнює нульовій матриці. Це означає, що найдовший шлях на даному графі має довжину 6 і є шляхом з вершини 1 (витоку) до вер-

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	c 5	b 9	a 10	0	0	0
2	0	0	e 11	0	0	f 5	0
3	0	0	0	0	h 12	g 8	0
4	0	d 4	0	0	k 13	0	m 20
5	0	0	0	0	0	0	n 8
6	0	0	0	0	l 11	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

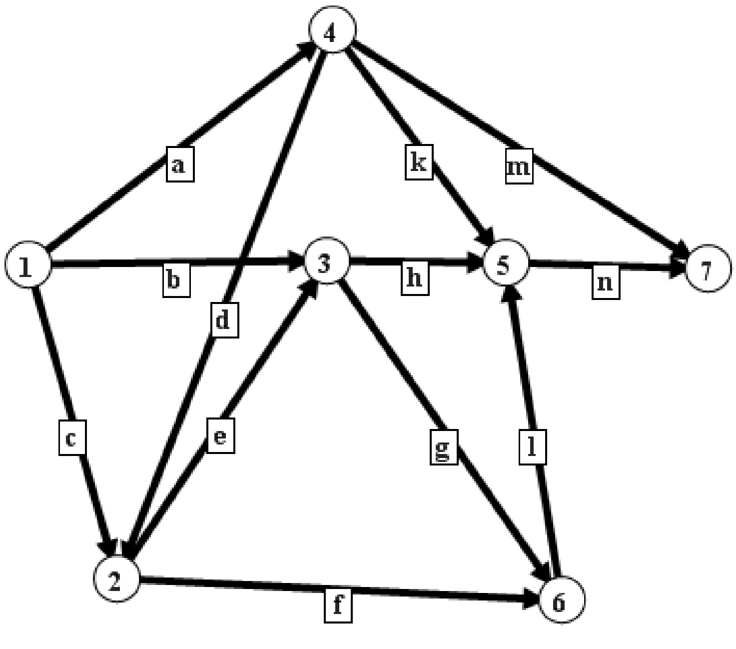


Рис. 77

шини 7 (стоку). Це шлях {adegln}. Крім того, у клітинці на перетині першого рядка та сьомого стовпчика матриці, що є сумою усіх степенів матриці суміжності даного графа, містяться усі шляхи довжини від одного до 6.

Обчисливши ваги цих шляхів, отримаємо:

Шлях	am	bhn	akn	cehn	cfln	bgln	adehn	adfln	cegln	adegln
Вага	30	29	43	36	29	36	45	38	43	52

Очевидно, що мінімальна вага шляху від витоку до стоку дорівнює 29, і цю вагу мають два шляхи: {bhn}, {cfln}.

Аналогічно, розглянувши інші клітинки матриці, що є сумою степенів графа, визначимо усі мінімальні шляхи між кожною парою вершин. Результат представлено у матриці мінімальних шляхів даного графа.

	1		2		3		4		5		6		7	
1			c	5	b	9	a	10	bh cfl	21	cf	10	bhn cfln	29
2					e	11			fl	16	f	5	fln	24
3									h	12	g	8	ln	20
4			d	4	de	15			k	13	df	9	m	20
5													n	8
6									l	11			ln	19
7														

Рис. 78

Очевидно матричний метод потребує велику кількість операцій, що зменшує його перевагу над методом Дейкстри, але він дає змогу отримати розв’язок другої, більш загальної, задачі про усі мінімальні шляхи орієнтованого графа

22.4 Мережі. Потоки в мережах.

Обмін інформацією між абонентами обчислювальної мережі, при використанні у мережі спільної пам’яті, коли кожний процесор отримує доступ до загальних модулів на певний обмежений проміжок часу, призводить до задачі про передачу максимального обсягу інформації за визначений проміжок часу.

У транспортних системах при здійсненні обміну транспортними одиницями між вузлами мережі також виникає задача про передачу максимального обсягу транспортних одиниць за визначений проміжок часу.

Об'єм інформації або транспортних одиниць, що передається від одного вузла до іншого, називають потоком і позначають φ_{jk}.

Граф, що зображує транспортну систему, називають мережею. Особливості такого графу – відсутність петель та кратних ребер і орієнтація усіх ребер.

Означення 22.4 Мережею $M(V,E)$ називається орграф, в якому виділено дві множини вершин V^+- множина витоків та V^- - множина стоків, а всі інші вершини є одночасно і стоками, і витоками.

Означення 22.5 Потоком на мережі $M(V,E)$ називається цілочисельна функція на множині дуг $\varphi : E \to Z$, або $\varphi(E)$. Ціле число $\varphi(e)$ називається потоком на дузі *e*. Нехай дуга $e \approx (v_k, v_j)$, то при $\varphi(e) \geq 0$ потік напрямлений від v_k до v_j, а при $\varphi(e) \leq 0$ навпаки, від v_j до v_k.

Найбільший потік, що може пропустити дуга мержі, називається пропускною спроможністю дуги і позначається C_{kj}. Кожній дузі мережі можна співставити пару додатних чисел $0 \leq \alpha(e) \leq \beta(e)$, що визначає нижню і верхню грані її "пропускної спроможності". Потік називається допустимим, якщо $\alpha(e) \leq \varphi(e) \leq \beta(e), \quad \forall e \in E$. Зрозуміло, що $0 \leq \varphi(v_k, v_j) \leq C_{kj}$.

У вершині-витоку величина потоку дорівнює сумі потоків по усім дугам, що виходять з цієї вершини. У вершині-стоку величина потоку дорівнює сумі потоків по усім дугам, що заходять до цієї вершини. Для довільної проміжної вершини сума потоків, що виходять з неї, і тих, що до неї заходять, рівні.

22.5 Задача про максимальний потік у мережі.

Однією з важливих задач є задача про визначення максимального потоку у мережі. Відповідь на питання про величину максимального потоку у мережі дає наступна теорема, що є ще одним з варіантів теореми Менгера.

Теорема 22.3 Максимальний потік через транспортну мережу дорівнює мінімальній пропускній спроможності її розрізу.

Отже, максимальний потік у мережі з обмеженою пропускною спроможністю можна відшукати, обчислюючи пропускні спроможності усих розрізів і вибираючи з отриманої сукупності значень найменше. Але при такому підході залишається невідомим, як потік розподіляється по дугах мережі, що важливо для певного класу задач.

Алгоритм Форда.

Покладемо початкове значення максимального потоку $\varphi^{[0]}_{\max}(E) = 0$.

Крок n-1. Виконується пошук довільного шляху від витоку до стоку. Якщо такого немає, то максимальна пропускна спроможність мережі дорівнює $\varphi^{[n-1]}_{\max}(E)$, і алгоритм зупиняє роботу. Якщо такий шлях існує, то виконується перехід до наступного кроку.

Крок n. Серед дуг $(e_{i_1},\ldots, e_{i_k})$ довільного шляху від витоку до стоку виконується пошук дуги $e_{\min}$ мінімальної ваги $\mu^{[n]}(e_{\min}) = \min(\mu(e_{i_1}),\ldots, \mu(e_{i_k}))$.

Значення ваги знайденої дуги віднімається від значень ваг дуг, що входять до розглядуваного шляху, і цим дугам привласнюються нові вагові значення

$$\tilde{\mu}^{[n]}\left(e_{i_j}\right)=\mu^{[n-1]}\left(e_{i_j}\right)-\mu^{[n]}\left(e_{\min}\right),\quad \forall j=\overline{1,k}.$$

При цьому вага знайденої дуги стане нульовою і вона в подальшому не розглядається.

Значення ваги знайденої дуги додається до значення максимального потоку $\varphi_{\max}^{[n]}(E)=\varphi_{\max}^{[n-1]}(E)+\mu^{[n]}(e_{\min})$, отриманого на попередньому кроці. Виконується перехід до кроку n-1.

Приклад 22.3 Знайти максимальний потік через мережу (Рис.79), пропускні спроможності якої вказані у ваговій матриці C.

$$C=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\end{array}\\ \begin{pmatrix} 0&4&2&5&0&0\\ 0&0&3&0&2&0\\ 0&0&0&6&2&3\\ 0&0&0&0&0&7\\ 0&0&0&0&0&4\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}\end{array}$$

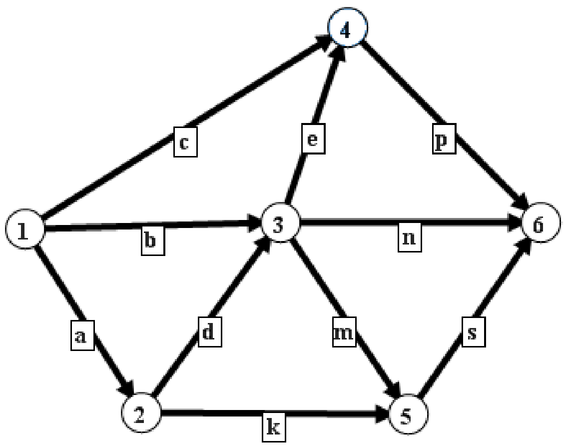


Рис. 79

Покладемо початкове значення максимального потоку $\varphi_{\max}^{[0]}(E)=0$.

Крок 2. Дуга k має мінімальну вагу $\mu^{[1]}(k)=2$. Значення ваги $\mu^{[1]}(k)=2$ віднімається від значень ваг дуг, що входять до розглядуваного шляху, і цим дугам привласнюються нові вагові значення $\mu(a)=2$, $\mu(s)=2$. При цьому вага знайденої дуги стане нульовою і вона в подальшому не розглядається (Рис. 80).

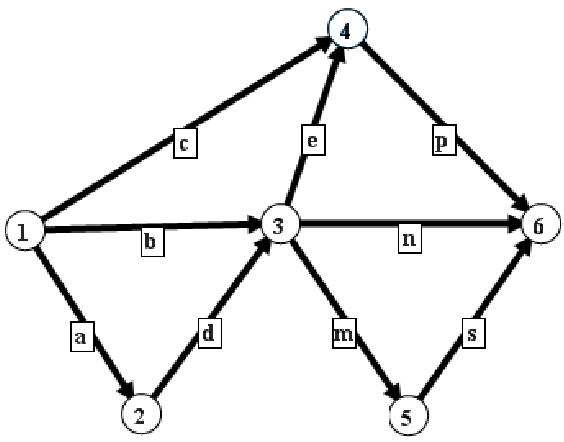


Рис. 80

Значення ваги знайденої дуги додається до значення максимального потоку $\varphi_{\max}^{[1]}(E)=\varphi_{\max}^{[0]}(E)+\mu^{[1]}(k)=0+2=2$, отриманого на попередньому кроці. Виконується перехід до наступної ітерації.

II ітерація.

Крок 1. Вибираємо довільний шлях від витоку до стоку. Нехай це буде шлях 1-3-6.

Крок 2. Дуга b має мінімальну вагу $\mu^{[2]}(b)=2$. Це значення ваги віднімається від значень ваг дуг, що входять до розглядуваного шляху, і цим ребрам привласнюються нові вагові значення $\mu(n)=1$. При цьому вага знайденої дуги стане нульовою і вона в подальшому не розглядається (Рис.81).

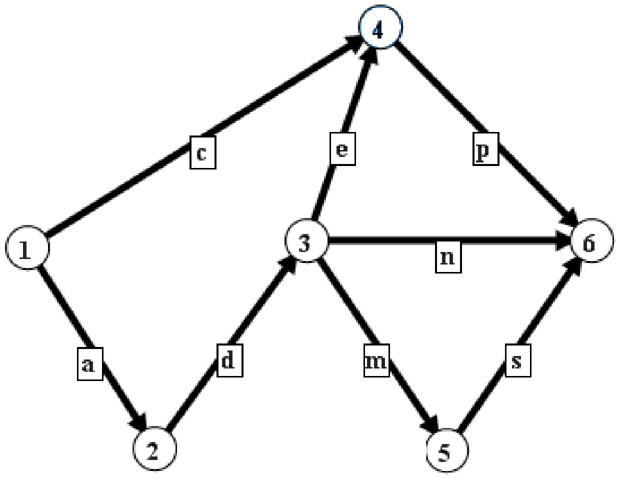


Рис. 81

Значення ваги знайденої дуги додається до значення максимального потоку $\varphi_{\max}^{[2]}(E)=\varphi_{\max}^{[1]}(E)+\mu^{[2]}(b)=2+2=4$ отриманого на попередньому кроці. Виконується перехід до наступної ітерації.

III ітерація.

Крок 1. Вибираємо довільний шлях від витоку до стоку. Нехай це буде шлях 1-2-3-5-6.

Крок 2. Дуги a,m,s мають мінімальну вагу

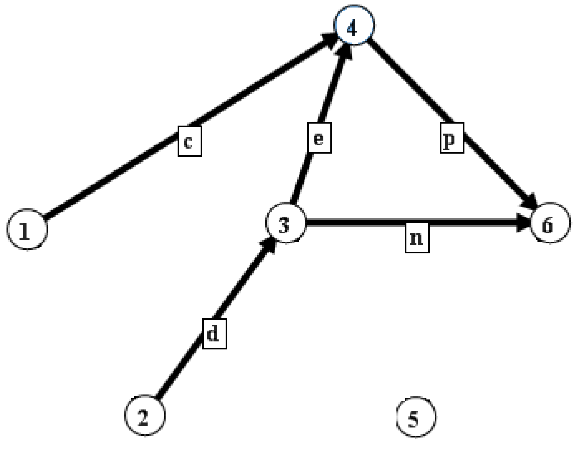


Рис. 82

$\mu^{[3]}(a)=\mu^{[3]}(m)=\mu^{[3]}(s)=2$. Значення цієї ваги віднімається від значень ваг дуг, що входять до розглядуваного шляху, і цим дугам привласнюються нові вагові значення $\mu(d)=1$. При цьому вага дуг *a,m,s* стане нульовою і вона в подальшому не розглядається (Рис.82).

Значення ваги знайденої дуги додається до значення максимального потоку $\varphi^{[3]}_{\max}(E)=\varphi^{[2]}_{\max}(E)+\mu^{[3]}(a)=4+2=6$, отриманого на попередньому кроці. Виконується перехід до наступної ітерації.

IV ітерація.

Крок 1. Залишився шлях 1-4-6.

Крок 2. Дуга *c* має мінімальну вагу $\mu^{[4]}(c)=5$. Значення цієї ваги віднімається від значень ваг дуг, що входять до розглядуваного шляху, і цим дугам привласнюються нові вагові значення $\mu(p)=2$. При цьому вага дуги *c* стане нульовою і вона в подальшому не розглядається (Рис.83).

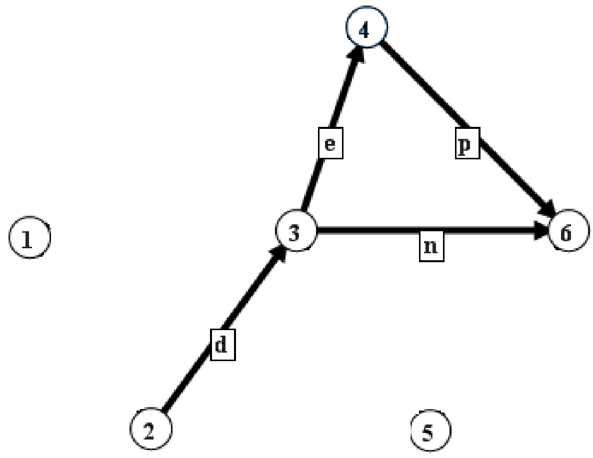


Рис. 83

Значення ваги знайденої дуги додається до значення максимального потоку $\varphi^{[4]}_{\max}(E)=\varphi^{[3]}_{\max}(E)+\mu^{[4]}(c)=6+5=11$, отриманого на попередньому кроці. Так як більше шляхів з вершини 1 до вершини 6 не існує, то отримано значення максимального потоку $\varphi_{\max}(E)=11$.

Алгоритм побудови дерева розрізів мережі.

Ще один досить ілюстративний алгоритм, що базується на теоремі 22.3 і дає змогу побудувати усі розрізи мережі, серед яких є розріз мінімальної ваги, що і визначає величину максимального потоку.

Спочатку сформулюємо необхідні означення.

Означення 22.5 Околом $G(v_0)$ вершини v_0 графа $G(V,E)$ називається підграф $G_0(V_0,E_0)$, носій якого складається з вершин, що знаходяться на відстані 1 від вершини v_0, а сигнатура - з усіх ребер, що з'єднують вершини з V_0.

Означення 22.6 Неоколом $\overline{G}(v_0)$ вершини v_0 графа $G(V,E)$ називається підграф $\overline{G_0}(\overline{V_0},\overline{E_0})$, носій якого є доповненням носія V_0, а сигнатура складається з усіх ребер, що з'єднують вершини з $\overline{V_0}$.

Алгоритм побудови дерева порожніх підграфів, що еквівалентно побудові дерева розрізів мережі, полягає в наступному:

1) співставимо кореню дерева даний граф G;

2) фіксуємо вершину v_0 і вершини її окола $G(v_0)$. Співставимо взаємно однозначно кінцю кожної дуги, що виходить з кореня, вершину з $\{v_0,V_0\}$;

3) кожну кінцеву вершину v_α побудованих дуг зважимо неоколом $\overline{G}(v_\alpha)$;

4) кінцеві вершини v_α побудованого яруса є коренями нового дерева.

Повторюючи пункти 2)-4) до тих пір, поки кожний кінець побудованих дуг не буде зваженим порожньою множиною.

Теорема 22.4. Порожній підграф, що не містить в собі вершину v_0, містить хоча б одну вершину з її околу.

Наслідок. Шлях між кінцем дуги, яка виходить з кореня дерева порожніх підграфів, та висячою вершиною, зваженою символом $\varnothing$, складається з вершин порожнього графа.

При побудові дерева порожніх підграфів, для уникнення повторення порожніх підграфів використовують закон поглинання.

Закон поглинання. Якщо у k-тому ярусі дерева вершини v_i та v_j не є суміжними і піддерево з коренем v_i побудоване і, якщо у піддереві з кореневою вершиною v_j з'являється ребро з вершиною v_i, то відповідна гілка дерева не будується.

Приклад 22.4 Знайти максимальний потік через мережу прикладу 21.3.

Алгоритм відшукання максимального потоку базується на побудові дерева порожніх під графів, а саме, *графа досяжності мережі.*

Означення 22.7 Графом $G_d(V_d, E_d)$ досяжності мережі називається неорієнтований граф, кожна вершина якого взаємно однозначно відповідає дузі даної мережі, і дві вершини поєднуються ребром тоді і тільки тоді, коли відповідні їм дуги входять у шлях даної мережі.

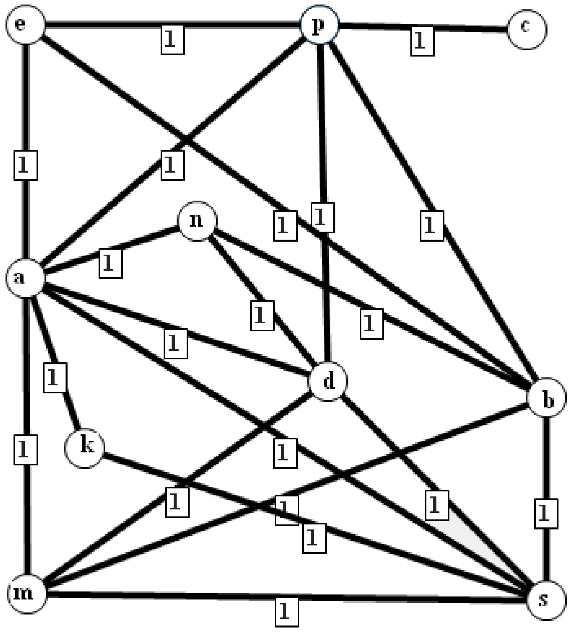


Рис. 84

У розглядуваному прикладі граф досяжності наведено на Рис.84.

Порожній підграф графа досяжності однозначно визначає розріз даної мережі. Мінімальна сума пропускних спроможностей дуг, що увійшли до розрізу згідно з теоремою 22.3, буде дорівнювати максимальному потоку.

Отже, необхідно виділити усі порожні підграфи графа досяжності. Ця процедура зводиться до побудови дерева порожніх підграфів графа досяжності. У даному прикладі дерево порожніх підграфів має вигляд (Рис.85), де розрізи мережі позначені A_k. Обчислюючи ваги цих розрізів і, виділяючи розріз мінімальної ваги, отримаємо величину максимального потока.

Розріз $A_3 = \{a, b, c\} - 4 + 2 + 5 = 11$ має мінімальну пропускну спроможність і визначає максимальний потік $\varphi_{\max} = 11$ через дану мережу.

$$A_1 = \{c, k, n, m, e\} - 5 + 2 + 3 + 2 + 6 = 18,$$
$$A_2 = \{c, k, b, d\} - 5 + 2 + 2 + 3 = 12,$$
$$A_3 = \{a, b, c\} - 4 + 2 + 5 = 11,$$
$$A_4 = \{c, s, e, n\} - 5 + 4 + 6 + 3 = 18,$$
$$A_5 = \{s, n, p,\} - 4 + 3 + 7 = 14,$$
$$A_6 = \{p, k, n, m\} - 7 + 2 + 3 + 2 = 14.$$

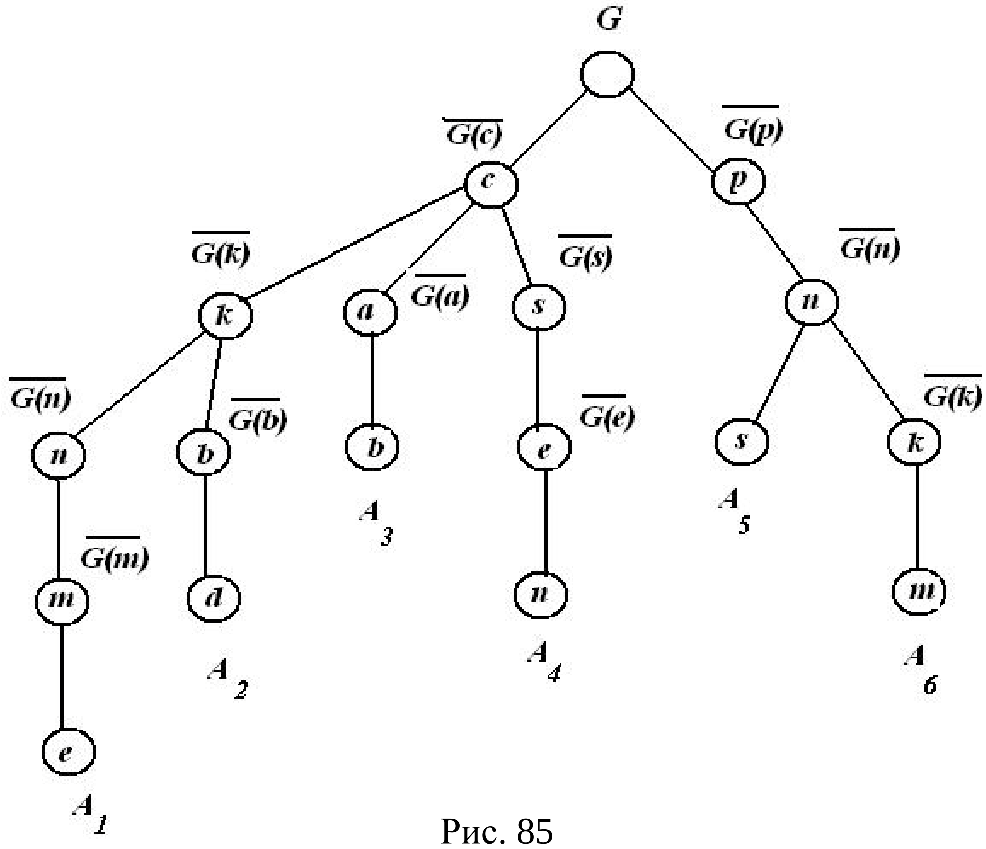


Рис. 85

Зауваження 22.1 Відомо, що орграф на множині вершин є відношенням порядку. Якщо розглядається мережа, то це відношення строгого порядку. Алгоритм побудови дерева порожніх під графів завжди находить розріз мінімальної ваги, а з ним і величину максимального потоку, якщо для кожної вершини сумарна пропускна спроможність дуг, які заходять до неї, не більше сумарної пропускної спроможності ребер, які виходять з цієї вершини.

Матриця суміжності такої мережі має вигляд верхньої трикутної з нульовим останнім рядком. Якщо мережа не задовольняє

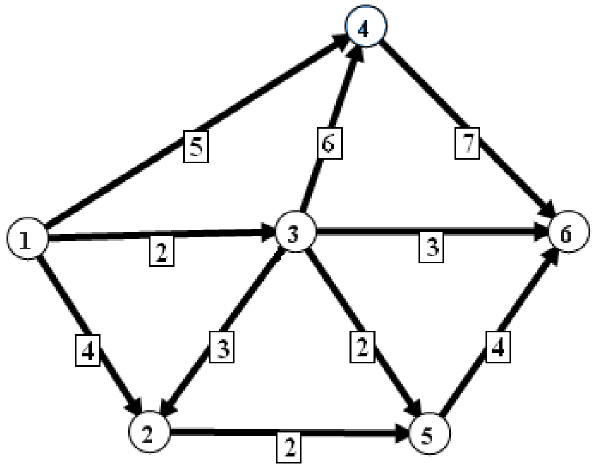


Рис. 86

наведеній вище умові, то алгоритм не може виявити *перерізи* мережі, тобто таку множину дуг, через яку проходять усі шляхи з витоку до стоку. Переріз мережі не завжди є її розрізом, тобто при видаленні перерізу з мережі, орграф, що залишається може бути слабкозв'язним (зв'язним у сенсі зв'язності неорієнтованих графів).

Приклад 22.5 Розглянемо мережу попереднього прикладу зі зміненим напрямом дуги d (Рис.86). Максимальний потік, визначений за алгоритмом Форда дорівнює 9. Метод побудови дерева порожніх під графів дає ту саму відповідь, що й раніше $A_3 = \{a, b, c\} - 4 + 2 + 5 = 11$. Насправді ж, у цій мережі є переріз $R = \{k, b, c\} - 2 + 2 + 5 = 9$ (Рис.87), який не є розрізом. Видалення цієї

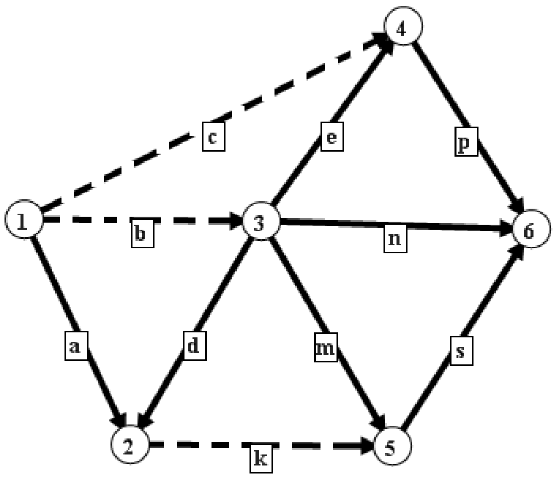


Рис. 87

множини дуг $\{k, b, c\}$ з мережі приведе до відсутності шляхів з вершини 1 до вершини 6. Але мережа, як неорієнтований граф, не втратить зв'язності.

Контрольні запитання

- Що таке *орієнтований ланцюг* на орграфі?
- Який шлях називається простим на орграфі?
- Як називаються цикли на орграфі?
- Як класифікуються вершини орграфа?
- Який орграф називається сильно зв'язним?
- Який орграф називається слабко зв'язним?
- Який орграф називається тотальним?
- В чому суть задачі про найкоротші шляхи?
- Який орграф називається мережею?
- Що таке потік у мережі?
- Що таке пропускна спроможність дуги?
- У чому суть задачі про максимальний потік?
- Яка теорема є основою розв'язку задачі про максимальний потік?
- Що називається околом вершини?
- Що називається неоколом вершини?
- Що таке граф досяжності?
- Що таке дерево розрізів графа?

Додаток 1.

Метод математичної індукції.

Математична індукція – це метод доведення вірності математичного твердження *A(n)*, яке залежить від натуральної змінної, для всіх значень цієї змінної.

Метод математичної індукції є загальним принципом доведення і для його застосування виявляється несуттєвим те, що математичне твердження, вірність якого доводиться, та засоби його одержання можуть мати різну математичну природу, тобто можуть відноситись до різних галузей математики.

Принцип математичної індукції. Припустимо, що для кожного $n \in N$ деяке твердження *A(n)*. Нехай також є правило, що дозволяє встановити істинність твердження *A(k)* для кожного k за умови, що *A(j)* вірне для всіх $j<k$ (в тому числі для k=1). Тоді *A(n)* вірне для всіх $n \in N$.

Застосування метода математичної індукції складається з двох етапів. На першому етапі (його називають *базою індукції*) перевіряється істинність твердження *A(n)* при малих значеннях n, наприклад, при $n=1$. На другому етапі (його називають *індуктивним переходом*) з припущення вірності твердження при деякому довільному k, доводиться його вірність при $k+1$. Якщо це вдається довести, то, згідно з принципом математичної індукції твердження *A(n)* визнається істинним для всіх значень n.

Метод математичної індукції застосовується при доведенні теорем, тотожностей, нерівностей, при розв'язанні геометричних задач та багатьох інших задач.

Приклад 1. Довести, що для довільного натурального n справджується рівність

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Розв'язок.

1). *База індукції.* Перевіримо справедливість рівності при $n=1$. Дійсно, в результаті підстановки $n=1$ до рівності одержимо 1/3=1/3.

2). *Індуктивний перехід.* Припустимо, що рівність вірна для деякого довільного k, та перевіримо її справедливість для $n=k+1$ та зробимо відповідні перетворення з урахуванням припущення про справедливість рівності

:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+...+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}.$$

Отже одержимо :

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+...+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1^2)}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{k+1}{2k+1}\left(\frac{k}{2}+\frac{k+1}{2k+3}\right)=\frac{k+1}{2k+1}\frac{2k^2+5k+2}{2(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+1}\frac{(2k+1)(k+2)}{2(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.$$

Зрозуміло, що ми одержали праву частину рівності, що доводиться, при $n=k+1$. Згідно з принципом математичної індукції рівність вірна для усіх n.

Приклад 2. Довести, що при довільному натуральному n, $7^{n+2}+8^{2n+1}$ ділиться на 19.

Розв'язок. Перевіримо справедливість твердження для $n=1$. Маємо: $7^3+8^3=(7+8)(49-56+64)=15\cdot 57=45\cdot 19$. Отже, 7^3+8^3 ділиться на 19. Припустимо, що при деякому довільному k $7^{k+2}+8^{2k+1}$ ділиться на 19. Доведемо, що тоді для $n=k+1$ $7^{k+3}+8^{2k+3}$ ділиться на 19. За припущенням $7^{k+2}+8^{2k+1}=19m$. Перетворюємо досліджуваний вираз з урахуванням цієї рівності.

Одержимо:

$$7^{k+3}+8^{2k+3}=7\cdot 7^{k+2}+8^2\cdot 8^{2k+1}=7(7^{k+2}+8^{2k+1})+57\cdot 8^{2k+1}=19(7m+3\cdot 8^{2k+1}).$$

Згідно з принципом математичної індукції дане твердження є істинним при всіх натуральних n.

Приклад 3. Довести, що для всіх натуральних $n>1$ справджується нерівність (інколи її називають нерівністю Я. Бернуллі) $(1+\alpha)^n>1+n\alpha$, $\alpha>0$.

Розв'язок. Перевіримо справедливість нерівності для $n=2$. Маємо: $(1+\alpha)^2=1+2\alpha+\alpha^2>1+2\alpha$. Припустимо, що при деякому довільному k нерівність справджується і доведемо її істинність для $n=k+1$. Дійсно,

$$(1+\alpha)^{k+1}=(1+\alpha)^k(1+\alpha)\ >(1+k\alpha)(1+\alpha)=1+(k+1)\alpha+k\alpha^2>1+(k+1)\alpha.$$

Згідно з принципом математичної індукції нерівність справджується при всіх натуральних n.

Додаток 2.

Тестові завдання до курсу «Дискретна математика»

Тестові завдання для визначення рівня засвоєння теоретичних знань

1. Яке з тверджень є правильним для довільних множин А,В,С?

А $если\ A \in B\ и\ B \in C, то\ A \in C$

Б $если\ A \subseteq B\ и\ B \subseteq C, то\ A \subseteq C$

В $если\ A \subseteq B\ и\ B \in C, то\ A \in C$

Г $если\ A \subseteq C\ и\ C \subset B, то\ C \subset A$

Д $если\ A \subseteq C\ и\ C \subset B, то\ A \subset C$

2. Серед наведених процедур знайти ту, що не є способом визначення множини

А Описання властивостей елементів множини.

Б Перерахування елементів.

В Побудова діаграм Венна або кругів Ейлера

Г За допомогою операцій над множинами

Д Визначення множини за допомогою рекурентного співвідношення.

3. Потужністю множини називається:

А Кількість підмножин даної множини

Б Кількість елементів даної множини

В Кількість елементів деякої підмножини даної множини

Г Кількість елементів доповнення деякої підмножини даної множини

Д Кількість елементів множини усіх підмножин даної множини

4. Булеаном називається:

А Усі підмножини деякої підмножини даної множини

Б Довільна множина підмножин даної множини

В Множина усіх підмножин даної множини

Г Деяка множина підмножин даної множини

Д Підмножина даної множини

5. Потужність булеану, побудованого на множині А, що складається з N елементів, дорівнює:

А $|B(A)| = 2^{N+1}$, **Б** $|B(A)| = 2^{N-1}$, **В** $|B(A)| = 2N$,

Г $|B(A)| = 2^{N}$, **Д** $|B(A)| = 2N+1$

6. Множина С є результат операції над множинами *A* та *B.* Поставити у відповідність наведені означення операціям над множинами, які вони визначають:

А Елементами множини С є усі елементи множини *A* та усі елементи множини *B,* і яка не містить інших елементів.	**1** Перетин
Б Елементами множини С є ті і тільки ті елементи множини *A,* що не є елементами множини *B.*	**2** Об'єднання
В Елементами множини С є ті і тільки ті елементи множин *A,* що їй не належать.	**3** Різниця
Г Елементами множини С є ті і тільки ті елементи множин *A* та *B,* що не належать цим множинам одночасно.	**4** Доповнення
Д Елементами множини С є ті і тільки ті елементи, які належать одночасно як множині *A*, так і множині *B*.	**5** Декартовий добуток
Е Елементами множини С є впорядковані пари, елементів з *A* та *B*	**6** Симетрична різниця

7. Яка з наведених формул визначає симетричну різницю двох множин?

А $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, **Б** $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$, **В** $(A \setminus \overline{B}) \cup (B \setminus \overline{A})$,

Г $(A \cup B) \setminus (B \cap A)$, **Д** $(\overline{A} \cup B) \setminus (\overline{B} \cap A)$

8. Потужність множини *A* дорівнює *n*, а множини *B* - відповідно *m*. Потужність декартового добутку дорівнює:

А m+n, **Б** n+m-1, **В** n(m+1), **Г** nm , **Д** n(m-1)

9. Нехай *G* –відношення на декартовому добутку множин та *B*. Поставити у відповідність наведені означення властивостям відношень, які вони визначають:

А Кожний елемент множини *B* має прообраз, що складається хоча б з одного елемента.	**1** Ін'єктивність
Б Кожний елемент множини А має образ, що складається хоча б з одного елемента.	**2** Функціональність
В Різним елементам множини *A* відповідають різні елементи множини В.	**3** Бієктивнісь
Г Кожний елемент *A* має образ, що складається не більше ніж з одного елемента *B*.	**4** Сюр'єктивність
Д Кожному елементу множини А відповідає один і тільки один елемент множини В	**5** Скрізь визначенність

10. Серед наведених означень властивостей бінарного відношення W, визначеного на множині *A*, знайти означення рефлексивності, симетричності та транзитивності.

А для довільного a виконується aWa

Б для довільних a,b з множини A з того, що aWb випливає bWa

В для довільних a,b з множини A з того, що aWb та bWa випливає a=b

Г для деякого a виконується aWa

Д для деяких a,b з множини A з того, що aWb випливає bWa

Е для довільних a,b,c з множини A з того, що aWb та bWc випливає aWc

11. На множині усіх висловлювань операції визначаються таблицями істиності. Поставити у відповідність наведеним нижче таблицям назви операцій, які вони визначають.

А			**Б**			**В**			**Г**			**Д**			**Е**		
A	*B*		*A*	*B*		*A*	*B*		*A*	*B*		*A*	*B*		*A*	*B*	
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Кон’юнкція	Диз’юнкція	Імплікація	Штрих Шефера	Логічне додавання	Еквівалент-ність

12. Серед наведених операцій визначити мультиплікативні.

А об'єднання, **Б** кон'юнкція, **В** доповнення, **Г** перетин,
Д диз'юнкція, **Е** заперечення, **Ж** симетрична різниця, **З** імплікація

13. Серед наведених операцій визначити адитивні.

А об'єднання, **Б** кон'юнкція, **В** доповнення, **Г** перетин,
Д диз'юнкція, **Е** заперечення, **Ж** симетрична різниця, **З** імплікація

14. Які з наведених операцій складають сигнатуру алгебри Кантора?

А Об'єднання **Б** Симетрична різниця **В** Різниця
Г Перетин **Д** Доповнення

15. Дві алгебри $\mathbf{A_1}$ та $\mathbf{A_2}$ називаються ізоморфними:

А якщо між носіями та сигнатурами встановлено бієктивну відповідність.

Б якщо між носіями встановлено бієктивну відповідність.
В якщо між сигнатурами встановлено бієктивну відповідність.
Г якщо між носіями та сигнатурами встановлено бієктивну відповідність η таку, що:

$$f_i(m_{a1}, m_{a2}, \ldots, m_{ak-1}) = m_{ak} \leftrightarrow \eta(f_i)(\eta(m_{a1}), \eta(m_{a2}), \ldots, \eta(m_{ak-1})) = \eta(m_{ak}),$$

де $m_{aj} \in M_1$, $\eta(m_{aj}) \in M_2$, $j = \overline{1,k}$, $f_i \in S_1$, $\eta(f_i) \in S_2$.

Д якщо між носіями та сигнатурами встановлено відповідність

16. Нехай алгебра A=$\langle M, f \rangle$ - групоїд. Поставити у відповідність наведеним означенням поняття, які вони визначають.

А операція f підкоряється закону *mfm=m* для довільного *m*	**1**Абелева напівгрупа
Б операція f підкоряється асоціативному закону *(nfm)fk=nf(mfk)* для довільних *n,m,k.*	**2** Моноїд
В напівгрупа з нейтральним елементом, тобто існує елемент *e* такий, що *efm=m=mfe* для довільного *m*	**3** Ідемпотентний групоїд
Г напівгрупа, де викронується комутативний закон *nfm=mfn* для довільних *n,m*	**4** Напівгрупа
Д напівгрупа, де кожний елемент має обернений, тобто для довільного n існує m такий, що *nfm=e*	**5** Група

17. Серед наведених тотожностей знайти закони асоціативності, дистрибутивності для операцій об'єднання та перетину

А $A \cap B \cup A \cap \overline{B} = A$, **Б** $A \cup B = B \cup A$,
В $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, **Г** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
Д $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, **Е** $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

18. Нехай A=$\langle M, \circ, * \rangle$ алгебра, сигнатура якої має дві операції. Як називається алгебра, якщо операції для довільних $x, y, z \in M$ задовольняють законам: 1) $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$; 2) $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$.

А Дистрибутивна алгебра **Б** Поле **В** Кільце
Г Структура або гратка **Д** Булева алгебра **Е** Тіло

19. Нехай A=$\langle M, \circ, * \rangle$ алгебра сигнатура, якої має дві операції. Як називається алгебра, якщо відносно операції $\circ$ носій утворює абелеву групу, а відносно операції $*$ - абелеву напівгрупу і виконується закон $x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z)$.

А Дистрибутивна алгебра **Б** Поле **В** Кільце
Г Структура або гратка **Д** Булева алгебра **Е** Тіло

20. Нехай А=$\langle M,\circ,*\rangle$ алгебра, сигнатура якої має дві операції. Як називається алгебра, якщо відносно обох операцій носій утворює абелеві групи і виконується закон $x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z)$.

А Дистрибутивна алгебра **Б** Поле **В** Кільце
Г Структура або гратка **Д** Булева алгебра **Е** Тіло

21. Нехай А=$\langle M,\circ,*\rangle$ алгебра, сигнатура якої має дві операції. Як називається алгебра, якщо відносно операції $\circ$ носій утворює абелеву групу, а відносно операції $*$ - групу і виконується закон $x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z)$.

А Дистрибутивна алгебра **Б** Поле **В** Кільце
Г Структура або гратка **Д** Булева алгебра **Е** Тіло

22. Нехай А=$\langle M,\circ,*\rangle$ алгебра, сигнатура якої має дві операції. Як називається алгебра, якщо відносно кожної операції носій є ідемпотентною абелевою напівгрупою, і операції підкоряються законам $a\circ(a*b)=a$, $a*(a\circ b)=a$ для довільних $a,b\in M$.

А Дистрибутивна алгебра **Б** Поле **В** Кільце
Г Структура або гратка **Д** Булева алгебра **Е** Тіло

23. Нехай А=$\langle M,\circ,*\rangle$ алгебра, сигнатура якої має дві операції. Як називається алгебра, якщо відносно кожної операції носій є ідемпотентною абелевою напівгрупою, кожний елемент має доповнення і для довільних $a,b\in M$ $x,y,z\in M$ операції підкоряються законам: $a\circ(a*b)=a$, $a*(a\circ b)=a$, $x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z)$, $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$.

А Дистрибутивна алгебра **Б** Поле **В** Кільце
Г Структура або гратка **Д** Булева алгебра **Е** Тіло

24. Впорядкувати назви законів, що діють у булевій алгебрі згідно з порядком слідування нижче наведених формул.

Формули представлення законів	Назви законів
1) $a \circ b = b \circ a$; $a * b = b * a$ 2) $a \circ (a * b) = a$, $a * (a \circ b) = a$; 3) $\overline{\overline{a}} = a$. 4) $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$, $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$; 5) $a \circ a = a, a * a = a$; 6) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$, $a * (b * c) = (a * b) * c$; 7) $\left.\begin{array}{l}\overline{a * b} = \overline{a} \circ \overline{b} \\ \overline{a \circ b} = \overline{a} * \overline{b}\end{array}\right\}$; 8) $a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a$, $(a + b) \cdot (a + \overline{b}) = a$; 9) $a \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = a * b$	Дистрибутивність Комутативність Де Моргана Порецького Поглинання Подвійного доповнен-ня Асоціативність Ідемпотентність Склеювання

25. Поставити у відповідність замкненим класам булевих функцій їхні означення

А множина усіх функцій, що задовольняють умові $$f(x_1,\ldots,x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n)$$	**1** *K_0*
Б множина усіх функцій, що задовольняють умові для довільних векторів $$(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \le (\sigma_1^*,\ldots,\sigma_n^*) \Rightarrow f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \le f(\sigma_1^*,\ldots,\sigma_n^*)$$	**2** K_c
В множина усіх функцій, що задовольняють умові $$K_0 = \{f(x_1,\ldots,x_n) : f(0,\ldots,0) = 0\}$$	**3** K_1
Г множина усіх функцій вигляду $$f(x_1,\ldots,x_n) = c_0 \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{n} c_j x_j\right), \quad c_j = 0,1, \quad j = \overline{0,n}$$	**4** $K_м$
Д множина усіх функцій, що задовольняють умові $$K_1 = \{f(x_1,\ldots,x_n) : f(1,\ldots,1) = 1\}.$$	**5** $K_л$

26. Поставити у відповідність наведені означення з поняттями комбінаторики, які вони визначають:

А Довільна *k*–елементна підмножина *n*–елементної множини.	**1** Перестановки з повтореннями
Б Множини, що містять *n* елементів, при чому	**2** Перестановки

кожний елемент належить до одного з заданих *m* типів	
В Довільна упорядкована множини з *n* елементів	**3** Розміщення
Г Представлення множини *A* у вигляді об'єднання множин B_i, що попарно не перетинаються.	**4** Сполучення з повтореннями
Д Упорядковані *k*–елементні підмножини множини з *n* елементів	**5** Сполучення

27. Яка з наведених тотожностей не є вірними?

А $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$

Б $C_k^i + C_k^{i-1} = C_{k+1}^i$

В $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$

Г $C_{n+m}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0$

Д $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 1$

28. Поставити у відповідність наведені формули з величинами, які вони обчислюють.

А $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	**1** Перестановки з повтореннями
Б $\overline{C}_n^m = \dfrac{n!}{k_1!\ldots k_m!}$, де $k_i \geq 0$, $k_1 + \ldots + k_m = n$	**2** Перестановки
В $f_m^n = C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m-1}^n$	**3** Розміщення
Г $P_n = n!$.	**4** Сполучення з повтореннями
Д $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1)$	**5** Сполучення

29. Поставити у відповідність різним типам графів їхні означення:

А Сукупність двох множин *V* –вершин та *E* - ребер, що на якій визначено відношення інцидентності, тобто кожне ребро з'єднує дві вершини.	**1** Простий граф
Б Одна вершина графа суміжна з усіма іншими вершинами	**2** Орієнтований граф
В Довільні дві вершини графа суміжні.	**3** Неорієнтований граф
Г Сукупність двох множин *V* – вершин та *E* - ребер, на якій визначено відношення інцидентності, тобто кожне ребро з'єднує дві вершини $v', v'' \in V$	**4** Зважений граф

, де v' вважається першою, а v'' другою.	
Д Суміжні вершини з'єднані тільки одним ребром	**5** Регулярний граф
Е Степені усіх вершин графа рівні між собою.	**6.** Зірчастий граф
Ж Кожній вершині або (та) кожному ребру ставиться у відповідність елемент деякої множини	**7.** Повний граф

30. Які бінарні відношення визначаються на графах?

А Відношення суміжності **Б** Відношення напрямленості

В Відношення інцидентності **Г** Відношення досяжності

Д Відношення циклічності

31. Співставити елементам графа їхні означення:

А Скінчена або нескінчена послідовність ребер графа, які мають спільну інцидентну вершину. Одне й те саме ребро може зустрічатися кілька разів, і початкова вершина співпадає з кінцевою.	**1** Маршрут
Б Скінчена або нескінчена послідовність ребер графа, які мають спільну інцидентну вершину. Одне й те саме ребро може зустрічатися кілька разів.	**2** Циклічний маршрут
В Скінчена або нескінчена послідовність ребер графа, які мають спільну інцидентну вершину. Кожне ребро зустрічається не більше одного разу, і початкова вершина співпадає з кінцевою.	**3** Ланцюг
Г Скінчена або нескінчена послідовність ребер графа, які мають спільну інцидентну вершину. Кожне ребро зустрічається не більше одного разу.	**4** Простий цикл
Д Скінчена або нескінчена послідовність ребер графа, які мають спільну інцидентну вершину. Кожне ребро зустрічається не більше одного разу і довільна вершина інцидентна не більше ніж двом ребрам.	**5** Цикл
Е Скінчена або нескінчена послідовність ребер графа, які мають спільну інцидентну вершину. Кожне ребро зустрічається не більше одного разу, довільна вершина інцидентна не більше ніж двом ребрам, і початкова вершина співпадає з кінцевою.	**6** Простий ланцюг

32. Нехай $d\left(v',v''\right)$ відстань між вершинами v' та v''. Яка з наведених формул визначає радіус графа?

А $\max\limits_{v',v''\in G} d(v',v'')$, **Б** $\max\limits_{v'\in G}\min\limits_{v\in G} d(v,v')$, **В** $\min\limits_{v\in G}\max\limits_{v'\in G} d(v,v')$

Г $\min\limits_{v',v''\in G} d(v'',v')$ **Д** $\max\limits_{v'\in G} d(v,v')$

33. Нехай $d(v',v'')$ відстань між вершинами v' та v''. Яка з наведених формул визначає діаметр графа?

А $\max\limits_{v',v''\in G} d(v',v'')$, **Б** $\max\limits_{v'\in G}\min\limits_{v\in G} d(v,v')$, **В** $\min\limits_{v\in G}\max\limits_{v'\in G} d(v,v')$

Г $\min\limits_{v',v''\in G} d(v'',v')$ **Д** $\max\limits_{v'\in G} d(v,v')$

34. Нехай $d(v',v'')$ відстань між вершинами v' та v''. Яка з наведених формул визначає віддаленність (ексцентриситет) графа?

А $\max\limits_{v',v''\in G} d(v',v'')$, **Б** $\max\limits_{v'\in G}\min\limits_{v\in G} d(v,v')$, **В** $\min\limits_{v\in G}\max\limits_{v'\in G} d(v,v')$

Г $\min\limits_{v',v''\in G} d(v'',v')$ **Д** $\max\limits_{v'\in G} d(v,v')$

35. Поставити у відповідність наведені означення з їхніми назвами:

А Зв'язний граф, що не містить ні одного циклу.	**1** Унікурсальний граф
Б Мінімальна відокремлююча множина в графі *G*, яка не має власної відокремлюючої підмножини.	**2** Гамільтоновий граф
В Реберне відокремлення графа являє собою єдиний ланцюг або цикл.	**3** Дерево
Г Усі вершини графа мають парний степінь.	**4** Розріз
Д Граф містить простий цикл, що проходить через кожну його вершину.	**5** Остов
Е Підграф, який містить усі вершини графа і не має циклів.	**6** Ейлеровий граф
Ж Множина вершин графа складається з двох неперетинних підмножин, в яких вершини не є попарно суміжними.	**7** Паросполучення
З Мінімальна відокремлююча множина в графі *G*, яка містить одне ребро.	**8** Дводольний граф
К Множина ребер графа, в якій ніяка пара ребер не є суміжною.	**9** Міст

36. Два графи називаються гомеоморфними:

А якщо між множинами вершин і множинами ребер графів встановлено взаємно однозначну відповідність;

Б якщо вони є ізоморфними з точністю до вершин степеня 2;

В якщо вони мають однакову кількість ребер і вершин;

Г якщо між множинами вершин графів встановлено взаємно однозначну відповідність;

Д якщо вони одержуються з одного графа заміною деяких ребер простими ланцюгами деякої довжини.

37. Нехай у графі $|V| = n, |E| = m$. Поставити у відповідність наведені формули з назвами величин, які вони обчислюють:

А $\chi(G) = n - k$, k-кількість компонент зв'язності	**1** Товщина графа
Б $t(G) \ge \left[\dfrac{\sum_{j=1}^{n} s_j - 2}{6(n-2)} \right] + 1$, де s_j – степінь вершини з номером j.	**2** Матриця досяжності
В $v(G)=$ m-n+k, k-кількість компонент зв'язності	**3** Ранг розрізу
Г $D(G) = \sum_{i=1}^{d(G)} S^{i}(G)$, де S($G$)–матриця суміжності, $d(G)$ - діаметр графа.	**4** Кількість остовних дерев у повному графі
Д n^{n-2}	**5** Цикломатичне число

38. Граф G^* називається абстрактно двоїстим до графа G:

А якщо між ребрами цих графів існує взаємно однозначна відповідність і кожному циклу графа однозначно G відповідає розріз графа G^*;

Б якщо між ребрами цих графів існує взаємно однозначна відповідність і кожному циклу графа однозначно G відповідає цикл графа G^*;

В якщо між ребрами цих графів існує взаємно однозначна відповідність і кожному розрізу графа однозначно G відповідає розріз графа G^*;

Г якщо між вершинами цих графів існує взаємно однозначна відповідність і кожному циклу графа однозначно G відповідає розріз графа G^*;

Д якщо між вершинами і ребрами цих графів існує взаємно однозначна відповідність і кожному циклу графа однозначно G відповідає розріз графа G^*;

39. Граф є біхроматичним тоді і тільки тоді:

А коли усі його цикли мають парну довжину;

Б коли граф є дерево;

В коли він є дводольний;

Г коли він має парну кількість циклів;

Д коли усі розрізи мають парну кількість ребер.

40. Максимальний потік через транспортну мережу дорівнює:

А максимальній пропускній спроможності її розрізу;

Б мінімальній довжині циклу;

В максимальній довжині шляху від витоку до стоку;

Г мінімальній пропускній спроможності її розрізу

Д максимальній пропускній спроможності ребер шляхів від витоку до стоку.

41. Граф називається планарним:

А якщо він може бути зображеним на площині так, щоб його ребра перетинались тільки у вершинах;

Б якщо він може бути зображеним на торі так, щоб його ребра перетинались тільки у вершинах.

В якщо він може бути зображеним на площині;

Г якщо він може бути зображеним на сфері так, щоб його ребра перетинались тільки у вершинах;

Д якщо він не є гомеоморфним ні одному з графів K_5 та $K_{3,3.}$

Тестові завдання для визначення рівня засвоєння практичних навичок

1. Поставити у відповідність множини та способи їх визначення

А $\{-2,-1,0,1,2,3\}$	**1** Описання властивостей елементів множини.
Б $\left\{a_k \in R, \quad a_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in N\right\}$	**2** Перерахування елементів.
В $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$	**3** Визначення множини за допомогою породжуючої процедури

Г {літературні твори, що удостоєні Нобелівської премії}	**4** операції над множинами
Д {натуральні числа менші за число 100}	
Е $(A \cap B) \times A$	

Відповідь записати у вигляді пар (літера, цифра).

2. Дано числову множину $\{7,13,25,34,101,112\}$. Які з наведених множин є підмножинами цієї множини?

А $\{1,7,13\}$ **Б** $\{25,112,34\}$ **В** $\{7,13,25,112,34,101\}$ **Г** $\{0,1,12\}$ **Д** $\{23,12,112,34\}$

3. Універсум складається з 26 літер латинського алфавіту.

Нехай дано множини *A={b,d,l,m}*, *B={d,e,l,v}*, *C={k,l,z}*, *D={b,d,k,l,s,t,x,y}*. Знайти множину Х=$(A \setminus B) \cup (C \cap D)$ та обчислити потужність її декартового добутку з множиною *D*.

4. Універсум складається з 26 літер латинського алфавіту.

Нехай дано множини: *A={b,d,l,m}*, *B={d,e,l,v}*, *C={k,l,z}*, *D={b,d,k,l,s,t,x,y}*. Знайти множину Х=$(A \cap B) \cup (C \setminus D)$ та обчислити потужність її декартового добутку з множиною *D*.

5. Спростити: $\overline{\overline{(A \cup B)} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})}$. Які з наведених виразів є результатом спрощення?

А $A \cup B$ **Б** $\overline{A} \cup B$ **В** $A \cap \overline{B}$ **Г** $\overline{A} \cup \overline{B}$ **Д** $A \cap B$

6. Спростити: $\overline{(\overline{A} \cup B \cup C)}$. Які з наведених виразів є результатом спрощення?

А $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$ **Б** $A \cap \overline{B} \cap C$ **В** $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ **Г** $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ **Д** $A \cap B \cap C$

7. Нехай є три множини людей. *A*- множина розумних, *B* - множина чесних, *C* - множина жадібних. Які якості властиві людям, що входять до множини $X = (C \setminus A) \cap (C \cap B)$?

А Брехливі, розумні та щедрі
Б Брехливі, дурні та жадібні
В Чесні, дурні та жадібні
Г Брехливі та дурні або розумні та чесні
Д Брехливі та дурні або брехливі та жадібні

8. Нехай є три множини людей. A- множина розумних, B - множина чесних, C - множина жадібних. Які якості властиві людям, що входять до множини $X = (B \setminus A) \bigcap (B \bigcap C)$?

А Брехливі, розумні та щедрі

Б Брехливі, дурні та жадібні

В Чесні, дурні та жадібні

Г Брехливі та дурні або розумні та чесні

Д Брехливі та дурні або брехливі та жадібні

9. Визначити властивості відображення $S \rightarrow L$ (S - множина слів української мови, L - множина літер українського алфавіту) кожному слову ставить у відповідність його першу літеру.

А Всюди визначене **Б** Сюр'єктивне **В** Ін'єктивне

Г Бієктивне **Д** Функціональне

10. Визначити властивості відображення $S \rightarrow L$ (S - множина слів української мови, L - множина літер українського алфавіту) кожному слову ставить у відповідність його останню літеру.

А Всюди визначене **Б** Сюр'єктивне **В** Ін'єктивне

Г Бієктивне **Д** Функціональне

11. Нехай M = {множина точок площини}, φ - поворот на $\frac{\pi}{2}$ за годинниковою стрілкою навколо початку координат, ψ - поворот на $\frac{2\pi}{3}$ проти годинникової стрілки. Що означає $\varphi \circ \psi$ ($\circ$- знак композиції).

А Поворот на $\frac{\pi}{6}$ проти годинникової стрілки

Б Поворот на $\frac{\pi}{3}$ проти годинникової стрілки

В Поворот на $\frac{5\pi}{6}$ за годинниковою стрілкою

Г Поворот на $\frac{\pi}{6}$ за годинниковою стрілкою

Д Поворот на $\frac{\pi}{3}$ за годинниковою стрілкою

12. А - множина всіх прямих у просторі. Які з наведених бінарних відношень не є відношеннями еквівалентності?

А пряма l_1 перетинається прямою l_2

Б пряма l_1 перетинає ті самі площини, що й пряма l_2

В прямі l_1 та l_2 лежать на одній відстані від точки K

Г прямі l_1 та l_2 утворюють з даною площиною однакові кути

Д пряма l_1 не перетинається з прямою l_2

13. Нехай є множини $A = \{1,2,3\}$ та $B = \{1,2,3,4\}$ і визначене на $A \times B$ бінарне відношення $\Re = \{(1,2),(2,2),(1,4),(3,1),(2,3)\}$. Яке з наведених бінарних відношень є оберненим до відношення?

А $\Re^{-1} = \{(2,1),(2,2),(4,1),(3,1),(3,3)\}$

Б $\Re^{-1} = \{(2,1),(2,2),(4,1),(1,3),(3,2)\}$

В $\Re^{-1} = \{(2,1),(2,2),(1,4),(3,2),(1,3)\}$

Г $\Re^{-1} = \{(1,2),(2,2),(4,1),(1,3),(3,2)\}$

Д $\Re^{-1} = \{(1,2),(2,2),(4,4),(3,3),(2,3)\}$

14. Нехай є множини $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ та $C = \{2,3,4\}$ і визначені на $A \times B$ бінарне відношення $\Re_1 = \{(1,2),(2,2),(1,4),(3,1),(2,3)\}$, і на $B \times C$ $\Re_2 = \{(1,3),(2,4),(2,2),(3,2),(3,4)\}$. Яке з наведених бінарних відношень є добутком відношень $\Re = \Re_2 \circ \Re_1$?

А $\Re = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3)\}$

Б $\Re = \{(1,1),(2,2),(3,3),(3,2),(2,3)\}$

В $\Re = \{(1,4),(2,1),(1,2),(3,2),(2,3)\}$

Г $\Re = \{(1,1),(2,2),(1,4),(3,3),(2,3)\}$

Д $\Re = \{(3,2),(2,2),(1,4),(2,1),(2,3)\}$

15. Нехай A множина людей, $a,b,c \in A$. $\Re = \{a\ \textit{є дитиною}\ c\}$. Яке з наведених бінарних відношень є добутком відношень $\Re = \Re \circ \Re$?

А $\Re = \{b\ \textit{є онуком або онукою}\ c\}$

Б $\Re = \{a\ \textit{є онуком або онукою}\ b\}$

В $\Re = \{b\ \textit{є дитиною}\ c\}$

Г $\Re = \{c\ \textit{є дитиною}\ u\}$

Д $\Re = \{b\ \textit{є дідусем або бабусею}\ a\}$

16. Які з наведених бінарних відношень є відношеннями еквівалентності?

А Людина А одного віку з людиною В

Б Людина А знайома з людиною В

В Людина А є батьком людини В

Г Людина А з людиною В навчаються в одній групі

Д Людина А з людиною В мають спільних батьків

17. Які з наведених бінарних відношень є відношеннями порядку?

А Паралельність прямих

Б Перпендикулярність прямих

В Вкладення однієї множини в іншу

Г Подібність трикутників

Д Рівність трикутників

Е Одне число більше другого

18. Які з наведених бінарних відношень є відношеннями еквівалентності?

А Паралельність прямих

Б Перпендикулярність прямих

В Вкладення однієї множини в іншу

Г Подібність трикутників

Д Рівність трикутників

Е Одне число більше другого

19. Які з наведених бінарних відношень не є відношеннями еквівалентності?

А відношення подібності трикутників

Б трикутник X має таку ж площину, що і трикутник $У$

В сторони трикутника X паралельні сторонам трикутника $У$

Г відношення рівності периметрів трикутників

Д трикутник X має кут рівний одному з кутів трикутника $У$

20. На множині слів {ПЕРЕВАЛ, ПЕРЕХІД, ПЕРЕКЛАД, ПЕРЕРОБКА, ПОПЕРЕДЖЕННЯ, ПЕРЕХВАТ, ВИПЕРЕДЖЕННЯ}. Упорядкувати цю множину у лексико-графічному порядку.

21. Знайти мінімальну диз'юнктивно-кон'юктивну форму представлення булевої функції, яка має десятковий код 209 і вибрати її серед наведених формул

А $\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2$ **Б** $\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2$ **В** $\overline{x}_1x_3 \vee x_1\overline{x}_2$ **Г** $x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2$

22. Нехай N = {2,3,6,8,11}. Знайти усі елементи бінарного відношення: {число a є дільником числа b }. Відповідь записати у вигляді пар (цифра, цифра).

23. Нехай N = {2,3,6,8,11}. Серед даних матриць знайти ту, що визначається бінарним відношенням: {числа a та b мають спільний дільник}.

$$A=\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 3 & 6 & 8 & 11 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\qquad B=\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 3 & 6 & 8 & 11 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\qquad C=\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 3 & 6 & 8 & 11 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 11 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$D=\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 3 & 6 & 8 & 11 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\qquad E=\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 3 & 6 & 8 & 11 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

24. Які з властивостей має бінарне відношення, що визначається наведеною матрицею?

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 3 & 6 & 8 & 11 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 11 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

А Рефлексивність **Б** Транзитивність **В** Симетричність
Г Антисиметричність **Д** Антирефлексивність

25. Які з наступних речень не є висловлюваннями?

А Трикутник ABC є подібним до трикутника DFE
Б Один з кращих студентів університету
В Київ - столиця України
Г Ріка Дніпро впадає у Каспійське море
Д Громадянин Петров - студент вищого навчального закладу

26. Визначити десятковий еквівалент виразу $(P \to Q) \vee ((Q \to R) \to (P \to R))$.

27. Визначити десятковий еквівалент виразу $((P \to Q) \vee (Q \to R)) \to (P \to R)$.

28. Яка з наведених таблиць є таблицею істинності логічного виразу $F = \overline{\left(P \to \overline{(Q \wedge P)}\right)} \to (P \vee Q)$?

	P	Q	F		P	Q	F		P	Q	F		P	Q	F		P	Q	F
	0	0	1		0	0	1		0	0	1		0	0	1		0	0	0
А	0	1	1	**Б**	0	1	1	**В**	0	1	0	**Г**	0	1	0	**Д**	0	1	0
	1	0	0		1	0	1		1	0	0		1	0	1		1	0	1
	1	1	1		1	1	1		1	1	1		1	1	0		1	1	1

29. Знайти вагу похідної $\dfrac{\partial}{\partial x}$ функції $x \vee \left(y \Leftrightarrow z\right)$

30. Перевірити приналежність функції $\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1 x_2$ до замкнених класів булевих функцій. Відмітити ті класи, до яких функція належить.

А $К_{0,}$ **Б** $К_1$ **В** $К_л$ **Г** $К_с$ **Д** $К_м$

31. Знайти представлення у вигляді поліному Жегалкіна булевої функції $\overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2$. У відповіді записати послідовність значень коефіцієнтів $C_0, C_1, ..., C_7$.

32. На факультеті 1400 студентів. З них: 1250 - вміють кататись на лижах, а 915 - на ковзанах. Ні на лижах, ні на ковзанах не вміють кататись 60 чол. Скільки студентів вміють кататись і на лижах, і на ковзанах? Вибрати вірну відповідь.

А	Б	В	Г	Д
735	805	635	535	435

33. А - множина натуральних чисел кратних одному з чисел 2, 3, 5. Знайти кількість елементів множини А, якщо серед них є: 70 - кратних 2; 60 - кратних 3; 80 - кратних 5; 32 - кратних 6; 35 - кратних 10; 38 - кратних 15 і 20 кратних 30.

А	Б	В	Г	Д
225	135	155	125	145

34. Розв’язати рівняння $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x.$? Вибрати вірну відповідь.

А	Б	В	Г	Д
4	5	6	7	8

35. Скільки існує п’ятизначних номерів (цифри в номері не повторюються), які не містять цифру 8? Вибрати вірну відповідь.

А	Б	В	Г	Д
13640	13540	13440	13740	13840

36. Поставити у відповідність графам (Рис. 88) їхні матриці суміжності

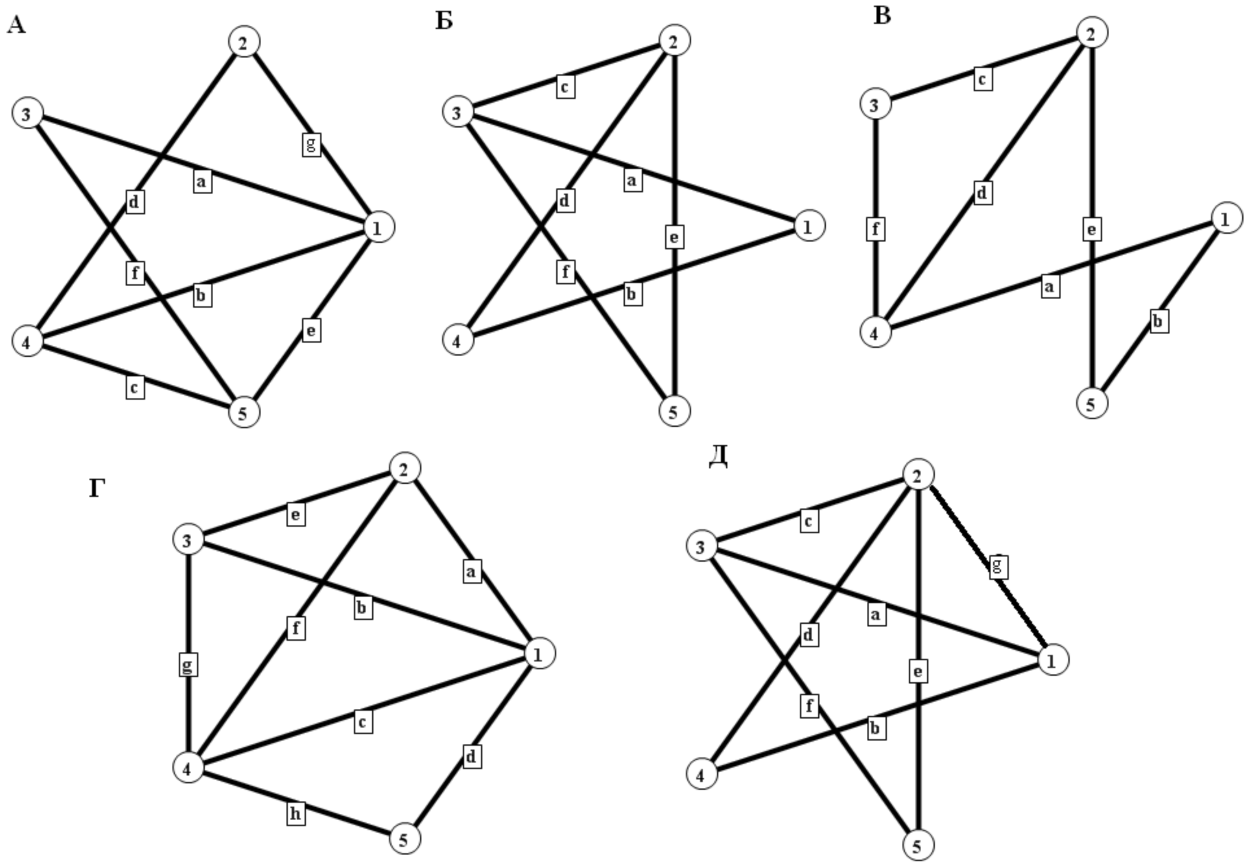


Рис. 88

$$G = \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad F = \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad C = \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$D = \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \quad E = \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

37. Поставити у відповідність графам (Рис. 89) їхні матриці інцидентності

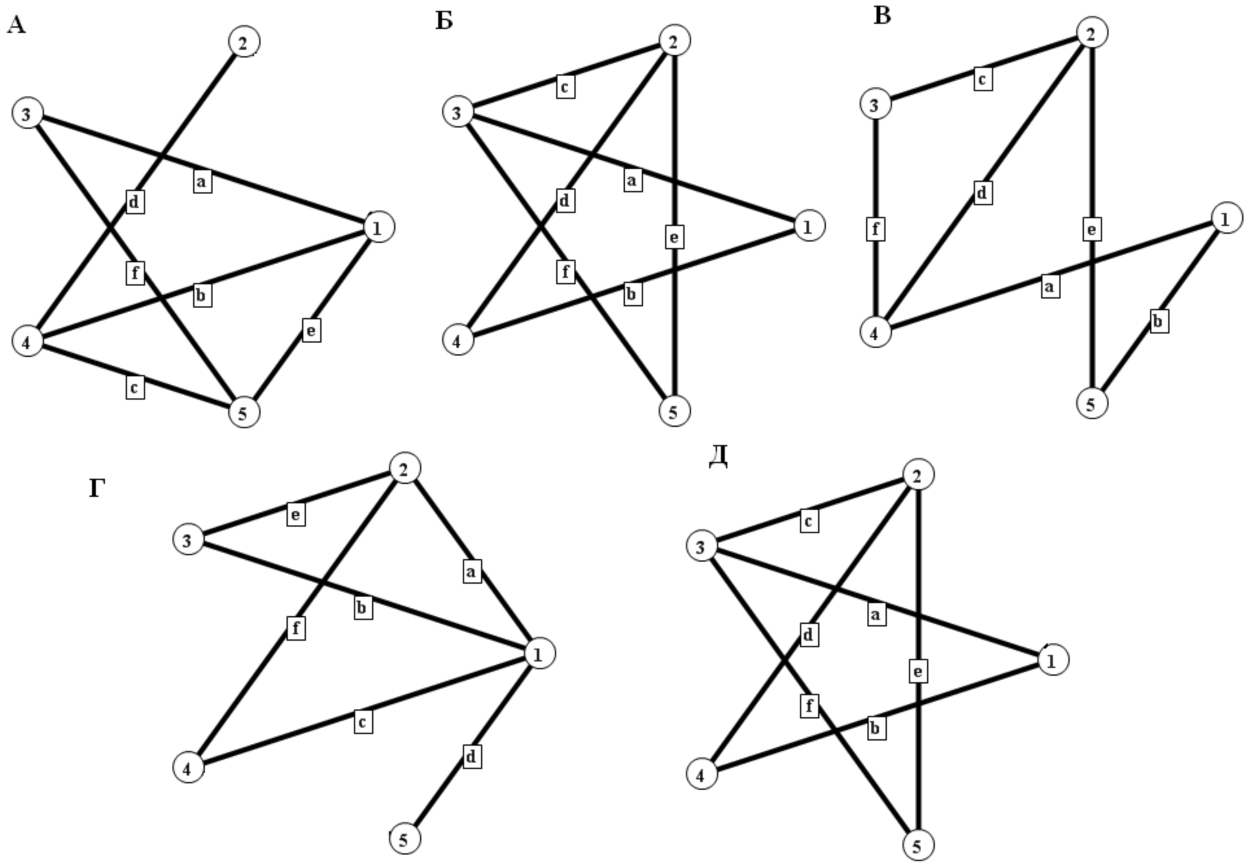


Рис. 89

$$G = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ e & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ f & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad F = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ e & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ f & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad C = \begin{array}{c|ccccc} & a & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ e & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$D = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ e & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ f & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad E = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline a & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ e & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ f & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

38. Який з наведених графів (Рис. 90) є Ейлеровим?

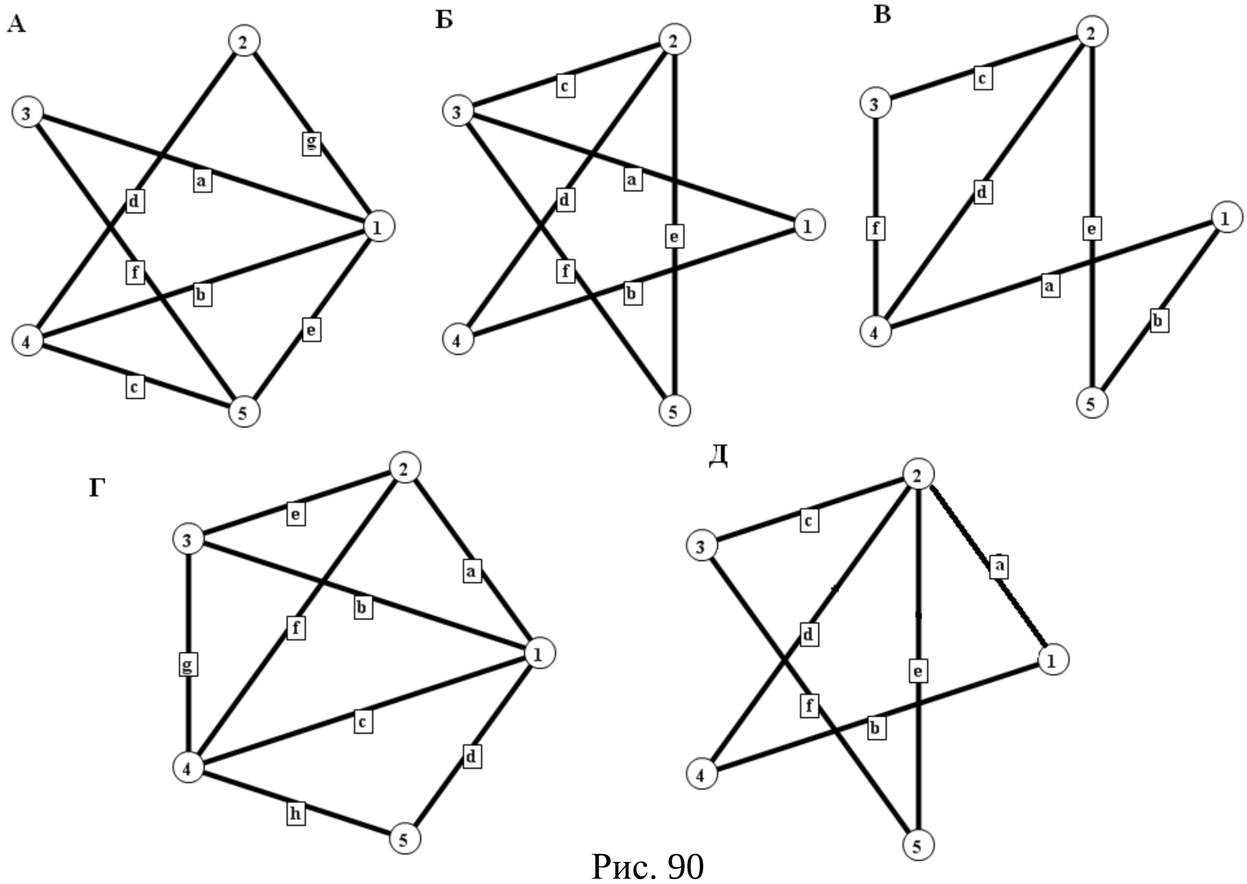


Рис. 90

39. Скільки існує простих шляхів довжини 3 у даному графі (Рис. 91).

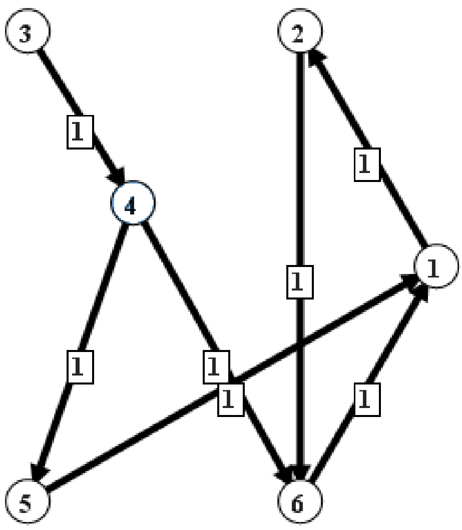


Рис. 91

40. Знайти цикломатичне число S і кількість P простих циклів довжини 3 у даному графі (Рис. 92). Формат відповіді S= , P=

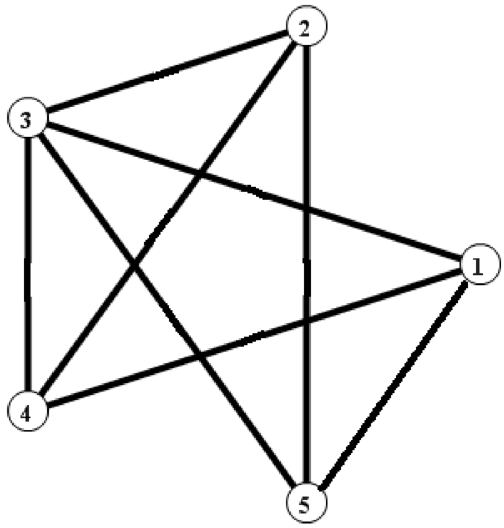


Рис. 92

41. Скільки остовних дерев має граф Г (Рис. 89). Вибрати вірну відповідь.

А 10, Б 6, В 8, Г 7, Д 9

42. Знайти в даному графі (Рис. 93) гамільтонів цикл з початком у вершині 1. Відповідь виписати як послідовність ідентифікаторів ребер, наприклад, *k*,*p*,…,*s*.

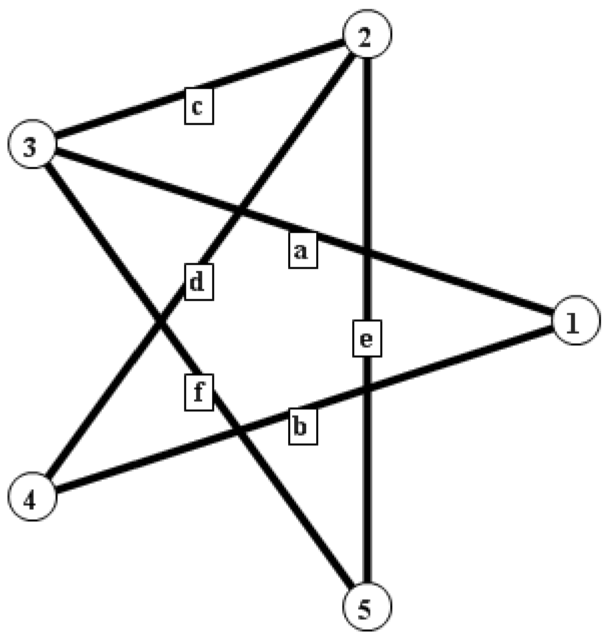


Рис. 93

43. Визначити радіус, діаметр і центри графа (Рис. 94)

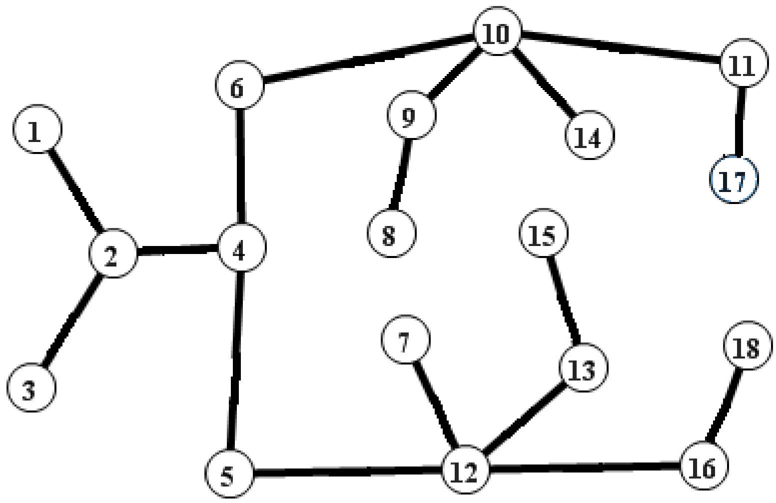


Рис. 94

44. Знайти остов мінімальної ваги графа (Рис. 95). У відповіді виписати послідовність ребер, які складають остовне дерево, і його вагу, наприклад, *k*,*p*,…,*s*; 34. Ідентифікатори ребер розташувати за зростанням їхньої ваги.

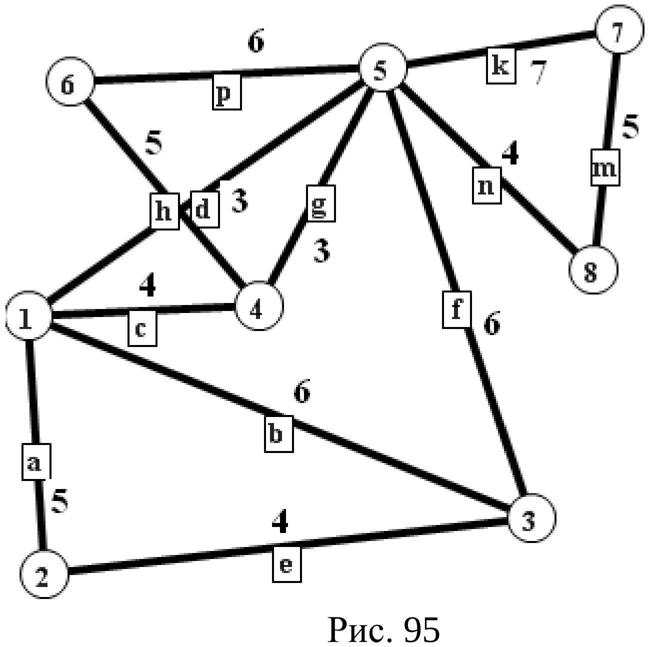


Рис. 95

45. Знайти дев’ятий член розкладу $\left(a+\sqrt{b}\right)^{12}$. Вибрати вірну відповідь.

А	Б	В	Г	Д
$495a^4b^4$	$395a^4b^4$	$595a^4b^4$	$475a^4b^4$	$465a^4b^4$

46. Які з наведених графів не є планарними (Рис. 96).

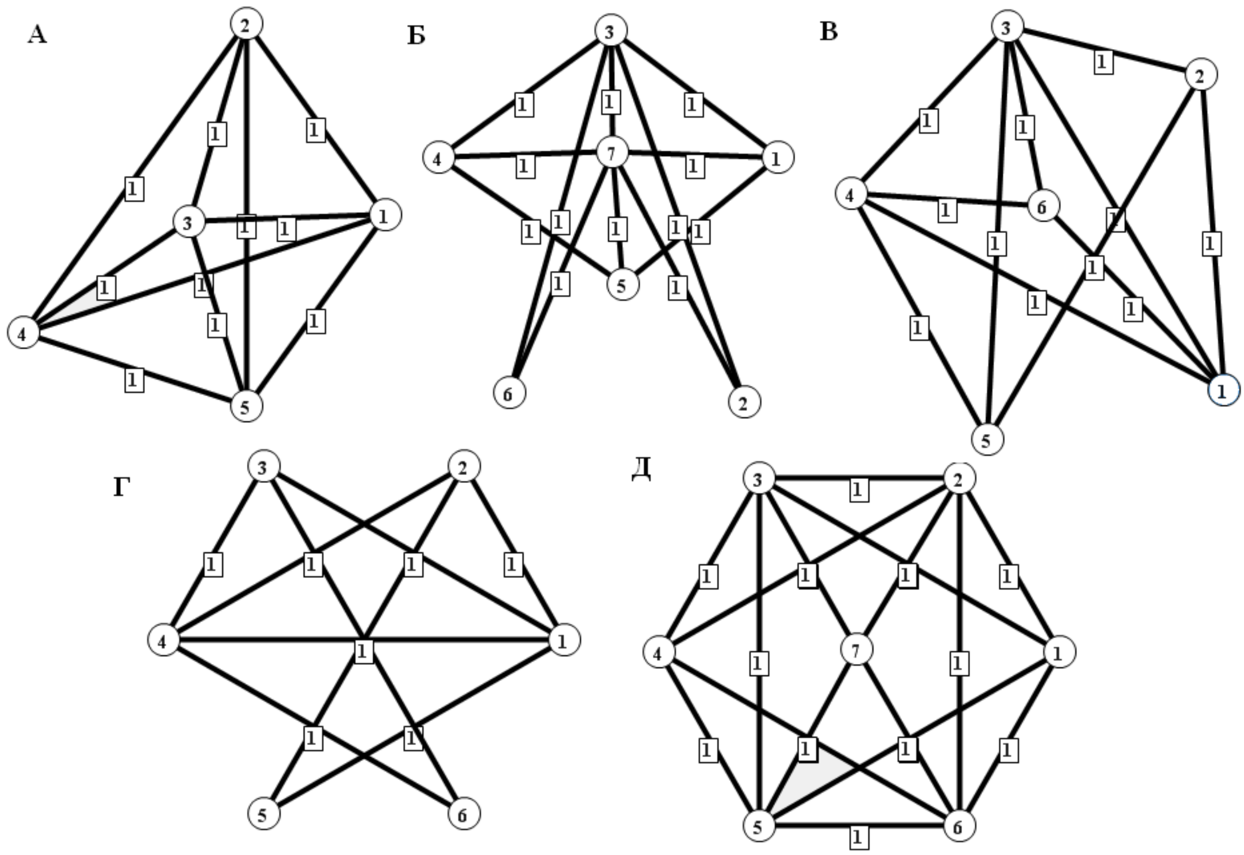


Рис. 96

47. Знайти на орграфі (Рис. 97) шлях мінімальної ваги з витоку А до стоку Р. У відповіді виписати послідовність вершин від А до Р.

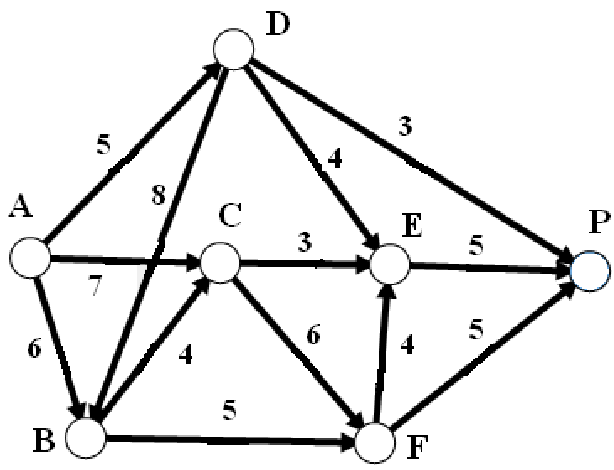


Рис. 97

48. Для даного графа (Рис. 98) знайти серед наведених графів (Рис. 99) двоїстий граф

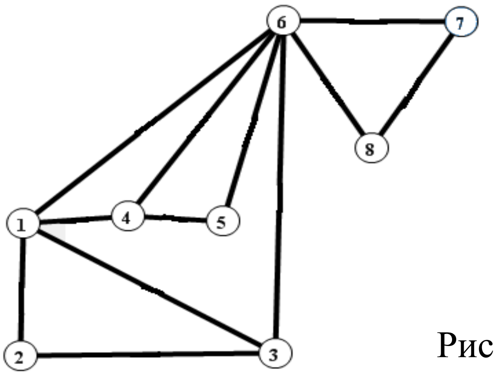


Рис. 98

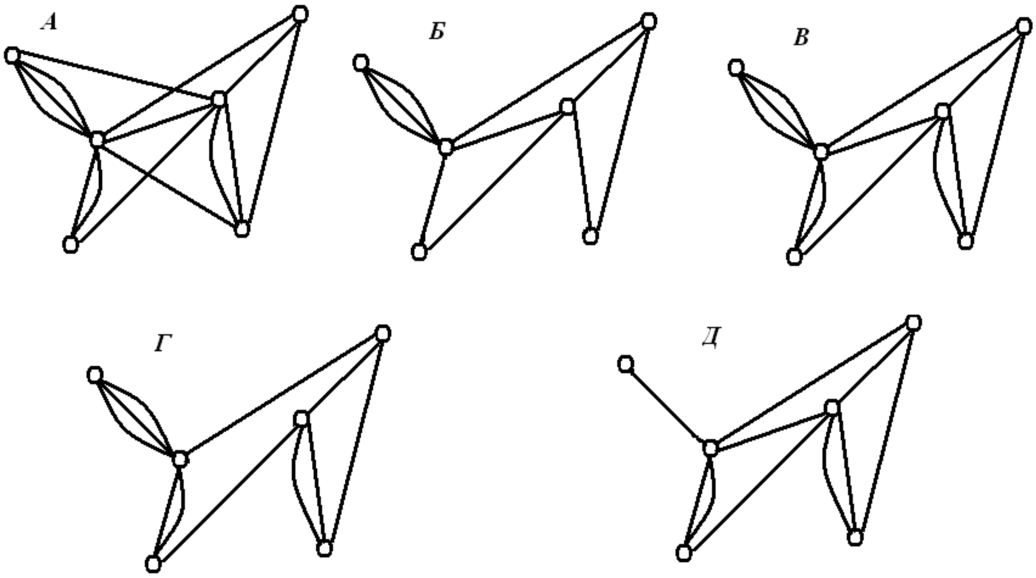


Рис. 99

49. Знайти значення максимального потоку у мережі (Рис. 100)

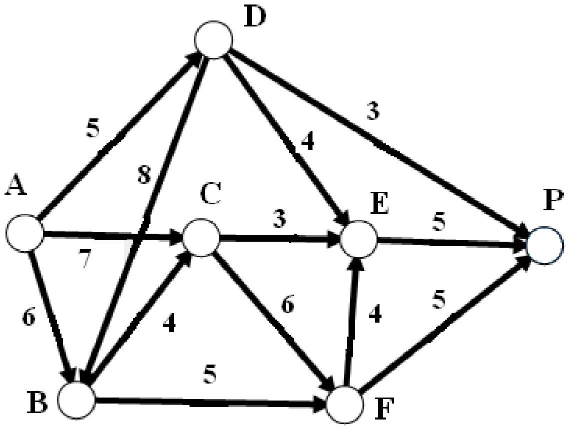


Рис. 100

Бланк відповідей тестового завдання № ___

Дисципліна «Дискретна математика».

Група	Прізвище та ініціали	Дата

Для завдань з однією або кількома правильними відповідями

Завдання № 1	А	Б	В	Г	Д
Завдання № 2	А	Б	В	Г	Д

Для завдань на співставлення

Завдання № 1		Завдання № 2		Завдання № 3		…	
А	1	А	1	А	1	А	1
Б	2	Б	2	Б	2	Б	2
В	3	В	3	В	3	В	3
Г	4	Г	4	Г	4	Г	4
Д	5	Д	5	Д	5	Д	5

Для завдань на впорядкування

Завдання № 1		Завдання № 2		…	
1		1		1	
2		2		2	
3		3		3	
4		4		4	
5		5		5	

Для завдань з відкритою відповіддю

Номер завдання	Відповідь
№ 1	

Коментар. Тестові завдання включають питання п’яти типів:

1) з однією правильною відповіддю, 2) з кількома правильними відповідями, 3) співставлення, 4) впорядкування, 5) з відкритою відповіддю.

У разі, коли тестування відбувається у паперовому варіанті, бланк відповідей формується з таблиць відповідно до типу тестового завдання.

Відповіді до практичних завдань

1. А-2; В-4; Е-4; Г-1; Д-1; Б-3 **2.** Б,В **3.** 32 **4.** 21 **5.** $A \bigcup B$ **6.** $\overline{C} \bigcap A \bigcap \overline{B}$ **7.** В **8.** В **9.** А,Д **10.** А,Б,Д **11.** А **12.** Б,В,Г **13.**Б **14.** Б. **15.** В **16.** А,Г,Д **17**. В, Е **18.** А,Г,Д **19.** Д **20.** ВИПЕРЕДЖЕННЯ, ПЕРЕВАЛ, ПЕРЕКЛАД, ПЕРЕРОБКА, ПЕРЕХВАТ, ПЕРЕХІД, ПОПЕРЕДЖЕННЯ **21.** А **22.** 2,6; 2,8 ; 3,6 **23.** А **24.** А;В **25.** Б **26.** Б **27.** 239 **28.** 175 **29.** 2 **30.** Б **31.** 11101101 **32.** Б **33.** Г **34.** Б **35.** В **36.** A-C; Б-D; В–G; Г-F; Д-E **37.** A-C; Б-F; B-D; Г-E; Д-G **38.** Д **39.** 6 **40.** S=4; P=4 **41.** В **42.** bdefa **43.** R=4; d=8; центр вершина 4 **44.** gdneamd; 29 **45.** А **46.** Д **47.** ADP; 8 **48.** В **49.** 13

Додаток 3

Програмне забезпечення для курсу «Дискретна математика»

Олійник Л.О., Крушельницький О.В.

Навчальний посібник «Дискретна математика» має електронну версію, в якій передбачено програмне забезпечення, яке можна віднести до так званих інтерактивних експертно-тренувальних навчальних засобів.

Одним з напрямків застосування сучасних інтерактивних технологій є навчання з використанням мультимедійних засобів навчання, до яких відносяться й автоматизовані навчальні системи (АНС). Під АНС розуміють електронні підручники, навчальні посібники, тренажери, засоби контролю знань у вигляді тестових програм. Серед компонентів АНС найскладнішими для реалізації є програмні модулі, так звані тренажери, що дозволяють моделювати процеси, задачі, з якими стикаються студенти під час навчання.

Створення таких програм є складною задачею. Це пов’язано з тим, що програмування моделюючих програм потребує вільного володіння знаннями в певній галузі, а також тим, що досить часто інформація, яка є необхідною для створення навчальних програм-тренажерів, складна і специфічна.

Розробка інтерактивних експертно-тренувальних начальних засобів для методичного забезпечення курсу «Дискретна математика» виконувалась, як науково-дослідна студентська робота, що завершилась захистом магістерської дипломної роботи ([12],[13]).

Програмні модулі тренажери «Множини», «Булеві функції», «Теорія графів» забезпечують можливість самостійного опрацювання студентами певного кола задач курсу «Дискретна математика» в режимі тренажера, а також проведення контролю якості засвоєння матеріалу в режимі тестування. Крім того викладач може використовувати ці програмні засоби підчас проведення лекційних або практичних занять для демонстрації різних методів розв’язання задач даного курсу.

Програмний модуль «Множини»

Програма призначена для графічного зображення операцій над множинами та демонстрації етапів розв’язання задач теми «Множини. Операції над множинами». При чому зображуються послідовні кроки виконання операцій даної формули. Крім того програма представляє графічну ілюстрацію перевірки рівності множин заданих аналітично різними формульними представленнями.

Інтерфейс програми має вигляд:

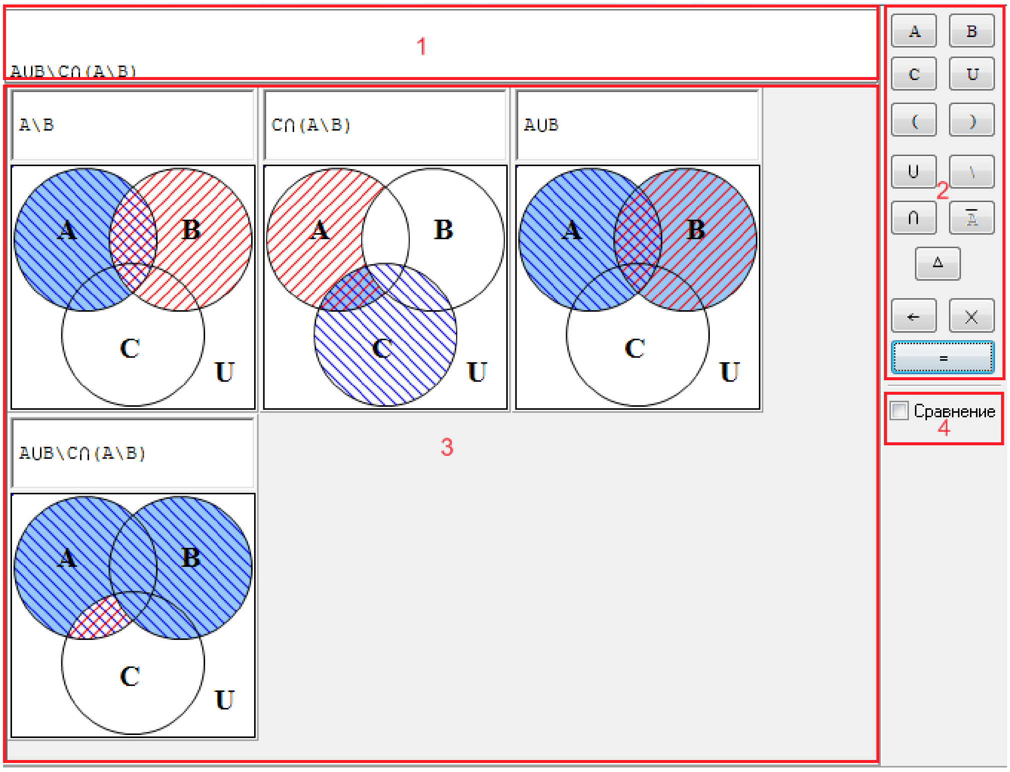


Рис. 101

1 - поле введення формули – операціи над множинами.

2 - віртуальна клавіатура введення формул

3 - область виведення результатів

4 - вибір режиму порівняння формул.

Програмний модуль підтримує роботу з формулами, які виконують операції з трьома множинами, що належать універсаму. Введення формул можна здійснювати як за допомогою віртуальної клавіатури (2), а також з клавіатури комп'ютера. При цьому використовуються наступні клавіші:

"A", "B", "C", "U" – для введення позначень множин у формулах

"(" ")" – введення дужок

"+" – операція об'єднання двох множин

"-" – операція доповнення множини

"*" – операція перетину двох множин

"/" або "\" – операція різниці двох множин

"d" – операція симетричної різниці двох множин

Після введення формул у результаті натискання клавіші "=" на правій панелі інтерфейсу у полі результатів виводиться послідовність малюнків (кругів Ейлера), що відповідають послідовності виконання операцій над множинами для даної формули. Результат виконання операцій виділяється штриховкою.

Для графічного порівняння двох формул, що представляють множину, необхідно активізувати кнопку 4 і ввести формули для порівняння діаграм Ейлера двох різних формул.

Програмний модуль «Булеві функції»

Програму-тренажер «Булеві функції» призначено для роботи з булевими функціями. Вона підтримує роботу з функціями, що залежать не більше ніж від восьми змінних (кількість булевих функцій складає 2^{256}).

Враховуючи ізоморфізм булевої алгебри й алгебри Кантора, програмний модуль дозволяє виконувати мінімізацію представлення множини у нормальній формі Кантора. Для множин диз'юнктивно-кон'юнктивна нормальна форма (ДДКНФ) булевої функції інтерпретується як нормальна форма Кантора представлення множин, що визначається на системі твірних множин кількістю не вище восьми.

Програмний модуль «Булеві функції» реалізує демонстрацію та самостійне опрацювання задач розділу III «Представлення елементів булевої алгебри. Мінімізація представлення». Програма дозволяє:

- будувати досконалу диз'юнктивно-кон'юнктивну нормальну форму булевої функції;
- виконати процес мінімізації булевої функції;
- знаходити представлення у вигляді поліному Жегалкінаь отриманої мінімальної форми;
- перевіряти на входження до основних п'яти замкнених класів і, на основі цієї перевірки, визначати повноту заданої системи булевих функцій;
- будувати методом каскадів логічну схему, що реалізує задану булеву функцію.

У режимі роботи викладача програма «Булеві функції» розв'язує перераховані вище задачі, що дає змогу викладачеві ефективніше використовувати лекційний час.

У режимі тренажера програма «Булеві функції» перераховані задачі розв'язуються студентом самостійно, при необхідності консультуючись з викладачем. Так як частина обчислень та побудов виконується програмою, у студента є час і можливість зосередитись на ключових етапах розв'язку задач і опрацювати набагато більше завдань. Програму розроблено таким чином, що на певних етапах розв'язання тієї чи іншої задачі студент повинен відповісти на поставлені питання і тільки після правильної відповіді отримує змогу просуватися до наступного етапу розв'язку.

У режимі контролю у програмі «Булеві функції» усі перераховані типи задач розглядаються як одна велика задача з дослідження властивостей булевої функції. Якщо студент успішно виконав усі завдання програмного модуля і пройшов усі етапи прозв'язання задач, він отримує оцінку у стобальній шкалі. У разі коли студент тричі відповідає неправильно на поставлене питання, програма повертає його на початок розв'язання задачі, і наявність таких помилок суттєво знижує підсумкову оцінку.

Інтерфейс програми має вигляд:

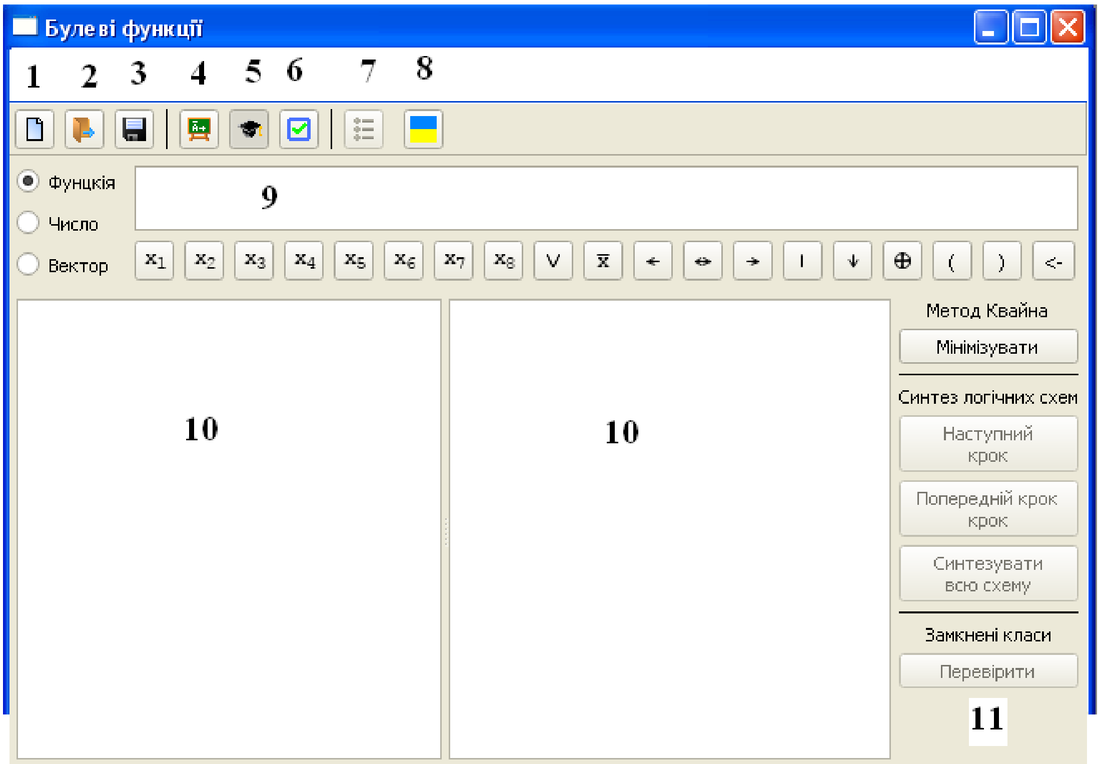


Рис. 102

1- команда введення нової функції;
2 - відкриття раніше збереженого файлу;
3- збереження файлу;
4- вибір режиму роботи викладача;
5 - вибір режиму тренажеру;
6 - вибір режиму контролю знань;
7 - виведення на екран статистики контролю й оцінки;
8- вибір мови інтерфейсу (програма двомовна);

9 - поле введення функції

передбачено три варіанти введення

а) у вигляді формули;

б) у вигляді десяткового коду (числа);

в) у вигляді двійкового коду (вектору);

10 - поле виведення результатів розв'язання задач;

11 - кнопки команд на виконання задач, які передбачено в програмі. Необхідно відмітити, що введення нової функції можна виконувати як з клавіатури, так і за допомогою кнопок панелі вводу (Рис.102).

Задача мінімізація булевої функції методом Квайна.

Для заданої функції з десятковим кодом 189 результат роботи програми у режимі викладача наведено на рис 103.

У лівому полі виведення результатів будується таблиця істинності даної функції - **1**.

У правому полі виведення результатів будується зображення даної булевої функції на гіперкубі – **2**, таблиця Квайна – **3**, і мінімальна форма представлення даної булевої функції - **4**.

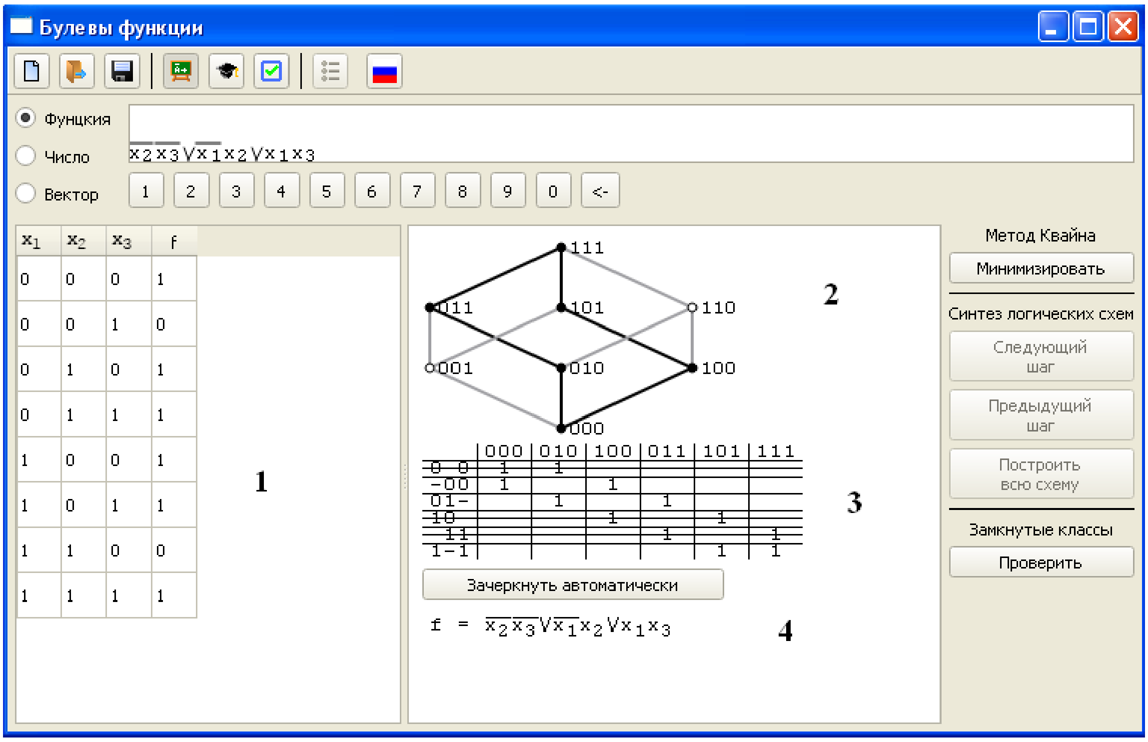


Рис. 103

У режимі тренажера студент отримує серію запитань (Рис.104, 105, 106). Після правильної відповіді на поставлене питання він просувається до наступного етапу розв'язку задачі. Перша задача завершується побудовою мінімального представлення булевої функції Рис.103.

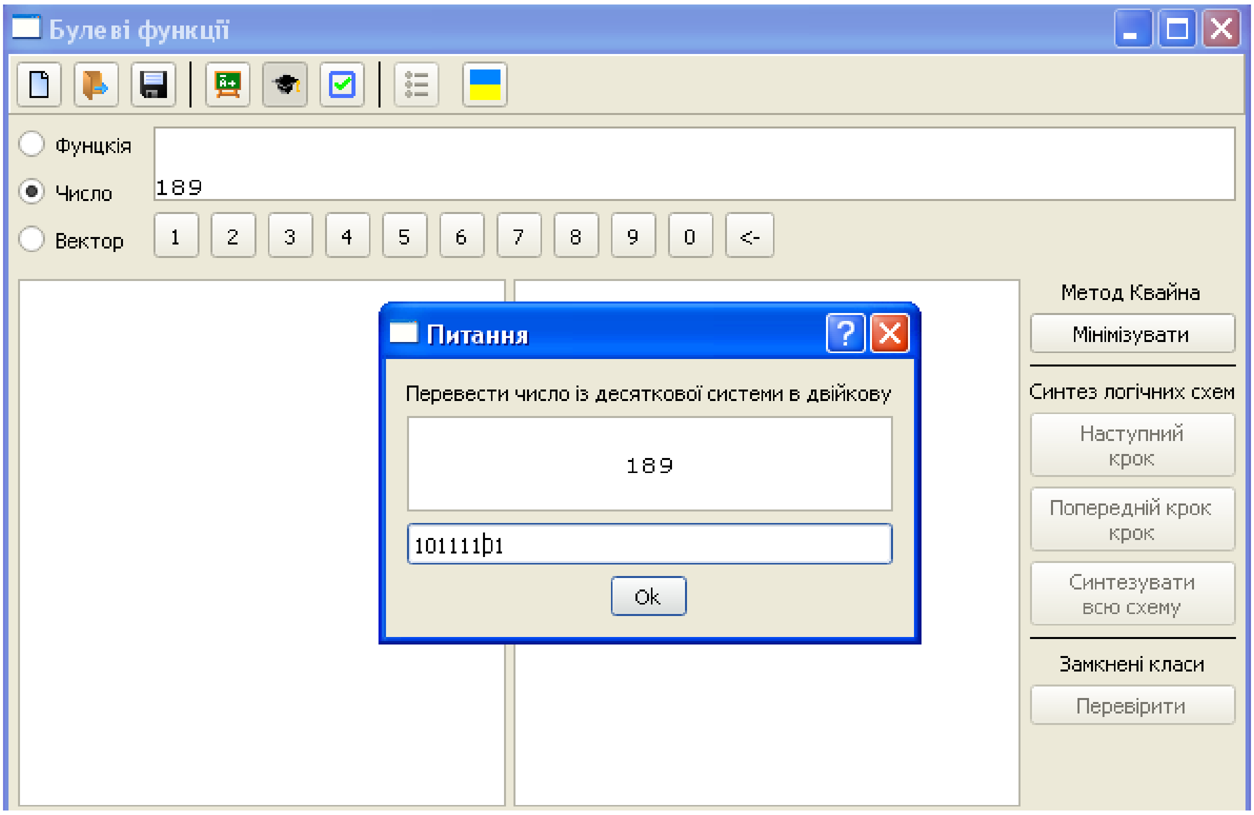


Рис. 104

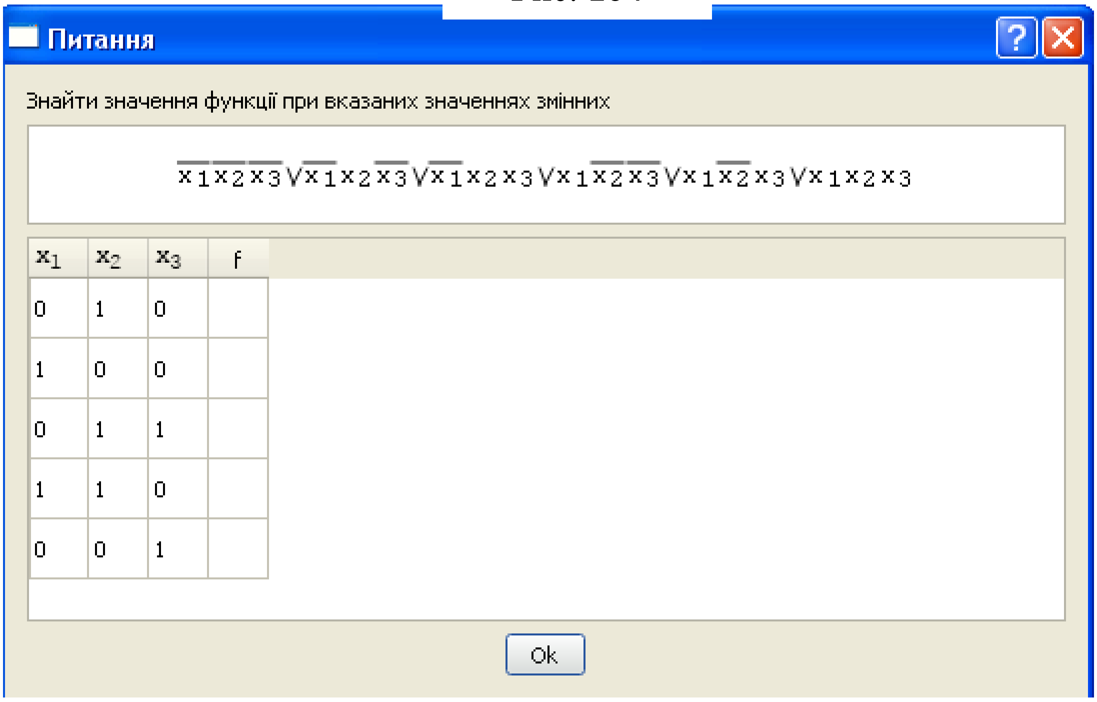


Рис. 105

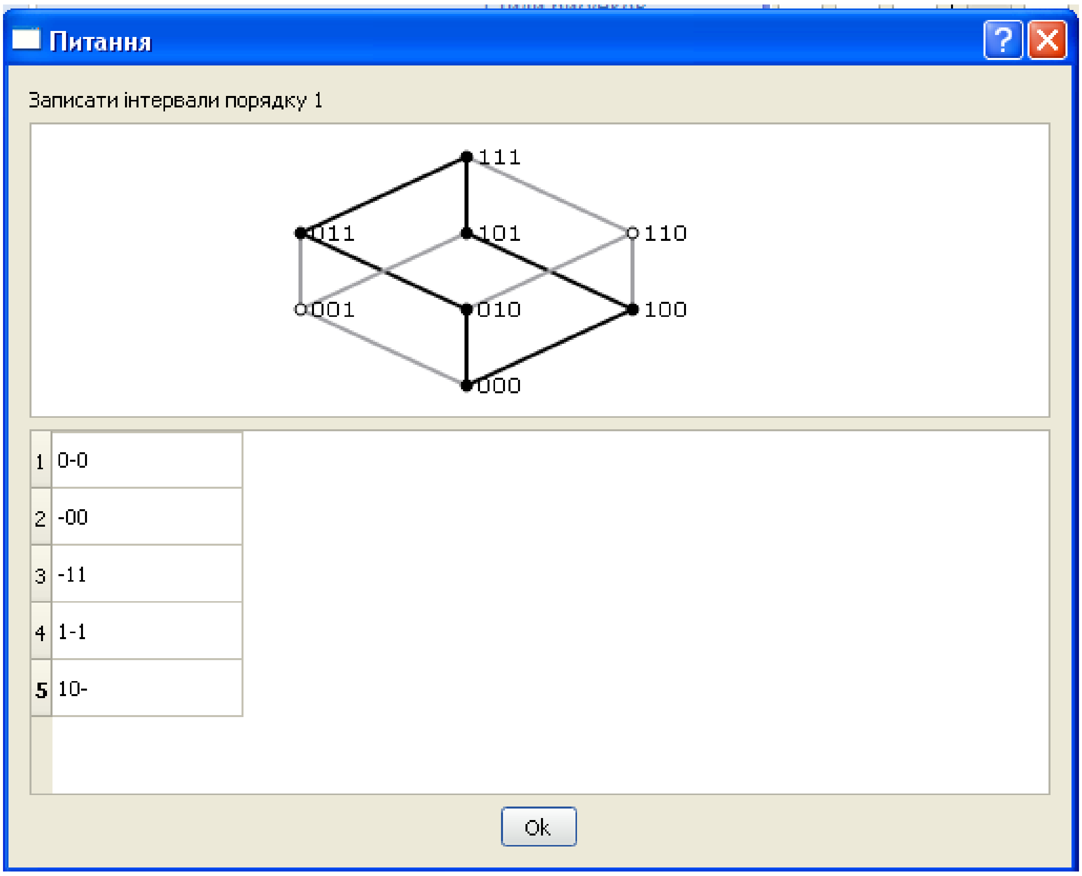


Рис 106

На наступному етапі розв язується задача дослідження булевої функції на включення до основних замкнених класів.

Програма виконує перевірку наступних властивостей булевої функції: збереження 0 та 1, самодвоїстість, монотонність і лінійність. В результаті в правому поля виведення результатів з'явиться поліном Жегалкіна даної булевої функції і приналежність її до замкнених класів рис 107.

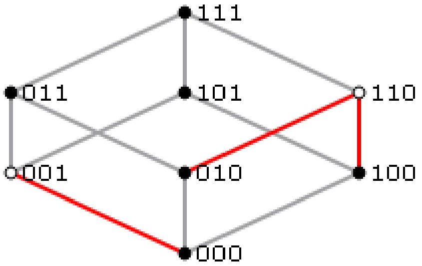
Нарешті розв'язується третя задача синтезу логічної схеми, що реалізує задану булеву функцію. Застосовується метод каскадів, якому використовуються блоки виключення змінних. За допомогою обчислення похідних булевої функції та вагових значень її змінних покроково будується логічна схема. На кожному кроці побудови схеми обчислюються ваги похідних даної функції та отриманих її залишкових функцій. Визначається змінна, що повинна вилучатися в першу чергу і будується відповідний блок виключення логічної схеми (Рис. 108). Програма спрощує зображення блоку виключення, у разі наявності такої можливості. В результаті програмою буде виведено у правому вікні результатів схема, що реалізує задану булеву функцію (Рис.109)

$C_0 \oplus C_1x_1 \oplus C_2x_2 \oplus C_3x_3 \oplus C_4x_1x_2 \oplus C_5x_1x_3 \oplus C_6x_2x_3 \oplus C_7x_1x_2x_3$

$C_0 = 1 \quad C_1 = 0 \quad C_2 = 0 \quad C_3 = 1$

$C_4 = 1 \quad C_5 = 1 \quad C_6 = 1 \quad C_7 = 0$

$f = 1 \oplus x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$



$f \notin K_0$

$f \in K_1$

$f \notin K_C$

$f \notin K_M$

$f \notin K_L$

Рис. 107

$f = \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2 \vee x_1x_3$

$f'_{x_1} = \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_3 \oplus \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_2 \qquad P(x_1) = 2$

$f'_{x_2} = \overline{x_1} \vee x_1x_3 \oplus \overline{x_3} \vee x_1x_3 \qquad P(x_2) = 2$

$f'_{x_3} = \overline{x_1}x_2 \vee x_1 \oplus \overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_2 \qquad P(x_3) = 2$

$f = x_1 f(1) \vee \overline{x_1} f(0)$

$f(1) = \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_3$

$f(0) = \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_2$

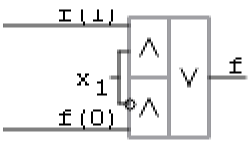


Рис. 108

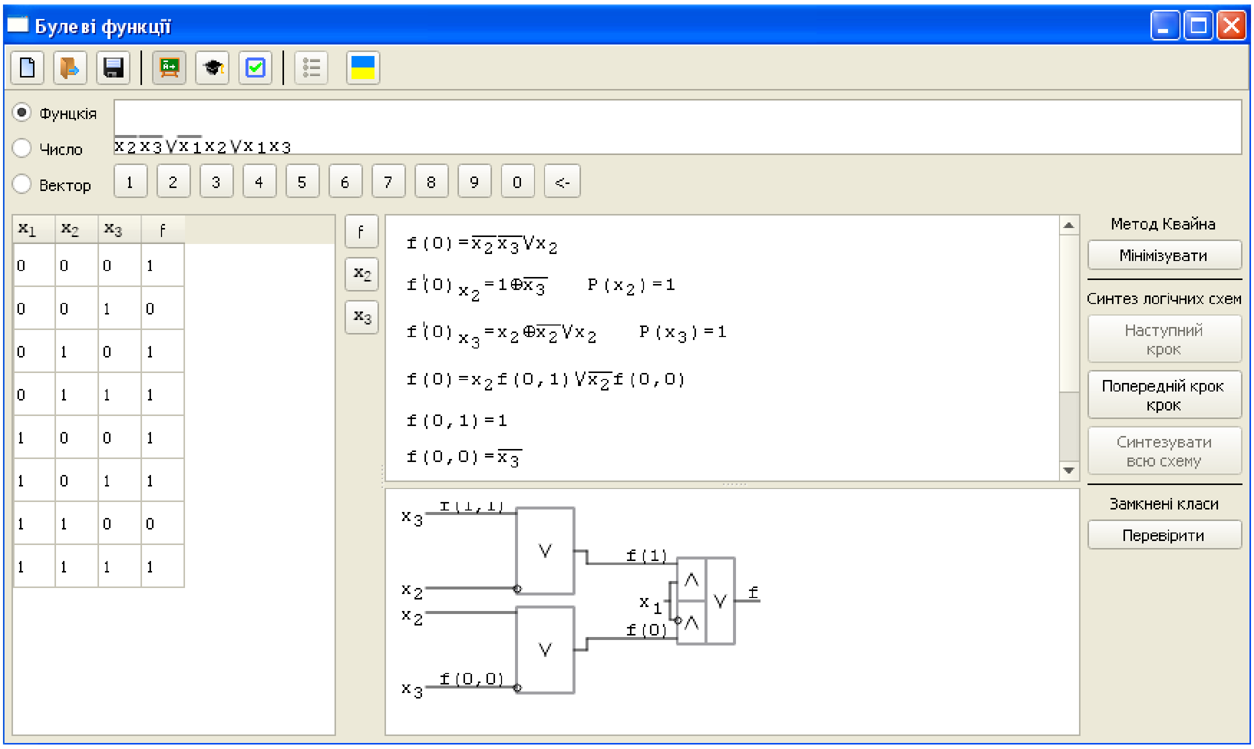


Рис. 109

В режимі контролю знань студент отримає статистичний звіт і оцінку своєї роботи (Рис. 110).

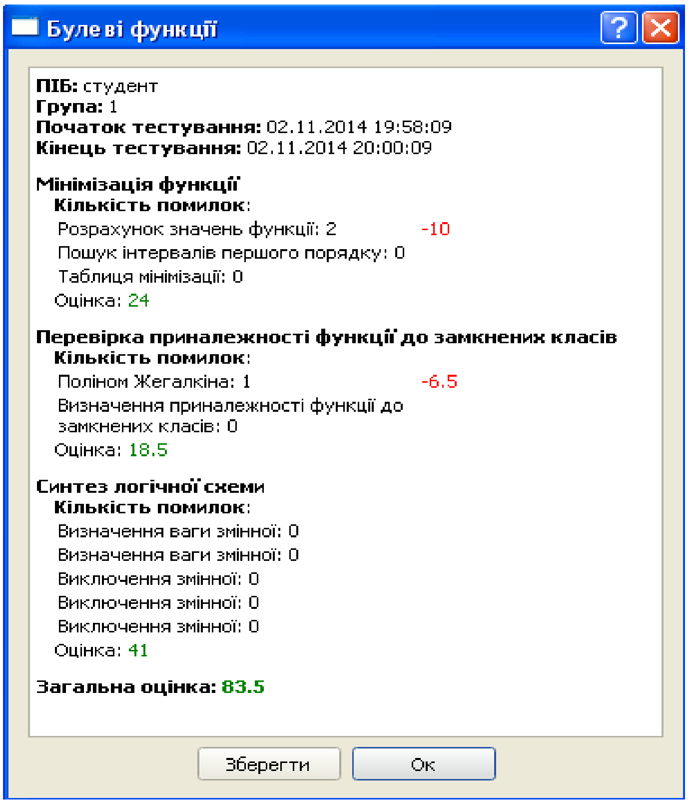


Рис. 110

Програмний модуль «Теорія графів»

Програму-тренажер «Теорія графів» призначено для роботи з графами. Вона підтримує роботу з графами, у яких не більше 20 вершин.

Програмний модуль дає змогу розглядати задачі до розділу V «Елементи теорії графів» і дозволяє:

- зображати графа (орієнтованого, неорієнтованого, зваженого) з паралельною побудовою матриці суміжності;
- побудову степенів матриці суміжності і матриці досяжності;
- визначення цикломатичної базисної матриці і базисної матриці розрізів, побудову остова;
- визначення основних характеристик дерева;
- визначення планарності графа і знаходження в ньому заборонених фігур;

Цей програмний модуль призначено в режимі викладача для демонстрації методів розв’язання задач теорії графів. Графічне зображення графа (орієнтованого, неорієнтованого, зваженого) з паралельною побудовою матриці суміжності і, навпаки, побудова матриці суміжності з автоматичним зображенням відповідного графа.

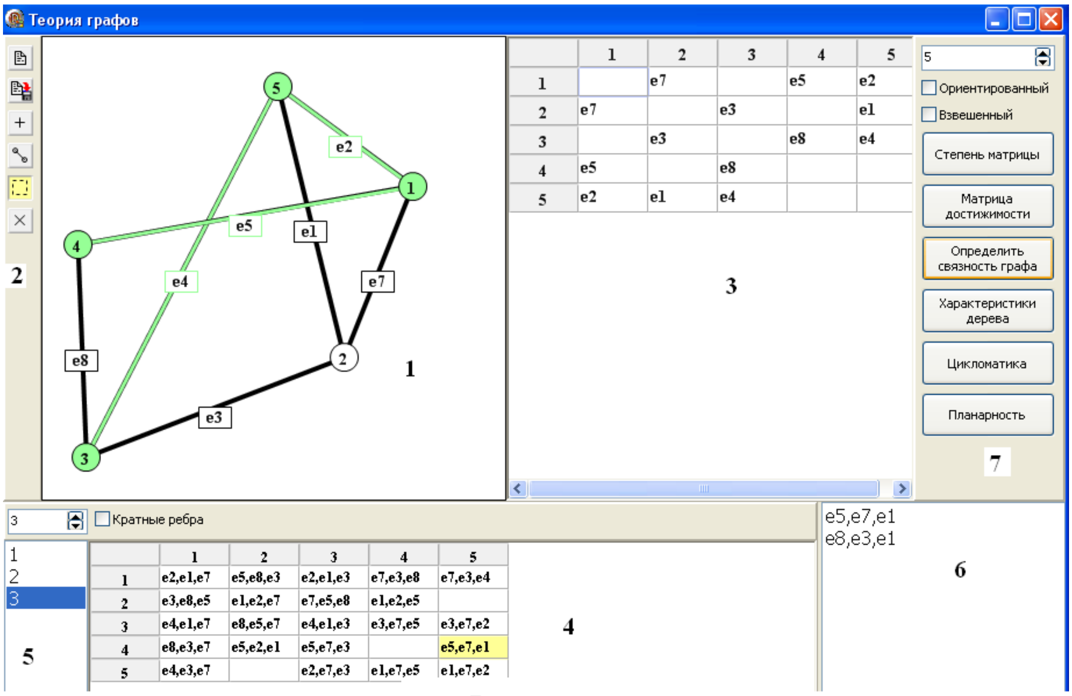


Рис. 111

Режим тренажера та контролю знань організовано аналогічно програмному модулю «Булеві функції».

Інтерфейс програми має вигляд (рис 111):

1 - поле зображення графа;

2 - панель інструментів побудови графа;

3 - поле зображення матриці суміжності графа;

4 - поле зображення степенів матриці суміжності графа;

5 - показник степеня матриці суміжності графа;

6 - поле зображення маршрутів відповідної клітинки певного степеня матриці суміжності;

7 - панель управління задачами для даного графа

Побудова графа

Для побудови графа використовуються наступні кнопки панелі інструментів:

 – загрузка графа з файлу;

 – збереження графа у файл;

 – зображення вершин у полі побудови графа;

 – зображення ребер графа;

 – виділення та переміщення вершин

 – видалення вершин або ребер

Крім того, кількість вершин орієнтованість та зваженість можна вказати на панелі задач (правий верхній кут). При цьому вершини автоматично розташуються по колу, а у випадку орієнтованого графа ребра зображуватимуться стрілками.

Створити ребро на графі можна записавши до відповідної клітини матриці суміжності одиницю або ідентифікатор ребра. Для зваженого графа в матрицю вводяться ваги ребер. Кратні ребра програмою не підтримуються.

Степінь матриці

Програма дозволяє обчислювати степені матриці суміжності, у клітинках якої визначаються шляхи відповідної довжини на графі. Так як матриця суміжності графа є нільпотентною, то, починаючи з деякого n, її степені дорівнюватимуть нулю. При виборі деякої клітинки степеня матриці суміжності в полі (6) (Рис.111) деталізації результатів виводяться усі маршрути між вершинами, що відповідають цій клітині. Активізація цих записів на графі зеленим кольором виділяє відповідний маршрут. Прапорець «Кратні ребра» визначає необхідність відображення маршрутів з ребрами, які повторюються. Вибір степеня (поле 5 (Рис.111)), до якого підноситься матриця, виконується на лівій панелі поля відображення результатів.

Матриця досяжності

Матриця досяжності отримується як сума степенів матриці суміжності. Вищий степінь у цій сумі дорівнює діаметру графа, і матриця досяжності має вигляд блочної матриці, де в блоках немає порожніх клітинок. У клітинках матриці досяжності виписуються усі шляхи, між відповідними двома вершинами на графі. Перегляд цих шляхів здійснюється за допомогою поля деталізації результатів. Разом з цим програма визначає компоненти зв'язності. При цьому вершини в графі досяжності будуть впорядковані згідно з компонентами зв'язності. Програма будує матрицю досяжності і за нею виділяє компоненти зв'язності. Обрана компонента зв'язності на графі виділяється зеленим кольором.

Характеристики дерева

Програма шляхом сортування вершин за типами виконує пошук центрів дерева й обчислює його радіус та діаметр (Рис.112).

Таким чином програма дає змогу визначати характеристики остовного дерева довільного графа.

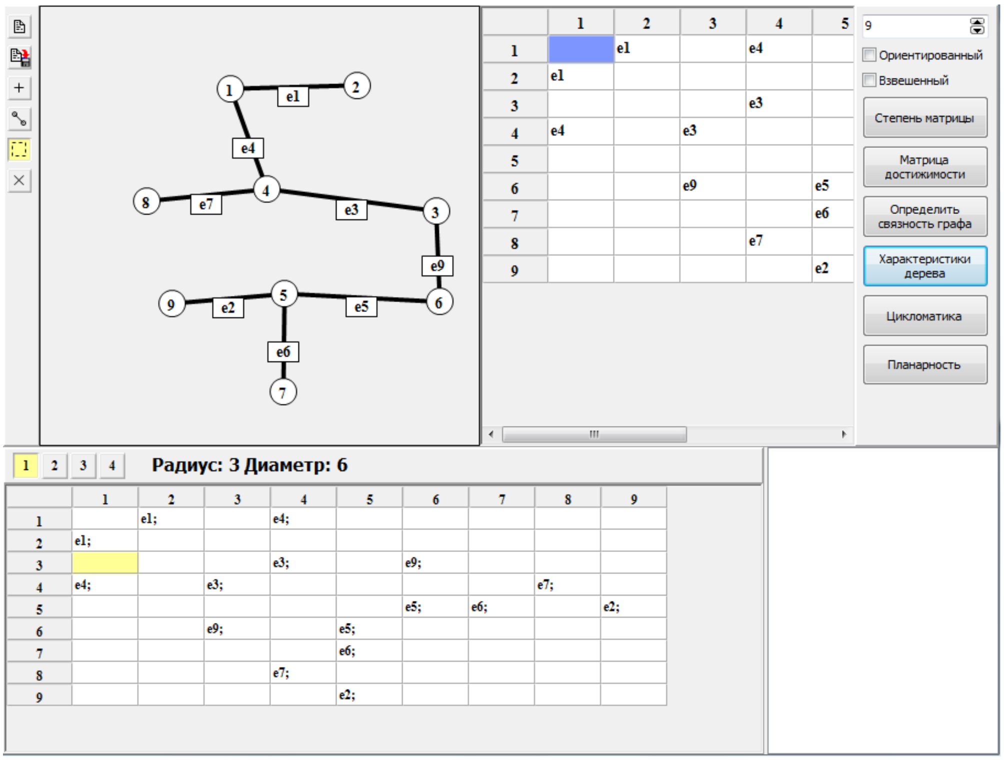


Рис. 112

Цикломатика графа.

Програма визначає цикломатичне число графа і за допомогою степенів матриці суміжності (починаючи з третього) визначає незалежні цикли, кількість яких дорівнює цикломатичному числу. Це і є один з базисів векторного простору циклів даного графа. Вони виносяться в так звану фундаментальну матрицю циклів, яка дозволяє, виконуючи операцію логічного додавання відповідних векторів-рядків цієї матриці, отримувати інші цикли даного графа (Рис.113). При цьому цикли на графі виділяються зеленим кольором. Програма дозволяє видаляти ребра-хорди з базисних циклів і таким чином отримувати остовне дерево графа (Рис.114).

Базис розрізів графа спряжений з базисом циклів отримується перебором ребер остовного графа в об'єднанні з множиною хорд. Програма дозволяє таким чином отримати базис розрізів. А за допомогою векторів-рядків матриці базисів розрізів будувати усі інші розрізи шляхом їхнього логічного додавання (Рис. 115).

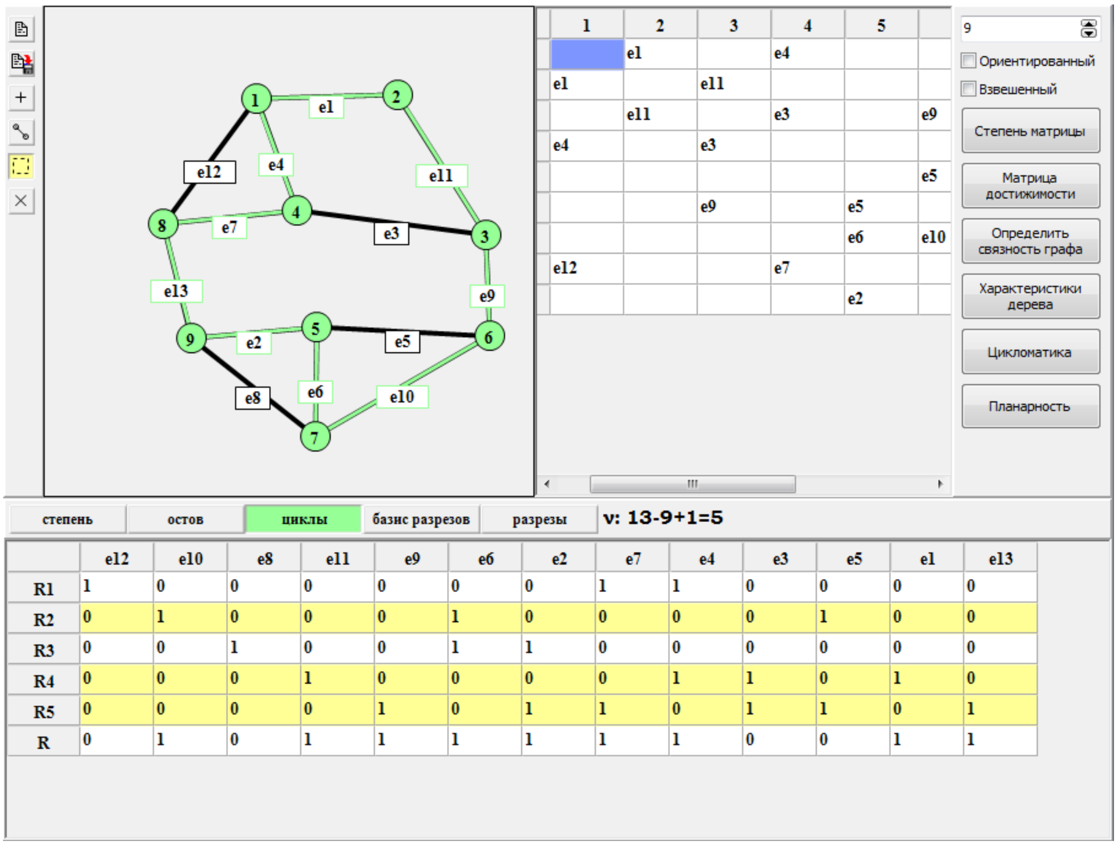
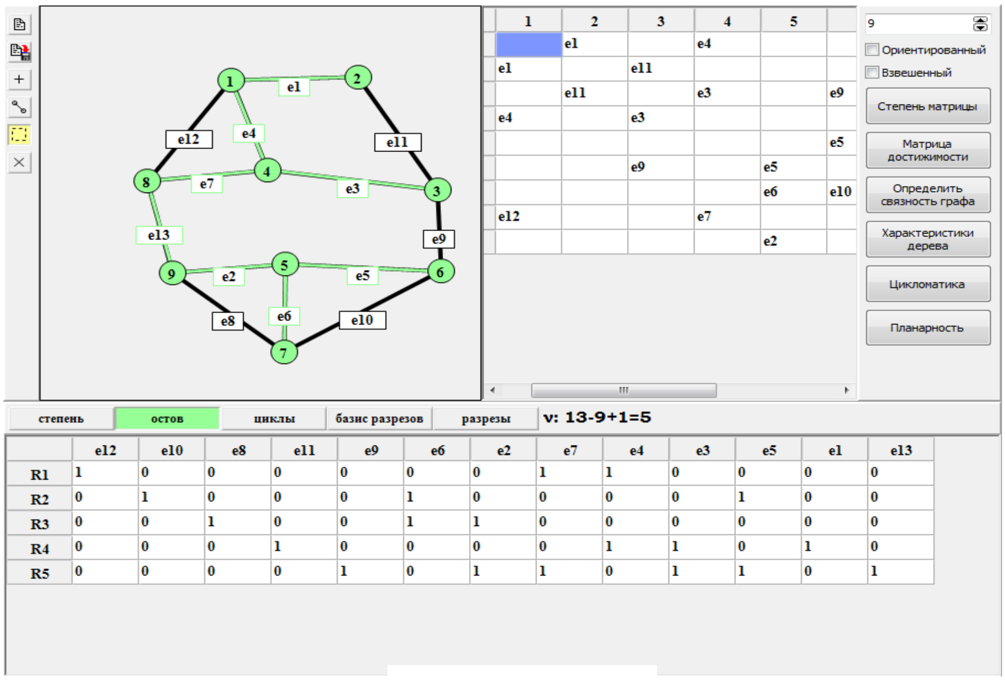


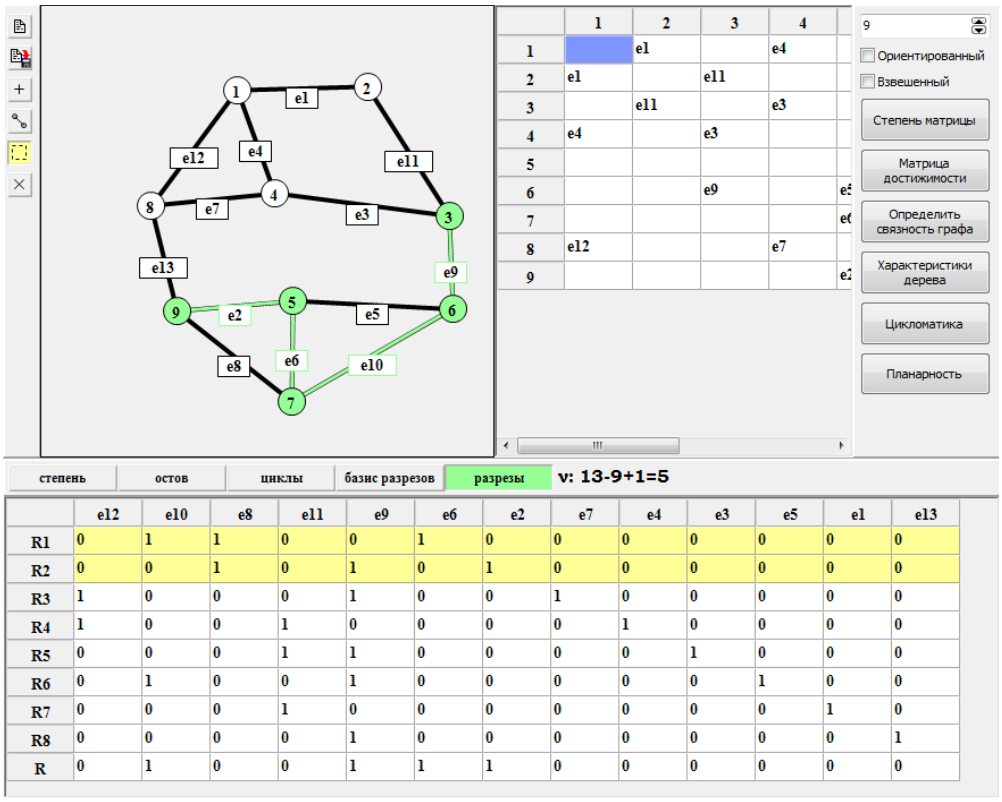
Рис. 113

Отримання остовного дерева на графі.



	e12	e10	e8	e11	e9	e6	e2	e7	e4	e3	e5	e1	e13
R1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
R2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
R3	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
R4	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
R5	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1

Рис. 114



	e12	e10	e8	e11	e9	e6	e2	e7	e4	e3	e5	e1	e13
R1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
R2	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
R3	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
R4	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
R5	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
R6	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
R7	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
R8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
R	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Рис. 115

Інтерфейс програми в режимі тренажера та контролю знань має вигляд:

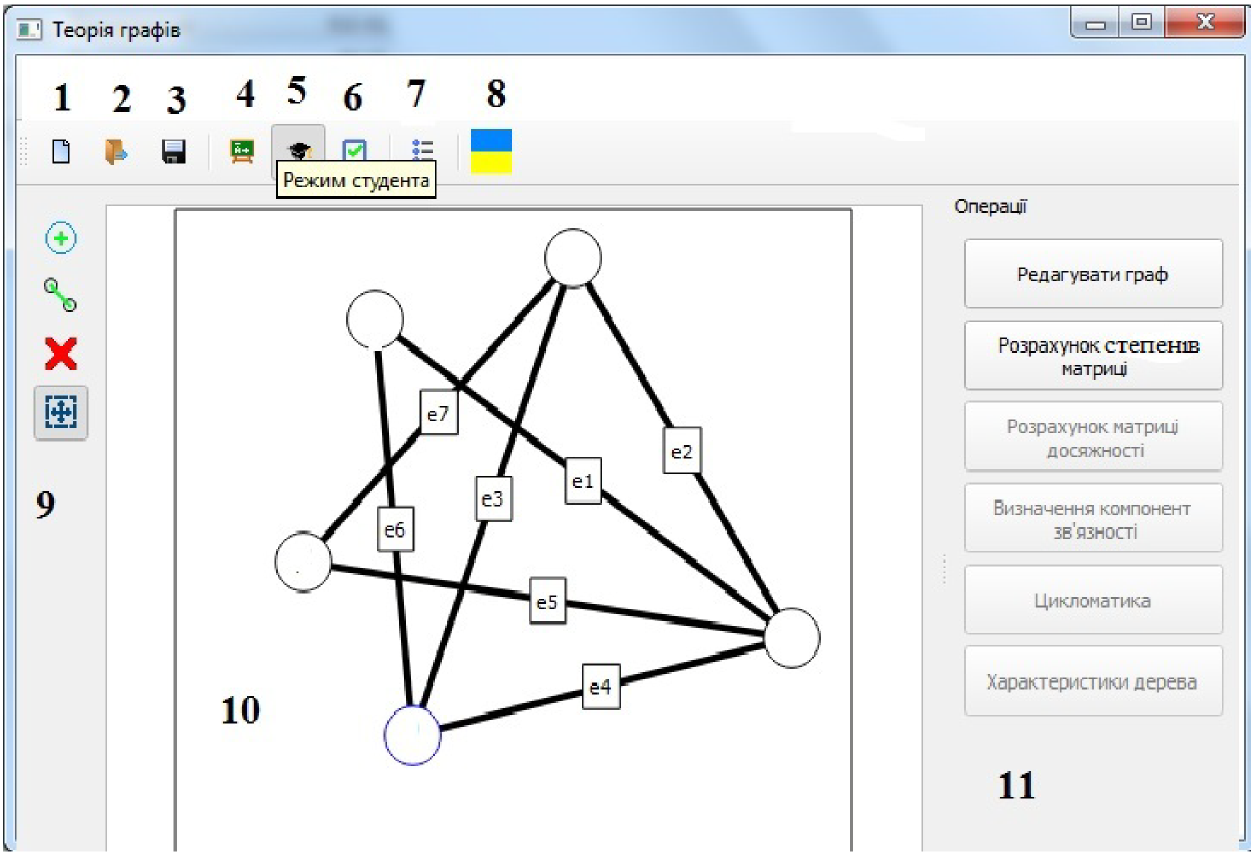


Рис. 116

1- команда введення нового графа;

2 - відкриття раніше збереженого файлу;

3 - збереження файлу;

4 - вибір режиму роботи викладача;

5 - вибір режиму тренажеру;

6 - вибір режиму контролю знань;

7 - виведення на екран статистики контролю й оцінки;

8 - вибір мови інтерфейсу (програма двомовна);

9 - інструменти побудови графа

10 - поле розміщення графа;

11 - кнопки команд на виконання задач, які передбачено в програмі.

В режимі тренажера, як і в програмі «Булеві функції», студент отримує серію запитань (Рис.117, 118, 119). Після правильної відповіді на поставлене питання він просувається до наступного етапу розв’язку задачі. Перша задача знаходження матриці суміжності та другого степеня (Рис.117, Рис.118). Друга задача (Рис. 119) полягає у дослідженні цикломатики графа.

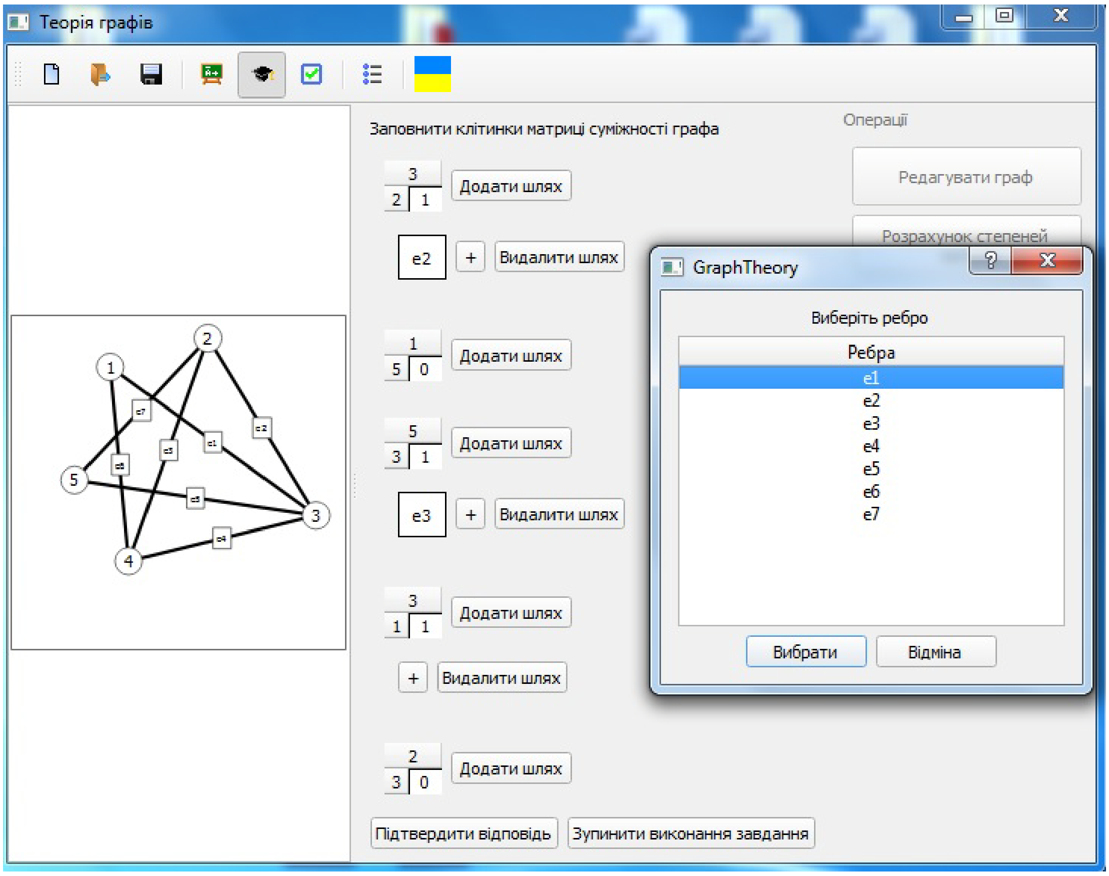


Рис. 117

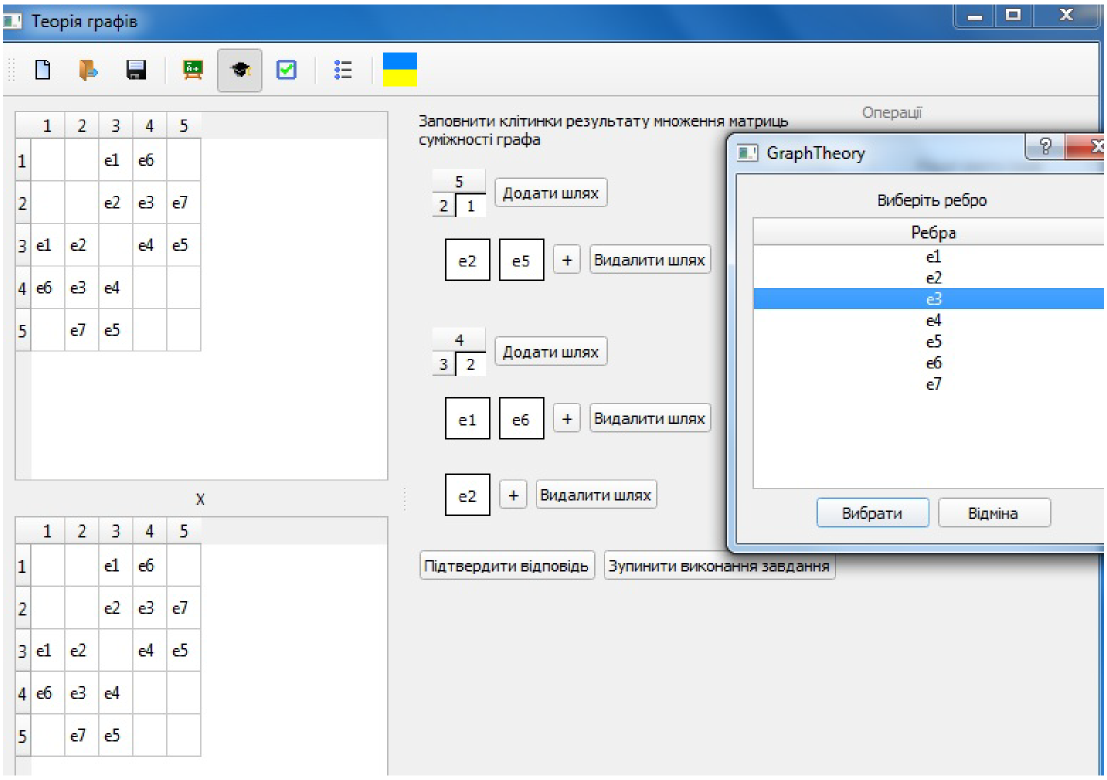


Рис. 118

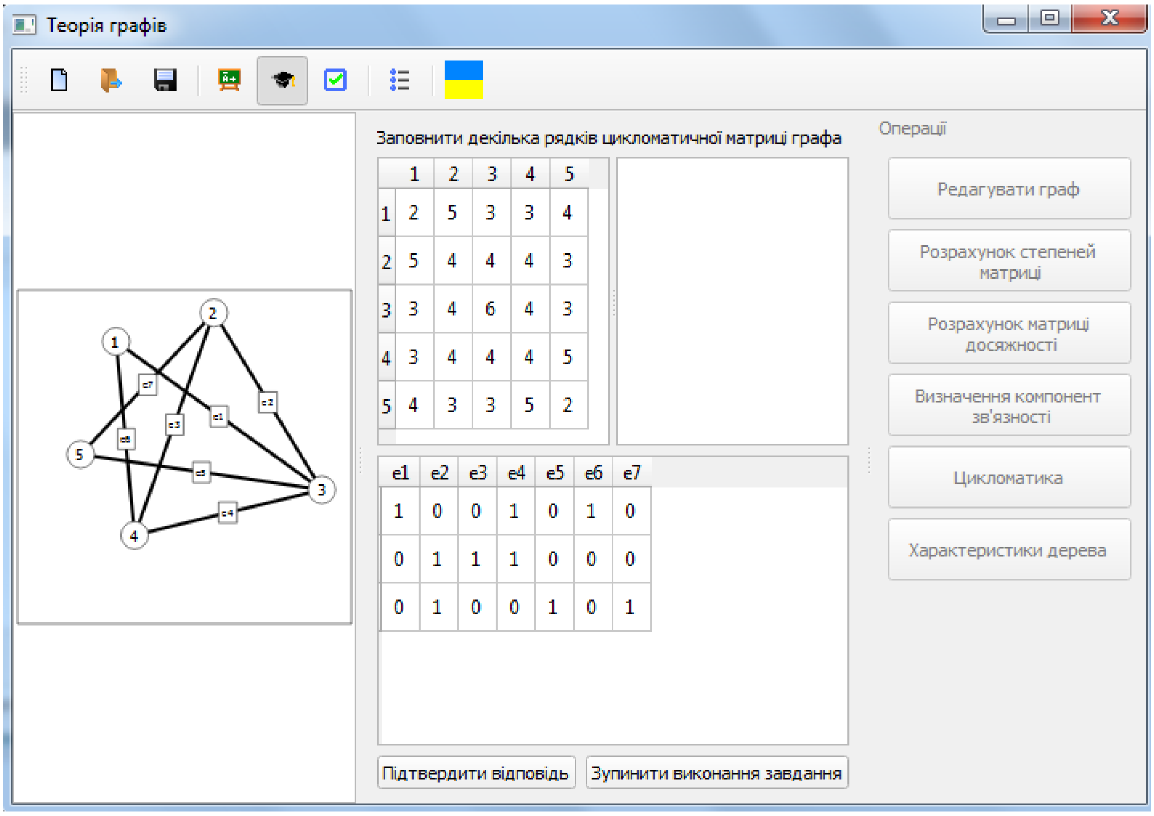


Рис. 119

Остання задача (Рис. 120) полягає у визначенні основних характеристик остовного дерева початкового графа.

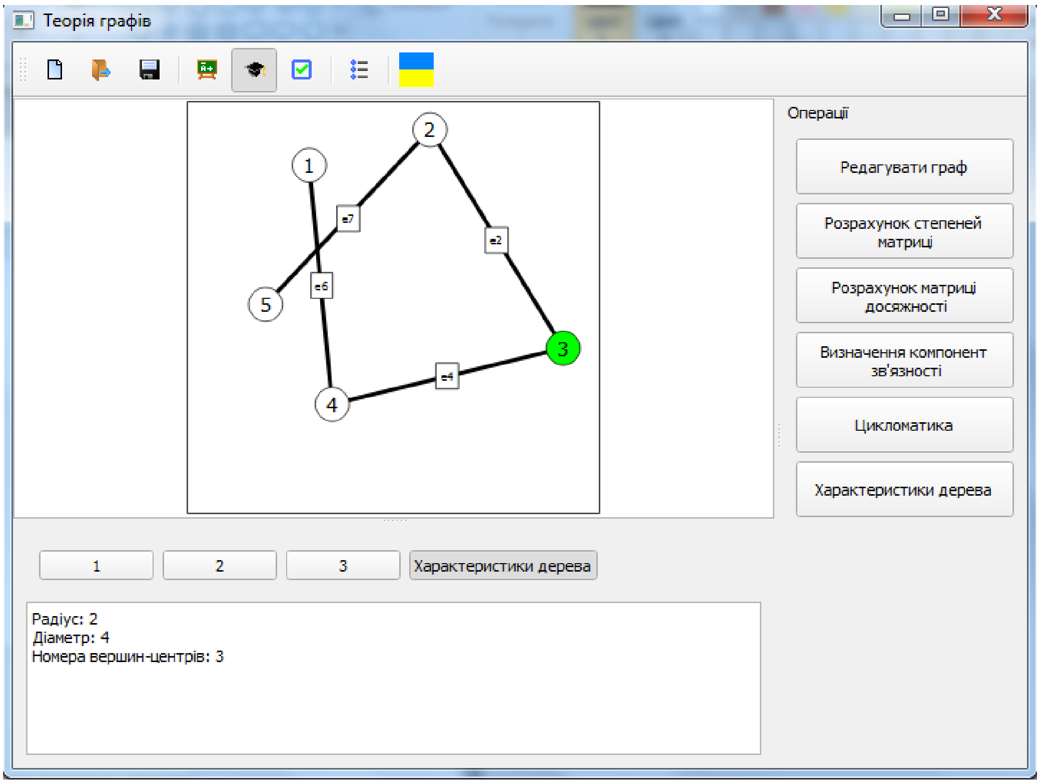


Рис. 120

У режимі контролю знань студент отримає статистичний звіт і оцінку своєї роботи (Рис. 121).

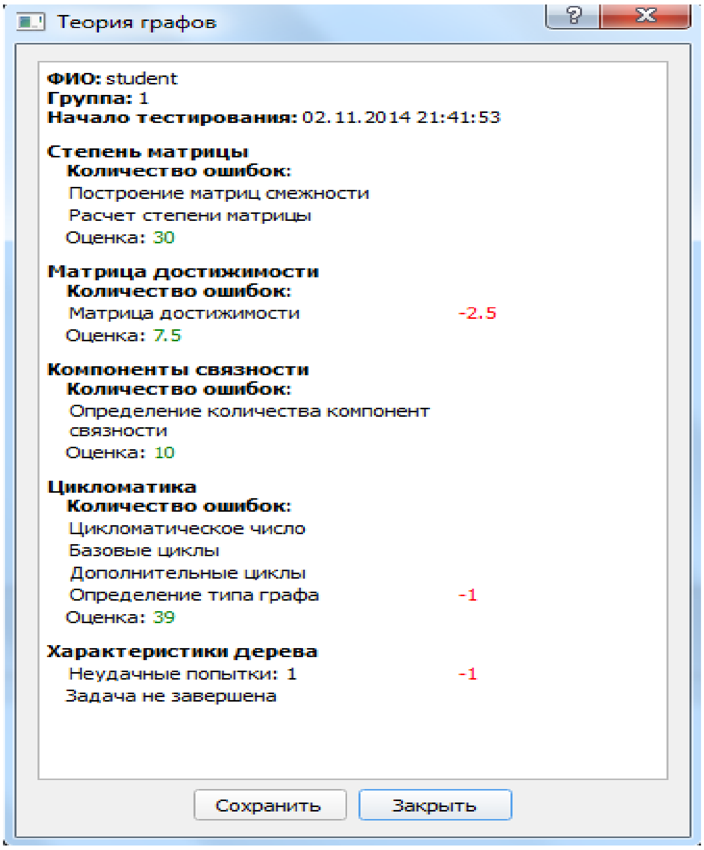


Рис. 121

Додаток 4

Конструювання безконтактних схем

Підвищення технологічних вимог до електроприводу, розширення його функцій приводять до зростання складності систем керування і збільшення кількості елементів автоматики.

Сучасний етап автоматизації характеризується переважним застосуванням регульованого електропривода з використанням силових напівпровідникових перетворювачів, а також аналогових і логічних інтегральних мікросхем у керуючих пристроях.

Незважаючи на різноманітність керуючих пристроїв можна сформулювати основні техніко-економічні вимоги до них:

- висока надійність та швидка дія;
- довговічність, стабільність параметрів у часі та у процесі експлуатації;
- захищеність від впливу навколишнього середовища та негативних дій з боку мережі живлення;
- стабільність роботи, уніфікованість, простота монтажу, налагодження, експлуатації, мінімальні габарити, маса, вартість.

Одним з найбільш поширених складових у схемах керування електроприводами є логічні елементи дискретної дії. На їхній основі будується логічна частина системи керування.

Проектування схем на логічних елементах можливо за двома напрямами:

- створення формули алгебри логіки, а потім схеми за технологічними умовами;
- перебудова релейно-контактних схем на схеми з логічними елементами.

Для розв’язання задачі проектування логічних схем необхідно застосування математичного апарату алгебри логіки, а саме: побудова булевої функції, представлення її у мінімальній формі, і, нарешті, метод синтезу схеми на логічних елементах, яка реалізує цю функцію.

Розглянемо приклад проектування безконтактних схем на логічних елементах. Усі релейно-контактні схеми будуються з різних композицій послідовних і паралельних з’єднань замикаючих і розмикаючих контактів, кола яких живлять катушки реле, контакторів, пускачів, електромагнітів, апаратів сигналізації.

При складанні алгебраїчної формули у відповідності до релейно-контактної схеми необхідно керуватись такими положеннями:

- послідовне зєднання контактів відповідає логічній операції «і», тобто кон’юнкції;
- паралельне – логічній операції «або», тобто диз’юнкції.

Замикаючий контакт позначаємо *A*, розмикаючий - $\overline{A}$, що відповідає операції заперечення.

Приклад. Пуск К4 можливий:

- якщо працює К1 або працює К3 при відключеному К2 та наявності дозволу від С;
- працює К2 або при відключеному К3 є дозвіл від D.

Формула, яка відповідає умовам пуску К4, має вигляд:

$$F = \left(\left(x_1 \vee x_3\right) \wedge \overline{x}_2 \wedge x_4 \vee x_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge x_5\right) \rightarrow x_6$$

Синтезувати логічну схему, що реалізує булеву функцію F.

Перш ніж застосовувати метод каскадів, дану логічну функцію, необхідно записати у диз’юнктивно-кон’юнктивній нормальній формі та мінімізувати це представлення. Після цього шляхом визначення максимальної ваги похідних виключити послідовно змінні, отримуючи блоки виключення для побудови схеми керування пуском К4. На рис. 122 наведено мінімальну нормальну форму представлення мулевої функції F та обчислено максимальну вагу, що дорівнює 10 для змінної x_6.

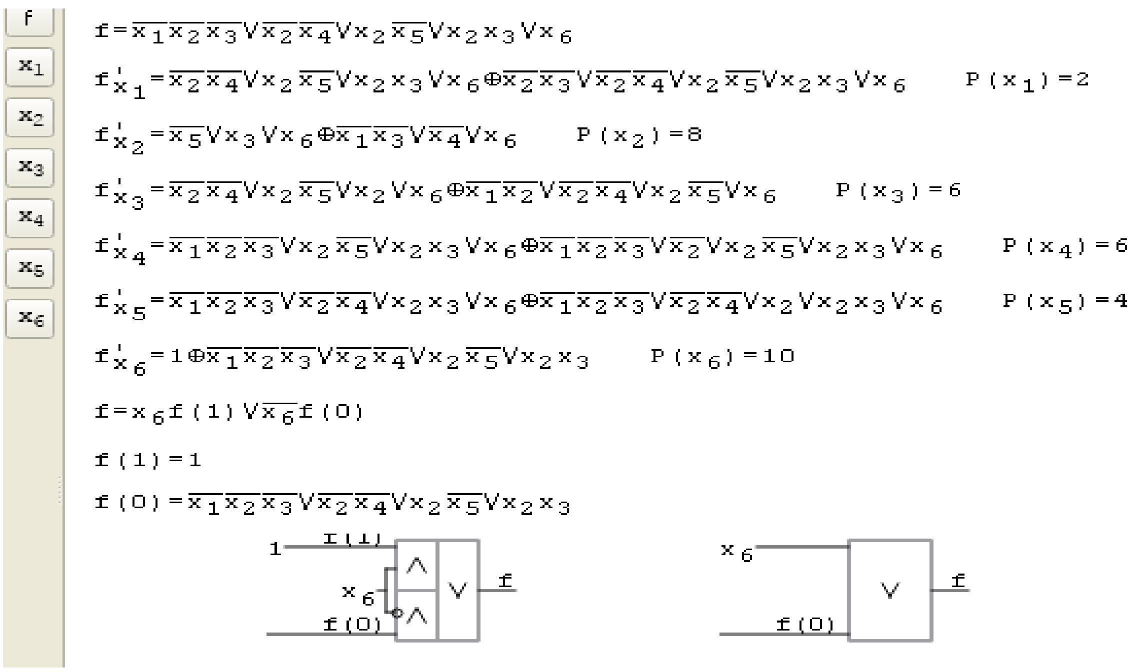


Рис. 122

Застосовуючи процедуру методу каскадів, отримаємо схему (Рис.123) керування запуском К4 одиничної функції.

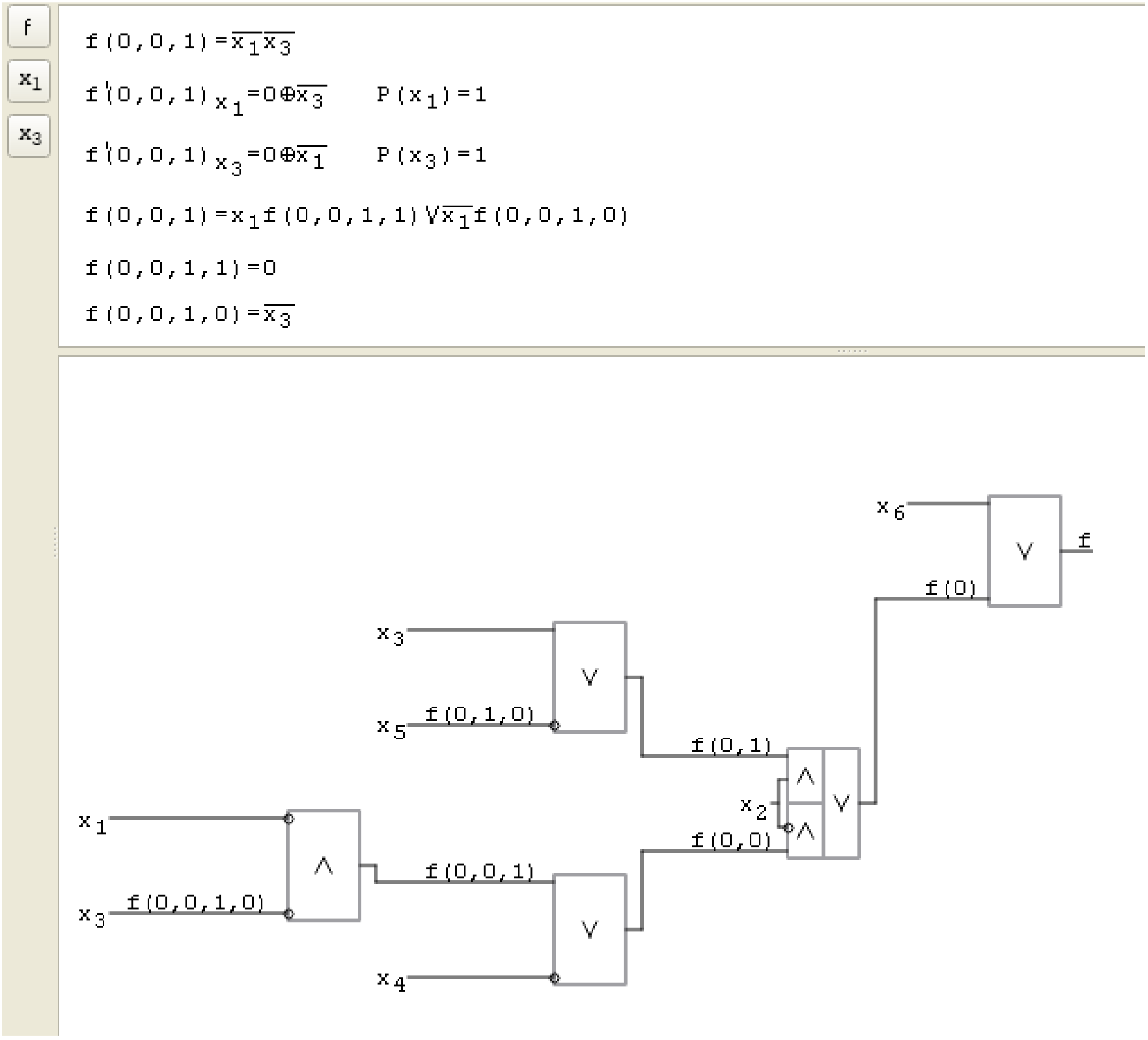


Рис. 123

Література

1. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. - М.: Наука, 1974. -319с.
2. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика – Харків.: „Компанія СМІТ", 2004. -479с.
3. Бордачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Є. Дискретна математика /підручник/. - К.:"Вища школа", 2002, - 287с.
4. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.:Наука, 1969. – 328с.
5. Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н.Конспект лекций по дискретной математике . –М.: Айрес-пресс, 2007. – 176с.
6. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. -М.: Высш. школа, 1986. - 311 с.
7. Кристофидес Н. Теория графов (Алгоритмический подход). –М.:Мир, 1978. – 432с.
8. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженеров. -М.: Энергия, 1980, -344с.
9. Куратовский К. , Мостовкский А.Теория множеств. -М.:Мир,1970.-416 с.
10. Лавров И.А., Сапоженко Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. -М.: Наука, 1975, - 240с.
11. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов /учебник/. – СПб: Питер, 2000. -304с.
12. Олійник Л.О., Крушельницький О.В. Розробка інтерактивних компонентів автоматизованої навчальної системи до курсу «Дискретна математика». - Міждержавна науково-методична конференція. Проблеми математичного моделювання. Тези доповідей. м.Дніпродзержинськ. 2012. с.170-171
13. Олійник Л.О., Крушельницький О.В. Інтерактивний експертно-тренувальний навчльний засіб «BoolFunctions».- Математичне моделювання. – 2013. – вип.1 (28). Дніпродзержинськ. ДДТУ. с 81- 84.
14.Оре О. Теория графов. -М.: Наука, 1982,-286с.
15. Попович М.Г. та ін. Електромеханічні системи автоматичного керування та електроприводи: Навч. посібник. -К.: Либідь, 2005. - 678 с.
16. Пухальский Г.И. Проектирование дискретных устройств на интегральных микросхемах: Справочник. – М.: Радио и связь, 1990. - 304 с.
17. Уилсон Р. Введение в теорию графов.-М.: Мир, 1977. - 205 с.
18. Холл М. Комбинаторика – М.:«Мир», 1970.- 424с.
19. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. -М.: Наука, 1979, - 266с.

Термінологічний словник

А
Адитивність 28
Алгебра 28
- булева 30
- висловлювань 34
- дистрибутивна 30
- Жегалкіна 71
- Кантора 31

Алгорит
- Дейкстри 180
- Краскла 149
- побудови дерева розрізів 192
- пошуку у глибину145
- пошуку у ширину 148
- Прима 151
- Фльорі 121
- Форда 189

Асоціативність 29

Б
База індукції 198
Базис
- Вебба 71
- Жегалкіна 71
- Шефера 71
- Пірса 71
- імплікативний 71

Біном Ньютона 86
Булеан 11
Бінарне відношення 21
- антисиметричне 24
- антирефлексивне 23
- еквівалентності 24
- порядку 25
- рефлексивне 23
- симетричне 23
- транзитивне 23

Булева функція 40
- залишкова 65
- зберігає одиницю 67
- зберігає нуль 67
- лінійна 67
- монотонна 68
- самодвоїста 68
- слабко визначена 61

В
Вага похідної 75
Вага ребра, вершини графа 103
Векторний простір циклів 124
Вершина графа 22,100
- ізольована 102
- підвішена 102

Віддалення максимальне 117
Відношення 16
- бінарне 21
- досяжності 178
- зв’язності 111
- інцидентності 101
- обернене 21
- порядку 25
- суміжності 101
- функціональне16

Відображення 17
- бієктивне 17
- ін'єктивне 17

- скрізь визначене 17
- сюр'єктивне 17
- частково визначене 17

Висловлювання 34
Виток 178

Г

Гіперкуб 50
Гіпотеза чотирьох фарб 177
Гомеоморфізм 158
Граничний розклад Шеннона 58
Грань графа 159
Гратка 30
Граф 22,100
- бінарного відношення 22
- біхроматичний 176
- двоїстий 170
- дводольний 122
- досяжності мережі 194
- гамільтоновий 122
- Ейлеровий 119
- загальний 101
- зважений 103
- зірчаний 102
- неорієнтований 101
- однорідний 103
- орієнтований 101
- планарний 158
- повний 102
- простий 101
- регулярний 103
- тотальний 180
- унікурсальний 118

Група 28
Групоїд 28
- адитивний 28
- ідемпотентний 28
- мультиплікативний 28

Д

Двійковий еквівалент 48
- булевої функції 49
- конституенти 48
- множини 13

Декартовий добуток 13
Дерево 124
- бінарне 136
- геніалогічне 137
- максимальне 142
- найкоротших шляхів 171
- розрізів 192
- остовне 124

Десятковий еквівалент 49
Діаграма Венна 33
Діаграма Хасе 25
Діаметр графа 117
Диз’юнктна точка 159
Диз’юнкція 35
Довжина маршрута 110
Доповнення 13
Додавання логічне 13
Дуга 101

Е

Еквівалентність 24

З

Задача
- комівояжера 132
- мінімізації 51
- про максимальний потік 189
- про мінімальне сполучення 149

- про найкоротші шляхи 181
- Закони
- асоціативності 29
- виключеного третього 36
- де Моргана 30
- дистрибутивності 29
- ідемпотентності 28
- комутативності 29
- контра позиції 37
- склеювання 31
- поглинання 35
- Порецького 31
- протиріччя 35
- силогізму 37
Заперечення 34
Зв'язність графа 111
- сильна 179
Згортка 91
І
Ізоморфізм
- алгебр 42
- графів 103
Імплікація 37
Імпліканта проста 53
Інверсія 13
Інтервал на гіперкубі 53
- максимальний 53
- обов'язковий 523
- нульовий 60
- одиничний 60
- інцидентність 101
К
Кільце 29
Коімплікація 41
Конституента 46
Контур 179
Кон'юнкція 35
Круги Ейлера 33
Л
Ланцюг 110
Лексіко-графічний порядок 26
Логічна операція 35
- диз'юнкція 35
- додавання 37
- додавання за модулем 38
- еквівалентність 37
- заперечення 35
- імплікація 37
- коімплікація 41
- кон'юнкція 35
- стрілка Пірса 38
- штрих Шефера 38
М
Мажоранта 26
Максимальний інтервал 53
Маршрут 110
Матриця
- блочна 114
- бінарного відношення 17
- досяжності 114
- інцидентності 104
- Кірхгофа 144
- розрізів 128
- суміжності 105
- фундаментальних циклів 126
- цикломатична 123
Межа
- верхня 26

- нижня 26	**О**
Мережа 188	Об'єднання 12
Метод	Область визначення 16
- виключень і включень 95	Область значень 16
- каскадів 75	Образ 16
- Квайна 51	Окіл вершини 193
- Петрика 55	Остов 125
- рекурентних співвідношень 88	Остов мінімальної ваги 149
- твірних функцій 89	**П**
- траєкторій 96	Паросполучення 174
Метрика на графі 116	Первинний терм 45
Метричний простір 116	Перестановка 83
Мінораnта 26	Перестановка з повторенням 84
Міст 116	Перетин 12
Множина 7	Підграф 101
- злічена 8	Підмножина 7
- лінійно впорядкована 25	Підстановка 18
- порожня 8	Повна система функцій 67
- частково впорядкована 25	Покриття таблиці Квайна 54
Мультиплікативність 28	Поле 29
Н	Поліном Жегалкіна 71
Напівгрупа 29	Порядок
- абелева 29	- строгий 25
- комутативна 29	- частковий 25
Нейтральний елемент 28	- лінійний 25
Неокіл вершини 192	- лексико-графічний 26
Нормальна форма 50	Потік у мережі 188
- мінімальна 51	Потужність 8
- досконала 53	- злічена 8
- скорочена 53	- континуум 8
- тупікова 53	Похідна булевої функції 72
- диз’юнктивно-кон’юнктивна 57	Принцип двоїстості 27
- кон’юнктивно- диз’юнктивна 57	Принцип математичної індукції 198
Носій алгебри 28	Проекція вектора 16

Прообраз 16
Р
Радіус графа 117
Ранг розрізу 129
Рефлексивність 23
Род графа 158
Розміщення 84
Розріз 116
Ряд числовий 89
Ряд степеневий 90
С
Сигнатура алгебри 28
Симетрична різниця множин 12
Складність представлення 50
Сполучення 81
Сполучення з повторенням 85
Степінь вершини графа 102
Стійкість 173
Сток 178
Стрілка Пірса 39
Структура 39
Т
Таблиця
- істинності 35
- Квайна 54
- розходжень 62
- Поста 70

Теорема
- Брукса 176
- Дірака 123
- Келі 142
- Кеніга 176
- Менгера 115
- Оре 123
- Стоуна 42
- Шеннона 58
- Понтрягіна 161
- Поста 68
- Холла 175
- Уїтні 171

Товща графа 160
Тіло 29
У
Універсум 11
Ф
Фіктивна змінна 41
Х
Хорда 125
Хроматичне число графа 176
Ц
Центр графа 117
Цикл 111
Цикломатична матриця 123
Цикломатичне число 125
Ш
Шлях178
Штрих Шефера 38
Я
Ядро покриття 54

ЗМІСТ

Вступ………………………………………………………… 3
Список позначень……………………………………………… 5
Розділ І. Множини. Відображення множин. Відношення….. 7
§ 1. Множини. Операції над множинами…………………. 7
1.1 Поняття множини…………………………………….. 7
1.2 Нескінчені множини………………………………….. 9
1.3 Способи визначення множин………………………… 10
1.4 Булеан…………………………………………………… 11
1.5 Двійкове представлення множин…………………… 11
1.6 Операції над множинами……………………………... 12
§2. Декартовий добуток. Відображення множин………… 14
2.1 Декартовий добуток…………………………………... 14
2.2 Відношення. Відображення множин………………… 16
2.3 Функції…………………………………………………… 19
§ 3. Бінарні відношення. Еквівалентність. Порядок……… 21
3.1 Бінарні відношення…………………………………… 21
3.2 Способи представлення бінарних відношень………. 22
3.3 Властивості відношень……………………………….. 23
3.4 Еквівалентність, порядок. Діаграми Хасе………….. 24
3.5 Властивості впорядкованих множин……………….. 26
Розділ ІІ. Булева алгебра……………………………………… 28
§ 4. Алгебри. Структури. Булеві алгебри…………………. 28
4.1 Алгебраїчні структури ……………………………… 28
4.2 Гратки або структури………………………………… 30
§ 5. Алгебра Кантора………………………………………. 31
§ 6. Алгебра висловлювань……………………………….. 34
6.1 Операцій над висловлюваннями…………………….. 35
6.2 Булеві функції. Булеві функції двох змінних……… 40
6.3 Ізоморфізм алгебр. Теорема Стоуна……………….. 42
Розділ ІІІ. Представлення елементів булевої алгебри.
Мінімізація представлення……………………….. 45
§ 7. Нормальна форма представлення елементів булевої
алгебри……………………………………………….. 45
7.1 Конституенти та їхні властивості…………………… 45
7.2 Нормальна форма представлення елементів булевої
алгебри ……………………………………………… 47

§ 8. Мінімізація представлення елемента булевої алгебри.
Метод Квайна ………………………………………… 50
8.1 Мінімальна нормальна форма……………………. 50
8.2 Метод Квайна……………………………………… 51
8.3 Метод Петрика знаходження усіх мінімальних форм представлення елемента булевої алгебри……………………… 55
§ 9. Реалізації представлень в алгебрі Кантора та алгебрі
висловлювань….. 56
9.1 Алгебра Кантора…………………………………… 57
9.2 Булева алгебра висловлювань……………………….. 58
9.3 Слабко визначені булеві функції та їх мінімізація… 61
§ 10. Властивості булевих функцій………………………… 67
10.1 Повнота систем булевих функцій………………….. 67
10.2 Алгебра Жегалкіна……………………………….. 71
10.3 Синтез логічних схем…………………………….. 74
Розділ IV. Елементи комбінаторики…………………………. 79
§ 11 Основне правило комбінаторики………………….. 79
11.1 Приклади комбінаторних задач………………….. 79
§ 12 Сполучення. Перестановки. Розміщення…………….. 80
12.1 Сполучення……………………………………….. 80
12.2 Перестановки та розміщення……………………. 83
12.3 Перестановки з повтореннями……………………… 84
12.4 Сполучення з повтореннями…………………….. 85
§ 13 Біном Ньютона. Поліноміальна формула……………. 86
13.1 Біном Ньютона……………………………………. 86
§ 14 Методи розв’язання комбінаторних задач…………… 88
14.1 Метод рекурентних співвідношень………………… 88
14.2 Метод твірних функцій………………………….. 89
14.3 Метод включень і виключень……………………. 95
14.4 Метод траєкторій………………………………… 96
Розділ V. Елементи теорії графів……………………………. 100
§ 15. Поняття графа, основні означення Матричне
представлення графів…………………………………. 100
15.1 Означення основних понять…………………….. 100
15.2 Ізоморфізм графів……………………………….... 103
15.3 Представлення графів матрицями………………… 104
15.4 Степені вершин графа…………………………… 105
15.5 Дії над графами………………………………… 107

§ 16. Маршрути, ланцюги та цикли. Зв'язність. Метрика .. 109
16.1 Маршрути, ланцюги та цикли………………….. … 109
16.2 Зв'язність………………………………………. 111
16.3 Теорема Менгера. Розріз……………………… 114
16.4 Метрика………………………………………… 116
§ 17. Ейлерові та гамільтонові графи. Цикломатика графа. 118
17.1 Розбиття ребер. Ейлерові графи………………. 118
17.2 Гамільтонові графи…………………………….. 122
17.3 Цикломатика…………………………………… 123
17.4 Алгоритм визначення базисної цикломатичної матриці ………………………………………….. 126
17.5 Алгоритм пошуку гамільтонового шляху, циклу…. 128
17.6 Матриця розрізів. Базисна матриця розрізів……… 128
17.7 Алгоритм побудови базисної матриці розрізів спряженої з базисною системою циклів………... … 130
§ 18. Задача комівояжера…………………………… 132
18.1 Задача комівояжера……………………………. 132
18.2 Матричний метод відшукання гамільтонова ланцюга або циклу мінімальної ваги…………….. 132
§19. Дерева. Властивості дерев……………………. 135
19.1 Дерева…………………………………………. 135
19.2 Орієнтовані дерева…………………………….. 137
19.3 Властивості дерев. ……………………………. 139
19.4 Характеристики вершин графа……………….. 139
19.5 Перелічення дерев……………………………… 141
19.6 Матриця Кірхгофа. Максимальне дерево. Остов…………………………………………. 142
19.7 Алгоритми побудови остовного дерева……………. 145
19.8 Задача про мінімальне сполучення або остов мінімальної ваги…………………………….. 149
§ 20. Планарні графи……………………………………... 158
20.1 Топологічні властивості графів……………………. 158
20.2 Критерій Понтрягіна-Куратовського планарності графа……………………………………………… 159
20.3 Алгоритм матричного методу визначення планарності графа………………………………… 162
20.4 Двоїсті графи. Критерій Уітні………………….. 170
§ 21. Стійкість. Паросполучення. Розфарбування графів… 173

21.1 Стійкість. Паросполучення…………………………. 173
21.2 Розфарбування графів. Проблема чотирьох фарб… 175
§ 22. Орієнтовані графи……………………………….. 178
22.1 Основні означення……………………………….. 178
22.2. Сильна зв'язність. ………………………………. 179
22.3 Задача про найкоротші шляхи. ………………… 181
22.4 Мережі. Потоки в мережах…………………………. 187
22.5 Задача про максимальний потік у мережі…………. 189
Додаток 1. Метод математичної індукції……………………. 198
Додаток 2. Тестові завдання до курсу «Дискретна математика»…………………………………….. 200
Тестові завдання для визначення рівня засвоєння теоретичних знань…………………………………….. 200
Тестові завдання для визначення рівня засвоєння практичних навичок….. 210
Додаток 3 Програмне забезпечення для курсу «Дискретна математика»…………………………………….. 225
Додаток 4 Конструювання безконтактних схем…………….. 243
Література…………………………………………………… 246
Термінологічний словник …………………………………….. 247
Зміст ………………………………………………………… 252

Н а в ч а л ь н е   в и д а н н я

Леонід Олексійович Олійник

Дискретна математика

Навчальний посібник

Підписано до друку

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до державного реєстру видавництв серія ДК №1944

Друкарня
51918, Дніпродзержинськ
ДДТу,вул.Дніпробудівська, 2
2015