Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Технічний коледж

***Л. К. Осадча***

# Лінійна алгебра та аналітична геометрія

***Навчальний посібник***

Рівне – 2020

УДК 512.64+514.12(075.8)
О-52

**Рецензенти:**

***Кухоцька Л. А.***, старший викладач, викладач вищої категорії Технічного коледжу НУВГП;

***Крайчук О. В.***, кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Рівненського державного гуманітарного університету.

*Рекомендовано методичною радою Технічного коледжу Національного університету водного господарства та природокористування.*
*Протокол № 6 від 31.01.2020 року.*

***Осадча Л. К.***
**О-52** Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посібник. – Рівне : НУВГП, 2020. – 205 с.
**ISBN 978-966-327-448-5**

Навчальний посібник «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» містить типову програму, методичні рекомендації до вивчення тем, контрольні вправи, перелік тем практичних занять із зразками завдань самостійної та індивідуальної роботи, засоби діагностики знань, питання самоконтролю, список рекомендованої літератури. Навчальний посібник може бути корисним при самостійному вивченні дисципліни в умовах кредитно-трансферної системи організації навчального процесу студентам вищих навчальних закладів І-ІІ рівня акредитації для спеціальності 113 «Прикладна математика»

**УДК 512.64+514.12(075.8)**

**ISBN 978-966-327-448-5**

## Передмова

Навчальний посібник охоплює передбачені типовою робочою програмою розділи курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» для студентів спеціальності «Прикладна математика» вищих навчальних закладів І-ІІ рівня акредитації.

Теоретичний матеріал проілюстрований достатньою кількістю прикладів і задач.

При написанні посібника матеріал підібрано і подано так, щоб, по можливості, полегшити подальше застосування математики у професійних дисциплінах і вирішенні інженерних задач. Зокрема, не скрізь і не завжди дотримані повнота формулювання і доведень теорем, оскільки в питаннях застосування математики ця формальна повнота не допомагає справі і нею, як правило, ігнорують, роблячи акцент на розкритті змісту основних математичних понять і можливості їх практичного застосування. З цією метою скрізь, де це можливо, теоретичні положення проілюстровані прикладами і рисунками.

Зразки типових завдань для практичних занять, самостійних робіт, модульних контрольних робіт, питання самоконтролю, тематика індивідуальних завдань, додатки стимулюватимуть самостійну роботу студентів і є корисними при вивченні лінійної алгебри та аналітичної геометрії в умовах кредитно-трансферної системи організації навчального процесу.

# І. Типова програма навчальної дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія»

1. Характеристика предмета навчальної дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія»

<table>
<tr><th>Курс підготовки: молодший спеціаліст</th><th>Галузь знань, спеціальність, освітньо-кваліфікаційний рівень</th><th>Характеристика навчальної дисципліни</th></tr>
<tr><td>Кількість кредитів, відповідних ECTS – 3</td><td>0403 Системні науки та кібернетика</td><td>Обов’язкова, нормативна</td></tr>
<tr><td>Модулів – 3</td><td rowspan="3">Спеціальність: 113 «Прикладна математика»</td><td rowspan="2">Рік підготовки: 3-й семестр, ІІ-ий курс.<br>Лекцій – 30 год.<br>Практичних – 30 год.</td></tr>
<tr><td>Змістових модулів – 2</td></tr>
<tr><td>Загальна кількість годин: 90</td><td>Самостійна робота – 30 год.</td></tr>
<tr><td>Тижневих годин: аудиторних – 4 год<br>СРС – 2,5 год</td><td>Освітньо-кваліфікаційний рівень: молодший спеціаліст</td><td>Вид контролю: екзамен<br>2 модульні контрольні роботи</td></tr>
</table>

# 2. ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

| № зан | Назва теми та її зміст | К-ть год | З них | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | лекц. | практ. | Сам. роб. |
| *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* |
| **ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ 1. ЛІНІЙНА, ВЕКТОРНА АЛГЕБРА** | | | | | |
| *1.* | **Тема 1.** Матриці, їх види. Основні операції над матрицями. Властивості | 3 | 2 | | 1 |
| *2.* | **Тема 2.** Визначники квадратних матриць, їх властивості. Способи обчислення визначників. Елементарні перетворення над матрицями. | 3 | 2 | | 1 |
| *3.* | *Практичне заняття № 1.* Обчислення визначників. Операції над матрицями. | 3 | | 2 | 1 |
| *4.* | **Тема 3.** Мінори та алгебраїчні доповнення до елементів матриці.Обернена матриця. Ранг матриці. | 3 | 2 | | 1 |
| 5. | *Практичне заняття № 2.* Обчислення оберненої матриці, рангу матриці. | 3 | | 2 | 1 |
| 6. | **Тема 4.** Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Матричний метод, формули Крамера. | 3 | 2 | | 1 |
| 7 | **Тема 5.** Метод Гаусса розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь. | 3 | 2 | | 1 |
| 8 | *Практичне заняття № 3.* Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. | 3 | | 2 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | **Тема 6.** Вектори. Лінійні операції над векторами. Лінійно залежні, лінійно незалежні вектор. Базис векторного простору. | 3 | 2 | | 1 |
| 10 | **Тема 7.** Координати вектора. n - вимірний векторний простір. Дії над векторами в координатній формі. Поділ відрізка в даному відношенні. Проекція вектора на вісь. | 3 | 2 | | 1 |
| 11 | *Практичне заняття № 4.* Дії над векторами. Лінійно залежні, лінійно незалежні вектори. Поділ відрізка. | 3 | | 2 | 1 |
| 12 | **Тема 8.** Скалярний, векторний, мішаний добутки векторів. Властивості застосування. | 3 | 2 | | 1 |
| 13 | *Практичне заняття № 5.*Застосування скалярного, векторного, мішаного добутків векторів. | 3 | | 2 | 1 |
| 14 | **Тема 9.** Лінійний простір та його властивості. Вимірність та базис лінійного простору. n-вимірний арифметичний простір. | 3 | 2 | | 1 |
| 15 | **Тема 10.** Лінійні оператори. Матриця лінійного оператора. Дії над лінійними операторами. | 3 | 2 | | 1 |
| 16 | *Практичне заняття № 6.* Дії над лінійними операторами. Базис лінійного простору. | 3 | | 2 | 1 |
| 17 | **Практичне заняття. Модульна контрольна робота № 1** | 2 | | 2 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ** | | | | | |
| 18 | **Тема 1.** Рівняння прямої на площині. Взаємне розміщення прямих на площині. Відстань від точки до прямої | 3 | 2 | | 1 |
| 19 | *Практичне заняття № 1.* Рівняння прямої на площині. Перетин прямих. Кут між прямими. | 3 | | 2 | 1 |
| 20 | **Тема 2.** Лінії другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола. | 3 | 2 | | 1 |
| 21 | *Практичне заняття № 2.* Коло, еліпс. | 3 | | 2 | 1 |
| 22 | *Практичне заняття № 3.* Гіпербола, парабола. | 3 | | 2 | 1 |
| 23 | **Тема 3.** Рівняння площини в просторі. Взаємне розміщення площин. Кут між площинами. Відстань від точки до площини. | 3 | 2 | | 1 |
| 24 | *Практичне заняття № 4.* Рівняння площини. Кут між площинами. Відстань від точки до площини. Умови паралельності і перпендикулярності площин. | 3 | | 2 | 1 |
| 25 | **Тема 4.** Рівняння прямої в просторі. Кут між двома прямими. Взаємне розміщення прямих, прямої і площини в просторі. | 3 | 2 | | 1 |
| 26 | *Практичне заняття № 5.* Рівняння прямої в просторі. Взаємне розміщення прямих, прямої і площини. | 3 | | 2 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 27 | **Тема 5.** Поверхні другого порядку, їх канонічні рівняння: поверхні обертання, циліндричні поверхні | 3 | 2 | | 1 |
| 28 | *Практичне заняття № 6.* Поверхні другого порядку. | 4 | | 2 | 2 |
| 29 | **Тема 6.** Семінарське заняття. Криві і поверхні у природі і техніці. | 4 | | 2 | 2 |
| 30 | *Практичне заняття.* **Модульна контроль робота № 2** | 2 | | 2 | |
| | ***Всього:*** | **90** | 30 | 30 | 30 |

## ІІ. РОЗПОДІЛ БАЛІВ, ЩО ПРИСВОЮЮТЬСЯ СТУДЕНТАМ

<table>
<tr><th colspan="2">Змістовий модуль 1</th><th colspan="2">Змістовий модуль 2</th><th>Екзамен</th><th>Загальна кіль-кість балів</th></tr>
<tr><td colspan="2">30</td><td colspan="2">30</td><td rowspan="3">40</td><td rowspan="3">100</td></tr>
<tr><td>Т. 1-9</td><td>МКР</td><td>Т. 1-6</td><td>МКР</td></tr>
<tr><td>25</td><td>5</td><td>25</td><td>5</td></tr>
</table>

## ІІІ. ШКАЛА ОЦІНЮВАННЯ В КМСОНП ТА ECTS

| **Сума балів** | **Національна шкала** |
|---|---|
| 90-100 | відмінно |
| 74-89 | добре |
| 60-73 | задовільно |
| 1-59 | незадовільно |

## II. Методичні рекомендації до вивчення модулів та тем дисципліни

## *ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1* *«ЛІНІЙНА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА»*

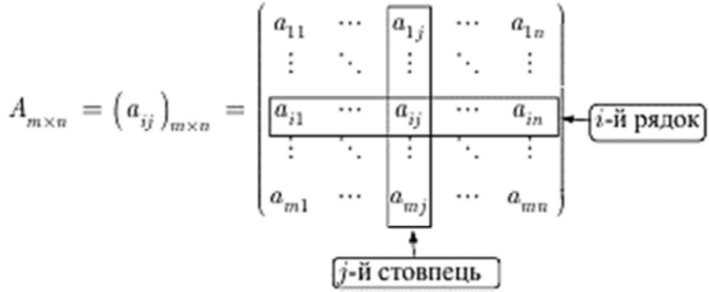
## ТЕМА 1. Матриці. Основні операції над матрицями. Властивості

### *1.1. Матриці, їх види*

***Означення.*** Матрицею А розміром *mxn* називають прямокутну таблицю чисел (елементів матриці)

$$a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n},$$

розташованих у *m* рядках та *n* стовпцях, і позначають




Елемент $a_{ij}$ матриці розташовано в $i$ -му рядку і $j$ -му стовпці. Матрицю розміром 1x1, яка містить один елемент, ототожнюють з цим елементом.

**Види матриць**

**1.** Матрицю розміром *mxn*, усі елементи якої дорівнюють нулю, називають ***нульовою матрицею*** і позначають $O_{m\times n}$.

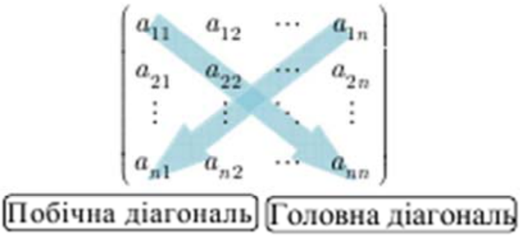



Рис. 1.1

**2.** Якщо $m = n$, то матрицю $A$ називають ***квадратною матрицею порядку n.*** Набір елементів $a_{11}$, $a_{22}$, …, $a_{nn}$утворює *головну діагональ*, а набір $a_{1n}$, $a_{2n-1}$, …, $a_{n1}$ — *побічну діагональ* (рис. 1.1).

**3.** Квадратну матрицю, всі елементи якої нижче (вище) від головної діагоналі дорівнюють нулю, називають *верхньою (нижньою) трикутною матрицею* (рис. 1.2).

**4.** Квадратну матрицю, всі елементи якої, крім, можливо, елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називають *діагональною матрицею* (рис. 1.3).

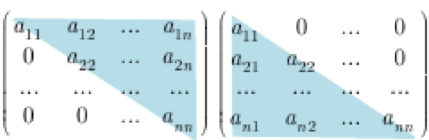


Рис. 1.2

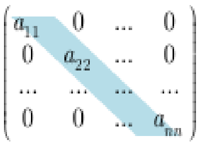


Рис. 1.3

**5.** Діагональну матрицю порядку $n$, усі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, називають *одиничною матрицею* і позначають $E_n$.

Приміром,

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**6.** Матрицю розміром $1 \times n$ називають *матрицею-рядком (рядком)* завдовжки $n$.

**7.** Матрицю розміром $m \times 1$ називають *матрицею-стовпцем (стовпцем)* заввишки $m$.

***8.*** Матрицю розміром $n \times m$, яку одержують з матриці А розміром $m \times n$ транспонуванням стовпців (рядків), називають *транспонованою матрицею* до $A$ і позначають $A^T$.

### *1.2. Основні операції над матрицями*

Розглянемо матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$та $B = (b_{ij})_{m \times n}$ ,

***Означення 1.*** Матриці $A$ та $B$ називають *рівними*, якщо вони однакового розміру і мають рівні відповідні елементи, тобто $A = B \overset{def}{\Leftrightarrow} a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$

***Означення 2.*** Сумою матриць $A$ та $B$ розміром $m \times n$, називають *матрицю* $A+B$ *розміром* $m \times n$, кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць-доданків, тобто

$$\boxed{A + B \overset{\text{def}}{=} \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m \cdot n}}$$

Під різницею матриць $A$ та $B$ однакового розміру розуміють матрицю

$$A - B \overset{\text{def}}{=} A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})_{m \cdot n}$$

***Означення 3.*** *Добутком матриціA* розміром $m \times n$ на дійсне число α називають матрицю $\alpha\ A$ розміром $m \times n$, кожен елемент якої дорівнює добуткові відповідного елемента матриці $A$ на число α , тобто

$$\alpha\ A^{def} = \left(\alpha a_{ij}\right)_{m \cdot n}$$

Під різницею матриць $A$ та $B$ однакового розміру розуміють матрицю

$$A - B \overset{\text{def}}{=} A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})_{m \cdot n}$$

де матриця $(-B) = (-1)B$— протилежна для $B$ матриця.

Під лінійною комбінацією матриць однакового розміру $A$ та $B$ з коефіцієнтами $\alpha$ та $\beta$ розуміють матрицю $\alpha A + \beta B$.

♦ **Приклад 1**

Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ та } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

знайти матриці: *A + B, 2A, A -B.*

Матриці A та B мають однакові розміри 2 × 3. Отже, їх можна додавати і віднімати:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + (-1) & 2 + 0 & 3 + 1 \\ 4 + 2 & 5 + (-3) & 6 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix};$$

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix};$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - (-1) & 2 - 0 & 3 - 1 \\ 4 - 2 & 5 - (-3) & 6 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

***Означення 4.*** Матрицю *A* називають *узгодженою* з матрицею *B*, якщо кількість стовпців матриці *A* дорівнює кількості рядків матриці *B* («довжина» матриці *A* дорівнює «висоті» матриці *B*). Добуток матриць запроваджують лише для узгоджених матриць.

***Означення 5.*** *Добутком матриці $A_{m\times l}$ на матрицю* $B_{l\times n}$ називають матрицю *C = AB* розміром $m\times n$, кожний елемент $c_{ij}$ якої дорівнює добуткові *i*-го рядка матриці *A* на *j* -й стовпець матриці B (рис. 1.5), тобто

$$\boxed{C_{m\cdot n} = A_{m\cdot l} \cdot B_{l\cdot n} = (c_{ij})_{m\cdot n} \overset{\text{def}}{=} (\overleftarrow{a}_i \vec{b}_j)_{m\cdot n}}$$

♦ **Приклад 2**

Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ та } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

знайти: ***1)*** $\overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{b}_1$ ***; 2)*** $AB$ та $BA$.

**1.** Рядок $\overleftarrow{a}_1$ завдовжки 3 та стовпець $\vec{b}_1$ заввишки 3 узгоджені.

Отже,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 = 36.$$

**2.** Матриця $A$ розміром 2 × 3 узгоджена з матрицею $B$ розміром 3 × 3. Отже, існує їхній добуток — матриця $AB$ розміром 2 × 3 (рис. 1.4) .

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{1 \ \ 2 \ \ 3} \\ 1 \ \ 0 \ \ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 \\ 7 \end{matrix} & & \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & \boxed{1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1} & 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 8 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + (-1) \cdot 7 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 8 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Рис. 1.4

Множення матриць зручно записувати за схемою Фалька (рис. 1.5):

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ \hline \overleftarrow{a}_1 & \overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{b}_3 \\ \overleftarrow{a}_2 & \overleftarrow{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \overleftarrow{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \overleftarrow{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} & & & 3 & 4 & 5 \\ & & & 6 & 0 & -2 \\ & & & 7 & 1 & 8 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 36 & 7 & 25 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & 3 & -3 \end{array}$$

Рис. 1.5

Матриця $B$ розміром 3 × 3 не узгоджена з матрицею $A$ розміром 2 × 3. Отже, добутку $BA$ не існує.

Матрицю $A$ можна помножити саму на себе тоді й лише тоді, коли вона квадратна.

Натуральний степінь $k$ квадратної матриці $A$ розуміють як

$$A^k = \underbrace{AA \dots A}_{k \text{ разів}}.$$

### *1.3. Властивості операцій над матрицями*

Властивості транспортування матриць. Для будь-яких матриць $A,B$ та дійсного числа α правдиві тотожності:

**1.**$(A^T)^T=A$;

**2.**$(A+B)^T=A^T+B^T$;

**3.**$(\alpha A)^T=\alpha A^T$;

**4.**$(AB)^T=B^T A^T$.

**Властивості лінійних операцій над матрицями:**

Для довільних матриць $A_{m\times n}$ , $B_{m\times n}$ , $C_{m\times n}$та чисел α, β $\in$ R правдиві тотожності:

***1.*** *A+B=B+A (Комунікативність додавання матриць);*

***2.*** *A+(B+C)=(A+B)+C (Асоціативність додавання матриць);*

***3.*** *A+$O_{m\,x\,n}$=A (Властивість нульової матриці);*

***4***. *A+(-A)=$O_{m\;n\;x}$ (Властивість протилежної матриці);*

***5.*** *1*A=A*

***6.*** *(α+β)*A=α*A+β*A (Дистрибутивність множення матриці на число щодо додавання чисел);*

*7. α*(A+B)=α*A+α*B (Дистрибутивність множення матриці на число);*

***8.*** *α*(β*A)=(αβ)*A (Асоціативність множення матриці на число);*

**Властивості множення матриць:**

Для довільних матриць $A,B,C$ та числа $\lambda \in$ R правдиві тотожності:

1. $A_{m\times n}\cdot\left(B_{n\times l}\cdot C_{l\times p}\right)=(A\cdot B)\cdot C$ (*асоціативність множення матриць);*
2. $C_{l\times m}\cdot(A_{m\times n}+B_{m\times n})=C\cdot A+C\cdot B,$
$(A_{m\times n}+B_{m\times n})\cdot C_{n\times t}=A\cdot C+B\cdot C$ *(дистрибутивність множення матриць щодо додавання матриць);*
3. $\lambda(A_{m\times n}\cdot B_{n\times l})=(\lambda A)\cdot B=A\cdot(\lambda B)$ *(асоціативність множення матриць щодо множення на число);*
4. $A_{m\times n}\cdot E_n=E_m\cdot A_{m\times n}=A$ *(властивість одиничної матриці);*
5. $A_{m\times n}\cdot O_{n\times l}=O_{m\times l};\ O_{l\times m}\cdot A_{m\times n}=O_{l\times n}$ *(властивість нульової матриці).*

***КОНТРОЛЬНІ ВПРАВИ***

***1.*** *Знайти матрицю C=2A-3B*

$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 6 & 5 & -1\end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}$,

***2.*** *Знайти*

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$$

***3.*** *Знайти значення f (A), якщо*

*f (x)=3x*$^2$*-4*

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

## *<u>ТЕМА 2.</u>* Визначники квадратних матриць, їх властивості. Способи обчислення визначників. Мінори та алгебраїчні доповнення до елементів матриці. Елементарні перетворення над матрицями

### *2.1. Визначники квадратних матриць. Способи обчислення визначників*

Розглянемо довільну квадратну матрицю $n$ -го порядку $A = (a_{ij})_{n\times n}$. З кожною такою матрицею зв'яжімо цілком певну числову характеристику — її визначник.

**Означення.** ***Визначником (детермінантом) матриці A*** називають число $|A| = \det A$, яке обчислюють за правилом:

1) якщо n=1, то

$$\boxed{|a_{11}| = a_{11};}$$

2) якщо n>1, то

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k}}$$

де $M_{1k}$ — визначник матриці порядку (n - 1), яку одержимо з матриці $A$ викреслюванням 1-го рядка та $k$ -го стовпця.

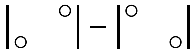
Визначник матриці, одержаної викреслюванням з матриці $A$ $i$-го рядка та $j$ -го стовпця, називають *доповняльним мінором $M_{ij}$ елемента $a_{ij}$.*

Отже, визначник матриці з одного елемента дорівнює самому елементу; визначник матриці порядку $n$ означують через визначники матриць порядку *(n-1).*

**Формули обчислення визначників матриць 2-го та 3-го порядку**

Для $n = 2$ використовують схему:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} =$$
$$= a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$



Для n = 3 використовують розклад за визначниками другого порядку:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}(-1)^2M_{11} + a_{12}(-1)^3M_{12} + a_{13}(-1)^4M_{13}.$$

Знайдімо доповняльні мінори і підставимо їх у рівність (2.1)

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

або схему Саррюса.

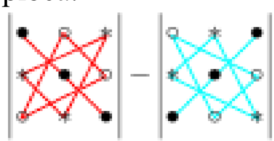


Рис. 2.1

Природно виникає питання — чи не можна для обчислення визначника скористатись елементами і відповідними їм доповняльними мінорами не 1-го, а довільного рядка чи стовпця?

***<u>ТЕОРЕМА.</u>*** Для кожної квадратної матриці A n –го порядку для довільного i *( 1≤ i ≤ n)* правдива формула, яку називають *розкладом визначника за i-м рядком:*

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}\, M_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}\,,}$$

та для довільного *j (1 ≤ j ≤ n)* — формула, яку називають *розкладом визначника за j -м стовпцем:*

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\, A_{kj}.}$$

Число

$$\boxed{A_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

називають *алгебраїчним доповненням елемента $a_{ij}$*

**♦ Приклад 1**

***1.*** Розкладемо визначник за рядком з літер:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ a & b & c \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = a(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+b(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + c(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

***2.*** Розкладемо визначник за стовпцем з літер:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & 4 & b \\ -3 & -5 & c \end{vmatrix} = a(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+b(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + c(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

## *2.2. Властивості визначників*

Визначники мають низку важливих властивостей, які допомагають ефективно їх обчислювати та застосовувати для прикладних задач.

**1.** *(Рівноправність рядків та стовпців).* Транспонування матриці не змінює її визначника:

$$\det A = \det A^T; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

**2.** *(Лінійність).* Якщо стовпець (рядок) визначника є сумою двох стовпців (рядків), то визначник дорівнює сумі двох відповідних визначників:

$$\det(\dots, \vec{a} + \vec{b}, \dots) = \det(\dots, \vec{a}, \dots) + \det(\dots, \vec{b}, \dots);$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

**3.** *(Однорідність).* Спільний множник стовпця (рядка)

можна виносити за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \det(kA_n) = k^n \det A$$

**4.** *(Антисиметричність).* Якщо переставити два стовпці (рядки) визначника, то він змінить знак:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

**5.** *(Умови рівності нулеві визначника).* Визначник матриці дорівнює нулеві, якщо матриця містить:

1) нульовий стовпець (рядок);

2) два однакові стовпці (рядки);

3) пропорційні стовпці (рядки):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

**6.** *(Теорема анулювання).* Сума добутків елементів стовпця (рядка) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого стовпця (рядка) дорівнює нулю:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0, j \neq k,}$$

Так $a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} = 0$, але $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = det\ A_{2\times 2}$.

**7.** Визначник не зміниться, якщо до будь-якого стовпця (рядка) додати інший стовпець (рядок), помножений на деяке число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

**8.** Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добуткові визначників цих матриць:

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}.$$

**9.** Визначник матриці не зміниться, якщо до будь-якого стовпця (рядка) додати лінійну комбінацію решти стовпців (рядків).

**10.** Визначник верхньої (нижньої) трикутної матриці дорівнює добуткові діагональних елементів.

**11.** Визначник одиничної матриці $E_n$ дорівнює одиниці.

♦ **Приклад 2.** Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1+3 \\ 2 & -1 & 2+(-1) \\ -1 & 2 & -1+2 \end{vmatrix} =$$

*використаємо властивість 2*

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

*використаємо властивість 5*

### *2.3. Обчислення визначника за допомогою елементарних перетворень*

***Означення.*** *Елементарними перетвореннями матриці називають:*

1) переставляння стовпців (рядків);

2) множення стовпця (рядка) на число, відмінне від нуля;

3) додавання до стовпця (рядка) іншого стовпця (рядка), помноженого на деяке число.

Матриці *A* та *B* називають *еквівалентними*, якщо одну з них одержано з іншої скінченною кількістю елементарних перетворень, і позначають A ~ B.

Метод зведення визначника до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень полягає в перетворенні визначника до вигляду, коли всі елементи, розташовані по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю.

♦ **Приклад 3.** Обчислити зведенням до трикутного вигляду визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 5 & -7 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 5 & -7 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 \leftarrow 4\overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{a}_4 \leftarrow \overleftarrow{a}_4 \leftarrow 5\overleftarrow{a}_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 5 & -7 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_3 \leftarrow 2\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{a}_4 \leftarrow \overleftarrow{a}_4 \leftarrow 2\overleftarrow{a}_2 \end{vmatrix}.$$

*На першому кроці від 2-го рядка відняли 1-й, помножений на 4, та від 4-го рядка відняли 1-й, помножений на 5.*

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} |\overleftarrow{a}_4 \leftarrow \overleftarrow{a}_4 + 2\overleftarrow{a}_3| =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{vmatrix}$$

*Визначник трикутної матриці дорівнює добуткові діагональних елементів =1·1·(-2)(-14)=28.*

## *КОНТРОЛЬНІ ВПРАВИ*

***1.*** *Обчислити визначники*

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

***2.*** *Обчислити визначники, використовуючи їх властивості*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

***3.*** *Розв’язати рівняння*

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

# ***ТЕМА 3***. Обернена матриця. Ранг матриці

## *3.1. Обернена матриця*

***Означення 1.*** *Оберненою матрицею* до квадратної матриці $A$ порядку $n$ називають матрицю $A^{-1}$ таку, що

$$\boxed{\boxed{A^{-1}A = AA^{-1} = E_n}}.$$

Матрицю $A$, для якої існує обернена матриця, називають *оборотною.*

З означення випливає, що матриці $A$ та $A^{-1}$ взаємообернені й переставні.

Оскільки $E_n E_n = E_n$, то $(E_n)^{-1} = E_n$.

З'ясуймо тепер умову оборотності квадратної матриці $A$ порядку $n$, тобто існування такої матриці $A^{-1}$, що

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n.$$

***Означення 2.*** Квадратну матрицю називають *невиродженою*, якщо її визначник відмінний від нуля.

**ТЕОРЕМА** *(критерій оборотності матриці).* Матриця оборотна тоді й лише тоді, коли вона невироджена. Матрицю $A^* = (A_{ij})^T_{n\times n}$ називають приєднаною до матриці $A_{nxn}$.

**Алгоритм обчислення оберненої матриці**

**1.** Обчислюють визначник матриці $A$.

**2.** Якщо $det\ A = 0$, то оберненої до $A$ матриці не існує.

Якщо $det\ A \neq 0$, то будують приєднану до $A$ матрицю

$$A^* = (A_{ij})^T.$$

**3.** Обернену до $A$ матрицю знаходять за формулою

$$\boxed{\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*}}.$$

♦ **Приклад 1.** Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

**1.** Обчислюємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

**2.** Оскільки матриця $A$ невироджена, то вона оборотна. Отже, будуємо приєднану до $A$ матрицю, обчислюючи алгебраїчні доповнення до всіх її елементів:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = -1 \; A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2$$

**3.** Знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2f \end{pmatrix}$$

Справді, перевіримо:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Схема знаходження оберненої матриці методом Ґауса**

***1.*** Утворюють розширену матриці $(A|E_n)$.

***2.*** Застосовують до матриці $(A|E_n)$елементарні перетворення для утворення під головною діагоналлю трикутної матриці з нульовим елементом, водночас перетворюючи і праву частину розширеної матриці.

***3.*** Якщо отримана матриця міститиме нульові рядки, то матриця $A$ необоротна. Якщо ж матриця не має нульових рядків, то матриця $A$ — оборотна, і дану матрицю перетворюють на одиничну матрицю $E_n$.

$$(A|E_n)\sim \ldots \sim(E_n|A^{-1}).$$

***4.*** Виписують матрицю $A^{-1}$ — праву частину розширеної матриці.

♦ **Приклад 2.** Знайти методом Ґауса матрицю, обернену до матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

***1.*** Утворюємо розширену матрицю:

$$(A|E_3)=B=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

***2.*** Зводимо розширену матрицю елементарними перетвореннями рядків до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left|\begin{array}{l} \overleftarrow{b}_2 \leftarrow \overleftarrow{b}_2 - 2\overleftarrow{b}_1 \\ \overleftarrow{b}_3 \leftarrow \overleftarrow{b}_3 - \dfrac{5}{2}\overleftarrow{b}_1 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -5/2 & 0 & 1 \end{array}\right)\left|\begin{array}{l} \\ \\ \overleftarrow{b}_3 \leftarrow \overleftarrow{b}_3 - \dfrac{1}{2}\overleftarrow{b}_2 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & -3/2 & -1/2 & 1\end{array}\right)\left|\begin{array}{c}\overleftarrow{b}_1\leftarrow\overleftarrow{b}_1-2\overleftarrow{b}_3\\ \\ \overleftarrow{b}_3\leftarrow 2\overleftarrow{b}_3\end{array}\right|\sim\ldots$$

***3.*** Східчаста матриця не містить нульових рядків. Отже, матриця *A* оборотна.

$$\ldots\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -3 & 0 & 4 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2\end{array}\right)\left|\begin{array}{c}\overleftarrow{b}_1\leftarrow\overleftarrow{b}_1+3\overleftarrow{b}_2\\ \\ \\ \end{array}\right|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & -2 & 4 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2\end{array}\right)\left|\begin{array}{c}\overleftarrow{b}_1\leftarrow\frac{1}{2}\overleftarrow{b}_1\\ \\ \\ \end{array}\right|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2\end{array}\right).$$

***4.*** Виписуємо обернену матрицю

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

***3.2. Ранг матриці***

***Означення.*** *Рангом* матриці *A* називають найбільший з порядків її ненульових мінорів і позначають *rang A*.

♦ **Приклад 3.** Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Усі матриці 3-го порядку вироджені. Серед підматриць 2-го порядку є невироджена під матриця

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix};\ \begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=5\neq 0.$$

Отже, rang A =2

***Метод Гауса***

*Метод Гауса* полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень дану матрицю $A$ можна звести до матриці $B$, в якій всі елементи $b_{11}, b_{22}\ldots$ не нульові, а всі елементи інших порядків, розміщені під ними, нульові, тоді $r(A) = r(B) = r$.

Звідси слідує інше означення рангу матриці.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{22} & \ldots & b_{1r} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2r} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{rr} & \ldots & b_{rn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

***Рангом матриці*** *називається максимальна кількість лінійно-незалежних рядків або стовпців.*

♦ **Приклад 4.** Знайти ранг матриці:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо елементарні перетворення:

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \xRightarrow[IVp-Ip]{IIII-IIp} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xRightarrow{II-Ip\cdot 3}$$

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xRightarrow{IVp-IIp} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow{IVp-IIIp}$$

$$\xRightarrow{IVp-IIIp} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Одержана матриця має три лінійно незалежних рядки, отже $r(A)=3$

***КОНТРОЛЬНІ ВПРАВИ***

***1.*** *Знайти матриці обернені до даних:*
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

***2.*** *Знайти ранг матриці:*
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

## *ТЕМА 4.* Системи лінійних алгебричних рівнянь Способи розв'язування Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

### *4.1. Основні поняття*

*Рівняння* щодо невідомих $x_1$, $x_2$, ... $x_n$ вигляду
$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b}$$
називають *лінійним алгебраїчним.* Задані числа $a_j$, $i=\overline{1,n}$ називають *коефіцієнтами* рівняння, а число $b$ — *вільним членом* рівняння. *Система m лінійних алгебричних рівнянь* з $n$ невідомими $x_1$, $x_2$, ...,$x_n$ має вигляд
$$\left\{\boxed{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}}\right. \qquad (4.1)$$

Перший індекс коефіцієнта $a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ при змінній вказує на номер рівняння, а другий – на номер невідомої, при якій стоїть цей коефіцієнт.

Зіставимо системі (4.1) дві матриці: *матрицю системи*

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

і *розширену матрицю системи*

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

***Означення 1.*** Розв'язком системи (4.1) називають набір *n* значень невідомих $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$, підставлення яких у всі рівняння системи перетворює їх на тотожності. Розв'язок системи записують як стовпець.

*Система може:*

1) мати один розв'язок;
2) мати безліч розв'язків;
3) не мати жодного розв'язку.

***Означення 2.*** Систему лінійних алгебричних рівнянь називають *сумісною (розв'язною)*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною (нерозв'язною)*, якщо вона не має розв'язків. Сумісну систему називають *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має більше як один розв'язок.

Дві системи називають *рівносильними*, якщо кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої, і навпаки. Усі несумісні системи вважають рівносильними.

***Означення 3.*** Систему лінійних алгебричних рівнянь називають *однорідною*, якщо вільні члени всіх рівнянь нульові, і неоднорідною, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

***Означення 4.*** Будь-який розв’язок системи називають її *частинним розв’язком.* Множину всіх частинних розв’язків називають *загальним розв’язком* системи.

### *4.2. Матричний метод. розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь*

Розгляньмо систему лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі

$$AX=B. \tag{4.2}$$

із квадратною матрицею *A n-го*порядку, і нехай rangA = n, тобто $|A| \neq 0$ – матриця A оборотна.

Помножуючи обидві частини рівності (4.2) на $A^{-1}$, одержимо розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (4.1) і матричного рівняння (4.2), якому вона еквівалентна:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B;$$
$$X= A^{-1}B.$$

У цьому полягає матричний метод розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

♦ **Приклад 1.** Матричним методом розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

У цьому разі $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$

$$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{16} & -\frac{7}{16} & \frac{1}{4}\\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Отже, задана система має розв’язок (1; 1; 2).

### *4.3. Формули Крамера*

Формули Крамера для розв’язування системи використовуються лише тоді, коли основна матриця А квадратна й невироджена.

**<u>ТЕОРЕМА</u>** Нехай $\Delta$ – основний визначник системи, а $\Delta_j$ (j=1,2,…,n) – визначник, який дістають із $\Delta$ зміною j-го стовпця на стовпець вільних членів В. Тоді, якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв’язок, який визначається формулами Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Одержані формули є розгорнутим записом формул Крамера:

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta}, j=\overline{1,n} \quad . \qquad (4.3)$$

де $\Delta_j$ – визначник матриці, одержаної з матриці А заміною j-го стовпця на стовпець вільних членів; а $\Delta$ – визначник матриці А.

***Зауваження.*** Формули Крамера практично застосовують до систем $2 \times 2$ та $3 \times 3$. Для більших систем вони мають переважно теоретичне значення і у практичних обчисленнях їх застосовують рідко.

♦ **Приклад 2.** Розв’язати за формулами Крамера систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} x + 4y = -10 \\ 3x - y = 9 \end{cases}.$$

Складемо матрицю системи і стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -10 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

За формулами Крамера (4.3) ($\Delta_x$ відповідає $\Delta_1$, а $\Delta_y$ відповідає $\Delta_2$)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = -26;\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 39;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-26}{-13} = 2; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{39}{-13} = -3.$$

**Відповідь:** x = 2, y = -3.

### *4.4. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь*

***Метод Гаусса – метод послідовного виключення невідомих*** – полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень система рівнянь зводиться до рівносильної системи, з якої послідовно, починаючи з останніх (за номером) змінних, знаходять усі інші змінні.

***До елементарних перетворень системи лінійних рівнянь належать:***

- множення рівняння системи на число, відмінне від нуля;
- додавання до одного рівняння системи іншого, помноженого на будь-яке число;
- переставлення місцями двох рівнянь системи.

Після застосування елементарних перетворень завжди дістають систему, еквівалентну початковій.

♦ **Приклад 3.** Методом Гаусса розв’язати систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x - 2x = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Складемо розширену матрицю і виконаємо елементарні перетворення над рядками:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -12 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & -13 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right).$$

Цій розширеній матриці відповідає трикутна система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + x_4 = 2, \\ -x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_4 = 12. \end{cases}$$

Легко знайти розв’язок системи: $x_4 = 4$, $x_3 = 3$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$.

Отже, початкова система має розв’язок (1; 2; 3; 4).

### *4.5. Дослідження загальних систем лінійних алгебричних рівнянь*

Розв’язати систему — це означає:

1) з’ясувати, чи є система сумісною або несумісною;

2) якщо система сумісна, то знайти множину її розв'язків.

***Розглянемо матрицю***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

і розширену матрицю

$$\tilde{A} = \left(A\middle|\vec{b}\right) = \left(\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right).$$

**Система лінійних алгебричних рівнянь матиме вигляд**

$$AX = B$$

<u>**ТЕОРЕМА**</u> *(Кронекера — Капеллі)*. Система лінійних алгебричних рівнянь AX = B із розширеною матрицею $\tilde{A} = (A|B)$ сумісна тоді й лише тоді, коли ранг матриці системи A дорівнює рангу розширеної матриці системи $\tilde{A}$, тобто

$$\boxed{rang\ A = rang\ \bar{A}}.$$

**Наслідки з теореми**

- Якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок.
- Якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, але менший за кількість невідомих, то система має безліч розв'язків.

Можливі випадки кількості розв'язків системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) показано на рис. 4.3.

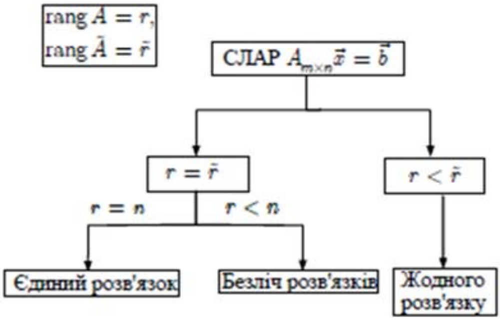



Рис. 4.3

### *4.6. Однорідні системи лінійних алгебричних рівнянь*

Розгляньмо ненульову (тобто не всі коефіцієнти рівнянь дорівнюють нулю) однорідну систему лінійних алгебричних рівнянь.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0},$$

**Властивості однорідної системи лінійних алгебричних рівнянь:**

- Однорідна СЛАР завжди сумісна (вона зажди має нульовий розв'язок $X=0$.)
- Сума розв'язків однорідної СЛАР також є її розв'язком.
- Добуток розв'язку однорідної СЛАР на будь-яке число також є розв'язком системи.
- Будь-яка лінійна комбінація розв'язків однорідної СЛАР є розв'язком цієї системи.
- Якщо ранг матриці $A_{m\times n}$ однорідної СЛАР дорівнює $r$, то система має $n$-$r$ лінійно незалежних (а, отже, ненульових) розв'язків.

♦ **Приклад 4.** Розв'язати систему

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ 2x + 3y + z = 0. \end{cases}$$

Складаємо таблицю коефіцієнтів: $\begin{matrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}$

Викреслимо по черзі стовпці, одержимо визначники:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \,,$$

$$\text{(поміняли порядок стовпців)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Розв'язок системи: *x=11 k, y=-7k, z=-k, де k* – довільне.

***КОНТРОЛЬНІ ВПРАВИ***

***1.*** *Розв'язати матричним способом систему:*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

***2.*** *Розв'язати систему формулами Крамера:*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

***3.*** *Методом Гаусса розв'язати систему:*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

***4.*** *Розв'язати однорідну систему рівнянь:*

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

## *КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ*

1. Що таке матриця?
2. Які є види матриць?
3. Які операції над матрицями називають лінійними?
4. Яку матрицю називають сумою (різницею) матриць?
5. Яку матрицю називають добутком матриці на число?
6. Які властивості лінійних операцій над матрицями?
7. Для яких матриць вводиться дія множення?
8. Яку матрицю називають добутком матриць?
9. Які властивості множення матриць?
10. Як обчислюють визначник квадратної матриці другого, третього, …, $n$-го порядку?
11. Які властивості визначників?
12. Як записують розклад визначника $n$-го порядку за елементами будь-якого рядка (стовпця)?
13. Що називають рангом матриці?
14. Які перетворення матриці називають елементарними?
15. Що таке обернена матриця?
16. Які існують методи обчислення оберненої матриці?
17. Що називають розв'язком системи лінійних рівнянь?
18. Яку систему лінійних рівнянь називають сумісною?
19. Яку систему лінійних рівнянь називають несумісною?
20. Яку систему лінійних рівнянь називають визначеною?

21. Яку систему лінійних рівнянь називають невизначеною?

22. У чому полягає основна ідея методу Гаусса?

23. В якому випадку можна користуватись матричним методом розв'язування системи лінійних рівнянь?

24. Як можна застосовувати формули Крамера для знаходження розв'язку системи лінійних рівнянь? В якому випадку можна користуватись цими формулами?

25. За якої умови система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок?

26. Що можна сказати про систему лінійних рівнянь, якщо її основний визначник дорівнює нулю?

## ***ТЕМА 5.*** Вектори. Лінійні операції над векторами. Лінійно залежні і лінійно незалежні вектори. Базис векторного простору

### *5.1. Основні поняття*

Розглянемо впорядковану пару точок А та В простору. Ця пара визначає напрямлений відрізок (точка $A$ є першою, точка $B$ — другою), напрям якого на рисунку вказують стрілкою (рис. 5.1).

***Означення 1.*** *Вектором* у геометрії *(геометричним вектором)* називають напрямлений відрізок. Першу точку напрямленого відрізка називають *початком* вектора, а другу — *кінцем* вектора.

Вектор з початком у точці $A$ і кінцем у точці $B$ позначають як $\overline{AB}$. Якщо вказівка на точки несуттєва, то застосовують простіші позначення — однією малою літерою з рискою зверху: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$

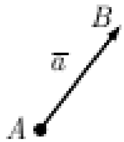



Рис. 5.1

Якщо початок і кінець вектора збігаються, то вектор називають нульовим і позначають через $\bar{0}$.

Довжиною вектора $\bar{a} = \overline{AB}$ називають довжину відрізка $AB$ і позначають як $|\bar{a}|$, $|\overline{AB}|$. Довжина нульового вектора (і лише його) дорівнює нулю. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називають *одиничним.*

***Означення 2.*** Вектори називають *колінеарними,* якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих (рис. 5.2 та 5.3).

Колінеарність векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ позначають як $\bar{a} \parallel \bar{b}$. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому векторові.

Колінеарні ненульові вектори можуть бути однаково напрямленими (позначають ↑↑) (див. рис. 5.2) або *протилежно напрямленими* (позначають ↑↓) (див. рис. 5.3).

***Означення.*** Вектори, які лежать в одній або паралельних площинах, називають *компланарними* (рис. 5.4)

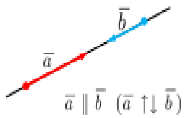



Рис. 5.2

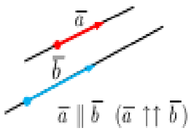



Рис. 5.3

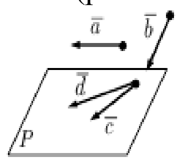



Рис. 5.4

***Означення 3.*** Два вектори називають *рівними*, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають рівні довжини.

### *5.2. Лінійні операції над векторами. Властивості*

Нехай задано два вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$. Візьмемо деяку точку $O$ і відкладемо від неї вектор $\overline{AO}$,що дорівнює ру $\bar{a}$. Від одержаної точки *A* відкладемо вектор $\overline{AB}$, що дорівнює вектору $\bar{b}$ (рис. 5.5).

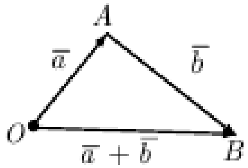



Рис. 5.5

***Означення 4.*** Сумою векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ називають вектор $\bar{a} + \bar{b}$, який напрямлений від початку вектора $\bar{a}$ до кінця вектора $\bar{b}$, якщо відкласти вектор $\bar{b}$ від кінця вектора $\bar{a}$:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{OB}$$

Таке правило додавання векторів називають *правилом трикутника.*

Якщо відкласти вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ від спільної точки $O$ і побудувати на них, як на сторонах, паралелограм, то сумою $\bar{a} + \bar{b}$ цих векторів є вектор $\overline{OB}$ *(правило паралелограма)* (рис. 5.6).

Сумою скінченної кількості *n* векторів $a_1, a_2, \ldots a_n$ є вектор $\overline{OA_n}$, який замикає ламану $OA_1 \ldots A_n$ (правило многокутника) (рис. 5.7).

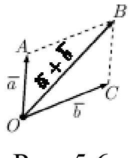



Рис. 5.6

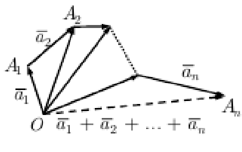



Рис. 5.7

***Означення 5.*** *Добутком вектора* $\bar{a} \neq \bar{0}$ на дійсне *число* $\lambda \neq 0$ називають вектор $\lambda\, \bar{a}$, довжина якого дорівнює $|\lambda||\bar{a}|$, і який однаково напрямлений з вектором $\bar{a}$, якщо

$\lambda > 0$,і протилежно напрямлений з вектором $\bar{a}$, якщо $\lambda < 0$ (рис. 5.8).

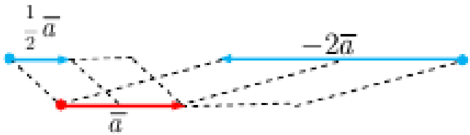



Рис. 5.8

Якщо λ= 0 або $\bar{a}$=$\bar{0}$, то вважають, що $\lambda\bar{a}$= 0.

Вектор, колінеарний заданому вектору $\bar{a}$, рівний йому за довжиною і протилежно напрямлений (отже, вектор (-1) $\bar{a}$), називають *протилежним вектором* для вектора $\bar{a}$ і позначають так: $\bar{a} = (-1)\bar{a}$.

Під *різницею векторів* $\bar{b} - \bar{a}$ розуміють суму векторів $\bar{b}$ та $-\bar{a}$ (рис. 5.9) тобто $\bar{b} - \bar{a} = \bar{b} + (-\bar{a}) = \bar{b} + (-1)\bar{a}$

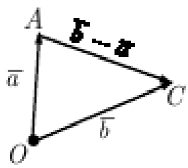



Рис. 5.9

***Властивості лінійних операцій над векторами***

Для довільних векторів $\bar{a}, \bar{b}$ та $\bar{c}$ і чисел $\lambda \in R$ та $\mu \in R$ справедливі рівності:

***1.*** $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ *(комутативність додавання векторів)* (рис. 5.10).

***2.*** $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ *(асоціативність додавання векторів)* (рис. 5.11).

***3.*** Існує (єдиний) нульовий вектор $\bar{0}$, такий що $\bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$ *(властивість нульового вектора).*

***4.*** Існує (єдиний) вектор $(-\bar{a})$ такий, що $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$ *(властивість протилежного вектора).*

***5.*** $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$.

**6.** $\lambda \cdot (\mu \cdot \bar{a}) = (\lambda\mu) \cdot \bar{a}$ *(асоціативність множення вектора на число).*

*7.* $(\lambda + \mu) \cdot \bar{a} = \lambda \cdot \bar{a} + \mu \cdot \bar{a}$ *(дистрибутивність множення вектора на число щодо додавання чисел).*

**8.** $\lambda \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \cdot \bar{a} + \lambda \cdot \bar{b}$ *(дистрибутивність множення вектора на число щодо додавання векторів).*

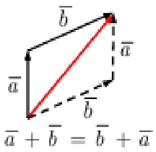



Рис. 5.10

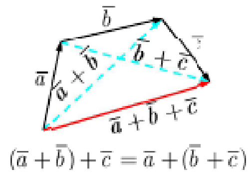



Рис. 5.11

Множина геометричних векторів з означеними лінійними операціями над векторами *є векторним (геометричним) простором*.

Під векторним (лінійним) простором $V$ розуміють множину, на якій означено додавання елементів і множення елемента на дійсне число, що мають властивості 1-8.

***Критерій колінеарності векторів***

Вектори $\bar{a} \neq \bar{0}$ та $\bar{b}$ колінеарні тоді й лише тоді, коли існує таке число λ, що $\bar{b} = \lambda\bar{a}$, тобто $\bar{a} \parallel \bar{b} \leftrightarrow \bar{b} = \lambda\bar{a}, \bar{a} \neq \bar{0}$.

Під часткою $\frac{\bar{a}}{\lambda}$, де $\lambda \neq 0$, розуміють $\frac{1}{\lambda}\bar{a}$.

*Ортом* вектора $\bar{a}$ називають одиничний вектор однаково напрямлений з вектором $\bar{a}$ і позначають $\bar{a}^0$. Отже,

$$\boxed{\bar{a}^0 = \frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a}, \bar{a} = |\bar{a}|\bar{a}^0}.$$

♦ **Приклад 1.** У трикутнику $ABC$ проведено медіани $\overline{AD}, \overline{BE}$ та $\overline{CF}$ (рис. 5.12). Доведемо, що $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = 0$.

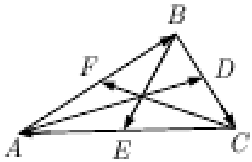



Рис. 5.12

За означенням лінійних операцій над векторами маємо:

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC};$$

$$\overline{BE} = \overline{BC} + \overline{CE} = \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CA};$$

$$\overline{CF} = \overline{CA} + \overline{AF} = \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB}.$$

Отже,

$$\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \frac{3}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) = \frac{3}{2}\cdot\overline{0} = \overline{0}.$$

♦ **Приклад 2.** З'ясуємо, на яке число треба помножити одиничний вектор $\bar{a}$, щоб одержати вектор $\bar{m}$, для якого справджується умови $\bar{m} \uparrow\downarrow \bar{a}$, $|\bar{m}| = 3$.

Оскільки вектори $\bar{a}$ та $\bar{m}$ колінеарні і протилежно напрямлені, то $\bar{m} = \lambda\bar{a}$, $\lambda < 0$. Тоді

$$|\bar{m}| = |\lambda\bar{a}| = |\lambda||\bar{a}| = -\lambda\cdot 1 = -\lambda = 3 \leftrightarrow \lambda = -3.$$

### *5.3. Лінійна залежність та лінійна незалежність векторів. Базис векторного простору*

***Означення 6.*** *Лінійною комбінацією векторів* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ називають вектор

$$\boxed{\bar{x} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n}.$$

При цьому кажуть, що вектор $\bar{x}$, *лінійно виражається через вектори* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ *(його розкладено за векторами* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ *).*

***Означення 7.*** *Систему* векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_s$ називають *лінійно незалежною*, якщо з рівності

$$\boxed{\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_s\bar{a}_s = \bar{0}}$$

випливає, що

$$\boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0}.$$

Систему векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_s$ називають *лінійно залежною*, якщо існують такі числа $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_s$, які не дорівнюють одночасно нулю, що

$$\boxed{\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_s\bar{a}_s = \bar{0}}.$$

З означення випливає, що порожня система векторів — лінійно незалежна.

**<u>ТЕОРЕМА</u>** Критерій лінійної залежності векторів. Вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ лінійно залежні тоді й лише тоді, коли хоча б один з векторів лінійно виражається через решту.

***Наслідки з теореми***

- Один вектор лінійно залежний (незалежний) тоді й лише тоді, коли він нульовий (ненульовий).
- Система із двох векторів лінійно залежна (незалежна) тоді й лише тоді, коли вони колінеарні (неколінеарні).
- Система із трьох векторів лінійно залежна (незалежна) тоді й лише тоді, коли вони компланарні (некомпланарні).

Розглянемо таку задачу: скільки і яких векторів на прямій, на площині й у просторі треба задати, щоб через них лінійно виразити будь-який вектор на прямій, на площині й у просторі?

***<u>ВИСНОВКИ</u>:***

♦ На прямій $L$ існує ненульовий вектор $\bar{e}$. Будь-який вектор $\bar{a}$, колінеарний ненульовому вектору $\bar{e}$, можна єдиним чином лінійно виразити через цей вектор (рис. 5.13):

$$\boxed{\bar{a} = x\bar{e}}.$$

♦ На площині існують два неколінеарні вектори $\bar{e}_1$ та $\bar{e}_2$. Будь-який вектор $\bar{a}$, компланарний з векторами $\bar{e}_1$ та $\bar{e}_2$, єдиним чином лінійно виражається через них (рис. 5.14):

$$\bar{a} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2;$$

♦ У просторі існують три некомпланарні вектори $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ та $\bar{e}_3$. Будь-який вектор $\bar{a}$ простору єдиним чином лінійно виражається через некомпланарні вектори $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ та $\bar{e}_3$ (рис. 5.15):

$$\boxed{\bar{a} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3}.$$

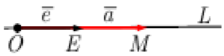



Рис. 5.13

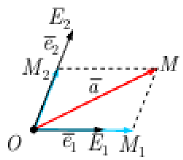



Рис. 5.14

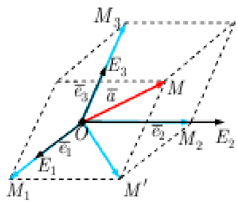



Рис. 5.15

***Означення***. <u>*Базисом*</u> векторного простору V називають будь-яку лінійно незалежну систему з найбільшою можливою кількістю векторів. Вектори, які утворюють базис простору, називають ***базисними.*** Кількість векторів базису простору називають його ***вимірністю.***

**<u>ТЕОРЕМА</u>**

***1.*** Базис на прямій $L = V^1$ (геометричному просторі вимірності 1) утворює будь-який ненульовий вектор $\bar{e}$. Будь-який вектор $\bar{x}$, паралельний прямій *L,* лінійно виражається єдиним чином через цей вектор:

$$\boxed{\bar{x} = x\bar{e}}.$$

***2.*** Базис на площині $P = V^2$ (геометричному просторі вимірності 2) утворює будь-яка впорядкована пара неколіеарних векторів $\bar{e}_1$ та $\bar{e}_2$. Будь-який вектор, паралельний площині Р, єдиним чином лінійно виражається через вектори базису $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$:

$$\boxed{\boxed{\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2}}.$$

***3.*** Базисом у просторі $V^3$ (геометричному просторі вимірності 3) є будь-яка впорядкована трійка некомпланарних векторів $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ та $\bar{e}_3$. Будь-який вектор простору єдиним чином лінійно виражається через вектори базису $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$:

$$\boxed{\boxed{\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3}}.$$

***КОНТРОЛЬНІ ВПРАВИ***

***1.*** *З'ясувати чи вектори* $\bar{a}_1 = (1;\ 1; 1)$, $\bar{a}_2 = (1;\ -1; 2)$ *є лінійно залежними.*

## ***ТЕМА 6.*** Координати вектора. n-Вимірний векторний простір. Дії над векторами в координатній формі

### ***6.1. n-Вимірний векторний простір***

Виберемо у просторі $V^3$ базис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ і розглянемо вектор $\bar{x} \in V^3$.

***Означення 1*** Співвідношення

$$\boxed{\boxed{\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3}}.$$

називають *розкладом вектора* $\bar{x}$ *за базисом* $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Числа $x_1$, $x_2$, $x_3$ називають *координатами вектора* $\bar{x}$ у базисі $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Координати вектора у фіксованому базисі утворюють координатний стовпець вектора. Тому замість розкладу вектора можна записати

$$\boxed{\bar{x} = \vec{x}_{\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)}}.$$

Координати вектора відрізняються в різних базисах, і лише нульовий вектор має нульові координати в будь-якому базисі.

***ЗАУВАЖЕННЯ*** Система векторів лінійно залежна тоді й лише тоді, коли лінійно залежна система їхніх координатних стовпців у фіксованому базисі.

**ТЕОРЕМА** Нехай $\bar{x} = \vec{x}_{\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}}, \bar{y} = \vec{y}_{\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}}$

***1.*** Рівні вектори мають рівні координати:

$$\boxed{\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)}}.$$

***2.*** Лінійним операціями над векторами відповідають лінійні операції над їхніми координатами:

$$\boxed{\bar{x} + \bar{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}_{(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)} ; \lambda\bar{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}_{(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)}}.$$

***3.*** Вектори колінеарні тоді й лише тоді, коли їхні координати пропорційні.

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \bar{x} \parallel \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}}.$$

♦ **Приклад 1.** Задано вектори:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}_{\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}_{\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}}, \bar{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}_{\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}}$$

Покажемо, що система векторів $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ утворює базис у двовимірному просторі і знайдемо координати вектора $\bar{c}$ в базисі $(\bar{a}, \bar{b})$.

Вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ неколінеарні, оскільки $\frac{4}{3} \neq \frac{-2}{5}$.

Отже, систему векторів $(\bar{a}, \bar{b})$ можна взяти за базис у просторі $V^2$ всіх двовимірних векторів.

Щоб знайти координати вектора с в базисі $(\bar{a}, \bar{b})$, треба розв'язати векторне рівняння, яке є векторним записом СЛАР:

$$x\bar{a} + y\bar{b} = \bar{c} \Leftrightarrow x\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 1, \\ -2x + 5y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -1 \end{cases}.$$

Отже,

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\{\bar{a}, \bar{b}\}}.$$

♦ **Приклад 2.** Задано вектори $\bar{a} = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\bar{b} = \bar{e}_2 + 4\bar{e}_3$.

Знайдемо координати векторів $\bar{a} + \bar{b}, 2\bar{a}$ та $2\bar{a} - \bar{b}$.

Записуємо координати векторів

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}$$

Тоді

$$\bar{a} + \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; 2\bar{a} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$2\bar{a} - \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

***Означення 2.*** Упорядковану сукупність $n$ чисел $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$ *називають $n$ – вимірним лінійним вектором* і записують як стовпець $\vec{x} = (x_i)_n$ або рядок $\overleftarrow{x} = (x_i)_n$.

***Означення 3.*** Множину всіх *$n$-вимірних лінійних векторів* з означеними лінійними операціями над ними називають $n$ – вимірним векторним простором і позначають як $R^n$.

Система лінійних векторів $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ утворює базис у просторі $R^n$. Рівність

$$\boxed{\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n}$$

називають *розкладом вектора* $\vec{x}$ за базисом $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, а числа $x_1, \ldots, x_n$ – його *координатами* в цьому базисі.

## ***6.2. Прямокутна декартова система координат на площині і в просторі***

Розглянемо два ненульові вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$. Відкладімо їх від спільного початку — точки O:
$\bar{a} = \overline{OA}$, $\bar{b} = \overline{OB}$.

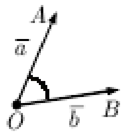



Рис. 6.1

*Кутом між векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$ вважають величину кута AOB:*

$$\boxed{\angle AOB = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}})}$$

Очевидно, що

$$0 \le (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) \le \pi.$$

Якщо один або обидва вектори нульові, то кут між ними невизначений.

Кут між однаково напрямленими векторами дорівнює 0; між протилежно напрямленими — $\pi$. Якщо кут між ненульовими векторами дорівнює $\frac{\pi}{2}$, то їх називають *перпендикулярними.*

Під кутом між вектором і віссю розуміють кут між вектором і напрямним вектором осі.

Зафіксуймо на площині (у просторі) точку О і розглянемо довільну точку М.

***Означення 4.*** *Радіус-вектором* точки М (щодо точки О) називають вектор $\bar{r}_M = \overline{OM}$ (рис. 6.2)

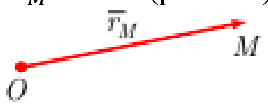



Рис. 6.2

***Зауваження 5***. Якщо на площині вибрано деякий базис, то точці М можна поставити у відповідність упорядковану пару — координати її радіус-вектора.

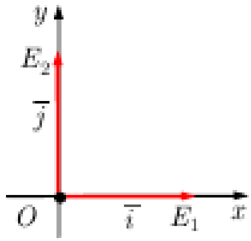



Рис. 6.3

Виберемо за базис векторів площини пару перпендикулярних одиничних векторів (рис. 6.3):

$$\bar{\mathrm{i}} = \overline{OE_1} \text{ та } \bar{\mathrm{j}} = \overline{OE_2}.$$

У цьому разі кажуть, що на площині задано *прямокутну декартову систему координат* (ПДСК) $O_{ij}$. Точку *O* називають *початком координат*.

Осі, що проходять через початок координат з напрямними векторами, $\bar{\mathrm{i}}$ та $\bar{\mathrm{j}}$ називають *осями координат*: першу — *віссю абсцис Ох*, другу — *віссю ординат Оу*. Площину, на якій задано систему координат, називають *координатною площиною Оху*.

Розглянемо довільну точку М на площині і розкладемо її радіус-вектор $\bar{r}_M = \overline{OM}$ за базисом $\{\bar{\mathrm{i}}, \bar{\mathrm{j}}\}$ (рис. 6.4):

$$\overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{OM_y} = x\bar{\mathrm{i}} + y\bar{\mathrm{j}}.$$

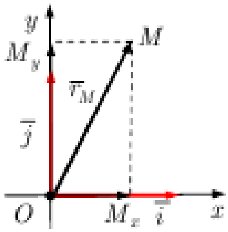



Рис. 6.4

***Означення 6.*** *Координатами* точки М у ПДСК $O_{ij}$ називають координати її радіус-вектора $\bar{r}_M$ у базисі $\{\bar{\mathrm{i}}, \bar{\mathrm{j}}\}$ і записують

$$\boxed{M = M(x; y)}.$$

Першу координату називають абсцисою, другу — ординатою. Зафіксуємо у просторі точку О і виберемо за базис трійку взаємно перпендикулярних одиничних векторів (рис. 6.5): $\bar{\mathrm{i}} = \overline{OE_1}, \bar{\mathrm{j}} = \overline{OE_2}$ та $\bar{k} = \overline{OE_3}$.

У цьому разі кажуть, що у просторі задано *прямокутну декартову систему координат $O_{ijk}$ ($O_{xyz}$)*. Точку О називають *початком координат*. Осі, що проходять через початок координат з напрямними векторами $\bar{\mathrm{i}}$, $\bar{\mathrm{j}}$ та $\bar{k}$ називають *осями координат:* першу — *віссю абсцис Ox,* другу — *віссю ординат Оу,* третю — *віссю аплікат Oz.* Площини, що проходять через осі координат, називають *координатними площинами*, відповідно *Оху, Oxz та Oyz.*

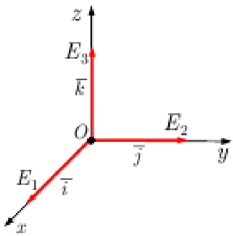



Рис. 6.5

Розглянемо довільну точку М у просторі і розкладемо її радіус вектор $\bar{r}_M = \overline{OM}$ за базисом $\{\bar{\text{i}}, \bar{\text{j}}, \bar{k}\}$ (рис. 6.6):

$$\overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{OM_y} + \overline{OM_z} + x\bar{\text{i}} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

***Означення 7.*** *Координатами* точки М у ПДСК $O_{ijk}$ називають координати її радіуса-вектора $\bar{r}_M$ у базисі $\{\bar{\text{i}}, \bar{\text{j}}, \bar{k}\}$ і записують $\boxed{\boxed{M = M(x; y; z)}}$.

Першу координату називають *абсцисою*, другу — *ординатою*, третю — *аплікатою*.

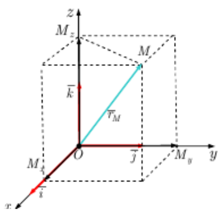



Рис. 6.6

### *6.3. Координати вектора. Поділ відрізка в заданому відношенні*

Нехай у ПДСК $O_{xyz}$ задано дві точки A $(x_A;y_A;z_A)$ та $B(x_B;y_B;z_B)$. З означення координат вектора маємо (рис. 6.7):

$$\overline{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

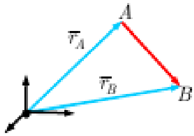



Рис. 6.7

***<u>ВИСНОВОК</u>*** Щоб знайти координати вектора, треба від координат його кінця відняти координати початку.

Це ж правило справедливе й для просторів вимірності 1 та 2 — на прямій і на площині відповідно.

Кажуть, що точка *M* поділяє відрізок $A_1$ $A_2$ у відношенні $\lambda \neq -1$, якщо виконано співвідношення $\overline{A_1M} = \lambda\overline{MA_2}$.

Нехай точка *M(x;y;z)* поділяє відрізок $A_1$ $A_2$, який з'єднує точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$ та $A_2\ (x_2;y_2;z_2)$, у відношенні $\lambda$. Розглянемо вектори $\overline{A_1M}$ та $\overline{MA_2}$.

Оскільки

$$\overline{A_1M} = \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix}; \ \overline{MA_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{pmatrix}$$

то

$$\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_2 - x) \\ \lambda(y_2 - y) \\ \lambda(z_2 - z) \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y); \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\lambda)x = (x_1 + \lambda x_2); \\ (1+\lambda)y = (y_1 + \lambda y_2); \\ (1+\lambda)z = (z_1 + \lambda z_2). \end{cases}$$

Якщо $\lambda = -1$, то $A_1M + MA_2 = 0$, тобто $A_1A_2 = 0$ (маємо випадок виродженого відрізка — немає що ділити).

Отже, для ненульового відрізка, якщо $\lambda \neq -1$ і , маємо

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.}$$

***ЗАУВАЖЕННЯ***

**1.** Якщо λ=0, то це означає, що точки $A_1$ та M збігаються (рис. 6.8).

**2.** Якщо λ > 0, то точка *M* лежить всередині відрізка $A_1A_2$ (рис. 6.8).

**3.** Якщо λ < 0, то точка *M* лежить ззовні відрізка $A_1A_2$ і кажуть, що вона поділяє відрізок зовнішнім чином (рис. 6.8).

**4.** Якщо λ = 1, точка *M* є серединою відрізка $A_1A_2$ (рис. 6.8).

Отже, координати середини відрізка $A_1A_2$ знаходять за формулами:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}.}$$

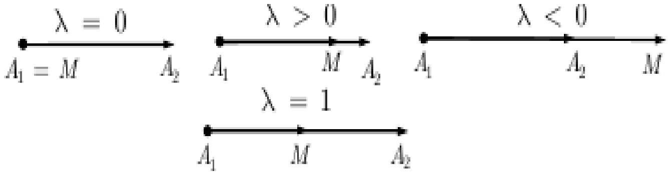



Рис. 6.8

♦ **Приклад 2.** Знайти координати вектора $\overline{AB}$, середини відрізка ВС і точки перетину медіан *M* трикутника АВС з вершинами A(2;1;3), B(4;3;4), C(8;-1;4) (рис. 6.9).

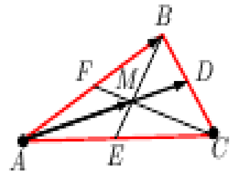



Рис. 6.9

Координати вектора

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 3-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Середина відрізка BC точка D має координати:

$$\left.\begin{aligned} x_D &= \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4+8}{2} = 6; \\ y_D &= \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3-1}{2} = 1; \\ z_D &= \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{4+4}{2} = 4. \end{aligned}\right\} D(6; 1; 4).$$

Точка $M$ поділяє відрізок $AD$ у відношенні $\lambda = 2$. Отже, точка $M$ має координати:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + 2x_D}{1+2} = \frac{2 + 2\cdot 6}{3} = \frac{14}{3}; \\ y_M &= \frac{y_A + 2y_D}{1+2} = \frac{1 + 2\cdot 1}{3} = 1; \\ z_M &= \frac{z_A + 2z_D}{1+2} = \frac{3 + 2\cdot 4}{3} = \frac{11}{3}. \end{aligned}\right\} D\left(\frac{14}{3}; 1; \frac{11}{3}\right).$$

### *6.4. Проекція вектора на вісь*

*Ортогональною проекцією точки M* простору (площини) на пряму $L$ називають точку $M'$ перетину прямої із площиною (прямою), що проходить через точку $M$ перпендикулярно до прямої $L$ (рис.6.10, рис. 6.11).

Нехай задано вісь L з напрямним вектором $\bar{s}$. Розглянемо вектор $\bar{a} = \overline{AB}$. Ортогональними проекціями точок A та B на вісь L є відповідно точки $A'$ та $B'$ (рис. 6.12).

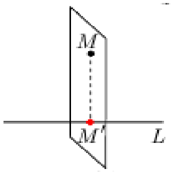



Рис. 6.10

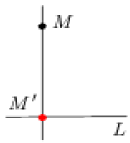



Рис. 6.11

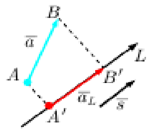



Рис. 6.12

*Векторною проекцією вектора* $\bar{a} = \overline{AB}$ *на вісь* $L \parallel \bar{s}$ називають вектор $\boxed{\bar{a}_L = \overline{A'B'}}$.

***Означення 8.*** *Проекцією (скалярною проекцією)* вектора $\bar{a} = \overline{AB}$ *на вісь* $L$ *з напрямним вектором* $\bar{s}$ називають число

$$\boxed{pr_L\bar{a} = pr_{\bar{s}}\bar{a} = \lambda},$$

таке, що

$$\overline{A'B'} = \lambda\bar{s}^0, \bar{s}^0 = \frac{\bar{s}}{|\bar{s}|}.$$

***Властивості проекції вектора***

**1.** Проекція вектора $\bar{a}$ на вісь $L(\bar{s})$ дорівнює добуткові довжини вектора $\bar{a}$ на косинус кута між вектором $\bar{a}$ та віссю (рис. 6.13):

$$\boxed{pr_L\bar{a} = |\bar{a}|\cos(\widehat{\bar{a}, L}) = |\bar{a}|\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{s}})}.$$

**2.** Рівні вектори мають рівні проекції на одну й ту саму вісь:

$$\boxed{\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow pr_L\bar{a} = pr_L\bar{b}}.$$

**3.** Проекція суми векторів на довільну вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь:

$$\boxed{pr_L(\bar{a} + \bar{b}) = pr_L\bar{a} + pr_L\bar{b}}.$$

**4.** Якщо помножити вектор на число, то проекція вектора на вісь теж помножиться на це число:

$$\boxed{pr_L(\lambda\bar{a}) = \lambda pr_L\bar{a}}.$$

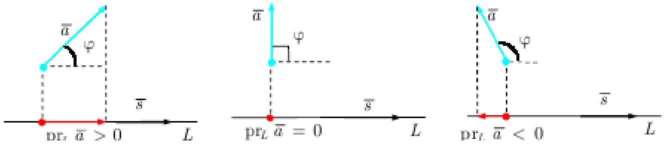


Рис. 6.13

***КОНТРОЛЬНІ ВПРАВИ***

***1.*** *Відрізок AD поділений на три рівні частини. Точками поділу є точки B (0; -1) і C (2; -3). Знайти координати кінців відрізка.*

***2.*** *Точки A (1; 1; 1), B (2; 4; 1) і C (3; 1; 1) є послідовними вершинами ромба. Знайти координати вершини D.*

## ***<u>ТЕМА 7.</u>*** **Скалярний, векторний, мішаний добутки векторів. Властивості. Застосування**

### ***7.1. Скалярний добуток двох векторів, властивості, застосування***

***Означення 1.*** *Скалярним добутком двох векторів* $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називають число, що дорівнює добуткові довжин цих векторів на косинус кута між ними і позначають

$$\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right) = |a||b|cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}).$$

Якщо хоча б один з векторів нульовий, то кут не визначений, і скалярний добуток вважають рівним нулю.

Скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ позначають як $\bar{a}\cdot\bar{b}$.

***Властивості скалярного множення***

Для будь-яких векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ та будь яких чисел $\alpha$ та $\beta$:

**1.** $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ – (комутативність скалярного множення);

**2.** $\alpha\bar{a} \cdot \beta\bar{b} = \alpha\beta(\bar{a} \cdot \bar{b})$ – (однорідність скалярного множення);

**3.** $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$ – (дистрибутивність скалярного множення);

**4.** $(\bar{a} + \bar{a}) = |\bar{a}|^2$ – (скалярний квадрат рівний квадрату модуля);

**5.** $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$ – (скалярний добуток перпендикулярних векторів рівний 0).

♦ **Приклад 1.** Знаючи, що $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 5, (\bar{a}\bar{b}) = \frac{\pi}{3}$, обчислимо:

1) $(\bar{a} \cdot \bar{b})$;
2) $|\bar{a} + \bar{b}|$;
3) $pr_{\bar{b}}\bar{a}$;
4) $pr_{\bar{b}}(2\bar{a} + 3\bar{b})$.

**1.** $(\bar{a} \cdot \bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b}) = 2 \cdot 5 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5.$

**2.** Використовуючи властивості лінійності та комутативності скалярного добутку, маємо:

$$|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{(\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b})} =$$

$$= \sqrt{(\bar{a}, \bar{a}) + (\bar{b}, \bar{a}) + (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{b}, \bar{b})} =$$

$$= \sqrt{|\bar{a}|^2 + 2(\bar{a}, \bar{b}) + |\bar{b}|^2} = \sqrt{2^2 + 2 \cdot 5 + 5^2} = \sqrt{39}.$$

**3.** $pr_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}| \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 2cos\frac{\pi}{3} = 1;$

**4.** $pr_{\bar{b}}(2\bar{a} + 3\bar{b}) = 2pr_{\bar{b}}\bar{a} + 3pr_{\bar{b}}\bar{b} = 2{\cdot}1 + 3{\cdot}5 = 17.$

Якщо вектори $\overline{a}, \overline{b}$ задано координатами

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z);$$

$$\bar{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

то: $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Тоді довжину вектора $\bar{a}$ можна знайти за формулою:

$$|\bar{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}.$$

♦ ***Приклад 2.*** Знайти $\bar{a} \cdot \bar{b}, |\bar{a}|$, $pr_{\bar{a}}\bar{b}$ для векторів

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = (2 \quad -1 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 10;$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{30};$$

$$pr_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}|} = \frac{10}{\sqrt{30}}.$$

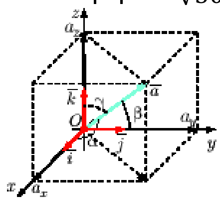



Рис. 7.1

Розглянемо ПДСК з ортонормованим базисом $(\bar{\mathrm{i}}, \bar{\mathrm{j}}, \bar{\mathrm{k}})$ (рис. 7.1) і вектор

$$\bar{a} = a_x \bar{\mathrm{i}} + a_y \bar{\mathrm{j}} + a_z \bar{\mathrm{k}} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_{(\bar{\mathrm{i}}, \bar{\mathrm{j}}, \bar{\mathrm{k}})}.$$

Помножимо вектор $\bar{a}$ скалярно послідовно на вектори $\bar{\mathrm{i}}, \bar{\mathrm{j}}$ та $\bar{\mathrm{k}}$ і врахуємо означення скалярного добутку та проекції вектора на напрям:

$$(\bar{a},\bar{\imath}) = |a||\bar{\imath}|\cos\widehat{(\bar{a},\bar{\imath})} = |\bar{a}|\cos\widehat{(\bar{a},\bar{\imath})} = \boxed{pr_{\bar{\imath}}\bar{a} = a_x;}$$

$$(\bar{a},\bar{\jmath}) = |a||\bar{\jmath}|\cos\widehat{(\bar{a},\bar{\jmath})} = |\bar{a}|\cos\widehat{(\bar{a},\bar{\jmath})} = \boxed{pr_{\bar{\jmath}}\bar{a} = a_y;}$$

$$(\bar{a},\bar{k}) = |a||\bar{k}|\cos\widehat{(\bar{a},\bar{k})} = |\bar{a}|\cos\widehat{(\bar{a},\bar{k})} = \boxed{pr_{\bar{k}}\bar{a} = a_z.}$$

**Висновок.** Координати вектора в ортонормованому базисі дорівнюють проекції вектора на координатні осі.

Числа

$$\cos\alpha = \cos\widehat{(\bar{a},\bar{\imath})} = \frac{(\bar{a},\bar{\imath})}{|\bar{a}|} = \frac{a_x}{|\bar{a}|},$$

$$\cos\beta = \cos\widehat{(\bar{a},\bar{\jmath})} = \frac{(\bar{a},\bar{\jmath})}{|\bar{a}|} = \frac{a_y}{|\bar{a}|},$$

$$\cos\gamma = \cos\widehat{(\bar{a},\bar{k})} = \frac{(\bar{a},\bar{k})}{|\bar{a}|} = \frac{a_z}{|\bar{a}|}.$$

називають прямокутними косинусами вектора $\bar{a}$.

**Застосування скалярного добутку:**

1. **<u>Обчислення кута між ненульовими векторами</u>**

$$\cos(\bar{a}\cdot\bar{b}) = \frac{(\bar{a}\cdot\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|};$$

$$\widehat{(\bar{a},\bar{b})} = \frac{(\bar{a}\cdot\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}.$$

2. **<u>Обчислення проекції вектора</u>**

$$\mathrm{pr}_{\bar{a}} = \frac{(\bar{a}\cdot\bar{b})}{|\bar{a}|}.$$

3. **<u>Критерій перпендикулярності векторів</u>**

Скалярний добуток векторів дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли вектори перпендикулярні.

$$(\bar{a}\cdot\bar{b}) = 0 \Leftrightarrow \widehat{(\bar{a}\cdot\bar{b})} = \frac{\pi}{2}.$$

4. **<u>Робота сталої сили</u>**

Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно з положення $B$ у положення $C$ під дією сталої сили $\bar{F}$, що утворює кут φ з вектором переміщенням $\bar{s} = \overline{BC}$ (рис. 7.2).

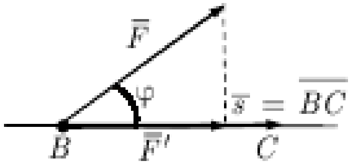



Рис. 7.2

Роботу сили $\bar{F}$ під час переміщення $\bar{s}$ обчислюють за формулою

$$\boxed{A = |\bar{F}| cos\varphi \cdot |\bar{s}| = (\bar{F}, \bar{s})}.$$

### *7.2. Векторний добуток векторів, властивості, застосування*

***Означення 2.*** *Векторним добутком векторів* $\bar{a}$ та $\bar{b}$ називають вектор $\bar{c}$, який:

1) перпендикулярний до векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$;

2) завдовжки дорівнює добуткові довжин векторів на синус кута між ними:

$$\boxed{|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})};$$

3) напрямлений так, що вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ та $\bar{c}$ утворюють праву трійку (рис. 7.3) (проти руху годинникової стрілки).

Векторний добуток векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ позначають $\bar{a} \times \bar{b}$ векторний добуток колінеарних векторів вважають рівним нульовому вектору, зокрема $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$.

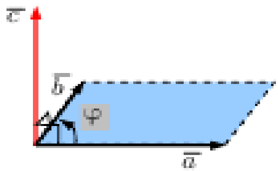



Рис. 7.3

**Властивості векторного добутку**

Для будь-яких трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ та $\bar{c}$ і дійсних чисел α та β:

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{a} \times \bar{b}$ – (антикомутативність векторного множення);

2) $\left[\alpha\bar{a} \times \beta\bar{b}\right] = \alpha\beta\left[\bar{a} \times \bar{b}\right]$ – (однорідність векторного множення);

3) $\left[(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c}\right] = [\bar{a} \times \bar{c}] + \left[\bar{b} \times \bar{c}\right]$ – (дистрибутивність векторного множення).

♦ **Приклад 3.** Знайти довжину вектора $\left(2\bar{a} - 3\bar{b}\right) \times$ $\times \left(3\bar{a} + 4\bar{b}\right)$, якщо

$$|\bar{a}| = 2, \left|\bar{b}\right| = 5, \widehat{(\bar{a}, \bar{b})} = \frac{\pi}{6}.$$

Скористаємося властивостями дистрибутивності, однорідності та антикомутативності векторного добутку:

$$|\left[2\bar{a} - 3\bar{b}, 3\bar{a} + 4\bar{b}\right]| = |[2\bar{a}, 3\bar{a}] + \left[-3\bar{b}, 3\bar{a}\right] + \left[2\bar{a}, 4\bar{b}\right] +$$
$$+\left[-3\bar{b}, 4\bar{b}\right]| = \left|-9\left[\bar{b}, \bar{a}\right] + 8\left[\bar{a}, \bar{b}\right]\right| = \left|9\left[\bar{a}, \bar{b}\right] + 8\left[\bar{a}, \bar{b}\right]\right| =$$
$$= \left|17\left[\bar{a}, \bar{b}\right]\right| = 17|[\bar{a}, b]| = 17|\bar{a}|\left|\bar{b}\right|\sin\widehat{(\bar{a}, \bar{b})} =$$
$$= 17 \cdot 2 \cdot 5 sin\frac{\pi}{6} = 85.$$

Якщо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ задано координатами в ортонормованому базисі

$$\bar{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right), \bar{b} = (b_x, b_y, b_z), \text{ то}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\mathrm{i}} & \bar{\mathrm{j}} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

♦ **Приклад 4.** Обчислити векторний добуток векторів

$$\bar{a} = \bar{\mathrm{i}} + 2\bar{\mathrm{j}} + 3\bar{k} \text{ та } \bar{b} = 4\bar{\mathrm{i}} + 5\bar{\mathrm{j}} + 6\bar{k}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\mathrm{i}} & \bar{\mathrm{j}} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \bar{\mathrm{i}}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \bar{\mathrm{j}}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\bar{\mathrm{i}} + 6\bar{\mathrm{j}} - 3\bar{k}.$$

**Векторний добуток застосовують для обчислення:**

**1. Площі паралелограма**

Якщо паралелограм і трикутник, побудовані на неколінеарних векторах $\bar{a}$ та $\bar{b}$, і висота h, проведена на сторону, що збігається з вектором $\bar{a}$, то

$$S_{\square} = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|.$$

**2. Площі трикутника**

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|.$$

**3. Висоти паралелограма**

$$h = \left|pr_{(\bar{a},\bar{b})}\bar{b}\right| = \frac{|\bar{a} \times \bar{b}|}{|\bar{a}|}.$$

**4. Критерій колінеарності векторів**

Два вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ колінеарні тоді й лише тоді, коли їхній векторний добуток є нульовим вектором, тобто

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}.$$

**5. Момент інерції сили щодо точки**

Нехай $\bar{F} = \overline{AB}$ — вектор сили, прикладеної до точки A (рис. 7.4). Моментом $\bar{M}$ сили $\bar{F}$ щодо точки називають *вектор*

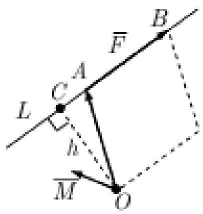



Рис. 7.4

$$\boxed{\bar{M}_0(\bar{F}) = [\overline{OA}, \bar{F}]}.$$

Довжина моменту $|\bar{M}|$ не залежить від точки A прикладання сили $\bar{F}$ на її лінії дії L. Справді,

$$|\overline{M}| = |[\overline{OA}, \overline{F}]| = |\overline{F}|h,$$

де $h = OC$ — перпендикуляр до L. Величина h від точки A не залежить.

### *7.3. Мішаний добуток трьох векторів, застосування, властивості*

***Означення 3**. Мішаним (векторно-скалярним) добутком векторів* $\bar{a}$, $\bar{b}$ та $\bar{c}$ називають число, що дорівнює скалярному добутку векторного добутку векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$ і позначають: $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$.

У просторі $V^3$ кожна трійка некомпланарних векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ та $\bar{c}$ прикладених до однієї точки, визначає паралелепіпед (рис. 7.5), ребрами якого є ці вектори.

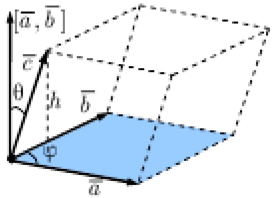



Рис. 7.5

**З точки зору геометрії:**

**1.** Модуль мішаного добутку $|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$ дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ та $\bar{c}$.

**2.** Мішаний добуток $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ додатний, якщо трійка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ права, і від’ємний, якщо ліва.

**3.** Мішаний добуток векторів $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ дорівнює нулю, якщо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарні.

**Властивості мішаного добутку:**

Для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ та $\bar{c}$ і дійсних чисел α та β правдиві тотожності:

1) $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c})$ – знаки векторного та скалярного добутків можна міняти місцями;

2) $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = (\bar{c}\bar{a}\bar{b}) = (\bar{b}\bar{c}\bar{a})$ – циклічне переставлення співмножників не змінює мішаного добутку;

3) $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = -(\bar{b}\bar{a}\bar{c}) = -(\bar{c}\bar{b}\bar{a}) = -(\bar{a}\bar{c}\bar{b})$ – переставлення двох співмножників змінює знак мішаного добутку;

4) $(\alpha\bar{a}_1 + \beta\bar{a}_2)\bar{b}\bar{c} = \alpha(\bar{a}_1\,\bar{b}\bar{c}) + \beta(\bar{a}_2\bar{b}\bar{c})$.

**Мішаний добуток в ортонормованому базисі**

Нехай задано вектори $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$ їх мішаний добуток через координати векторів обчислюється:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

**Мішаний добуток застосовують для обчислення**

**1) Об'єму паралелепіпеда**

$$V_{\text{пар}} = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|.$$

**2) Об'єму трикутної піраміди**

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|.$$

**3) Висоти паралелепіпеда**

$$h = \frac{|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|}{|\bar{a} \times \bar{b}|}.$$

**4) Критерії компланарності векторів**

Мішаний добуток векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ дорівнює нулю, тоді й лише тоді, коли вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ та $\bar{c}$ компланарні: $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = 0 \leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарні

**5) Взаємна орієнтація векторів**

Для будь-яких некомпланарних векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

1) якщо $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) > 0$, то вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють праву трійку;

2) якщо $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) < 0$, то вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють ліву трійку.

***КОНТРОЛЬНІ ВПРАВИ***

***1.*** *Задані три точки* $A(1;1;1), B(4;5;-3)$ *і* $C(2;3;4)$. *Обчислити* $\overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{AC}}$.

***2.*** *Дано* $\Delta\mathrm{ABC}$ *з вершинами* $A(2;-1;2), B(1;2;-1)$ *і* $C(3;2;1)$. *Обчислити його площу.*

***3.*** *Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах* $\bar{a} = \bar{\mathrm{i}} - 3\bar{\mathrm{j}} + \bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{\mathrm{i}} + \bar{\mathrm{j}} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{\mathrm{i}} + 2\bar{\mathrm{j}} + \bar{k}$.

## ***ТЕМА 8.*** Лінійний простір та його властивості. Вимірність та базис лінійного простору, n-вимірний арифметичний простір

### *8.1. Означення лінійного простору та його властивості*

Нехай L – множина елементів $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\ldots$ довільної природи.

***Означення.*** Множина L називається *лінійним простором,* якщо:

**1)** визначена операція додавання, яка кожній парі елементів $\bar{x}, \bar{y} \in L$ ставить у відповідність елемент $\bar{z} \in L$, що називається сумою елементів $\bar{x}$ *і* $\bar{y}$ та позначається $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$;

**2)** визначена операція множення елементів з L на число λ, яка кожному елементу $\bar{z} \in L$, що називається добутком елемента на число λ і позначається $\bar{y} = \lambda \cdot \bar{x}$;

**3)** введені операції додавання і множення на число задовольняють такі аксіоми:

**3.1)** $\bar{x}+\bar{y}=\bar{y}+\bar{x}$;

**3.2)** $(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z}=\bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})$;

**3.3)** Існує елемент $\bar{o}\in L$, такий, що $\bar{x}+\bar{o}=\bar{x},\ \bar{x}\in L$ (елемент називають *нульовим* елементом);

**3.4)** Для кожного $\bar{x}\in L$ існує такий елемент $\bar{y}\in L$, що $\bar{x}+\bar{y}=\bar{o}$.

**3.5)** Елемент $\bar{y}$ називається *протилежним* елементові $\bar{x}$ і позначається $-\bar{x}$;

**3.6)** $1\cdot\bar{x}=\bar{x}, \forall\bar{x}\in L$;

**3.7)** $\lambda(\mu\bar{x})=(\lambda\mu)\bar{x}$;

**3.8)** $\lambda(\bar{x}+\bar{y})=\lambda\bar{x}+\lambda\bar{y}$;

**3.9)** $(\lambda+\mu)\bar{x}=\lambda\bar{x}+\mu\bar{x}$.

Елементи лінійного простору прийнято називати *векторами.*

**Властивості лінійного простору:**

**1.** У довільному лінійному просторі існує єдиний нульовий елемент $\bar{o}$ і для кожного елемента $\bar{x}$ існує єдиний протилежний елемент $-\bar{x}$.

**2.** У довільному лінійному просторі нульовий елемент $\bar{o}=0\cdot\bar{x}$, де $\bar{x}$ - довільний елемент, а протилежний елемент $-\bar{x}=(-1)\cdot\bar{x}$.

## *8.2. Вимірність та базис лінійного простору. n-вимірний арифметичний простір*

***Означення 1.*** Вектори $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n$ лінійного простору L називаються лінійно не залежними, якщо рівність

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{x}_i=\bar{0}. \tag{1.1}$$

виконується тоді, коли $\alpha_1=0\ (i=\overline{1,n})$ (або $\sum_{i=1}^{n}\alpha^2 i=0$).

В протилежному випадку вектори $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n$ називаються лінійно залежними.

***Означення 2.*** Якщо в лінійному просторі L існує n лінійно незалежних векторів, а будь-які n+1 цього простору лінійно залежні, то простір називають ***n-вимірним*** і позначають $L_n$. Число n – розмірність лінійного простору.

***Означення 3.*** Впорядкована система n лінійно незалежних векторів $\{\bar{e}\} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ простору $L_n$ називається ***базисом цього простору.***

Будь-який вектор $\bar{x}$ n-вимірного лінійного простору $L_n$ єдиним способом можна подати у вигляді

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i. \tag{1.2}$$

Рівність (1.2) називається розкладом вектора $\bar{x}$ по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$, а числа $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ називаються координатами вектора $\bar{x} \in L_n$ (відносно базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$).

**n-вимірний арифметичний простір**

Будь-яка впорядкована сукупність із n дійсних (комплексних) чисел називається дійсним (комплексним) арифметичним вектором і позначається символом

$$\bar{x} = \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n.$$

Числа $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ називається компонента арифметичного вектора $\bar{x}$.

Над арифметичними векторами виконуються такі операції.

**Додавання:** якщо $\bar{x}$=$(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\bar{y}$=$(y_1, y_2, \dots, y_n)$, то $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n.$ (1.3)

**Множення на число:** якщо λ – число (дійсне чи комплексне) і $\bar{x}$=$(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то $\lambda\bar{x}$=$(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$. (1.4)

Множина всіх дійсних (комплексних) векторів із введеними вище операціями додавання (1.3) і множення на число (1.4) називається n-вимірним дійсним (комплексним) арифметичним простором.

Позначається n-вимірний арифметичний простір символом $R^n$, ($C^n$).

Якщо за базис в $R^n$ взята система векторів

$$
\begin{gathered}
\bar{e}_1 = (1,0,\ldots,0,0),\\
\bar{e}_2 = (0,1,\ldots,0,0),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\bar{e}_{n-1} = (0,0,\ldots,1,0),\\
\bar{e}_n = (0,0,\ldots,0,1).
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

То такий базис називають ***канонічним.***

Якщо зафіксувати в $R^n$ довільний базис $\{\bar{e}\} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$, то кожному вектору $\bar{x}$ згідно з (1.2) відповідають його координати в цьому базисі.

**Приклад 1.** Чи є лінійно залежною система векторів $\bar{x}_1 = (2;0;1), \bar{x}_2 = (1;-1;2), \bar{x}_3 = (3;1;1)$?

Складемо лінійну комбінацію заданих векторів і прирівняємо її до нульового вектора: $\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \lambda_3\bar{x}_3 = 0$.

В координатній формі останнє співвідношення набирає вигляду:

$$\alpha_1(2;0;1)+ \alpha_2(1;-1;2)+ \alpha_3(3;1;1)=(0;0;0).$$

Для знаходження $\alpha_1$, $\alpha_2$ і $\alpha_3$ отримали однорідну систему рівнянь:

Визначник матриці системи відмінний від нуля. Отже, система має єдиний розв'язок $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, а тому вектори $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ і $\bar{x}_3$ (згідно з означенням 1) є лінійно незалежним.

**Приклад 2.** Чи є лінійно незалежною система векторів $\bar{x}_1 = (-3;2;1), \bar{x}_2 = (2;-1;0), \bar{x}_3 = (-1;1;1)$? Складемо лінійну комбінацію векторів $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ та прирівняємо її до нульового вектора $\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \alpha_3\bar{x}_3 = \bar{0}$ або

$$\begin{cases} -3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0,\\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0,\\ \alpha_1 - 0\alpha_2 + \alpha_3 = 0.\end{cases}$$

Визначник системи $\Delta = 0$ (перевірити).

Отже, система має відмінні від нуля розв'язки $\Delta = 0$, а тому (згідно з означенням 1) вектори $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ є лінійно залежними.

**Приклад 3.** Показати, що вектори $\bar{e}_1 = (3; -2; 1)$, $\bar{e}_2 = (-1; 1; -2)$ і $\bar{e}_3 = (2; 1; -3)$ утворюють базис та знайти розклад вектора $\bar{x} = (11; -6; 5)$ по цьому базису.

Покажемо, що вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – лінійно незалежні. Нехай $\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3 = \bar{0}$, або

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Визначник системи $\Delta \neq 0$ (перевірити).

Отже, система має єдиний розв'язок є $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, а тому (згідно з означенням 1) вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ $і$ $\bar{e}_3$ – лінійно незалежні, а отже, утворюють базис. Тоді згідно із співвідношенням (1.2) маємо:

$\bar{x} = x_1 \cdot \bar{e}_1 + x_2 \cdot \bar{e}_2 + x_3 \cdot \bar{e}_3$, тобто $(11; -6{,}5) = x_1(3; -2; 1) + x_2(-1; 1; -2) + x_3(2; 1; -3)$, або

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -6, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $x_1 = 2, x_2 = -3\ і\ x_3 = 1$ (перевірити).

Отже, $\bar{x} = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3$.

Числа (2, -3, 1) є координатами вектора $\bar{x}$ в базисі $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

## *КОНТРОЛЬНІ ВПРАВИ*

***1.*** *Довести, що вектори* $\mathrm{\bar{e}}_\mathbf{1}$ $\mathrm{\bar{e}}_\mathbf{2}$ $\mathrm{\bar{e}}_\mathbf{3}$ *утворюють базис та знайти координати вектора* $\bar{\mathrm{x}}$ *в базисі* $\overline{(\mathrm{e}_\mathbf{1}\mathrm{e}_\mathbf{2}\mathrm{e}_\mathbf{3})}$

$\overline{\mathrm{e}_\mathbf{1}}$= (1; 3; 5) $\overline{\mathrm{e}}_\mathbf{2}$ = (0; 4; 5)

$\overline{\mathrm{e}_\mathbf{3}}$= (7; -8; 4) $\bar{\mathrm{X}}$= (2; -1; 3)

*__2.__ Чи можна в тривимірному просторі вибрати за базис трійку векторів $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$ , якщо*

$$\bar{a} = (0; 1; 2)\ \bar{b} = (-1; 2; 3)\ \bar{c} = (-1; 3; 7)$$

## ***<u>ТЕМА 9.</u>*** Лінійні оператори. Матриця лінійного оператора. Дії над лінійними операторами

### *9.1. Означення лінійного оператора*

Нехай задано два лінійні простори $L$ $і$ $L'$. Якщо кожному елементові $\bar{x} \in L$ ставиться у відповідність елемент $\bar{x}' = \hat{A}(\bar{x}) \in L'$, то кажуть, що задано перетворення або відображення $\hat{A}$ простору $L$ в $L'$. Елемент x називають прообразом (оригіналом), а відповідний йому елемент $\bar{x}'$– його образом (зображенням). Відображення $\hat{A}$ простору $L$ в $L'$ будемо позначати символом $\hat{A}: L \longrightarrow L'$.

***Означення 1.*** Відображення $\hat{A}: L \longrightarrow L'$, яке кожному елементові $\bar{x} \in L$ ставить у відповідність елемент $\bar{x}' \in L'$, називається оператором $\hat{A}$, що діє з $L$ в $L'$.

***Означення 2.*** Оператор $\hat{A}: L \longrightarrow L'$ називається лінійним, якщо для довільних елементів $\bar{x}_1$ і $\bar{x}_2$ простору L і довільного числа α справедливі співвідношення:

**1.** $\hat{A}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \hat{A}(\bar{x}_1) + \hat{A}(\bar{x}_2)$,

**2.** $\hat{A}(\alpha\bar{x}) = \alpha\hat{A}(\bar{x})$. (9.1)

З означення 2 випливає, що

$$\hat{A}(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \hat{A}(\bar{x}_1). \qquad (9.2)$$

**Приклад 1.** Оператор $\hat{0}$, який будь-який елемент простору L переводить в нульовий елемент, називається **нульовим оператором.** Показати, що оператор $\hat{0}$ – лінійний.

➢ Згідно з означенням нульового оператора $\hat{0}$ маємо: $\hat{0}(\bar{x}) = \bar{0}$,
де $\bar{x}$ – довільний елемент простору L. Тоді $\hat{0}(\bar{x}_1 + +\bar{x}_2) = \bar{0} = \bar{0} + \bar{0} = \hat{0}(\bar{x}_1) + \hat{0}(\bar{x}_2)$, $\hat{0}(\alpha\bar{x}) = \bar{0} = \alpha \cdot \bar{0} =$
$= \alpha\hat{0}(\bar{x})$,
тобто виконуються умови (2.1), а це означає, що оператор $\hat{0}$ – лінійний.

**Приклад 2.** Оператор $\hat{E}$, який будь-який $\bar{x} \in L$ переводить в той самий елемент $\bar{x}$, називається *<u>одиничним,</u>* або *<u>тотожним</u>* оператором. Показати, оператор $\hat{E}$ – лінійний.

➢ Згідно з означенням одиничного оператора маємо: $\hat{E}(\bar{x}) = \bar{x}$, де $\bar{x}$ – довільний елемент простору L. Тоді, $\hat{E}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \hat{E}(\bar{x}_1) + \hat{E}(\bar{x}_2)$,
$\hat{E}(\alpha\bar{x}) = \alpha \cdot \bar{x} = \alpha \cdot \hat{E}(\bar{x})$.

**Приклад 3.** Нехай $\hat{A}$ – оператор множення довільної матриці X із простору квадратних матриць другого порядку на матрицю $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$.

Показати, що цей оператор лінійний.

Нехай B, C – дві довільні матриці простору квадратних матриць другого порядку, тоді

$$\hat{A}(B) = B \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}; \hat{A}(C) = C \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Враховуючи властивості добутку матриць і множення матриці на число, маємо:

$$1)\hat{A}(B + C) = (B + C) \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} = B \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} +$$
$$+C \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} = \hat{A}(B) + \hat{A}(C);$$
$$2)\hat{A}(\alpha B) = (\alpha B) \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} = \alpha \left(B \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}\right) = \alpha\hat{A}(B).$$

Отже, умови означення 2 виконуються і оператор $\hat{A}$ – лінійний.

**Приклад 4.** Перевірити, чи відображення $\widehat{\mathrm{A}}$ простору арифметичних векторів $\mathrm{R}^3$, де $\widehat{\mathrm{A}}(\bar{\mathrm{x}}) = (\mathrm{x}_1 - 2\mathrm{x}_3; \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 - -5; 2\mathrm{x}_1 - 7)$ буде лінійним оператором.

Перевіримо виконання умов 1 і 2 означення лінійного оператора. Для цього розглянемо образ суми векторів

$$\bar{z} = (z_1, z_2, z_3), \bar{y} = (y_1, y_2, y_3):$$

$$\hat{A}(\bar{z} + \bar{y}) = \hat{A}(z_1 + y_1; z_2 + y_2; z_3 + y_3) = ((z_1 + y_1) - -2(z_3 + y_3); (z_2 + y_2) + (z_3 + y_3) - 5; 2(z_1 + y_1) - 7)) = = (z_1 + y_1 - 2z_3 - 2y_3; z_2 + y_2 + z_3 + y_3 - 5; 2z_1 + 2y_1 - 7).$$

Але $\hat{A}(\bar{z}) = (z_1 - 2z_3; z_2 + z_3 - 5; 2z_1 - 7)$,

$$\hat{A}(\bar{y}) = (y_1 - 2y_3; y_2 + y_3 - 5; 2y_1 - 7).$$

$$\hat{A}(\bar{z}) + \hat{A}(\bar{y}) = (z_1 - 2z_3 + y_1 - 2y_3; z_2 + z_3 - 5 + y_2 + +y_3 - 5; 2z_1 - 7 + 2y_1 - 7)$$

$$(z_1 + y_1 - 2z_3 - 2y_3; z_2 + z_3 + y_2 + y_3 - 10; 2z_1 + 2y_1 - 14).$$

Отже, $\hat{A}(\bar{z} + \bar{y}) \neq \hat{A}(\bar{z}) + \hat{A}(\bar{y})$, і дане перетворення не є лінійним.

**Приклад 5.** Довести, що проектування тривимірного простору $\mathrm{R}^3$ на координатну вісь вектора $\bar{\mathrm{e}}_2$ паралельно координатній площині векторів $\bar{\mathrm{e}}_1, \bar{\mathrm{e}}_3$ є лінійним перетворенням (оператором).

Якщо $\bar{\mathrm{x}} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3)$ довільний вектор простору $\mathrm{R}^3$, то $\text{пр}_{\bar{\mathrm{e}}_2}\bar{\mathrm{x}} = \bar{\mathrm{e}}_2 \cdot \bar{\mathrm{x}} = \mathrm{x}_2$.

Отже, оператор проектування на вісь $\bar{\mathrm{e}}$ паралельно площині $\bar{\mathrm{e}}_1, \bar{\mathrm{e}}_3$ кожному вектору $\bar{\mathrm{x}}$ ставить у відповідність координату $\mathrm{x}_2$.

Покажемо, що цей оператор – лінійний. Справді:

$$\widehat{\mathrm{A}}(\bar{\mathrm{x}} + \bar{y}) = x_2 + y_2 = \hat{A}(\bar{x}) + \hat{A}(\bar{y}),$$

$$\widehat{\mathrm{A}}(\lambda\bar{x}) = \lambda x_2 = \lambda\hat{A}(\bar{x}).$$

Отже, $\widehat{\mathrm{A}}$ – лінійний оператор.

### *9.2. Матриця лінійного оператора*

Нехай $L$ $i$ $L'$ відповідно n-вимірний і m-вимірний лінійні простори, $\widehat{\mathrm{A}}$ – лінійний оператор з $L$ в $L'$ , тобто якщо $\bar{x} \in L$ , а $\bar{x}' \in L'$, то

$$\bar{\mathrm{x}}' = \widehat{\mathrm{A}}(\bar{x}). \tag{9.3}$$

Виберемо базиси $\{\bar{\mathrm{e}}\}$: $\bar{\mathrm{e}}_1, \bar{\mathrm{e}}_2, \dots, \bar{\mathrm{e}}_n$ $i$ $\{\bar{e}'\}$: $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_m$ в просторах $L$ $i$ $L'$. Тоді

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i, \bar{x}' = \sum_{i=1}^{m} \alpha'_i \bar{e}'_i. \tag{9.4}$$

Розглянемо задачу – знайти вираження координат образу $\bar{x}'$.

Через координати прообразу $\bar{x}$.

Згідно з (9.2) маємо

$$\bar{x}' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \hat{A}(\bar{e}_i). \tag{9.5}$$

Нехай

$$\widehat{\mathrm{A}}(\bar{\mathrm{e}}_{\mathrm{i}}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ji} \bar{e}'_j \left(i = \overline{l, n}\right). \tag{9.6}$$

Підставляючи (9.6) в (9.5) та прирівнюючи коефіцієнти при $\bar{\mathrm{e}}'_j (j = \overline{l, m})$ в лівій та правій частинах, отримаємо

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, \alpha_i. \tag{9.7}$$

Формули (9.7) є розв'язком поставленої вище задачі, тобто це формули перетворення координат елемента $\bar{x}$ при відображенні $\widehat{\mathrm{A}}$ простору $L$ *в* $L'$ . Запишемо їх у матричному вигляді:

$$X' = A \cdot X, \tag{9.8}$$

де

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}, X = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{Vmatrix}, X' = \begin{Vmatrix} \alpha_1{}' \\ \alpha_2{}' \\ \cdots \\ \alpha_m{}' \end{Vmatrix}.$$

Матриця A називається матрицею лінійного оператора $\widehat{\mathrm{A}}: L \to L'$.

Кожному лінійному оператору $\widehat{\mathrm{A}}: L \to L'$(у вибраному базисі) відповідає матриця A, і навпаки, кожна числова матриця (відповідних розмірів) є матрицею лінійного оператора. Стовпці матриці A є координатами образів базисних векторів.

Операторові $\widehat{\mathrm{A}}: L \to L'$ відповідає квадратна матриця $\mathrm{A} = \left\| a_{ij} \right\|_1^n$.

Отже, кожному лінійному оператору $\widehat{\mathrm{A}}$ в n-вимірному просторі у вибраному базисі відповідає деяка квадратна матриця A n-го порядку.

Справедливе і обернене твердження: кожній матриці A n-го порядку у заданому базисі відповідає деякий лінійний оператор $\widehat{\mathrm{A}}$.

Отже, встановлена взаємно однозначна відповідність між лінійними операторами в n-вимірному просторі і матрицями n-го порядку.

Справедливе і обернене твердження: кожній матриці A n-го порядку у заданому базисі відповідає деякий лінійний оператор $\widehat{\mathrm{A}}$.

Отже, встановлена взаємно однозначна відповідність між лінійними операторами в n-вимірному просторі і матрицями n-го порядку. Особливо необхідно звернути увагу на різницю між виразами $\bar{\mathrm{x}}' = \hat{A}(\bar{x})$ І $X' = A \cdot X$. Перший з них – це символічний запис правила, згідно з яким елемент $\bar{\mathrm{x}}$ перетворюється в елемент $\bar{\mathrm{x}}'$(незалежно від вибору базису), а другий встановлює відповідність між координатами елементів $\bar{\mathrm{x}}$ і $\bar{\mathrm{x}}'$ у вибраному базисі.

Висновок: у вибраному базисі оператору $\widehat{\mathrm{A}}$ відповідає лінійне перетворення $\mathrm{X}' = \mathrm{A} \cdot \mathrm{X}$.

**Приклад 6.** Знайти координати вектора $\bar{x}'$, де $\bar{x}' = \hat{A}(\bar{x})$, якщо $\bar{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$ і матриця має вигляд $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$.

Згідно з (9.8) маємо

$$\begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ 2x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 3x_3 \end{Vmatrix},$$

тобто $x_1' = x_1, x_2' = 2x_1 + 2x_2, x_3' = 3x_1 + 3x_3$.

**Приклад 7.** Знайти лінійне перетворення, яке переводить вектори $\bar{a}_1 = (1,0,3), \bar{a}_2 = (2,1,0)$ та $\bar{a}_3 = (0,0,1)$, що задані в канонічному базисі, відповідно у вектори $\bar{b}_1 = (2,2,1), \bar{b}_2 = (2,1,0)$ $i$ $\bar{b}_3 = (1,2,3)$. Знайти матрицю цього перетворення.

Нехай A – матриця перетворення, яке переводить вектори $\bar{a}_i$ в $\bar{b}_i$ $(i = 1,2,3)$.

Тоді

$$A \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}, A \cdot \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, A \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix},$$

Або, в матричній формі $A \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$.

Оскільки $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = 1 \neq 0$, то

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -4 & 9 & 2 \\ -8 & 16 & 3 \end{Vmatrix}.$$

### *9.3. Дії над лінійними операторами*

Нехай $\hat{A}$ і $\hat{B}$ – два лінійні оператори, які діють в просторі L.

**1.** ***Рівність операторів.*** Оператор $\widehat{\mathrm{A}}$ і $\widehat{\mathrm{B}}$ називаються рівними, що позначається $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}}$, якщо для будь-якого $\overline{\mathrm{x}} \in L$ справедлива рівність

$$\widehat{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{x}}) = \widehat{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{x}}).$$

Якщо $\mathrm{A} = \left\|a_{ij}\right\|_l^n$ $i$ $B = \left\|b_{ij}\right\|_l^n$ – матриці, які відповідають лінійним оператором $\widehat{\mathrm{A}}$ і $\widehat{\mathrm{B}}$ в деякому базисі $\overline{\mathrm{e}}_1, \overline{\mathrm{e}}_2, \ldots, \overline{\mathrm{e}}_n$ простору L, то $a_{ij} = b_{ij}(i, j = \overline{l, n})$, тобто рівним лінійним операторам відповідають в даному базисі однакові матриці. Очевидно, що справедливе і обернене твердження.

**2.** ***Додавання операторів.*** Сумою двох лінійних операторів $\widehat{\mathrm{A}}$ і $\widehat{\mathrm{B}}$ називається оператора $\hat{\mathrm{C}}$, що позначається $\hat{\mathrm{C}} = \widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}}$, якщо для будь-якого $\overline{\mathrm{x}} \in L$ справедливе співвідношення:

**3.** $\hat{\mathrm{C}}(\overline{\mathrm{x}}) = \left(\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}}\right)(\overline{\mathrm{x}}) = \widehat{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{x}}) + \widehat{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{x}})$.

Оператор $\hat{\mathrm{C}} = \widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}}$ є лінійним оператором, а його матриця C=A+B, тобто при додаванні лінійних операторів їх матриці додаються.

**4.** ***Множення оператора на число.*** Добутком оператора $\widehat{\mathrm{A}}$ на число λ називається оператор $\widehat{\mathrm{B}}$, що позначається $\widehat{\mathrm{B}} = \lambda\widehat{\mathrm{A}}$, якщо для будь якого $\overline{\mathrm{x}} \in L$ справедлива рівність

$$\widehat{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{x}}) = (\boldsymbol{\lambda}\widehat{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{x}})).$$

Показати, що оператор $\widehat{\mathrm{B}}$ є лінійним, а його матриця має вигляд: $\mathrm{B} = \lambda \cdot \mathrm{A}$.

**5.** ***Множення операторів.*** Добутком лінійних операторів $\widehat{\mathrm{A}}$ та $\widehat{\mathrm{B}}$ називається оператор $\hat{\mathrm{C}}$ , що позначається $\hat{\mathrm{C}} = \widehat{\mathrm{A}} \cdot \widehat{\mathrm{B}}$, якщо для будь-якого $\overline{\mathrm{x}} \in L$ справедлива рівність $\hat{\mathrm{C}}(\overline{\mathrm{x}}) = \widehat{\mathrm{A}}\left(\widehat{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{x}})\right)$тобто спершу елемент $\overline{\mathrm{x}}$ перетворюється в елемент $\overline{\mathrm{y}} = \widehat{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{x}})$, а потім – в елемент $\bar{z} = \hat{A}(\bar{y})$.

Оператор $\hat{\mathrm{C}}$ – лінійний, оскільки для довільних $\overline{\mathrm{x}}_1 \in L, \bar{x}_2 \in L$та довільного числа λ:

$$\hat{C}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)=\hat{A}\left(\hat{B}(\bar{x}_1+\bar{x}_2)\right)=\hat{A}\left(\hat{B}(\bar{x}_1)+\hat{B}(\bar{x}_2)\right)=$$
$$=\hat{A}\left(\hat{B}(\bar{x}_1)\right)+\hat{A}(\bar{x}_2))=\hat{C}\left(\bar{x}_1\right)+\hat{C}\left(\bar{x}_2\right) \text{ і}$$
$$\hat{C}(\lambda\bar{x}_1)=\hat{A}\left(\hat{B}(\lambda\bar{x}_1)\right)=\hat{A}\left(\lambda\hat{B}(\bar{x}_1)\right)=\lambda\hat{A}\left(\hat{B}(\bar{x}_1)\right)=\lambda\hat{C}(\bar{x}_1).$$

Оператору $\hat{C}$ відповідає матриця C=A·B, тобто при множенні лінійних операторів відповідні їм матриці перемножуються.

**6.** ***Обернений оператор.*** Оператор $\hat{B}$ називається оберненим щодо оператора $\hat{A}$, якщо $\hat{A}\hat{B}=\hat{B}\hat{A}=\hat{E}$. В цьому випадку записують: $\hat{B}=\hat{A}^{-1}$. З означення випливає: якщо $\bar{x}'=\hat{A}(\bar{x})$, то $\bar{x}=\hat{A}^{-1}(\bar{x}')$. Якщо оператор $\hat{A}$ є лінійним, то лінійним є оператор $\hat{A}^{-1}$. Обернений оператор $\hat{A}^{-1}$ існує тоді і тільки тоді, коли det A≠0, де A – матриця оператора $\hat{A}$. Оберненому операторові $\hat{A}^{-1}$ відповідає матриця $A^{-1}$, яка обернена до матриці A.

**Приклад 8.** Лінійні оператори $\hat{A}$ і $\hat{B}$ задані матрицями $A=\begin{Vmatrix}2 & 4\\ 3 & -2\end{Vmatrix}$, $B=\begin{Vmatrix}3 & -1\\ -2 & 4\end{Vmatrix}$. Знайти матрицю C оператора $\hat{C}=\hat{A}+\hat{B}$.

Оскільки при додаванні лінійних операторів їх матриці додаються, то матриця C=A+B, тобто $C=\begin{Vmatrix}5 & 3\\ 1 & 2\end{Vmatrix}$.

***КОНТРОЛЬНІ ВПРАВИ***

***1.*** *Лінійні оператори* $\hat{A}$ *і* $\hat{B}$ *задані матрицями* $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$. *Знайти матрицю C оператора* $\hat{C}=\hat{A}+\hat{B}$.

***2.*** *Знайти формули перетворення координат при переході від базису* $(\bar{e})=(\overline{\mathbf{e_1}}\overline{\mathbf{e_2}}\ \overline{\mathbf{e_3}}\overline{\mathbf{e_4}})$ *до базису*

*$(\overline{e^1})$=( $\overline{e_1{}^1 e_2{}^1 e_3{}^1 e_4{}^1}$) якщо* $\overline{e_1}$= (1; 0; 0; 0), $\overline{e_2}$= (0; 1; 0; 0), $\overline{e_3}$= (0; 0; 1; 0), $\overline{e_4}$= (0; 0; 0; 1)

$\overline{e_1{}^1}$ = (1; 1; 0; 0), $\overline{e_2{}^1}$ = (1; 0; 1; 0), $\overline{e_3{}^1}$= (1; 0; 0; 1), $\overline{e_4{}^1}$= (1; 1; 1; 1).

***КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ***

1. Що таке вектор?
2. Як позначають і зображають вектор?
3. Що називають довжиною вектора?
4. Який вектор називають нульовим?
5. Які вектори називають рівними?
6. Які вектори називають компланарними?
7. Що таке орт вектора?
8. Які лінійні операції можна виконувати над векторами?
9. Які властивості мають операції додавання векторів і множення числа на вектор?
10. За якими правилами можна знайти суму векторів?
11. Які вектори називають колінеарними?
12. Як формулюється необхідна й достатня умова колінеарності двох векторів?
13. Що таке координати вектора?
14. Що називають лінійною комбінацією системи векторів?
15. Яку систему векторів називають лінійно залежною, яку лінійно незалежною?
16. Яка необхідна і достатня умова лінійної залежності системи векторів?
17. Як виконують лінійні операції над векторами, заданими своїми координатами?
18. Яка система векторів утворює базис у *n*-вимірному просторі?
19. Яким чином записують розклад вектора в базисі?

20. Як визначають координати в даному базисі?

21. За якими формулами обчислюють довжину, проекції на координатні осі, напрямні косинуси вектора?

22. Як визначають скалярний добуток векторів?

23. Які властивості має скалярний добуток векторів?

24. Як виражається скалярний добуток двох векторів через координати векторів співмножників?

25. Яка необхідна і достатня умова перпендикулярності двох векторів?

26. Як виражається ця умова в координатній формі?

27. Як визначають векторний добуток векторів?

28. Які властивості векторного добутку векторів?

29. Які застосування векторного добутку векторів?

30. Означення мішаного добутку трьох векторів.

31. Які властивості мішаного добутку векторів?

32. Яка умова компланарності трьох векторів?

33. Означення лінійного простору, його властивості.

34. Що таке лінійні оператори і які дії над ними виконують?

## ***ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2***
## ***«АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»***

## *ТЕМА 1.* **Лінії на площині**

### ***1.1. Рівняння прямої на площині (загальне, у відрізках на осях, з кутовим коефіцієнтом, канонічне, що проходить через дві точки, через точку, перпендикулярно до даного вектора і в даному напрямі). Взаємне розміщення прямих на площині.***

### **Загальне рівняння прямої**

**Означення.** *Рівняння першого степеня відносно змінних $x$ і $y$, тобто рівняння вигляду $Ax + By + C = 0$ за* *умови, що коефіцієнти A і B одночасно не дорівнюють нулю, називається* ***загальним рівнянням прямої на площині.***

***Окремі випадки загального рівняння прямої:***

| Значення коефіцієнтів | Вид рівняння | Положення прямої |
|---|---|---|
| C=0 | $A\cdot x+B\cdot y=0\cdot(y=k\cdot x)$ | Проходить через початок координат |
| A=0 | $B\cdot y+C=0$ $\left(y=-\frac{C}{B}\right)$ | Проходить паралельно осі ***Ox*** |
| B=0 | $A\cdot x+C=0$ $\left(x=-\frac{C}{A}\right)$ | Проходить паралельна осі ***Oy*** |
| A=C=0 | $y=0$ | Співпадає з віссю ***Ox*** |
| B=C=0 | $x=0$ | Співпадає з віссю ***Oy*** |

**Векторне рівняння прямої**

Нехай $l$ – задана пряма на площині $xOy$ (рис. 1.1).

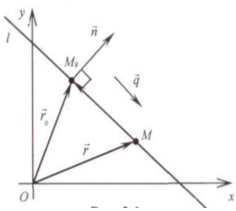



Рис. 1.1

$\boldsymbol{M_0\,(x_0;\,y_0)}$ – точка на цій прямій.

$\vec{n}=(A;B)$ – ненульовий вектор, перпендикулярний до прямої $l$ (він називається **нормальним вектором прямої**).

Якщо ***M(x;y)*** довільна точка на прямій *l*, відмінна від $\boldsymbol{M_0}$, то радіус-вектори точок $\boldsymbol{M_0}$ і M позначають відповідно $\vec{r}_0$ $i$ $\vec{r}$:

$$\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0; y - y_0).$$

Оскільки $\overline{M_0M} \perp \vec{n}$, то $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ – це рівняння називається ***векторне рівняння прямої на площині***. Його можна записати в координатній формі:

$$A \cdot (x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

**Канонічне рівняння прямої**

Нехай $\boldsymbol{M_0\ (x_0;\ y_0)}$ – задана точка прямої, а $\vec{q} = (m; n)$ – вектор, колінеарний прямій (він називається **напрямним вектором** прямої). Тобто вектори $\overline{M_0M}$ і $\vec{q}$ колінеарні, а значить координати цих векторів пропорційні.

Отже, $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$ – це рівняння називається ***канонічне рівняння прямої***, яка проходить через точку $\boldsymbol{M_0\ (x_0;\ y_0)}$.

♦ **Приклад 1.** *Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M_0$ (3;-5) і перпендикулярна до вектора* $\vec{n} = (4; 2)$. Нехай *M (x; y)* – довільна точка прямої, $\overline{M_0M} =$ $= (x - 3; y + 5)$. Оскільки, $\overline{M_0M} \perp \vec{n}$, то $4 \cdot (x - 3) + 2(y + 5) = 0$ *і* $4x + 2y - 2 = 0$ – шукане рівняння прямої.

♦ **Приклад 2.** *Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку M(2; 3).*

Вектор $\overrightarrow{OM} = (2; 3)$ колінеарний шуканій прямій. Отже в канонічному рівнянні прямої m = 2, n=3, а $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Тому $\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{3}$, $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$, $3x - 2y = 0$.

**Рівняння прямої у відрізках на осях**

Рівняння прямої у відрізках на осях має вигляд

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

a, b – відповідно абсциса і ордината точок перетину прямої з осями *Ox і Oy*.

♦ **Приклад 3.** Побудувати пряму $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$. Запишемо дане рівняння так: $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$.

тобто a =2 і b = -3

Дістанемо точки перетину *A(2; 0), B(0; -3)* і побудуємо пряму (рис. 1.2).

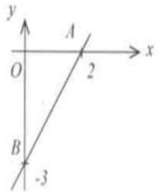



Рис. 1.2

♦ **Приклад 4.** *Загальне рівняння прямої 3x-4y+2=0 перетворити в рівняння у відрізках на осях.*

Зробимо такі перетворення *3x - 4y +2 = 0,3x - 4y = -2,*

$$\frac{3x}{-2} - \frac{4y}{-2} = 1, \frac{x}{-\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1.$$

## Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

*Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом* має вигляд:

$$\boldsymbol{y = k \cdot x + b,}$$

де $\boldsymbol{k}$ – *кутовий коефіцієнт,* який чисельно дорівнює тангенсу кута φ нахилу прямої до осі *Ox*:$\boldsymbol{k = tg\varphi}$, $\boldsymbol{b}$ – ордината точки перетину прямої з віссю *Oy*.

Якщо $\boldsymbol{\varphi} = 0°$, то $\boldsymbol{k} = 0$, тобто пряма паралельна осі *Ox*.

## Рівняння прямої, яка проходить через дану точку в заданому напрямі

*Рівняння прямої, яка проходить через дану точку* $A(x_A; y_A)$ в заданому напрямі, має вигляд:

$$y\text{-}y_A = k \cdot (x\text{-}x_A),$$

де $k = tg\varphi$ – *кутовий коефіцієнт* прямої.

Таке рівняння можна розглядати як рівняння пучка прямих, тобто множини прямих, які проходять через ту саму точку площини – точку $A(x_A;\ y_A)$.

## Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки

Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки $A(x_A;y_A)$ і $B(x_B;y_B)$ має вигляд:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

♦ **Приклад 5.** *Складіть рівняння сторін* $\Delta ABC$, *якщо:* $A(-3;\ -2),\ B(1;\ 5),\ C(8;\ -4)$.

$$(AB)\frac{x + 3}{1 + 3} = \frac{y + 2}{5 + 2},$$

$$7 \cdot (x + 3) = 4 \cdot (y + 2),$$

$$7 \cdot x - 4 \cdot y + 13 = 0,$$

$$(BC) 9 \cdot x + 7 \cdot y - 44 = 0,$$

$$(AC) 2 \cdot x + 11 \cdot y + 28 = 0 \text{ (самостійно)}.$$

## Перетин двох прямих

Якщо задано дві прямі їх загальними рівняннями:

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_{2y} + C_2 = 0$, які перетинаються, то щоб визначити координати точки перетину цих прямих треба розв'язати систему рівнянь даних прямих.

♦ **Приклад 6.** *Знайти точку перетину прямих*

$3x - 4y + 11 = 0$ і $4x - y - 7 = 0$.

Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 11 = 0, \\ 4x - y - 7 = 0. \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 16 = 13;$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -11, \\ 4x - y = 7. \end{cases} \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -11 & -4 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 11 + 28 = 39;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -11 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 65, \text{ x} = 3,\ y = 5$$

**Відповідь: (3; 5).**

## Кут між двома прямими

Кут $\varphi$ між двома прямими, заданими загальними рівняннями

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *і* $A_2x + B_{2y} + C_2 = 0$, називається кут між їх нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1), \vec{n}_2 = (A_2; B_2)$ косинус якого визначається за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|}$$

або в координатній формі:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2} \cdot \sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2}},$$

Кут $\boldsymbol{\varphi}$ між двома прямими, заданими рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b_1(1)$ і $y = k_2x + b_2(2)$ обчислюється за формулою (рис. 1.3):

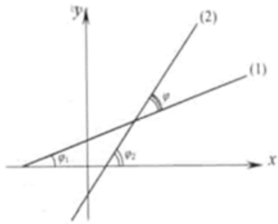



Рис. 1.3

$$tg\varphi = tg(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{tg\varphi_1 - tg\varphi_2}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2},$$

або

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}.$$

Кут $\boldsymbol{\varphi}$ між двома прямими заданими канонічними рівняннями $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}$ *і* $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$ і обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|}, \text{або } \cos\varphi = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\sqrt{{m_1}^2 + {n_1}^2} \cdot \sqrt{{m_2}^2 + {n_2}^2}}.$$

**Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих**

| ***Дві прямі задані:*** | | ***Умова пара-лель-ності*** | ***Умова перпендику-лярності*** |
|---|---|---|---|
| а) загальними рівняннями | $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. | $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. | $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$. |
| б) канонічними рівняннями | $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}$, $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$. | $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$. | $m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0$. |
| в) рівняннями з кутовими коефіцієнтами | $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$. | $k_1 = k_2$. | $k_2 = -\frac{1}{k}$, $(k_2 \cdot k_1 = -1)$. |

♦ **Приклад 7.** *Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку М(-2; 4) паралельно прямій 2x - 3y + 6=0.*

Запишемо рівняння з кутовим коефіцієнтом

$$-3y = -2x - 6, y = \frac{2}{3} \cdot x + 2, k_1 = \frac{2}{3}.$$

Якщо прямі паралельні, то $k_1=k_2$.Тому шукана пряма,яка проходить через точку М: $(y-4) = \frac{2}{3} \cdot (x+2)$, $2x - 3y + 16 = 0$.

♦ **Приклад 8.** *Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку М(2; 3) перпендикулярно прямій*

*5x - 4y - 20 = 0.*

Визначаємо $k_1$: $4y = 5x - 20, y = \frac{5}{4} \cdot x - 5, k_1 = \frac{5}{4}$, то $k_2 = -\frac{4}{5}$, і запишемо рівняння $y - 3 = -\frac{4}{5} \cdot (x-2)$, тоді $4x + 5y - 23 = 0$.

## Відстань від точки до прямої

Нехай задано точку $M_0\ (x_0;y_0)$ і пряму $l$: $Ax+By+C=0$. Відстань від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої $l$ є довжиною перпендикуляра $d = M_0N$,

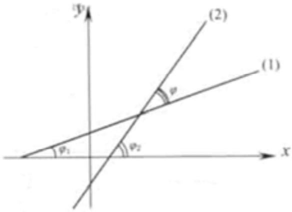



Рис. 1.4

яка обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

### *Контрольні вправи*

**1.** Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2; 1)$:

*а)* Паралельно до прямої $2x + 3y + 4 = 0$.

*б)* Перпендикулярно до цієї прямої.

***2.*** Обчислити площу прямокутника, якщо відомо рівняння двох його сторін $3x - 2y - 5 = 0$ і $2x + 3y + 7 = 0$, а одна з вершин знаходиться в точці $A(-2; 1)$.

## ***<u>ТЕМА 2.</u> Лінії другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола***

Лінії, координати точок яких задовільняють рівняння, що в прямокутній системі координат є рівнянням другого степеня, називають лініями, або кривими другого порядку.

В загальному рівняння кривої другого порядку має вигляд:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F=0.$$

В залежності від значень коефіцієнтів *A, B, C, D, E, F* (не рахуючи випадків виродження) дане рівняння визначає одну з чотирьох кривих другого порядку: коло, еліпс, гіперболу чи параболу. Розглянемо кожну з цих кривих детальніше.

## Коло

***Задача.*** *Скласти рівняння множини точок на площині, віддалених від початку координат на відстань r.*

З умови випливає, що для точки $M(x;\ y)$, яка належить шуканій множині, справедлива рівність

$$|OM| = r, |OM| = \sqrt{x^2+y^2}, r = \sqrt{x^2+y^2}, r^2 = x^2 + y^2.$$

Шукана множина точок – коло з центром у початку координат і радіусом *r* (рис. 1.5).

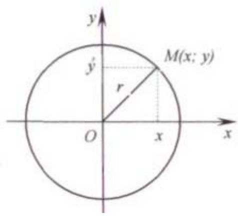



Рис. 1.5

**Означення.** ***Колом*** *називають множину точок на площині, рівновіддалених від даної точки (центра) на задану відстань r (радіус кола).*

Рівняння кола з центром O (0;0) і радіусом *r*.

$$x^2+y^2 = r^2.$$

Рівняння кола з центром в точці $O\ (x_0;\ y_0)$і радіусом $r$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Рівняння кола в *загальному вигляді:*

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0,$$

де A, B, C, D – сталі коефіцієнти.

*Параметричне* рівняння кола:

$$x = r \cdot cost,\ y = r \cdot sint,\ де\ t = const.$$

♦ **Приклад 1.** *Скласти рівняння кола з центром* $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ *і радіусом 2. Побудувати це коло.*

Рівняння: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = 4.$

*Побудова* (рис. 1.6):

**1.** Будуємо центр кола, точка $O(\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$;

**2.** Описуємо коло радіусом 2.

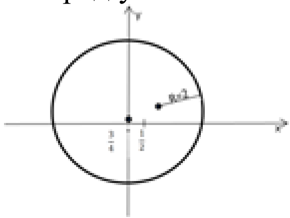


Рис. 1.6

♦ **Приклад 2.** *Знайти координати центра і радіус кола*

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0.$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) - 25 = 0,$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25,$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2.$$

*Отже, O (-1;2), r= 5.*

## Еліпс

**Означення.** ***Еліпсом*** *називається множина точок на площині, сума відстаней від яких до двох даних точок (фокусів) є величина стала і більша за відстань між фокусами.*

*Рівняння еліпса,* фокуси якого лежать на осі Ох, а центр знаходиться в початку координат (рис. 1.7):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a>b),$$

де $\boldsymbol{a}$ – довжина великої півосі;

$\boldsymbol{b}$ – довжина малої півосі.

Якщо $2c$ – фокусна відстань, то $a^2-b^2=c^2$.

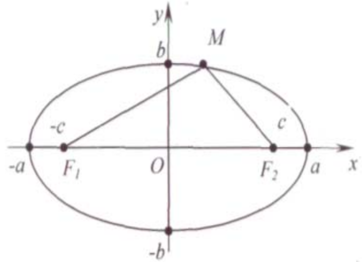



Рис. 1.7

Форму еліпса визначає його ексцентриситет – відношення фокусної відстані до довжини великої осі:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1.$$

Рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі $O_y$, а центр знаходиться в початку координат (рис. 1.8):

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

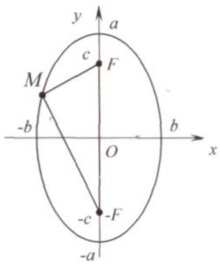


Рис. 1.8

♦ **П р и к л а д 3.** *Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ох, якщо дано його осі 2а = 12, 2b = 8.*

*Так як:а = 6, b = 4, тоді*

$$\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{4^2}=1, \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1.$$

♦ **П р и к л а д 4.** *Дано еліпс:* $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{51}=1.$

*Обчислити його ексцентриситет.*

$$a^2=100, b^2=51, c^2=100-51=49, e=\frac{c}{a}=\frac{7}{10}.$$

*Якщо центр еліпса знаходиться в точці О($x_0$; $y_0$), а осі паралельні осям координат, то <u>рівняння еліпса</u> має вигляд:*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

## <u>Гіпербола</u>

***ОЗНАЧЕННЯ***. *<u>Гіперболою</u> називається множина точок на площині, для яких модуль різниці відстаней до двох даних точок (фокусів) є величина стала і менша за відстань між фокусами.*

Рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі $O_x$, має вигляд: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,
де $a$ – довжина дійсної півосі
$b$ – довжина уявної півосі.

Залежність між параметрами $a,b,c$:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

***<u>Ексцентриситетом</u>*** гіперболи називається відношення фокусної відстані до її дійсної осі:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

Гіпербола має дві асимптоти. (Прямі, до яких необмежено наближаються вітки гіперболи) (рис. 1.9).

Рівняння асимптот гіперболи:

$$y = \frac{b}{a}x \text{ і } y = -\frac{b}{a}x.$$

Якщо дійсна і уявна осі гіперболи рівні $(a = b)$, то гіпербола називається *<u>рівносторонньою</u>*, її рівняння:

$x^2 - y^2 = a^2$, а рівняння асимптоту $y = \pm x$. Рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі $O_y$:

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, або $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$, рівняння асимптот $y == \pm\frac{a}{b}x$.

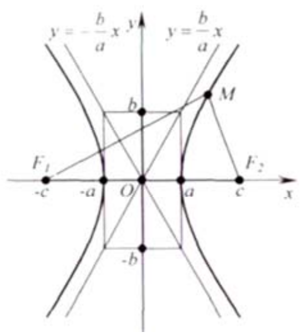



Рис. 1.9

Рівняння рівносторонньої. гіперболи з фокусами на осі $O_y$:

$$y^2 - x^2 = a^2.$$

Гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ і $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$ – називаються ***спряженими.***

Якщо центр гіперболи знаходиться в *т. $O(x_0; y_0)$,* а осі паралельні осям координат, то її рівняння має вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

♦ **Приклад 5.** *Скласти рівняння гіперболи, якщо її вершини лежать у точках $A_1(-3; 0)$ і $A_2(3; 0)$ і фокуси – в точках $F_1(-5; 0)$ і $F_2(5; 0)$.*

Отже, $a = 3$, $c = 5$, тому $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$, $b$=4, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$

♦ **Приклад 6.** *Скласти рівняння асимптот гіперболи:* $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{256} = 1.$

$$a = 12, b = 16, y = \pm\frac{b}{a}x, y = \frac{4}{3}x, y = -\frac{4}{3}x.$$

## <u>Парабола</u>

***ОЗНАЧЕННЯ***. *<u>Параболою</u> називається множина точок на площині рівновіддалених від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси).*

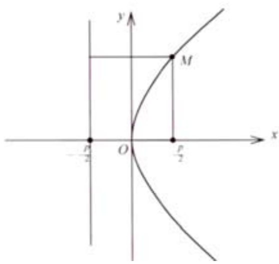



Рис. 1.10

Відстань від фокуса до директриси позначають параметром ***p*** (рис. 1.10).

***Рівняння параболи, рівняння директриси в залежності від розміщення вершини, напрямлення віток і осей симетрії мають вигляд:***

| Рівняння | Координати вершини | Направлення віток | Вісь симетрії | Рівняння директриси |
|---|---|---|---|---|
| $y^2 = 2px$ | (0;0) | вправо | $O_x$ | $x=-\frac{p}{2}$ |
| $y^2 = -2px$ | (0;0) | вліво | $O_x$ | $x=\frac{p}{2}$ |
| $x^2 = 2py$ | (0;0) | вгору | $O_y$ | $x=-\frac{p}{2}$ |
| $x^2 = -2py$ | (0;0) | вниз | $O_y$ | $x=\frac{p}{2}$ |
| $(y-y_0)^2 = 2p\cdot(x-x_0)$ | $(x_0; y_0)$ | вправо | Паралельно осі $O_x$ | $x=-\frac{p}{2}+x_0$ |
| $(y-y_0)^2 = -2p\cdot(x-x_0)$ | $(x_0; y_0)$ | вліво | Паралельно осі $O_x$ | $x=\frac{p}{2}+x_0$ |
| $(x-x_0)^2 = 2p\cdot(y-y_0)$ | $(x_0; y_0)$ | вгору | Паралельно осі $O_y$ | $x=-\frac{p}{2}+y_0$ |
| $(x-x_0)^2 = -2p\cdot(y-y_0)$ | $(x_0; y_0)$ | вниз | Паралельно осі $O_y$ | $x=\frac{p}{2}+y_0$ |

♦ **Приклад 7.** *Дано рівняння параболи* $y^2 - 6y - 12x + 33 = 0$.

*Знайти координати її вершини.*

$$(y^2 - 2\cdot 3y + 3^2) = 12x - 24$$

$$(y-3)^2 = 12(x-2),\ b = 3,\ 2p = 12,\ p=6, a=2, A=(2;3).$$

♦ **П р и к л а д 8.** *Скласти рівняння параболи, вершиною якої є точка A(4; 6), а директрисою пряма x = -2.*

Рівняння параболи *(y-b) = 2p·(x - a).*Оскільки директриса перпендикулярна осі *Ox* і вісь параболи паралельна осі *Ox,* а вітки направлені вправо, то директриса розміщена лівіше від вершини *p/2* – відстань від директриси до вершини параболи:

$$\mathrm{p}/2 = |-2| + 4 = 6, \mathrm{p} = 12, (\mathrm{y}-6)2 = 24(\mathrm{x}-4).$$

♦ **П р и к л а д 9.** *Скласти рівняння параболи вершина якої знаходиться в точці A(-2;1), проходить через точку M(5;-6) і відомо що вісь симетрії параболи паралельна осі Oy.*

$(x - a)^2 = -2p\cdot(y-b)$

*т. M і A* належать параболі: $(5 + 2)^2 = -2p\cdot(-6-1)$,

$$p = 7/2,\ (x + 2)^2 = -7(y - 1).$$

## ***Контрольні вправи***

**1.** Задано еліпс $9x^2 + 25y^2 = 225$ . Знайти: а) півосі; б) фокуси; в) ексцентриситет.

**2.** Написати рівняння гіперболи, фокуси якої містяться на осі абсцис, відстань між ними 26, рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$.

**3.** Знайти координати фокуса і рівняння директриси параболи: $y^2 = 24$.

## ***<u>ТЕМА 3.</u> Рівняння площини в просторі. Відстань від точки до площини. Взаємне розміщення площин в просторі***

### Загальне рівняння площини

Нехай ***p***- площина, $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ – точка, яка належить цій площині, $\vec{n} = (A; B; C)$ – ненульовий вектор перпендикулярний до площини ***p*** (він називається **нормальним вектором площини).**

Якщо $M(x;\ y;\ z)$ – довільна точка площини *p,* відмінна від $M_0$, то вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, перпендикулярний до вектора $\vec{n} = (A; B; C)$, тобто $\overline{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$, радіус-вектори точок $M_0$ і $M$ відповідно: $\vec{r}\ i\ \vec{r}_0$ і $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ (рис. 2.1).

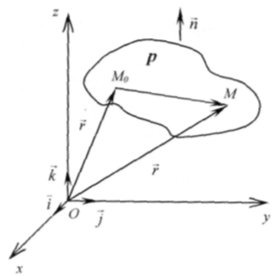



Рис. 2.1

Тому $\bar{n} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = 0$ – це рівняння площини у <u>*векторній формі.*</u>

Якщо його записати у <u>*координатній формі:*</u>

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + (-A \cdot x_0 - B \cdot y_0 - C \cdot z_0) = 0$$

позначимо $D = -A\cdot x_0 - B\cdot y_0 - C\cdot z_0$ ,то отримаємо:

$$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}$$ ***– загальне рівняння площини***

Оскільки $\bar{n} = (A; B; C)$ – ненульовий вектор, то *A, B, C* одночасно не дорівнюють нулю.

***Окремі випадки загального рівняння площини***

| | Значення коефіцієнтів | Вид рівняння | Положення площини |
|---|---|---|---|
| 1 | $D=0$ | $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z=$ $=0$ | Площина проходить через початок координат |
| 2 | $C=0$ | $A\cdot x+B\cdot y+D=0$ | Площина ‖ осі $Oz$ |
| | $B=0$ | $A\cdot x+C\cdot z+D=0$ | Площина ‖ осі $Oy$ |
| | $A=0$ | $B\cdot y+C\cdot z+D=0$ | Площина ‖ осі $Ox$ |
| 3 | $C=0$ і $B=0$ | $A\cdot x+D=0$ | Площина ‖ площині $yOz$ ( $\perp$ осі $Ox$ ) |
| | $C=0$ і $A=0$ | $B\cdot y+D=0$ | Площина ‖ площині $xOz$ ( $\perp$ осі $Oy$ ) |
| | $A=0$ і $B=0$ | $C\cdot z+D=0$ | Площина ‖ площині $xOy$ ( $\perp$ осі $Oz$ ) |
| | $A=0,\ D=0$ | $B\cdot y+C\cdot z=0$ | Площина проходить через вісь $Ox$ |
| | $B=0,\ D=0$ | $A\cdot x+C\cdot z=0$ | Площина проходить через вісь $Oy$ |
| | $C=0,\ D=0$ | $A\cdot x+B\cdot y=0$ | Площина проходить через вісь $Oz$ |
| 4 | $B=0,\ C=0,$ $D=0$ | $A\cdot x=0,\ (x=0)$ | Площина співпадає з площиною $yOz$ |
| | $A=0,\ C=0,$ $D=0$ | $B\cdot y=0,\ (y=0)$ | Площина співпадає з площиною $xOz$ |
| | $A=0,\ B=0,$ $D=0$ | $C\cdot z=0,\ (z=0)$ | Площина співпадає з площиною $xOy$ |

**Рівняння площини у відрізках на осях**

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{c}{z}=1$ – рівняння площини у відрізках на осях, де $a=-\frac{D}{A}, b=-\frac{D}{B}, c=-\frac{D}{C}$ – відрізки, що відтинаються площиною на осях координат.

**Рівняння площини, яка проходить через три задані точки**

Рівняння площини, яка проходить через три задані точки

$M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

## Кут між двома площинами

Кутом між двома площинами називається будь-який з двогранних кутів, утворених цими площинами. Цей кут дорівнює куту між нормальними векторами цих площин.

Якщо площини задані загальними рівняннями (рис. 2.2):

$$\alpha_1 \to A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0,$$
$$\alpha_2 \to A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0,$$

і $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1), \bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$, то косинус кута φ між ними обчислюють:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

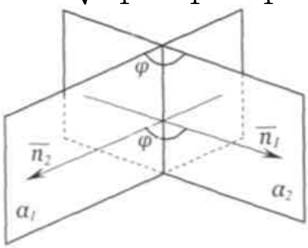



Рис. 2.2

## Умови паралельності і перпендикулярності двох площин

Якщо площини задані загальними рівняннями:

$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0,$$
$$A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0,$$

то їх нормальні вектори мають координати $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$, якщо площини паралельні, то їх нормальні вектори колінеарні, а їх відповідні координати пропорційні, тобто $\vec{n}_1 = \lambda \cdot \vec{n}_2$, де $\lambda = const$. Тому $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Якщо площини перпендикулярні, то їх нормальні вектори також перпендикулярні, і $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, або

$$\boldsymbol{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}.$$

## Відстань від точки до площини

Якщо задано точка $M_0$ $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і площина $\alpha$: $Ax +$ $+By + Cz + D = 0,$ то відстань від точки $M_0$ до площиниαобчислюється за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

♦ **Приклад 9.** *Скласти рівняння площини, яка проходить через точку М(-3; 0; 2) перпендикулярно до вектора* $\bar{n} = (2; 3; 5)$.

$$2(x + 3) + 3y + 5(z - 2) = 0;$$
$$2x + 3y + 5z - 4 = 0.$$

♦ **Приклад 10.** *Скласти рівняння площини, яка перпендикулярна до осі Ox і проходить через точку* $M_0$ *(2; -1; 1).* Площина перпендикулярна до осі *Ox* буде паралельна площини *yOz,* тому її рівняння $Ax + D = 0$.

Оскільки точка $M_0$ належить площині, то $A\cdot 2+D=0$, $D = -2\cdot A$.

Отже, $Ax - 2\cdot A = 0$, $A\cdot(x-2) = 0$, $x-2 = 0$ – шукане рівняння.

♦ **Приклад 11.** *Дано точки A(1; 2; 0), B(0; 1; -1), C(2; -1; 1), D(0; 0; I).*

***Знайти:***

*а) рівняння площин, які проходять через точки A, B, C і B, C, D.*

*б) кут між гранями ABC та BCD;*

*в) відстань від точки D до площини ABC.*

Розв'язування:

*а)* рівняння площини *(ABC)* $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$(x-1)\cdot(-4)-(y-2)\cdot 0+4z=0,$$

$$-4x + 4z + 4 = 0,\ x-z-1 = 0,$$

$$\bar{n}_1 = (1;0;-1).$$

рівняння площини *(BCD)* $\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z+1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$$x\cdot(-2) - (y - 1)\cdot 4 + (z + 1)(-2) = 0,$$

$$-2x + 4y + 2z + 2 = 0,$$

$$x + 2y + z - 1 = 0,$$

$$\bar{n}_2 = (1;2;1).$$

*б)* кут між гранями *ABC* та *BCD:*

$$\cos\varphi = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{1-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

*в)* відстань від точки D до площини *ABC:*

$$\mathrm{d} = \frac{|0+0-1-1|}{\sqrt{1+0+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

## *Контрольні вправи*

**1.** Скласти рівняння площини, що проходить через вісь *Ox* і точку $M_0(4; -1; 2)$.

**2.** Скласти рівняння площини, яка відтинає на осі *Oz* відрізок $c = -5$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (-2; 1; 3)$.

**3.** Обчислити кут між площинами:
$3x - y + 2z + 15 = 0$ *і* $5x + 9y - 3z - 1 = 0$.

## ***ТЕМА 4*. Рівняння прямої в просторі. Взаємне розміщення прямих, прямої і площини в просторі**

### Рівняння прямої в просторі

Будь-яку пряму *L*у просторі можна розглядати як лінію перетину двох непаралельних площин. При цьому, якщо площини $P_1$, і $P_2$задані загальними рівняннями, то система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

задає ***загальне рівняння прямої в просторі.***

Нехай задано точку $M_1(x_0; y_0; z_0)$ і вектор $\bar{q} = (1,m,n)$, колінеарний цій прямій. Тоді вектор $\bar{q}$ називають ***напрямним вектором прямої.***

Нехай $M(x;y;z)$ — довільна точка прямої *L*.

Вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ колінеарний вектору

$\bar{q} = (1,m,n)$, тому їхні координати пропорційні:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}. \quad (2.2)$$

Рівняння називають ***канонічне рівняння прямої у просторі.***

Нехай t — коефіцієнт пропорційності векторів $q$ і $\overline{M_0M}$, тобто $\overline{M_0M} = \overline{tq}$

Із рівняння (2.2) маємо $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t.$

Ці рівняння можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \quad (2.3)$$

Рівняння (2.3) називається ***параметричне рівняння прямої в просторі.***

Параметричне рівняння зручно використовувати в тих випадках, коли потрібно знайти точку перетину прямої з площиною.

♦ **Приклад 12.** *Знайдемо точку перетину прямої* $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{5}$ *з площиною* $x+2y-3z-4=0$.

Запишемо рівняння прямої в параметричній формі. Припустивши, що $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{5}=t$ дістанемо $x=2+4t$, $y=3+2t$, $z=-1+5t$.

Підставивши знайдені значення x, y, z у рівняння площини, маємо $2+4t+2(3+2t)-3(-1+5t)-4=0$.

Звідси $t=1$. Підставивши значення $t=1$ у параметричне рівняння прямої. дістанемо x = 6, y = 5, z = 4. Отже, (6; 5; 4) – шукана точка перетину прямої і площини.

Нехай пряму задано двома її точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ можна взяти за напрямлений вектор прямої. Підставивши його координати в рівняння (2.2), дістанемо канонічне рівняння

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Це *рівняння прямої що проходить через дві задані точки.*

## Відстань від точки до прямої. Відстань між прямими

Відстань $d$ від точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямої L: $\frac{x-x_0}{l}==\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$ яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ обчислюють за формулою

$$d=\frac{\sqrt{\left|\frac{(x_1-x_0)}{l}-\frac{(y_1-y_0)}{m}\right|^2+\left|\frac{(y_1-y_0)}{m}-\frac{(z_1-z_0)}{n}\right|^2+\left|\frac{(x_1-x_0)}{l}-\frac{(z_1-z_0)}{n}\right|^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Знайдемо відстань між двома мимобіжними прямими

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}. \qquad (2.4)$$

Довжину відрізка спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих, кінці лежать на цих прямих, називають ***відстанню між двома мимобіжними прямими.*** Цю відстань можна обчислити за формулою

$$d=\left|\frac{\begin{matrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{matrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}\right|.$$

## Взаємне розміщення двох прямих

Якщо прямі $L_1$ і $L_2$ задані канонічними рівняннями вигляду (2.4), то за довільного розміщення в просторі один із двох кутів між ними дорівнює куту φ між їхніми напрямними векторами $\vec{q}_1=(l_1,m_1,n_1)$, $\vec{q}_2=(l_2,m_2,n_2)$.

***Кут між прямими*** $L_1$ і $L_2$ обчислюється за формулою

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

***Умову паралельності прямих*** $L_1$ і $L_2$ дістаємо з умови колінеарності їхніх напрямних векторів $\vec{q}_1=(l_1,m_1,n_1)$ і $\vec{q}_2=(l_2,m_2,n_2)$:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

***Умову перпендикулярності прямих*** $L_1$ і $L_2$ дістаємо з умови перпендикулярності їхніх напрямних векторів $\vec{q}_1=(l_1,m_1,n_1)$ і $\vec{q}_2=(l_2,m_2,n_2)$:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

## Взаємне розміщення прямої і площини

***1)*** Якщо в просторі задані пряма канонічним рівнянням $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ і площина – загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, то синус кута φ між прямою і площиною обчислюється за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

***2)*** Умову паралельності прямої і площини записують у вигляді:

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

***3)*** Умова перпендикулярності прямої і площини має вигляд:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

***4)*** Умова, при якій пряма належить площині, має вигляд:

$$\begin{cases} Aa+Ba+Cc+D=0; \\ Am+Bn+Cp=0. \end{cases}$$

### *Контрольні вправи*

***1.*** Дано три вершини паралелограма $\text{A}(3;\ 0;\ -1)$, $\text{B}(1;\ 2;\ -4)$, $\text{C}(0;\ 7;\ 2)$.Скласти рівняння сторін *AD і CD.*

***2.*** Знайти кут між прямими: $x = 3t - 2,\ \ y = 0,$ $z = -t + 3$ і $x = 2t - 1,\ y = 0,\ z = t - 3.$

***3.*** При яких значеннях $B$ *і* $p$ пряма $\text{x} = 5-3t,$ $y=9+4t,\ \ z=-2+pt$ перпендикулярна до площини $6\text{x} + \text{B}y - 10z + 9 = 0$?

## *<u>ТЕМА 5.</u>* Поверхні другого порядку в трьохвимірному просторі, їх канонічне рівняння. поверхні обертання. Циліндричні поверхні

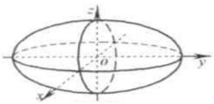
***<u>ОЗНАЧЕННЯ.</u>*** ***Поверхнею*** другого порядку в трьохвимірному просторі $E_3$ називається поверхня, рівняння якої є рівнянням другого степеня відносно змінних *x, y, z.* У загальному вигляді рівняння другого степеня відносно зазначених змінних має вигляд:

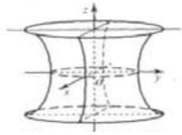
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz +$$
$$+ 2a_{23}yz+2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z +a_{00} =0.$$

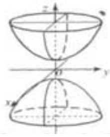
***<u>Поверхні другого порядку та їх канонічні рівняння</u>***

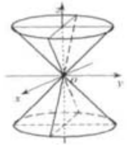
| № з/п | Поверхня | Канонічне рівняння |
|---|---|---|
| **1.** | Еліпсоїд | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ |
| **2.** | Однополий гіперболоїд | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ |
| **3.** | Двополий гіперболоїд | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ |
| **4.** | Конус | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ |
| **5.** | Еліптичний параболоїд | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ |
| **6.** | Гіперболічний параболоїд | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ |
| **7.** | Круговий циліндр | $x^2+y^2=R^2$ |
| **8.** | Еліптичний циліндр | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ |
| **9.** | Гіперболічний циліндр | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ |
| **10.** | Параболічний циліндр | $y^2 = 2px$ |
| **11.** | Сфера | $x^2+y^2+z^2=R^2$ |

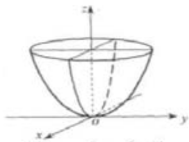
Форму та розташування поверхонь другого порядку вивчають, як правило, методом паралельних перерізів, тобто розглядають перерізи поверхонь площинами, паралельними до координатних площин. Форма та розміри одержаних перерізів дають змогу з’ясувати форму поверхонь.

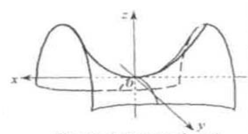

Еліпсоїд

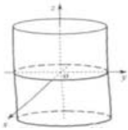

Однополий гіперболоїд

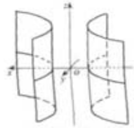

Двополий гіперболоїд

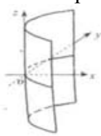

Конус


Еліптичний параболоїд


Гіперболічний параболоїд


Еліптичний циліндр


Гіперболічний цилінд


Параболічний циліндр

♦ **П р и к л а д 1.** *З’ясувати, яка поверхня визначається таким рівнянням*

$$4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0.$$

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 2y + 1) + 36(z^2 - 2x + 1) =$$
$$= -13 + 4 + 9 + 36,$$

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 1)^2 + 36(z - 1)^2 = 36,$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1.$$

**Відповідь:** еліпсоїд, центр якого міститься в точці (1; 1; 1) півосі: $a = 3, b = 2, c = 1.$

### Поверхні обертання

Поверхню, яка разом з кожною своєю точкою містить усе коло, утворене обертанням цієї точки навколо деякої фіксованої прямої — осі обертання, називають *поверхнею обертання* (рис. 3.1).

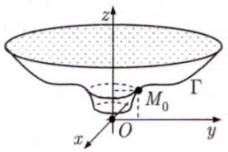


Рис. 3.1

Нехай Г — крива на площині $Oyz: z = f(y),\ y \geq 0$.

Обертаючись навколо осі $Oz$, крива Г утворює поверхню обертання (рис. 3.1).

Нехай $M_0\,(y_0; z_0)$ — довільна точка кривої Г.

Точка $M_0$ пробігає коло, проекцією якого на площину $Oxy$ є

$$x^2 + y^2 = (y_0)^2.$$

Отже, $z_0 = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Завдяки довільності точки $M_0$ на кривій Г поверхню обертання задає рівняння

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})\ . \qquad (3.1)$$

Запишемо рівняння поверхонь, утворених обертанням навколо осі $Oz$ кривих 1-го та 2-го порядку, розміщених у площині $Oyz$:

1) прямої $az - cy = 0$;
2) еліпса $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;
3) гіперболи $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;
4) гіперболи $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$;
5) параболи $y^2 = 2pz$.

***1)*** Обертанням прямої навколо осі Oz одержимо коловий конус (рис. 3.2)

$$z = \pm\frac{c}{a}\sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}.$$

Оскільки криві 2) – 5) симетричні щодо осі $Oz$ (змінна $y$ входить у рівняння лише в парному степені), тому, скориставшись формулою (3.1), знайдімо рівняння відповідних поверхонь обертання:

***2)*** еліпсоїд обертання (рис. 3.3)

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Якщо $a = c$, одержимо рівняння сфери радіусом $a$: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

***3)*** однополий гіперболоїд обертання (рис. 3.4)

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

***4)*** двополий гіперболоїд обертання (рис. 3.5)

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2}{a^2}=1.$$

***5)*** параболоїд обертання (рис. 3.6)

$$\frac{x^2+y^2}{p}=2z.$$

Усі утворені поверхні є поверхнями 2-го порядку. Проте обертанням кривих 2-го порядку можна утворити і поверхні вищих порядків.

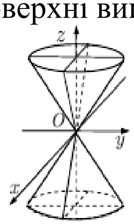



Рис. 3.2

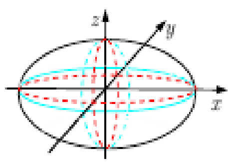



Рис. 3.3

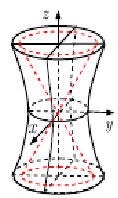



Рис. 3.4

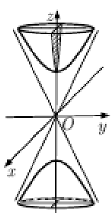



Рис. 3.5

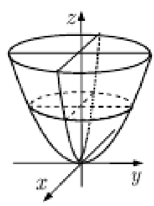



Рис. 3.6

### *Циліндричні поверхні*

Поверхню називають *циліндричною (циліндром),* якщо вона разом з кожною своєю точкою $M$ містить усю пряму — *твірну* циліндричної поверхні, яка проходить через точку $M$ паралельно заданому вектору $\bar{p}$.

Нехай Г — деяка лінія — *напрямна циліндричної поверхні, а* $\bar{p}$ — ненульовий вектор. Поверхня, утворена прямими, які проходять через усі точки лінії Г паралельно вектору $\bar{p}$ , буде циліндричною.

Візьмемо довільну точку $O$ і проведемо площину $Oxy$ перпендикулярно до твірної $L$ і пряму $Oz$ паралельно твірній $L$.

Площина $Oxy$ перетне циліндричну поверхню за напрямною Г (рис. 3.7), яка має рівняння (що збігається з рівнянням циліндричної поверхні із твірною, паралельною осі $Oz$.

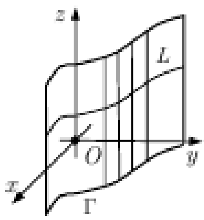



Рис. 3.7

$$F(x,y) = 0.$$

Це й буде рівняння циліндричної поверхні у вибраній системі координат.

Рівняння $F(y,z)=0$ описує циліндричну поверхню із твірною, паралельною осі $Ox$, а рівняння $F(x,z)=0$ — із твірною, паралельною осі $Oy$.

Циліндричними поверхнями 2-го порядку із твірними, паралельними осі Oz, і напрямними — кривими 2-го порядку — є:

***1) еліптичний циліндр (рис. 3.8)***

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a \geq b > 0.$$

Якщо a=b, то дістанемо коловий циліндр $x^2 + y^2 = a^2$.

***2) параболічний циліндр (рис. 3.9)***

$$y^2 = 2px, p > 0.$$

***3) гіперболічний циліндр (рис. 3.10)***

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a,b > 0}.$$

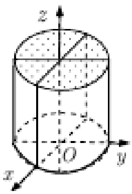


Рис. 3.8

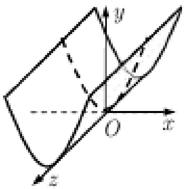


Рис. 3.9

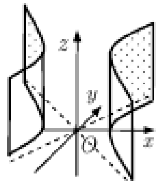


Рис. 3.10

***Еліпсоїд***

**Еліспоїдом** називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують рівняння

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a \geq b \geq c > 0}. \qquad (3.2)$$

Рівняння називають канонічним рівнянням еліпсоїда, а систему координат – канонічною системою.

***1.*** Еліпсоїд не проходить через початок координат канонічної системи координат, бо координати точки *O(0;0;0)* не справджують рівняння (3.2).

***2.*** Кожну вісь координат еліпсоїд перетинає у двох точках, симетричних щодо початку координат:

$$A_{1,2}(\pm a;0;0), B_{1,2}(0;\pm b;0); C_{1,2}(0;0;\pm c).$$

Точки перетину еліпсоїда з осями координат називають вершинами еліпсоїда, відрізки $A_1A_2$, $B_1B_2$ та $C_1C_2$ — осями еліпсоїда, а числа $a,b$ та $c$ — півосями еліпсоїда. Якщо всі ці числа різні, то еліпсоїд називають тривісним. Якщо дві півосі дорівнюють одна одній, то ми дістаємо еліпсоїд обертання. Якщо, нарешті, $a = b = c$, то поверхня є **сферою** з центром *у* початку координат.

***3.*** Оскільки *змінні x,y,z* у рівняння еліпсоїда входять у парних степенях, то еліпсоїд симетричний щодо всіх координатних площин, координатних осей і початку координат.

***4.*** З рівняння еліпсоїда випливає, що

$$\frac{x^2}{a^2} \le 1, \frac{y^2}{b^2} \le 1, \frac{z^2}{c^2} \le 1 \Leftrightarrow |x| \le a, |y| \le b, |z| \le c.$$

**5.** При обертанні еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

навколо осі *Ox* (рис. 3.11) одержимо еліпсоїд обертання

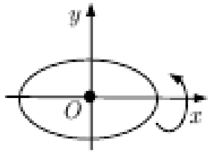



Рис. 3.11

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

а з нього — стисканням вздовж осі *Oz* з коефіцієнтом $\frac{c}{b} \le 1$ еліпсоїд загального вигляду (рис. 3.12).

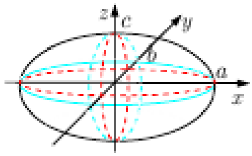



Рис. 3.12

***Гіперболоїди***

***Однополий гіперболоїд***

*Однополим гіперболоїдом* називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПЛСК справджують *канонічне рівняння*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a, b, c>0}. \qquad (3.3)$$

Систему координат, у якій однополий гіперболоїд має рівняння (3.3), називають *канонічною системою.*

**1.** Однополий гіперболоїд не проходить через початок канонічної системи координат, бо координати точки $O(0;0;0)$ не справджують рівняння (3.3).

**2.** Однополий гіперболоїд перетинає вісь Ox у вершинах — точках $A_{1,2}(\pm a;\ 0;\ 0)$, а вісь Oy — у точках $B_{1,2}$ (0; ±b; 0). Вісь $Oz$ однополий гіперболоїд не перетинає. Відрізки $A_{1,2}$ та $B_{1,2}$ називають ***дійсними осями*** однополого гіперболоїда. Числа $a$, $b$, $c$ називають ***півосями*** однополого гіперболоїда.

**3.** Рівняння поверхні містить змінні $x$, $y$, $z$ у парних степенях, тому однополий гіперболоїд симетричний щодо всіх координатних площин, координатних осей і початку координат.

**4.** З рівняння однополого гіперболоїда випливає, що

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geq 1.$$

**5.** При обертанні гіперболи

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

навколо осі $Oz$ (рис. 3.13) одержимо однопорожнинний гіперболоїд обертання

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

а з нього — стисканням уздовж осі Oy з коефіцієнтом $\frac{b}{a}$ — однополий гіперболоїд загального вигляду (рис. 3.14).

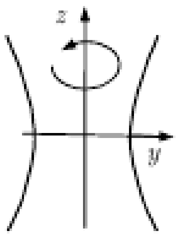



Рис. 3.13

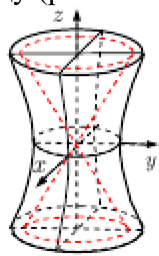



Рис. 3.14

***Двополий гіперболоїд***

***Двополим гіперболоїдом*** називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують канонічне рівняння.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, a, b, c>0}. \qquad (3.4)$$

Систему координат, у якій двополий гіперболоїд має рівняння (3.4), називають ***канонічною системою.***

**1.** Двополий гіперболоїд не проходить через початок канонічної системи координат.

**2.** Двополий гіперболоїд перетинає вісь *Oz* у двох точках — вершинах — $C_{1,2}(0;\ 0;\ \pm c)$. Осі *Ox* та *Oy* не перетинають поверхню. Відрізок $C_1C_2$ називають ***дійсною віссю.*** Числа *a, b*, *c* називають півосями двополого гіперболоїда.

**3.** Двополий гіперболоїд симетричний щодо всіх координатних площин, координатних осей і початку координат.

**4.** Двополий гіперболоїд міститься всередині асимптотичного конуса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, a, b, c>0.$$

і за межами смуги $|z| \geq c$.

**5.** Обертанням гіперболи

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{a^2}=1.$$

навколо осі *Oz* (рис. 3.15) одержимо двополий гіперболоїд обертання

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

а з нього — стисканням уздовж осі *Oy* з коефіцієнтом $\frac{b}{a}$ двополий гіперболоїд загального вигляду (рис. 3.16).

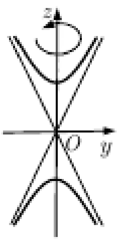


Рис. 3.15

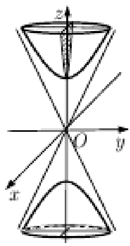


Рис. 3.16

**Параболоїди**

**Еліптичний параболоїд**

*Еліптичним параболоїдом* називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують канонічне рівняння

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z, a, b>0}. \qquad (3.5)$$

Систему координат, у якій еліптичний параболоїд має рівняння (3.5), називають ***канонічною системою.***

**1.** Еліптичний параболоїд проходить через початок ПДСК.

**2.** Еліптичний параболоїд має з осями координат лише одну спільну точку — вершину — точку $O(0; 0; 0)$.

**3.** Оскільки рівняння (3.5) містить змінні $x$, $y$ у парних степенях, то еліптичний параболоїд симетричний щодо площин $Oxz$ та $Oyz$. Поверхня не симетрична щодо площини $Oxy$. Звідси випливає, що еліптичний параболоїд симетричний щодо координатної осі $Oz$ і не симетричний щодо осей $Ox$ та $Oy$ і початку координат.

**4.** З рівняння (3.5) випливає, що для всіх точок поверхні z = 0, причому z=0 тоді й лише тоді, коли точка збігається з початком координат.

Отже, всі точки еліптичного параболоїда, крім початку координат, розміщені по один бік від площини $Oxy$.

**5.** Обертанням параболи $2a^2z = y^2$ навколо осі $Oz$ (рис. 3.17) одержимо параболоїд обертання

$$2z = \frac{x^2+y^2}{a^2},$$

а з нього – стискання вздовж осі $Oy$ з коефіцієнтом $\frac{b}{a}$ – еліптичний параболоїд загального вигляду (рис. 3.18)

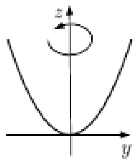



Рис. 3.17

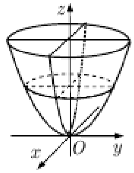



Рис. 3.18

**Гіперболічний параболоїд**

*Гіперболічним параболоїдом* називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують *канонічне рівняння*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, a, b > 0}. \qquad (3.6)$$

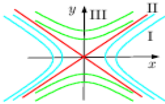
Систему координат, у якій гіперболічний параболоїд має рівняння (3.6), називають ***канонічною системою.***

**1.** Гіперболічний параболоїд проходить через початок канонічної системи координат.

**2.** Гіперболічний параболоїд перетинає осі канонічної системи координат у єдиній точці — на початку координат.

**3.** Гіперболічний параболоїд симетричний щодо площин $Oxz$ та $Oyz$ і не симетричний щодо площини $Oxy$. Звідси поверхня симетрична щодо осі $Oz$ і не симетрична щодо осей $Ox$ та $Oy$ і початку координат.

**4.** Перерізанням поверхні площинами $z=h$ одержимо гіперболи (рис. 3.19)




$$\frac{x^2}{(a\sqrt{2h})^2}-\frac{y^2}{\left(b\sqrt{2h}\right)^2}=1, h>0,$$

спряжені до них гіперболи (рис. 3.19)

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{-2h})^2}-\frac{y^2}{\left(b\sqrt{-2h}\right)^2}=-1, h<0.$$

та пару перетинних прямих — асимптот гіпербол (рис. 3.19)

$$y=\pm\frac{b}{a}x, h=0.$$

Перерізанням поверхні площинами $y = h$ одержимо параболи (рис. 3.20)

$$x^2=2a^2\left(z+\frac{h^2}{2b^2}\right).$$

Перерізанням поверхні площинами $x = h$ одержимо параболи (рис. 3.21)

$$y^2=-2b^2\left(z-\frac{h^2}{2a^2}\right).$$

Гіперболічний параболоїд зображено на рис. 3.21.

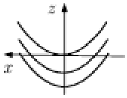



Рис. 3.20

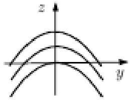



Рис. 3.21

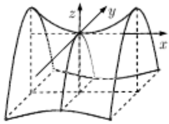



Рис. 3.21

**Прямолінійні твірні поверхонь 2-го порядку**

Деякі з розглянутих поверхонь 2-го порядку можна утворити рухом прямої лінії. Це очевидно для конуса та циліндра. Виявляється, що однополого гіперболоїд (рис. 3.22) і гіперболічний параболоїд (рис. 3.23) теж є поверхнями, що утворені прямолінійними твірними.

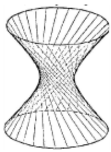


Рис. 3.22

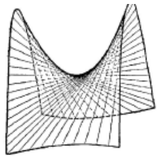


Рис. 3.23

***КОНТРОЛЬНІ ВПРАВИ***

***1.*** З'ясувати, яка поверхні визначаються таким рівнянням

***а)*** $x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0,$

***б)*** $x^2 + y^2 = 4z,$

***в)*** $x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x - 4y + 2z + 1 = 0.$

***2.*** Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1, \\ y = 0, \end{cases} \text{навколо осі } Oz.$$

***<u>ТЕМА 6.</u>*** **Криві і поверхні у природі і техніці**

**Еліпс**

Йоган Кеплер (1571–1630) показав, що орбіти планети Сонячної системи єеліпсами із Сонцем в одному з фокусів (рис. 4.1 та 4.2).

Оптичну властивість еліпса використовують для побудови «галерейшепотіння». У такій кімнаті слово, вимовлене пошепки в одному з фокусівможна добре почути, перебуваючи в іншому фокусі (рис. 4.3).

Ґрунтуючись на оптичній властивості, працює і медичний прилад — літотриптер. Він використовує ультразвукові ударні хвилі для подрібнення каміння у нирках. Хвилі створюють в одному з фокусів еліпса і відбиваютьїх на камінець, розташований у другому фокусі (рис. 4.4).

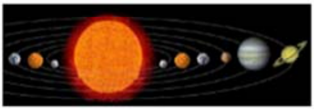


Рис. 4.1

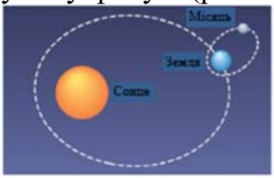



Рис. 4.2

Рис. 4.3

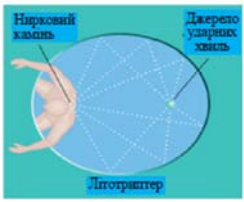



Рис. 4.4

Арки деяких мостів інколи будують еліптичними. Еліптичні шестерні використовують для деяких пристроїв, зокрема, де потрібне повільне, але потужне зусилля, таке як у перфораторі (рис. 4.5).

Рис. 4.5

**Гіпербола**

Коли реактивний літак летить з надзвуковою швидкістю,ударна хвиля створює звуковий удар. Хвиля має конічну форму, але досягає земної поверхні як гілка гіперболи.

Галеєва комета, яка стала складовою Сонячної системи, рухається навколо Сонця еліптичною орбітою. Інші комети пролітають Сонячну системи лише один раз, рухаючись гіперболічною орбітою із Сонцем у фокусі.

Охолоджувальні вежі атомних станцій мають у перерізі еліпси і гіперболи (тобто є однополим гіперболоїдами) (рис. 4.6). Інколи архітектурні перекриття мають гіперболічну форму.

Використовуючи гіперболи, працювала навігаційна система LORAN (до появи GPS-навігації). Ця система використовує передавальні станції утрьох точках і надсилає одночасні сигнали кораблю або літаку. Різниці часу проходження сигналу від першої та другої пар передавачів записують. Длякожної пари обчислюють різницю віддалей кожного члена пари від корабляабо літака. Якщо кожна пара різниць є сталою, можна зобразити дві гіперболи. Кожна з них має пари передавачів своїми фокусами, корабель або літак тоді розташований на перетині двох їхніх гілок (рис. 4.7).

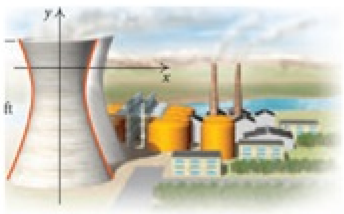


Рис. 4.6

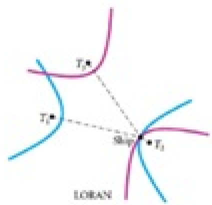



Рис. 4.7

**Парабола**

Світлові промені від фар машини, електричні ліхтарики (рис. 4.8), прожектори (рис. 4.9) мають параболічну форму. Параболічна антена та польові мікрофони, які використовують на спортивних змаганнях, мають параболічні перерізи (рис. 4.10) Оптичну властивість параболи збирати паралельні пучки світла у фокусі використовують у телескопах (рис. 4.11). Деякі ж телескопи мають і параболічні, і гіперболічні дзеркала (рис. 4.12).

Троси підвісних мостів мають форму парабол (у разі ж вільного провисання трос матиме форму ланцюгової лінії) (рис. 4.13).

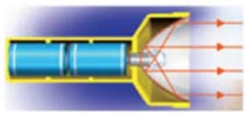


Рис. 4.8

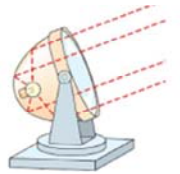


Рис. 4.9

Рис. 4.10

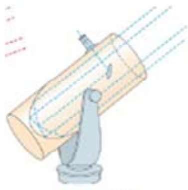


Рис. 4.11

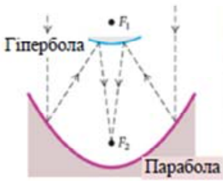



Рис. 4.12

Рис. 4.13

**Кардіоїда**

Форму кардіоїди має діаграма напрямленості мікрофона однобічного напрямлення (рис. 4.14).

Модифікації мікрофонів, що мають ще вужчу напрямленість, ніж кардіоїдні, називають *суперкардіоїдними* та *гіперкардіоїдними* (рис. 4.15), проте ці різновиди, на відміну від *кардіоїдних* мікрофонів також чутливі досигналів з протилежного боку.

Кардіоїду можна побачити як відбиток від точкового джерела світла у чашці чорної кави (рис. 4.16).

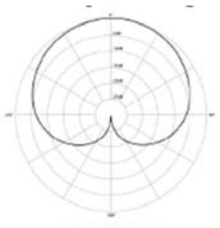


Рис. 4.14

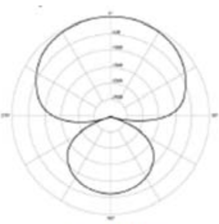


Рис. 4.15

Рис. 4.16

**Циклоїда**

Серед багатьох чудових властивостей циклоїди найважливіші дві — ця крива є брахістохроною (лінією найшвидшого спускання) і таутохроною (лінією однакового часу).

Виявляється, що кулька скотиться найшвидше саме циклоїдним жолобом (рис. 4.17, 4.18); з’їжджати на санчатах із циклоїдної гірки небезпечно — адже всі санчата досягнуть найнижчої точки одночасно (рис. 4.19), незалежно від точки старту.

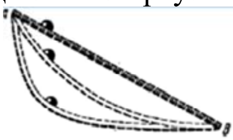


Рис. 4.17

Рис. 4.18

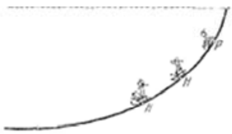


Рис. 4.19

**Логарифмічна спіраль**

У техніці часто використовують обертові ножі. Сила, з якою вони тиснуть на розрізуваний матеріал, залежить від кута різання, тобто кута між лезом ножа і напрямом швидкості обертання. Для сталості тиску потрібно, щоб кут різання зберігав стале значення, а для цього треба, щоб леза ножів мали форму логарифмічної спіралі (рис. 4.20).

У гідротехніці за логарифмічною спіраллю вигинають трубу, яка підводить потік води до лопатів турбіни. Завдяки такій формі труби втрати енергії на змінення напряму течії у трубі виявляються найменшими і тиск води у трубі використовують з найбільшою віддачею.

Пропорційність довжини дуги спіралі різниці довжин радіусів-векторів використовують під час проектування зубчастих коліс зі змінним передатним числом. Для цього беруть два квадрати (рис. 4.21), і через середину та кінець кожної сторони проводять дуги однакових логарифмічних спіралей з полюсами у центрах квадратів, причому одну спіраль закручують у напрямі за годинниковою стрілкою, а другу — проти годинникової стрілки. Тоді під час обертання цих квадратів дуги спіралей котитимуться одна по одній, не ковзаючись.

Живі істоти зазвичай ростуть, зберігаючи загальні обриси своєї форми, при цьому вони ростуть у всіх напрямах. Але мушлі морських тварин можуть рости лише в одному напрямі. Щоб не дуже витягуватись у довжину, їм доводиться скручуватись, причому кожен наступний виток подібний до попереднього. А такий ріст можливий лише вздовж логарифмічної спіралі або деяким її просторовим аналогам. Тому мушлі багатьох молюсків, равликів, а також роги гірських козлів закручені у вигляді логарифмічної спіралі (рис. 4.22).

Рис. 4.20

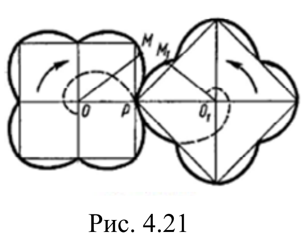



Рис. 4.21

Рис. 4.22

Крім того, у вигляді логарифмічної спіралі:

1) закручуються тропічні шторми (рис. 4.23);

2) рукави спіральних галактик (рис. 4.24);

3) суцвіття деяких сортів цвітної капусти (рис. 4.25) — це, крім того,приклад фрактальної (самоподібної) структури;

4) Чому яструб наздоганяє свою жертву? Його гострий зір дозволяє зберігати сталий кут закручування спіралі.

Рис. 4.23

Рис. 4.24

Рис. 4.25

**Архімедова спіраль**

Архімедова спіраль дозволяє перетворювати обертовий рух у рівномірнийзворотно-поступальний рух. Для цього треба виготовити ексцентрик, профіль якого складають дві дуги архімедової спіралі (рис. 4.26). Під час рівномірного руху цього ексцентрика стрижень *NM*, який ковзає кінцем уздовж його профілю, рівномірно рухається то вгору, то вниз (віддаль *OM* пропорційна величині кута повороту).

Такий ексцентрик має одну ваду, спричинену загостреннями у точках перетину спіралей, — швидкість рухомої точки змінюється під час змінювання напрямку стрибком, що призводить до ударів і швидкого руйнуванню машини. Її можна усунути, скориставшись гладким ексцентриком уформі паскалевого завитка (4.27). Це дозволить швидкості змінюватися плавно, причому рівномірний рух ексцентрика перетвориться на гармонічні коливання стрижня.

Спіральні компресори, зроблені за допомогою двох вкладених архімедових спіралей того самого розміру використовують для стискання рідин та газів (рис. 4.28). Витки балансирної пружини годинника і боріздкиранніх грамплатівок мали форму архімедової спіралі (рис. 4.29).

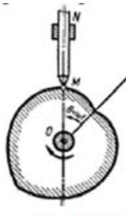


Рис. 4.26

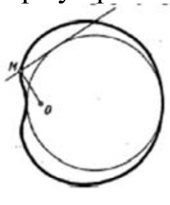


Рис. 4.27

Рис. 4.28

Рис. 4.29

**Гвинтова лінія**

Більшість рослин, які в'ються (приміром, в'юнок, квасоля), завиваючись навколо вертикальної опори, набувають форми правих гвинтових ліній (рис. 4.30). Натомість, хміль набуває форми лівої гвинтової лінії (рис. 4.31). Форму правих та лівих спіралей мають різні молекули ДНК (рис. 4.32).

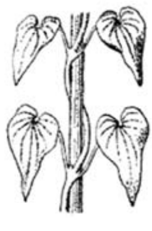


Рис. 4.30

Рис. 4.31

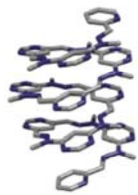


Рис. 4.32

**Конструкції Шухова**

Російському інженеру В. Г. Шухову належить ідея використати лінійчастий характер однополого гіперболоїда у будівництві. Він запропонував конструкції з металевих балок, розташованих як прямолінійні твірні однополого гіперболоїда (обертання). Такі конструкції виявились легкими, міцними. Їх широко використовують вже понад 110 років:

Аджигольський маяк під Херсоном, побудований в 1911 році (рис. 4.33);

Вежа на Шаболовці в Москві (1919–1922) (рис. 4.34);

Гіперболоїдна шухівська вежа порту Кобе (Японія) витримала землетрус у 7 балів за шкалою Рихтера, 2005 (рис. 4.35);

проект хмарочосу «Вортекс» — готель, який розміститься на межі лондонського Сіті (2004 р.) (рис. 4.36).

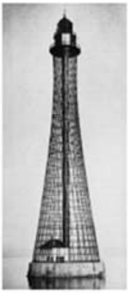


Рис. 4.33

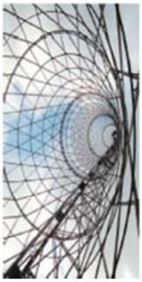


Рис. 4.34

Рис. 4.35

Рис. 4.36

***КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ***

1. Як на площині і в просторі задається прямокутна (декартова) система координат?
2. Як на площині можна задати лінію?
3. Як записується рівняння лінії в загальному випадку?
4. Як задається пряма на площині?
5. Які є види рівняння прямої на площині?
6. За якою формулою обчислюють кут між двома прямими на площині?
7. За якою формулою обчислюють відстань від точки до прямої?
8. Як можуть розміщуватись дві прямі на площині?

9. Які необхідні і достатні умови паралельності двох прямих на площині?

10. Які необхідні і достатні умови перпендикулярності двох прямих на площині?

11. Як записують рівняння кола з центром у точці $C$ $(a; b)$ і радіусом $R$?

12. Як записують канонічне рівняння еліпса?

13. Яким чином будують еліпс?

14. Який геометричний зміст параметрів, що входять у канонічне рівняння еліпса?

15. Як залежить форма еліпса від його ексцентриситету?

16. Як записують канонічне рівняння гіперболи та рівняння її асимптот?

17. Який геометричний зміст параметрів, що входять у канонічне рівняння гіперболи?

18. Як залежить форма гіперболи від його ексцентриситету?

19. Які гіперболи називають рівносторонніми?

20. Який вигляд має канонічне рівняння параболи, симетричної відносно осі $Ox$?

21. Який вигляд має канонічне рівняння параболи, симетричної відносно осі $Oy$?

22. Які є види рівняння площини в просторі?

23. Як можуть розміщуватися пряма і площина в просторі?

24. За якою формулою обчислюють кут між прямою і площиною?

25. Які умови паралельності, перпендикулярності прямої та площини?

26. За якою формулою обчислюють відстань від точки до площини?

27. За якою формулою обчислюють відстань між двома точками в просторі?

## <u>Тематика самостійних робіт</u>

## Самостійна робота № 1

1. Обчислити визначник матриці, яка є добутком двох матриць:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Для матриць:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити:

а) 3A+ 1/2C; б) $AB+C^T$.

3. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

4. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

## Самостійна робота № 2

1. Розв’язати систему рівнянь формулами Крамера:

а) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 3x-y+z=3 \\ x-2y-z=-2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y-z=-2 \\ 2x-y+2z=9 \\ 4x+4y-3z=-5 \end{cases}$

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним способом:

а) $\begin{cases} 5x + y + z = 3 \\ 2x - 6y - z = 8; \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x - 3y + 2z = -3 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

3. Розв'язати методом Гаусса системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 15x_4 - 17x_5 = 26, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 8, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 4x_5 = 11. \end{cases}$

## Самостійна робота № 3

1. При якому значення m вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ взаємоперпендикулярні, якщо:

а) $\bar{a} = m\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + 4\bar{k}$ , $\bar{b} = 4\bar{\imath} + m\bar{\jmath} - 7\bar{k}$.

б) $\bar{a} = 3\bar{\imath} - m\bar{\jmath} - 2\bar{k}$ , $\bar{b} = 2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} - m\bar{k}$.

2. Обчислити внутрішній кут ***B*** ΔABC з вершинами:

а) A (3;2;-3), B (5;1;-1), C (1;-2;1).

б) A (0;-4;3), B (-1;2;5), C (4;0;-3).

3. Дано вектори

а) $\vec{a}$=(1;2), $\vec{b}$=(-3;4), $\vec{c}$=(2;1);

б) $\bar{a}$=(2;3), $\bar{b}$=(1;-3), $\bar{c}$=(-1;3).

Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{p} = \vec{b} + \alpha\vec{a}$ і $\vec{q} = \vec{a} + \alpha\vec{c}$ колінеарні.

4. З’ясувати, чи буде система векторів

а) $\overline{x_1}$=(1;2;1;1), $\overline{x_2}$=(-1;3;2;1), $\overline{x_3}$=(-21;-1;2;-11)

б) $\overline{x_1}$=(4;3;2;1), $\overline{x_2}$=(2;3;4;5), $\overline{x_3}$=(6;6;6;6) лінійно залежні.

5. Дано вектори

а) $\bar{a}$=(3;-5;2), $\bar{b}$=(4;5;1), $\bar{c}$=(-3;0;-4), $\bar{d}$=(-4;5;-16);

б) $\bar{a}$=(2;1;-1), $\bar{b}$=(1;-1;2), $\bar{c}$=(3;-2;1), $\bar{d}$=(-8;9;-1). Показати, що вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють базис. Знайти розклад вектора $\bar{d}$ у базисі векторів ( $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$).

## Самостійна робота № 4

1. Написати рівняння площини, яка проходить через точку ***M***, перпендикулярно до двох площин:

$M$ (-1;-1;2), $x-2y+z-4=0,\ x+2y-2z+4=0.$

2. Визначити кут між заданими площинами:

$x-2y+2z+1=0, \quad 3x+3y-3z-4=0.$

3. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку А (3;-1;8) перпендикулярно до площини $2x-2y+z-6=0.$

4. Знайти точку перетину прямої та площини:

$x=5+2t,\ y=2-t,\ z=-1+3t,\ 2x-y+3z+23=0.$

## Самостійна робота № 5

1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис, якщо мала піввісь дорівнює 3 та ексцентриситет $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Знайти точки перетину прямої $x+y-3=0$ і параболи $x^2=4y$.

3. Дано асимптоти гіперболи $y = \pm\frac{1}{2}x$ і відстань між фокусами 2c=10. Записати рівняння гіперболи.

# <u>Тематика практичних занять</u>

## <u>Змістовий модуль № 1</u>

### Практичне заняття № 1
### Тема: Операції над матрицями

1. Знайти матрицю C=3A+2B, якщо

а) A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ .

б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Знайти:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. Перевірити рівність A·B = B·A для матриць:

а) A= $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ і B= $\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$.

б) A= $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ і B= $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Знайти $A^n$ для матриці A, якщо:

а) A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, n=3.

5. Знайти значення f(A), якщо:

а) $f(x)=x^2-3x+1$, A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

б) $f(x)=x^2-2x+1$, A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Практичне заняття № 2**
**Тема: Обчислення визначників**

1. Обчислити визначники 2-го порядку:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

2. Обчислити визначники 3-го порядку:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

3. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

4. Розв'язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix}=0$

б) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix}=0$

5. Розв'язати нерівності:

а) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$

6. Обчислити визначники n-го порядку зведенням їх до трикутного вигляду:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & -4 \\ 5 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

**Практичне заняття № 3**

**Тема: Обчислення оберненої матриці, рангу матриці**

1. Знайти матриці, обернені до таких матриць:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти ранг матриць:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 10 & 14 & -7 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & -3 & 4 & 11 & 12 \end{pmatrix}$.

**Практичне заняття № 4**

**Тема: Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь**

1. Розв'язати матричним способом такі системи:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

2. Розв'язати формулами Кремера системи:

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

3. Методом Гаусса розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

**Практичне заняття № 5**

**Тема: Дії над векторами. Лінійно-залежні вектори. Поділ відрізка в даному відношенні**

1. Чи можуть вектори $\vec{a}_1 = \{1; 1; 1\}$, $\vec{a}_2 = \{1; -1; 2\}$ і $\vec{a}_3 = \{4; 1; 4\}$ утворювати базис?

2. При яких значеннях α і $\beta$ вектори , $\vec{a} = \{-2; 3; \alpha\}$ і $\vec{b} = \{\beta; -6; 2\}$ колінеарні?

3. Знайти вектор $\vec{a} = \overrightarrow{a_1} - 2\overrightarrow{a_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{a_3}$, якщо $\overrightarrow{a_1} = \{-1; 2; 0\}$, $\vec{a}_2 = \{3; 1; 1\}$ і $\vec{a}_3 = \{2; 0; 2\}$

4. Дано три вектори $\overrightarrow{e_1} = \{3; -2; 1\}$, $\vec{e}_2 = \{-1; 1; -2\}$ і $\vec{e}_3 = \{2; 1; -3\}$. Знайти розклад вектора $\vec{a} = \{11; -6; 5\}$ по базису ( $\overrightarrow{e_1}, \vec{e}_2, \vec{e}_3$).

5. Перевірити, чи точки A (1, 3, -3), B (2, -5, 5), C (1, -1, 5), D (0, 7, -3) є вершинами паралелограма.

6. Відрізок з кінцями в точках A (1,-3,2) і B (4,0,5) розділений на три рівні частини. Знайти координати точок поділу.

**Практичне заняття № 6**

**Тема: Скалярний, векторний, мішаний добутки векторів**

1. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ перпендикулярні; вектор $\bar{c}$ утворює з ними кути, які дорівнюють $\frac{\pi}{3}$, і $|\bar{a}|$=3, $|\bar{b}|$=5; $|\bar{c}|$=8. Обчис-

лити: а) $(3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{b} + 3\vec{c})$; б) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$; в) $(\vec{a} + \overrightarrow{2b} - \overrightarrow{3c})^2$;

2. Дано трикутник ABC: A (4, 0, -2), B (-2, -6, 4), C (4, 3, 2). Знайти кут φ між стороною (AB) і медіаною (CD).

3. При якому значенні m вектори $\vec{a} = \{3; m; 4\}$ і $\vec{b} = \{m; 4; -7\}$ перпендикулярні?

4. Дано вершини чотирикутника A (1, 2, 3), B (7, -3, 2), C (3, 0, 6) і D (9, 2, 4). Довести, що його діагоналі взаємно перпендикулярні?

5. Дано вершини трикутника A (4, 1, 0), B (2, 2 ,1) і C (6, 3, 1). Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$ .

6. Обчислити площу паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n}$ та $\vec{b} = 3\vec{m} + \overrightarrow{2n}$ , де $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, та кут між ними $\varphi = \frac{\pi}{6}$ .

7. Дано вершини трикутника A (1, -1, 2), B (5, -6, 2) і C (1,3, -1). Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

8. Обчислити об'єм трикутної піраміди, вершини якої знаходяться в точках A (2, -1, 1), B (5, 5, 4), C (3,2, -1) і D (4, 1, 3).

9. Дано вершини тетраедра: A (2, 3, 1), B (4, 1, -2), C (6, 3, 7) і D (-5, -4, 8). Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини D.

**Практичне заняття № 7**
**Тема: Лінійний простір. Базис лінійного простору**

1. З'ясувати, чи є лінійно залежною система векторів:
а) $\overline{x_1} = (-3,1,5), \overline{x_2} = (6,-2,15)$ .
б) $\overline{x_1}$ = (1, j, 2-j, 3+ j), $\overline{x_2}$ = (1-j, 1+ j, 1-3j, 4-2j), ($j^2$= - 1)

2. Чи можна в тривимірному просторі вибрати за базис трійку векторів $\bar{a}, \bar{b}$ $i$ $\bar{c}$ , якщо:
а) $\bar{a}$ = (1, 2, 3),  $\bar{b}$ = (0, -1, 2),  $\bar{c}$ = (3, 1, 4)
б) $\bar{a}$ = (1, -2, -3),  $\bar{b}$ = (2, 0, 2),  $\bar{c}$ = (3, -2, -1)

3. Довести, що вектори $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ $i$ $\overline{e_3}$ утворюють базис та знайти координати вектора $\bar{x}$ в базисі ($\overline{e_1}, \overline{e_2}$ $i$ $\overline{e_3}$):
а) $\overline{e_1}$ = (1; 2; 5), $\overline{e_2}$ = (-1; 6; 3), $\overline{e_3}$ = (0; 0; 2),$\bar{x}$= (1; 0; 4);
б) $\overline{e_1}$ = (-1; 2; 1),$\overline{e_2}$ = (2; 1; -1),$\overline{e_3}$ = (1; 2; -1),$\bar{x}$= (7; 9; -4).

**Практичне заняття № 8**
**Тема: Дії над лінійними операторами**

1. Лінійний оператор $\widehat{A}$ в базисі $\{e\} = (\overline{e_1}, \overline{e_2})$, де $\overline{e_1}$ = (3, 7), $\overline{e_2}$= (2, 5) має матрицю A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Знайти його матрицю A$'$ в базисі $\{e'\}$= $\left(\overline{e_1'}\ , \overline{e_2'}\right)$, де $\overline{e_1'}$ = (1, 2), $\overline{e_2'}$ = (-3, -5).

2. Задано матрицю A оператора $\widehat{A}$ в базисі ($\bar{\imath}$ , $\bar{\jmath}$ ). Знайти матрицю A$'$ базисі $\{e'\}$= $\left(\overline{e_1'}\ , \overline{e_2'}\right)$, якщо:
а) A= $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{e_1}$ = $\bar{\imath} + \bar{\jmath}$, $\overline{e_2}$= $\bar{\imath}$ - $\bar{\jmath}$ ;
б) A= $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\overline{e_1}$ = $\bar{\imath}$ , $\overline{e_2}$= $2\bar{\imath} + \bar{\jmath}$ .

3. Знайти формули перетворення координат при переході від базису $\{e\} = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \overline{e_4})$ до базису $\{e'\} = (\overline{e'_1}, \overline{e'_2}, \overline{e'_3}, \overline{e'_4})$, якщо:

$\overline{e_1}$ = (1, 2, -1, 0), $\overline{e'_1}$= (2, 1, 0, 1),
$\overline{e_2}$ = (1, -1, 1, 1), $\overline{e'_2}$= (0, 1, 2, 2),
$\overline{e_3}$ = (-1, 2, 1, 1), $\overline{e'_3}$= (-2, 1, 1, 2),
$\overline{e_4}$ = (-1, -1, 0, 1), $\overline{e'_4}$= (1, 3, 1, 2).

## Змістовий модуль № 2

### Практичне заняття № 1
### Тема: Рівняння прямої на площині

1. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1$(2, -5):

а) перпендикулярно до осі Ох;

б) перпендикулярно до осі Оу;

в) перпендикулярно до вектора, що з'єднує дану точку $M_1$ з точкою $M_2$ (3, 0).

2. Знайти «відрізки» a і b прямої 3x-4y+12=0.

3. Під яким кутом до осі Ох нахилена пряма, що проходить через точки А (-1, 3) та В (4, -2)?

4. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0$ (2,1):

а) паралельно до прямої 2x+3y+4=0;
б) перпендикулярно до цієї прямої.

5. Пряма задана точкою $M_0(-1, 2)$ і напрямним вектором $\vec{q} = (3; -1)$. Знайти:

а) канонічне рівняння прямої;

б) загальне рівняння прямої і звести його до нормального вигляду;

в) довжину перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму.

6. Обчислити площу прямокутника, якщо відомі рівняння двох його сторін $3x-2y-5=0$ і $2x+3y+7=0$, а одна з вершин знаходиться в точці A $(-2; 1)$.

7. Задано суміжні вершини A $(1; -2)$ і B $(3; 2)$ паралелограма ABCD і точка $O_1(1, 1)$ перетину його діагоналей. Написати рівняння сторін цього паралелограма.

**Практичне заняття № 2**

**Тема: Лінії другого порядку: коло, еліпс**

1. Написати рівняння дотичних до кола $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ в точках перетину з прямою $x-y+2=0$.

2. Написати рівняння ліній центрів двох кіл, заданих рівняннями:

а) $(x-3)^2+y^2=9$ і $(x+2)^2+(y-1)^2=1$;

б) $x^2+y^2-4x+6y=0$ і $x^2+y^2-6x=0$.

3. Написати рівняння еліпса, якщо його велика вісь дорівнює 26, а фокуси містяться в точках $F_1$ $(-10;0)$, $F_2$ $(14;0)$.

4. Задано еліпс $9x^2+25y^2=225$. Знайти: 1) півосі; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння директрис.

5. Написати рівняння еліпса, фокуси якого містяться на осі ординат симетрично відносно початку координат, знаючи, крім цього, що відстань між його директрисами дорівнює $\frac{32}{3}$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{4}$.

**Практичне заняття № 3**

**Тема: Лінії другого порядку: гіпербола, парабола**

1. Задано гіперболу $16x^2-9y^2=144$. Знайти: 1) півосі; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння асимптот; 5) рівняння директрис.

2. Знайти координати фокуса і рівняння директриси параболи $y^2=24x$.

3. Написати рівняння параболи, якщо відомі фокус F (-7; 0) і рівняння директриси x-7=0.

4. Написати канонічне рівняння параболи, якщо відомо: а) фокус F(0;5); б) директриса x+15=0.

5. Написати рівняння директриси параболи $y^2-2x-2y-5=0$.

**Практичне заняття № 4**

**Тема: Рівняння площини. Кут між площинами. Відстань від точки до площини**

1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0$ і має нормальний вектор $\vec{n}$, якщо:

а) $M_0$ (2, 1, -1), $\vec{n}=\{1,-2,3\}$

б) $M_0$ (-1, 2, 3), $\vec{n}=\{-1,2,-1\}$.

2. Дано дві точки $M_1$ та $M_2$. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$ якщо:

а) $M_1(3, -1, 2)$, $M_2(4, -2, -1)$;

б) $M_1(-1, 0, 2)$, $M_2(1, 3, -4)$.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0$ паралельно векторам $\overrightarrow{a_1}$ та $\overrightarrow{a_2}$, якщо $M_0$ (1, 1, 1), $\overrightarrow{a_1}=\{0, 1, 2\}$, $\overrightarrow{a_2}=\{-1, 0, 1\}$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1$ і $M_2$ паралельно вектору $\vec{a}$, якщо $M_1$ (1, 2, 0), $M_2$ (2, 1, 1), $\vec{a}=\{3, 0, 1\}$.

5. Обчислити площу трикутника, який відтинається від координатного кута xOy площинами

а) $6x-5y+3z-30=0$;

б) $5x-6y+3z+120=0$.

6. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1$, $M_2$ і $M_3$, якщо: $M_1$ (3, -1, 2), $M_2$ (4, -1, -1), $M_3$ (2, 0, 2).

7. Обчислити відстань від точки $M_0$ до площини $\pi$, якщо: $M_0$ (2, -4, 2), $\pi$ : $2x+11y+10z-10=0$.

8. Обчислити кут між площинами: $4x-5y+3z=0$ і $x-4y-z+9=0$.

**Практичне заняття № 5. Тема: Рівняння прямої в просторі. Взаємне розміщення прямих, прямої і площини**

1. Скласти параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0$ (-2, 1, -1) паралельно до вектора $\vec{s}=\{1,-2,3\}$.

2. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1$ та $M_2$ , якщо:
$M_1$ (3, 4, 0), $M_2$ (2, 3, -1).

3. Знайти кут між прямими: x=3t-2, y=0, z=-t+3 і x=2t-1, y=0, z=t-3.

4. Довести паралельність прямих:
1) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ і $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z=0 \end{cases}$
2) x=2t+5, y=-t+2, z=t-7 і $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0. \end{cases}$

5. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку M (2, 0, -3) паралельно прямій $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$ .

6. При якому значенні $l$ прямі $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$, $\frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$ перетинаються?

**Практичне заняття № 6. Тема: Поверхні другого порядку**

1. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи $\begin{cases} \frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1, \\ y=0 \end{cases}$ навколо осі Oz.

2. Вісь Oz є віссю кругового конуса з вершиною в початку координат, точка $M_0$ (3, -4, 7) лежить на його поверхні. Скласти рівняння цього конуса.

3. Знайти півосі еліпса, утвореного при перетині еліпсоїда $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}+\frac{4}{16}=1$ або $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$.

4. Визначити головні перерізи еліпсоїда $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$, тому півосі дорівнюють a=3, b=$\sqrt{3}$.

5. Знайти головні перерізи поверхні, яка утворена обертанням гіперболи $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$ навколо осі Ox.

## Тематика індивідуальних завдань

1. Розвиток лінійної алгебри (від 4 тис. р. до н.е. до XX ст.)
2. Розвиток векторної алгебри.
3. Розвиток аналітичної геометрії.
4. Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
5. Елементарні перетворення над матрицями.
6. Павутинна модель ринку.
7. Задача про неперервне нарахування процентів.
8. Модель Леоньєва багатогалузевої економіки.
9. Бюджетна множина, її межа й лінії бюджетного обмеження.
10. Теорема Кронекера-Капеллі.
11. Подвійний векторний добуток.
12. Класифікація плоских ліній.

13. Відстань між паралельними прямими, між двома мимобіжними прямими.

14. Циліндри другого порядку.

15. Конус другого порядку.

16. Еліпсоїд.

17. Однополий гіперболоїд.

18. Двополий гіперболоїд.

19. Еліптичний параболоїд.

20. Гіперболічний параболоїд.

21. Лінійний та евклідовий простір.

22. Лінійні оператори.

23. Власні вектори та власні значення лінійного перетворення.

24. Симетричні перетворення і їх матриці.

25. Квадратичні форми та їх зведення до канонічного вигляду.

## Тест для самоконтролю

1.1. Укажіть, які з матриць можна додавати:
1) прямокутні, однакового розміру;
2) квадратні, однакового порядку;
3) квадратні, різних порядків;
4) узгоджені.

1.2. Укажіть, які з матриць можна перемножити:
1) прямокутні, однакового розміру;
2) квадратні, однакового порядку;
3) квадратні, різних порядків;
4) узгоджені.

1.3. Укажіть правдиві твердження.

1. Якщо матриці $A$ та $B$ розміром $m$х$n$, то обидва добутки $AB^T$ та $A^TB$ визначені;

2. Якщо $AB = C$ і матриця $C$ має 2 стовпці, то матриця $A$ має 2 стовпці;

3. Якщо $BC = BD$,то $C = D$

4. Якщо $AC = O$, то $A = O$ або $C = O$.

1.4. Укажіть правдиві тотожності.

1) $\det(A+B) = \det A + \det B$; 2) $\det(\lambda A) = \lambda \det A$;

3) $\det(\lambda A_n) = \lambda^n \det A_n$; 4) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;

5) $\det(A^k) = (\det A)^k$

1.5. Укажіть правдиві твердження.

Визначник дорівнює нулю, якщо:

1) два його рядки пропорційні;
2) рядок дорівнює одному із стовпців;
3) один із рядків або стовпців визначника нульовий;
4) елементи його головної діагоналі нульові;
5) один із стовпців матриці дорівнює лінійній комбінації решти стовпців.

1.6. Укажіть елементарні перетворення матриці:

1) заміна стовпця на рядок з тим самим номером;
2) множення рядка на число $k \neq 0$;
3) множення стовпця на $k = 0$;
4) додавання до рядка матриці її стовпця, помноженого на деяке число.

1.7. Яке елементарне перетворення не змінює визначника:

1) переставляння рядків:
2) помноження рядка на число;
3) додавання до рядка іншого рядка;
4) переставляння стовпців.

1.8. Укажіть правдиві твердження.

Ранг матриці $A_{m \times n}$ — це:

1) найбільше з чисел *m* та *n*;
2) найбільший порядок невиродженої підматриці.
3) кількість рядків *m* матриці *A*;
4) найбільша кількість лінійно незалежних стовпців матриці *A*.

1.9. Укажіть правдиві твердження.

Обернена матриця існує, якщо матриця:

1) квадратна невироджена;
2) квадратна;
3) з однаковою кількістю рядків та стовпців;
4) вироджена.

1.10. Укажіть розв'язок матричного рівняння $AXB = C$, для оборотних матриць *A* та *B*.

1) $X = A^{-1}CB^{-1}$;
2) $X = CA^{-1}B^{-1}$;
3) $X = A^{-1}B^{-1}C$;
4) $X = B^{-1}\,CA^{-1}$.

1.11. Задано систему із трьох рівнянь із трьома невідомими. Ранги основної та розширеної матриць цієї системи дорівнюють одиниці. Визначте, скільки розв'язків має система:

1) не має розв'язків;
2) єдиний розв'язок;
3) указаних умов не досить для відповіді;
4) два розв'язки;
5) нескінченну множину розв'язків.

1.12. Вкажіть правдиві твердження.

1. Якщо графічною ілюстрацією системи із двох рівнянь є пара паралельних прямих, то система рівнянь несумісна.

2. Якщо під час елементарних перетворень системи одержано рівняння вигляду 0 = 0, то система не має розв'язків.

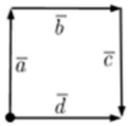
3. Якщо система двох лінійних алгебричних рівнянь із двома невідомими, то вона має рівно один розв'язок.

2.1. Які з поданих величин є векторними:

1) площа трикутника;
2) сила;
3) об'єм піраміди;
4) температура;
5) напруженість електричного поля;
6) прискорення;
7) робота.

2.2. Які з векторів на рисунку зображено:

1) колінеарними;
2) рівними;
3) ортогональними.




2.3. Укажіть рівність, що виражає зв'язок між вектором та його ортом.

1) $\bar{a}^0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$;
2) $\bar{a}^0 = \frac{|\bar{a}|}{\bar{a}}$;
3) $\bar{a}^0 = |\bar{a}|$;
4) $\bar{a}^0 = -\bar{a}$.

2.4. Виберіть правильне означення базису лінійного простору.

Базисом називають:

1) будь-який набір лінійно незалежних векторів простору;

2) найбільший можливий набір лінійно залежних векторів простору;

3) найбільший можливий набір лінійно незалежних векторів простору;

4) набір трьох лінійно незалежних векторів будь-якого простору.

2.5. Виберіть правильне означення вимірності лінійного простору. Вимірність — це:

1) найбільша можлива кількість лінійно незалежних векторів простору;

2) найбільша можлива кількість лінійно залежних векторів простору;

3) кількість некомпланарних векторів простору.

2.6. Скільки векторів утворюють базис на прямій? на площині? у просторі?

2.7. Виберіть правильне твердження.

Проекцією вектора $\bar{a}$ на вісь L($\bar{s}$) називають:

1) вектор;

2) число$|\bar{a}|$;

3) число - $|\bar{a}|$;

4) число$|\bar{a}|\cos(\bar{a}, \bar{s})$.

2.8. Задано вектор $\bar{a}$=$a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k}$. Коефіцієнти $a_x$, $a_y$,$a_z$є:

1) координатами вектора $\bar{a}$ в базисі $\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$;

2) проекціями вектора $\bar{a}$ на напрями векторів $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$;

3) напрямними косинусами вектора $\bar{a}$;

4) скалярними добутками вектора $\bar{a}$ на вектори $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$.

2.9. Укажіть правильне означення.

Скалярним добутком векторів $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$та$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ в ортонормованому базисі називають:

1) вектор $\bar{c}$, довжина якого дорівнює $|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b})$;

2) число, що дорівнює$|\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a},\bar{b})$;

3) число, що дорівнює$|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b})$;

4)число, що дорівнює $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, .

2.10. Укажіть правильне означення.

Векторним добутком векторів $|\bar{a}|$ та $|\bar{b}|$ називають:

1) число, що дорівнює$|\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a},\bar{b})$;

2) число, що дорівнює$|\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b})$;

3) вектор, перпендикулярний до векторів$\bar{a}$та $\bar{b}$;

4)вектор, що має довжину $|\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a},\bar{b})$, напрямлений перпендикулярнодо векторів$\bar{a}$та $\bar{b}$ і вектори $\bar{a}$,$\bar{b}$,[$\bar{a}$, $\bar{b}$] утворюють праву трійку.

2.11. Укажіть правильне означення мішаного добутку трьох векторів($\bar{a}$,$\bar{b}$,$\bar{c}$).

1) $(\bar{a} \cdot \bar{b}) \times \bar{c}$; 2) $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$;

3) $(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c}$; 4) $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$.

2.12. Укажіть правильні вирази в ортонормованому базисі для скалярного добутку двох векторів ($\bar{a}$,$\bar{b}$), векторного добутку двох векторів [$\bar{a}$,$\bar{b}$] та мішаного добутку трьох векторів ($\bar{a}$,$\bar{b}$,$\bar{c}$):

1) $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$;

2) $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$;

3) $\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

2.13. Укажіть умови колінеарності, ортогональності, компланарності векторів:

1) $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$;

2) $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$;

3) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

2.14. Укажіть, які з формул виражають зв'язок між полярними (ρ;φ) та узгодженими з ними декартовими координатами ($x; y$) точок.

1) $\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \\ y = \rho \cos \varphi \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$

3) $\begin{cases} \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

4) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , φ: $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

2.15. Укажіть, які з поданих записів є: а) алгебричною, б) тригонометричною, в) показниковою формами комплексного числа.

1) $z= (\rho\cos\varphi + \sin\varphi)$, $\rho \geq 0$ .

2) $z= \rho e^{i\varphi}$, $\rho \geq 0$ .

3) $z = a + bi$.

2.16. Скільки різних значень: а) кореня $n$-го степеня з числа $z \neq 0$; б) $n$-го степеня числа $z$ ($n \in N$) існує?

| | |
|---|---|
| 1) одне; | 2) $n$; |
| 3) жодного; | 4) $n$- 1. |

3.1. Визначте, до якого типу належить перетворення:

1) $\begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = b_1 + x' \\ y = b_2 + y' \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y' \\ y = \sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y' \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = a_{11}x'y' + a_{12}y' \\ y = a_{21}x' + a_{22}x'y' \end{cases}$

Варіанти:
а) загальне лінійне перетворення;
б) переорієнтація координатних осей;
в) повертання координатних осей;
г) нелінійне перетворення;
ґ) паралельне перенесення координатних осей.

3.2. Знайдіть матрицю $A$ повертання системи координат О$xy$ на кут $\varphi = \frac{\pi}{4}$:

1) $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

3.3. Нехай точка $M_0$ належить прямій $L$, а вектор $\bar{s}$ паралельний цій прямій. Укажіть правильне твердження. Пряма $L$ — це множина всіх:

1) векторів $\overline{M_0M}$, колінеарних ненульовому вектору $\bar{s}$;

2) точок М, для яких вектор $\overline{M_0M}$ колінеарний вектору $\bar{s}$;

3) точок М, для яких вектор $\overline{M_0M}$ ортогональний вектору $\bar{s}$.

3.4. Точка $M_0$ належить площині $P$; вектор $\bar{n}$перпендикулярний до цієї площини; вектори $\bar{u}$,$\bar{v}$компланарні площині $P$. Визначте правильні твердження. Площина $P$ — це множина:

1) всіх точок М, таких, що вектори $\overline{M_0M}$ перпендикулярні до вектора $\bar{n}$;

2) векторів $\overline{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}$, колінеарних вектору$\bar{n}$;

3) всіх точок М, таких, що вектори $\overline{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}$ та $\bar{u}$ — колінеарні;

4) всіх точок М, таких, що вектори $\overline{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ — компланарні.

3.5. Задано $\overline{n_1} = (a_1; b_1; c_1)^{\mathrm{T}}$ ,$\overline{n_2} = (a_2; b_2; c_2)^{\mathrm{T}}$ — нормальні вектори двох площин. Визначте правильне твердження. Якщо $\frac{a_2}{a_1}$=$\frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$ , то площини:

1) збігаються;
2) перпендикулярні;
3) перетинні;
4) указаних умов замало для відповіді;
5) паралельні.

3.6. Укажіть, яка з формул визначає віддаль між прямими $L_1$ (М$_1$; $\overline{s_1}$) та $L_2$ (М$_2$; $\overline{s_2}$), якщо вони: а) паралельні; б) мимобіжні.

1) $d = \frac{|(\overline{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}\overline{s_2} ,|}{|\overline{s_2}|}$

2) $d = \frac{|(\overline{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2} ,[\overline{s_1} ,\overline{s_2}])|}{|[\overline{s_1} ,\overline{s_2}]|}$

3) $d = \frac{|(\overline{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}\overline{s_1} ,|}{|\overline{s_1}|}$

3.7. Укажіть, які з поданих властивостей означують:
1) коло;
2) еліпс;
3) гіперболу;
4) параболу.

Варіанти:

а) множина точок, сума віддалей яких від фокусів стала і більша за віддаль між фокусами;

б) множина точок, які рівновіддалені від фокуса і директриси;

в) множина точок, модуль різниці віддалей яких від фокусів є сталою величиною, меншою за віддаль між фокусами;

г) множина точок, які рівновіддалені від однієї точки.

3.8. Укажіть тип кривої, заданої у ПДСК рівнянням:

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; б) $x^2=2py$;

в) $x^2+y^2=a^2$; г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Варіанти:

1) еліпс;

2) гіпербола;

3) парабола;

4) коло.

3.9. Укажіть правильне означення. Число λ називають власним числом матриці *A*, якщо:

1) існує такий вектор $\vec{x}$, що $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$;

2) існує такий ненульовий вектор$\vec{x}$, що $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$;

3) для будь-якого вектора $\vec{x}$ правдива рівність $Ax = \lambda\vec{x}$;

4) існує такий ненульовий вектор$\vec{x}$, що $(A - \lambda E)\vec{x}=\vec{0}$.

3.10. Визначте тип геометричного образу,який задано рівнянням $3x^2+10xy+3y^2 2x-14y-13 = 0$.

1) еліптичний;

2) параболічний;

3) гіперболічний.

3.11. Визначте тип поверхні, заданої рівнянням:

1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$;

5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2qz$;

6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2}$.

Варіанти:

а) еліпсоїд;

б) сфера;

в) однопорожнинний гіперболоїд;

г) двопорожнинний гіперболоїд;

ґ) параболоїд еліптичний;

д) параболоїд гіперболічний.

3.12. Укажіть, які оптичні властивості мають:

а) еліпс; б) парабола; в) гіпербола. Якщо помістити:

1) у фокус кривої точкове джерело світла, то всі промені, відбиті від кривої, спрямуються паралельно осі кривої;

2) в один з фокусів кривої точкове джерело світла, то кожний промінь після відбиття від кривої начебто виходить з іншого фокуса;

3) в один з фокусів кривої точкове джерело світла, то всі промені після відбиття від кривої зійдуться в іншому її фокусі.

## Зразки завдань модульних контрольних робіт

### Варіант 1

*Теоретична частина*

1. Дії над матрицями
2. Скалярний добуток векторів і його властивості

*Практична частина*

1. Знайти кут між площинами 3x-4y-z=0 і 2x+3y-6z-2=0
2. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

### Варіант 2

*Теоретична частина.*

1. Поняття вектора. Лінійні операції над векторами
2. Рівняння площини

*Практична частина*

1. Знайти добуток матриць:

*AB*:*A*=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$; *B*=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Через точку А (2;1;1) написати параметричне рівняння прямої, паралельно прямій $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{0}$

### Варіант 3

*Теоретична частина.*

1. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь
2. Еліпс

*Практична частина*

1. З'ясувати чи буде система векторів $\overline{x_1}$=(4;3;2;1), $\overline{x_2}$=(2;3;4;5), $\overline{x_3}$=(6;6;6;6) лінійно залежною

2. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ і площини 2x+3y+z-1=0

## Екзаменаційна програма з лінійної алгебри та аналітичної геометрії

1. Матриці, їх види.
2. Дії над матрицями.
3. Визначник квадратної матриці. Способи обчислення.
4. Визначники третього порядку, їх властивості.
5. Мінор матриці. Ранг матриці. Способи знаходження.
6. Обернена матриця. Розв'язування рівнянь матричним методом.
7. Системи 3-х лінійних рівнянь з 3-ма невідомими.
8. Формули Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь.
9. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь.
10. Вектори. Лінійні операції над векторами.
11. Координати вектора. Проекція вектора на вісь. Декартова система координат.
12. Дії над векторами в координатній формі. Декартова система координат.
13. Скалярний добуток векторів. Властивості. Застосування.
14. Векторний добуток двох векторів. Властивості. Застосування.
15. Мішаний добуток трьох векторів. Властивості. Застосування.
16. Довжина відрізка. Поділ відрізка в даному відношенні.
17. Кут між векторами.

18. Векторний простір. Лінійно залежні та лінійно незалежні системи векторів.

19. Вимірність і базис лінійного простору. Розклад вектора по базису.

20. Загальне рівняння прямої на площині. Окремі випадки.

21. Векторні рівняння прямої на площині.

22. Канонічне рівняння прямої на площині, рівняння у відрізках на осях.

23. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, через дві точки на площині.

24. Умови паралельності і перпендикулярності прямих на площині заданих загальними і канонічними рівняннями.

25. Кут між прямими на площині заданими загальними і канонічними рівняннями.

26. Загальне рівняння площини у просторі. Окремі випадки.

27. Векторне рівняння площини в просторі.

28. Рівняння площини через три точки.

29. Відстань від точки до площини.

30. Взаємне розміщення площин.

31. Загальне рівняння прямої у просторі.

32. Взаємне розміщення прямих в просторі.

33. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини в просторі.

34. Кут між прямою і площиною в просторі, належність прямої площини.

35. Криві другого порядку. Коло.

36. Еліпс.

37. Гіпербола.

38. Парабола.

39. Поверхні другого порядку, їх канонічні рівняння.

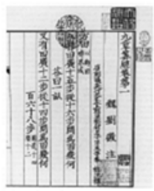
40. Поверхні обертання. Еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди.

41. Циліндричні поверхні.

42. Лінійні оператори.

43. Дії над лінійними операторами.

## Історичні відомості
## Розвиток лінійної алгебри



4000 до н. е. — вавилоняни складають задачі на системи 2 х 2 і вже знають, як їх розв'язувати.

200 до н. е. — у китайському трактаті «Математика у дев'яти книгах» розв'язувались системи 3 х 3, використовуючи лише значення їхніх числових коефіцієнтів, що є зародком ідеї матриці і методу виключення змінних.

«Є три сорти кукурудзи, таких, що три в'язки першого, дві другого та одна третього важать 39 мір. Дві першого, три другого і одна третього важать 34 міри. Одна першого, дві другого і три третього важать 26 мір. Скільки мір зерна важить одна в'язка кожного сорту?».

Автор далі записує коефіцієнти системи, на відміну від звичного на тепер способу, у стовпці на лічильній дошці і дає вказівки читачеві:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | Помнож середній | 0 | 0 | 3 | Від | 0 | 0 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | стовпець на 3 і відніми від нього | 4 | 5 | 2 | п'яти лівих | 0 | 5 | 2 |
| 3 | 1 | 1 | правий стовпець і також помнож | 8 | 1 | 1 | стовпців відніми | 36 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 3 | лівий стовпець на | 3 | 2 | 3 | середній | 9 | 2 | 3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 4 9 | 3 і відніми від нього середній стовпець *стільки разів скільки можна*(від'ємними числам тоді не оперували) | 9 4 9 | *стільки разів, скільки можна* | 9 4 9 |

З цієї таблиці вже оберненим підставленням можна знайти вагу однієї в'язки кукурудзи кожного сорту.


Джіроламо Кардано
G. Cardano
1501–1576


Титульний аркуш «Видатного мистецтва»

1545 — Кардано у своїй праці «Видатне мистецтво або «Правила алгебри», де йдеться і про відому формулу Кардано розв'язання кубічного рівняння, подає фактично крамерове правило для розв'язання системи 2 х 2.

1683 — японський математик Кова Секі у праці «Метод розв'язання таємних задач» уперше використовує ідею визначника. Він знав, як обчислити визначники квадратних матриць порядку від 2-го до 5-го, і застосовував визначники до розв'язання алгебричних рівнянь.

1693 — німецький математик і філософ Лейбніц уперше в Європі приходить до ідеї визначника. Він подав формальний опис визначників і застосував їх до дослідження систем 3 х 2 та 3 х 3.

Кова Секі
бл. 1642–1708

Готфрід Лейбніц
G. W. Leibniz
1646–1716

28 квітня 1693 у листі до французького математика Гійома Лопіталя (G. L'Hôpital, 1661-1704) Лейбніц розв'язав задачу

сумісності системи:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12}x + a_{13}y = 0, \\ a_{21} + a_{22}x + a_{23}y = 0, \\ a_{31} + a_{32}x + a_{33}y = 0, \end{cases}$$

сучасний запис

або

$$\begin{cases} 10 + 11x + 12y = 0, \\ 20 + 21x + 22y = 0, \\ 30 + 31x + 32y = 0. \end{cases}$$

Лейбніців запис — числа виражають індекси коефіцієнтів!

Умовою сумісності такої системи є те, що її визначник, який він називає результантом, дорівнює нулю (він її записав розгорнуто — так, як би виразив визначник через елементи). Але ці ідеї Лейбніц чомусь не оприлюднив і вони не вплинули на розвиток тогочасної математики.

Ненадруковані праці Лейбніца містять понад 50 різних способів запису коефіцієнтів систем, над якими він працював протягом 50 років, починаючи з 1678.

Лейбніц використовував термін «результант» для певної суми членів визначника. Він фактично сформулював правило Крамера і те, що визначник можна розкласти за будь-яким стовпцем (правило Лапласа).

1748 — шотландський математик Колін Маклорен у «Курсі алгебри» вперше публікує результати про визначники, зокрема доведення правила Крамера для систем 2 х 2 та 3 х 3 і вказує, як застосувати його для системи 4 х 4.

Колін Маклорен
C. Maclaurin
1698–1746

Ґабрієль Крамер
G. Cramer
1704–1752

1750 — швейцарський математик Ґабрієль Крамер у праці «Вступ до аналізу алгебричних кривих» дає загальне правило розв’язання систем *n*х*n*, розв’язуючи задачу про криву, проведену через певну кількість заданих точок. Цікаво, що правило подано у додатку, без доведення і чітких пояснень його застосування.

1772 — французький математик і астроном П'єр-Симон Лаплас у праці, присвяченій орбітам внутрішніх планет, дослідив розв'язки систем лінійних алгебричних рівнянь без їх безпосереднього знаходження, використовуючи визначники, які він, як і Лейбніц, назвав результантами.

Лаплас подає спосіб розкладання визначника (яке, зокрема, містить і розкладання визначника за будь-яким його рядком або стовпцем) за визначниками меншого порядку.

П'єр-Симон Лаплас
P.-S. Laplace
1749–1827

Жозеф Луї Лагранж
J. L. Lagrange
1736–1813

1773 — французький математик Жозеф Луї Лаґранж вивчає властивості функціонального визначника 3-го порядку і тлумачить визначник 3-го порядку як об'єм паралелепіпеда.

1781 — Олександр Вандермонд (A.-T. Vandermonde, 1735-1796) уперше розглядає визначник як незалежну функцію, не спираючись на систему лінійних алгебричних рівнянь. Він також описує властивості визначника і вдосконалює позначення для визначників.

Карл Фрідріх Ґаус
C. F. Gauß
1777–1855

1801 — уперше термін «детермінант» (визначник), хоч і не в сучасному розумінні, використовує німецький математик, фізик і астрономом Карл Фрідріх Ґаус у праці, присвяченій теорії чисел (1801), досліджуючи квадратичні форми. У цій самій праці запропоновано запис коефіцієнтів квадратичної форми у прямокутні таблиці; опис множення матриць (які Ґаус вважав композицією перетворень, оскільки він ще не прийшов до ідеї матриць) і дію, яка відповідає оберненню матриць (таблиць коефіцієнтів квадратичних форм).

Метод виключення, схожий на використаний у «Математиці в дев'яти книгах», був використаний Ґаусом у праці, присвячений вивченню орбіти астероїда Паллада до розв'язання системи 6х6.

1812 — французький математик Огюстен Луї Коші вперше використав термін «детермінант» у сучасному розумінні. Він обґрунтував одержані до нього результати і дістав нові результати про мінори і алгебричні доповнення, довів теорему про множення визначників.

1826 — Коші, вивчаючи квадратичні форми n змінних, використовує термін «таблиця» для матриці коефіцієнтів. Він запровадив власні числа матриці і одержав результати про діагоналізацію матриці, які відповідають зведенню форми до суми квадратів.

Огюстен Луї Коші
A. L. Cauchy
1789–1857

Коші запропонував ідею подібних матриць і показав, що дві подібні матриці мають одне й те саме характеристичне рівняння. Він довів, що будь-яку дійсну симетричну матрицю можна діагоналізувати.

1841 — німецький математик Карл Якобі у праці «Про функціональні визначники» запроваджує якобіан (пізніше названий так Сілвестром).

1840-1850 — Сілвестр, Келі, французький математик Шарль Ерміт та інші розвинули теорію інваріантів.

Шарль Ерміт
Ch. Hermite
1822–1901

1844 — німецький математик Фердінанд Ейзенттейн (F. Eisenstein, 1823-1852), позначаючи лінійне перетворення однією літерою, розглянув дії над лінійними перетвореннями, з'ясувавши некомутативність множення перетворень. Це фактично вже були дії над відповідними матрицями.

1844 — Келі у праці «Розділи з аналітичної геометрії n вимірів» запроваджує поняття n -вимірного простору.

1850 — уперше термін «матриця» був використаний англійським математиком Джеймсом Сілвестром. Сілвестр означив матрицю як розміщені у прямокутнику елементи і встановив зв'язок квадратних матриць з визначниками.

Цю ідею він повідомив своєму другові Артуру Келі, який відразу усвідомив значущість ідеї матриці.

Сілвестр довів, що, якщо матриця A має власне число $\lambda$, то обернена до неї матриця $A^{-1}$має власне число$\frac{1}{\lambda}$ .

Карл Якобі
C. Jacobi
1804–1851

Фердинанд
Ейзенштейн
F. Eisenstein
1823–1852

Артур Келі
A. Cayley
1821–1895

Джеймс Сілвестр
J. Sylvester
1814–1897

1853 — Келі одержав спосіб о бернення матриці.

1858 — Келі публікує «Мемуар з теорії матриць», у якому вперше дає абстрактне означення матриці. Він показує, що таблиці коефіцієнтів, які вивчалися раніше для квадратичних форм і лінійних перетворень є окремими випадками матриць. Келі подає всю матричну алгебру, означуючи додавання, множення матриці на число, множення матриць й обернення матриць. Він подає явну конструкцію оберненої матриці за допомогою визначників.

Карл Веєрштрас
K. Weierstraß
1815–1897

Келі також довів, що квадратна матриця 2-го порядку справджує свої характеристичне рівняння і зазначив, що перевірив цю властивість для матриць 3-го порядку (теорему Гамілтона — Келі). Ірландський математик Вільям Гамілтон довів цю теорему для окремого випадку матриці 4-го порядку, досліджуючи кватерніони.

1860-ті — німецький математик Веєрштрас розглядає визначник аксіоматично як нормовану, лінійну, однорідну, антисиметричну функцію.

1867 — англійський письменник і математик Льюїс Керол (Ч. Л. Доджсон, 1832-1898) у праці «Елементарна теорія визначників» уперше публікує доведення теореми Кронекера — Капеллі.

1870 — французький математик Каміль Жордан, вивчаючи канонічну форму лінійних підставлянь, подає жорданову канонічну форму матриці.

Німецький математик Фердинанд Фробеніюс (F. Frobenius, 1849-1917) написав важливу працю про матриці «Про лінійні підставлення і білінійні форми», хоч він і не знав праць Келі і не використовував термін «матриця», де зокрема довів теорему Гамілтона — Келі в загальному випадку і подав означення рангу матриці.

1888 — німецький інженер і геодезист Вільгельм Йордан удосконалює Ґаусів метод виключення змінних.

Льюїс Керол
Lewis Carroll
1832–1898

Каміль Жордан
C. Jordan
1838–1922

Фердинанд
Фробеніюс
F. Frobenius,

Вільгельм Йордан
W. Jordan
1842–1899

**Розвиток векторної алгебри і комплексних чисел**

1484 — французький математик Ніколя Шуке (К Chuquet, 1445-1500), розв'язуючи деякі алгебричні рівняння, дістає й уявні розв'язки, але відкидає їх.

1545 — Джіроламо Кардано у «Видатному мистецтві» розглядає задачу, яка приводить до комплексних чисел, навіть наводячи приклад оперування з комплексними числами, називає їх «несправжніми», «настільки ж витонченими, як і некорисними».

1572 — італійський математик Рафаель Бомбеллі (R. Bombelli, 1530-1590) публікує «Алгебру», в якій застосовує свою «дику ідею» — використати квадратні корені з від'ємних чисел, щоб одержати дійсні розв'язки алгебричних рівнянь (у незвідному випадку кубічного рівняння). Ці прийоми були відомі йому з 1550 року, але не були надруковані.

1586 — фламандський математик-універсал та інженер Симон Стевін (S. Stevin, 1548-1620) у праці «Принципи мистецтва зважування» подає правило додавання для перпендикулярних сил. Загальний випадок (який міг бути відомим ще грецькому філософу Аристотелю (384-322 до н. е.)) був розглянутий французьким математиком, фізиком і астрономом Жілем Робервалем (G. de Roberval, 1602-1675).

1629 — Альберт Жирар (A. Girard, 1595-1632) у праці «Нові винаходи в алгебрі» чітко формулює співвідношення між коренями і коефіцієнтами, розглядаючи від'ємні та уявні корені рівнянь. Уперше формулює основну теорему алгебри про те, що будь-яке алгебричне рівняння n -го степеня має n коренів.

1637 — французький математик, філософ, фізик і фізіолог Рене Декарт називає «уявними» вирази, які містять корені з від'ємних чисел, і вважає їхню появу ознакою нерозв'язності задачі.

1673 — англійський математик Джон Воліс уперше у своїй «Алгебрі» пропонує геометричне зображення комплексних чисел.

1687 — видатний англійський фізик, математик і астроном Ісаак Ньютон у праці «Математичні основи натуральної філософії» висловив ідею, що сили, оскільки вони мають величину й напрям, можна комбінувати (додавати) і одержувати нову силу.

Симон Стевін
S. Stevin
1548–1620

Джон Воліс
J. Wallis
1616 – 1703

Християн Гюйгенс
Ch. Huygens
1629–1695

Ісаак Ньютон
I. Newton
1643–1727

1707 — англійський математик Абрагам Муавр (A. de Moivre, 1667¬1754) опублікував формулу $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$.

1710 — французький математик П’єр Вариньон сформулював закон паралелограма сил.

1714 — англійський математик і астроном Роджер Коутс (R. Cotes, 1682-1716) у праці «Логометрія» подає формулу — $i\varphi = \ln (\cos \varphi - i \sin \varphi)$.

1747 — видатний швейцарський математик і фізик Леонард Ейлер (L. Euler, 1707-1783) показав, що логарифм з від’ємного числа уявний.

1748 — Ейлер у «Вступі до аналізу нескінченно малих» за допомогою розвинення у степеневий ряд експоненти, синуса і косинуса виводить формулу $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

1749 — д’Аламбер виводить умови аналітичності функції комплексної змінної (умови Ейлера — д’Аламбера — Коші — Рімана).

Абрахам Муавр
A. de Moivre
1667–1754

П. Варіньон
P. Varignon
1654–1722

Леонард Ейлер
L. Euler
1707–1783

Жан-Лерон
д'Аламбер
J. R. d'Alembert
1717–1783

1797 (надруковано в 1799) — норвезький математик Каспар Вессель (C. Wessel, 1745-1818) друкує працю у мемуарах Королівської академії Данії, у якій він започатковує геометричне зображення комплексних чисел як точок комплексної площини; він досліджує також, «як можна аналітично задати напрям». Він розглядає геометричне тлумачення суми, різниці, добутку та частки комплексних чисел і розшукує (звісно, невдало) узагальнення подібних зображень для тривимірного простору. Ці дослідження залишились майже невідомими.

1799 — Карл Ґаус також вивчає геометричне тлумачення комплексних чисел і пробує узагальнити його на тривимірний простір, але результати друкує лише 1831 р.

1806 — француз Жан Арґан (J. Argand, 1768-1822) друкує геометричне тлумачення комплексних чисел і знову ж таки у праці 1813 вивчає подібний підхід для тривимірного простору.

1806 — француз Адрієн-Квент Бує (A.-Q. Buée, 1748-1826) друкує працю, присвячену геометричному зображанню комплексних чисел.

1814 (надруковано 1825) — Коші у своїх працях вперше подає чітко викладену теорію функцій комплексної змінної.

1827 — німецький математик і астроном Август Мебіюс у своїй книжці «Барицентричні координати» розглядає напрямлені відрізки, які він позначає літерами, і розвиває дії над напрямленими відрізками.

1828 — англійський математик Джон Ворен (J. Warren, 1796-1852) публікує працю «Геометричне зображення квадратних коренів із від'ємних чисел», яка і надихнула ірландського фізика, астронома і математика Вільяма Гамілтона на вивчення й узагальнення комплексних чисел.

1835 — італійський математик Дж. Белавітіс Bellavitis, 1803-1880) розробляє систему еквіполентностей, яка дуже нагадує сучасну неформальну векторну алгебру, а саме: «два відрізки називають еквіполентними якщо вони мають однакову довжину, паралельні й однаково напрямлені».

1837 — ірландський математик, фізик та астроном Вільям Гамілтон публікує працю «Теорія спряжених функцій або алгебричних пар...», у якій розглядає комплексні числа як упорядковані пари дійсних чисел.

1840 — німецький енциклопедист, математик, лінгвіст та фізик Герман Ґрасман у праці «Теорія відпливів і припливів» розглядає дії над напрямленими відрізками і фактично числові еквіваленти векторного й скалярного добутків. Ця як і наступні праці Ґрасмана, вирізнялися глибиною і продуманістю, але ще довго не привертали уваги загалу математиків.

1843 — продовжуючи дослідження трійок дійсних чисел, Гамілтон розробляє теорію четвірок, які являють собою узагальнення комплексних чисел — кватерніони вигляду $a + x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}$.

1844 — Ґрасман, незалежно від Гамілтона — опублікував «Учення про протяжні величини», у якій він запроваджує $n$-вимірну геометрію і системи гіперкомплексних чисел, загальніших за кватерніони.

Ця праця містить багато основних ідей векторної алгебри як позначення $n$-вимірного векторного простору, підпростору, лінійної оболонки, лінійної залежності і незалежності, базису, розмірності та лінійних перетворень.

Векторний простір Ґрасман означує як множину лінійних комбінацій $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot e_1$, де $a_i$ – дійсні числа; $e_1$ – лінійно незалежні «одиниці».


Август Мебіюс
A.F. Möbius
1790–1868


Дж. Белавітіс
G. Bellavitis
1803–1880


Вільям Гамілтон
W. R. Hamilton
1788–1856


Герман Ґрасман
H. Grassmann
1809–1877

1845 — французький фізик, математик і інженер, Жан де Сен-Венан (J. C. de Saint-Venant, 1797-1886) публікує варіант векторного числення, подібний до ґрасманового (дослідження розпочав ще 1832 р.). Він розглядає векторний добуток як площу орієнтованого паралелограма.

1846 — Гамілтон публікує працю, у якій пропонує терміни «скаляр» і «вектор» для дійсної і уявної частин кватерніона.

1873 — шотландський математик і фізик, творець теорії електромагнетизму Джеймс Максвел у «Курсі електрики і магнетизму» виклав свою теорію за допомогою векторів (деякі результати паралельно виражав через кватерніони). Він поділив усі фізичні величини на векторні й скалярні; був переконаним прибічником застосування векторів перед кватерніонанами.

1877 — англійський математик і філософ Вільям Кліфорд у своїх «Елементах динаміки» (1878) запровадив скалярний і векторний добутки векторів.

1881 — спираючись на ідеї Ґрасмана та Гамілтона, американський математик і фізик Джозая Ґібс (J. W. Gibbs, 1839-1903) у підручнику «Векторний аналіз» розвинув векторний аналіз майже до сучасного його стану.

Жан де Сен-Венан
J. C. de Saint-Venant
1797–1886

Джеймс Максвел
J. C. Maxwell
1831–1879

Вільям Кліфорд
W. K. Clifford
1845–1879

Джозая Гібс
J. W. Gibbs
1839–1903

1885, 1893 — активно почав упроваджувати вектори у фізиці англійський математик, фізик і інженер Олівер Гевісайд.

1888 — спираючись на ґрасманові ідеї, сучасну аксіоматику векторного простору подав у своїй праці «Геометричне числення» італійський математик Джузепе Пеано (він називає його «лінійною системою»). Пеано подає приклади векторних просторів: дійсні числа та комплексні числа, вектори на площині й у просторі, множину лінійних перетворень з одного векторного простору в інший, множину многочленів від однієї змінної.

Але і праця Ґрасмана через її складність, і праця Пеано через її геометричний характер ще довго залишались маловідомими.

1890-ті — італійський математик Сальваторе Пінкерле розробляє формальну теорію лінійних операторів у нескінченновимірних просторах, не спираючись на працю Пеано.

1904, 1908 — німецькі математики Давид Гільберт та Ерхард Шмідт вивчають нескінченновимірні функціональні простори.

Олівер Гевісайд
O. Heaviside
1850–1925

Джузеппе Пеано
G. Peano
1858–1932

Сальваторе Пинкерле
S. Pincherle
1853–1936

Давид Гільберт
D. Hilbert
1862–1943

1918 — німецький математик Герман Вейль у книжці «Простір. Час. Матерія» незалежно від Пеано аксіоматично запроваджує поняття скінченновимірного дійсного векторного простору.

1920 — польський й український математик Стефан Банах у докторській дисертації запроваджує поняття лінійного метричного простору.

Ергард Шмідт
E. Schmidt
1876–1959

Герман Вейль
H. Weyl
1885–1955

Стефан Банах
S. Banach
1892–1945

**Розвиток аналітичної геометрії**

Координати з'явились ще в давнину. Географічні координати — довгота і широта, характеризували положення пунктів земної поверхні, яку зображували у вигляді прямокутника, парою чисел. Подібними були й астрономічні координати, які використовували для визначення положення світил на небесній сфері.

IV ст. до н. е. — давньогрецький математик Менехм (380-320 до н. е.) відкрив конічні перерізи, вивчив їхні властивості; побудував прилади для креслення конічних перерізів.

Друга половина III ст.-перша половина II ст. до н. е. — давньогрецький геометр і астроном Аполоній Пергський (262-190 до н. е.) написав працю «Конічні перерізи», дослідивши еліпс, параболу і гіперболу.

Близько 1360 — французький філософ, математик і фізик Никола Орем (Nicole Oresme, 1323-1382) запровадив у математиці координатний метод; координати, за аналогією з географічними, назвав довготою і широтою.

Близько 1635 — французький математик П'єр Ферма поширює рукописи праці «Вступ до вивчення плоских та тілесних місць», де описує і обговорює рівняння різноманітних кривих 2-го порядку у прямокутних координатах. Для спрощення вигляду рівнянь широко використовує перетворення координат. Праця не була широковідома і надрукована лише 1679 р.

1637 — Декарт у «Геометрії» застосовує алгебричну символіку до геометрії, розроблює теорію алгебричних рівнянь. Він описує точку площини як пару дійсних чисел, прямі і криві — як їхні рівнянням.

Декарт включає до геометрії ширший клас кривих, зокрема «механічні» (трансцендентні, як спіралі) і вважає, що кожна крива має визначальне рівняння. Він пропонує класифікацію алгебричних кривих. Декарт зазначає, хоч і не доводить, що основні характеристики кривої не залежать від системи координат.

Середина XVII ст. — французький математик Блез Паскаль, Воліс, голландський математик Х. Гюйґенс дослідили властивості циклоїди та інших ліній, які утворюються коченням однієї кривої вздовж другої.

1655 — Воліс розвиває геометричні ідеї Декарта, будує графік синусоїди; розглядає конічні перерізи як плоскі лінії; розглядає від'ємні координати (Ферма і Декарт розглядали лише додатні) і косі (непрямокутні) координати.

1660 — голландський математик Ян де Віт (Jan de Witt, 1625-1672) у своїй праці «Елементи кривих», опублікованій як частина коментарів декартової «Геометрії»

(1660), показав, як перетворення координатних осей зводить задане рівняння кривої 2-го порядку до канонічного вигляду.

1671 — Ньютон запровадив термін «аналітична геометрія».


П'єр Ферма
P. de Fermat
1601–1665


Рене Декарт
R. Descartes
1596–1650


Блез Паскаль
B. Pascal
1623–1662


Ян де Віт
Jan de Witt
1625–1672

1687 — швейцарський математик Якоб I Бернуллі розглянув логарифмічну спіраль і ланцюгову лінію.

Близько 1700 — шотландський математик і астроном Дж. Ґреґорі пропонує формули перетворення координат, виводячи вперше рівняння деяких ліній. Розглядає полярні координати.

1700 — французький математик і механік Антуан Паран (A. Paren, 1666—1716) уперше розробляє аналітичну геометрію у просторі. Виводить загальне рівняння сфери; доводить, що гіперболоїд обертання породжується обертанням однієї прямої навколо другої.

1736 — у підсумковій (посмертній) праці «Метод флюксій і нескінченних рядів» Ньютона запроваджено полярну систему координат і ще 8 різних типів косокутних систем.

1748 — Ейлер у «Додатку про поверхні» до другого тому «Вступу в аналіз нескінченних» систематично запроваджує прямокутні Декартові координати у просторі і висловлює деякі загальні міркування про рівняння поверхонь. Також він роз'яснює метод перерізів вивчення поверхонь,зокрема, циліндра, конуса і сфери, розглядає перетворення просторових прямокутних координат.

# СЛОВНИК ТЕРМІНІВ

**Походження термінології**

**АБСЦИСА** — лат. *abscissa*(відрізана, відокремлена).

**АДИТИВНИЙ** — лат. *additivus*(додавання).

**АЛГЕБРА** — араб. *al-ğabr, ал-джабр* (поновлення).

**АПЛІКАТА** — лат. *applicata* (приєднана, прикладена).

**АРГУМЕНТ** — лат. *argumentum* (довід, доказ).

**АСИМПТОТА** — гр. *ἀσύμπτωη* (зливаюся). Поняття«асимптота» вже вжив Архімед (ІІІ ст. до н. е.), а означення ітермін — Аполлоній Пергський (ІІІ—ІІ ст. до н. е.).

**АСОЦІАТИВНИЙ** — лат. *associativus* (з'єднувальний).

**АСТРОЇДА** — гр. *ἄστρον* (зірка), *εἱδος* (вигляд) — зіркоподібна.

**БАЗИС** — гр. *βάσις* (основа, підвалина).

**ВЕКТОР** — лат. *vector* (носій).

**ГЕЛІКОЇД** — гр. *ἑλίξ* (спіраль), *εἱδος* (вигляд).

**ГЕОМЕТРІЯ** — гр. *γεωμετρία* (вимірювання землі).

**ГІПЕРБОЛА** — гр. *ὑπερβολή* (перебільшений).

**ДЕТЕРМІНАНТ** — лат. *determinans* (той, що визначає) — визначник.

**ДИРЕКТРИСА** — лат. *directrix* (напрямна).

**ДИСТРИБУТИВНИЙ** — лат. *distributivus* (розподільний).

**ЕКСЦЕНТРИСИТЕТ** — лат. *ex* (ззовні), *centrum* (середина) — позацентровність.

**ЕЛІПС** — гр. *ἔλειψις* (недостача).

**ІНВАРІАНТ** — лат. *in* (не), *vario* (змінюю) — незмінна величина.

**КАНОНІЧНИЙ** — гр. *κανονίκός* (утворений за правилами).

**КАРДІОЇДА** — гр. *καρδία* (серце), *είδος* (вигляд) — серцеподібна.

**КВАДРАНТ** — лат. *quadrans* (четверта частина, чверть).

**КОЕФІЦІЄНТ** — лат. *co* (спів...), *efficiens* (виробник, той що творить).

**КОЛІНЕАРНИЙ** — лат. *collinearis* (співлінійний).

**КОМПЛАНАРНИЙ** — лат. *complanarius* (розміщений на площині).

**КОМПЛЕКСНИЙ** — лат. *complexus* (складений).

**КОМУТАТИВНИЙ** — лат. *commutativus* (змінений).

**КОНІЧНИЙ** — гр. *κωνίκός* (гострокінцевий).

**КООРДИНАТА** — лат. *con* (спів-), *ordinatus* (упорядкований).

**ЛЕМНІСКАТА** — лат. *lemniscata* (оздоблена стрічками).

**ЛІНІЯ** — лат. *linea* (нитка, шнур).

**МАТЕМАТИКА** — гр. *μάθημα* (знання, наука), *лат. mathematica* (знання).

**МАТРИЦЯ** — лат. *matrix* (джерело).

**МІНОР** — лат. *minor* (менший) — визначник меншого порядку.

**МОДУЛЬ** — лат. *modulus* (міра, величина).

**ОРДИНАТА** — лат. *ordinatus* (упорядкований).

**ОРІЄНТАЦІЯ** — лат. *oriens* (схід).

**ОРТ** — гр. *όρθος* (прямий, прямовисний).

**ОРТОГОНАЛЬНИЙ** — гр. *όρθος* (прямий), *γωνία* (кут) — прямокутний. Цей термін вжив Евклід.

**ПАРАБОЛА** — гр. *παραβολή*(рівність).

**ПАРАЛЕЛЬНИЙ** — гр. *παρόλληλος* (той, що йде поряд, рівнобіжний).Паралельні прямі розглядались піфагорійцями (VII—VI ст. до н. е.).

**ПЕРПЕДИКУЛЯР** — лат. *perpendicularis* (прямовис).

**ПОЛЮС** — лат. *polus* з *гр. πολύς* (небесна вісь). Термін вживали Евклід і Паппа, полюси конічних перерізів — Аполлоній Пергський.

**ПРОЕКЦІЯ** — лат. *projectio* (викидання вперед).

**РАНГ** — нім. *Rang* (степінь, розряд).

**СКАЛЯР** — гр. *scalar* (східчастий). Термін запровадив Вієт.

**СПІРАЛЬ** — лат. *spira* (вигин, зігнута лінія).

**ФОКУС** — лат. *focus* (вогнище). Переклад з арабської терміна для фокуса параболи — «місце запалювання» (парабола в арабів називалась — «запалювальне дзеркало»).

**ЦИКЛОЇДА** — гр. *κύκλος* (коло), *εἶδος* (вигляд) — крива, пов’язана зрухом по колу.

# РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА


1. Рудавський Ю. К., Костробій П. П., Луншик Х. П., Уханська Д. В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Львів : Видавництво «Бескид Біт», 2002.
2. Беклемешев Д. В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М. : Наука, 1987.
3. Бугров Я. С., Никольський С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М. : Наука, 1988.
4. Ефимов Н. В., Квадратичные формы и матрицы. М. : Наука, 1972.
5. Діскант В. І., Береза Л. Р., Трипсук О. П., Захаренко Л. М. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Київ : «Вища школа», 2001.
6. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / за редакцією Ю. К. Рудавського. Львів : Видавництво «Бескид Біт», 2002.
7. Сборник задач по математике. Линейная алгебра и основы математического анализа / под редакцией Ефимова А. В., Демидовича Б. П., М. : Наука, 1981.
8. Соколенко О. І. Вища математика. К. : «Академія», 2002.
9. Овчинников П. П., Яремчик Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика. К. : Техніка, 2003, 2004. Ч. І, ІІ.
10. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г.О. Вища математика. Приклади і задачі. К. : «Академія», 2002.
11. Лубецька Т. В., Чупаха Л. Д. Вища математика в таблицях. К. : МАУП, 2002.

# ДОДАТКИ

1. Формули скороченого множника:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$
$a^3 - b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$

2. Степені та їхні властивості:

$$a^n = \underbrace{a * a * \ldots * a}_{n};$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt{a^2}; = a;$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (m, n \in N);$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0); \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (n \in N);$$

$$(ab)^p = a^p b^p \quad (p \in R);$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \quad (p \in R, b \neq 0);$$

$$a^p a^q = a^{p+q} \quad (p, q \in R); \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad (p, q \in R);$$

$$(a^p) \;= a^{pq} \quad (p, q \in R).$$

3. Корені та їхні властивості:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}; \; \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \; (b \neq 0); \; (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}; \; \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}; \; \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$$

($\sqrt[n]{a}$ − арифметичне значення кореня при $a \geq 0$)

4. Логарифми та їхні властивості:

$loq_a b = c \leftrightarrow a^c$=b (a$> 0; a \neq 1; b > 0$);

$lqb = loq_{10} b$; Inb= $loq_e b \ \ (e \approx 2{,}71 \ldots)$; $a^{log_a b} = b$;

$loq_a(b \cdot c) = loq_a|b| + loq_a|c|$;

$loq_a \frac{b}{c} = loq_a|b| - loq_a|c|$;

$loq_a b^\alpha = \alpha loq_a|b| \ (b^\alpha > 0)$;

$$loq_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} loq_a b;$$

$loq_a b = \frac{loq_c b}{loq_c a}$; $loq_a a = 1$;

$loq_a b = loq_a a b^\alpha \ \ (\alpha \in R)$;

$loq_a 1$=*0* $(\alpha > 0, \alpha \neq 1)$.

5. Корені квадратного рівняння. Розклад квадратного тричлена на множники:

$ax^2 + bx + c = 0 \ \ (\alpha \neq 0)$,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2_a}, D = b^2 - 4ac \geq 0;\ x^2 + px + q = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}, D = k^2 - ac \geq 0;$$

$x^2 + px$+q=0, $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q,} \quad D = \frac{p^2}{4} - q \geq 0.$

Формули Вієта:

$x^2 + px + q = 0,$

$x_1 \cdot x_2 = q, \qquad x_1 \cdot x_2 = -q.$

Біквадратне рівняння:

$ax^4 + bx^2 + c = 0 \;\; (\alpha \neq 0),$

підстановою $x^2$ =у зводиться до квадратного рівняння

$ay^2$+*by*+*c*=*0* $(\alpha \neq 0)$.

Розклад тричлена на множники:

$ax^2 + bx^2 + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2),$

*де* $x_1$ і $x_2$ – корені квадратного рівняння.

6. Арифметична прогресія $a_1, a_2, a_3 \dots a_n \dots$ :
$a_n = a_1 + d\,(n-1)$ $\quad d = a_2 - a_1 = \dots a_n - a_{n-1} = \dots;$
$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ $\quad n \geq 2$ $\quad a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots;$
$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ $\quad S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$ $\quad S_n = \frac{2a_1+d\,(n-1)}{2}n.$

7. Геометрична прогресія $b_1, b_2, b_3 \dots b_n \dots$ :

$b_n = b_1 q^{n-1}$ $\quad q = b_2 \div b_1 = \dots b_n \div b_{n-1} = \dots$ $(b_1 \neq 0);$

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} \;\; (n \geq 2).$$
$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \cdots;$$
$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n;$$

$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ $(q_1 \neq 1);$ $\quad S_n = nb_1$ при $q=1$.

8. Зв'язок між тригонометричними функціями одного аргументу:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$ $\qquad$ $tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$

$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ $\qquad$ $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$

$1+tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$ $\qquad$ $1+ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$

9. Тригонометричні функції суми і різниці кутів:

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y;$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y;$$
$$\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y}{1 - \mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{tg}\,y}; \qquad \mathrm{tg}(x-y) = \frac{\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y}{1 + \mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{tg}\,y};$$
$$\mathrm{ctg}(x+y) = \frac{\mathrm{ctg}\,x\cdot\mathrm{ctg}\,y - 1}{\mathrm{ctg}\,x + \mathrm{ctg}\,y};$$
$$\mathrm{ctg}(x+y) = \frac{\mathrm{ctg}\,x\cdot\mathrm{ctg}\,y + 1}{\mathrm{ctg}\,y - \mathrm{ctg}\,x};$$

10. Тригонометричні функції подвійного, половинного аргументів:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 + tg^2\,\alpha};$$
$$\cos 2\alpha = cos^2\,\alpha - sin^2\alpha = 1 - sin^2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$$
$$= \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha};$$
$$\sin\left|\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \qquad \cos\left|\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\mathbf{tg}\left|\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\mathbf{cos}\,\alpha}{1+\mathbf{cos}\,\alpha}}; \quad \mathbf{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\mathbf{cos}\,\alpha}{\mathbf{sin}\,\alpha} = \frac{\mathbf{sin}\,\alpha}{1+\mathbf{cos}\,\alpha}.$$

11. Формули перетворення суми (різниці) тригонометричних функцій у добуток:

$$\mathbf{sin}\,x + \mathbf{sin}\,y = 2\,\mathbf{sin}\frac{x+y}{2}\mathbf{cos}\frac{x-y}{2};$$

$$\mathbf{sin}\,x - \mathbf{sin}\,y = 2\,\mathbf{sin}\frac{x-y}{2}\mathbf{cos}\frac{x+y}{2};$$

$$\mathbf{cos}\,x + \mathbf{cos}\,y = 2\,\mathbf{cos}\frac{x+y}{2}\mathbf{cos}\frac{x-y}{2};$$

$$\mathbf{cos}\,x - \mathbf{cos}\,y = -2\,\mathbf{sin}\frac{x+y}{2}\mathbf{sin}\frac{x+y}{2};$$

$$\mathbf{tg}\,x + \mathbf{tg}\,y = \frac{\mathbf{sin}(x+y)}{\mathbf{cos}\,x\cdot\mathbf{cos}\,y}; \quad \mathbf{tg}\,x - \mathbf{tg}\,y = \frac{\mathbf{sin}(x-y)}{\mathbf{cos}\,x\cdot\mathbf{cos}\,y};$$

12. Графіки деяких основних елементарних функцій.

6.1. $y=kx+b$, $k=tg\alpha$ (рис. 1).

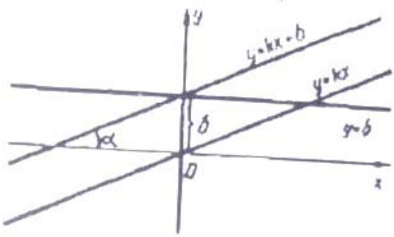



Рис. 1

6.2. $y=a^x$, $a>0$, $a \neq 1$ (рис. 2).

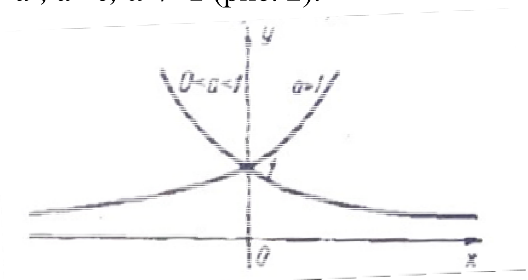



Рис. 2

6.3. $y=x^n$, $y=x^{\frac{1}{n}}$, $n\epsilon N$ (рис. 3).

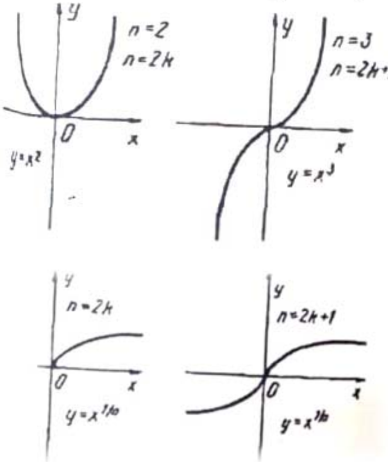



Рис. 3

6.4. $y=\frac{k}{x}$ (рис. 4).

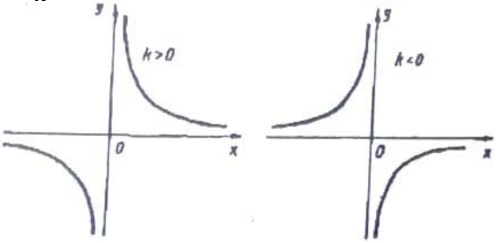



Рис. 4

6.5. $y=log_a x$ (рис. 5).

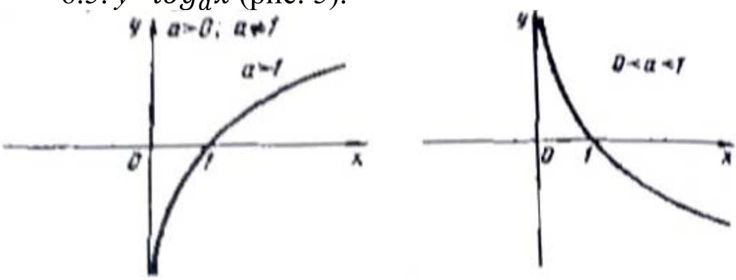



Рис. 5

6.6. $y=sinx$ (рис. 6).

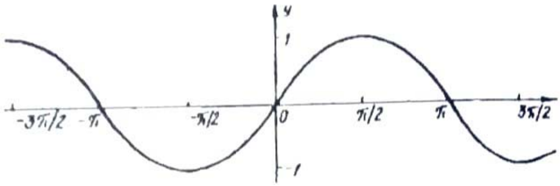



Рис. 6

6.7. $y=cosx$ (рис. 7).

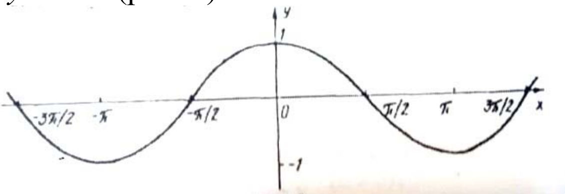



Рис. 7

6.8. $y=tgx$ (рис. 8).

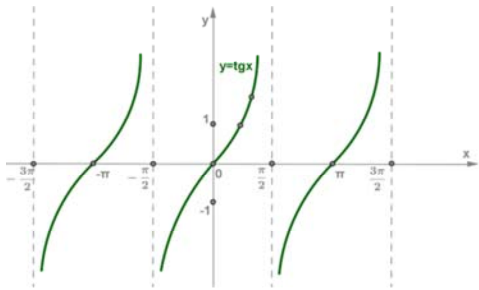



Рис. 8

6.9. $y=ctgx$ (рис. 9).

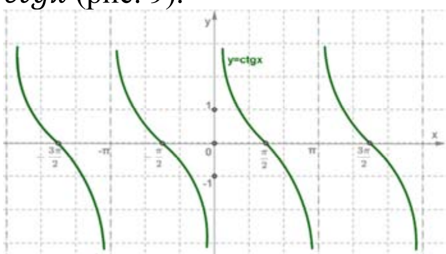



Рис. 9

6.10. $y = arcsin x$ (рис. 10).

6.11. $y = arccos x$ (рис. 11).

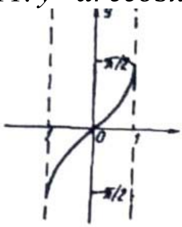



Рис. 10

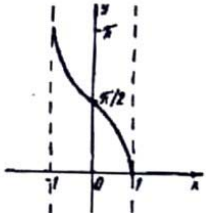



Рис. 11

6.12. $y = arctg x$ (рис. 12).

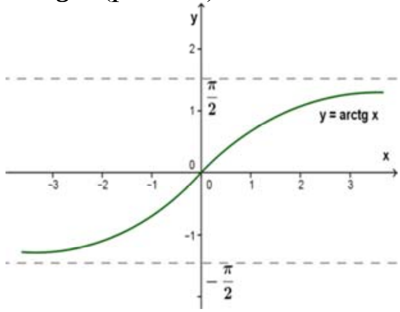



Рис. 12

6.13. $y = arcctg x$ (рис. 13).

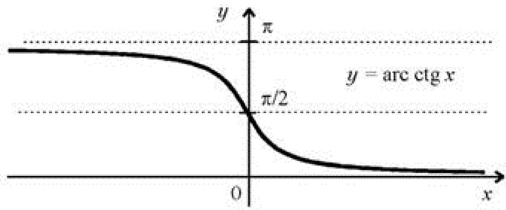



Рис. 13

## ЗМІСТ

Навчальне видання

***Осадча Лариса Костянтинівна***

**ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА**
**АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ**

Навчальний посібник

*Комп'ютерний набір і верстка* *Н.О. Поліщук*

*Технічний редактор* *Г.Ф. Сімчук*

Підписано до друку 30.01.2020 р. Формат 60×84 $^{1}/_{16.}$
Ум.-друк. арк. 11,2. Обл.-вид. арк. 11,7.
Тираж 100 прим. Зам. № 5466.

*Видавець і виготовлювач*
*Національний університет*
*водного господарства та природокористування,*
*вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028.*

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до*
*державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів*
*видавничої продукції РВ № 31 від 26.04.2005 р.*