МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

АЛГЕБРА
ТА
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ:
ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Інтелектуальні сервіс-орієнтовані розподілені обчислення»
спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»*

Київ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2022

Алгебра та аналітична геометрія: Практикум [Електронний ресурс]: практикум для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,02 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 189 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 5 від 26.05.2022 р.)
за поданням Вченої ради Інституту прикладного системного аналізу *(протокол № 4 від 25.04.2022 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

АЛГЕБРА
ТА
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ:
ПРАКТИКУМ

Укладач: *Бохонов Юрій Євгенович*, канд. ф. - мат. н, доцент
Відповідальний редактор *Подколзін Г.Б.*, канд. ф. - мат. н., доцент
Рецензент: *Голуб А.П.*, д-р ф.-мат. н., провідний науковий співробітник Інституту математики НАН України

«Алгебра та аналітична геометрія: Практикум призначено для вивчення на практиці студентами спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» основ аналітичної геометрії та лінійної алгебри. Запропоновано розв'язки задач на теми з лінійної алгебри: теорія лінійних просторів, операторів, матриць та визначників. Алгебраїчний апарат застосовується до задач, що виникають у аналітичній геометрії: в теорії прямих і площин, а також кривих другого порядку, зведення їх до головних осей.

ЗМІСТ

ВСТУП

У посібнику «Алгебра та аналітична геометрія: Практикум містяться методичні рекомендації до виконання домашніх контрольних робіт. Він включає задачі на основні теми з теорії скінченновимірних лінійних просторів і лінійних операторів, матриць операторів, теорії визначників і стандартні задачі аналітичної геометрії. При цьому досвід, набутий при розв'язанні алгебраїчних задач, пов'язаний з просторами довільної розмірності, застосовується для задач аналітичної геометрії.

При вивченні теорії лінійних просторів особливо ретельно розглядаються задачі, пов'язані з такими конструкціями як сума і перетин лінійних підпросторів, пряма сума.

Особлива увага в теорії операторів приділяється задачам знаходження матриці лінійного оператора у певному базисі і зв'язку його матриць у різних базисах.

Для розв'язанні задач з теорії визначників використовуються як стандартні технік, так і деякі штучні, які допомагають розвивати творчий підхід до аналізу більш складних ситуацій.

Розвинений алгебраїчний апарат застосовується при дослідженні лінійних об'єктів у аналітичній геометрії – прямих і площин, приводяться основні способи розв'язання задач на ці теми. Особлива увага приділяється нормальним рівнянням прямої і площини, що дає змогу розглянути деякі важливі задачі, зокрема, на знаходження бісектриси та бісекторіальної площини.

В розділі, присвяченому аналітичній геометрії кривих, розглядаються канонічні рівняння кривих другого порядку на площині, а також зведення загальних рівнянь до канонічного вигляду. При цьому використовуються матриці повороту системи координат і їхні властивості. Окремо розглядаються задачі на приведення до канонічного вигляду рівняння еліпса, гіперболи і параболи.

Практичне заняття 1. Лінійні простори, базиси в лінійних просторах

Теоретичні відомості

Означення 1.1. Нехай E – множина елементів, що будуть називатись векторами, для яких визначені операції додавання та множення на числа - дійсні $(\mathbb{R})$ чи комплексні $(\mathbb{C})$, - причому, для $a,b\in\mathbb{R}(\mathbb{C}),\ x,y\in E \Rightarrow ax+by\in E$ і виконуються наступні аксіоми:

1) $x+y=y+x$ (комутативність);

2) $x+(y+z)=(x+y)+z\ \forall x,y,z\in E$ (асоціативність);

3) $\exists 0\in E: x+0=x$

(існування нейтрального елемента по відношенню до додавання – існування нуля);

4) $\exists x\in\mathbb{R}\ \exists(-x)\in\mathbb{R}: x+(-x)=0$;

5) $x+y=y+x$ (комутативність);

6) $a(bx)=(ab)x, 1\cdot x=x$;

7) $(a+b)x=ax+bx$;

8) $a(x+y)=ax+ay$ (дистрибутивність).

Тоді E називається векторним лінійним простором над $\mathbb{R}$ (над $\mathbb{C}$) або просто - лінійним простором над $\mathbb{R}$ (над $\mathbb{C}$). В таких випадках простір називається дійсним або, відповідно, комплексним.

Означення 1.2. Система векторів $f=\{f_1,...,f_n\}$ називається системою твірних лінійного простору, якщо кожен його елемент *x* можна подати у вигляді лінійної комбінації елементів f, тобто

$x=\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$	(1.1)

При цьому кажуть, що лінійний простір – це лінійна оболонка системи $e=\{e_1,...,e_n\}$.

Означення 1.3. Система векторів $f=\{f_1,...,f_n\}$ називається лінійно незалежною, якщо рівність

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = 0$$	(1.2)

можлива тоді і лише тоді, коли всі елементи x_i дорівнюють 0.

В противному випадку система називається лінійно залежною. Тобто, якщо існує хоча б одне $x_j \neq 0$ і при цьому $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = 0$, то система $f=\{f_1,...,f_n\}$ буде лінійно залежною. З цього, зокрема, випливає, що система, яка містить нульовий вектор, обов'язково лінійно залежна. Дійсно, цей вектор досить помножити на довільне, не рівне нулю число (наприклад, на одиницю), а всі інші – на нулі, і тоді умова (1.3) буде справджуватись.

Означення 1.4. Лінійно незалежна система твірних простору називається його базисом.

Якщо система $f=\{f_1,...,f_n\}$ становить базис, то кожен елемент простору має єдине зображення у вигляді (1.1).

Означення 1.5. Множина $F \subset E$ називається підпростором простору *E,* якщо разом з довільними векторами $x, y \in F$ в неї входить кожна їхня лінійна комбінація $ax+by$ $(a,b \in K)$.

Задача 1.1. Довести, що множина векторів-стовпчиків: $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ утворює лінійний простір з операціями покоординатного додавання векторів і покоординатного множення на число. Для зручності запису часто такі вектори позначаються

$x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)^T\in\mathbb{R}^n$. Тут позначення “$T$” означає транспонування.

Розглянути систему векторів

$$e=\left\{e_1=\left(1,0,...,0\right)^T,e_2=\left(0,1,0,...,0\right)^T,e_n=\left(0,...,0,1\right)^T\right\}\subset\mathbb{R}^n$$	(1.3)

і довести, що вона утворює базис.

Розв’язання. Очевидно,

$$ax+by=a\left(x_1,x_2,...,x_n\right)^T+b\left(y_1,y_2,...,y_n\right)^T=\left(ax_1+by_1,ax_2+by_2,...,ax_n+by_n\right)^T\in\mathbb{R}^n.$$

Аксіоми векторного простору з очевидністю справджуються. Доведемо, що система (1.3) утворює базис. По-перше, це система твірних. Справді,

$$x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)^T=x_1\left(1,0,...,0\right)^T+...+x_n\left(0,...,0,1\right)^T=x_1e_1+...+x_ne_n.$$

Припустимо, що $\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i=0.$ Це означає, що

$$\alpha_1\left(1,0,...,0\right)^T+...+\alpha_n\left(0,...,0,1\right)^T=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)^T=\left(0,0,...,0\right).$$

Але така рівність можлива тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0,$ що й доводить лінійну незалежність системи векторів.

Зауваження. Система розглянутих векторів утворює так званий канонічний базис у просторі $\mathbb{R}^n$.

Задача 1.2. Нехай система векторів $f=\left\{f_1,...,f_n\right\}$ утворює базис простору. Довести, що система $\tilde{f}=\left\{\alpha_1f_1+\alpha_2f_2,f_2,...,f_n\right\}$, $\alpha_1\neq0$ також утворює базис.

Розв’язання. Нехай $x=x_1f_1+x_2f_2+...+x_nf_n.$ Тоді

$$x = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n = \frac{x_1}{\alpha_1}\left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\right) + \left(x_2 - x_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) f_2 + \ldots + x_n f_n =$$

$$= \frac{x_1}{\alpha_1} \tilde{f}_1 + \left(x_2 - x_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) f_2 + \ldots + x_n f_n.$$

Тим доведено, що вектори утворюють систему твірних. Доведемо їхню лінійну незалежність. Нехай $x_1 \tilde{f}_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \ldots + x_n f_n = 0$. Звідси

$$x_1 \tilde{f}_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \ldots + x_n f_n = x_1\left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\right) + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \ldots + x_n f_n =$$

$$= x_1\alpha_1 f_1 + \left(x_1\alpha_2 + x_2\right) f_2 + x_3 f_3 + \ldots + x_n f_n = 0.$$

З лінійної незалежності системи векторів і умови випливає: $x_1\alpha_1 = x_1\alpha_2 + x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$ Це й доводить лінійну незалежність системи векторів.

Задача 1.3. Перевірити, що система векторів

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Утворює базис простору $\mathbb{R}^3$. Знайти координати вектора $x = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$ у цьому базисі.

Розв'язання. Нехай $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0.$ Це означає, що усі координати вектора у правій частині рівності дорівнюють нулю:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання лінійної системи рівнянь методом додавання еквівалентне відповідним діям тільки з її коефіцієнтами, які зручно записати у таблицю (матрицю), а далі діяти з рядками таблиці, як з рівняннями. Така ідея лежить в основі так званого методу Гауса. Отже, віднявши перший рядок від другого і від третього, одержимо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Потім від першого рядка віднімемо другий, а від третього віднімемо другий, помножений на 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нарешті, від першого рядка віднімемо третій:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, цей запис еквівалентний системі

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Це й означає лінійну незалежність системи векторів. Знайдемо тепер координати x_1, x_2, x_3 вектора x в цьому базисі. Знову будемо діяти за методом Гауса.

Для цього досить розв'язати систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2+2x_3 \\ x_1+2x_2+3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 6, \\ x_1+x_2+2x_3 = 9, \\ x_1+2x_2+3x_3 = 14. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

Задача 1.4. Знайти координати многочлена $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ в базисі з многочленів $1, x-\alpha, (x-\alpha)^2$.

Розв'язання.

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = a_0 + a_1\big((x-\alpha)+\alpha\big) + a_2\big((x-\alpha)+\alpha\big)^2 =$$

$$= a_0 + a_1(x-\alpha) + \alpha a_1 + a_2(x-\alpha)^2 + 2\alpha a_2(x-\alpha) + \alpha^2 a_2 =$$

$$= \left(a_0 + \alpha a_1 + \alpha^2 a_2\right) + \left(a_1 + 2\alpha a_2\right)(x-\alpha) + a_2(x-\alpha)^2.$$

Легко бачити, що матриці однакової розмірності $m \times n$ (m рядків і n стовпчиків) з операціями покомпонентного додавання і множення на число утворюють лінійний простів розмірності mn. Канонічний базис утворюють матриці, у яких всі елементи крім одного дорівнюють нулю, а лише один дорівнює одиниці. Матриця розмірності $n \times n$ називається квадратною. Квадратна матриця називається симетричною, якщо $a_{jk} = a_{kj},\ j,k = 1,...,n.$

Квадратна матриця називається кососиметричною, якщо $a_{jk} = -a_{kj},\ j,k = 1,...,n.$

Звідси випливає, що діагональні елементи кососиметричної матриці дорівнюють нулю.

Задача 1.5. Перевірити, чи утворюють наступні системи векторів базиси простору $\mathbb{R}^4$:

a) $f_1=(1,2,-1,-2)^T$, $f_2=(2,3,0,-1)^T$, $f_3=(1,2,1,3)^T$, $f_4=(1,3,-1,0)^T$.

b) $g_1=(1,2,-1,-2)^T$, $g_2=(2,3,0,-1)^T$, $g_3=(1,2,1,4)^T$, $g_4=(1,3,-1,0)^T$.

Розв'язання. Як вже вказувалось, для дослідження досить застосувати схему Гауса.

a).

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\2&3&0&-1\\1&2&1&3\\1&3&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\0&-1&2&3\\0&0&2&5\\0&1&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\0&-1&2&3\\0&0&2&5\\0&0&2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\0&-1&2&3\\0&0&2&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\0&-1&0&-2\\0&0&2&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-1&0\\0&-1&0&-2\\0&0&2&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Звідси маємо систему лінійних рівнянь, з якої

$$\begin{cases}x_3=-\dfrac{5}{2}x_4,\\ x_2=-2x_4,\\ x_1=-3x_2+x_3.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=-\dfrac{5}{2}x_4,\\ x_2=-2x_4,\\ x_1=6x_4-\dfrac{5}{2}x_4=\dfrac{7}{2}x_4.\end{cases}.$$

Отже, розв'язками системи є вектори вигляду

$$x=x_4\left(-\frac{7}{2},\quad -2,\quad -\frac{5}{2},\quad 1\right).$$

Це означає, що, взявши, наприклад, $x_4=-2$, отримаємо ненульові коефіцієнти $(7,\quad 4,\quad 5,\quad -2)$, і лінійна комбінація даних векторів з цими коефіцієнтами буде дорівнювати нулю, що означає їхню лінійну залежність:

$$7f_1+4f_2+5f_3-2f_4=0.$$

b).

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\2&3&0&-1\\1&2&1&4\\1&3&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\0&-1&2&3\\0&0&2&6\\0&1&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\0&-1&2&3\\0&0&2&6\\0&0&2&5\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\0&-1&2&3\\0&0&2&6\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Звідси одержуємо розв’язок системи $x_1=x_2=x_3=x_4=0$, що й доводить лінійну незалежність векторів з сукупності b).

1). **Завдання для самостійної роботи:** [7], №№ 1277-1280.

Практичне заняття 2. Підпростори лінійних просторів

Означення 2.1. Множина $F\subset E$ називається підпростором простору *E,* якщо разом з довільними векторами $x,y\in F$ в неї входить кожна їхня лінійна комбінація $ax+by\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Задача 2.1. Чи утворюють підпростір вектори площини, що мають спільний початок, кінці яких лежать на даній прямій?

Розв’язання. Перший випадок: пряма проходить через спільний початок векторів. Тоді, оскільки кінці векторів лежать на цій самій прямій, вектори повністю лежать на цій прямій, тобто, вони колінеарні, а тому утворюють одновимірний підпростір площини (яка є лінійним простором розмірності 2).

Другий випадок: пряма не проходить через спільний початок даних векторів. З правила паралелограма додавання векторів випливає, що кінець суми двох векторів вже не буде лежати на даній прямій (те саме буде при множенні вектора на число). Отже, множина таких векторів не утворює лінійного простору.

Задача 2.2. Чи утворюють підпростір вектори трьохвимірного простору, кінці яких не лежать на даній прямій?

Розв'язання. Очевидно, завжди можна підібрати вектор $\vec{a}$, не колінеарний даній прямій, і число $\alpha \in \mathbb{R}$ таке, що кінець вектора буде лежати на цій прямій. Треба взяти вектор $\vec{a}$, що лежить в будь-якій площині, в якій лежить пряма. Це й означає, що вказані вектори не утворюють лінійного підпростору трьохвимірного простору.

Задача 2.3. Описати всі підпростори трьохвимірного простору.

Розв'язання. Трьохвимірний підпростір трьохвимірного простору – це сам простір. Двовимірний підпростір – це будь-яка площина, що проходить через початок координат, одновимірні підпростори – це прямі, що проходять через початок координат, нульвимірний підпростір – це множина, що складається з нуль-вектора.

Задача 2.4. Довести, що якщо сума розмірностей двох лінійних підпросторів E_1, E_2 $n-$вимірного простору E більша, ніж n, то ці підпростори мають хоча б один спільний ненульовий вектор.

Доведення випливає з формули

$$\dim(E_1+E_2)=\dim(E_1)+\dim(E_2)-\dim(E_1 \cap E_2). \quad (2.1)$$

Справді, $E_1+E_2 \subset E \Rightarrow \dim(E_1+E_2) \le \dim(E) = n.$ Тоді з (2.1) випливає:

$$n+\dim(E_1 \cap E_2) \ge \dim(E_1+E_2)+\dim(E_1 \cap E_2)=\dim(E_1)+\dim(E_2)>n \Rightarrow$$
$$\dim(E_1 \cap E_2)>0,$$

що й доводить твердження.

Задача 2.5. Розглянути систему векторів з задачі 1.5 а). Знайти базу системи векторів, описати підпростір, натягнутий на вектори бази.

а) $f_1=(1,2,-1,-2)^T$, $f_2=(2,3,0,-1)^T$, $f_3=(1,2,1,3)^T$, $f_4=(1,3,-1,0)^T$.

Сформулюємо остаточний результат зроблених перетворень:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -2\\ 2 & 3 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -1 & 0\end{pmatrix}\to\ldots\to\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Це означає, що лінійно незалежними є, наприклад, вектори f_1, f_2, f_3. Вони утворюють базис підпростору, а сам підпростір F можна описати як всі лінійні комбінації цих векторів:

$$F=\{\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3,\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}\}=$$

$$=\left\{(\alpha_1,2\alpha_1,-\alpha_1,-2\alpha_1)^T+(2\alpha_2,3\alpha_2,0,-\alpha_2)^T+(\alpha_3,2\alpha_3,\alpha_3,3\alpha_3)^T,\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3,-\alpha_1+\alpha_3,-2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3)^T,\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}\right\}.$$

Задача 2.6. Довести, що симетричні матриці утворюють лінійний підпростір лінійного простору матриць. Знайти його розмірність і який-небудь базис.

Розв’язання. Очевидно, додавання симетричних матриць і множення їх на числа, дає знову симетричні матриці.

Найпростіший приклад базису в просторі симетричних матриць можна побудувати з двох типів матриць: 1) всі елементи дорівнюють нулю крім однієї одиниці на діагоналі (таких матриць n), 2) для деякої пари (j,k), $j,k\in\{1,\ldots,n\}$ елементи, симетричні відносно головної діагоналі, $a_{jk}=a_{kj}=1$, а всі інші дорівнюють нулю. Таких матриць існує $\frac{n^2-n}{2}$. Отже, розмірність простору симетричних матриць дорівнює $\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Задача 2.7. Довести, що кососиметричні матриці утворюють лінійний підпростір лінійного простору матриць. Знайти його розмірність і який-небудь базис.

Розв’язання. Очевидно, додавання кососиметричних матриць і множення їх на числа, дає знову кососиметричні матриці.

Найпростіший приклад базису в просторі симетричних матриць можна побудувати з другого типу матриць попередньої задачі. Таких матриць існує $\frac{n^2-n}{2}=\frac{n\left(n-1\right)}{2}$, і це є розмірність простору кососиметричних матриць.

Задача 2.8. Довести, що вектори $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)^T\in F_1\subset\mathbb{R}^n$, координати яких що задовольняють рівняння $x_1+x_2+...+x_n=0$, утворюють підпростір в $\mathbb{R}^n$. 1). Знайти який-небудь базис і розмірність цього підпростору.

2). Показати, що базис підпростору F_1 можна доповнити до базису простору $\mathbb{R}^n$ одним вектором (підпростір, натягнутий на цей вектор позначимо F_2).

Показати, що $\mathbb{R}^n$ можна розкласти в пряму суму: $\mathbb{R}^n=F_1\oplus F_2$.

3). Знайти проекції векторів канонічного базису на кожен з цих двох підпросторів паралельно іншому підпростору. Розкласти кожен вектор канонічного базису за знайденим в задачі базисом.

Розв’язання. 1).. Очевидно, вектор, координати якого задовольняють рівняння, можна записати у наступному вигляді:

$$\mathbb{R}^n\ni x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)^T=\left(x_1,x_2,...,-x_1-x_2-...-x_{n-1}\right)^T=$$

$$=x_1\left(1,0,...,0,-1\right)^T+x_2\left(0,1,...,0,-1\right)^T+...+x_{n-1}\left(0,...,0,1,-1\right)^T.$$

Очевидно, система векторів

$$f^{(1)}=\left\{f_1=(1,0,...,0,-1)^T,\ f_2=(0,1,...,0,-1)^T,...,\ f_{n-1}=(0,...,0,1,-1)^T\right\}$$

утворює базис підпростору розв'язків рівняння, і розмірність підпростору дорівнює $n-1$.

2). Розглянемо підпростір $F_2\subset\mathbb{R}^n$ векторів, що мають рівні координати: $x_1=x_2=...=x_n$. Він породжений одним базисним вектором

$$f_n=\begin{pmatrix}1 & 1 & ... & 1\end{pmatrix}^T,\ f^{(2)}=\{f_n\}.$$

Справді,

$$\forall f\in F_2\ \ f=\begin{pmatrix}x & x & ... & x\end{pmatrix}^T=x\begin{pmatrix}1 & 1 & ... & 1\end{pmatrix}^T.$$

Доведемо, що система векторів $f^{(1)}\cup f^{(2)}$ утворює базис. Запишемо координати векторів системи у рядки матриці і здійснимо з нею елементарні перетворення:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & -1\\ . & . & . & ... & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & -1\\ . & . & . & ... & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & n\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & \\ . & . & . & ... & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & n\end{pmatrix}.$$

В результаті прийшли до діагональної матриці з лінійно незалежними векторами-рядками, з чого, як відомо, випливає, що і початкові вектори лінійно незалежні. З цього, в свою чергу, випливає, що підпростори $F^{(1)}$ і $F^{(2)}$ утворюють пряму суму і $\mathbb{R}^n=F_1\oplus F_2$.

3). Очевидно,

$$(1,0,\ldots,0,0)^T=\left(\frac{n-1}{n},0,\ldots,0,-\frac{n-1}{n}\right)^T+\left(0,-\frac{1}{n},\ldots,0,\frac{1}{n}\right)^T+\ldots,+\left(0,\ldots,0,-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)^T+$$

$$+\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)^T=\left(\frac{n-1}{n},-\frac{1}{n},\ldots,-\frac{1}{n},-\frac{n-1}{n}\right)^T+\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)^T.$$

Таким чином

$$e_1=\frac{n-1}{n}(1,0,\ldots,0,-1)^T-\frac{1}{n}(0,1,\ldots,0,-1)^T-\ldots-\frac{1}{n}(0,\ldots,0,1,-1)^T+\frac{1}{n}(1,1,\ldots,1,-1)^T=$$

$$=\frac{n-1}{n}f_1-\frac{1}{n}f_2-\ldots-\frac{1}{n}f_{n-1}+\frac{1}{n}f_n.$$

2). **Завдання для самостійної роботи:** [7], №№ 1310-1313.

Практичне заняття 3. Вектори на площині. Ділення відрізку в даному відношенні.

Теоретичні відомості

Домовленості. У даному посібнику будуть використовуватись таке позначення для геометричних векторів, які є відрізками з напрямом: $\vec{r}$. Такі вектори можуть належати двовимірному геометричному простору E_2, тобто, площині або трьохвимірному геометричному простору E_3, де знаходимось ми і об'єкти, що нас оточують.

Якщо вектор розкладено за базисом (частіше всього, ортогональним) $e=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ або $e=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, то це будемо записувати: $\vec{r}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$ або, відповідно, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Маючи такий розклад за базисом, зіставимо геометричному вектору $\vec{r}$ вектор-стовпчик з $\mathbb{R}^3$:

$$[\vec{r}]_e=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \text{ або } [\vec{r}]_e=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3.$$

Інколи будемо писати просто $[\vec{r}]$, якщо базис очевидний, тощо.

Застереження: часто, навіть у відомих задачниках, припускають помилку або вільність запису (перефразуючи відомі слова Нікола Бурбаки) і прирівнюють геометричний вектор $\vec{r}$ вектору-стовпчику $[\vec{r}]_e$ або $[\vec{r}]$, що належить зовсім іншому простору $\mathbb{R}^3$. Зрозуміло, автори не хочуть переобтяжувати себе і читачів громіздкими записами. Але при цьому у початківців виникають неправильні уявлення про суть речей, і тому подібна економія не виправдовує себе.

Якщо ж на самому початку було дано вектор з $\mathbb{R}^3$, то його можна, звичайно, позначати як завгодно, наприклад, $r = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$, але при цьому не вживати стрілочку у позначенні.

Нехай M_1, M_2 - точки на відрізку (Мал. 3.1). Треба поділити його точкою M, що лежить між ними або зовні відрізку $[M_1, M_2]$, на частини, довжини яких мають дане відношення: $\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M}\right|}{\left|\overrightarrow{MM_2}\right|} = |\lambda|$. Якщо точка M лежить на відрізку, то $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}, \lambda > 0$. Якщо M лежить зовні відрізку, то в цьому співвідношенні $\lambda < 0$.

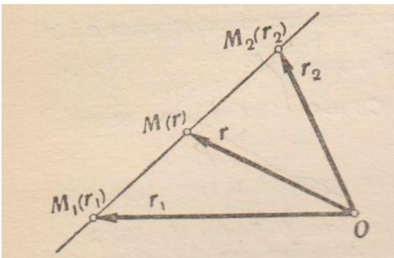
Зафіксуємо деяку точку O, початок, і розглянемо радіуси-вектори вказаних точок: $\vec{r_1} = \overrightarrow{OM_1}, \vec{r} = \overrightarrow{OM}, \vec{r_2} = \overrightarrow{OM_2}$. Тоді $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r_1}$, $\overrightarrow{MM_2} = \vec{r_2} - \vec{r}$. З урахуванням попередніх рівностей одержимо:

$$\vec{r} - \vec{r_1} = \lambda\left(\vec{r_2} - \vec{r}\right) \Rightarrow (1+\lambda)\vec{r} = \vec{r_1} + \lambda\vec{r_2} \Rightarrow \vec{r} = \frac{1}{1+\lambda}\left(\vec{r_1} + \lambda\vec{r_2}\right).$$

Інколи зручно вважати, що відрізок ділиться у відношенні, яке записується таким чином: $\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M}\right|}{\left|\overrightarrow{MM_2}\right|}=\left|\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|$. Тоді з доведеного випливає формула $\vec{r}=\dfrac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\lambda_2\vec{r_1}+\lambda_1\vec{r_2}\right).$

Отже, доведено формули, за якими знаходиться радіус-вектор точки, що ділить відрізок у даному відношенні:

$\vec{r}=\dfrac{1}{1+\lambda}\left(\vec{r_1}+\lambda\vec{r_2}\right),$ $\vec{r}=\dfrac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\lambda_2\vec{r_1}+\lambda_1\vec{r_2}\right).$	(3.1)



Мал. 3.1

Читач самостійно випише відповідні формули для корданат точки, що ділить даний відрізок у певному відношенні.

Задача Довести, що точка з радіусом-вектором $\vec{r}$ тоді і тільки тоді лежить на відрізку, кінці якого мають радіуси-вектори $\vec{r_1}$ і $\vec{r_2}$, коли існують коефіцієнти $\theta_1,\theta_2\in[0,1],\ \theta_1+\theta_2=1,$ що має місце рівність $\vec{r}=\theta_1\vec{r_1}+\theta_2\vec{r_2}.$

Задача 3.1. У $\triangle ABC$ відомо координати середин сторін:

$A'(x_1,y_1),\ B'(x_2,y_2),\ C'(x_3,y_3)$. Знайти координати вершин трикутника $A(x_A,y_A),\ B(x_B,y_B),\ C(x_C,y_C)$.

Розв'язання. З формули (3.1) при $\lambda = 1$ для абсцис випливає:

$$\begin{cases} x_B + x_C = 2x_1, \\ x_A + x_C = 2x_2, \\ x_A + x_B = 2x_3. \end{cases}$$

Додаючи ці рівняння, після скорочення одержимо: $x_A + x_B + x_C = x_1 + x_2 + x_3$.
Віднімаючи по черзі від цього співвідношення рівняння системи, будемо мати:

$$\begin{cases} x_A = -x_1 + x_2 + x_3, \\ x_B = x_1 - x_2 + x_3, \\ x_C = x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

Аналогічні формули справедливі для ординат вершин.

Задача 3.2. У паралелограмі $ABCD$ відомо координати трьох його вершин: $A(x_A,y_A),\ B(x_B,y_B),\ C(x_C,y_C)$. Знайти координати $D(x_D,y_D)$.

Розв'язання. Позначимо через $O(x_O,y_O)$ точку перетину діагоналей паралелограма, точку його центральної симетрії. Тоді

$$x_A + x_C = x_B + x_D = 2x_O \Rightarrow x_D = x_A - x_B + x_C.$$

Аналогічні формули справедливі для ординати y_D.

Задача 3.3. У $\triangle ABC$ відомо координати вершин: $A(x_A,y_A),\ B(x_B,y_B),\ C(x_C,y_C)$. Знайти координати точки $P(x_P,y_P)$ перетину бісектриси внутрішнього кута $\angle A$ трикутника з його стороною BC.

Розв'язання. З елементарної планіметрії відомо:

$$\frac{\left|\overrightarrow{BP}\right|}{\left|\overrightarrow{PC}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}}{\sqrt{\left(x_C-x_A\right)^2+\left(y_C-y_A\right)^2}}.$$

В формулі (3.1)

$$\lambda_1=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2},\lambda_2=\sqrt{\left(x_C-x_A\right)^2+\left(y_C-y_A\right)^2},$$

$$\vec{r}_1=\overrightarrow{AB}\sim\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix},\ \vec{r}_2=\overrightarrow{AC}\sim\begin{pmatrix}x_C-x_A\\ y_C-y_A\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\overrightarrow{r_P}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\overrightarrow{AC}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix}x_P-x_A\\ y_P-y_A\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{\left(x_C-x_A\right)^2+\left(y_C-y_A\right)^2}}{\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}+\sqrt{\left(x_C-x_A\right)^2+\left(y_C-y_A\right)^2}}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}}{\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}+\sqrt{\left(x_C-x_A\right)^2+\left(y_C-y_A\right)^2}}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\ y_C-y_A\end{pmatrix}.$$

З цього співвідношення вже легко знайти координати шуканої точки $P\left(x_P,y_P\right)$ перетину бісектриси зі стороною трикутника.

Задача 3.4. Пряма проходить через точки $M\left(x_M,y_M\right),N\left(x_N,y_N\right)$. На цій прямій знайти точку A, абсциса якої дорівнює x_A, і це значення знаходиться між значеннями x_M і x_N.

Розв'язання. З умови маємо:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\left|\overrightarrow{MA}\right|}{\left|\overrightarrow{AN}\right|}.$$

За теоремою Фалеса $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\left|\overrightarrow{MA}\right|}{\left|\overrightarrow{AN}\right|}=\frac{x_A-x_M}{x_N-x_A}$. Зауважимо, що останній дріб додатній, що випливає з умови задачі. Тепер можна знайти ординату шуканої точки (її абсцису відомо з умови задачі):

$$y_A=\frac{1}{\left(\frac{x_A-x_M}{x_N-x_A}\right)+1}y_M+\frac{\left(\frac{x_A-x_M}{x_N-x_A}\right)}{\left(\frac{x_A-x_M}{x_N-x_A}\right)+1}y_N.$$

Задача 3.5. Відомо дві вершини трикутника: $A(2,-3), B(-5,1)$. Третя вершина $C(0,y_C)$ лежить на осі ординат, точка перетину медіан $M(x_M,0)$ лежить на осі абсцис. Знайти координати точок C і M.

Розв'язання. Для радіуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, де M - точка перетину медіан, як відомо, справедлива формула:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right).$$

Звідси

$$\begin{pmatrix}x_M\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y_C\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\y_C-2\end{pmatrix}\Rightarrow x_M=-1,\ y_C=2.$$

Відповідь: $C(0,2), M(-1,0)$.

Задача 3.6. Знайти координати кінців відрізку $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$, що ділиться точками $P(2,2)$, $Q(1,5)$ на три рівні частини.

Розв'язання. Без втрати загальності будемо вважати, що $x_A > x_B$.

З умови випливає, що $P(2,2)$ - середина відрізку AQ, а $Q(1,5)$ - середина відрізку PB. Звідси маємо:

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.7. Відомо дві вершини паралелограма $A(2,-3,-5), B(-1,3,2)$ і точка перетину його діагоналей $E(4,-1,7)$. Знайти дві інші вершини паралелограма.

Розв'язання. Маємо:

$$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.7. Кінці відрізку мають координати: $A(0,2), B(2,0)$. В якому відношенні ділиться цей відрізок точкою M перетину з прямою, що проходить через початок координат під кутом $\frac{\pi}{6}$ до осі Ox? Вказівка: використати формулу ділення відрізку в певному відношенні.

Розв’язання. Позначимо шукане відношення через $k:\dfrac{\left|\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\overrightarrow{MB}\right|}$. В $\triangle OMB$ $\angle MOB=\dfrac{\pi}{6}, \angle OBM=\dfrac{\pi}{4}, \angle OBM=\dfrac{7\pi}{12}$. За теоремою синусів

$$\frac{\left|\overrightarrow{OM}\right|}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\sin\frac{7\pi}{12}}\Rightarrow\left|\overrightarrow{OM}\right|=\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{7\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{5\pi}{12}}.$$

Одиничному вектору, що виходить з початку координат і утворює кут $\dfrac{\pi}{6}$ з віссю Ox, відповідає вектор-стовпчик: $[\vec{e}]=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$. Звідси

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{5\pi}{12}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}.$$

За другою формулою (3.1)

$$\frac{1}{k+1}\left[\overrightarrow{OA}\right]+\frac{k}{k+1}\left[\overrightarrow{OB}\right]=\left[\overrightarrow{OM}\right]\Rightarrow$$

$$\frac{1}{k+1}\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}+\frac{k}{k+1}\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\frac{k}{k+1}\\ \frac{1}{k+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$k+1=2\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}\Rightarrow k=2\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}-1=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)-1=$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\right)-1= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)-1=\sqrt{3}.$$

Відповідь: $k=\dfrac{\left|\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\overrightarrow{MB}\right|}=\sqrt{3}.$

Задача 3.8. На стороні АС трикутника АВС взято точку М так,що 3АМ=АС, а на продовженні сторони ВС точку К так, що ВК=СВ. В якому відношенні діляться точкою перетину відрізки АВ та КМ?

Розв'язання. Позначимо точку перетину *AB* і *KM* через *P*. Нехай ця точка ділить відповідні відрізки у відношеннях: $PK:MP=\lambda:1,\ AP:PB=1:\mu.$ Звідси $\overrightarrow{PK}=\lambda\overrightarrow{MP},\ \overrightarrow{PB}=\mu\overrightarrow{AP}.$ і За формулою ділення відрізку $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{1+\lambda}\left(\overrightarrow{AK}+\lambda\overrightarrow{AM}\right),$

$\overrightarrow{AB}=(1+\mu)\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AK}+4\overrightarrow{AM}\right).$ Помноживши обидві частини першої рівності на $1+\mu,$ прирівняємо праві частини:

$$\frac{1+\mu}{1+\lambda}\left(\overrightarrow{AK}+\lambda\overrightarrow{AM}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AK}+4\overrightarrow{AM}\right)\Rightarrow\left(2\mu-\lambda+1\right)\overrightarrow{AK}+2\left(\lambda\mu-\lambda-2\right)\overrightarrow{AM}=0.$$

З лінійної незалежності векторів в лівій частині одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases}2\mu-\lambda+1=0,\\ \lambda\mu-\lambda-2=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=2\mu+1,\\ 2\mu^2-\mu-3=0.\end{cases}$$

Розв'язок другого рівняння $\mu=-1$ не підходить з геометричних міркувань, підходить $\mu=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\lambda=4.$

Відповідь: $PK:MP=4:1,\ AP:PB=1:\dfrac{3}{2}.$

Теорема Менелая. Нехай на сторонах або продовженнях сторін трикутника взято точки A_1, B_1, C_1. Вони лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли має місце співвідношення $\frac{BA_1}{A_1C}\frac{CB_1}{B_1A}\frac{AC_1}{C_1B} = -1 \Rightarrow \left|\frac{BA_1}{A_1C}\right|\left|\frac{CB_1}{B_1A}\right|\left|\frac{AC_1}{C_1B}\right| = 1.$

Зауваження. Тут використовується орієнтована довжина. Наприклад, $\frac{AB}{BA} = -1.$

Доведення. Введемо позначення: $\frac{BA_1}{A_1C} = \lambda,\ \frac{CB_1}{B_1A} = \mu,\ \frac{AC_1}{C_1B} = \nu.$

Звідси

$$\overrightarrow{BA_1} = \lambda\overrightarrow{A_1C}, \lambda > 0; \overrightarrow{CB_1} = \mu\overrightarrow{B_1A}, \mu < 0; \overrightarrow{AC_1} = \nu\overrightarrow{C_1B}, \nu > 0.$$

За формулою ділення відрізків в даному відношенні маємо:

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{1}{1+\nu}\left(\overrightarrow{A_1A} + \nu\overrightarrow{A_1B}\right) = \frac{1}{1+\nu}\left(\overrightarrow{A_1A} + \lambda\nu\overrightarrow{CA_1}\right).$$

За такою ж формулою

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{1+\mu}\left(\overrightarrow{A_1C} + \mu\overrightarrow{A_1A}\right).$$

З колінеарності векторів $\overrightarrow{A_1C_1}$ і $\overrightarrow{A_1B_1}$ випливає існування такого скаляру k, що $\overrightarrow{A_1C_1} = k\overrightarrow{A_1B_1}$. Звідси одержимо:

$$\frac{1}{1+\nu}\left(\overrightarrow{A_1A} + \lambda\nu\overrightarrow{CA_1}\right) = \frac{k}{1+\mu}\left(\overrightarrow{A_1C} + \mu\overrightarrow{A_1A}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+\mu)\overrightarrow{A_1A} + \lambda\nu(1+\mu)\overrightarrow{CA_1} = k(1+\nu)\overrightarrow{A_1C} + k\mu(1+\nu)\overrightarrow{A_1A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\mu - k\mu(1+\nu)\right)\overrightarrow{A_1A} + \left(\lambda\nu(1+\mu) + k(1+\nu)\right)\overrightarrow{CA_1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\mu-k\mu(1+\nu)=0, \\ \lambda\nu(1+\mu)+k(1+\nu)=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=\dfrac{1+\mu}{\mu(1+\nu)}, \\ k=-\dfrac{\lambda\nu(1+\mu)}{1+\nu}. \end{cases}$$

$$k=\frac{1+\mu}{\mu(1+\nu)}=-\frac{\lambda\nu(1+\mu)}{1+\nu}\Rightarrow \lambda\mu\nu=-1.$$

Звідси $\dfrac{BA_1}{A_1C}\dfrac{CB_1}{B_1A}\dfrac{AC_1}{C_1B}=\lambda\mu\nu=-1\Rightarrow \left|\dfrac{BA_1}{A_1C}\right|\left|\dfrac{CB_1}{B_1A}\right|\left|\dfrac{AC_1}{C_1B}\right|=1.$

В доведенні використано необхідну і достатню умову колінеарності двох векторів, тому, насправді, доведено необхідність і достатність одержаної умови.

Теорема Чеви. На прямих BC, CA, AB, на яких лежать сторони трикутника ABC, знаходяться точки, відповідно, A_1, B_1, C_1. Прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці або паралельні тоді і тільки тоді, коли має місце співвідношення

$$\frac{BA_1}{A_1C}\frac{CB_1}{B_1A}\frac{AC_1}{C_1B}=1.$$

Доведення. Нехай прямі перетинаються у точці O. Застосуємо теорему Менелая до трикутника ACC_1 і прямої BB_1, а також до трикутника BCC_1 і прямої AA_1:

$$\frac{CB_1}{B_1A}\frac{AB}{BC_1}\frac{C_1O}{OC}=-1, (*)$$

$$\frac{BA_1}{A_1C}\frac{CO}{OC_1}\frac{C_1A}{AB}=-1. (**)$$

Позначимо $\dfrac{CO}{OC_1}=\lambda, \dfrac{AB}{BC_1}=\mu.$ Тоді $\overrightarrow{CO}=\lambda\overrightarrow{OC_1}, \overrightarrow{AB}=\mu\overrightarrow{BC_1}.$ Тоді $\overrightarrow{C_1O}=\dfrac{1}{\lambda}\overrightarrow{OC}.$

$$\overrightarrow{AB}=\mu\overrightarrow{BC_1}\Rightarrow\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{C_1B}=\mu\overrightarrow{BC_1}\Rightarrow\overrightarrow{AC_1}=-(1+\mu)\overrightarrow{C_1B}\Rightarrow\frac{AC_1}{C_1B}=-(1+\mu).$$

Очевидно

$$\overrightarrow{BC_1}\Rightarrow\frac{1}{\mu}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC_1}\Rightarrow\overrightarrow{C_1A}=-\frac{1+\mu}{\mu}\overrightarrow{AB},\frac{C_1A}{AB}=-\frac{1+\mu}{\mu}=\frac{1}{\mu}\frac{AC_1}{C_1B}.$$

З урахуванням виписаних відношень перепишемо (*) і (**) у вигляді:

$$\frac{\mu}{\lambda}\frac{CB_1}{B_1A}=-1,\ \frac{\lambda}{\mu}\frac{BA_1}{A_1C}\frac{AC_1}{C_1B}=-1.$$

Після множення одержаних рівностей одержимо:

$$\frac{BA_1}{A_1C}\frac{CB_1}{B_1A}\frac{AC_1}{C_1B}=1.$$

Навпаки, нехай виконується співвідношення в умові теореми. Будемо вважати, що прямі AA_1, BB_1 перетинаються в точці O. Проведемо пряму CO і позначимо точку перетину цієї прямої з стороною AB через C_2. За доведеним для цих трьох прямих виконується співвідношення $\frac{BA_1}{A_1C}\frac{CB_1}{B_1A}\frac{AC_2}{C_2B}=1.$

З нього і умови теореми $\frac{BA_1}{A_1C}\frac{CB_1}{B_1A}\frac{AC_1}{C_1B}=1$ випливає: $\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{AC_1}{C_1B}\triangleq\lambda\neq-1.$

Тоді

$$\overrightarrow{AC_2}=\lambda\overrightarrow{C_2B},\overrightarrow{AC_1}=\lambda\overrightarrow{C_1B}\Rightarrow\overrightarrow{AC_2}-\overrightarrow{AC_1}=\lambda\left(\overrightarrow{C_2B}-\overrightarrow{C_1B}\right)\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{C_1C_2}=-\lambda\overrightarrow{C_1C_2}\Rightarrow(1+\lambda)\overrightarrow{C_1C_2}=0\Rightarrow\overrightarrow{C_1C_2}\ (\lambda\neq-1).$$

Це означає, що точки O_1 і O_2 співпадають.

Радимо читачу самостійно розглянути випадок паралельних прямих AA_1, BB_1, CC_1.

Задача 3.9. Точка M ділить сторону AB трикутника ABC у відношенні $AM : MB = \theta : 1.$ Пряма перетинає сторони трикутника: CA - в точці A_1, CB - в точці B_1, а відрізок CM - в точці M_1. Довести, що

$$\frac{1}{1+\theta}\left(\frac{CA}{CA_1}+\theta\frac{CB}{CB_1}\right)=\frac{CM}{CM_1}.$$

Доведення. Введемо позначення: $\lambda=\frac{CA}{CA_1}, \mu=\frac{CB}{CB_1}, \nu=\frac{CM}{CM_1}.$ Зауважимо, що $\lambda,\mu,\nu>1.$ Звідси маємо: $\lambda=\frac{CA}{CA_1}=\frac{CA_1+A_1A}{CA_1}=1+\frac{A_1A}{CA_1}\Rightarrow\frac{A_1A}{CA_1}=\lambda-1.$ Аналогічно $\frac{B_1B}{CB_1}=\mu-1, \frac{M_1M}{CM_1}=\nu-1.$ З останньої рівності випливає: $\overrightarrow{CM_1}=\frac{1}{\nu-1}\overrightarrow{M_1M}\Rightarrow\overrightarrow{M_1C}=-\frac{1}{\nu-1}\overrightarrow{M_1M}.$ За формулою ділення відрізку в даному відношенні маємо:

$$\overrightarrow{M_1M}=\frac{1}{1+\theta}\left(\overrightarrow{M_1A}+\theta\overrightarrow{M_1B}\right).$$

Звідси

$$\overrightarrow{M_1C}=-\frac{1}{(1+\theta)(\nu-1)}\left(\overrightarrow{M_1A}+\theta\overrightarrow{M_1B}\right).$$

Аналогічно з умови $\frac{\left|\overrightarrow{AA_1}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1C}\right|}=\lambda-1$ випливає:

$$\overrightarrow{M_1A_1}=\frac{1}{\lambda}\left(\overrightarrow{M_1A}+(\lambda-1)\overrightarrow{M_1C}\right),$$

з умови $\frac{\left|\overrightarrow{CB_1}\right|}{\left|\overrightarrow{B_1B}\right|}=\frac{1}{\mu-1}$ випливає:

$$\overrightarrow{M_1B_1}=\frac{1}{\mu}\left((\mu-1)\overrightarrow{M_1C}+\overrightarrow{M_1B}\right).$$

З колінеарності векторів $\overrightarrow{M_1A_1}$ і $\overrightarrow{M_1B_1}$ випливає існування такого скаляра k, що $\overrightarrow{M_1B_1}=k\,\overrightarrow{M_1A_1}$. Звідси одержимо:

$$\frac{1}{\mu}\left((\mu-1)\overrightarrow{M_1C}+\overrightarrow{M_1B}\right)=k\frac{1}{\lambda}\left(\overrightarrow{M_1A}+(\lambda-1)\overrightarrow{M_1C}\right)\Rightarrow$$

$$\left(\lambda(\mu-1)-k\mu(\lambda-1)\right)\overrightarrow{M_1C}-k\,\mu\overrightarrow{M_1A}+\lambda\overrightarrow{M_1B}=0.$$

Підставляючи сюди знайдений раніше вираз для $\overrightarrow{M_1C}$, одержимо:

$$-\frac{1}{(1+\theta)(\nu-1)}\left(\lambda(\mu-1)-k\mu(\lambda-1)\right)\left(\overrightarrow{M_1A}+\theta\overrightarrow{M_1B}\right)-k\,\mu\overrightarrow{M_1A}+\lambda\overrightarrow{M_1B}=0\Rightarrow$$

$$\left(\lambda(\mu-1)-k\mu(\lambda-1)\right)\left(\overrightarrow{M_1A}+\theta\overrightarrow{M_1B}\right)+k\,\mu(1+\theta)(\nu-1)\overrightarrow{M_1A}-$$
$$-\lambda(1+\theta)(\nu-1)\overrightarrow{M_1B}=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\lambda(\mu-1)-\left(\mu(\lambda-1)-\mu(1+\theta)(\nu-1)\right)k=0,\\ \theta\lambda(\mu-1)-\lambda(1+\theta)(\nu-1)-k\theta\mu(\lambda-1)=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=\dfrac{\lambda(\mu-1)}{\mu(\lambda-1)-\mu(1+\theta)(\nu-1)},\\ k=\dfrac{\theta\lambda(\mu-1)-\lambda(1+\theta)(\nu-1)}{\theta\mu(\lambda-1)}.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\frac{\lambda(\mu-1)}{\mu(\lambda-1)-\mu(1+\theta)(\nu-1)}=\frac{\theta\lambda(\mu-1)-\lambda(1+\theta)(\nu-1)}{\theta\mu(\lambda-1)}\Rightarrow$$

$$\left(\theta\lambda(\mu-1)-\lambda(1+\theta)(\nu-1)\right)\left(\mu(\lambda-1)-\mu(1+\theta)(\nu-1)\right)=\theta\lambda\mu(\lambda-1)(\mu-1)\Rightarrow$$

$$\theta\lambda\mu(\lambda-1)(\mu-1)-\theta(1+\theta)\lambda\mu(\mu-1)(\nu-1)-\lambda\mu(1+\theta)(\lambda-1)(\nu-1)+$$
$$+\lambda\mu(1+\theta)^2(\nu-1)^2=\theta\lambda\mu(\lambda-1)(\mu-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\theta(1+\theta)\lambda\mu(\mu-1)(\nu-1)+\lambda\mu(1+\theta)(\lambda-1)(\nu-1)=\lambda\mu(1+\theta)^2(\nu-1)^2\Rightarrow$$
$$\theta(\mu-1)+(\lambda-1)=(1+\theta)(\nu-1)\Rightarrow$$
$$\theta\mu+\lambda-\theta-1=(1+\theta)\nu-\theta-1\Rightarrow\lambda+\theta\mu=(1+\theta)\nu\Rightarrow\frac{1}{1+\theta}(\lambda+\theta\mu)=\nu.$$

Отже, рівність доведено.

Зауваження. Якщо відрізок CM - медіана, одержимо співвідношення:

$$\frac{CA}{CA_1}+\frac{CB}{CB_1}=2\frac{CM}{CM_1}.$$

3). **Завдання для самостійної роботи:** [10], №№ 740-744.

Практичне заняття 4. Матриці і дії з ними

Теоретичні відомості

Означення 4.1. Матрицею A називається прямокутна таблиця, елементи якої $a_{jk},\ j=1,...,m,\ k=1,...,n$ належать деякому полю K:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (4.1)$$

Як правило, ми будемо розглядати два випадки: $K=\mathbb{R},\ K=\mathbb{C}$.

Елементи $a_{ii}, i=1,...,n$ квадратної матриці A називаються діагональними. Кажуть, що вони знаходяться на головній діагоналі.

Матриці вважаються рівними, якщо у них рівні елементи, що стоять на однакових місцях.

Нульова матриця складається тільки з нульових елементів:

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$	(4.2)

Означення 4.2. Вектори $a_j=\begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{jn} \end{pmatrix}, j=1,...,m$ називаються її векторами-рядками матриці, вектори

$$a^{(k)}=\begin{pmatrix} a_{1k} & a_{2k} & ... & a_{mk} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}, k=1,...,n$$

називаються її векторами-стовпчиками.

Означення 4.3. Якщо матриця має m рядків і n стовпчиків, то кажуть, що вона має розмірність $m\times n$. Інколи, щоб підкреслити цю обставину, будемо писати $A(m\times n)$.

Означення 4.4. Сума двох матриць однакових розмірностей (поелементне додавання):

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ . & . & ... & . \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{pmatrix}=$$	(4.3)

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$	

Означення 4.5. Множення матриці на число.

Нехай $\lambda \in K$. Тоді

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$	(4.4)

Означення 4.6. Лінійною комбінацією матриць $A_1, A_2, ..., A_n$ називається вираз $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_n A_n, \alpha_1, ..., \alpha_n \in K$.

Легко перевіряється справедливість виконання аксіом лінійного простору для матриць однакової розмірності.

Твердження 4.1. Матриці однакої розмірності $m \times n$ утворюють лінійний простір.

Простір таких матриць над полем K буде позначатись $M_{m \times n}(K)$.

Легко вказати один з базисів цього простору, що складається з матриць, всі елементи яких нулі крім елемента j-го рядка $(j = 1, ..., m)$ і k-го стовпчика $(k = 1, ..., n)$, який дорівнює одиниці. Розмірність цього простору дорівнює *mn.*

Означення 4.6. Добуток двох матриць. Нехай є дві матриці наступних розмірностей: $A(m \times n)$ і $B(n \times k)$. Добутком AB називається матриця $C(m \times k)$, елементи якої знаходяться за правилом: $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$.

Більш докладно:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ . & . & \dots & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}=$$ $$=\begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{n} a_{1l}b_{l1} & \sum_{l=1}^{n} a_{1l}b_{l2} & \dots & \dots & \sum_{l=1}^{n} a_{1l}b_{l1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{l1} & \dots & \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj} & \dots & \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{l=1}^{n} a_{ml}b_{l1} & \sum_{l=1}^{n} a_{ml}b_{l2} & \dots & \vdots & \sum_{l=1}^{n} a_{ml}b_{lk} \end{pmatrix}=$$ $$=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & \dots & c_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & \vdots & c_{mk} \end{pmatrix}.$$	(4.5)

Кажуть, що при визначенні елементу матриці $c_{i\,j}$ *i*-й рядок матриці *A* множиться на *j*-й стовпчик матриці *B*, і це множення відбувається за вказаним правилом.

Застереження. Якщо $m \neq k$, добуток матриць $B(n \times k)$ і $A(m \times n)$ не визначено.

Задача 4.1. Довести, що якщо визначені обидва добутки AB і BA і до того ж $AB = BA$, то ці дві матриці квадратні і однакової розмірності.

Розв'язання. Маємо: $A(m,n)B(n,k) \triangleq C(m,k)$. З існування добутку $B(n,k)A(m,n)$ випливає, що $k = m$. Позначимо: $B(n,m)A(m,n) \triangleq D(n,n)$. Попередня рівність запишеться тепер у вигляді $A(m,n)B(n,m) \triangleq C(m,m)$. З умови комутування матриць одержимо: $C(m,m) = D(n,n)$. Це можливо лише за умови однакової розмірності матриць, тобто, $m = n$, і вони квадратні.

Зауваження. Без умови комутування при множенні $A(m,n)B(n,m)=C(m,m)$ і $B(n,m)A(m,n)=D(n,n).$ одержимо квадратні матриці, але, взагалі кажучи, різних розмірностей. Зауважимо також, що умова комутування є достатньою, але не необхідною для можливості множення матриць у довільному порядку і одержання при цьому квадратних матриць однакових розмірностей.

Задача 4.2. Знайти добутки матриць AB і BA, якщо

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Маємо: $AB=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n\in\mathbb{R}.$

$$BA=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \dots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \dots & b_2a_n \\ . & . & \dots & . \\ b_na_1 & b_na_2 & \dots & b_na_n \end{pmatrix}\in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Задача 4.3. Знайти добуток матриць

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ і } R=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$LR=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I.$$

Зауваження. Якщо добуток двох матриць дорівнює одиничній матриці, як у розглянутому випадку, кажуть, що $L-$ліва обернена матриця для R, а $R-$ права обернена для L. З теорії відомо, що в кільці матриць кожна матриця або має обернену – ліву і праву (така матриця називається невиродженою), або є дільником нульової матриці. Завдяки асоціативності ліва і права обернені до невиродженої матриці співпадають. Звідси можна без обчислень зробити висновок, що $RL = I$.

Задача 4.4. Знайти добуток матриць

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ і } R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$LDR = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \triangleq A.$$

Задача 4.5. Знайти A^6, для матриці з попередньої задачі 4.4.

Розв'язання. Скористаємось результатами двох попередніх задач 4.3 і 4.4:

$$A^2 = (LDR)^2 = LDRLDR = LD(RL)DR = LD^2R.$$

За допомогою методу математичної індукції, доводиться, що

$$A^n = (LDR)^n = LD^nR, \; n \in \mathbb{N}.$$

Отже,

$$A^6 = LD^6R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^6 \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&2&1\\3&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&64&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&-1\\-2&-5&4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}190&189&-189\\126&127&-126\\252&252&-251\end{pmatrix}.$$

Задача 4.5. Знайти квадрат суми матриць:

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2.$$

Оскільки матриці не комутують, то, взагалі кажучи, $AB+BA\neq 2AB.$
Умова $AB=BA$ є необхідною і достатньою для того, щоб мала місце рівність

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2 \Leftrightarrow AB=BA.$	(4.6)

Задача 4.6. Знайти степені клітини Жордана

$$J_n(0)=\begin{pmatrix}0&1&0&.&\dots&0\\0&0&1&0&\dots&0\\.&.&.&.&\dots&\dots\\0&0&0&0&\dots&0\\0&0&0&0&\dots&1\\0&0&0&0&\dots&0\end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$J_n^2(0)=\begin{pmatrix}0&1&0&.&...&0\\0&0&1&0&...&0\\.&.&.&.&...&...\\0&0&0&0&...&0\\0&0&0&0&...&1\\0&0&0&0&...&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&.&...&0\\0&0&1&0&...&0\\.&.&.&.&...&...\\0&0&0&0&...&0\\0&0&0&0&...&1\\0&0&0&0&...&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1&.&...&0\\0&0&0&1&...&0\\.&.&.&.&...&...\\0&0&0&0&...&1\\0&0&0&0&...&0\\0&0&0&0&...&0\end{pmatrix}.$$

Бачимо, що ланцюг з одиниць пересунувся на одну позицію вправо-вгору. Застосовуючи індукцію, легко довести, що $J_n^k(0)$ одиниці стоять на k-й лінії паралельній головній діагоналі. Наприклад, всі елементи матриці $J_n^{n-1}(0)$ - нулі, за винятком останнього елемента в першому рядку, який дорівнює одиниці:

$$J_n^{n-1}(0)=\begin{pmatrix}0&0&0&.&...&1\\0&0&0&0&...&0\\.&.&.&.&...&...\\0&0&0&0&...&0\\0&0&0&0&...&0\\0&0&0&0&...&0\end{pmatrix}.$$

З цих міркувань також випливає, що $J_n^n(0)=J_n^{n+1}(0)=...=0.$

Матриця, яка в деякій натуральній степені дорівнює нулю, називається нільпотентною. Отже, $J_n(0)$ - нільпотентна матриця.

Задача 4.7. Знайти степені матриці

$$J_2^n(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^n=\left(\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)^n=\left(\lambda I+J_2(0)\right)^n.$$

Матриці в дужках комутують, тому при піднесенні до квадрату суми можна використовувати формулу (4.6). При цьому треба мати на увазі, що $J_2^2(0)=0$.

$$J_2^2(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^2=\left(\lambda I+J_2(0)\right)^2=\lambda^2 I+2\lambda J_2(0).$$

$$J_2^3(\lambda)=\left(\lambda I+J_2(0)\right)^2\left(\lambda I+J_2(0)\right)=\left(\lambda^2 I+2\lambda J_2(0)\right)\left(\lambda I+J_2(0)\right)=\lambda^3 I+3\lambda^2 J_2(0).$$

За індукцією доводиться, що

$$J_2^n(\lambda)=\lambda^n I+n\lambda^{n-1}J_2(0)=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}.$$

Задача 4.8. Знайти другу і третю степені матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1\\ . & . & . & \ldots & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1&1&\dots&1&1\\0&1&1&\dots&1&1\\.&.&.&\dots&.&.\\0&0&0&\dots&1&1\\0&0&0&\dots&1&1\\0&0&0&\dots&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&\dots&1&1\\0&1&1&\dots&1&1\\.&.&.&\dots&.&.\\0&0&0&\dots&1&1\\0&0&0&\dots&1&1\\0&0&0&\dots&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n-1&n\\0&1&2&\dots&n-2&n-1\\.&.&.&.&.&\dots\\0&0&0&\dots&2&3\\0&0&0&\dots&1&2\\0&0&0&\dots&0&1\end{pmatrix}.$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&1&1&\dots&1&1\\0&1&1&\dots&1&1\\.&.&.&\dots&.&.\\0&0&0&\dots&1&1\\0&0&0&\dots&1&1\\0&0&0&\dots&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n-1&n\\0&1&2&\dots&n-2&n-1\\.&.&.&.&.&\dots\\0&0&0&\dots&2&3\\0&0&0&\dots&1&2\\0&0&0&\dots&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&3&6&\dots&\frac{(n-1)n}{2}&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&3&\dots&\frac{(n-2)(n-1)}{2}&\frac{(n-1)n}{2}\\.&.&.&\dots&.&\dots\\0&0&0&\dots&3&6\\0&0&0&\dots&1&3\\0&0&0&\dots&0&1\end{pmatrix}.$$

Задача 4.9. Знайти всі матриці, що комутують з нільпотентною клітиною Жордана

$$J_4(0)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$J_4(0)A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$AJ_4(0)=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&a_{21}&a_{22}&a_{23}\\0&a_{31}&a_{32}&a_{33}\\0&a_{41}&a_{42}&a_{43}\end{pmatrix}.$$

Прирівнюючи елементи, що знаходяться на однакових місцях, одержимо:

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{44}\triangleq a,$$
$$a_{12}=a_{23}=a_{34}\triangleq b,$$
$$a_{13}=a_{24}\triangleq c,$$
$$a_{14}\triangleq d.$$

В результаті одержимо:

$$A=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\0&a&b&c\\0&0&a&b\\0&0&0&a\end{pmatrix}.$$

Задача 4.10. Нехай існує оператор, обернений до $I+AB$. Довести, що існує обернений для оператора $I+BA$.

Доведення. Введемо позначення: $C=\left(I+AB\right)^{-1} \Leftrightarrow C(I+AB)=I \Leftrightarrow C+CAB=I$.

Розглянемо добуток $(I-BCA)(I+BA)$:

$(I-BCA)(I+BA)=I+BA-BCA-B(CAB)A=$

$=I+BA-BCA-B(I-C)A=I+BA-BCA-BA+BCA=I$

Отже, $(I+BA)^{-1}=I-BCA.$

4). **Завдання для самостійної роботи:** [7], №№ 788-793, 809..

Практичне заняття 5. Лінійні оператори та їхні матриці

Теоретичні відомості

Далі лінійний простір (абстрактний) розмірності $n\in\mathbb{N}$ над полем K, де, як правило, $K=\mathbb{R}$ або $K=\mathbb{C}$, будемо позначати E_n. Елементи поля також будемо називати скалярами.

Означення 5.1. Відображення $E_n \to E_m$ таке, що $\forall x_1, x_2 \in E_n,\ \alpha_1, \alpha_2 \in K$ виконується співвідношення

$A\left(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2\right)=\alpha_1 A x_1+\alpha_2 A x_2$.	(5.1)

Множину лінійних операторів будемо позначати $L\left(E_n, E_m\right)$. При цьому E_n називається областю його визначення.

Означення 5.1. Нехай $A\in L\left(E_n, E_m\right)$ Множина векторів з E_n , яка переводиться оператором A в нульовий вектор, називається ядром оператора і позначається $KerA$. Тобто, $KerA=\left\{x\in E_n : Ax=0\right\}$.

Означення 5.2. Множина векторів $\mathrm{Im}(A) \triangleq AE_n=\left\{y=Ax, x\in E_n\right\}$ називається образом оператора.

Твердження 5.2. $\mathrm{Im}(A)$ є лінійним підпростором E_m. Його розмірність називається рангом оператора і позначається *rank (A).*

Матриця оператора $A \in L(E_n, E_m)$ у конкретних базисах $e_1, ..., e_n \in E_n$, $f_1, ..., f_m \in E_m$. Подіємо оператором на всі базисні вектори в E_n і одержані вектори з E_m розкладемо за базисом в E_m.

$$\begin{array}{ccccccccc} Ae_1 & = & a_{11} f_1 & + & a_{21} f_2 & + & ... & + & a_{m1} f_m \\ Ae_2 & = & a_{12} f_1 & + & a_{22} f_2 & + & ... & + & a_{m2} f_m \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ Ae_n & = & a_{1n} f_1 & + & a_{2n} f_2 & + & ... & + & a_{mn} f_m \end{array}. \qquad (5.2)$$

Записуючи коефіцієнти розкладу (вони у рядках) стовпчиками, одержимо матрицю оператора в даних базисах:

$$[A]_{f,e} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (5.3)$$

Нехай $Ax = y$. Тоді

$$[y]_f = [Ax]_f = [A]_{fe} [x]_e. \qquad (5.4)$$

Задача 5.1. Нехай E_4 - лінійний простір многочленів від x степені не вище третьої. В ньому можна вибрати базис $e = \{1, x, x^2, x^3\}$. Нехай D – оператор першої похідної. Знайти його матрицю в даному базисі. Запишемо рівності (5.2):

$$\begin{array}{ccccccccc} D1 & = & 0 \cdot 1 & + & 0x & + & 0x^2 & + & 0x^3; \\ Dx & = & 1 \cdot 1 & + & 0x & + & 0x^2 & + & 0x^3; \\ Dx^2 & = & 0 \cdot 1 & + & 2x & + & 0x^2 & + & 0x^3; \\ Dx^3 & = & 0 \cdot 1 & + & 0x & + & 3x^2 & + & 0x^3. \end{array}$$

За формулою (5.3) маємо:

$$[D]_{e,e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нехай $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \sim [P(x)]_e = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$. Тоді

$$(DP)(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \sim [(DP)(x)]_e = \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ 0 \end{bmatrix}_e$$

Безпосередньою перевіркою впевнюємось, що $[(DP)(x)]_{e,e} = [D]_{e,e}[P(x)]_e$:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ 0 \end{bmatrix}_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_e ,$$

тобто, формулу (5.4) підтверджено.

Задача 5.2. Оператор повороту на площині.

Нехай на площині E_2 вибрано базис $e=\{\vec{i},\vec{j}\}$. Дія на кожен вектор площини оператора повороту $U(\varphi)$ на кут φ, полягає в тому, що вектор обертається на цей кут. Знайти матрицю оператора повороту в даному базисі.

Розв'язання. Подіємо оператором на кожен базисний вектор і результат розкладемо по цьому базису. Маємо:

$$U(\varphi)\vec{i} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j},$$
$$U(\varphi)\vec{i} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}.$$

Тепер за відомим правилом виписуємо матрицю оператора повороту:

$$\left[U(\varphi)\right]_{e\,e} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Нехай

$$\vec{r} = E_2,\ \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow \left[\vec{r}\,\right]_e = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\left[U(\varphi)\vec{r}\,\right]_e = \left[U(\varphi)\right]_{e\,e}\left[\vec{r}\,\right]_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Очевидно, поворот вектора на кут ψ, а потім на φ - це поворот одразу на кут $\varphi+\psi$. Отже, діючи на довільний вектор-стовпчик з координат у даному базисі на матриці, що відповідають вказаним операторам поворотів, одержимо:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\left(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\right) \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \end{pmatrix}$$

Як вже вказувалось, той самий результат одержимо, якщо будемо обертати вектор на кут $\varphi+\psi$, а такому оператору відповідає матриця

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$$

Отже, доведено тотожність:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi) \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \end{pmatrix} = $$ $$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}.$$	(5.7)

Звідси маємо відомі з тригонометрії формули додавання для функцій косинус і синус:

$$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi,$$ $$\sin(\varphi+\psi) = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi.$$	(5.8)

Очевидно, поворот на кут 0 – це одиничний оператор, обернений до повороту на кут φ, є поворот на кут $-\varphi$, звідки одержимо формули для операторів і їхніх матриць:

$$U(0) = I, U(-\varphi) = U^{-1}(\varphi),$$ $$[U(-\varphi)]_{ee} = [U(\varphi)]_{ee}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = [U(\varphi)]_{ee}^{*}.$$	(5.9)

Задача 5.3. Довести, що множення зліва матриць другого порядку на матрицю $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ є лінійний оператор (позначимо його через L) в просторі таких матриць. Знайти матрицю цього оператора у базисі

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Нехай

$$X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}y_{11}&y_{12}\\y_{21}&y_{22}\end{pmatrix}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Дія оператора L на матрицю X записується таким чином: $L(X)\triangleq MX$.
Завдяки дистрибутивності множення матриць маємо:

$$L(\alpha X+\beta Y)\triangleq M(\alpha X+\beta Y)=\alpha MX+\beta MY=\alpha L(X)+\beta L(Y),$$

що й доводить лінійність оператора L. Подіємо оператором на кожен базисний вектор і результат розкладемо за цим базисом:

$$Le_1=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\c&0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=a\,e_1+c\,e_2+0e_3+0e_4,$$
$$Le_2=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&0\\d&0\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=b\,e_1+d\,e_2+0e_3+0e_4,$$
$$Le_3=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=0e_1+0e_2+ae_3+ce_4,$$
$$Le_4=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b\\0&d\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=0e_1+0e_2+be_3+de_4.$$

Тепер випишемо матрицю оператора у даному базисі:

$$[L]_{ee}=\begin{pmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&d\end{pmatrix}.$$

5). **Завдання для самостійної роботи:** [7], №№ 1441-1445, 1450, [8], 5.6.3-5.6.6.

Практичне заняття 6. Детермінанти (визначники) матриць, методи обчислення

Задача 6.1. Різними методами обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 8 \end{vmatrix}.$$

1). Розкриття за першим рядком.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 + 5 - 12 = 2.$$

2). Зведення методом Гауса до визначника верхньо-трикутної матриці.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 8 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2.$$

Задача 6.2. Розв'язати рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язання. Очевидно, визначник є многочленом степені n, і тому має n коренів. Легко бачити, що вони є $0,1,2,\dots,n-1.$ При підстановці кожного з них одержуємо визначник, що має два однакових стовпчики і тому він дорівнює нулю.

Приклад 6.1. Визначник Вандермонда[1] та його застосування.

Так називається визначник вигляду:

$$\Delta_n(x_1,...,x_n)=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_2^{n-1}\\ . & . & . & ... & .\\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^{n-1}\end{vmatrix} \tag{6.1}$$

Покажемо, як знайти цей визначник, використовуючи рекурентні співвідношення.

Спочатку підрахуємо його при n=2. Маємо:

$$\Delta_2(x_1,x_2)=\begin{vmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1 \tag{6.2}$$

Обчислюючи тепер цей визначник при n=3:

$$\Delta_3(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\\ 1 & x_3 & x_3^2\end{vmatrix}.$$

віднімемо від третього стовпчика другий, помножимо на x_1, від другого – перший, помножений на x_1. Одержимо

[1] **Вандермонд, Александр Теофил** (фр. *Alexandre-Théophile Vandermonde*; 28/02/1735, Париж, – 1/01/1796, Париж) – відомий математик і музикант.

$$\Delta_3(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & x_2-x_1 & x_2{}^2-x_2x_1\\ 1 & x_3-x_1 & x_3{}^2-x_3x_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_2\left(x_2-x_1\right)\\ x_3-x_1 & x_3\left(x_3-x_1\right)\end{vmatrix}=$$

$$=\left(x_2-x_1\right)\left(x_3-x_1\right)\Delta_2(x_1,x_2)=\left(x_2-x_1\right)\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right).$$

Методом математичної індукції доведемо формулу:

$$\Delta_n(x_1,...,x_n)=\prod_{1\le j<i\le n}\left(x_i-x_j\right) \tag{6.3}$$

Нехай формула справедлива для визначників порядку *n-1*. У визначнику порядку *n* віднімемо від кожного стовпчика попередній, помножений на x_1:

$$\Delta_n(x_1,x_2,...,x_n)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & & 0\\ 1 & x_2\text{-}x_1 & x_2^2-x_2x_1 & ... & x_2^{n-1}-x_2^{n-2}x_1\\ 1 & x_3\text{-}x_1 & x_3^2-x_3x_1 & ... & x_3^{n-1}-x_3^{n-2}x_1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & x_n\text{-}x_1 & x_n^2-x_nx_1 & ... & x_n^{n-1}-x_n^{n-2}x_1\end{vmatrix}=$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)...(x_n-x_1)\Delta_{n-1}(x_2,x_3,...,x_n)$$

Використання припущення індукції

$$\Delta_{n-1}(x_1,...,x_{n-1})=(x_2-x_1)(x_3-x_1)...(x_{n-1}-x_1)=\prod_{1\le j<i\le n-1}(x_i-x_j)$$

доводить формулу.

Дамо одне з застосувань визначника Вандермонда. Треба побудувати многочлен, який в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ набуває значення $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Усі значення аргументів вважаються попарно різними. Многочлен, що має n коефіцієнтів, має степінь n-1:

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \equiv f(x). \tag{6.4}$$

З умови випливає використання рівностей

$$\begin{aligned} &y_1 = a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1}, \\ &y_2 = a_0 + a_1 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n = a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Одержали систему n лінійних рівнянь з n невідомими $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Її визначник – визначник Вандермонда:

$$\Delta_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le j < j \le n} (x_i - x_j) \tag{6.6}$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів треба розв‘язати систему (4.3.21). Але ми не будемо робити цього безпосередньо, а використаємо метод розкладу правильного раціонального дробу на елементарні. Нехай $F(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$. Розглянемо дріб $\dfrac{f(x)}{F(x)}$(многочлен в знаменнику має прості корені), доведемо формулу розкладу її на елементарні дроби:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{F'(x_k)(x - x_k)}. \tag{6.7}$$

З цієї формули одержимо інтерполяційну формулу Лагранжа[2]:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}. \tag{6.8}$$

Для доведення (6.8) розкладемо $\frac{f(x)}{F(x)}$ в суму елементарних дробів з невизначеними коефіцієнтами:

$$\frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n}.$$

Помноживши на знаменник, одержимо:

$$f(x) = A_1(x - x_2)\ldots(x - x_n) + A_2(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_n) + \ldots + A_n(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Підставляючи по черзі $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_n$, одержимо

---

[2] **Лагранж, Жозе́ф-Луї́** (фр. *Joseph-Louis Lagrange*, народжений як **Джузеппе Луїджі Лаґранджа**, італ. *Giuseppe Luigi Lagrangia*, або **Джузеппе Людовіко Де ла Гранж Турньє**, італ. *Giuseppe Ludovico De la Grange Tournier*; 25/01/1736, Турин – 10/04/1813, Париж) – великий математик, фізик.

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= A_1(x_1-x_2)(x_1-x_3)...(x_1-x_n),\\
f(x_2) &= A_2(x_2-x_1)(x_2-x_3)...(x_2-x_n),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f(x_n) &= A_n(x_n-x_1)(x_n-x_2)...(x_n-x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Співмножники при цих коефіцієнтах у правих частинах відмінні від нуля і зображуються за допомогою похідної многочлена *F(x)*. Дійсно,

$$F'(x) =$$

$$= (x-x_2)...(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)...(x-x_n)+...+(x-x_1)...(x-x_{n-1})\,. \tag{6.9}$$

Підставляючи по черзі $x = x_1, x = x_2, x = x_n$, одержимо

$$\begin{aligned}
F'(x_1) &= (x_1-x_2)(x_1-x_3)...(x_1-x_n),\\
F'(x_2) &= (x_2-x_1)(x_2-x_3)...(x_2-x_n),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
F'(x_n) &= (x_n-x_1)(x_n-x_2)...(x_n-x_{n-1}).
\end{aligned}$$

З двох систем рівностей маємо

$$A_1 = \frac{f(x_1)}{F'(x_1)},\ A_2 = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)},\ ..., A_n = \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}, \tag{6.10}$$

що й доводить (6.8).

Приклад 6.2. Визначник, що зводиться до визначника Вандермонда.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Використаємо дещо штучний прийом. Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ - корені многочлена степені *n*: $x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0$. Згідно з формулою Вієта $a_1 = -\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)$. Звідси $x^n = \left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right) x^{n-1} - ... - a_{n-1} x - a_n$. Підставляючи в цю рівність $x = x_k, k = 1, ..., n$, будемо мати: $x_k^n = \left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right) x_k^{n-1} - a_2 x_k^{n-2} - ... - a_{n-1} x_k - a_n$. Після заміни елементів останнього стовпчика такими виразами, будемо мати:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & \left(x_1 + ... + x_n\right) x_1^{n-1} - a_2 x_1^{n-2} - ... - a_{n-1} x_1 - a_n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & \left(x_1 + ... + x_n\right) x_2^{n-1} - a_2 x_2^{n-2} - ... - a_{n-1} x_2 - a_n \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & \left(x_1 + ... + x_n\right) x_n^{n-1} - a_2 x_n^{n-2} - ... - a_{n-1} x_n - a_n \end{vmatrix} =$$

$$= \left(x_1 + ... + x_n\right) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & -a_2 x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & -a_2 x_2^{n-2} \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & -a_2 x_n^{n-2} \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & -a_{n-1} x_1 - a_n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & -a_{n-1} x_2 - a_n \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & -a_{n-1} x_n - a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & -a_n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & -a_n \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & -a_n \end{vmatrix} =$$

$$= \left(x_1 + \ldots + x_n \right) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ . & . & . & \ldots & \ldots & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \left(x_1 + \ldots + x_n \right) \prod_{1 \le j < i \le n-1} \left(x_i - x_j \right).$$

В попередньому виразі всі визначники крім першого дорівнюють нулю, оскільки вони мають пропорційні стовпчики. Визначник, що залишився, – це визначник Вандермонда, значення якого було знайдено в попередньому прикладі.

Приклад 6.3. Виділення лінійних множників у визначнику, який розлядається як многочлен від кількох змінних.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, якщо розкрити цей визначник, одержимо однорідний многочлен четвертої степені від трьох змінних, але для його знаходження не будемо використовувати прямі методи. Досить знайти всі лінійні дільники цього многочлена. Тоді він буде с точністю до константи буде дорівнювати їхньому добутку. Потім знайдемо цю константу, прирівнюючи коефіцієнти при старшій степені однієї з змінних або підставляючи замість його змінних певні числа, вибираючи їх таким чином, щоб визначник легко обчислювався.

Додамо до першого рядка другий, третій та четвертий рядки. Визначник від цього не зміниться:

$$\Delta=\begin{vmatrix} x+y+z & x & y & z \\ x+y+z & 0 & z & y \\ x+y+z & z & 0 & x \\ x+y+z & y & x & 0 \end{vmatrix}=\left(x+y+z\right)\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Отже, один лінійний множник знайдено: $x+y+z$.

Тепер до першого стовпчика додамо другий і віднімемо третій та четвертий:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-y-z & x & y & z \\ x-y-z & 0 & z & y \\ -x+y+z & z & 0 & x \\ -x+y+z & y & x & 0 \end{vmatrix}=(y+z-x)\begin{vmatrix} -1 & x & y & z \\ -1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Далі за допомогою аналогічних дій знаходимо дільники $z+x-y$ та $x+y-z$. Радимо читачу зробити це самостійно. Добуток знайдених дільників – многочлен четвертої степені відносно трьох змінних. Отже,

$$\Delta=a\left(x+y+z\right)(y+z-x)\left(z+x-y\right)\left(x+y-z\right).$$

Старший його член, що містить четверту степінь змінної x, має вигляд $-ax^4$. Виходячи з означення визначника, формули (7.4), помічаємо, що підстановка індексів елементів нашого визначника, що дорівнюють x, має вигляд

$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. З неї можна утворити тотожню підстановку, зробивши дві

транспозиції сусідніх елементів: першого і другого та третього і четвертого, отже її парність дорівнює нулю, і коефіцієнт перед x^4 буде дорівнювати одиниці, з чого випливає, що $a=-1$. Отже,

$\Delta=-\left(x+y+z\right)(y+z-x)\left(z+x-y\right)\left(x+y-z\right)$.

Цікаво відзначити, що при виконанні умов

$y+z>x>0, z+x>y>0, x+y>z>0$ величини x, y, z є сторонами деякого трикутника, і з формули Герона випливає, що квадрат його площі можна виразити через знайдений визначник:

$$S^2 = \frac{x+y+z}{2}\frac{y+z-x}{2}\frac{z+x-y}{2}\frac{x+y-z}{2} = -\frac{\Delta}{16}.$$

Наступна задача, пов'язана з цією матрицею, полягає без використання знання її визначника доведення тотожності:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Помножимо перший стовпчик на yz, другий - на xz і третій - на xy і поділимо визначник на $(xyz)^2$:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{(xyz)^2}\begin{vmatrix} 0 & xyz & xyz & zyz \\ x & 0 & xz^2 & xy^2 \\ y & yz^2 & 0 & x^2y \\ z & y^2z & x^2z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Останнє перетворення полягало в тому, що з рядків визначника було винесено спільні множники.

Приклад 6.4. Розглянемо ще один приклад, де застосовується методика прикладу 3.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_n \\ . & . & . & \dots & \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Якщо підставляти по черзі $x=a_1,a_2,...,a_n$, одержимо кожного разу визначник з двома однаковими рядками (або пропорційними стовпчиками), тому він дорівнює нулю. Отже, наш визначник, який є многочленом від *x* степені *n*, може бути розкладений на множники: $\Delta=k\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)...\left(x-a_n\right)$.

Порівнюючи коефіцієнт a_0 при x^n в розкладі визначника, який міститься тільки в добутку його діагональних елементів, і коефіцієнт k при старшому степені многочлена в правій частині, робимо висновок: $k=a_0$.

Відповідь: $\Delta=a_0\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)...\left(x-a_n\right)$.

Приклад 6.5. Визначник кососиметричної матриці.

Так називається матриця, у якої $a_{ji}=-a_{ij}$. Звідси випливає, що

$a_{ii}=-a_{ii}\Rightarrow 2a_{ii=0}\Rightarrow a_{ii}=0$, тобто, її діагональні елементи дорівнюють нулю.

Нехай матриця *A* має непарний порядок $2n-1$. Знайдемо її визначник:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta & \dots & \omega \\ -\alpha & 0 & \gamma & \dots & . \\ -\beta & -\gamma & 0 & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ -\omega & . & . & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Цей визначник за відомою властивістю дорівнює визначнику транспонованої матриці:

$$\Delta(A)=\Delta\left(A^{T}\right)=\begin{vmatrix} 0 & -\alpha & -\beta & \dots & -\omega \\ \alpha & 0 & -\gamma & \dots & . \\ \beta & \gamma & 0 & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ \omega & . & . & \dots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{2n-1}\Delta(A)=-\Delta(A),$$

Звідки випливає: $\Delta(A)=0$.

Приклад 6.6.

Зображення визначника у вигляді суми визначників за формулою (7.7).

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ . & . & \dots & . \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи визначник за цією формулою по першому рядку, потім по другому, будемо мати:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ . & . & \dots & . \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ . & . & \dots & . \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ . & . & \dots & . \\ a_n+b_1 & a_n & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ . & . & \dots & . \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ . & . & \dots & . \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ . & . & \dots & . \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} = \dots$$

Застосовуючи ту ж формулу і далі, прийдемо до суми 2^n визначників, рядки яких будуть мати вигляд $\left(a_k \quad a_k \quad \dots \quad a_k\right), k=1,\dots,n$ або $\left(b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n\right)$. Очевидно, при $n \geq 3$ кожен з таких визначників буде мати не менше двох рядків першого або другого типів, причому, перші пропорційні, а другі рівні, отже, всі ці визначники дорівнюватимуть нулю. Слід окремо розглянути визначник 2-го порядку:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & b_2-b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2-b_1 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=\left(b_2-b_1\right)\left(\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & 1 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix}\right) = \left(a_1-a_2\right)\left(b_2-b_1\right).$$

Приклад 6.7. Метод зміни всіх елементів визначника.

Розглянемо ситуацію, коли додавання до всіх елементів визначника певного числа значно полегшує подальші обчислення.

Нехай треба обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Обчислимо визначник

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \dots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2n}+x \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}.$$

Як і в минулому прикладі будемо застосовувати формулу (7.7). В результаті прийдемо до 2^n визначників, елементи яких не будуть мати вигляд сум типу $a_{ij}+x$. Всі визначники, що містять не менше, як два рядки вигляду $\begin{pmatrix} x & x & \dots & x \end{pmatrix}$, дорівнюють нулю. Залишаться визначники, в яких є тільки один рядок такого вигляду, причому, в якомусь визначнику він буде перший, в іншому – другий і, нарешті, n-ий. Розкладемо кожен такий визначник по рядку такому рядку, виносячи x за дужки. При розкладі будемо мати суму алгебраїчних доповнень до елементів першого рядка, потім другого і, нарешті, n-го. Позначаючи ці алгебраїчні доповнення через A_{ij}, одержимо:

$$\tilde{\Delta} = \Delta + x\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \,.$$

Цю формулу варто застосовувати, якщо зручно обчислюються алгебраїчні доповнення.

Проілюструємо можливість використання одержаної формули на прикладі.

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ . & . & . & \dots & . \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Якщо до кожного його елемента додати $-x$, одержимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - x & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{vmatrix} = (a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_n - x)\,.$$

З одержаної формули $\tilde{\Delta}=(a_1-x)(a_2-x)...(a_n-x)+x\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}$. Підкреслимо: A_{ij} - алгебраїчні доповнення більш простого за формою визначника Δ . Алгебраїчні доповнення його кожного недіагонального елемента дорівнюють нулю (перевірте!). Алгебраїчні ж доповнення кожного його діагонального елемента дорівнюють добутку всіх інших елементів головної діагоналі. Отже,

$$\tilde{\Delta}=(a_1-x)(a_2-x)...(a_n-x)+x\sum_{i=1}^{n}(a_1-x)...(a_{i-1}-x)(a_{i+1}-x)...(a_n-x) =$$

$$= (a_1-x)(a_2-x)...(a_n-x)+x\sum_{i=1}^{n}(a_1-x)...(a_i-x)...(a_n-x)\frac{1}{a_i-x} =$$

$$= x(a_1-x)(a_2-x)...(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\frac{1}{a_2-x}+...+\frac{1}{a_n-x}\right).$$

Приклад 6.8. Трьохдіагональні матриці.

$A\in M_n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & & . \\ . & . & & . & . & . & . \\ 0 & . & & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & . & . & . & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Знайдемо рекурентну формулу для визначників трьохдіагональної матриці. Такий визначник зручно позначити $\det\left(A(1,...,k+1)\right)$.

$$\det\left(A(1,...,k+1)\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & a_{k-1,k-2} & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} & 0 \\ 0 & ... & & 0 & a_{k,k-1} & a_{k,k} & a_{k,k+1} \\ 0 & . & . & . & 0 & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{k+1,k+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & a_{k-2,k-3} & a_{k-2,k-2} & a_{k-2,k-1} & 0 \\ 0 & ... & & 0 & a_{k-1,k-2} & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} \\ 0 & . & . & . & 0 & a_{k,k-1} & a_{k,k} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{k,k+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & a_{k-2,k-3} & a_{k-2,k-2} & a_{k-2,k-1} & 0 \\ 0 & ... & & 0 & a_{k-1,k-2} & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & a_{k+1,k} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{k+1,k+1} \det\left(A(1,...,k)\right) - a_{k+1,k}\, a_{k,k+1} \det\left(A(1,...,k-1)\right).$$

Приклад 6.9. Розглянемо матрицю

$$A=\begin{vmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & & & \dots & 0 \\ a_{n-2} & 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ a_{n-3} & 0 & 0 & 1 & & & 0 \\ . & . & . & . & . & \dots & . \\ a_1 & 0 & & & & 0 & 1 \\ a_0 & 0 & . & . & . & . & 0 \end{vmatrix}.$$

Розглянемо визначник $\chi(\lambda)=\det(\lambda I - A)$. Такі визначники будуть вивчатись у главі 5. $\det(\lambda I - A)$ називається характеристичним многочленом матриці *A*.

$$\chi(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda - a_{n-1} & -1 & 0 & & & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & \lambda & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -a_{n-3} & 0 & \lambda & -1 & & & 0 \\ . & . & . & . & . & \dots & . \\ -a_1 & 0 & & & & \lambda & -1 \\ -a_0 & 0 & . & . & . & . & \lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & & & 0 \\ . & . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & & & & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{n-1} & -1 & 0 & & & \dots & 0 \\ a_{n-2} & \lambda & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ a_{n-3} & 0 & \lambda & -1 & & & 0 \\ . & . & . & . & . & \dots & . \\ a_1 & 0 & & & & \lambda & -1 \\ a_0 & 0 & . & . & . & . & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$=\lambda^n - a_{n-1}\begin{pmatrix} \lambda & -1 & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & & & \dots & -1 \\ 0 & . & . & 0 & \lambda \end{pmatrix} + a_{n-2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & & & \dots & -1 \\ 0 & . & . & 0 & \lambda \end{pmatrix} -$$

$$-a_{n-3}\begin{vmatrix} -1 & 0 & & & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & \\ & & & & \dots & -1 \\ 0 & & & & & \lambda \end{vmatrix} - \ldots - (-1)^{n+1} a_0 \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & & & 0 \\ \lambda & -1 & \dots & & & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & & \dots & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & & & & \lambda & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \dots - a_1\lambda - a_0 .$$

В главі 5 ми побачимо, що визначник

$$\chi(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \dots - a_1\lambda - a_0$$

є так званим характеристичним многочленом матриці

Приклад 6.9. Нехай $a_{11} \neq 0$. Зіставимо визначнику

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Визначник Δ_{n-1} порядку n-1 з елементами

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}, \qquad (6.11)$$

$i, j = 2,...,n$, тобто,

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{2j} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ . & . & . & . & . \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{i1} & a_{i2} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{in} \end{vmatrix} \\ . & \dots & . & \dots & . \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{n1} & a_{nj} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix} \qquad (6.12)$$

Справедлива формула:

$\Delta_n = \dfrac{1}{(a_{11})^{n-2}} \Delta_{n-1}$	(6.14)

Доведення. Будемо перетворювати визначник Δ_n за методом Гауса, віднімаючи від кожного i – го рядка ($i = 2,...,n$) перший, помножений на $\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$. В результаті кожен j-й елемент $\left(j = 2,...,n \right)$ i –го рядка буде мати вигляд:

$$a_{ij}-\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}=\frac{1}{a_{11}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}.$$

Таких елементів в i–му рядку буде n-1, отже, за визначник можна винести $\frac{1}{(a_{11})^{n-1}}$. В першому стовпчику будуть знаходитись всі нулі крім першого елемента a_{11}. Розкриваючи визначник за першим стовпчиком, отримаємо $\frac{a_{11}}{(a_{11})^{n-1}}\Delta_{n-1}^{(1)}=\frac{1}{(a_{11})^{n-2}}\Delta_{n-1}^{(1)}$, що й треба було довести.

Матриці, що розбиті на чотири клітини, східчасті матриці та їхні визначники

Зараз розглянемо матриці, що розбиті на чотири клітини вигляду

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

та східчасті матриці:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix},\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Приклад 6.10. Довести формулу для визначника східчастої матриці:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{mn}\begin{vmatrix} B & A \\ 0 & C \end{vmatrix}.$$

Доведення. Кожен з m стовпчиків блочної матриці, що складається з A і C, треба переставити з n стовпчиками блочної матриці $B,0$. При цьому знак визначника зміниться mn разів, що й доводить формулу.

Застосовуючи цю формулу, можна одержати незалежне доведення теореми про визначник добутку двох матриць (будемо вважати, що їхній порядок дорівнює n).

Як було доведено,

$$\det\begin{pmatrix} B & -I \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det B \cdot \det A.$$

Очевидно, застосовуючи метод Гауса до цієї матриці, можна, множачи по черзі елементи матриці $-I$ на кожен елемент матриці A, утворити нульову матрицю у правому нижньому куті. При цьому елементи матриці B будуть множитись на відповідні елементи матриці A, в результаті чого прийдемо до матриці AB у лівому нижньому куті:

$$\begin{pmatrix} B & -I \\ AB & 0 \end{pmatrix}.$$

Як відомо, визначник матриці (блочної в даному випадку) від цього не змінюється:

$$\det A \cdot \det B = \det\begin{pmatrix} B & -I \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} B & -I \\ AB & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи формулу для визначника східчастої матриці, одержимо:

$$\det A \cdot \det B = \det\begin{pmatrix} B & -I \\ AB & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{n^2} \det\begin{pmatrix} -I & B \\ 0 & AB \end{pmatrix} = (-1)^{n^2}(-1)^n \det\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & AB \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{n(n+1)} \det AB = \det AB,$$

що й доводить формулу.

Приклад 6.10. Вважаючи, що матриці $A(m \times m), D(n \times n)$ невироджені, вивести формулу для обернених матриць $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & D \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Нехай

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} AX & AY \\ CX+DU & CY+DV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} AX = I, \\ AY = 0, \\ CX + DU = 0, \\ CY + DV = I. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = A^{-1}, \\ Y = 0, \\ CA^{-1} + DU = 0, \\ DV = I. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = -D^{-1}CA^{-1}, \\ V = D^{-1}. \end{cases}$$

Остаточно:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

Користуючись подібною технікою, читач самостійно знайде наступну обернену матрицю:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

Продовжуючи дослідження, будемо вважати, що матриця A невироджена. Знайдемо добуток:

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix}.$$

Скориставшись теоремою про визначник добутку та властивістю визначника східчастої матриці, одержимо:

$$\det\left(A^{-1}\right)\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\left(D - CA^{-1}B\right).$$

Звідси отримаємо значення шуканого визначнику:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det\left(D - CA^{-1}B\right).$$

Наслідок:

$$\det\begin{pmatrix} I & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(D - CB).$$

Якщо матриці A і D однакового порядку, то одержану формулу можна переписати у вигляді:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\left(AD - ACA^{-1}B\right).$$

Цікаво відзначити, що для комутуючих матриць A і C рівність набуває найбільш простого вигляду, який нагадує вираз визначника другого порядку з числовими елементами:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

Тепер поміняємо множники під визначником у одержаній раніше рівності:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det\left(D - CA^{-1}B\right) = \det\left(D - CA^{-1}B\right)\det(A) =$$

$$= \det\left(DA - CA^{-1}BA\right).$$

Для комутуючих матриць A і B рівність набуває вигляду:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - CB).$$

Задача. Для квадратної матриці A обчислити визначник

$$\det\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix}.$$

Маємо за доведеною формулою для комутуючих матриць:

$$\det\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} = \det\left(AA^3 - A^2A^2\right) = 0.$$

Ще дві властивості визначників блочних матриць, які нагадують аналогічні властивості скалярних матриць.

а). $\det\begin{pmatrix} BA_{11} & BA_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \det(B)\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

Доведення.

$$\begin{pmatrix} BA_{11} & BA_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

б). $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} + CA_{11} & A_{22} + CA_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$

Доведення.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} + CA_{11} & A_{22} + CA_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

В обох випадках треба застосувати теорему про визначник добутку матриць.

6). **Завдання для самостійної роботи:** [7], №№ 5, 8, 14, 20, 55-59, 112-117.

Практичне заняття 7. Ранг матриці та її мінори. Різні методи знаходження рангу.

Означення 7.1. Нехай викреслено k деяких рядків і k стовпчиків матриці (не обов'язково квадратної) і утворено матрицю, елементами якої є елементи даної матриці, що знаходяться на перетині цих рядків і стовпчиків. Визначник так побудованої нової матриці називається мінором даної матриці. Число k називається порядком мінора.

Означення 7.2. Стовпчиковим рангом матриці називається найбільша кількість лінійно незалежних її векторів-стовпчиків. Рядковим рангом матриці називається найбільша кількість лінійно незалежних її векторів-рядків.

Теорема 7.1. Стовпчиковий я рядковий ранги матриці співпадають і дорівнюють найбільшому з порядків її мінорів.

Означення 7.3. Дефектом квадратної матриці $A(n\times n)$ називається число $def(A)=n-rank(A)$.

Означення 7.4. Нехай M_k- мінор k- го порядку. Якщо до нього можна дописати ще один рядок і один стовпчик, то одержимо мінор $k+1$ - го порядку, який називається обвідним для даного мінору.

Нехай для даної матриці знайдено ненульовий мінор k- го порядку. Якщо не можна вказати мінорів більшого порядку (матриця має k рядків або стовпчиків), то її ранг дорівнює k. Якщо не існує обвідного ненульового мінора, то ранг дорівнює k. Якщо існує ненульовий обвідний мінор, то аналогічні дослідження слід продовжити.

Задача 7.1. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & -5 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

Вибираємо мінор другого порядку, елементи якого знаходяться на перетині рядків 1 і 2, а стовпчиків – теж 1 і 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Побудуємо обвідний мінор з елементами на перетині рядків 1, 2, 3 і стовпчиків 1, 2, 3:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Висновок: треба шукати інший обвідний мінор. Візьмемо такий, елементи якого лежать на перетині рядків 1, 2, 3 і стовпчиків 1, 2, 4:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 22.$$

Оскільки у матриці тільки 3 рядки, більших за розмірністю мінорів не існує, і ранг матриці дорівнює 3: $rank A = 3.$

Знайдемо ранг цієї ж матриці, застосовуючи елементарні перетворення з метою привести її до трапецієвидної форми.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & -5 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & 11 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 10 \end{pmatrix}.$$

Ранг дорівнює нулю, оскільки мінор третього порядку $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 22 \neq 0.$

Задача 7.2. В залежності від значень λ дослідити ранг матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & -13 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & -5 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, треба розглянути мінор, що утворений елементами визначника, які знаходяться на перетині першого, другого та третього рядків і першого, третього та четвертого стовпчиків:

$$\begin{vmatrix} 1 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = 65\lambda.$$

При $\lambda = 0 \quad rank(A) = 2$, при $\lambda \neq 0 \quad rank(A) = 3$.

Задача 7.3. Нехай матриця A, має m рядків і ранг r. Матриця A_s побудована з s рядків матриці A. Позначимо через r_s ранг матриці A_s. Довести нерівність:

$$r_s \geq r + s - m.$$

Доведення. Нехай вибрано s рядків матриці A, що утворюють, тобто, є послідовними рядками матриці A_s. Тоді серед решти $m - s$ рядків матриці A буде не більше, ніж $m - s$ лінійно незалежних.

Уявимо собі, що нерівність, яку треба довести, невірна, тобто,

$$r_s < r + s - m.$$

Отже, серед s вибраних рядків матриці A є $r_s < r + s - m$ лінійно незалежних рядків, серед решти $m - s$ кількість лінійно незалежних рядків менша або дорівнює $m - s$, звідки робимо висновок, що в матриці лінійно незалежних рядків може бути не більше, ніж $r_s + m - s$. Але за припущенням ця кількість строго менша, ніж $r_s + m - s < r + s - m + m - s = r$, а це суперечить тому, що ранг, тобто, максимальна кількість лінійно незалежних рядків дорівнює r. Тим самим нерівність $r_s \ge r+s-m$ доведено.

7). **Завдання для самостійної роботи:** [7], №№ 608-610, 612, 619.

Практичне заняття 8. Матриця переходу до нового базису

В багатьох задачах на вказану тему треба знаходити обернену матрицю. В главі 4 було показано, що для матриці, що є дільником одиниці елементарними перетвореннями, множачи на елементарні матриці тільки зліва (нагадаємо, що елементарні перетворення полягають в додаванні до рядка матриці лінійної комбінації інших рядків, а також в переставлянні рідків) , дану матрицю можна звести до діагонального вигляду: $LA = I$, тобто, $L = A^{-1}$ (для матриць елементарних перетворень обернені матриці існують). З питаннями існування оберненої матриці і правил її знаходження ми зустрінемось у лекціях 8 і 9. Зараз для розв'язання задач будемо використовувати алгоритм Гауса знаходження оберненої матриці. Помножимо зліва на матрицю L тотожність $AA^{-1} = I$. Одержимо $LAA^{-1} = LI$ і в результаті $A^{-1} = LI$. Це треба трактувати так: якщо з одиничною матрицею робити ті самі елементарні перетворення, що і з рядками матриці A, приводячи її до діагонального вигляду, одержимо з одиничної матриці обернену до A матрицю.

На практиці записують розширену (блочну) матрицю: зліва A, а справа – одиничну - $\left(A \mid I\right)$ - і роблять з обома однакові елементарні перетворення, приводячи A до одиничної. Тоді справа одержують A^{-1}.

Нехай треба розв'язати матричне рівняння $AX = B$ з невиродженою квадратною матрицею A. Звичайно, $X = A^{-1}B = LB.$ На цю рівність треба подивитись з такої точки зору: $LAX = A^{-1}B = LB,$ тобто, з лівою і правою частинами блочної матриці $\left(A \mid B\right)$ треба робити однакові елементарні перетворення, зводячи її ліву частину до одиничної матриці. В результаті отримаємо матрицю $X = LB = A^{-1}B$, розв'язок матричного рівняння.

Задача 8.1. Нехай є два базиси:

$$A=\left\{A_1=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}\right\}$$

і

$$B=\left\{B_1=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -2 & 3\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ -4 & -2\end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}, B_4=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 0 & 4\end{pmatrix}\right\}.$$

Знайти матрицю переходу $[T]_{A,B}$ від базису A до базису B у матричному просторі $M_2(\mathbb{R})$.

Розв'язання. Нехай

$E=\left\{E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, E_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ - канонічний базис. Тоді

$$\begin{aligned}
A_1 &= 0E_1+2E_2+E_3+2E_4,\\
A_2 &= 3E_1+2E_2+2E_3+E_4,\\
A_3 &= E_1+2E_2-E_3+0E_4,\\
A_4 &= -E_1-2E_2-2E_3-2E_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= -3E_1+4E_2-2E_3+3E_4,\\
B_2 &= -4E_1-2E_2-4E_3-2E_4,\\
B_3 &= -4E_1+2E_2-2E_3+2E_4,\\
B_4 &= -3E_1+4E_2+0E_3+4E_4.
\end{aligned}$$

Виходячи з цих розкладів, випишемо матриці переходу від канонічного базису до двох даних за умовою задачі:

$$[T]_{E,A}=\begin{pmatrix}0&3&1&-1\\2&2&2&-2\\1&2&-1&-2\\2&1&0&-2\end{pmatrix},[T]_{E,B}=\begin{pmatrix}-3&-4&-4&-3\\4&-2&2&4\\-2&-4&-2&0\\3&-2&2&4\end{pmatrix}.$$

Візьмемо два вектори $[x']_A,[x'']_B$ у базисах, відповідно, A,B такі, що після множення на них матриць, відповідно, $[T]_{E,A},[T]_{E,B}$ вони переходять у один і той же вектор $[x]_e:[x]_e=[T]_{E,A}[x']_A=[T]_{E,B}[x'']_B$. Звідси знайдемо матрицю переходу від базису A до базису B:

$$[T]_{A,B}=[T]_{E,A}^{-1}[T]_{E,B}=\begin{pmatrix}0&3&1&-1\\2&2&2&-2\\1&2&-1&-2\\2&1&0&-2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-3&-4&-4&-3\\4&-2&2&4\\-2&-4&-2&0\\3&-2&2&4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3&-3{,}5&-4&6\\2&-2&-2&3\\-1&1{,}5&1&-2\\4&-4{,}5&-5&7\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-3&-4&-4&-3\\4&-2&2&4\\-2&-4&-2&0\\3&-2&2&4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3&-1&1&1\\-1&-2&-2&-2\\1&1&1&1\\1&-1&-1&-2\end{pmatrix}.$$

Задача 8.2. 1). Перевірити, чи є система многочленів
$f_1(x)=4+4x+2x^2,\ f_2(x)=-3-2x^2,\ f_3(x)=-1-x+x^2$ базисом у просторі многочленів степені, не вище другої.

2). Знайти координати многочлена $h(x)=5-4x+4x^2.$ в цьому базисі.

Розв'язання. 1). Ранг матриці з коефіцієнтів розкладу даних многочленів за канонічним базисом дорівнює рангу даної системи як векторів вказаного простору многочленів. Маємо:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, вектори-рядки, що одержано після елементарних перетворень, лінійно незалежні, ранг цієї системи як і початкової дорівнює трьом, отже, дана за умовою система утворює базис в просторі многочленів степені не вище другої.

2). Матриця переходу від канонічного базису до даного в умові є

$$[T]_{ef} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Як відомо, $[h]_e = [T]_{ef}\,[h]_f \Rightarrow [h]_f = [T]_{ef}^{-1}\,[h]_e =$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ -6 & 6 & 0 \\ -8 & 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 8.3. Відомо координати векторів у канонічному базисі e:

$$\left[g^{(1)}\right]_e = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \left[g^{(2)}\right]_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \left[g^{(3)}\right]_e = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Також відомі координати цих векторів у деякому базисі $f = \{f_1, f_2, f_3\}$:

$$\left[g^{(1)}\right]_f=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\left[g^{(2)}\right]_f=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\left[g^{(3)}\right]_f=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Знайти координати векторів базису f у канонічному базисі.

Розв'язання. Позначимо через $\left[f^{(1)}\right]_e=\begin{pmatrix}f_{11}\\f_{21}\\f_{31}\end{pmatrix},\left[f^{(2)}\right]_e=\begin{pmatrix}f_{12}\\f_{22}\\f_{32}\end{pmatrix},\left[f^{(3)}\right]_e=\begin{pmatrix}f_{13}\\f_{23}\\f_{33}\end{pmatrix}$ шукані вектори базису f у канонічному базисі. Нехай

$$[F]_e=\left(\left[f^{(1)}\right]_e|\left[f^{(2)}\right]_e|\left[f^{(3)}\right]_e\right)\text{ -}$$

блочна матриця з цих векторів. Утворимо з векторів-стовпчиків $\left[g^{(1)}\right]_f,\left[g^{(2)}\right]_f,\left[g^{(3)}\right]_f$ блочну матрицю

$$[G]_f=\left(\left[g^{(1)}\right]_f|\left[g^{(2)}\right]_f|\left[g^{(3)}\right]_f\right)$$

і так само – з векторів-стовпчиків у канонічному базисі:

$$[G]_e=\left(\left[g^{(1)}\right]_e|\left[g^{(2)}\right]_e|\left[g^{(3)}\right]_e\right).$$

З вигляду $\left[g^{(1)}\right]_f,\left[g^{(2)}\right]_f,\left[g^{(3)}\right]_f$ у базисі f випливає:

$$\begin{aligned}
\left[g^{(1)}\right]_e&=\left[f^{(1)}\right]_e-\left[f^{(2)}\right]_e-\left[f^{(3)}\right]_e,\\
\left[g^{(2)}\right]_e&=-\left[f^{(1)}\right]_e+\left[f^{(2)}\right]_e+0\left[f^{(3)}\right]_e,\\
\left[g^{(3)}\right]_f&=-\left[f^{(1)}\right]_e-\left[f^{(2)}\right]_e+\left[f^{(3)}\right]_e.
\end{aligned}$$

У матричному вигляді це можна записати як

$$[G]_e=\left(\left(\begin{pmatrix}f_{11}\\f_{21}\\f_{31}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}f_{12}\\f_{22}\\f_{32}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}f_{13}\\f_{23}\\f_{33}\end{pmatrix}\right|-\begin{pmatrix}f_{11}\\f_{21}\\f_{31}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_{12}\\f_{22}\\f_{32}\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}f_{13}\\f_{23}\\f_{33}\end{pmatrix}\left|-\begin{pmatrix}f_{11}\\f_{21}\\f_{31}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}f_{12}\\f_{22}\\f_{32}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_{13}\\f_{23}\\f_{33}\end{pmatrix}\right)\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

згідно з (4.7) [1]: $[G]_e=[F]_f\ [G]_f$. Звідси

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}=[F]_f=[G]_e[G]_f^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $f^{(1)}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}^T$, $f^{(2)}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$, $f^{(3)}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T$.

Задача 8.4. Відомо координати двох систем базисних векторів $f=\{f_1, f_2, f_3\}, g=\{g_1, g_2, g_3\}$ у канонічному базисі:

$$\left[f^{(1)}\right]_e=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \left[f^{(2)}\right]_e=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \left[f^{(3)}\right]_e=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\left[g^{(1)}\right]_e=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \left[g^{(2)}\right]_e=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \left[g^{(3)}\right]_e=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти координати у канонічному базисі векторів двох нових базисів, $u=\{u_1, u_2, u_3\}, v=\{v_1, v_2, v_3\}$, якщо відомі матриці переходу

$$[T]_{fu}=[T]_{fg}=A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Утворимо дві блочні матриці з систем базисних векторів-стовпчиків:

$$[F]_{ef}=\left(\left[f^{(1)}\right]_e \| \left[f^{(2)}\right]_e \| \left[f^{(3)}\right]_e\right), [G]_{ef}=\left(\left[g^{(1)}\right]_e \| \left[g^{(2)}\right]_e \| \left[g^{(3)}\right]_e\right).$$

Нагадаємо, що саме такий вигляд має матриця оператора заміни базису при переході від $f=\{f_1, f_2, f_3\}$ до канонічного базису $e=\{e_1,e_2,e_3\}$. Отже

$$[F]_{ef}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}, [G]_{eg}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Нехай $[U]_{eu}, [V]_{ev}$ - матриці переходу від канонічного базису до, відповідно, $u=\{u_1,u_2,u_3\}$ і $v=\{v_1,v_2,v_3\}$. Вектори-стовпчики цих матриць і є стовпчики з координат в канонічному базисі нових базисних векторів $u=\{u_1,u_2,u_3\}$ і $v=\{v_1,v_2,v_3\}$.

Як вже зазначалось у попередній задачі 8.3 (випливало з інтерпретації множення матриць як блочної матриці лінійних комбінацій стовпчиків першої з коефіцієнтами, які є елементами другої, що беруться з відповідних рядків), мають місце співвідношення:

$$[U]_{eu}=[F]_{ef}[T]_{fu}=[F]_{ef}A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -2 & 2\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 1\\ -1 & -3 & 2\end{pmatrix},$$

$$[G]_{eg}=[V]_{ev}[T]_{vg}=[V]_{ev}A\Rightarrow[V]_{ev}=[G]_{eg}A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -2 & 2\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 3 & 0 & -2\\ -2 & 3 & -2\end{pmatrix}.$$

Шукані базисні вектори – вектори-стовпчики одержаних матриць.

Задача 8.5. Нехай $e\in\mathbb{R}^3$ - канонічний базис. Відомо координати двох систем базисних векторів $f=\{f_1, f_2, f_3\}, g=\{g_1, g_2, g_3\}$ у канонічному базисі:

$$\left[f^{(1)}\right]_e=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ -1\end{pmatrix}, \left[f^{(2)}\right]_e=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, \left[f^{(3)}\right]_e=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ -2\end{pmatrix},$$

$$\left[g^{(1)}\right]_e=\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}, \left[g^{(2)}\right]_e=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}, \left[g^{(3)}\right]_e=\begin{pmatrix}-2\\ -2\\ -1\end{pmatrix}.$$

1). Знайти матриці переходу від першого базису до другого і від другого до першого..

2). Відомо вектор-стовпчики з коефіцієнтів розкладу двох векторів за даними базисами: $[x]_f=\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ -2\end{pmatrix}, [y]_g=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$. Знайти їхні координати в інших базисах.

Розв’язання. З властивості транзитивності матриці оператору переходу до іншого базису маємо:

$$[T]_{ef}[T]_{fg}=[T]_{eg}\Rightarrow[T]_{fg}=[T]_{ef}^{-1}[T]_{eg}.$$

Отже,

$$[T]_{fg}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2 & -8 & 2\\ 2 & 12 & -8\\ 0 & 10 & -10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -2\\ -1 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

$$[T]_{gf}=[T]_{fg}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -2\\ -1 & -2 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$[x]_g=[T]_{gf}[x]_f=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ -2\end{pmatrix},$$

$$[y]_f=[T]_{fg}[y]_g=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -2\\ -1 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -3\\ -1\end{pmatrix}.$$

Задача 8.6. Нехай $e\in\mathbb{R}^3$ - канонічний базис,

$$f^{(1)}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\end{pmatrix}^T,\ f^{(2)}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T,\ f^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}-$$

також базис цього простору. Матриця оператора $[A]_{ee}$, записана у канонічному базисі, здійснює такі відображення векторів:

$$[A]_{ee}\left(\left[f^{(1)}\right]_e\middle|\left[f^{(2)}\right]_e\middle|\left[f^{(3)}\right]_e\right)\triangleq[A]_{ee}[F]_e=[A]_{ee}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -2\\ 3 & 1 & 0\\ -2 & 3 & -2\end{pmatrix}=\left(\left[b^{(1)}\right]_e\middle|\left[b^{(2)}\right]_e\middle|\left[b^{(3)}\right]_e\right)\triangleq[B]_e.$$

Звідси

$$[A]_{ee} = [B]_{ee}\,[F]_e^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 8.7. В базисі

$$f = \left\{ \left[f^{(1)} \right]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \left[f^{(2)} \right]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \left[f^{(3)} \right]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

лінійний оператор має матрицю

$$[A]_{f\,f} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задано також другий базис

$$g = \left\{ \left[g^{(1)} \right]_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \left[g^{(2)} \right]_e = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \left[g^{(3)} \right]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Знайти матрицю оператора переходу від базису f до g і матрицю $[A]_{gg}$ оператора A у базисі g.

Розв'язання. Як відомо,

$$[T]_{gf}=[T]_{eg}^{-1}[T]_{ef}=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&-3&-3\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&3&2\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&-6\\-3&-1&7\\4&1&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&3&2\\0&1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&2\\2&-2&-3\end{pmatrix}.$$

$$[T]_{fg}=[T]_{gf}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&2\\2&-2&-3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-1&-1\\0&2&1\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$[A]_{gg}=[T]_{eg}^{-1}[T]_{ef}[A]_{ff}\,[T]_{ef}^{-1}[T]_{eg}=\left([T]_{eg}^{-1}[T]_{ef}\right)[A]_{ff}\left([T]_{eg}^{-1}[T]_{ef}\right)^{-1}=$$

$$=[T]_{gf}[A]_{ff}\left([T]_{gf}\right)^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&2\\2&-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3&0\\2&2&0\\-3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-1&-1\\0&2&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&3&2\\1&-4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-1&-1\\0&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&-3&-3\\-3&0&2\end{pmatrix}.$$

8). **Завдання для самостійної роботи:** [8], №№ 5.6.6-5.6.9.

Практичне заняття 9. Матриці лінійного оператора в різних базисах

Задача 9.1. У просторі многочленів степені не вище третьої задано два оператори A і B, причому, $A: a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \to a_0 + a_1 t + a_2 t^2.$

Оператор B переводить многочлени

$$f_1 \triangleq 1 + t^3,\ f_2 \triangleq t + t^3,\ f_3 \triangleq t^2 + t^3,\ f_4 \triangleq 1 + t + t^2 + t^3$$

у многочлени

$$f_4 = 1 + t + t^2 + t^3,\ f_1 = 1 + t^3,\ f_2 = t + t^3,\ 0:$$

$$Bf_1 = f_4,$$
$$Bf_2 = f_1,$$
$$Bf_3 = f_2,$$
$$Bf_4 = 0.$$

У канонічному базисі $e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = t^2, e_4 = t^3$ записати матрицю оператора *AB*.

Розв'язання. Позначимо: $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\},\ f = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. З умови зразу випливає:

$$[B]_{ff} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю переходу від канонічного базису $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. до

$Te_k = f_k,\ k = 1, 2, 3, 4.$

Маємо:

$$f_1 = Te_1 = 1 + t^3 = e_1 + 0e_2 + 0e_3 + e_4,$$
$$f_2 = Te_2 = t + t^3 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + e_4,$$
$$f_3 = Te_3 = t^2 + t^3 = 0e_1 + 0e_2 + e_3 + e_4,$$
$$f_4 = Te_4 = 1 + t + t^2 + t^3 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4.$$

Звідси

$$[T]_{ef} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далі нам буде потрібна матриця, обернена до цієї одержаної матриці переходу. Знайдемо її методом Гауса:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right).$$

Остаточно

$$[T]_{ef}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&-1&1\\-1&-1&1&1\\1&1&1&-1\end{pmatrix}.$$

Як відомо, $[B]_{ee}=[T]_{ef}[B]_{ff}[T]_{ef}^{-1}$.

Маємо:

$$[B]_{ee}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0&2\\1&0&1&2\\1&0&0&1\\1&1&1&3\end{pmatrix}.$$

Відповідь:

$$[B]_{ee}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0&2\\1&0&1&2\\1&0&0&1\\1&1&1&3\end{pmatrix}.$$

Задача 9.2. Нехай $e=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ - канонічний базис. Квадратна матриця $\left[A\right]_{ee}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ оператора $A:E_3\to E_3$ переводить лінійно незалежні вектори

$$f=\left\{\left[f_1\right]_e=\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}, \left[f_2\right]_e=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}, \left[f_3\right]_e=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

у вектори

$$\left[g_1\right]_e=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \left[g_2\right]_e=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}, \left[g_3\right]_e=\begin{pmatrix}-2\\-3\\0\end{pmatrix}: \left[A\right]_{ee}\left[f_k\right]_e=\left[g_k\right]_e,\ k=1,2,3.$$

1). Знайти матрицю $\left[A\right]_{e\,e}$ у канонічному базисі $e=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

2). Розкласти вектори системи g за системою f.

3). Знайти матрицю оператора A у базисі f.

Розв'язання. 1). Нехай $\left[F\right]_{ee}\triangleq\left(f_1|f_2|f_3\right)=\begin{pmatrix}5&1&1\\3&-3&2\\1&-2&1\end{pmatrix}$ - блочна матриця, що утворена трьома векторами системи f (лінійно незалежної) і аналогічно $\left[G\right]_{ee}\triangleq\left(g_1|g_2|g_3\right)=\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\1&3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$. Зауважимо, що від системи g не вимагається лінійна незалежність. В даному випадку вона має ранг 2. Оскільки за умовою $Af_k=g_k,\ k=1,2,3$, то також

$$\left[A\right]_{ee}\left[F\right]_{ee}=\left[G\right]_{ee}.$$

Звідси $\left[A\right]_{ee}=\left[G\right]_{ee}\left[F\right]_{ee}^{-1}$. У нас поки що немає формули для знаходження оберненої матриці, тому для розв'язання матричного рівняння треба застосовувати метод Гауса. Але для цього треба, щоб невідома матриця у добутку знаходилась лівіше відомої. Тому застосуємо спряження до обох частин рівняння:

$$\left[F\right]_{ee}^{*}\left[A\right]_{ee}^{*}=\left[G\right]_{ee}^{*}.$$

За допомогою елементарних перетворень приведемо ліву частину блочної матриці до одиничної. Тоді в правій частині одержимо $\left[A\right]_{ee}^{*}$. Випускаючи кропіткі, але зрозумілі перетворення, одержимо:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & | & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 5 & -20 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7 & -24 & 38 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left[A\right]_{ee}=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ -20 & -24 & 0 \\ 33 & 38 & 0 \end{pmatrix}.$$

2). Нехай $\left[T\right]_{ef}$ - матриця оператора переходу $Te_k = f_k, k=1,2,3.$ Як відомо, його матриця діє у «зворотному» напрямку: $\left[x\right]_{e}=\left[T\right]_{ef}\left[x\right]_{f}\ \forall x\in E_3.$ Звідси $\left[T\right]_{ef}\left[G\right]_{ff}=\left[G\right]_{ee}\Rightarrow\left[G\right]_{ff}=\left[T\right]_{ef}^{-1}\left[G\right]_{ee}.$ Розкладемо вектори базису f за канонічним базисом e:

$$\begin{aligned} f_1 &= Te_1 = 5e_1+3e_2+e_3, \\ f_2 &= Te_2 = e_1-3e_2-2e_3, \\ f_1 &= Te_3 = e_1+2e_2+e_3. \end{aligned}$$

Звідси

$$[T]_{ef}=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 3 & -3 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

Тобто, $[T]_{ef}=[F]_{ee}$.

Читач самостійно знайде

$$[T]_{ef}^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 3 & -3 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ -1 & 4 & -7\\ -3 & 11 & -18\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$[G]_{ff}=[T]_{ef}^{-1}[G]_{ee}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ -1 & 4 & -7\\ -3 & 11 & -18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -1 & -2\\ 1 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -10 & 7\\ 6 & 13 & -10\\ 17 & 36 & -27\end{pmatrix}.$$

Зробимо очевидне, але важливе зауваження: з одержаного результату випливає, що, наприклад,

$$[g_1]_f=-5f_1+6f_2+17f_3=-5\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 1\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}1\\ -3\\ -2\end{pmatrix}+17\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-25+6+17\\ -15-18+34\\ -5-12+17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Радимо читачу зробити перевірку і для $[g_2]_f$, $[g_3]_f$.

Але це ж означає, що

$$\begin{aligned}g_1&=Af_1=-5f_1+6f_2+17f_3,\\ g_2&=Af_2=-10f_1+13f_2+36f_3,\\ g_1&=Af_3=7f_1-10f_2-27f_3,\end{aligned}$$

отже, $\left[A\right]_{ff}=\left[G\right]_{ff}=\begin{pmatrix}-5 & -10 & 7\\ 6 & 13 & -10\\ 17 & 36 & -27\end{pmatrix}.$

Цим самим дано відповідь на питання 3).

З іншого боку, як відомо,

$$\left[A\right]_{ff}=\left[T\right]_{ef}^{-1}\left[A\right]_{ee}\left[T\right]_{ef}=\left[T\right]_{ef}^{-1}\left[G\right]_{ee}\left[T\right]_{ef}^{-1}\left[T\right]_{ef}=\left[T\right]_{ef}^{-1}\left[G\right]_{ee},$$

Що співпадає із знайденим раніше результатом.

Задача 9.3. Нехай $e=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ - канонічний базис. Відомо три вектори з $\mathbb{R}^3$: адратна

9). **Завдання для самостійної роботи:** [7], №№ 1452-1453, [8], 5.6.19, 5.6.20.

Практичне заняття 10. Лінійні алгебраїчні системи рівнянь

Питання існування оберненої матриці, та методи її знаходження. Матричні рівняння.

Теоретичні відомості

Означення 10.1. Система рівнянь вигляду

$a_{11}x_1+a_{11}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,$ $a_{21}x_1+a_{21}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,$ $\ldots$ $a_{n1}x_1+a_{n1}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n$	(10.1)

називається алгебраїчною лінійною неоднорідною. У випадку $b_i=0,\ i=1,\ldots,n$ вона називається однорідною. Якщо $m=n$, система називається квадратною. Якщо ввести позначення

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{23} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n, b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m, \qquad (10.2)$$

цю систему можна записати у більш компактному матрично-векторному вигляді:

$$Ax=b. \qquad (10.3)$$

Однорідна система має вигляд

$$Ax=0.$$

Очевидно, однорідна система завжди має розв’язки: принаймні їй задовольняє нуль-вектор: $A0=0$. При деяких умовах вона може мати неєдиний розв’язок і тоді такі розв’язки утворюють підпростір $Ker(A)$ простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 10.2. Система називається сумісною, якщо вона має розв’язки.

Означення 10.3. Розширеною матрицею системи алгебраїчних рівнянь називається матриця, що складається з векторів-стовпчиків матриці лівої частини і стовпчика з правої частини системи.

Основним фактом цієї теорії є

Теорема 10.1 (Кронекера-Капеллі). Для того, щоб лінійна система була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранги її основної і розширеної матриць співпадали.

Теорема 10.2. Лінійна однорідна система має неєдиний розв’язок тоді і тільки тоді, коли ранг її матриці менше ніж розмірність вектора невідомих. У разі квадратної системи для цього необхідно і достатньо, щоб визначник матриці системи дорівнював нулю.

Теорема 10.5 (Крамера). Лінійна квадратна система (10.1) має єдиний розв’язок тоді і тільки тоді, коли ii визначник не дорівнює нулю.

Наслідок: лінійна квадратна однорідна система має єдиний, нульовий розв’язок тоді і тільки тоді, коли її визначник не дорівнює нулю.

Задача 10.1. Методом Гауса розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь $Ax=b, A(3\times5), x=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^5, b\in\mathbb{R}^3$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

Тепер перенесемо члени рівняння, що містять x_1, x_3 (в першому і третьому стовпчиках) в праву частину:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -x_1 - x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\frac{2}{3}x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 - x_3; \\ x_4 = 1; \\ x_5 = 1-\frac{2}{3}x_3. \end{cases}$$

Звідси $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 - x_3 \\ x_3 \\ 1 \\ 1-\frac{2}{3}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$

Читач повинен був впевнитись, що умову теореми Кронекера-Капеллі виконано: рангі основної і розширеної матриць співпадають і дорівнюють 3. Як бачимо, розв'язок системи є сумою частинного розв'язку неоднорідної системи $g=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$ і загального розв'язку однорідної системи – лінійної комбінації двох векторів

$$f_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T,\ f_2=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}^T,$$

що становлять фундаментальну систему її розв'язків і яка, в свою чергу, утворює базис $Ker(A); def(A)=\dim\big(Ker(A)\big)=n-rank(A)=5-3=2.$

Задача 10.2. Методом Крамера розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Обчислимо визначник системи, розкриваючи її основну матрицю за першим стовпчиком:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}2\begin{vmatrix}3 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}4=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 2\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+1}8\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{4+1}3\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 4\end{vmatrix}=2\cdot 2-4\cdot 1+8\cdot 1-3\cdot 2=2.$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}4&2&-1&1\\6&3&-1&2\\12&5&-3&4\\6&3&-2&2\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}4\begin{vmatrix}3&-1&2\\5&-3&4\\3&-2&2\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}6\begin{vmatrix}2&-1&1\\5&-3&4\\3&-2&2\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+1}12\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&-1&2\\3&-2&2\end{vmatrix}+(-1)^{4+1}6\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&-1&2\\5&-3&4\end{vmatrix}=4\cdot2-6\cdot1+12\cdot1-6\cdot2=2.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&2&4&1\\4&3&6&2\\8&5&12&4\\3&3&6&2\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}2\begin{vmatrix}3&6&2\\5&12&4\\3&6&2\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}4\begin{vmatrix}2&4&1\\5&12&4\\3&6&2\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+1}8\begin{vmatrix}2&4&1\\3&6&2\\3&6&2\end{vmatrix}+(-1)^{4+1}3\begin{vmatrix}2&4&1\\3&6&2\\5&12&4\end{vmatrix}=2\cdot0-4\cdot2+8\cdot0-3\cdot(-2)=-2.$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}2&2&-1&4\\4&3&-1&6\\8&5&-3&12\\3&3&-2&6\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}2\begin{vmatrix}3&-1&6\\5&-3&12\\3&-2&2\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}4\begin{vmatrix}2&-1&4\\5&-3&12\\3&-2&6\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+1}8\begin{vmatrix}2&-1&4\\3&-1&6\\3&-2&6\end{vmatrix}+(-1)^{4+1}3\begin{vmatrix}2&-1&4\\3&-1&6\\5&-3&12\end{vmatrix}=2\cdot6-4\cdot2+8\cdot0-3\cdot2=-2.$$

Звідси $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{2}{2}=1, x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{2}{2}=1, x_3=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{-2}{2}=-1, x_4=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{-2}{2}=-1.$

Задача 10.3. Знайшовши обернену матрицю, розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь $Ax=b$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&7&3&12\\3&9&4&16\\1&5&3&9\end{array}\right).$$

Читач самостійно перевірить, що визначник головної матриці системи дорівнює трьом: $\Delta = -3$. Нагадаємо, що матриця, обернена до квадратичної матриці, існує тоді і тільки тоді, коли її визначник не дорівнює нулю.

Знаходячи алгебраїчне доповнення до кожного елементу a_{ij} головної матриці системи, що знаходиться на місці (i, j), запишемо його на місце (j, i). Нехай M_{ji} - мінор, що утворився після викреслювання $i-$го рядку і $j-$го стовпчику головної матриці. Алгебраїчне доповнення D_{ji} цього елементу матриці a_{ij} знаходиться за формулою $D_{ji} = (-1)^{i+j} M_{ji}$.. Матриця D, що утворена з таких алгебраїчних доповнень, називається приєднаною до даної. Приєднана матриця, поділена на свій визначник, є оберненою до даної матриці.

Знайдемо приєднану матрицю до головної матриці системи:

$$D = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв’язок системи запишеться у вигляді

$$x = A^{-1}b = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 10.4. Методом Гауса знайти обернену матрицю до невиродженої матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Утворимо блочну матрицю з даної матриці і одиничної і будемо методом Гауса приводити ліву матрицю до одиничної, здійснюючи ті самі елементарні перетворення до правої, одиничної матриці:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1{,}25 & 0{,}75 & -0{,}25 & 0 \\ 2 & -5 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

Від 1-го рядку віднімаємо 2-у, помножену на 2, до 3-го рядку додаємо 2-й рядок, помножений на 5:

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & -1{,}25 & 0{,}75 & -0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{array}\right) \to$$

До першого рядку додаємо 3-й рядок, помножений на 0,5; до 2-го рядку додаємо 3-й рядок, помножений на 1,25:

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -8 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Матриця справа – це і є A^{-1}.

Задача 10.5. Методом Гауса розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 0 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Перше елементарне перетворення полягає в перестановці першого і другого рядків матриць: так легше потів здійснювати два наступні елементарні перетворення блочної матриці – додавання до другого і третього рядків першого, помноженого, відповідно, на -3 і -2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

До одержаної більш зручної системи застосовуємо метод Гауса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & | & 10 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & | & 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & | & 7 & 11 & 7 \\ 0 & -5 & 6 & | & 8 & 13 & 8 \end{pmatrix} \to$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 20 & -25 & | & -35 & -55 & -35 \\ 0 & -20 & 24 & | & 32 & 52 & 32 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 20 & -25 & | & -35 & -55 & -35 \\ 0 & 0 & -1 & | & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&10&6&9\\0&4&-5&-7&-11&-7\\0&0&1&3&3&3\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&10&6&9\\0&4&0&8&4&8\\0&0&1&3&3&3\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&6&4&5\\0&1&0&2&1&2\\0&0&1&3&3&3\end{array}\right).$$

Відповідь: $X=\begin{pmatrix}6&4&5\\2&1&2\\3&3&3\end{pmatrix}.$

За**дача 10.6.** Методом Гауса розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix}1&3&0\\3&-1&2\\4&-3&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}7&5&7\\3&9&7\\1&11&7\end{pmatrix}.$$

Здійснюємо елементарні перетворення блочної матриці, ліва з яких – головна матриця системи, права – її права частина.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&7&5&7\\3&-1&2&3&9&7\\4&-3&3&1&11&7\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&7&5&7\\0&-10&2&-18&-6&-14\\0&-15&3&-27&-9&-21\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&7&5&7\\0&5&-1&9&3&7\\0&5&1&-9&-3&-7\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&7&5&7\\0&5&-1&9&3&7\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&7&5&7\\0&1&-\frac{1}{5}&\frac{9}{5}&\frac{3}{5}&\frac{7}{5}\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&7&5&7\\0&5&-1&9&3&7\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Одержали три системи:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7, \\ 5x_2 - x_3 = 9, \end{cases} \quad \Big| \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5, \\ 5x_2 - x_3 = 3, \end{cases} \quad \Big| \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7, \\ 5x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 3x_2, \\ x_3 = 5x_2 - 9, \end{cases} \quad \Big| \quad \begin{cases} x_1 = 5 - 3x_2, \\ x_3 = 5x_2 - 3, \end{cases} \quad \Big| \quad \begin{cases} x_1 = 7 - 3x_2, \\ x_3 = 5x_2 - 7. \end{cases}$$

Треба зауважити, що хоча в різних системах невідомі позначено однаковими літерами, насправді, вони незалежні між собою, і для відповіді правильніше буде у розв'язках різних систем вживати різні вільні параметри.

Відповідь:

$$X = \begin{pmatrix} 7 - 3c_1 & 5 - 3c_2 & 7 - 3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 5c_1 - 9 & 5c_2 - 3 & 5c_3 - 7 \end{pmatrix}.$$

За**дача 10.7.** Методом Гауса розв'язати матричне рівняння $AXB = C$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

Введемо позначення $Y = XB$. Тоді рівняння запишеться у вигляді $AY = C$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо його методом Гауса:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 2 & 0 & -2 \\ 4 & -5 & 2 & | & 18 & 12 & 9 \\ 5 & -7 & 3 & | & 23 & 15 & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 14 & 12 & 13 \\ -10 & 14 & -6 & | & -46 & -30 & -22 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 14 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & | & 22 & 18 & 19 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & | & -20 & -18 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & | & 14 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & | & 22 & 18 & 19 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 22 & 18 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & | & 14 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & | & 22 & 18 & 19 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 11 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & | & 14 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & | & 22 & 18 & 19 \end{pmatrix}.$$

В результаті одержали рівняння

$$X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 9 \\ 14 & 12 & 13 \\ 22 & 18 & 19 \end{pmatrix}.$$

Для більш зручного процесу розв'язання, а саме, для того, щоб робити елементарні перетворення рядків, а не стовпчиків, транспонуємо обидві частини рівняння:

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} X^* = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 22 \\ 9 & 12 & 18 \\ 9 & 13 & 19 \end{pmatrix}.$$

Для розв'язання використовуємо відому схему Гауса:

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 & | & 11 & 14 & 22 \\ 7 & 1 & 1 & | & 9 & 12 & 18 \\ 6 & 2 & 1 & | & 9 & 13 & 19 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 63 & 7 & 7 & | & 77 & 98 & 154 \\ -63 & -9 & -9 & | & -81 & -108 & -162 \\ -18 & -6 & -3 & | & -27 & -39 & -57 \end{pmatrix} \to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}18 & 2 & 2 & 22 & 28 & 44\\ 0 & -2 & -2 & -4 & -10 & -8\\ -18 & -6 & -3 & -27 & -39 & -57\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}9 & 1 & 1 & 11 & 14 & 22\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & 4\\ 0 & -4 & -1 & -5 & -11 & -13\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}9 & 0 & 0 & 9 & 9 & 18\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 9 & 3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1\end{array}\right).$$

Отже, одержали матрицю, транспоновану до шуканої:

$$X^{*}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Після її транспонування одержимо відповідь:

$$X=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

За**дача 10.7.** Чи буде кожен з векторів $b_1=\begin{pmatrix}-1 & -6 & -3\end{pmatrix}^T, b_2=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\end{pmatrix}^T$ лінійною комбінацією векторів

$$a_1=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\end{pmatrix}^T, a_2=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\end{pmatrix}^T, a_1=\begin{pmatrix}-6 & 4 & -3\end{pmatrix}^T ?$$

Розв’язання. Для відповіді на поставлені питання досить дослідити на сумісність дві лінійні системи.

1).

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 & | & -1 \\ 2 & -2 & 4 & | & -6 \\ 3 & 0 & -3 & | & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 & | & -1 \\ 2 & -2 & 4 & | & -6 \\ 0 & -1 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 6 & 2 & -12 & | & -2 \\ -6 & 6 & -12 & | & 18 \\ 0 & -1 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 2 & -12 & | & -2 \\ 0 & 8 & -24 & | & 16 \\ 0 & -1 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 6 & 2 & -12 & | & -2 \\ 0 & 1 & -3 & | & 2 \\ 0 & -1 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 & | & -1 \\ 0 & 1 & -3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 1 & -3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранги основної і розширеної матриць дорівнюють двом, отже, за теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна, і в результаті маємо систему:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -5, \\ x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R}, \\ x_2 = 3x_1 + 5, \\ x_3 = x_1 + 1. \end{cases}$$

З цього випливає. Що вектор b_1 можна неоднозначно виразити як лінійну комбінацію векторів a_1, a_2 і a_3:

$$b_1 = x_1 a_1 + \left(3x_1 + 5\right) a_2 + \left(x_1 + 1\right) a_3.$$

При $x_1 = 1$ його можна виразити навіть через два вектори системи:

$$b_1 = -a_1 + 2a_2.$$

2).

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 & | & 1 \\ 2 & -2 & 4 & | & -4 \\ 3 & 0 & -3 & | & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 & | & -1 \\ 2 & -2 & 4 & | & -4 \\ 0 & -1 & 3 & | & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 6 & 2 & -12 & | & -2 \\ -6 & 6 & -12 & | & 12 \\ 0 & -1 & 3 & | & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 & | & -1 \\ 0 & 8 & -24 & | & 10 \\ 0 & -1 & 3 & | & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 & | & -1 \\ 0 & 1 & -3 & | & 4 \\ 0 & 4 & -12 & | & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 & | & -1 \\ 0 & 1 & -3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & -9 \end{pmatrix}.$$

Ранг основної матриці дорівнює 2, ранг розширеної матриці дорівнює 3, тому система несумісна, і вектор b_2 не можна виразити як лінійну комбінацію векторів даної за умовою задачі системи.

За**дача 10.8.** Нехай є матриця $A(n \times n)$, елементи якої, що знаходяться поза головною діагоналлю, задовольняють умову:

$$|a_{ij}| < \frac{|a_{ii}|}{n-1}, i \neq j, i, j = 1, \ldots, n.$$

Довести, що $\det A \neq 0.$

Доведення. Нехай це не так. Тоді однорідна система $Ax = 0$ має нетривіальні розв'язки. Нехай $x_0 = \left(x_{01}, \ldots, x_{0n}\right)^T$ - один з них і x_{0k} - компонента, що має найбільший модуль. Тоді з відповідного рівняння одержимо:

$$a_{kk}x_{0k} = -\sum_{j \neq k} a_{kj}x_{0j} \Rightarrow |a_{kk}||x_{0k}| = \left|\sum_{j \neq k} a_{kj}x_{0j}\right| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_{0j}| < |a_{kk}||x_{0k}| \sum_{j \neq k} \frac{1}{n-1} = |a_{kk}||x_{0k}|..$$

Одержане протиріччя доводить твердження.

10). **Завдання для самостійної роботи:** [7], №№ 554-566, 567-569, 590, 844-849.

Практичне заняття 11. Способи визначення лінійного підпростору. Ядро і образ оператора. Пряма сума підпросторів. Сума та перетин підпросторів.

Теоретичні відомості

Нехай G_k - підпростір лінійного простору G_n (нижні індекси вказують на їхні розмірності, $k<n$). Нехай $g^{(k)}=\{g_1,...,g_k\}\subset G_k$ - базис підпростору, а $g^{(n)}=\{g_1,...,g_k,g_{k+1},...,g_n\}\subset G_n$ - базис простору. Підпростір можна задати як сукупність усіх лінійних комбінацій його базисних векторів:

$G_k=\{\alpha_1 g_1+...+\alpha_k g_k,\alpha_1,...,\alpha_k\in K\}.$	(11.1)

З іншого боку, ми бачили, що фундаментальна система розв'язків лінійної однорідної системи рівнянь $Ax=0$ утворює базис підпростору цих розв'язків, тобто, ядра матриці - $Ker(A)$. Виникає задача: як, знаючи базис підпростору, знайти систему лінійних однорідних рівнянь, фундаментальна система розв'язків якої співпадала б з відомим базисом даного підпростору. Зразу треба зауважити, що така система може бути знайдена неєдиним чином, оскільки базисів у підпросторі існує безліч. Таке питання буде однією з тем цього заняття.

Нехай $g_i=\begin{pmatrix} g_{1i} \\ \vdots \\ g_{ni}\end{pmatrix}$. **Зауваження.** Як вже вказувалось, вектори з G_k і вектори-стовпчики – це елементи різних просторів, тому між ними не можна ставити знак рівності, але в даному випадку для зручності будемо використовувати знак рівності, розуміючи, що, насправді, він означає ототожнення.

Нехай $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\in G_k$. Тоді його можна розкласти за базисом підпростору:

$$x=\alpha_1 g_1+\ldots+\alpha_k g_k \Rightarrow \alpha_1\begin{pmatrix} g_{11} \\ \vdots \\ g_{n1}\end{pmatrix}+\ldots+\alpha_k\begin{pmatrix} g_{1k} \\ \vdots \\ g_{nk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}.$$

Звідси маємо лінійну систему відносно коефіцієнтів розкладу $\alpha_1,...,\alpha_n$:

$$\begin{cases} g_{11}\alpha_1+\ldots+g_{1k}\alpha_k=x_1, \\ \ldots \\ g_{n1}\alpha_1+\ldots+g_{nk}\alpha_k=x_n. \end{cases}$$

Будемо досліджувати її, застосовуючи метод Гауса, записавши спочатку розширену матрицю системи:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1k} & | & x_1 \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2k} & | & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nk} & | & x_n \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \ldots & \tilde{g}_{1k} & | & \sum_{j=1}^{n} c_{1j}x_j \\ 0 & \tilde{g}_{22} & \ldots & \tilde{g}_{2k} & | & \sum_{j=1}^{n} c_{2j}x_j \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & | & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \tilde{g}_{kk} & | & \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & | & \sum_{j=1}^{n} c_{k+1,j}x_j \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & | & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & | & \sum_{j=1}^{n} c_{nj}x_j \end{pmatrix}$$

Тепер за теоремою Кронекера-Капеллі для сумісності одержаної системи необхідно і достатньо, щоб координати вектора x задовольняли б лінійній системі

$\begin{cases} c_{k+1,1}x_1 + c_{k+1,2}x_2 + \ldots + c_{k+1,n}x_n = 0, \\ \ldots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n = 0. \end{cases}$	(11.2)

За**дача 11.1.** Знайти ядро і образ лінійного оператора $A\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, що діє за правилом:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + x_4 + x_5 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження ядра оператора треба розв’язати лінійну однорідну систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Застосуємо метод <u>Гауса:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Звідси $x_2 = x_5 = 0, x_4 = -x_1 + x_3$.

Отже, $Ker(A) \ni x = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\ 0\\ x_3\\ -x_1 + x_3\\ 0\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ -1\\ 0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$

Базис ядра лінійного оператора складається з двох векторів

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

$\dim\left(Ker(A)\right) = 2.$

Базис образа лінійного оператора складається з максимальної лінійно незалежної системи векторів-стовпчиків матриці, тобто, бази цієї системи. Розмірність образа дорівнює рангу системи стовпчиків, тобто, рангу матриці. Запишемо вектори-стовпчики рядками нової матриці і дослідимо її:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ -1 & -2 & -1 & -3\\ 1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix} \to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Звідси видно, що базис образа утворюють перший, другий та п’ятий вектори-стовпчики матриці, а $\dim\left(\mathrm{Im}(A)\right)=3,$ що і підтверджується відомою формулою.

За**дача 11.2.** Описати лінійний підпростір лінійного простору $\mathbb{R}^4$, що породжено системою векторів $f=\{f_1, f_2, f_3\}$:

$f_1=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1 & -2\end{pmatrix}^T,$

$f_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & -3 & 1\end{pmatrix}^T,$

$f_3=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2 & -3\end{pmatrix}^T.$

Розв’язання. По-перше, знайдемо ранг цієї системи:

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & -1 & -2\\ 0 & 1 & -3 & 1\\ 1 & -4 & 2 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -3 & -1 & -2\\ 0 & 1 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -3 & -1 & -2\\ 0 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ранг системи дорівнює 2, базою є, наприклад, перший і другий вектор даної системи векторів.

Підпростір $F\subset\mathbb{R}^4$, натягнутий на ці базисні вектори, є множина їхніх лінійних комбінацій:

$$F=\{\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2,\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}=$$
$$=\left\{\alpha_1\begin{pmatrix}1 & -3 & -1 & -2\end{pmatrix}^T+\alpha_2\begin{pmatrix}0 & 1 & -3 & 1\end{pmatrix}^T,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\right\}=$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1, & -3\alpha_1+\alpha_2 & -\alpha_1-3\alpha_2, & -2\alpha_1+\alpha_2\end{pmatrix}^T,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\right\}.$$

Нехай $x=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T \in F.$ Як відомо, підпростір таких векторів можна описати однорідною системою лінійних рівнянь, яким задовольняють їхні координати. Знайдемо цю систему. Знайдені базисні вектори f_1, f_2 і вектор x лінійно залежні, тому цей вектор можна подати як лінійну комбінацію базисних. Це, в свою чергу, означає сумісність лінійної системи:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x_1 \\ -3 & 1 & | & x_2 \\ -1 & -3 & | & x_3 \\ -2 & 1 & | & x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x_1 \\ 0 & 1 & | & 3x_1+x_2 \\ 0 & -3 & | & x_1+x_3 \\ 0 & 1 & | & 2x_1+x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x_1 \\ 0 & 1 & | & 3x_1+x_2 \\ 0 & 0 & | & 10x_1+3x_2+x_3 \\ 0 & 0 & | & -x_1-x_2+x_4 \end{pmatrix}.$$

Для сумісності цієї системи рівнянь необхідно і достатньо, щоб мали місце рівності:

$$\begin{cases} 10x_1+3x_2+x_3=0, \\ -x_1-x_2+x_4=0. \end{cases}$$

Це і є шукана система лінійних рівнянь.

За**дача 11.3.** Розглянемо підпростір векторів $F_1 \subset \mathbb{R}^4$ попередньої задачі і підпростір векторів $F_2 \subset \mathbb{R}^4$, координати яких задовольняють системі

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_4=0, \\ 2x_2+x_3+x_4=0. \end{cases}$$

Знайти їхні перетин і суму $F_1 \cap F_2,\ F_1+F_2,$ причому, описати підпростори за допомогою лінійних комбінацій базисних векторів і за допомогою систем рівнянь.

Розв'язання. Для знаходження перетину підпросторів треба знайти фундаментальну систему розв'язків системи, яка є об'єднанням системи, одержаної у попередній задачі, і системі з умови даної задачі:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 10 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 14 & -2 & -20 \\ 0 & -14 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 14 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси $x_1 = 0, x_2 = x_4, x_3 = -3x_4$. Отже, для кожного $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T$ маємо:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & x_4 & -3x_4 & x_4 \end{pmatrix}^T = x_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Звідси розмірність перетину підпросторів дорівнює 1, базисний вектор, наприклад, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Опишемо тепер перетин системою лінійних рівнянь, яким задовольняють координати його векторів. Застосуємо метод Гауса:

$$\begin{pmatrix} 0 & | & x_1 \\ 1 & | & x_2 \\ -3 & | & x_3 \\ 1 & | & x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & | & x_1 \\ 1 & | & x_2 \\ 0 & | & 3x_2 + x_3 \\ 0 & | & -x_2 + x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо суму підпросторів. Спочатку знайдемо фундаментальну систему розв’язків даної за умовою системи:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_4, \\ x_3 = -2x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Звідси всі розв’язки системи мають вигляд:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_2 - x_4, & x_2, & -2x_2 - x_4, & x_4 \end{pmatrix}^T =$$

$$= x_2 \begin{pmatrix} 1, & 1, & -2, & 0 \end{pmatrix}^T + x_4 \begin{pmatrix} -1, & 0, & -1, & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Це означає, що вектори $g_1 = \begin{pmatrix} 1, & 1, & -2, & 0 \end{pmatrix}^T$, $g_2 = \begin{pmatrix} -1, & 0, & -1, & 1 \end{pmatrix}^T$ утворюють базис другого підпростору.

Для опису суми підпросторів знайдемо ранг матриці, що утворена з координат базисних векторів першого і другого підпросторів:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -11 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, розмірність суми підпросторів дорівнює 3, а базис становлять, наприклад, вектори

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}^T, \; f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T, g_1 = \begin{pmatrix} 1, & 1, & -2, & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Тоді

$$F_1 + F_2 = \left\{ \left(\alpha_1 + \alpha_3, -3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 - 3\alpha_2 - 2\alpha_3, -2\alpha_1 + \alpha_2 \right), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Опишемо тепер суму підпросторів лінійною системою:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ -3 & 1 & 1 & x_2 \\ -1 & -3 & -2 & x_3 \\ -2 & 1 & 0 & x_4 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 4 & 3x_1 + x_2 \\ 0 & -3 & -1 & x_1 + x_3 \\ 0 & 1 & 2 & 2x_1 + x_4 \end{array} \right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 4 & 3x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 22 & 20x_1 + 6x_2 + 2x_3 \\ 0 & 0 & -22 & -11x_1 - 11x_2 + 11x_4 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 4 & 3x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 11 & 10x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 9x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 11x_4 \end{array} \right).$$

Звідси одержуємо лінійну систему, якій задовольняють координати векторів з суми підпросторів:

$$9x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0.$$

11). **Завдання для самостійної роботи:** [7], №№ 1312, 1313, 1317, 1318.

Практичне заняття 12. Різні типи рівняння прямої на площині

Рівняння прямої

Задача 1.12. Відомі рівняння двох сторін паралелограма: $2x + y = 1$, $8x + 3y = -1$ і рівняння однієї діагоналі: $3x + 2y = -3$. Знайти рівняння інших сторін, другої діагоналі та координати вершин.

Розв'язання. Знайдемо одну з вершин – точку A перетину даних прямих, на яких лежать сторони паралелограма:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ 8 & 3 & | & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & -4 \\ 0 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо координати однієї з вершин: $A(-2,5)$.

Перевіркою впевнюємось, що вона не лежить на даній діагоналі паралелограма.

Знайдемо дві інші вершини як точки перетину сторін з діагоналлю:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ 3 & 2 & | & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 3 & | & 3 \\ -6 & -4 & | & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & | & 9 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & | & 10 \\ 0 & 1 & | & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & | & -9 \end{pmatrix}.$$

Друга вершина: $B(5,-9)$.

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & | & -1 \\ 3 & 2 & | & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 24 & 9 & | & -3 \\ -24 & -16 & | & 24 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 & 3 & | & 1 \\ 0 & -7 & | & 21 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 8 & 3 & | & -1 \\ 0 & 1 & | & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 & 0 & | & 8 \\ 0 & 1 & | & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & -3 \end{pmatrix}.$$

Третя вершина: $D(1,-3)$.

Рівняння сторони BC запишемо, знаючи, що вона проходить через точку $B(5,-9)$ паралельно стороні з рівнянням $8x+3y=-1$, тобто, її вектор нормалі має вигляд: $(8,3)^T$: $8(x-5)+3(x+9)=0 \Leftrightarrow 8x+3y=13$.

Рівняння сторони CD запишемо, знаючи, що вона проходить через точку $D(1,-3)$ паралельно стороні з рівнянням $2x+y=1$, , тобто, її вектор нормалі має вигляд: $(2,1)^T$: $2(x-1)+y+3=0 \Leftrightarrow 2x+y=-1$.

Знайдемо вершину C:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & -1 \\ 8 & 3 & | & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & -1 \\ 0 & -1 & | & 17 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & 16 \\ 0 & 1 & | & -17 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 8 \\ 0 & 1 & | & -17 \end{pmatrix}.$$

Вершина: $C(8,-17)$.

Задача 2.12. Відомі одна вершина $B(2;-1)$ трикутника ABC і рівняння висоти і бісектриси, що виходять з однієї вершини A: висота: $3x-4y=-27$, бісектриса: $x+2y=6$. Знайти рівняння інших сторін трикутника.

Розв’язання. Знайдемо координати вершини A , як точку перетину висоти і бісектриси:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 6 \\ 3 & -4 & | & -27 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & -10 & | & -45 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 1 & | & 4,5 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & | & 4,5 \end{pmatrix} \Rightarrow A(-3;4,5).$$

Запишемо рівняння сторони AB, знаючи дві точки, що на ній лежать:

$$\frac{x-2}{-5}=\frac{y+1}{5,5}\Rightarrow 1,1x+y=1,2\Rightarrow 11x+10y=12.$$

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через вершину $B(2;-1)$, ортогональної до даної бісектриси, розуміючи, що напрямний вектор цієї прямої – це вектор нормалі до бісектриси:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}\Rightarrow 2x-y=5.$$

Знайдемо точку $B_0\left(x_0,y_0\right)$ перетину цієї прямої з бісектрисою:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & | & 6\\ 2 & -1 & | & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & | & 6\\ 0 & -5 & | & -7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & | & 6\\ 0 & 1 & | & 1,4\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & | & 3,2\\ 0 & 1 & | & 1,4\end{pmatrix}.$$

Знайдемо точку $B'\left(x',y'\right)\in AC$, симетричну вершині $B(2;-1)$ відносно бісектриси:

$$\begin{cases}x'+x_B=2x_0,\\ y'+y_B=2y_0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=2x_0-x_B,\\ y'=2y_0-y_B.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=6,4-2=4,4,\\ y'=2,8+1=3,8.\end{cases}$$

Запишемо тепер рівняння сторони AC, яка проходить через точки $A(-3;4,5)$ і $B'\left(4,4;3,8\right)$:

$$\frac{x+3}{-7,4}=\frac{y-4,5}{0,7}\Rightarrow 0,7x+2,1=-7,4y+33,3\Rightarrow 0,7x+7,4y=31,2.$$

Запишемо рівняння сторони BC як прямої, що ортогональна висоті і проходить через вершину $B(2;-1)$. Її напрямний вектор – вектор нормалі до висоти.

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-4}\Rightarrow 4x+3y=5.$$

Вершину C читач самостійно знайде як точку перетину сторін AC і BC.

Задача 3.12. Через точку $M_0(2;1)$ провести пряму, що утворює кут $\frac{\pi}{4}$ з прямою $2x+3y+4=0$.

Розв’язання. Як відомо, тангенс k кута між двома прямими $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ знаходиться за формулою:

$$k=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}.$$

За умовою задачі $|k|=1$. Рівняння прямої, даної в умові, перепишемо у вигляді $y=-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$. Рівняння шуканої прямої: $y=k_2(x-2)+1$. Її кутовий коефіцієнт знайдемо з рівняння

$$\left|\frac{-\frac{2}{3}-k_2}{1-\frac{2}{3}k_2}\right|=1\Leftrightarrow\frac{2+3k_2}{3-2k_2}=\pm1.$$

Звідси знаходимо $k_2=\frac{1}{5}$ або $k_2=-5$. В результаті записуємо два рівняння, які задовольняють умові задачі:

$y=\frac{1}{5}(x-2)+1\Leftrightarrow x-5y-2=0,$ а також $y=-5(x-2)+1\Leftrightarrow 5x+5y-10=0.$

Задача 3.13. Знайти рівняння бісектриси, між кутами, що утворюють прямі *I* і *II*: $y = k_1(x - x_0) + b_1$ (*I*), $y = k_2(x - x_0) + b_2$ (*II*).

Розв'язання. Будемо вважати, що прямі не колінеарні. Нехай бісектриса має рівняння $y = k(x - x_0) + b$. Прирівняємо тангенси кутів, які бісектриса утворює з прямими, записуючи їх в саме в такому порядку:

$$\frac{k_1 - k}{1 + k_1 k} = \frac{k - k_2}{1 + k_2 k} \Leftrightarrow (k_1 - k)(1 + k_2 k) = (k - k_2)(1 + k_1 k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_1 - k + k_1 k_2 k - k_2 k^2 = k - k_2 + k_1 k^2 - k_1 k_2 k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k_1 + k_2)k^2 - 2(k_1 k_2 - 1)k - (k_1 + k_2) = 0$$

Якщо $k_1 + k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = -k_1 \Rightarrow (k_1 k_2 - 1)k = 0 \Rightarrow (k_1^2 + 1)k = 0 \Rightarrow k = 0.$

Якщо $k_1 + k_2 \neq 0$, тоді

$$k = \frac{k_1 k_2 - 1 \pm \sqrt{k_1^2 k_2^2 + k_1^2 + k_2^2 + 1}}{k_1 + k_2} = \frac{k_1 k_2 - 1 \pm \sqrt{(k_1^2 + 1)(k_2^2 + 1)}}{k_1 + k_2}.$$

З формули Вієта випливає, що розв'язки квадратного рівняння мають різні знаки і їхній добуток дорівнює -1. Це означає, що бісектриси ортогональні, що і відповідає геометричним уявленням про бісектриси суміжних кутів. З умови задачі можна зробити висновок про те, який знак вибрати перед квадратним коренем. Наприклад, якщо $k_2 > k_1 \geq 0$, прямі утворюють гострі кути з віссю Ox, і треба знайти бісектрису цього кута, то треба вибирати знак таким чином, щоб розв'язок був додатній; якщо треба знайти бісектрису суміжного кута, треба вибирати інший корінь. Нехай більші частини променів, що утворюють кут, лежать у правій площині, $k_2 > 0, k_1 < 0$ і $k_2 > |k_1|$ і треба знайти бісектрису цього кута. Тоді $k > 0$. Якщо $0 < k_2 < |k_1|$, то $k < 0$. Користуючись цими вказівками, читач самостійно розбере інші випадки.

Задача 3.13. Задано пряму $3x-2y+7=0$. Промінь світла, знаходячись нижче цієї прямої, йде по променю $x-2y+5=0$, а потім відбивається від даної прямої. Знайти рівняння прямої, на який лежить відбитий промінь.

Розв’язання. Знайдемо точку перетину даних прямих, розв’язавши систему

$$\begin{cases} x-2y+5=0, \\ 3x-2y+7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=2. \end{cases}$$

Рівняння прямої, на який лежить відбитий промінь, запишемо у вигляді $y=k(x+1)+2$. Цей промінь також лежить нижче даної прямої. Кут повороту від даного променя до частини даної прямої, що лежить у півплощині $x>-1$ додатній і гострий, і також додатній і гострий кут повороту від променя даної прямої до відбитого променя. Тангенси цих кутів додатні і рівні, тому, прирівнюючи їх, будемо мати:

$$\frac{k-\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}k}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}\Rightarrow k=\frac{29}{2}.$$

Звідси рівняння шуканої прямої буде мати вигляд:

$$y=\frac{29}{2}(x+1)+2\Rightarrow 29x-2y+33=0.$$

12). **Завдання для самостійної роботи:** [10], №№ 254-257, 271-273.

Практичне заняття 13. Скалярний та векторний добутки. Їхні властивості

Теоретичні відомості

Означення 11.1. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між якими дорівнює $\varphi, \varphi\in[0,\pi]$, називається число (скаляр), що обчислюється за формулою

$\vec{a}\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\varphi.$	(13.1)

Звідси

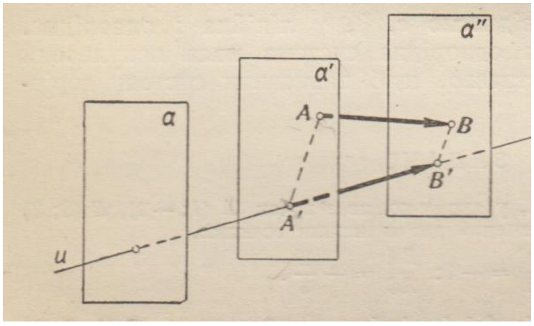
$\vec{a}^2 = \vec{a}\,\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2 \Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{\vec{a}\,\vec{a}}.$	(13.2)

Величина проекції (скаляр) вектора $\vec{a}$ на вісь, що визначається напрямним вектором $\vec{b}$:

$p_{\vec{b}}\,\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}.$	(13.3)

Проекція вектора на вісь (Мал. 11.1) – вектор, який будемо позначати

$P_{\vec{e}}\,\vec{a} = \left(p_{\vec{e}}\,\vec{a}\right)\vec{e}.$	(11.7)



Мал. 13.1

Нехай

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Будемо вважати, що вектор $\vec{a}$ утворює з координатними осями або, що те ж саме, з їхніми напрямними ортами кути, відповідно, α, β, λ. Тоді

$$x = \left|\vec{u}\right|\cos\alpha, y = \left|\vec{u}\right|\cos\beta, z = \left|\vec{u}\right|\cos\gamma$$

і

$$\vec{u} = \left|\vec{u}\right|\left(\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}\right).$$

В частинному випадку $\left|\vec{u}\right| = 1$ традиційно позначивши $\vec{u} = \vec{e}$, будемо мати:

$$\vec{e} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k},\ |\vec{e}| = 1. \qquad (13.8)$$

Зіставимо двом векторам відповідні їм вектори-стовпчики координат у даному базисі: $\vec{a} \sim [\vec{a}] = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \vec{b} \sim [\vec{b}] = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Тоді скалярний добуток для векторів-стовпчиків, який позначається $([\vec{a}],[\vec{b}])$, обчислюється за формулою:

$$([\vec{a}],[\vec{b}]) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \qquad (13.9)$$

В частинному випадку $[\vec{b}] = [\vec{a}] = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ маємо:

$$|[\vec{a}]| = \sqrt{[\vec{a}][\vec{a}]} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (13.10)$$

Косинус кута між двома векторами, заданими своїми координатами у ортонормованому базисі:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (13.11)$$

Векторний добуток

Означення 13.2. Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, що мають спільний початок, називається вектор $\vec{c} \triangleq [\vec{a},\vec{b}]$, який має наступні властивості:

1). Він ортогональний до кожного з цих векторів, тобто, ортогональний до площини, що визначена ними;

2). Напрямок $\vec{c}$ такий, що якщо з його кінця дивитись на вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то найкоротший поворот (на кут $\varphi, \varphi \in [0, \pi]$) від першого множника до другого повинен здійснюватись проти годинникової стрілки, тобто, в додатному напрямку;

3). $|\vec{c}| = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi.$

Нехай вектори задано своїми координатами:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}^T, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^T.$$

Тоді їхній векторний добуток обчислюється за формулою:

$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right)\vec{i} + \left(a_3 b_1 - a_1 b_3\right)\vec{j} + \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)\vec{k}.$	(13.12)

Задача 13.1. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно утворюють один з одним кути $\dfrac{\pi}{3}$

Знайти модуль вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, якщо $|\vec{a}| = 4, \left|\vec{b}\right| = 2, |\vec{c}| = 6.$

Розв'язання.

$$|\vec{p}|^2 = \left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\left(\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}\right) =$$
$$= 4^2 + 2^2 + 6^2 + 2\left(|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| + |\vec{a}||\vec{c}| + \left|\vec{b}\right||\vec{c}|\right)\cos\frac{\pi}{3} =$$
$$= 16 + 4 + 36 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 100 \Rightarrow |\vec{p}| = \left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right| = 10.$$

Задача 13.2. Довести, що вектор $(\vec{a}\,\vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a}\,\vec{b}\right)\vec{c}$ ортогональний до вектора $\vec{a}$.

Доведення.

$$\left((\vec{a}\,\vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a}\,\vec{b}\right)\vec{c}\right)\vec{a} = (\vec{a}\,\vec{c})\left(\vec{b}\vec{a}\right) - \left(\vec{a}\,\vec{b}\right)(\vec{c}\vec{a}) = (\vec{a}\,\vec{c})\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) - \left(\vec{a}\,\vec{b}\right)(\vec{a}\,\vec{c}) = 0,$$

що й доводить ортогональність.

Задача 13.3. Дано вершини трикутника $A(3;2;-3), B(5;1;-1), C(1;-2;1)$. Знайти його зовнішній кут при вершині A.

Розв'язання.

$$\overrightarrow{AB} \sim (5-3;1-2;-1+3)^T = (2;-1;2)^T,$$
$$\overrightarrow{CA} \sim (3-1;2+2;-3-1)^T = (2;4;-4)^T.$$

$$\cos(\pi - \angle BAC) = \frac{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CA}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{CA}\right|} = \frac{(2;-1;2)^T (2;4;-4)^T}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}} =$$
$$= \frac{2\cdot 2 - 4 + 2\cdot(-4)}{3\cdot 6} = -\frac{4}{9} \Rightarrow \pi - \angle BAC = \arccos\left(-\frac{4}{9}\right).$$

Задача 13.3. Знайти величину проекції вектора $[\vec{s}] = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & -3 & -5\end{pmatrix}^T$ на вісь з напрямним вектором $[\vec{e}] = \left(\cos\frac{\pi}{4};\cos\beta;\cos\frac{\pi}{3}\right), \beta > 0.$

Розв'язання. Як відомо, $\cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\beta + \cos^2\frac{\pi}{3} = 1 \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{2}.$

Отже, напрямному вектору осі відповідає вектор з $[\vec{e}] = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)^T.$

Тоді

$$p_{\vec{e}}\,\vec{s} = \vec{a}\,\vec{e} = \left(\sqrt{2};-3;-5\right)^T \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)^T = 1 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -3.$$

Задача 13.4. Знайти геометричне місце точок, кінців змінного вектора $\vec{x}$, якщо $\vec{x}\,\vec{a} = \alpha, \vec{x}\,\vec{b} = \beta$, де вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають спільний початок O і не колінеарні.

Розв'язання. Як відомо

$$p_{\vec{a}}\,\vec{x} = \vec{x}\left(\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right) = \frac{\alpha}{|\vec{a}|},\; p_{\vec{b}}\,\vec{x} = \vec{x}\left(\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}\right) = \frac{\beta}{|\vec{b}|}.$$

Звідси випливає, що кінці змінного вектора пробігають всі точки площини, що ортогональна вектору $\vec{a}$ і знаходиться на відстані $\dfrac{\alpha}{|\vec{a}|}$ від вибраного початку, а також ортогональна вектору $\vec{b}$ і знаходиться на відстані $\dfrac{\beta}{|\vec{b}|}$ від початку. Значить, кінці змінного вектора пробігають пряму, що є перетином вказаних площин.

Векторний добуток

Задача 13.5. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\dfrac{2\pi}{3}$ і мають модулі: $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2.$ Обчислити $\left|\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]\right|^2$.

Розв'язання. $\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]=2\left[\vec{a},\vec{a}\right]+4\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{b},\vec{a}\right]+2\left[\vec{b},\vec{b}\right]=3\left[\vec{a},\vec{b}\right].$

Звідси $\left|\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}\right]\right|^2=9\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|^2=9\left(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)^2=9\cdot4\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=27.$

Задача 13.6. Дано вектори $\vec{a}\sim\left[\vec{a}\right]=(4,-2,-3),\vec{b}\sim\left[\vec{b}\right]=(0,1,3)$. Вектор $\vec{x}$ утворює тупий кут з віссю Oy, $\vec{x}\perp\vec{a},\vec{x}\perp\vec{b},|\vec{x}|=26.$ Знайти вектор $\left[\vec{x}\right]$ з координат вектора $\vec{x}.$

Розв'язання. Вектор $\vec{x}$ колінеарний вектору

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & -3\\ 0 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=-3\vec{i}-12\vec{j}+4\vec{k}\Rightarrow\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\sqrt{9+144+16}=13.$$

Косинус кута, який вектор $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ утворює з віссю Oy, тобто, з її напрямним ортом $\vec{j}$, дорівнює $\frac{1}{13}\left(-3\vec{i}-12\vec{j}+4\vec{k}\right)\vec{j}=-\frac{12}{13}<0,$ тобто, тупий кут. Це означає, що вектори $\vec{x}$ і $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ мають однаковий напрям.

З умови випливає:

$$\vec{x}=t\left[\vec{a},\vec{b}\right]=t\left(-3\vec{i}-12\vec{j}+4\vec{k}\right) \text{ і } \left|\vec{x}\right|=26=13\left|t\right|\Rightarrow\left|t\right|=2\Rightarrow t=\pm 2.$$

З однакової направленості цих векторів випливає, що $t=2$. Отже,

$$\vec{x}=2\left(-3\vec{i}-12\vec{j}+4\vec{k}\right)=-6\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}.$$

Задача 13.7. Довести тотожність:

$\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|^2+\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2=\left\|\vec{a}\right\|^2\left\|\vec{b}\right\|^2.$	(13.13)

Доведення. Нехай α - кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. За означенням

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|^2+\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\sin^2\alpha+\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\alpha=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2.$$

Наслідок. Нехай вектори задано своїми координатами:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}^T,\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}^T.$$

Тоді

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|^2=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)^2+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)^2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2,$$

$$\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2=\left(a_1b_1\right)^2+\left(a_2b_2\right)^2+\left(a_3b_3\right)^2.$$

З (13.13) випливає:

$\left(a_2b_3-a_3b_2\right)^2+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)^2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2+\left(a_1b_1\right)^2+\left(a_2b_2\right)^2+\left(a_3b_3\right)^2=$	

$=\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right).$	(13.14)

Одержали частинний випадок тотожності Лагранжа.

Векторний добуток трьох векторів

Операція векторного добутку, взагалі кажучи, не асоціативна. Має місце тотожність Якобі:

$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]+\left[\vec{b},\left[\vec{c},\vec{a}\right]\right]+\left[\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right]=0.$	(13.15)

Справедлива формула (тотожність Грасмана):

$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\left(\vec{a}\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\vec{b}\right)\vec{c}.$	(13.16)

Зауваження. Якщо записати вираз у правій частині менш традиційно – скаляр після вектора:

$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\vec{b}\left(\vec{a}\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\vec{b}\right),$ то можна запропонувати просте мнемонічне правило для запам'ятовування: «бац мінус цаб».

Зауваження. В наступних задачах для кращого розуміння ситуації і щоб не було плутанини для скалярного добутку двох векторів будемо використовувати круглі дужки, як це робиться у лінійній алгебрі і у функціональному аналізі: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Задача 13.8. Довести тотожність (скалярний добуток двох векторних добутків):

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right)=(\vec{a},\vec{c})\left(\vec{b},\vec{d}\right)-\left(\vec{a},\vec{d}\right)\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}(\vec{a},\vec{c}) & \left(\vec{a},\vec{d}\right)\\ \left(\vec{b},\vec{c}\right) & \left(\vec{b},\vec{d}\right)\end{vmatrix}.$$	(13.17)

Доведення. Введемо позначення: $\vec{u}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. Тоді за властивістю мішаного добутку одержимо:

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right)=\left(\vec{u},\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right)=\left([\vec{u},\vec{c}],\vec{d}\right)=\left(\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right],\vec{d}\right).$$

Скористаємось формулою (13.16) для подвійного векторного добутку, враховуючи його антикомутативність:

$$\left(\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right],\vec{d}\right)=-\left(\left[\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right],\vec{d}\right)=-\left(\left(\left(\vec{c},\vec{b}\right)\vec{a}-(\vec{c},\vec{a})\vec{b}\right),\vec{d}\right)=$$

$$=(\vec{a},\vec{c})\left(\vec{b},\vec{d}\right)-\left(\vec{a},\vec{d}\right)\left(\vec{b},\vec{c},\right)=\begin{vmatrix}(\vec{a},\vec{c}) & \left(\vec{a},\vec{d}\right)\\ \left(\vec{b},\vec{c}\right) & \left(\vec{b},\vec{d}\right)\end{vmatrix}.$$

я $f(x)-f(b)\geq 0$ і ця $f(x)-f(b)\geq 0$ і я $f(x)-f(b)\geq 0$ д

Задача 13.9. Довести тотожність (векторний добуток двох векторних добутків):

$$\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right]=\left(\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{b}-\left(\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{a}.$$	(13.18)

Доведення. Введемо позначення: $\vec{g}=\left[\vec{c},\vec{d}\right]$ і скористаємось формулою (13.16):

$$\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right]=\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{g}\right]=(\vec{a},\vec{g})\vec{b}-\left(\vec{b},\vec{g}\right)\vec{a}=$$

$$=\left(\vec{a},\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right)\vec{b}-\left(\vec{b},\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right)\vec{a}=\left(\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{b}-\left(\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{a}\,.$$

Зауваження. Скориставшись властивостями векторного та мішаного добутків і формулою (13.16), одержимо:

$$\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right]=\left[\left[\vec{c},\vec{d}\right],\left[\vec{b},\vec{a}\right]\right]=\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right)\vec{d}-\left(\vec{d},\vec{b},\vec{a}\right)\vec{c}=.$$

$$=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right)\vec{c}-\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\vec{d}.$$

Таким чином

$$\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right]=\left(\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{b}-\left(\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{a}=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right)\vec{c}-\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\vec{d}.$$

Задача 13.10. Довести тотожність:

$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right]\right]=\left(\vec{b},\vec{d}\right)\left[\vec{a},\vec{c}\right]-\left(\vec{b},\vec{c}\right)\left[\vec{a},\vec{d}\right].$	(13.19)

Доведення. Скористаємось формулою (13.16): $\left[\vec{b},\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right]=\left(\vec{b},\vec{d}\right)\vec{c}-\left(\vec{b},\vec{c}\right)\vec{d}.$

Помноживши цю рівність векторно на вектор $\vec{a}$ зліва, одержимо:

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right]\right]=\left(\vec{b},\vec{d}\right)\left[\vec{a},\vec{c}\right]-\left(\vec{b},\vec{c}\right)\left[\vec{a},\vec{d}\right],$$

що й треба було довести.

Задача 13.11. Довести тотожність:

$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right]\right]=\left(\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{b}-\left(\vec{a},\vec{b}\right)\left[\vec{c},\vec{d}\right].$	(13.20)

Доведення. Введемо позначення $\vec{g}=\left[\vec{c},\vec{d}\right]$ і скористаємось формулою (13.17):

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{g}\right]\right]=(\vec{a},\vec{g})\vec{b}-\left(\vec{a},\vec{b}\right)\vec{g}=\left(\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{b}-\left(\vec{a},\vec{b}\right)\left[\vec{c},\vec{d}\right],$$

що й треба було довести.

Задача 13.12. Довести тотожність:

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{b},\vec{c}\right],[\vec{c},\vec{a}]\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)^2.$$	(13.21)

Доведення. Скористаємось формулою (3.18):

$$\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{b},\vec{d}\right]\right]=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{b},\vec{b},\vec{c}\right)\vec{a}=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\vec{b}.$$

Скалярно помножимо цю рівність справа на $\left[\vec{c},\vec{a}\right]$ і скористаємось властивостями мішаного добутку:

$$\left(\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{b},\vec{d}\right]\right],[\vec{c},\vec{a}]\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\left(\vec{b},[\vec{c},\vec{a}]\right)-\left(\vec{b},\vec{b},\vec{c}\right)\left(\vec{a},[\vec{c},\vec{a}]\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)^2,$$

що й треба було довести.

13). **Завдання для самостійної роботи:** [10], №№ 808-811, 820-823.

Практичне заняття 14. Мішаний добуток та його застосування

Мішаний добуток трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - це число, що дорівнює скалярному добутку векторного добутку $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ на вектор $\vec{c}:\left[\vec{a},\vec{b}\right]\vec{c}.$

Властивості мішаного добутку:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]\vec{c}=\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right].$$

Тому можна вживати позначення $\vec{a}\vec{b}\vec{c}\triangleq\left[\vec{a},\vec{b}\right]\vec{c}=\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right].$

Також

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

З означення миттєво випливає, що $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\vec{c}=\vec{c}\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Нехай відомо координати вектора в деякому ортонормованому базисі:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}^T, \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}^T, \vec{c}=\begin{pmatrix}c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}^T.$$

Тоді

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$	(14.1)

Нехай тетраедр побудовано на трьох векторах, що мають спільний початок:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}^T, \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}^T, \vec{c}=\begin{pmatrix}c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}^T.$$

Тоді його об'єм обчислюється за формулою

$$V=\pm\frac{1}{6}\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$	(14.2)

Знак «+» відповідає правій трійці векторів, знак «-» - лівій.

Задача 14.1. З'ясувати, чи лежать в одній площині точки

$$A(1;2;-1), B(0;1;5), C(-1;2;1), D(2;1;3).$$

Розв'язання. Знайдемо координати трьох векторів

$$\overrightarrow{AB}\sim(-1;-1;6), \overrightarrow{AC}\sim(-2;0;2), \overrightarrow{AD}\sim(1;-1;4).$$

Обчислимо мішаний добуток цих векторів:

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 6\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 6\\ 0 & 2 & -10\\ 0 & -2 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 6\\ 0 & 2 & -10\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

а це й доводить компланарність трьох векторів, з цього робиться висновок, що кінці і початки векторів, тобто, задані точки лежать на одній площині.

Задача 14.2. Об'єм тетраедра $V = 5$, три його вершини знаходяться у точках $A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3)$. Знайти координати четвертої вершини D , якщо відомо,що вона лежить на осі Oy.

Розв'язання. З умови випливає, що шукана точка має координати: $D(0;y;0)$. Знайдемо координати трьох векторів

$$\overrightarrow{AB} \sim (1;-1;2), \overrightarrow{AC} \sim (0;-2;4), \overrightarrow{AD} \sim (-2;y-1;1)..$$

З умови випливає:

$$\frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & y-1 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Звідси $30 = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & y-3 & 5 \end{vmatrix} = \left|-10-4\left(y-3\right)\right| = \left|4y-2\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 8, \\ y = -7. \end{array}\right.$

Відповідь: умову задачі задовольняють дві точки: $D(0;8;0), D(0;-7;0)$.

Задача 14.3. Довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ які задовольняють умову $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right] + \left[\vec{c}, \vec{a}\right] = 0,$ компланарні.

Доведення. Для цього досить довести, що їхній мішаний добуток дорівнює нулю. Помножимо скалярно дану рівність справа на вектор $\vec{c}$ і скористаємось властивостями мішаного добутку:

$$\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right) + \left(\left[\vec{b}, \vec{c}\right], \vec{c}\right) + \left(\left[\vec{c}, \vec{a}\right], \vec{c}\right) = 0 \Rightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0,$$

а це й доводить компланарність.

Означення 14.1. Нехай $\vec{a}, \vec{b}$ - неколінеарні вектори на площині, що мають спільний початок. Матриця, утворена із їхніх скалярних добутків, називається матрицею Грама цієї системи векторів:

$$G(a,b) \triangleq \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b}) \\ (\vec{b},\vec{a}) & (\vec{b},\vec{b}) \end{vmatrix}.$$

Насправді матриця симетрична завдяки комутативності скалярного добутку: $(\vec{b},\vec{a}) = (\vec{a},\vec{b})$. Зауважимо також, що її визначник додатній завдяки нерівності Коші-Буняковського:

$$G(a,b) = (\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b}) - (\vec{a},\vec{b})^2 \geq 0.$$

Рівність може мати місце тоді і тільки тоді, коли вектори колінеарні.

Нагадаємо, що площа паралелограма S, побудованого на цих двох векторах, обчислюється за формулою $S = \left\| \left[\vec{a},\vec{b} \right] \right\|$.

Використаємо рівність (13.17)

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b} \right], \left[\vec{c},\vec{d} \right] \right) = (\vec{a},\vec{c})(\vec{b},\vec{d}) - (\vec{a},\vec{d})(\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{c}) & (\vec{a},\vec{d}) \\ (\vec{b},\vec{c}) & (\vec{b},\vec{d}) \end{vmatrix}$$

при $\vec{c} = \vec{a}$, $\vec{d} = \vec{b}$:

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b} \right], \left[\vec{a},\vec{b} \right] \right) = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b}) \\ (\vec{b},\vec{a}) & (\vec{b},\vec{b}) \end{vmatrix} = \left\| \left[\vec{a},\vec{b} \right] \right\|^2 = S^2.$$

Звідси одержуємо формулу для площі паралелограма через визначник матриці Грама векторів, на яких паралелограм побудовано:

$$S = \sqrt{\det G\left(\vec{a},\vec{b} \right)}.$$

14). **Завдання для самостійної роботи:** [10], №№ 851-854, 874-878.

Практичне заняття 15. Пряма та площина у просторі, відхилення точки від прямої та площини

Теоретичні відомості

1). Параметричне та канонічне рівняння прямої.

Рівняння прямої $\mathcal{L}$, що проходить через дану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0$ колінеарно даному вектору, який називається напрямним:

$$\vec{a} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k} \sim [\vec{a}] = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}.$$

Параметричне рівняння:

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a},$ $t \in \mathbb{R}.$	(15.1)

В координатній формі воно запишеться таким чином:

$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, \\ z = z_0 + tn. \end{cases}$	(15.2)

Виразивши параметр t через координати, одержимо **канонічне рівняння**:

$\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}.$	(15.3)

Кут між двома прямими знаходиться з формули

$\cos\varphi = \dfrac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$	(15.4)

Умови колінеарності двох прямих:

$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$	(15.5)

Умови ортогональності двох прямих:

$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$	(15.6)

Нормальне рівняння площини

Відомо, що пряма, яка не проходить через початок координат, знаходиться на відстані $p>0$ від нього; $\vec{n}\sim\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ - відомий орт її нормалі, який має напрям у бік прямої. Тоді, так зване, нормальне рівняння апямої має вигляд:

$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0.$	(15.7)

Зведення загального рівняння прямої

$ax+by+c=0.$	(15.8)

до нормального:

$\frac{a}{-\operatorname{sgn}c\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{-\operatorname{sgn}c\sqrt{a^2+b^2}}y+\frac{c}{-\operatorname{sgn}c\sqrt{a^2+b^2}}=0.$	(15.9)

Відхилення точки площини $M_0\left(x_0,y_0\right)$ від прямої, що задана нормальним рівнянням:

$\delta(M_0,\mathcal{L}) \triangleq x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p$	(15.10)

Рівняння площини

1). Рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і ортогональна до вектора (нормалі) $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \sim [\vec{n}] = (a \quad b \quad c)^T$:

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$	(15.11)

Звідси знаходиться загальне рівняння площини:

$ax+by+cz+d=0$	(15.12)

2). Рівняння площини, що проходить через три точки, що не лежать на одній прямій:

$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$	(15.13)

3). Рівняння площини у відрізках на осях:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$	(15.14)

4). Нормальне рівняння площини:

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$	(15.15)

Тут $\left(\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma\right)^T$ - орт нормалі до площини, $p>0$ - відстань від початку координат до площини.

Зведення загального рівняння площини до нормального.

Загальне рівняння: $ax+by+cz+d=0$ю

Звідси можна записати нормальне рівняння:

$$\frac{x}{(-\operatorname{sgn} d)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+\frac{y}{(-\operatorname{sgn} d)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+$$ $$+\frac{z}{(-\operatorname{sgn} d)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+\frac{d}{(-\operatorname{sgn} d)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=0.$$	(15.16)

5). Пряма як перетин двох площин.

$$\begin{aligned}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0.\end{aligned}$$	(15.17)

Вибирається точка, що належить двом площинам. Її координати – будь-який розв'язок системи. Напрямний вектор прямої знаходиться за формулою

$$\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}\triangleq u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}.$$

Задача 15.1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2;-1;3), M_2(3;1;2)$ паралельно вектору $\left[\vec{a}\right]=\left(3;-1;4\right)^T$.

Розв'язання. Нехай $M(x;y;z)$ - довільна точка площини. Вектори

$\left[\overrightarrow{M_1M_2}\right]=\left(3-2;1-(-1);2-3\right)^T=\left(1;2;-1\right)^T, \left[\overrightarrow{M_1M}\right]=\left(x-2;y+1;z-3\right)^T$ і

$\left[\vec{a}\right]=\left(3;-1;4\right)^T$ компланарні, а це еквівалентно тому, що їхній мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 7(x-2)-7(y+2)-7(z-3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)-(y+2)-(z-3)=0 \Leftrightarrow x-y-z-1=0.$$

Задача 15.2. Визначити, при яких значеннях параметрів l і m пара рівнянь визначає паралельні площини:

$$2x+ly+3z-5=0,\ mx-6y-6z+2=0.$$

Розв'язання. Необхідною і достатньою ознакою паралельності площин є колінеарність їхніх векторів нормалі, а ця умова в даному випадку може бути записана у вигляді

$$\frac{m}{2}=\frac{-6}{l}=\frac{-6}{3} \Leftrightarrow m=-4, l=3.$$

Задача 15.3. Визначити двогранні кути, утворені площинами, що перетинаються: $x-\sqrt{2}y+z-1=0,\ x+\sqrt{2}y-z+3=0.$

Розв'язання. Кут φ між площинами – це кут між їхніми векторами нормалей:

$$\cos\varphi=\frac{\left(1;-\sqrt{2};1\right)^T\left(1;+\sqrt{2};-1\right)^T}{\sqrt{1+2+1}\sqrt{1+2+1}}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi=\frac{2\pi}{3}, \pi-\varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Задача 15.4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(3;-2;-7)$ паралельно площині $2x-3z+5=0.$

Розв'язання. Вектором нормалі шуканої площини є вектор нормалі даної площини: $\left(2;0;-3\right)^T$. Рівняння площини запишеться у вигляді: $2(x-3)-3(z+7)=0 \Leftrightarrow 2x-3z-27=0..$

Задача 15.5. Довести, що три площини $x+2y+3z-1=0,\quad 2x-y-z+2=0,$ $7x+4y+7z+1=0$ перетинаються по одній прямій.

Доведення. Дослідимо систему рівнянь:

$x+2y+3z-1=0,$

$2x-y-z+2=0,$

$7x+4y+7z+1=0.$

Застосуємо метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\2&-1&-1&-2\\7&4&7&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&-5&-7&-4\\0&-10&-14&-8\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&5&7&4\\0&0&0&0\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}5&10&15&5\\0&10&14&8\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}5&0&1&-3\\0&5&7&4\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}5x_1=-3-x_3,\\5x_2=4-7x_3.\end{cases}$$

Одержаний результат означає, що радіус-вектор довільної точки множини, що є розв’язком системи рівнянь, може бути зображений у наступному вигляді:

$$[\vec{r}]=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}-\frac{1}{5}x_3\\\frac{4}{5}-\frac{7}{5}x_3\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\-\frac{7}{5}\\1\end{pmatrix}=[\vec{r}_0]+x_3[\vec{a}],$$

а це відповідає рівнянню прямої в параметричній формі (15.1).

Задача 15.6. Дослідити, при яких значеннях параметрів a і b площини $x+2y-z+b=0,\ x+ay-6z+10=0,\ 2x-y+3z-1=0$ 1) мають одну спільну точку, 2) перетинаються по одній прямій, 3) попарно перетинаються по трьох паралельних площинах.

Розв’язання. Дослідимо систему трьох даних рівнянь, використовуючи метод Гауса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -b \\ 1 & a & -6 & | & -10 \\ 2 & -1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -b \\ 0 & a-2 & -5 & | & b-10 \\ 0 & -5 & 5 & | & 2b+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -b \\ 0 & 1 & -1 & | & -\frac{2b+1}{5} \\ 0 & a-2 & -5 & | & b-10 \end{pmatrix}.$$

Якщо $a=2$ ранг основної матриці системи дорівнює 3, і вона має єдиний розв'язок, тобто, площини перетинаються в одній точці.

Якщо $a \neq 2$, зведемо розширену матрицю системи до вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -b \\ 0 & 1 & -1 & | & -\frac{2b+1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{a-2} & | & \frac{b-10}{a-2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -b \\ 0 & 1 & -1 & | & -\frac{2b+1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{a-7}{a-2} & | & \frac{b-10}{a-2} + \frac{2b+1}{5} \end{pmatrix}.$$

Якщо $a \neq 7$, ранг основної матриці дорівнює 3, і вона має єдиний розв'язок, а три площини перетинаються в одній точці.

Розглянемо випадок $a=7$. Маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -b \\ 0 & 1 & -1 & | & -\frac{2b+1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & | & \frac{3}{5}(b-3) \end{pmatrix}..$$

Якщо $b=3$, ранги основної і розширеної матриць співпадають і дорівнюють 2, тому система сумісна. Знайдемо її розв'язки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -3 \\ 0 & 1 & -1 & | & -\frac{7}{5} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -1 & | & -\frac{7}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=-\dfrac{8}{5}, \\ y-z=-\dfrac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{8}{5}-y, \\ z=y+\dfrac{7}{5}. \end{cases}$$

Розв'язком системи є одно параметрична лінійна множина:

$$\left[\vec{r}\right]=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{8}{5}-y \\ y \\ y+\dfrac{7}{5} \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\left[\vec{r}_0\right]+y\left[\vec{a}\right], y\in\mathbb{R}.$$

Це є параметричним зображенням прямої. Три площини перетинаються по прямій.

Якщо $b\neq 3$ система не має розв'язків, тобто, три площини не мають спільних точок. Дослідимо, чи можуть площини при цьому перетинатись попарно. Розглянемо три системи рівнянь:

$$\begin{cases} x+2y-z=-b, \\ x+7y-6z=-10, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-z=-b, \\ 2x-y+3z-1=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+7y-6z=-10, \\ 2x-y+3z-1=0. \end{cases}$$

Випускаючи дещо кропіткі, але цілком зрозумілі викладки, які читач здатен зробити самостійно, одержимо результат:

Перетин площин I-II: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -7b+20 \\ b-10 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

I-III: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -b+2 \\ -2b-1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

II-III: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Отже, напрямні вектори прямих попарного перетину площин рівні, тому ці прямі паралельні.

Нормальне рівняння прямої

Задача 15.7. Дано два рівняння прямих: $x\cos\beta - y\sin\beta - q = 0, q > 0, \beta -$ гострий кут і $x\cos\beta + y\sin\beta + q = 0, q > 0, \beta -$ гострий кут. В обох випадках будемо вважати, що $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Знайти полярний кут вектора нормалі для кожної прямої і величину p з нормального рівняння.

Розв’язання. 1). Як відомо, вільний член у полярному рівняння прямої від’ємний, що виконується для першої прямої, а гострий кут β визначиться з системи

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos\beta, \\ \sin\alpha = -\sin\beta \end{cases}$$

при умові $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \alpha \in \left(-\pi, \pi\right].$

Зробивши перетворення, приходимо до еквівалентної системи, яку розв’язуємо, враховуючи обмеження на кути:

$$\begin{cases} \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0, \\ \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0. \end{cases}$$

Легко бачити, що розв'язком буде $\alpha=-\beta.$

2). Щоб звести друге рівняння до нормального, треба помножити обидві його частини на -1:

$$x\left(-\cos\beta\right)+y\left(-\sin\beta\right)-q=0.$$

Звідси

$$\begin{cases} \cos\alpha=-\cos\beta, \\ \sin\alpha=-\sin\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0, \\ \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0. \end{cases}$$

Легко бачити, що розв'язки містяться серед кутів, що задовольняють умову

$$\alpha-\beta=\pi+2\pi n \Rightarrow \alpha=\beta+\pi+2\pi n.$$

Легко бачити, що при $\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right], n=0 \Rightarrow \alpha=\beta+\pi\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right].$

При $\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right), n=-1 \Rightarrow \alpha=\beta-\pi\in\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right).$

Задача 15.8. Звести кожне з рівнянь трьох прямих до нормальних і встановити, чи лежить точка $M_0(1;-3)$ по один бік від кожної прямої, чи по різні боки.

$2x-y+5=0(1),\ x-3y-5=0(2),\ 3x+2y-1=0(3).$

Розв'язання.

1). $2x-y+5=0 \Rightarrow \dfrac{2}{-\sqrt{5}}x-\dfrac{1}{-\sqrt{5}}y+\dfrac{5}{-\sqrt{5}}=0 \Rightarrow -\dfrac{2}{\sqrt{5}}x+\dfrac{1}{\sqrt{5}}y-\sqrt{5}=0.$

Знайдемо відхилення точки $M_0(1;-3)$ від цієї прямої:

$$\delta(M_0)=-\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}}-\sqrt{5}=-2\sqrt{5}<0.$$

Висновок: точка $M_0(1;-3)$ і початок координат $O(0,0)$ лежать по один бік від прямої.

2). $x-3y-5=0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{10}}x-\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{5}{\sqrt{10}}=0.$

$$\delta(M_0)=\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{9}{\sqrt{10}}-\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{10}}>0.$$

Точка $M_0(1;-3)$ і початок координат $O(0,0)$ лежать по різні боки від прямої.

3). $3x+2y-1=0 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{13}}x+\frac{2}{\sqrt{13}}y-\frac{1}{\sqrt{13}}=0.$

$$\delta(M_0)=\frac{3}{\sqrt{13}}-\frac{6}{\sqrt{13}}y-\frac{1}{\sqrt{13}}=-\frac{4}{\sqrt{13}}<0.$$

Точка $M_0(1;-3)$ і початок координат $O(0,0)$ лежать по один бік від прямої.

Задача 15.9. Дано три паралельні прямі:

$$10x+15y-3=0(1),\ 2x+3y+5=0(2),\ 2x+3y-9=0(3).$$

Встановити, яка пряма лежить між іншими, обчислити відстані між сусідніми та встановити, в якому відношенні ділить внутрішня пряма відстані між зовнішніми.

Розв'язання. Запишемо нормальні рівняння кожної прямої:

$$\frac{10}{5\sqrt{13}}x+\frac{15}{5\sqrt{13}}y-\frac{3}{5\sqrt{13}}=0(1),$$
$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x-\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{5}{\sqrt{13}}=0(2),$$
$$\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{9}{\sqrt{13}}=0(3).$$

Орти нормалей до першої і третьої прямих мають однаковий напрям, тому відстань між ними $l_{1,3}$ дорівнює $l_{1,3}=\frac{9}{\sqrt{13}}-\frac{3}{5\sqrt{13}}=\frac{45-3}{5\sqrt{13}}=\frac{42}{5\sqrt{13}}$.

Третя пряма розташована далі від початку координат, ніж перша.

Орти нормалей першої і другої прямих мають протилежні напрямки, тому перша лежить між другою і третьою, а відстань між першою і другою дорівнює $l_{1,2}=\frac{3}{5\sqrt{13}}+\frac{25}{5\sqrt{13}}=\frac{28}{5\sqrt{13}}$. Перша пряма ділить відрізок на нормальній прямій між точками перетину її з другою та третьою прямими у відношенні

$$\frac{l_{1,2}}{l_{1,3}}=\frac{28}{5\sqrt{13}}\left(\frac{42}{5\sqrt{13}}\right)^{-1}=\frac{2}{3}.$$

Задача 15.10. Знайти рівняння бісектриси гострого та тупого кутів між прямим $x+2y-11=0,\ 3x-6y-5=0.$ Визначити, в якому куті лежить початок координат – в гострому чи тупому.

Розв'язання. Запишемо нормальні рівняння прямих:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{11}{\sqrt{5}}=0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{5}{3\sqrt{5}}=0.$$

Знайдемо скалярний добуток ортів нормалей до прямих:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}.$$

Робимо висновок, що кут між ортами тупий, значить, кут між прямими, протилежний до кута між ортами нормалей, в якому лежить початок координат, гострий. Це, в свою чергу, означає, що точки на частині бісектриси, що знаходиться в цьому куті, мають від'ємне відхилення від обох прямих (як і початок). Тоді відстані цих точок до прямих дорівнюють відхиленням з протилежним знаком. Зауважимо, що у вертикальному куті відхилення точок бісектриси від прямих дорівнюють відстаням. Отже бісектрису цих вертикальних гострих кутів знайдемо, прирівнюючи відхилення:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{11}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{5}{3\sqrt{5}}\Rightarrow y=\frac{7}{3}.$$

Очевидно, відхилення точок бісектриси в суміжних, тупих кутах, мають значення протилежних знаків, тому для визначення рівняння бісектриси треба прирівнювати відхилення від однієї прямої до відхилення від іншої, взяте з протилежним знаком:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{11}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y+\frac{5}{3\sqrt{5}}\Rightarrow x=\frac{19}{3}.$$

Задача 15.11. Знаючи загальне рівняння площини, написати її нормальне рівняння. Знайти відхилення та відстань від точки до площини, визначити, лежать ця точка і початок координат по один бік від площини, чи по різні.

1) $M_1(-2;-4;3),\ 2x-y+2z+3=0.$

2) $M_2(2;-1;-1),\ 16x-12y+15z-4=0.$

3) $M_1(1;2;-3),\ 5x-3y+z+4=0.$

Розв'язання. В кожному з випадків запишемо нормальне рівняння площини, а потім обчислимо відхилення точки від площини.

1). $2x-y+2z+3=0\Rightarrow -\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-1=0.$

$$\delta\left(M_1\right)=-\frac{2}{3}\cdot(-2)+\frac{1}{3}\cdot(-4)-\frac{2}{3}\cdot 3-1=-1<0,\ d\left(M_1,O\right)=1.$$

Точка і початок координат лежать по один бік від площини.

2). $16x-12y+15z-4=0\Rightarrow\frac{16}{25}x-\frac{12}{25}y+\frac{15}{25}z-\frac{4}{25}=0.$

$$\delta\left(M_2\right)=\frac{16}{25}\cdot 2-\frac{12}{25}\cdot(-1)+\frac{15}{25}\cdot(-1)-\frac{4}{25}=1,\ d\left(M_2,O\right)=1.$$

Точка і початок координат лежать по різні боки від площини.

3). $5x-3y+z+4=0\Rightarrow-\frac{5}{\sqrt{35}}x+\frac{3}{\sqrt{35}}y-\frac{1}{\sqrt{35}}z-\frac{4}{\sqrt{35}}=0.$

$$\delta\left(M_3\right)=-\frac{5}{\sqrt{35}}+\frac{3}{\sqrt{35}}\cdot 2-\frac{1}{\sqrt{35}}\cdot\left(-3\right)-\frac{4}{\sqrt{35}}=0,\ d\left(M_3,O\right)=0.$$

Точка лежить на площині.

Задача 15.12. Дві грані куба лежать на площинах

$$2x-2y+z-1=0, 2x-2y+z+5=0.$$

Обчислити об’єм куба.

Розв’язання. Зведемо кожне з даних рівнянь, що визначають паралельні площини (координати їхніх векторів нормалей однакові) до нормального, а потів знайдемо відстань між ними:

$$\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-\frac{1}{3}=0,\ -\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-\frac{5}{3}=0.$$

Оскільки вектори нормалей площин, на яких лежать грані куба, протилежні, для визначення відстані між площинами треба додавати їхні відстані від початку координат: $d=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=2\Rightarrow V=8.$

Задача 15.13. Відомі загальні рівняння двох неортогональних площин:

$$x-3y+2z-5=0,\ 3x-2y-z+3=0.$$

Записати рівняння площин, що ділять навпіл кожну з двох пар вертикальних кутів між цими площинами. З’ясувати, яка з бісекторіальних площин ділить навпіл гострий кут, а яка – тупий. Визначити, в якому з кутів лежить початок координат $O(0;0;0)$.

Розв’язання. Запишемо нормальні рівняння площин:

$$\frac{1}{\sqrt{14}}x-\frac{3}{\sqrt{14}}y+\frac{2}{\sqrt{14}}z-\frac{5}{\sqrt{14}}=0,-\frac{3}{\sqrt{14}}x+\frac{2}{\sqrt{14}}y+\frac{1}{\sqrt{14}}z-\frac{3}{\sqrt{14}}=0.$$

Знайдемо скалярний добуток ортів нормалі до площин:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{14}},-\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^{T}\left(-\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^{T}=-\frac{7}{14}=-\frac{1}{2}<0.$$

Отже, кут між ортами нормалей тупий (дорівнює $2\pi/3$), і кут, в якому лежить початок координат, гострий. В цьому куті, де лежить початок координат, відхилення точок бісекторіальної площини від обох даних площин від'ємні, тому для визначення відстаней від них до площин треба відхилення множити на -1. Для запису рівнянь бісекторіальної площини треба прирівняти ці відстані. Для вертикального з цим кутом кута відстані дорівнюють відхиленням і, прирівнюючи їх, будемо мати еквівалентне рівняння. Отже, рівняння бісекторіальної площини для пари гострих двогранних кутів (в одному з них лежить початок координат):

$$\frac{1}{\sqrt{14}}x-\frac{3}{\sqrt{14}}y+\frac{2}{\sqrt{14}}z-\frac{5}{\sqrt{14}}=-\frac{3}{\sqrt{14}}x+\frac{2}{\sqrt{14}}y+\frac{1}{\sqrt{14}}z-\frac{3}{\sqrt{14}}\Rightarrow$$

$$\frac{4}{\sqrt{14}}x-\frac{5}{\sqrt{14}}y+\frac{1}{\sqrt{14}}z-\frac{2}{\sqrt{14}}=0\Rightarrow 4x-5y+z-2=0.$$

Рівняння бісекторіальної площини пари вертикальних тупих двогранних кутів (прирівнюємо одне відхилення до іншого, помноженого на -1):

$$-\frac{1}{\sqrt{14}}x+\frac{3}{\sqrt{14}}y-\frac{2}{\sqrt{14}}z+\frac{5}{\sqrt{14}}=-\frac{3}{\sqrt{14}}x+\frac{2}{\sqrt{14}}y+\frac{1}{\sqrt{14}}z-\frac{3}{\sqrt{14}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{14}}x+\frac{1}{\sqrt{14}}y-\frac{3}{\sqrt{14}}z+\frac{8}{\sqrt{14}}=0\Rightarrow 2x+y-3z+8=0.$$

Задача 15.14. Дано площину $2x-y+5z-1=0$. Знайти пряму в площині $3x-2y+6z-1=0$, що знаходиться на відстані $\sqrt{30}$ від першої площини і лежить в площині, що знаходиться по інший бік від даної з початком координат. Записати параметричне і канонічне рівняння цієї прямої.

Розв'язання. Запишемо рівняння площини, паралельної першій, даній за умовою, що знаходиться від неї на відстані $\sqrt{30}$ і такої, що початок координат і вона лежать по різні боки від цієї першої площини. Нехай точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ шуканої площин має відхилення від даної, що дорівнює $\sqrt{30}$. Тоді

$$\delta(M_0)=\frac{2}{\sqrt{30}}x_0-\frac{1}{\sqrt{30}}y_0+\frac{5}{\sqrt{30}}z_0-\frac{1}{\sqrt{30}}=\sqrt{30}>0.$$

Загальне рівняння одержаної площини: $2x-y+5z-31=0$.

Шукану пряму можна одержати як перетин одержаної площини і другої, даної за умовою. Отже, її можна описати системою двох рівнянь:

$$\begin{cases}3x-2y+6z-1=0,\\ 2x-y+5z-31=0.\end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, одержимо параметричне рівняння прямої:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&6&1\\2&-1&5&31\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-6&4&-12&-2\\6&-3&15&93\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&6&1\\0&1&3&91\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&6&1\\0&1&3&91\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}3&-4&0&-181\\0&1&3&91\end{array}\right).$$

Звідси маємо розв'язки:

$$\begin{cases}3x=4y-181,\\ 3z=-y+91\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{3}y-\dfrac{181}{3},\\ z=-\dfrac{1}{3}y+\dfrac{91}{3}.\end{cases}$$

Отже, для векторів-стовпчиків з координат радіусів-векторів точок прямої перетину двох площин одержали рівняння:

$$[\vec r] = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}y - \frac{181}{3} \\ y \\ -\frac{1}{3}y + \frac{91}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -181 \\ 0 \\ 91 \end{pmatrix} + \frac{y}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = [\vec r_0] + \frac{y}{3}[\vec a],$$

де $\vec r_0$ - радіус-вектор однієї з точок прямої, «початковий», а $\vec a$ - її напрямний вектор.

Звідси, прирівнюючи однакові координати, одержимо канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x + \frac{181}{3}}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z - \frac{91}{3}}{-1}.$$

Зауваження. Напрямний вектор можна знайти як векторний добуток двох площин, що перетинаються:

$$\left[3\vec i - 2\vec j + 6\vec k, 2\vec i - \vec j + 5\vec k\right] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -4\vec i - 3\vec j + \vec k.$$

Як бачимо, одержали вектор, колінеарний із знайденим раніше. Можна було б знайти «більш зручну» початкову точку. Для цього у параметричному зображенні прямої можна взяти значення параметру $y = 1$. В результаті одержали б іншу початкову точку цієї прямої $M_0'(-57;1;30)$. Читач повинен впевнитись, що рівняння

$$\frac{x+57}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-30}{-1}$$

еквівалентне одержаному раніше.

Запишемо канонічне рівняння цієї прямої. Для цього знайдемо якусь одну точку з лінії їхнього перетину:

Задача 15.15. Знайти рівняння площини, що проходить через пряму перетину двох площин $2x-y+3z-5=0,\ x+2y-z+2=0$ паралельно вектору $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}.$

Розв'язання. Знайдемо напрямний вектор прямої перетину даних площин як векторний добуток векторів нормалі цих площин:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5\vec{i}+5\vec{j}+5\vec{k}=-5\left(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}\right).$$

Знайдемо також якусь одну точку M_0 прямої, що є перетином даних площин. Наприклад, взявши $z=0$, з системи, що утворена з рівнянь даних площин, одержимо: $x=\frac{8}{5}, y=-\frac{9}{5}, z=0.$ і я $f(x)\geq 0$ для $f(x)\geq 0$ і ця $f(x)\geq 0$ і ц

З умови випливає компланарність знайденого напрямного вектора, даного за умовою $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ і довільного вектора шуканої площини $\overrightarrow{M_0M}=\left(x-\frac{8}{5}\right)\vec{i}+\left(y+\frac{9}{5}\right)\vec{j}+z\vec{k}$. Її рівняння знайдемо, прирівнявши нулю мішаний добуток вказаних трьох векторів:

$$\begin{vmatrix} x-\frac{8}{5} & y+\frac{9}{5} & z \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-\frac{8}{5}+z=0 \Leftrightarrow 5x+5z-8=0.$$

Рівняння прямої у просторі

Задача 15.16. Відомо координати вершин трикутника:

$A(2;-1;-3), B(5;2;-7), C(-7;11;6).$

Скласти рівняння внутрішнього, а також зовнішнього кутів при вершині A.

Розв'язання. Знайдемо вектори сторін трикутника:

$\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}, \overrightarrow{AC}=-9\vec{i}+12\vec{j}+9\vec{k}.$

Відповідні їм орти:

$$\vec{e}_1 \parallel \overrightarrow{AB},\ \vec{e}_1=\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{j}-\frac{4}{\sqrt{34}}\vec{k},$$

$$\vec{e}_2 \parallel \overrightarrow{AC},\ \vec{e}_2=-\frac{9}{3\sqrt{34}}\vec{i}+\frac{12}{3\sqrt{34}}\vec{j}+\frac{9}{3\sqrt{34}}\vec{k}=-\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{i}+\frac{4}{\sqrt{34}}\vec{j}+\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{k}.$$

Звідси одержуємо напрямний вектор бісектриси внутрішнього кута при вершині A:

$$\vec{e}_1+\vec{e}_2=\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{j}-\frac{4}{\sqrt{34}}\vec{k}-\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{i}+\frac{4}{\sqrt{34}}\vec{j}+\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{k}=$$

$$=\frac{7}{\sqrt{34}}\vec{j}-\frac{1}{\sqrt{34}}\vec{k}=\frac{1}{\sqrt{34}}\left(7\vec{j}-\vec{k}\right).$$

Напрямним для бісектриси зовнішнього кута буде вектор, наприклад,

$$\vec{e}_1-\vec{e}_2=\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{j}-\frac{4}{\sqrt{34}}\vec{k}+\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{i}-\frac{4}{\sqrt{34}}\vec{j}-\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{k}=$$

$$=\frac{6}{\sqrt{34}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{34}}\vec{j}-\frac{7}{\sqrt{34}}\vec{k}=\frac{1}{\sqrt{34}}\left(6\vec{i}-\vec{j}-7\vec{k}\right).$$

Тепер можна записати рівняння бісектрис кутів при вершині A.

Бісектриса внутрішнього кута:

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y+1}{7}=\frac{z+3}{-1}.$$

Бісектриса зовнішнього кута:

$$\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{-7}.$$

Мимобіжні прямі

Задача 15.17. Нехай є дві мимобіжні прямі:

$$\mathcal{L}_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\mathcal{L}_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Написати рівняння паралельних площин, в яких вони лежать, знайти відстань між цими прямим і написати рівняння загального перпендикуляра до цих прямих.

Зауважимо, що умова мимобіжності полягає в тому, що напрямні вектори $\vec{q}_1\sim\left(l_1,m_1,n_1\right)^T$, $\vec{q}_2\sim\left(l_2,m_2,n_2\right)^T$ прямих не колінеарні, а також в тому, що система цих рівнянь несумісна. В цьому треба пересвідчитись, розв'язуючи конкретну задачу.

Вектор нормалі до двох паралельних площин знайдемо за допомогою векторного добутку напрямних векторів прямих:

$$\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}l_1 & n_1\\ l_2 & n_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}l_1 & m_1\\ l_2 & m_2\end{vmatrix}\vec{k}\triangleq N_x\vec{i}+N_y\vec{j}+N_z\vec{k}.$$

Далі рівняння паралельних площин, в кожній з яких лежать відповідна пряма, запишеться у вигляді:

$$\mathcal{P}_1: N_x\left(x-x_1\right)+N_y\left(y-y_1\right)+N_z\left(z-z_1\right)=0,$$

$$\mathcal{P}_2: N_x\left(x-x_2\right)+N_y\left(y-y_2\right)+N_z\left(z-z_2\right)=0.$$

Відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані між одержаними паралельними площинами. Її можна знайти як модуль відхилення, скажімо, точки $M_1\left(x_0,y_1,z_1\right)$ від другої площини.

Перейдемо до знаходження спільного перпендикуляру до двох мимобіжних прямих, який перетинає кожну з них.

Знайдемо рівняння двох площин $\tilde{\mathcal{P}}_1, \tilde{\mathcal{P}}_2$, що проходять через, відповідно, прямі $\mathcal{L}_1$, і $\mathcal{L}_2$ і ортогональні до $\mathcal{P}_1$.

Очевидно, напрямний вектор першої прямої і знайдений перпендикуляр до пари площин, в яких лежать дані мимобіжні прямі, паралельні шуканій площині $\tilde{\mathcal{P}}_1$, компланарні, тому її рівняння запишеться у вигляді

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогічний вигляд буде мати рівняння площини $\tilde{\mathcal{P}}_2$:

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} = 0.$$

Система цих двох рівнянь і визначає спільний перпендикуляр. За допомогою описаної процедури від системи можна перейти до канонічного рівняння.

Реалізуємо цей алгоритм, маючи конкретні рівняння:

$$\mathcal{L}_1 : \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2},$$
$$\mathcal{L}_2 : \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}.$$

Дослідимо, чи мають ці рівняння спільні точки. Розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4(x+7)-3(y+4)=0, \\ y+4+2(z+3)=0, \\ 2(x-21)+3(y+5)=0, \\ y+5-4(z-2)=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=-16, \\ y+4+2z=-10, \\ 2x+3y=27, \\ y-4z=-13. \end{cases}$$

Для дослідження застосуємо метод Гауса:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & | & 27 \\ 0 & 1 & 2 & | & -10 \\ 4 & -3 & 0 & | & -16 \\ 0 & 1 & -4 & | & -13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & | & 27 \\ 0 & 1 & 2 & | & -10 \\ 0 & -9 & 0 & | & -70 \\ 0 & 1 & -4 & | & -13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & | & 27 \\ 0 & 1 & 2 & | & -10 \\ 0 & 0 & 18 & | & -160 \\ 0 & 0 & -6 & | & -3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & | & 27 \\ 0 & 1 & 2 & | & -10 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 18 & | & -160 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & | & 27 \\ 0 & 1 & 2 & | & -10 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -169 \end{pmatrix}.$$

Система несумісна за теоремою Кронекера-Капеллі, значить, прямі мимобіжні. Знайдемо вектор нормалі до двох напрямних векторів даних прямих:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 9\vec{j} - 36\vec{k} = -3\left(4\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}\right).$$

Знайдемо тепер рівняння паралельних площин, в кожній з яких лежить відповідна пряма.

Перша площина, в який лежить пряма $\mathcal{L}_1 : \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$:

$$4(x+7) + 3(y+4) + 12(z+3) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{13}x - \frac{3}{13}y - \frac{12}{13}z - \frac{76}{13} = 0.$$

Друга площина, в який лежить пряма $\mathcal{L}_2 : \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$::

$$4(x-21) + 3(y+5) + 12(z-2) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{13}x + \frac{3}{13}y + \frac{12}{13}z - \frac{93}{13} = 0.$$

Оскільки орти нормалей до паралельних площин мають протилежні напрямки, відстань між ними (а також між мимобіжними прямими, що лежать у цих площинах), дорівнює сумі відхилень кожної площини від початку координат:

$d(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2)=\frac{76}{13}+\frac{93}{13}=13.$

Перейдемо до знаходження спільного перпендикуляру до двох мимобіжних прямих, який перетинає кожну з них.

Знайдемо рівняння двох площин $\tilde{\mathcal{P}}_1, \tilde{\mathcal{P}}_2$, що проходять через, відповідно, прямі $\mathcal{L}_1$, і $\mathcal{L}_2$ і ортогональні до $\mathcal{P}_1$.

Очевидно, напрямний вектор $3\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$ першої прямої і знайдений перпендикуляр $4\vec{i}+3\vec{j}+12\vec{k}$ до першої площини, в якій лежить перша з мимобіжних прямих, і довільний вектор шуканої площини $\tilde{\mathcal{P}}_1$ компланарні, тому її рівняння запишеться у вигляді

$$\begin{vmatrix} x+7 & y+4 & z+3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 12 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 54(x+7)-44(y+4)+7(z+3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 54x-44y+7z+223=0.$$

Аналогічним чином знаходимо площину $\tilde{\mathcal{P}}_2$, в якій лежить друга пряма $\mathcal{L}_2:\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$ і перпендикуляр до площини, в якій лежить ця друга пряма:

$$\begin{vmatrix} x-21 & y+5 & z-2 \\ 6 & -4 & -1 \\ 4 & 3 & 12 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -45(x-21)-76(y+5)+34(z-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -45x-76y+34z+497=0 \Leftrightarrow 45x+76y-34z-497=0.$$

Тепер рівняння спільного перпендикуляра до мимобіжних прямих визначається як лінія перетину одержаних площин, що описується системою

$$\begin{cases} 54x - 44y + 7z + 223 = 0, \\ 45x + 76y - 34z - 497 = 0. \end{cases}$$

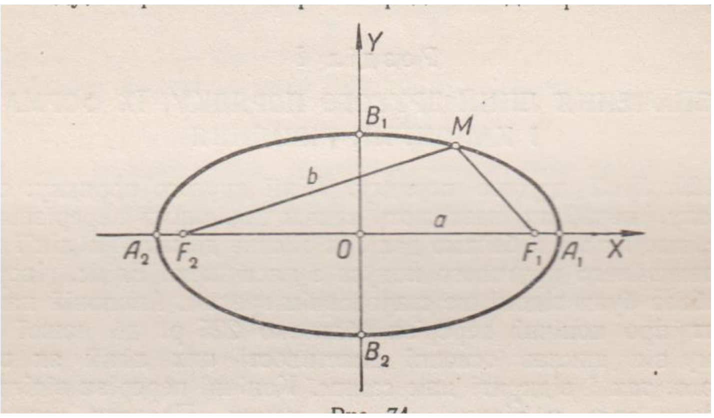
Знаходження канонічного рівняння – відома процедура, що полягає у обчисленні координат напрямного вектору як векторного добутку векторів нормалей до площин і визначенні якоїсь точки на прямій – вона задовольняє систему, і таких точок безліч. Читач легко знайде канонічне рівняння прямої, спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих.

15). **Завдання для самостійної роботи:** [10], №№ 342-349.

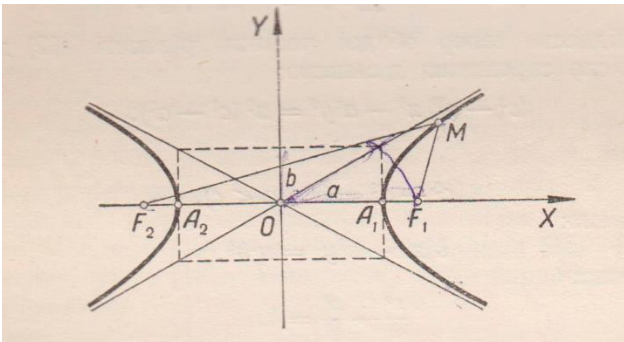
Практичне заняття 16. Криві другого порядку на площині. Канонічні рівняння, рівняння у полярних координатах та параметричні. Ексцентриситет та директриса кривої другого порядку.

Означення 16.1. Еліпсом називається геометричне місце точок на площині таке, що сума відстаней від кожної з них до двох фіксованих точок цієї площини, що називаються фокусами, є величина стала.

Зауваження. Якщо два фокуси співпадають, то еліпс є колом.



Означення 15.4. Гіперболою називається геометричне місце точок на площині таке, що модуль різниці відстаней від кожної з них до двох фіксованих точок цієї площини, що називаються фокусами, є величина стала (Мал. 15.3).



Мал. 15.3

Нехай вибрано фокуси $F_1(c,0), F_2(-c,0), c \geq 0$, $M(x,y)$ - довільна точка кривої, відстані від неї до фокусів називаються фокальними радіусами. У випадку еліпса $r_1 + r_2 = 2a$, для гіперболи $|r_1 - r_2| = 2a$.

Фокальні радіуси:

$\left\lvert\overrightarrow{F_1M}\right\rvert = r_1 = \sqrt{\left(x-c\right)^2 + y^2}, \left\lvert\overrightarrow{F_1M}\right\rvert = r_2 = \sqrt{\left(x+c\right)^2 + y^2}.$	(16.1)

Позначення: a - горизонтальна піввісь еліпса, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ - вертикальна піввісь еліпса, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ - гіперболи.

Канонічне рівняння еліпса:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$	(16.2)

Канонічне рівняння гіперболи:

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$	(16.3)

Означення 16.2. Ексцентриситетом ε еліпса, а також гіперболи називається відношення:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$	(16.4)

Для фокальних радіусів еліпса мають місце формули

$$\begin{cases} r_1 = a - \varepsilon x, \\ r_2 = a + \varepsilon x. \end{cases}$$	(16.5)

Для фокальних радіусів гіперболи –

$$\begin{cases} x > 0, r_2 > r_1: \\ r_1 = \varepsilon x - a, \\ r_2 = \varepsilon x + a, \end{cases} \begin{cases} x < 0, r_2 < r_1: \\ r_1 = a - \varepsilon x, \\ r_2 = -a - \varepsilon x. \end{cases}$$	(16.6)

Означення 15.3. Директрисами еліпса, а також гіперболи називаються дві вертикальні прямі, що мають рівняння:

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}.$$	(16.6)

Якщо d_1, d_2 - відстані точки кривої до, відповідно, лівої та правої директрис, то мають місце співвідношення:

$$\varepsilon = \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2}.$$	(16.7)

Дотична до еліпса

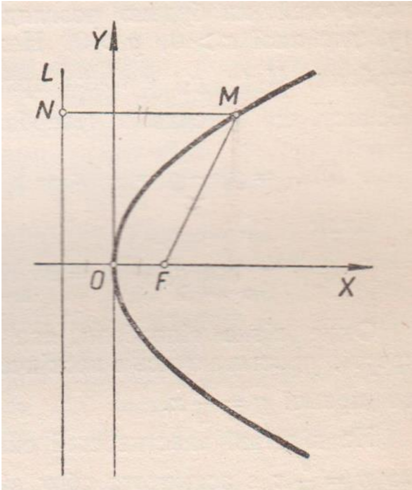
$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$	(16.8)

Дотична до гіперболи

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1.$$	(16.9)

Канонічне рівняння параболи

Означення 15.5. Параболою називається геометричне місце точок, відстань від кожної з яких до фіксованої точки площини, що називається фокусом, дорівнює відстані до прямої, що лежить на цій площині, яка називається директрисою (Мал. 16.3.).



Мал. 16.3.

Фокус має координати $F\left(\frac{p}{2},0\right)$. Директриса має рівняння $x=-\frac{p}{2}$.

Канонічне рівняння параболи:

$$y^2=2px.$$	(16.10)

Константа p називається параметром параболи.

Ексцентриситет параболи визначається за форулою

	(16.11)

$\varepsilon = \frac{r}{d} = 1.$	

Дотична до параболи

$y_0 y = p\left(x + x_0\right).$	(16.12)

Задача 16.1. Дано рівняння еліпса: $5x^2 + 9y^2 = 45$. Знайти 1) півосі, 2) фокуси, 3) ексцентриситет, 4) рівняння директрис.

Розв'язання. Запишемо канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = 1.$$

Звідси 1) $a = 3$, $b = \sqrt{5}$; 2) $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 5} = 2$; фокуси мають координати $F_1\left(-2;0\right), F_2\left(2;0\right)$; 3) $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$; 4) $d_{1,2} = \pm \frac{3}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \pm \frac{9}{2}$.

Задача 16.2. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо відрізки *AB* і *OC* (див. Мал.) паралельні.

Розв'язання. Знайдемо ординату точки C: $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = b\sqrt{1 - \varepsilon^2}$.

Умова паралельності відрізків полягає у справедливості рівності

$$\frac{b\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{c} = \frac{b}{a} \Rightarrow \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon^2 = \varepsilon^2 \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Задача 16.3. Скласти рівняння еліпса, якщо його правий фокус має координати $F\left(2;0\right)$, ексцентриситет дорівнює $\varepsilon = \frac{2}{3}$, рівняння правої директриси: $x = 5$.

Розв'язання. Маємо:

$$a = 5\varepsilon = \frac{10}{3} \Rightarrow c = \varepsilon a = \frac{10}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{9} \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{10}{9}\sqrt{5}.$$

Канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{10}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{10}{9}\sqrt{5}\right)^2} = 1.$$

Задача 16.3. Довести, що добуток відстаней від фокусів до дотичної, проведеної в будь-якій точці еліпса, є величина стала, що дорівнює квадрату його малої півосі.

Доведення. Запишемо нормальне рівняння, що відповідає рівнянню дотичної до еліпса:

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - 1 = 0 \Rightarrow \frac{b^2 x_0 x + a^2 y_0 y - a^2 b^2}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}} = 0.$$

Звідси знайдемо відстані від фокусів до дотичної – вони дорівнюють відхиленням фокусів, взятим з протилежним знаком:

$$d_1 = -\delta\left(F_1\right) = \frac{b^2 c x_0 + a^2 b^2}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}}, d_2 = -\delta\left(F_2\right) = \frac{a^2 b^2 - b^2 c x_0}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}}.$$

Звідси

$$d_1 d_2 = \frac{b^2 c x_0 + a^2 b^2}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}} \frac{a^2 b^2 - b^2 c x_0}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}} = \frac{b^4\left(a^4 - c^2 x_0^2\right)}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2} = \frac{b^4\left(a^4 - c^2 x_0^2\right)}{b^2\left(b^2 x_0^2 + a^4 \frac{y_0^2}{b^2}\right)} =$$

$$= \frac{b^4\left(a^4 - c^2 x_0^2\right)}{b^2\left(b^2 x_0^2 + a^4\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right)\right)} = \frac{b^2\left(a^4 - c^2 x_0^2\right)}{b^2 x_0^2 + a^4 - a^2 x_0^2} = \frac{b^2\left(a^4 - c^2 x_0^2\right)}{\left(b^2 - a^2\right) x_0^2 + a^4} =$$

$$=\frac{b^2\left(a^4-c^2x_0^2\right)}{a^4-c^2x_0^2}=b^2.$$

Гіпербола

Задача 16.4. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо:

1) $c=3,\ \varepsilon=\frac{5}{4};$ і ц

2) $c=10,$ рівняння асимптот: $y=\pm\frac{4}{3}x;$

3) $c=13;$ а відстань між директрисами дорівнює $\frac{288}{13};$

4) $\varepsilon=\frac{3}{2},$ а відстань між директрисами дорівнює $\frac{8}{3};$

5) рівняння асимптот: $y=\pm\frac{3}{4}x,$ а відстань між директрисами дорівнює $\frac{64}{5}.$

Розв'язання.

1) $c=3,\ \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{a}=\frac{5}{4}\Rightarrow a=\frac{12}{5}, b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{9-\frac{144}{25}}=\frac{9}{5}.$

Канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{\left(\frac{12}{5}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{9}{5}\right)^2}=1.$

2) $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=\frac{4}{3}\Rightarrow 3\sqrt{100-a^2}=4a\Rightarrow 900-9a^2=16a^2\Rightarrow a=6, b=8.$

Канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1.$

3). $\frac{a}{\varepsilon}=\frac{a^2}{c}=\frac{a^2}{13}=\frac{144}{13}\Rightarrow a^2=144\Rightarrow b^2=169-144=25.$

Канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1.$

4). $\frac{a}{\varepsilon}=\frac{a}{\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{8}{3}\Rightarrow a=4\Rightarrow\frac{c}{4}=\frac{3}{2}\Rightarrow c=6\Rightarrow b^2=c^2-a^2=36-16=20.$

Канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1.$

5). $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}\Rightarrow b=\frac{3}{4}a,\ \frac{a^2}{c}=\frac{32}{5}\Rightarrow 5a^2=32\sqrt{a^2+b^2}=$

$=32\sqrt{\left(1+\frac{9}{16}\right)a^2}=32\cdot\frac{5}{4}a=40a\Rightarrow a=8, b=6.$

Канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$

Задача 16.5. $\varepsilon=\frac{3}{2},$ директриса: $x=-8$. Обчислити відстань r_1 від точки гіперболи M_1 з абсцисою $x_1=10$ до фокуса F_1 з від’ємною абсцисою.

Розв’язання. Відстань від точки до даної директриси дорівнює $d_1=10-(-8)=18.$ $\varepsilon=\frac{3}{2}=\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_1}{18}\Rightarrow r_1=27.$

Задача 16.6. Довести, що площа паралелограма, обмеженого асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ і прямими, проведеними через довільну точку $M_0\left(x_0,y_0\right)$ паралельно асимптотам, є величина стала, що дорівнює $\frac{ab}{2}$.

Доведення. Напишемо рівняння сторони паралелограма, що паралельна асимптоті $y=\frac{b}{a}x: y=\frac{b}{a}\left(x-x_0\right)+y_0$. Знайдемо точку перетину цієї прямої з асимптотою $y=-\frac{b}{a}x$:

$$\begin{cases} y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}x_0+y_0, \\ y=-\frac{b}{a}x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}x_0-\frac{a}{2b}y_0=-\frac{ay_0-bx_0}{2b}, \\ y=\frac{ay_0-bx_0}{2a}. \end{cases}$$

Аналогічно знайдемо сторону, що паралельна асимптоті $y=-\frac{b}{a}x: y=-\frac{b}{a}\left(x-x_0\right)+y_0$. Знайдемо її точку перетину з асимптотою $y=\frac{b}{a}x.$

$$\begin{cases} y=-\frac{b}{a}x+\frac{b}{a}x_0+y_0, \\ y=\frac{b}{a}x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}x_0+\frac{a}{2b}y_0=\frac{ay_0+bx_0}{2b}, \\ y=\frac{ay_0+bx_0}{2a}. \end{cases}$$

Паралелограм побудовано на векторах із знайденими координатами. Його площа - це модуль їхнього векторного добутку:

$$S=\operatorname{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{ay_0-bx_0}{2b} & \frac{ay_0-bx_0}{2a} & 0 \\ \frac{ay_0+bx_0}{2b} & \frac{ay_0+bx_0}{2a} & 0 \end{vmatrix}=\frac{\left(ay_0-bx_0\right)\left(ay_0+bx_0\right)}{4\left(ab\right)^2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & b & 0 \\ a & b & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2ab\left|a^2y_0^2-b^2x_0^2\right|}{4\left(ab\right)^2}=\frac{\left(ab\right)^2\left|\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{x_0^2}{a^2}\right|}{2ab}=\frac{ab}{2}.$$

Задача 16.7. Довести, що еліпс і гіпербола, що мають спільні фокуси, перетинаються під прямим кутом.

Доведення. Нехай a,b - півосі еліпса, a_1,b_1 - півосі гіперболи. За умовою

$c^2 = a^2 - b^2 = a_1^2 + b_1^2$. Запишемо рівняння дотичних до обох кривих у точці $M_0(x_0, y_0)$ їхнього перетину: $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1,\ \frac{x_0}{a_1^2}x - \frac{y_0}{b_1^2}y = 1.$ Доведемо, що в точці перетину скалярний добуток між векторами нормалей до дотичних дорівнює нулю.

$$\left(\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)^T, \left(\frac{x_0}{a_1^2}, -\frac{y_0}{b_1^2}\right)^T\right) = \frac{x_0^2}{a^2 a_1^2} - \frac{y_0^2}{b^2 b_1^2}.$$

Спільна точка кривих задовольняє їхнім рівнянням, в результаті чого одержимо:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{x_0^2}{a_1^2} - \frac{y_0^2}{b_1^2} \Rightarrow \left(b^2 + b_1^2\right)\frac{y_0^2}{b^2 b_1^2} = \frac{a^2 - a_1^2}{a^2 a_1^2}x_0^2 \Rightarrow \frac{y_0^2}{b^2 b_1^2} = \frac{a^2 - a_1^2}{a^2 a_1^2\left(b^2 + b_1^2\right)}x_0^2.$$

Підставимо цей вираз в останнє значення скалярного добутку векторів нормалей дотичних:

$$\left(\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)^T, \left(\frac{x_0}{a_1^2}, -\frac{y_0}{b_1^2}\right)^T\right) = \frac{x_0^2}{a^2 a_1^2} - \frac{y_0^2}{b^2 b_1^2} = \frac{x_0^2}{a^2 a_1^2} - \frac{a^2 - a_1^2}{a^2 a_1^2\left(b^2 + b_1^2\right)}x_0^2 =$$

$$= \frac{\left(a_1^2 + b_1^2\right) - \left(a^2 - b^2\right)}{a^2 a_1^2\left(b^2 + b_1^2\right)}x_0^2 = \frac{c^2 - c^2}{a^2 a_1^2\left(b^2 + b_1^2\right)}x_0^2 = 0.$$

Це й треба було довести.

Парабола

Задача 16.8. Знайти фокус і рівняння директриси параболи $y^2 = 24x$.

Розв’язання. $y^2 = 24x \Rightarrow 2p = 24 \Rightarrow p = 12, \frac{p}{2} = 6.$ Отже, фокус параболи має координати $F(6;0)$, директриса має рівняння $x = -6$.

Задача 16.9. Провести дотичну до параболи $y^2=12x$ паралельно прямій $3x-2y+30=0$ і обчислити відстань d між дотичною і даною прямою.

Розв'язання. Рівняння дотичної до параболи: $y_0y=p\left(x+x_0\right)$. В даному випадку $p=6$ і рівняння перепишеться у вигляді $6x-y_0y+6x_0=0.$ З паралельності шуканої дотичної до даної прямої випливає колінеарність їхніх векторів нормалей: $\frac{6}{3}=\frac{-y_0}{-2}\Rightarrow y_0=4\Rightarrow 12x_0=16\Rightarrow x_0=\frac{4}{3}.$ Рівняння дотичної буде мати вигляд: $6x-4y+8=0\Rightarrow 3x-2y+$ Її відстань до початку координат дорівнює $\frac{8}{\sqrt{13}}.$ Відстань від даної прямої до початку координат дорівнює $\frac{30}{\sqrt{13}}.$ Оскільки орти нормалей до прямих мають однакові напрямки, відстань між ними дорівнює $\frac{30}{\sqrt{13}}-\frac{4}{\sqrt{13}}=2\sqrt{13}.$

Задача 16.10. Знайти рівняння геометричного місця точок, дотичні до параболи $y^2=2px$, що проходять через них, ортогональні.

Розв'язання. Нехай $M_0\left(x_0,y_0\right)$ - довільна точка з шуканого геометричного місці точок. Пряма, яка проходить через неї, має рівняння $y=k\left(x-x_0\right)+y_0,\ k\neq 0.$ Звідси $x=x_0+\frac{y-y_0}{k}.$ Підставимо це значення в рівняння параболи: $y^2=2p\left(x_0+\frac{y-y_0}{k}\right)\Rightarrow ky^2-2py+2p\left(y_0-kx_0\right)=0$. Умова дотику полягає в тому, що це рівняння повинно мати однакові корені, що еквівалентне тому, що її дискримінант (в даному випадку зручніше взяти дискримінант, ділений на 4), дорівнює нулю:

$$p^2-2p\left(y_0-kx_0\right)k=0\Rightarrow 2x_0k^2-2y_0k+p=0.$$

Умова ортогональності дотичних для їхніх кутових коефіцієнтів записується таким чином: $k_1k_2 = -1$. З формули Вієта одержуємо: $\frac{p}{2x_0} = -1 \Rightarrow x_0 = -\frac{p}{2}$.

Тобто, знайдене геометричне місце точок – пряма, директриса параболи.

Задача 16.11. Довести, що якщо дві параболи із взаємно перпендикулярними осями мають чотири точки перетину, то вони лежать на одному колі.

Доведення. Нехай маємо рівняння парабол:

$$y = a_1x^2 + b_1x + c_1, x = a_2y^2 + b_2y + c_2.$$

Система рівнянь від двох змінних за умовою має чотири розв'язки:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 - y = 0, \\ a_2y^2 + b_2y + c_2 - x = 0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що лінійна комбінація цих (і подібних) рівнянь має ті ж розв'язки. Домножимо перше рівняння на a_2, а друге на a_1 і додамо:

$$a_1a_2\left(x^2 + y^2\right) + \left(a_2b_1 - a_1\right)x + \left(a_1b_2 - a_2\right)y + a_2c_1 + a_1c_2 = 0.$$

Оскільки коефіцієнти при квадратах змінних однакові, це рівняння кола.

16). **Завдання для самостійної роботи:** [10], №№ 444, 445, 515, 515, 557, 585, 614-618.

Практичне заняття 17. Рівняння кривих другого порядку у полярних координатах та у параметричній формі. Загальне рівняння другого порядку та його перетворення за допомогою зсуву.

Теоретичні відомості

Розглядаються зразу три криві другого порядку. Вважається, що полярний центр співпадає з лівим фокусом у випадку еліпса, правим фокусом у випадку гіперболи і фокусом у випадку параболи.

Через полярний центр проводиться перпендикуляр до координатної осі Ox і половина довжини утвореної хорди, тобто, відрізок між фокусом і точкою P на кривій позначається через p. Він називається полярним параметром кривої. Для параболи цей параметр є відстанню фокуса до директриси, і він входить у її рівняння у декартових координатах. Нехай $x = d_0$ - рівняння директриси. Для еліпса $d_0 = -\frac{a}{\varepsilon}$, для гіперболи $d_0 = \frac{a}{\varepsilon}$, для параболи $d_0 = -\frac{p}{2}$.

Відстань d' від точки P до директриси, як відомо, знаходиться за формулою $d' = \frac{p}{\varepsilon}$. Нехай полярний радіус точки P дорівнює ρ і він утворює кут φ з додатним напрямком осі Ox. Якщо d - відстань від довільної точки кривої до директриси, то $d = d' + \rho\cos\varphi = \frac{p}{\varepsilon} + \rho\cos\varphi.$ Отже,

$$\frac{\rho}{\frac{p}{\varepsilon} + \rho\cos\varphi} = \varepsilon \Rightarrow \rho = p + \varepsilon\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

Одержали рівняння кривої другого порядку у полярних координатах, в якому міститься константа – полярний параметр кривої:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$	(17.1)

Параметр p для еліпса і гіперболи – ордината точки кривої, якщо її абсциса дорівнює $\pm c$.

Параметр еліпса:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1 \Rightarrow p^2 = \frac{b^2\left(a^2 - c^2\right)}{a^2} = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow p = \frac{b^2}{a}.$$

Також

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = a - c\frac{c}{a} = a - \varepsilon c.$$

Отже, для еліпса

$p=\dfrac{b^2}{a}=a-\varepsilon c.$	(17.2)

Параметр гіперболи:

$$\frac{c^2}{a^2}-\frac{p^2}{b^2}=1\Rightarrow p^2=\frac{b^2\left(c^2-a^2\right)}{a^2}=\frac{b^4}{a^2}\Rightarrow p=\frac{b^2}{a}.$$

Також

$$p=\frac{b^2}{a}=\frac{c^2-a^2}{a}=c\frac{c}{a}-a=\varepsilon c-a.$$

Отже, для гіперболи

$p=\dfrac{b^2}{a}=\varepsilon c-a.$	(17.3)

Задача 17.1. У полярних координатах скласти рівняння еліпса, що заданий канонічним рівнянням, якщо полярний центр знаходиться:

а) у лівому фокусі $F_2(-c;0)$

б) у правому фокусі $F_1(c;0)$.

Розв'язання. а). Використаємо другу формулу (16.5): $r=a+\varepsilon x.$ Також з геометричних уявлень $x+c=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi.$ Виключаючи з цих рівнянь абсцису, з урахуванням (17.2) одержимо:

$$x=r\cos\varphi-c,\varepsilon x=r-a$$

$$\varepsilon\left(r\cos\varphi-c\right)=r-a\Rightarrow r=\frac{a-\varepsilon c}{1-\varepsilon\cos\varphi}=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}.$$

б). Використаємо першу формулу (16.5): $r = a - \varepsilon x.$ Також з геометричних уявлень $x - c = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi.$ Виключаючи з цих рівнянь абсцису, з урахуванням (17.2) одержимо:

$$x = c + r\cos\varphi, \varepsilon x = a - r \Rightarrow$$
$$\varepsilon\left(r\cos\varphi + c\right) = a - r \Rightarrow r = \frac{a - \varepsilon c}{1 + \varepsilon\cos\varphi} = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

Задача 17.2. У полярних координатах скласти рівняння гіперболи, що задана канонічним рівнянням, якщо полярний центр знаходиться:

а) у лівому фокусі $F_2(-c;0)$

б) у правому фокусі $F_1(c;0)$.

Розв'язання. а). Розглянемо спочатку праву гілку гіперболи, $x > 0$. Використаємо другу формулу (16.6): $r = a + \varepsilon x.$ Також з геометричних уявлень $x + c = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi.$ Виключаючи з цих рівнянь абсцису, з урахуванням (17.3) одержимо:

$$r = -\frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

Розглянемо тепер ліву гілку гіперболи, $x < 0$.

Використаємо першу формулу (16.6): $r = -a - \varepsilon x.$ Також з геометричних уявлень $x + c = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi.$ Звідси $\varepsilon x = -a - r, x = r\cos\varphi - c$ Виключаючи з цих рівнянь абсцису, з урахуванням (17.3) одержимо:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

б). Розглянемо спочатку ліву гілку гіперболи, $x < 0$. Використаємо другу формулу (16.6): $r = a - \varepsilon x.$ Також з геометричних уявлень $x - c = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi.$ Звідси $\varepsilon x = a - r, x = r\cos\varphi + c$. Виключаючи з цих рівнянь абсцису, з урахуванням (17.3) одержимо:

$$r = -\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}.$$

Розглянемо тепер праву гілку гіперболи, $x > 0$. Використаємо першу формулу (16.6): $r = \varepsilon x - a$. Також з геометричних уявлень $x - c = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Звідси $\varepsilon x = a + r, x = r\cos\varphi + c$. Виключаючи з цих рівнянь абсцису, з урахуванням (17.3) одержимо:

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}.$$

Задача 17.3. Визначити тип кривої, рівняння якої у полярних координатах має вигляд $\rho = \frac{21}{5-2\cos\varphi}$. Скласти канонічне рівняння (у декартових координатах) і рівняння директрис кривої у полярних координатах.

Розв'язання. $\rho = \frac{21}{5-2\cos\varphi} = \frac{4,2}{1-0,4\cos\varphi}.$

Звідки випливає, що це еліпс з ексцентриситетом $\varepsilon = 0,4$ і параметром $p = 0,4.$

Полярний центр знаходиться в лівому фокусі.

Маємо:

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{c}{a} = 0,4, \\ \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{a^2 - c^2}{a} = 4,2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0,4a, \\ \dfrac{a^2\left(1-\varepsilon^2\right)}{a} = 4,2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0,4a, \\ a = \dfrac{4,2}{0,84} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5, \\ c = 2, \\ b^2 = 21. \end{cases}$$

Канонічне рівняння еліпса: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1.$

В декартових координатах рівняння директрис: $x = \pm\frac{5}{0,4} = \pm\frac{25}{2}.$

Для лівої директриси $\dfrac{\left(-\dfrac{25}{2}+2\right)}{\rho}=\cos\varphi \Rightarrow \rho=-\dfrac{21}{2\cos\varphi}$.

Для правої директриси $\dfrac{\left(\dfrac{25}{2}+2\right)}{\rho}=\cos\varphi \Rightarrow \rho=\dfrac{29}{2\cos\varphi}$.

Задача для самостійного розв'язання. Скласти рівняння гіперболи у полярних координатах, що задана канонічним рівнянням, якщо полярний центр знаходиться центрі гіперболи.

Відповідь: $\rho=\dfrac{b^2}{\varepsilon^2\cos^2\varphi-1}$.

Перетворення зсуву

Нехай $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{r}\,'$. Координати вектора $\vec{r}$ називаються старими, координати $\vec{r}\,'$ - новими. Задача полягає в перетворенні рівняння лінії з застосуванням зсуву. Нехай її рівняння лінії на площині $F(x,y)=0$. Після перетворення зсуву будемо мати: $F(x_0+x',y_0+y')=0 \Rightarrow \tilde{F}(x',y')=0$.

Задача 17.4. За допомогою перетворення зсуву перетворити рівняння так, щоб не було змінних у перших степенях рівняння $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$.

Розв'язання.

Перетворення зсуву: $\begin{aligned}x&=x_0+x',\\ y&=y_0+y'.\end{aligned}$

Маємо:

$$4\left(x_0+x'\right)^2+9\left(y_0+y'\right)^2-40\left(x_0+x'\right)+36\left(y_0+y'\right)+100=0 \Leftrightarrow$$

$$4\left(x_0+x'\right)^2+9\left(y_0+y'\right)^2-40\left(x_0+x'\right)+36\left(y_0+y'\right)+100=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}&4x'^2+9y'^2+8\left(x_0-5\right)x'+18\left(y_0+2\right)y'+\\&+4x_0^2+9y_0^2-40x_0+36y_0+100=0.\end{aligned}$$

Якщо вибрати $x_0 = 5, y_0 = -2$, прийдемо до рівняння

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

17). **Завдання для самостійної роботи:** [10], №№ 632-335, 642, 668.

Практичне заняття 18. Перетворення рівняння кривої другого порядку шляхом повороту координатних осей

Оскільки зсув не завжди (у випадку виродженої матриці A) може звести загальне рівняння до вигляду (17.10), будемо вивчати, як на загальне рівняння діє поворот координатних осей. Отже, розглядається рівняння

$(A\xi, \xi) + 2(a, \xi) + b = 0.$	(18.1)

Треба шляхом повороту координатних осей звести його до канонічного вигляду. Задача відповідає зведенню до діагональної форми матриці A.

Далі ми зведемо квадратичну форму у новому базисі $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ до канонічного вигляду з матрицею

$A' = \begin{pmatrix} a_{11}' & 0 \\ 0 & a_{22}' \end{pmatrix}, a_{21}' = a_{12}' = 0.$	(18.2)

Тоді рівняння перепишеться у вигляді

$(A'x', x') = a_{11}' x_1'^2 + a_{22}' x_2'^2 = c.$	(18.3)

Слід відзначити, що при $C=0$ і різних знаках власних чисел λ_1, λ_2 рівняння визначає пару прямих, що перетинаються; якщо знаки λ_1, λ_2 однакові, то дійсних розв'язків рівняння немає, і кажуть про пару уявних прямих.

Оскільки при переході до нового базису характеристичне рівняння не змінюється, то не змінюються його корені. Тому коефіцієнти a'_{11}, a'_{22} діагональної матриці співпадають з власними числами матриці $A: \lambda_1, \lambda_2$. Нагадаємо – вони знаходяться як корені характеристичного рівняння

$\lambda^2 - \left(a_{11}+a_{22}\right)\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$	(18.4)

Якщо зразу виписати канонічну форму у вигляді

$(A'x', x') = a'_{11}\left(x'_{11}\right)^2 + a'_{22}\left(x'_{22}\right)^2.$	(18.5)

немає гарантії, що здійснено саме поворот координатних осей. Можливий випадок, коли дане перетворення – це поворот і дзеркальне відображення, що не відповідатиме геометричній постановці задачі.

Вивчимо детальніше перетворення координат, що відповідає повороту координатних осей.

Нехай є система координат xOy. Повернемо її на кут φ (φ >0, коли поворот здійснюється проти годинникової стрілки, φ <0, якщо за годинниковою стрілкою), і одержимо нову систему $x'Oy'$. Знайдемо зв'язок між координатами вектора в старій і новій системах координат. Нехай $\{e_1, e_2\}$ і $\{e_1', e_2'\}$-ортонормовані базиси, напрямні орти осей. З умови випливає, що кут між e'_1 i e_1 дорівнює φ, між e'_1 i e_2 дорівнює $\frac{\pi}{2}-\varphi$, між e'_2 і e_1 дорівнює $\frac{\pi}{2}+\varphi$, між e'_2 і e_2 дорівнює φ. Застосуємо відому схему визначення матриці оператора повороту $U(\varphi)$

$\begin{cases} e_1' = U(\varphi)e_1 = u_{11}e_1 + u_{21}e_2, \\ e_2' = U(\varphi)e_2 = u_{12}e_1 + u_{22}e_2. \end{cases}$	(18.6)

Для знаходження коефіцієнтів розкладу помножимо скалярно обидві частини кожного розкладу на вектори e_1 i e_2, враховуючи, що скалярний добуток одиничних векторів дорівнює косинусу кута між ними. В результаті одержимо:

$\begin{cases} e_1' = U(\varphi)e_1 = (\cos\varphi)e_1 + (\sin\varphi)e_2, \\ e_2' = U(\varphi)e_2 = -(\sin\varphi)e_1 + (\cos\varphi)e_2. \end{cases}$	(18.7)

Щоб не переобтяжувати записи, будемо позначати матриці так само, як і оператори, добре розуміючи ситуацію. Отже, тепер можна виписати матрицю оператора повороту і її дію на вектори-стовпчики:

$U(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$ $[r]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = U(\varphi)[r]_{e'} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix},$	(18.8)

звідки

$\begin{cases} x_1 = x_1'\cos\varphi - x_2'\sin\varphi, \\ x_2 = x_1'\sin\varphi + x_2'\cos\varphi. \end{cases}$	(18.9)

З рівності

$$[r]_{e'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi \\ -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \end{pmatrix}$$

одержимо:

$\begin{cases} x_1' = x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi, \\ x_2' = -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \end{cases}.$	(18.10)

Запишемо в нашій ситуації матрицю в старих координатах через матрицю в нових і навпаки (див. (5.27), (5.28)):

$A = U(\varphi)A'U^{-1}(\varphi) = U(\varphi)A'U^{*}(\varphi),$	(18.11)

$A' = U^{-1}(\varphi)AU(\varphi) = U^{*}(\varphi)AU(\varphi).$	(18.12)

Нагадаємо, що раніше для ортогональної матриці (і в більш загальному випадку – для унітарної в комплексному просторі) було доведено, що $U^{-1}(\varphi) = U^{*}(\varphi)$.

Враховуючи, що $x = U(\varphi)x', x' = U^{-1}(\varphi)x = U^{*}(\varphi)x$, маємо:

$$(Ax, x) = \left(U(\varphi)A'U*(\varphi)x, x\right) = \left(A'U*(\varphi)x, U*(\varphi)x\right) = (A'x', x') =$$

$$= \left(U*(\varphi)AU(\varphi)x', x'\right),$$

$$\left(Ax, x\right) + 2\left(a, x\right) =$$

$$= \left(U^{*}(\varphi)AU(\varphi)x', x'\right) + 2\left(U^{*}(\varphi)a, x'\right) = \left(U^{-1}(\varphi)AU(\varphi)x', x'\right) + 2\left(U^{1}(\varphi)a, x'\right) =$$

$$= \left(A'x', x'\right) + 2\left(a', x'\right).$$

Виберемо кут φ таким чином, щоб добуток матриць $U^{-1}(\varphi)AU(\varphi)$ мав би вигляд (18.2). Знайдемо

$$U*(\varphi)AU(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}\cos^2\varphi+2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi & a_{12}\cos^2\varphi+\left(a_{22}-a_{11}\right)\cos\varphi\sin\varphi-a_{12}\sin^2\varphi \\ a_{12}\cos^2\varphi+\left(a_{22}-a_{11}\right)\cos\varphi\sin\varphi-a_{12}\sin^2\varphi & a_{22}\cos^2\varphi-2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{11}\sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

Тепер зручно записати

$$A'=U^*(\varphi)AU(\varphi)=$$

$$=\cos^2\varphi\begin{pmatrix} a_{11}+2a_{12}tg\varphi+a_{22}tg^2\varphi & a_{12}+\left(a_{22}-a_{11}\right)tg\varphi-a_{12}tg^2\varphi \\ a_{12}+\left(a_{22}-a_{11}\right)tg\varphi-a_{12}tg^2\varphi & a_{22}-2a_{12}tg\varphi+a_{11}tg^2\varphi \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{1+tg^2\varphi}\begin{pmatrix} a_{11}+2a_{12}tg\varphi+a_{22}tg^2\varphi & a_{12}+\left(a_{22}-a_{11}\right)tg\varphi-a_{12}tg^2\varphi \\ a_{12}+\left(a_{22}-a_{11}\right)tg\varphi-a_{12}tg^2\varphi & a_{22}-2a_{12}tg\varphi+a_{11}tg^2\varphi \end{pmatrix}.$$

Одержана матриця повинна мати діагональну форму. Для цього досить, щоб $tg\varphi$ задовольняв рівняння

$a_{12}tg^2\varphi-\left(a_{22}-a_{11}\right)tg\varphi-a_{12}=0.$	(18.13)

Виявляється, його зовсім не обов'язково розв'язувати.

Знайдемо, наприклад,

$$a'_{11}=\lambda_1=\frac{a_{11}+2a_{12}tg\varphi+a_{22}tg^2\varphi}{tg^2\varphi+1}$$

при умові $a_{12}tg^2\varphi=\left(a_{22}-a_{11}\right)tg\varphi+a_{12}$:

$$a'_{11}=\lambda_1=\frac{a_{11}+2a_{12}tg\varphi+a_{22}tg^2\varphi}{1+tg^2\varphi}=a_{22}+a_{12}\frac{2a_{12}tg\varphi+a_{11}-a_{22}}{\left(a_{22}-a_{11}\right)tg\varphi+2a_{12}}$$

Звідси, випускаючи елементарні перетворення, будемо мати:

$$tg\varphi=a_{12}\frac{\left(a_{11}+a_{22}-2\lambda\right)}{\left(a_{22}-a_{11}\right)\lambda+a_{11}a_{22}-a_{22}^2-2a_{12}^2}=\frac{a_{12}}{\lambda-a_{22}}\frac{\left(a_{11}+a_{22}-2\lambda\right)\left(\lambda-a_{22}\right)}{\left(a_{22}-a_{11}\right)\lambda+a_{11}a_{22}-a_{22}^2-2a_{12}^2}=$$

$$= \frac{a_{12}}{\lambda - a_{22}} \frac{-2\left(\lambda^2 - \left(a_{11} + a_{22}\right)\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right) + \left(a_{22} - a_{11}\right)\lambda + a_{11}a_{22} - a_{22}^2 - 2a_{12}^2}{\left(a_{22} - a_{11}\right)\lambda + a_{11}a_{22} - a_{22}^2 - 2a_{12}^2} =$$

$$= \frac{a_{12}}{\lambda - a_{22}}$$

Отже,

$tg\varphi = \frac{a_{12}}{\lambda - a_{22}},$	(18.14)

або аналогічно

$tg\varphi = \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}}.$	(18.15)

Користуючись формулами (18.10), можна записати рівняння нових координатних осей $Ox_1^{'}, Ox_2^{'}$, в координатах x_1, x_2.

Вісь $Ox_1^{'}$ має рівняння $x_2^{'} = 0$, вісь $Ox_2^{'}$ - $x_1^{'} = 0$.

$$Ox_1^{'} : x_2 = \left(tg\varphi\right)x_1$$

$$Ox_2^{'} : x_2 = -\frac{1}{tg\varphi}x_1 \qquad (18.16)$$

Оскільки $\xi = x + r$, $x = \xi - r$, маємо остаточно :

$$O\xi_1^{'} : \xi_2 = \left(tg\varphi\right)\left(\xi_1 - r_1\right) + r_2$$

$$O\xi_2^{'} : \xi_2 = -\frac{1}{tg\varphi}\left(\xi_1 - r_1\right) + r_2 \qquad (18.17)$$

Треба визначити, як вибирати кут повороту.

1). $a_{11}' = \lambda_1, a_{22}' = \lambda_2$ мають однакові знаки. Дійсній кривій відповідає випадок

$$\frac{\lambda_1}{C} > 0, \frac{\lambda_2}{C} > 0 .$$

Зрозуміло, що це еліпс. Щоб він мав канонічний вигляд, треба, щоб $|\lambda_1| = |a'_{11}| < |a'_{22}| = |\lambda_2|$ - тоді його горизонтальна піввісь буде більша за вертикальну. Саме з цих міркувань вибирається $tg\varphi$, наприклад, в формулі (6.3.15).

2). a'_{11}, a'_{22} мають різні знаки. Тоді крива є гіперболою. Для того, щоб вона мала канонічне рівняння, треба, щоб

$$\frac{\lambda_1}{C} > 0, \frac{\lambda_2}{C} < 0$$

3). Параболічний випадок . Він відповідає $tg\varphi = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$.

Приклад 1. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \{1;9\},\ a = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Власні числа додатні, тому ця крива є еліпс. Отже вибираємо

$\lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9$.

Для здійснення зсуву за формулою (17.9), знайдемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Тепер $r = -A^{-1}a = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$-C = (Ar, r) + 2(a, r) + b = \left(\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) - 18\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + 9 = -9.$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+1 \\ y'+1 \end{pmatrix}$ і в системі $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ рівняння запишеться у вигляді:

$$\left(\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = 9 .$$

За формулою (18.13) $tg\varphi = \dfrac{4}{1-5} = -1$. Зручно вважати, що $\cos\varphi > 0$, тому

$\varphi = -\dfrac{\pi}{4}, \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sin\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Отже, записуємо канонічне рівняння в координатах

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y'; \\ y'' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}$$

$$\frac{(x'')^2}{3^2} + \frac{(y'')^2}{1^2} = 1.$$

Рівняння нових координатних осей в системі координат (x, y):

$$Ox'': y = -(x-1) + 1 \Rightarrow y = -x + 2,$$
$$Oy'': y = x - 1 + 1 \Rightarrow y = x.$$

Приклад 2. $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \ a = \begin{pmatrix} -6 \\ -13 \end{pmatrix}, \ b = 11.$

Знайдемо вектор зсуву системи координат:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Звідси $r_1 = -1, r_2 = 2$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'+2 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}.$

$(Ar, r) + 2(a, r) + b = -C$,

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + 2\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -13 \end{pmatrix} + 11 = -9 = -C.$$

Звідси $C = 9$. В нових координатах рівняння запишеться у вигляді

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = 9.$$

Характеристичне рівняння: $\lambda^2+8\lambda-9=0$, власні числа матриці $\lambda_1,\lambda_2\in\{-1,9\}$. Отже, крива – гіпербола. Для того, щоб вона мала канонічний вигляд, треба взяти $\lambda_1=9,\lambda_2=-1$. Отже, прийдемо до канонічного рівнянн:

$$9\left(x''\right)^2-\left(y''\right)^2=9\Rightarrow\frac{\left(x''\right)^2}{1}-\frac{\left(y''\right)^2}{3^2}=1;$$

$$tg\varphi=\frac{a_{12}}{\lambda_1-a_{22}}=\frac{3}{9-8}=3.$$

Рівняння осі $Ox'':y-2=3\left(x+1\right)\Rightarrow y=3x+5$,

осі $Oy'':y-2=-\frac{1}{3}\left(x+1\right)\Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

Параболічний випадок.

Маємо рівняння кривої другого порядку $\left(Ax,x\right)+2(a,x)+b=0$, де A - симетрична матриця, $\det(A)=0$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$. Одне з власних чисел матриці буде дорівнювати нулю, друге позначимо λ.

Як і раніше, перейдемо до нової системи координат $x'=\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}$ за допомогою ортогональної матриці

$$U(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & =\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}$$

Рівняння перепишеться у вигляді

$$\left(U^*(\varphi)AU(\varphi)x',x'\right)+2(a,U(\varphi)x')+b=0.$$

Виберемо $U(\varphi)$ так, що $A'=U^*(\varphi)AU(\varphi)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$.

Як відомо, $tg\varphi=\frac{a_{12}}{\lambda-a_{22}}=-\frac{a_{12}}{a_{22}}$ - тут врахували, що одне власне число матриці дорівнює нулю.

Позначимо $a'=U^*(\varphi)a.$ Рівняння перепишеться у вигляді

$$\lambda\left(x_2'\right)^2+2a_1'x_1'+2a_2'x_2'+b=0$$

a). Нехай $a_1'\neq 0$.

Після виділення повного квадрату і простих перетворень одержимо:

$$\lambda\left(x_2'+\frac{a_2'}{\lambda}\right)^2+2\frac{a_1'}{\lambda}\left(x_1'+\frac{1}{2a_1'}\left(b-\frac{\left(a_2'\right)^2}{\lambda}\right)\right)=0\,.$$

Отже, ввівши заміни

$$x_2''=x_2'+\frac{a_2'}{\lambda},\; x_1''=x_1'+\frac{1}{2a_1'}\left(b-\frac{\left(a_2'\right)^2}{\lambda}\right)$$

і позначення $p=\frac{a_1'}{\lambda}$, прийдемо до канонічного рівняння параболи:

$$\left(x_2''\right)^2=2px_1''.$$

b). $a_1'=0$.

Після виділення повного квадрату і простих перетворень одержимо:

$$\left(x_2'+\frac{a_2'}{\lambda}\right)^2+\frac{1}{\lambda^2}\left(b-\frac{\left(a_2'\right)^2}{\lambda}\right)=0$$

і

$$x_2'=\frac{1}{\lambda}\left(-a_2'\pm\sqrt{\frac{\left(a_2'\right)^2}{\lambda}-b}\right).$$

Це рівняння пари прямих, якщо $\frac{\left(a_2'\right)^2}{\lambda}-b\neq 0$. Воно вироджується в одну пряму, якщо $\frac{\left(a_2'\right)^2}{\lambda}-b=0$.

Приклад 3. Звести рівняння другого порядку до головних осей:

$$x^2+2xy+y^2-8x+4=0.$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$, власні числа цієї матриці: $\lambda_1=0,\ \lambda_2=2,\ tg\varphi=-\frac{a_{12}}{a_{22}}=-1$.

Візьмемо $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Тоді

$$U(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},\ \ U^*(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=U(\varphi)\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x_1'+x_2'\\x_1'-x_2'\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=U^*(\varphi)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_1'\\a_2'\end{pmatrix}=U^*(\varphi)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=-\frac{4}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

$$x_2''=x_2'+\frac{a_2'}{\lambda}=x_2'+\sqrt{2},\ \ x_1''=x_1'+\frac{1}{2a_1'}\left(b-\frac{\left(a_2'\right)^2}{\lambda}\right)=x_1'-\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(4-\frac{8}{2}\right)=x_1'.$$

В результаті прийдемо до канонічного рівняння:

$$\left(x_2''\right)^2=2\sqrt{2}\,x_1',$$

де

$$x_2''=x_2'+\frac{a_2'}{\lambda}=\frac{x+y+2}{\sqrt{2}}$$

$$x_1''=\frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

18). **Завдання для самостійної роботи:** [10], №№ 674-677.

ЛІТЕРАТУРА

1. Алгебра та геометрія: Лінійна алгебра. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 124 «Системний аналіз» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 4,31 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 296 с.
2. Конспект лекцій з курсу «Аналітична геометрія та лінійна алгебра»» [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів спеціальності 124 «Системний аналіз» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. О. О. Калюжний, А. Ю. Мальцев, Г. Б. Подколзін, Ю. А. Чаповський ; КПІ ім. Ігоря Сікорського.
3. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик., І. І. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с.
4. Мартиненко М. А. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення: навч. посіб. Для студ. Вищ. Навч. зак./М. А. Мартиненко, І. І. Юрик. – К.: Видавничий Дім «Слово», 2007. – 296 с.
5. Вища математика. Збірник задач : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав, В. І. Дев'ятко, Р. К. Клименко, В. В. Крочук, М. А. Мартиненко ; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2011. – 480 с.

6. ДОДАТКОВА

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / П. С. Александров. - М.: «Наука», 1979, 511 с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / Д. В. Беклемишев. - М.: «Наука», 1984, 175 с.
3. Беллман Р. Введение в теорию матриц: учебник / Р. Беллман. - М.: «Наука», 1969, 367 с.

4. Блох Э. Л. Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения: учебное пособие / Э. Л. Блох, Л. И. Лошинский, В. Я. Турин. - М.: Высшая школа, 1971. 256 с.
5. Бубнов В.А. Линейная алгебра: компьютерный практикум / В.А. Бубнов, Г. С. Толстова, О. Е. Клемешева. - М.: ЛБЗ, 2012. 168 с.
6. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра: учебник / Б. Л. Ван дер Варден. - М.: «Наука», 1976. 648 с.
7. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э. Б. Винберг. - М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2001. 544 с.
8. Воеводин В.В. Линейная алгебра: учебник / В. В. Воеводин. - М.: «Наука», 1974. 336 с.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц: монография / Ф. Р. Гантмахер. - М.: «Наука», 1967. 575 с.
10. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре: учебник / И. М. Гельфанд. - М.: «Наука», 1971. 271 с.
11. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ: учебник / И. М. Глазман, Ю. И. Любич. -: «Наука», 1969. 475 с.
12. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения: учебник / Л. И. Головина. - М.: Наука, 1985. 392 с.
13. Гомонов, С.А. Математика. Линейная алгебра: Учебно-справочное пособие / С. А. Гомонов. - М.: Форум, НИЦ ИНФРА-М, 2013. 144 с.
14. Горлач, Б.А. Линейная алгебра: Учебное пособие / Б.А. Горлач. - СПб.: Лань, 2012. 480 с.
15. Ефимов Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия: учебник / Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн. - М.: «Наука», 1970. 528 с.
16. Икрамов Х.Д. Задачи по линейной алгебре: сборник задач / Х. Д. Икрамов. - М.: «Наука», 1975. 319 с.
17. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, З. Г. Позняк. - М.: «Наука», 1974. 296 с.
18. Каган В.Ф. Основания теории определителей: учебник / В. Ф. Каган. - Гос. изд-во Украины, 1922. 78 с.

19.Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия: учебник / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. - М.: «Наука», 1986. 303 с.
20.Кочетков, Е.С. Линейная алгебра: учебное пособие /Е. С. Кочетков, А. В. Осокин. - М.: Форум, 2012. 416 с.
21.Курбатова Г.И. Курс лекций по алгебре: учебник / Г. И. Курбатова, В.Б.Филиппов. - СПб: Изд-во «Лань», 2015. 655 с.
22.Курош А. Г. Курс высшей алгебры: учебник / А. Г. Курош. - М.: «Наука», 1968. 431 с.
23.Курош А.Г. Лекции по общей алгебре: учебник / А. Г. Курош. - М.: «Наука», 1973. 400 с.
24.Ланкастер П. Теория матриц: монография/ М. Ланкастер.- «Наука», 1978. 280 с.
25. Ленг С. Алгебра: учебник / С. Ленг. - М.: «МИР», 1968. 564 с.
26.Лефор Г. Алгебра и анализ. Задачи: сборник задач / Г. Лефор. - М.: «Наука», 1973. 462 с.
27.Мальцев А.И. Основы линейной алгебры: учебник / А. И. Мальцев. - М.: «Наука», 1970. 400 с.
28.Попов А.М. Лекции по линейной алгебре: учебник / А. М. Попов. - М.: Изд-во РУДН, 2007. 183 с.
29.Постников М.М. Лекциии по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра: учебник / М. М. Постников. - Москва, «Наука», 1986. 400 с.
30.Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры: учебное пособие / В. В. Прасолов. - М.: МЦНМО, 2015. 576 с.
31.Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. / И. В. Проскуряков. - М.: «Наука», 1978. 384 с.
32.Рудык, Б.М. Линейная алгебра: Учебное пособие / Б. М. Рудык, - М.: НИЦ ИНФРА, 2013. 318 с.
33.Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння: підручник / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. - К.: «Либідь», 2003. 599 с.

34.Смирнов В. И. Курс высшей математики: учебник в 8 т. / В. И. Смирнов. – М.: Физмат «Наука», 1974, Т.3, ч.1. 323 с.

35.Стренг Г. Линейная алгебра и ее приложения: учебное пособие / Г. Стренг. - М.: Мир, 1980. 454 с.

36.Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре: учебник / Д. К. Фаддеев. - М.: «Наука», 1984. 416 с.

37.Фаддеев Д.К. Сборник задач по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. - М.: «Наука», 1977. 288 с.

38.Хорн Р. Матричный анализ: монография / Р. Хорн, Ч. Джонсон. - М.: «Мир», 1989. 655 с.

39.Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия: учебник / И. Р. Шафаревич, А. О. Ремизов. - М.: «Физматлит», 2009. 511 с.

40.Шевцов, Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учебное пособие / Г. С. Шувцов. - М.: Магистр, НИЦ ИНФРА-М, 2013. 528 с.

41.Шилов Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства : учебник / Г. Е. Шилов. - М.: «Наука», 1969. 431 с.