МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

О. О. Коваль,
О. Б. Поліщук,
В. І. Стогній

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНАНА ГЕОМЕТРІЯ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за спеціальностями 161 «Хімічні технології та інженерія»,
162 «Біотехнології та біоінженерія»

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2023

Рецензент *Спічак С. В.,* канд. фіз.-мат. наук,
ст. наук. співроб. відділу математичної фізики
Інституту математики НАН України

Відповідальний
редактор *Горбачук В. М.*, д-р фіз.-мат. наук, проф. кафедри
математичної фізики та диференціальних рівнянь
ФМФ КПІ ім. Ігоря Сікорського

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 9 від 22.06.2023 р.)
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 7 від 16.06.2023 р.)

Викладено теоретичний матеріал кредитного модуля «Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення» у вигляді конспекту лекцій, який містить 18 лекцій за 6 розділами кредитного модуля і відповідає змісту навчальної дисципліни. Кожна лекція має чітку структуру, наведено достатню кількість прикладів, задач, рисунків. Після кожного розділу пропонуються запитання для самоперевірки.

Конспект лекцій призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями 161 «Хімічні технології та інженерія» і 162 «Біотехнології та біоінженерія». Буде також корисним для студентів технічних спеціальностей очної, заочної та дистанційної форм навчання.

Реєстр. № НП 22/23-898. Обсяг 8,9 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

«Учітеся, брати мої, думайте, читайте…»

Тарас Шевченко

Передмова

Як відомо, у системі навчання лекції відіграють важливу роль, бо вони запрошують студентів у цікавий світ науки. Головна мета лекції – зацікавити студентів, допомогти у засвоєнні нових теоретичних відомостей, навчити логічно мислити.

Запропонований конспект лекцій є результатом багаторічного досвіду викладання вищої математики студентам хіміко-технологічного факультету та факультету біотехнології і біотехніки. Конспект лекцій відповідає силабусу кредитного модуля «Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення», розробленого для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями 161 «Хімічні технології та інженерія» й 162 «Біотехнології та біоінженерія».

Теоретичний матеріал поділено на 6 розділів, відповідно до змісту навчальної дисципліни. Кожна лекція має чітку структуру, супроводжується достатньою кількістю прикладів, задач і рисунків. Після кожного розділу пропонуються запитання для самоперевірки, які мають спонукати студентів розібратися в новому матеріалі, розширити й поглибити свої знання, опрацьовуючи матеріал підручників та інших джерел зі списку використаної та рекомендованої літератури.

Курс лекцій апробовано серед здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 161 «Хімічні технології та інженерія» хіміко-технологічного факультету і спеціальності 162 «Біотехнології та біоінженерія» факультету біотехнології і біотехніки.

Курс лекцій буде корисним для студентів технічних спеціальностей очної, заочної та дистанційної форм навчання.

Розділ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Лекція 1. Матриці та визначники

1.1. Матриці та дії над ними

Означення. **Матрицею** розміру $m \times n$ називають сукупність mn елементів, розміщених у вигляді прямокутної таблиці з m рядків та n стовпців.

Позначають матриці великими літерами, а їхні елементи – маленькими літерами з подвійною індексацією, наприклад:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

або скорочений варіант запису: $A = \left(a_{ij}\right)$ або $A = \left\|a_{ij}\right\|$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, де i – номер рядка, j – номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент.

Матрицю, яка складається з одного рядка, називають **матрицею-рядком**, наприклад $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \end{pmatrix}$. Матрицю, що складається з одного стовпця, називають **матрицею-стовпцем**, наприклад $C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$.

Елементами матриці можуть бути числа, функції або інші об’єкти. Ми будемо розглядати тільки числові матриці. Дві матриці називають **рівними**, якщо вони однакового розміру і мають рівні відповідні елементи. Матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю, називають **нульовою** матрицею та позначають O, наприклад

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо елементи рядків матриці A розставити у стовпці, а елементи стовпців розставити у рядки, отримаємо матрицю A^T, **транспоновану до**

матриці A, при цьому матрицю A називають **основною**, а виконану дію – **транспонуванням матриці** A.

Матрицю, яка має однакову кількість рядків та стовпців називають **квадратною**. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називають її **порядком**.

Наприклад, квадратна матриця третього порядку $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$.

Квадратна матриця, всі елементи якої поза **головної** діагоналі (елементи матриці, у яких номер рядка і стовпця однаковий) дорівнюють нулю, називають **діагональною** матрицею. Діагональну матрицю з одиницями по головній діагоналі називають **одиничною** матрицею і позначають E, наприклад:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Над матрицями можна здійснювати такі лінійні операції: додавання, віднімання, множення на число. Операція множення двох матриць визначена не завжди. Операція ділення матриці на матрицю взагалі не визначена.

Означення. **Сумою двох матриць** $A = \|a_{ij}\|$ та $B = \|b_{ij}\|$ однакового розміру $m \times n$ називається матриця $C = \|c_{ij}\|$ такого ж розміру, елементи якої є сумою відповідних елементів матриць A та B, тобто $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Приклад. Знайти суму двох матриць, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 3+0 & 4-1 \\ 1+2 & 0+1 & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Означення. **Різницею двох матриць** $A = \|a_{ij}\|$ та $B = \|b_{ij}\|$ однакового розміру $m \times n$ називають матрицю $C = \|c_{ij}\|$ такого ж розміру, елементи якої є різницею відповідних елементів матриць A та B, тобто $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Зауваження. Матриці різного розміру додавати чи віднімати не можна.

Означення. **Добутком матриці** A **на число** $\beta \in \mathrm{R}$ називається матриця βA, кожний елемент якої дорівнює добутку числа β на кожний елемент матриці A, тобто якщо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ то } \beta A = \begin{pmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} & \beta a_{13} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} & \beta a_{23} \\ \beta a_{31} & \beta a_{32} & \beta a_{33} \end{pmatrix}.$$

Приклад. Знайти $7A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Р о з в ’ я з у в а н н я.

$$7A = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 49 & -28 & 0 \\ -14 & 0 & 21 & -7 \end{pmatrix}.$$

Означення. **Добутком матриці** $A = \|a_{ij}\|$ розміром $m \times n$ **на матрицю** $B = (b_{ij})$ розміром $n \times p$ називають матриця $C = \|c_{ij}\|$ розміром $m \times p$, елементи якої обчислюють за формулою

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj},$$

тобто елемент матриці C, що стоїть в i-му рядку та j-му стовпці дорівнює сумі попарних добутків елементів i-го рядка матриці A (перший множник) на відповідні елементи j-го стовпця матриці B (другий множник).

Це означення називають **правилом множення рядка на стовпець**.

Зауваження. Перемножувати матриці можна лише тоді, коли кількість елементів рядка першої матриці дорівнює кількості елементів у стовпці другої матриці.

У результаті множення двох матриць отримуємо матрицю, в якої кількість рядків дорівнює кількості рядків першої матриці, а кількість стовпців дорівнює кількості стовпців другої матриці-множника.

Приклад. Обчислити добутки AB та BA, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \\ -1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & 0 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 10 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що в загальному випадку $AB \neq BA$. Матриці, для яких виконується $AB = BA$, називають **комутативними**.

Із правила множення матриць випливає, що завжди можна перемножити дві квадратні матриці одного порядку і в результаті дістанемо матрицю того самого порядку.

Операція піднесення до натурального степеня визначена тільки для квадратної матриці. Добуток $\underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \ \text{разів}} = A^k$ називають k**-м степенем квадратної матриці**.

1.2. Визначники другого і третього порядків та їхні властивості

Визначником (детермінантом) квадратної матриці A називають число або певний алгебраїчний вираз, що ставиться у відповідність до квадратної матриці за певним правилом. Визначник позначають символом Δ або $\det A$.

Розглянемо матрицю другого порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Означення. **Визначником (детермінантом) другого порядку** матриці A називають алгебраїчний вираз (число)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.1}$$

де $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}$ – елементи визначника, причому $a_{11},\ a_{22}$ утворюють головну діагональ визначника, а a_{12}, a_{21} – побічну діагональ.

Вираз (1.1) – правило обчислення визначника другого порядку:

> ***визначник другого порядку дорівнює різниці, в якій від добутку елементів головної діагоналі віднімають добуток елементів побічної діагоналі.***

Приклад. Обчислити $\det A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Р о з в ' я з у в а н н я.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 7 \cdot (-2) = 15 + 14 = 29.$$

Означення. **Визначником (детермінантом) третього порядку** матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

називають алгебраїчний вираз (число)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

У визначнику перші три доданки (добутки з додатними знаками) обчислюють так, як показано на рис. 1.1, інші три доданки (добутки з від'ємними знаками) – як на рис. 1.2.

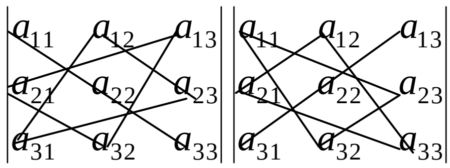

Рис. 1.1 Рис. 1.2

Це правило обчислення визначника називають **правилом трикутників**.

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

Р о з в ' я з у в а н н я.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \cdot 4 - 4 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot 5 - (-1) \cdot (-2) \cdot 1 =$$

$$= 0 + 0 - 12 - 0 - 30 - 2 = -44.$$

Основні властивості визначників

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями.

2. У разі перестановки двох рядків (стовпців) знак визначника змінюється на протилежний.

3. Визначник із рядком (стовпцем), у якого всі елементи нулі, дорівнює нулю.

4. Визначник, який має два пропорційні рядки (стовпця), дорівнює нулю.

5. Спільний множник елементів одного рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.

6. Визначник не змінюється, якщо до елементів одного його рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

1.3. Мінори та алгебраїчні доповнення. Визначники *n*-го порядку

Означення. **Мінором** M_{ij} елемента a_{ij} визначника називають визначник, отриманий у результаті викреслювання i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент a_{ij}.

Означення. **Алгебраїчним доповненням** A_{ij}, що відповідає елементу a_{ij}, називають його мінор, взятий із певним знаком, а саме $A_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$.

Приклад. Знайти мінор M_{23} та алгебраїчне доповнення A_{31}, якщо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Р о з в ’ я з у в а н н я. Для обчислення мінора викреслюємо другий рядок та третій стовпець, отримаємо визначник

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 8 = -9.$$

Для обчислення алгебраїчного доповнення A_{31} потрібно викреслити третій рядок та перший стовпець і врахувати знак, тобто

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 35 = -35.$$

Використовуючи поняття алгебраїчного доповнення, можна звести обчислення визначника до обчислення кількох визначників порядку, на одиницю нижче розглядуваного.

Теорема 1.1 ***(про розклад визначника за елементами рядка (стовпця)).*** Визначник третього порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Отже, для визначника $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ виконуються такі рівності:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13};\ \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31};$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23};\ \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32};$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33};\ \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$.

Розв'язування. 1) Обчислимо визначник, розклавши його за елементами першого рядка за формулою $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 15 - 4 \cdot 0 - 3 \cdot (-3) = 30 + 9 = 39.$$

2) Обчислимо визначник, розклавши його за елементами третього рядка за формулою $\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{31} + \left(-3\right)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot A_{33} = 0 + 3 \cdot 13 + 0 = 39.$$

Теорема 1.2. Сума добутків елементів довільного рядка (стовпця) визначника третього порядку на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

1.4. Поняття про визначники вищих порядків

Визначник *n*-го порядку має вигляд $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Можна довести, що всі розглянуті вище властивості визначників третього порядку справджуються для визначників будь-якого порядку.

Узагальнюючи теорему 1.1 для визначника довільного порядку, отримаємо **правило обчислення визначника *n*-го порядку**: визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

Приклад. Обчислити визначник 4-го порядку $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Р о з в ’ я з у в а н н я. Розкладемо визначник за елементами четвертого рядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44} =$$

$$= 1(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 2(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1 + 12 + 8 - 8 - (-2) - (-6)) - 2(4 - 3 + 8 - 12 - (-8) - 1) -$$

$$-(8 + 3 - 12 - (-18) - 8 - 2) = -21 - 2 \cdot 4 - 7 = -36.$$

Лекція 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь і методи їх розв'язування

У зв'язку з вивченням систем лінійних алгебраїчних рівнянь, а саме, методів їх розв'язання, умов сумісності, виникають поняття оберненої матриці і рангу матриці.

2.1. Обернена матриця

Означення. **Оберненою матрицею** до квадратної матриці A називають таку квадратну матрицю A^{-1}, яка є комутативною з матрицею A і в добутку з нею дає одиничну матрицю, тобто

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Означення. Квадратну матрицю A називають **невиродженою**, якщо $\det A \neq 0$, і **виродженою**, якщо $\det A = 0$.

Не всяка квадратна матриця має обернену.

Теорема 2.1 ***(про існування оберненої матриці).*** Обернена матриця до квадратної матриці A існує і єдина тоді і тільки тоді, коли матриця A є невиродженою.

Обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

шукають за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (2.1)$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці A.

Приклад. Знайти обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ та зробити перевірку.

Р о з в ’ я з у в а н н я. Для матриці третього порядку формула (2.1) набуває вигляду

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 3\cdot 2 + 1\cdot(-2)\cdot 0 -$$

$$-1\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot 0 - (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -6 - 12 - 2 + 8 = -12 \neq 0,$$

отже, матриця A невироджена і для неї існує обернена.

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів визначника матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Отже, маємо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 2 & -8 & -11 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{11}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку:

$$A^{-1}A = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 2 & -8 & -11 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -6+8-14 & 4-4-0 & -2-12+14 \\ 6+16-22 & -4-8-0 & 2-24+22 \\ -6+8-2 & 4-4-0 & -2-12+2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

2.2. Ранг матриці

Означення. **Мінором** k-го порядку матриці $A = \left\| a_{ij} \right\|$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ називають визначник, складений з елементів, що стоять на перетині будь-яких k рядків і будь-яких k стовпців матриці, $k \le \min(m, n)$.

Наприклад, для матриці A розміром 3×4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

один із мінорів другого порядку $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4,$ мінорів третього порядку буде чотири:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 32.$$

Зауважимо, що мінором першого порядку є будь-який елемент матриці.

Означення. ***Ранг матриці*** A дорівнює найвищому порядку її мінорів, що не дорівнюють нулю, і його позначають $rangA$ або RgA.

Для розглядуваної у прикладі матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

очевидно, $RgA = 3$.

Безпосередньо з означення випливає, що:

1) ранг існує для будь-якої матриці, причому $0 \le RgA \le \min(m, n)$;

2) $RgA = 0$ тільки якщо A – нульова матриця;

3) ранг квадратної невиродженої матриці дорівнює її порядку.

Визначення рангу матриці за допомогою означення рангу є досить громіздким, бо вимагає обчислення значної кількості визначників. Зручним для знаходження рангу є метод, який базується на елементарних перетвореннях матриці, що не змінюють її ранг.

Означення. **Елементарними перетвореннями матриці** називають:

– перестановку рядків (стовпців) матриці;
– множення елементів будь-якого рядка (стовпця) на ненульове число;
– додавання до елементів будь-якого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на ненульове число.

Метод елементарних перетворень дає змогу звести матрицю до спрощеного (трикутного або трапецієподібного) вигляду, що дозволяє одразу встановити її ранг.

Означення. Дві матриці ***A*** і ***B*** називають **еквівалентними**, якщо від однієї з них до другої можна перейти шляхом скінченної кількості елементарних перетворень і позначають ***A~B***.

Оскільки при елементарних перетвореннях матриці її ранг не змінюється, робимо висновок, що ранги еквівалентних матриць рівні.

Приклад. Знайти ранг матриці $\mathrm{A} = \begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&3\\3&3&4\end{pmatrix}$.

Р о з в ' я з у в а н н я. Елементарними перетвореннями зведемо матрицю до трапецієподібного вигляду:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&3\\3&3&4\end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}(-3)+\mathrm{III}\to\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I}(-2)+\mathrm{II}\to\mathrm{II}}{\sim}} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}(-1)+\mathrm{III}\to\mathrm{III}}{\sim} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Очевидно, що мінор третього порядку дорівнює нулю, отже, ранг матриці буде 2, оскільки мінор 2-го порядку $\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

2.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Означення. Система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.2}$$

називають **системою** m **лінійних рівнянь з** n **невідомими** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Числа a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ називаються **коефіцієнтами системи**, числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ **називають вільними членами** або правими частинами системи (2.2).

Якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, то **систему** лінійних рівнянь називають **однорідною**, а якщо хоча б один із вільних членів відмінний від нуля, то **систему** називають **неоднорідною**.

Упорядкований набір n чисел $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ називають **розв'язком системи** (2.2), якщо при підстановці у систему цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ усі рівняння системи перетворюються на тотожності.

Систему, яка має розв'язок, називають **сумісною**; систему, яка не має розв'язку, називають **несумісною**.

Систему лінійних рівнянь, яка має єдиний розв'язок, називають **визначеною**; систему, яка має більше одного розв'язку, називають **невизначеною**.

Коефіцієнти системи зручно розміщувати у вигляді матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (2.3)$$

яку називають **матрицею системи** (2.2), невідомі та вільні члени також зручно розміщувати у вигляді матриць-стовпців: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Тоді, згідно із правилом множення матриць (яке і створено для зручності запису систем лінійних рівнянь), розглядувану систему лінійних рівнянь можна записати у вигляді

$$AX = B,$$

який називають **матричною формою запису системи** або **матричним рівнянням**.

Якщо до матриці системи (2.3) приєднати вільні члени системи, то отримаємо **розширену матрицю** A^*:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Вичерпну відповідь на запитання про існування розв’язку системи (2.2) дає теорема Кронекера–Капеллі.

Теорема 2.2 ***(теорема Кронекера–Капеллі).*** Щоб система лінійних алгебраїчних рівнянь була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг матриці системи дорівнював рангу розширеної матриці, тобто

$$rangA = rangA^*.$$

***Зауваження*:**

- якщо ранги матриць дорівнюють кількості невідомих системи $rangA = rangA^* = n,$ то система **визначена** (має єдиний розв’язок);
- якщо ранги матриць менші за кількість невідомих системи $rangA = rangA^* < n,$ то система невизначена – має **безліч розв’язків**;
- якщо ж $rangA \neq rangA^*,$ то система несумісна, тобто **не має розв’язків**.

2.4. Основні методи розв’язування систем лінійних рівнянь. Формули Крамера. Матричний метод. Метод Гаусса

1. **Формули Крамера** застосовують до системи типу (2.2) тільки у випадку невиродженої матриці системи. Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Обчислюємо визначник матриці системи $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$

якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за ***формулами Крамера***:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де $\Delta_i,\ i = 1, 2, 3$ визначники, утворені з визначника Δ через заміну i-го стовпця стовпцем вільних членів системи:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Приклад. Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} 2x - y - z = 8, \\ 5x + 3y + 4z = 8, \\ -x + 2y - 3z = -2. \end{cases}$$

Розв'язування. Обчислимо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -18 + 4 - 10 - 3 - 16 - 15 = -58 \neq 0.$$

Знайдемо Δ_1, Δ_2, Δ_3, підставляючи замість стовпця коефіцієнтів при відповідних невідомих – стовпець вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 8 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(-36 + 4 - 8 - 3 - 32 - 12\right) = 2(-87) = -174,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 5 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2\left(-24 - 16 + 5 - 4 + 8 + 60\right) = 2 \cdot 29 = 58,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 5 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-6+4+40+12-16-5) = 2\cdot 29 = 58.$$

Тоді за формулами Крамера маємо:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-174}{-58} = 3, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{58}{-58} = -1, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{58}{-58} = -1.$$

Отже, $x = 3,\ y = -1,\ z = -1.$

2. **Матричний метод** застосовують до системи типу (2.2) тільки у випадку невиродженої матриці системи. Нехай систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

записано у вигляді матричного рівняння

$$AX = B,$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матриця системи, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець невідомих, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець вільних членів системи, причому $\det A \neq 0$, тобто матриця системи є невиродженою. Щоб знайти матрицю X, потрібно помножити зліва обидві частини матричного рівняння на матрицю A^{-1}, обернену до матриці A. При цьому отримаємо $A^{-1}\cdot AX = A^{-1}\cdot B$. Враховуючи, що $A^{-1}A = E$ та $EX = X$, $E-$ де одинична матриця, отримаємо

$$X = A^{-1}B.$$

Отже, знайшовши матрицю-стовпець X, тим самим знаходимо невідомі x_1, x_2, x_3, тобто розв'язок системи.

Приклад. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Р о з в ' я з у в а н н я. Матриця системи $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, матриця-стовпець невідомих $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, матриця-стовпець вільних членів $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язок системи шукаємо за формулою $X = A^{-1}B$.

Знайдемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Спочатку обчислюємо визначник матриці:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 9 + 20 + 2 - 24 - 15 = -12 \neq 0,$$

після чого знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -14,\ A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 22,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -11, \; A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -1, \; A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 19.$$

Отже, маємо обернену матрицю: $A^{-1} = \dfrac{1}{-12} \begin{pmatrix} -14 & 1 & -11 \\ 2 & -1 & -1 \\ 22 & -5 & 19 \end{pmatrix}.$

Помноживши знайдену матрицю A^{-1} на матрицю-стовпець вільних членів, отримуємо остаточну відповідь:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} -14 & 1 & -11 \\ 2 & -1 & -1 \\ 22 & -5 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} 0 + 9 - 33 \\ 0 - 9 - 3 \\ 0 - 45 + 57 \end{pmatrix} = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1.$

Зробимо перевірку: $\begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 1 = 0, \\ 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 3 = 9, \\ -2 + 4 \cdot 1 + 1 = 3. \end{cases}$

3. **Метод Гаусса** є універсальним методом, бо дозволяє дослідити довільну систему m лінійних рівнянь з n невідомими типу (2.2), тобто або встановити її несумісність, або вказати її єдиний розв’язок, або показати всі розв’язки цієї системи. Таким чином, на застосування методу Гаусса не накладається жодних обмежень, на відміну від формул Крамера і матричного методу.

Метод Гаусса ґрунтується на **елементарних перетвореннях** системи рівнянь, унаслідок яких система набуває зручного для розв’язання трикутного або трапецієподібного вигляду.

Слід зауважити, що елементарні перетворення системи рівнянь відповідають елементарним перетворенням розширеної матриці (2.3) системи (2.2) за умови, що вони виконуються лише над рядками. Тому у практичному застосуванні методу Гаусса зручніше зводити до трикутного або трапецієподібного вигляду не саму систему, а її розширену матрицю.

Приклад. Розв’язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Р о з в ’ я з у в а н н я. Розв’яжемо наведену систему лінійних рівнянь методом Гаусса.

Запишемо розширену матрицю системи $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 9 \\ -1 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right)$ і застосуємо до неї метод Гаусса.

Поміняємо місцями перший і третій рядки, отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}(-1) \to \mathrm{I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}(-5)+\mathrm{II} \to \mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 22 & -2 & 24 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\mathrm{I}(-2)+\mathrm{III} \to \mathrm{III}}{\overset{\mathrm{II}/2 \to \mathrm{II}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 11 & -1 & 12 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}(-2)+\mathrm{II} \to \mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}(-5)+\mathrm{III} \to \mathrm{III}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Повернемося від розширеної матриці до системи, еквівалентної заданій:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = -3, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad\qquad\quad x_3 = -1, \end{cases}$$

з якої легко знаходимо: $x_3 = -1,\ x_2 = 1,\ x_1 = 2.$

Приклад. Дослідити та розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Р о з в ' я з у в а н н я. Розв'яжемо цю систему лінійних рівнянь методом Гаусса.

Запишемо розширену матрицю системи $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right)$ і застосуємо до неї метод Гаусса.

Віднявши від першого рядка другий, отримаємо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{\text{I(-4)+III}\to\text{III}}{\overset{\text{I(-2)+II}\to\text{II}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \overset{\text{II(-1)+III}\to\text{II}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \overset{\text{II(-6)+III}\to\text{III}}{\sim} \underbrace{\overbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 16 & -11 \end{array}\right)}^{A}}_{A^*}.$$

Мінор матриці $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$ тоді за означення $rangA = 3.$

Ранг розширеної матриці A^* збігається з рангом матриці системи A: $rangA = rangA^*$, отже, система сумісна за теоремою Кронекера–Капеллі. Оскільки ранг дорівнює 3, а кількість змінних 4, то згідно із зауваженням до теореми Кронекера–Капеллі система має безліч розв'язків. Повернемося від розширеної матриці до системи, еквівалентної заданій:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ \qquad x_2 + x_3 - 3x_4 = 3, \\ \qquad\quad -5x_3 + 16x_4 = -11. \end{cases}$$

Виразимо x_1, x_2, x_3 через x_4. Нехай $x_4 = c$, тоді із третього рівняння $x_3 = \frac{1}{5}(11 + 16c)$. Із другого рівняння виражаємо x_2:

$$x_2 = 3 + 3c - \frac{1}{5}(11 + 16c) = \frac{1}{5}(4 - c).$$

Підставляючи вирази для x_2, x_3, x_4 у перше рівняння, отримуємо

$$x_1 = \left(-1 - c + \frac{1}{5}(11 + 16c) + \frac{1}{5}(4 - c)\right) = \frac{1}{5}(10 + 10c) = 2 + 2c.$$

Остаточно маємо

$$x_1 = 2 + 2c,\ x_2 = \frac{1}{5}(4 - c),\ x_3 = \frac{1}{5}(11 + 16c),\ x_4 = c,\ \ c \in \mathrm{R}.$$

Зауваження. Якщо в результаті елементарних перетворень у розширеній матриці утворюється принаймні один рядок вигляду $\left(0\ 0\ \ldots\ 0\ \middle|\ b\right)$, де $b \neq 0$, то система є несумісною.

Запитання для самоперевірки до розділу 1

1. Що називають визначником другого порядку?
2. Що називають визначником третього порядку?
3. Які основні властивості мають визначники?
4. Що називають мінором елемента визначника n-го порядку?
5. Що називають алгебраїчним доповненням елемента визначника n-го порядку?
6. Як розкласти визначник за елементами рядка або стовпця?
7. Що називають матрицею?
8. Які матриці називають:
   – прямокутними;
   – квадратними;
   – діагональними;
   – одиничними;
   – нульовими;
   – еквівалентними;
   – невиродженими;
   – транспонованими до заданої матриці;
   – матрицями-рядками, матрицями-стовпцями?
9. Які існують лінійні операції над матрицями?
10. Що є добутком матриць і які властивості операції множення матриць?
11. Яку матрицю називають оберненою до заданої і яке правило її знаходження?
12. Що називають рангом матриці?
13. Які елементарні перетворення не змінюють ранг матриці?
14. Які системи лінійних рівнянь називають:
    – однорідними, неоднорідними;
    – сумісними, несумісними;
    – визначеними, невизначеними?
15. Яка умова сумісності системи лінійних рівнянь?
16. Як знайти розв’язок системи лінійних рівнянь за формулами Крамера і коли можна застосовувати ці формули?
17. Як записати систему лінійних рівнянь у матричній формі та у чому полягає матричний метод розв’язування таких систем?
18. Що таке розширена матриця та у чому полягає ідея методу Гаусса?

Розділ 2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Лекція 3. Вектори. Скалярний добуток векторів

3.1. Вектори та лінійні операції над векторами

У математиці, механіці, фізиці та інших розділах науки є величини двох типів. До першого типу належать величини, що повністю визначаються своїм числовим значенням, як то маса, об'єм, густина, температура тощо. Такі величини називають **скалярними**. Величини другого типу характеризуються, крім числового значення, ще й напрямком у просторі.

Означення. Величину, яка визначається додатним числом і напрямком в просторі, називають **векторною величиною** або **вектором**
(наприклад, сила, швидкість, прискорення).

Вектори зображують напрямленими відрізками, а позначають або однією літерою $\vec{a}$ (рис. 3.1), або $\overrightarrow{AB}$ (рис. 3.2), де точка A – початок вектора, точка B – його кінець.

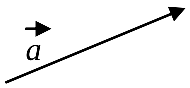

Рис. 3.1

Рис. 3.2

Означення. Додатне число з означення вектора дорівнює довжині відрізка *AB*, його називають **довжиною** або **модулем** вектора та позначають $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $|\vec{a}|$.

Означення. Вектор, початок і кінець якого збігаються, називають **нульовим** і позначають $\vec{0}$. Модуль $\vec{0}$ дорівнює 0, а напрямок невизначений.

Означення. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називають **одиничним** і позначають $\vec{e}$.

Означення. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають **колінеарними** $\left(\vec{a} \,||\, \vec{b}\right)$, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. ***Однаково напрямлені*** колінеарні вектори позначають $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, а ***протилежно напрямлені*** – $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Означення. Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають **рівними**, якщо вони однаково напрямлені та мають рівні довжини, тобто $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ та $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Означення. **Протилежним** до вектора $\vec{a}$ називають вектор, довжина якого дорівнює $\left|\vec{a}\right|$, а напрямок − протилежний напрямку вектора $\vec{a}$ і позначають $-\vec{a}$.

Означення. Три вектори називають **компланарними**, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Над векторами можна здійснювати лінійні операції додавання, віднімання, множення на число.

Означення. **Сумою двох векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{a}+\vec{b}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець із кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (**правило трикутника** (рис. 3.3)).

Можна додавати вектори за **правилом паралелограма** (рис. 3.4): у цьому випадку вектори мають спільний початок, а сумою $\vec{a}+\vec{b}$ є діагональ паралелограма, що виходить зі спільного початку векторів, побудованих на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

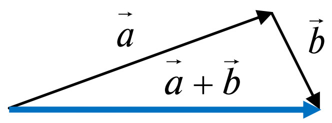

Рис. 3.3

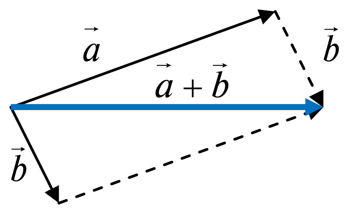

Рис. 3.4

Означення. **Різницею** $\vec{a}-\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, що в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$, тобто $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$ (рис. 3.5).

Різницю $\vec{a}-\vec{b}$ можна також розглядати як суму $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ вектора $\vec{a}$ та протилежного вектора $\left(-\vec{b}\right)$ (рис. 3.6).

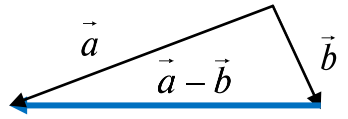

Рис. 3.5

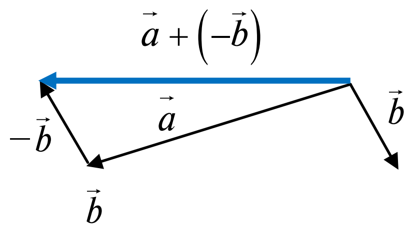

Рис. 3.6

Вектори суми $\vec{a}+\vec{b}$ та різниці $\vec{a}-\vec{b}$ двох векторів розміщені на діагоналях паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 3.7).

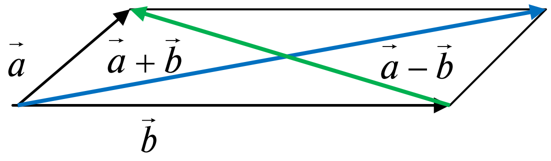

Рис. 3.7

Означення. **Добутком вектора** $\vec{a}$ **на число** m називають вектор $m\vec{a}$, модуль (довжина) якого дорівнює $|m\vec{a}| = |m| \cdot |\vec{a}|$, при цьому напрямок вектора $m\vec{a}$ збігається із напрямком вектора $\vec{a}$ у випадку $m > 0$ і є протилежним за $m < 0$ (рис. 3.8).

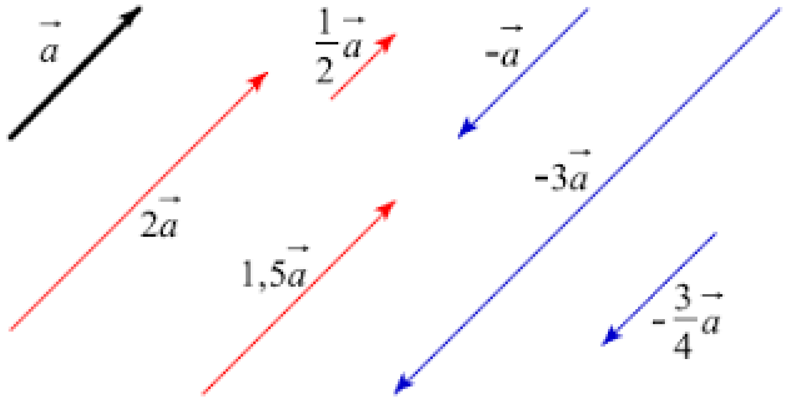

Рис. 3.8

Означення. **Ортом** вектора $\vec{a}$ називають одиничний вектор, напрямок якого збігається з напрямком вектора $\vec{a}$, і позначають $\vec{e}_{\vec{a}}$. Таким чином,

$$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{e}_{\vec{a}}, \quad \text{звідки} \quad \vec{e}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Властивості операцій додавання та множення вектора на число

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (комутативність додавання векторів).
2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (асоціативність додавання векторів).
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (закон поглинання нуля або існування нульового вектора).
4. $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$ (існування протилежного вектора).

5. $\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$ (комутативність множення вектора на число).
6. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ (дистрибутивність множення вектора відносно суми чисел).
7. $\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ (дистрибутивність множення числа відносно суми векторів).
8. $\lambda\left(\mu\vec{a}\right) = (\lambda\mu)\vec{a}$ (асоціативність множення чисел відносно вектора).
9. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (множення на одиницю).
10. $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ (множення на нуль).

Означення. **Проекцією вектора** $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ **на вектор** $\vec{b}$ називають число, яке знаходять за формулою $np_{\vec{b}}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\varphi$ (рис. 3.9).

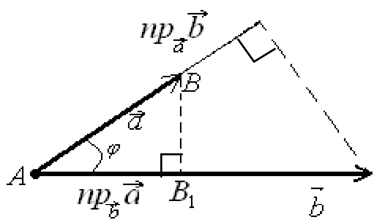

Рис. 3.9

Знак проекції $np_{\vec{b}}\vec{a}$ визначають знаком $\cos\varphi$, тобто $np_{\vec{b}}\vec{a} > 0$, якщо кут φ − гострий, та $np_{\vec{b}}\vec{a} < 0$, якщо кут φ − тупий і $np_{\vec{b}}\vec{a} = 0$, якщо кут φ − прямий.

Означення. **Базисом на прямій** називають довільний ненульовий вектор на цій прямій. **Базисом на площині** називають довільну упорядковану пару неколінеарних векторів. **Базисом у просторі** називають довільну упорядковану трійку некомпланарних векторів.

Означення. Упорядковану трійку $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарних векторів називають **правою** (рис. 3.10), якщо з кінця третього вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ спостерігаємо проти годинникової стрілки, інакше трійка векторів – **ліва** (рис. 3.11).

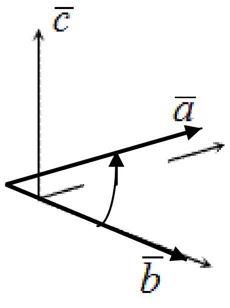

Рис. 3.10

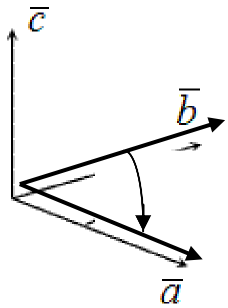

Рис. 3.11

Означення. Праву упорядковану трійку $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ одиничних і попарно перпендикулярних векторів називають **ортонормованим базисом**.

Означення. Сукупність точки O та ортонормованого базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ називають **прямокутною декартовою системою координат** (ПДСК).

Прямокутну декартову систему координат позначають *Oxyz,* де точка O − початок координат, *Ox* – вісь абсцис, *Oy* – вісь ординат, *Oz* – вісь аплікат, причому $\vec{i}$ − орт осі *Ox*, $\vec{j}$ − орт осі *Oy*, $\vec{k}$ − орт осі *Oz*.

Розглянемо вектор $\vec{a}$, початок якого розмістимо у точці O (рис. 3.12).

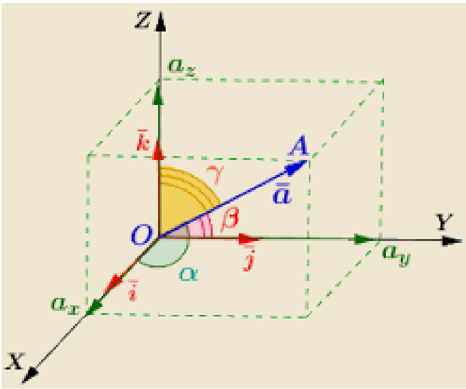

Рис. 3.12

Означення. Кути α, β, γ, що утворює вектор $\vec{a}$ відповідно з координатними осями *Ox, Oy, Oz* називають **напрямними кутами**, а $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ − **напрямними косинусами** вектора $\vec{a}$.

Тоді, згідно з означенням проекції вектора, маємо:

$$np_{OX}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha = a_x, \quad np_{OY}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\beta = a_y, \quad np_{OZ}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma = a_z,$$

причому a_x, a_y, a_z називають **координатами вектора** $\vec{a}$.

Напрямні косинуси знаходять за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

З наведених формул випливає важливе співвідношення для напрямних косинусів:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Зауважимо, якщо ця рівність не виконується, то кути α, β, γ напрямку у просторі не визначають (його не існує).

Нехай вектор $\vec{a}$ задано своїми координатами в $Oxyz$, тоді це записують або $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, або $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ (розклад вектора за базисом). Зауважимо, що $\vec{i} = \{1; 0; 0\}$, $\vec{j} = \{0; 1; 0\}$, $\vec{k} = \{0; 0; 1\}$.

Якщо початок вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ міститься в точці $A(x_1; y_1; z_1)$, а кінець – у точці $B(x_2; y_2; z_2)$, то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ знаходять за формулою

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},$$

а **довжину вектора** за формулою

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Якщо відомі координати векторів, то лінійним діям над векторами відповідають арифметичні дії над їх координатами.

Нехай задано вектори $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ і $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ у системі координат $Oxyz$. Тоді **у координатному вигляді** виражають:

– **модуль вектора**: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$;

– **сума**: $\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\}$;

– **різниця**: $\vec{a} - \vec{b} = \{a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z\}$;

– **добуток вектора на число**: $\lambda\vec{b} = \{\lambda b_x; \lambda b_y; \lambda b_z\}$.

Оскільки для колінеарних векторів справедливо $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, то $a_x = \lambda b_x, a_y = \lambda b_y, a_z = \lambda b_z$, звідки отримуємо **умову колінеарності** двох векторів:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda,$$

тобто два вектори колінеарні, якщо їхні відповідні координати пропорційні.

3.2. Скалярний добуток двох векторів

***Означення*. Скалярним добутком** двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними і позначають $(\vec{a},\vec{b})$ або $\vec{a}\cdot\vec{b}$, тобто $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$.

Використовуючи поняття проекції вектора на вектор, отримаємо ще одну форму запису для скалярного добутку:

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a} \quad \text{або} \quad (\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}.$$

Основні властивості скалярного добутку

1. Скалярний добуток додатний $(\vec{a},\vec{b}) > 0$, якщо кут φ – гострий ($\cos\varphi > 0$), скалярний добуток від'ємний $(\vec{a},\vec{b}) < 0$, коли кут φ – тупий ($\cos\varphi < 0$).

Якщо кут φ між векторами прямий, тобто $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, тому $(\vec{a},\vec{b}) = 0$, що дає **умову перпендикулярності для ненульових векторів**:

$$(\vec{a},\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}.$$

Наприклад, для ортонормованого базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ справедливо: $(\vec{i},\vec{j}) = 0$, $(\vec{j},\vec{k}) = 0$, $(\vec{k},\vec{i}) = 0$.

2. Скалярний добуток $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$, оскільки в цьому випадку кут між векторами дорівнює нулю, а $\cos\varphi = \cos 0 = 1$.

Наприклад, $(\vec{i},\vec{i}) = |\vec{i}|^2 = 1$, $(\vec{j},\vec{j}) = |\vec{j}|^2 = 1$, $(\vec{k},\vec{k}) = |\vec{k}|^2 = 1$.

Число $(\vec{a},\vec{a})$ називають **скалярним квадратом** вектора і позначають $\vec{a}^2$, отже, $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

3. Властивість комутативності: $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$.

4. Числовий множник можна виносити за знак скалярного добутку

$$\left(m\vec{a},\vec{b}\right)=m\left(\vec{a},\vec{b}\right),\quad \left(\vec{a},\,k\vec{b}\right)=k\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

5. Скалярний добуток вектора $\vec{a}$ на суму двох векторів $\vec{b}+\vec{c}$ дорівнює сумі скалярних добутків вектора $\vec{a}$ на вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто

$$\left(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{c}\right).$$

Нехай задано два вектори своїми координатами в $Oxyz$:

$$\vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\},\ \vec{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\}$$

тоді:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків відповідних координат векторів – множників.

Приклад. За якого значення x вектори $\vec{a}=\{x;\,3;\,-2\}$ і $\vec{b}=\{2;\,4;\,1\}$ будуть перпендикулярними?

Розв'язування. Умовою перпендикулярності двох векторів є $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$, тоді, оскільки $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=x\cdot 2+3\cdot 4+(-2)\cdot 1$, маємо: $2x+12-2=0$, $2x=-10$, $x=-5$. Отже, за $x=-5$ вектори $\vec{a}=\{-5;\,3;\,-2\}$ та $\vec{b}=\{2;\,4;\,1\}$ перпендикулярні.

Застосування скалярного добутку векторів

1. Кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, що виходять з однієї точки, знаходимо з формули $\cos\varphi=\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$.

2. Проекція вектора $\vec{a}$ на напрямок вектора $\vec{b}$: $np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|}$.

3. Роботу A сили $\vec{F}$, яка спричиняє рівномірний прямолінійний рух матеріальної точки під час її переміщення з точки M_1 у точку M_2, знаходять за формулою $A=\left(\vec{F},\overrightarrow{M_1M_2}\right)$.

Лекція 4. Векторний та мішаний добутки векторів

4.1. Векторний добуток двох векторів

Означення. Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, що позначається $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ або $\vec{a}\times\vec{b},$ і задовольняє такі три умови:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ на синус кута φ між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$: $|\vec{\mathrm{c}}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi;$

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ($\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$);

3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку (рис. 4.1).

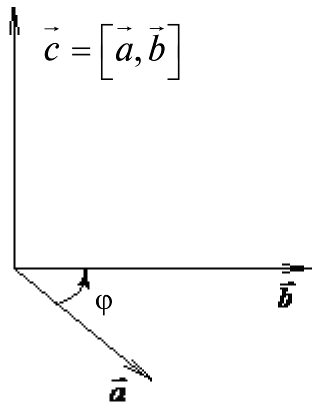

Рис. 4.1

Основні властивості векторного добутку

1. Якщо у векторному добутку поміняти місцями множники, то векторний добуток змінить свій знак на протилежний, тобто $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$ (рис. 4.2).

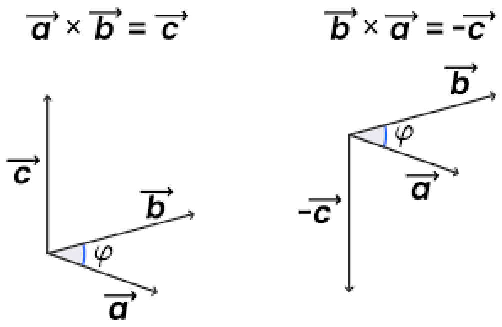

Рис. 4.2

2. Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні, то їх векторним добутком є нульовий вектор $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$, зокрема, $\left[\vec{a}, \vec{a}\right] = \vec{0}$.

3. Числовий множник можна виносити за знак векторного добутку, тобто

$$\left[\vec{a}, m\vec{b}\right] = \left[m\vec{a}, \vec{b}\right] = m \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}\right].$$

4. Векторний добуток вектора $\vec{a}$ на суму двох векторів $\vec{b} + \vec{c}$ дорівнює сумі векторних добутків вектора $\vec{a}$ на вектори $\vec{b}$ та $\vec{c}$, тобто

$$\left[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{a}, \vec{c}\right].$$

Векторний добуток у координатній формі

Якщо вектори задані своїми координатами у базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, тобто $\vec{a} = \left\{a_x, a_y, a_z\right\}$, $\vec{b} = \left\{b_x, b_y, b_z\right\}$, то векторний добуток визначають за формулою

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Застосування векторного добутку векторів

1. Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, дорівнює модулю векторного добутку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (рис. 4.3):

$$S_{паралелограма} = \left|\left[\vec{a}; \vec{b}\right]\right|.$$

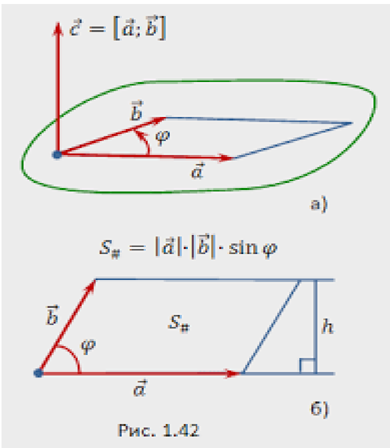

Рис. 4.3

2. Площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 4.4), віднесених до спільного початку, знаходять за формулою

$$S_{трикутника} = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|.$$

3. Момент сили $\vec{F}$, яку прикладено до точки A відносно точки O (рис. 4.4) визначають формулою

$$\vec{M} = \left[\overrightarrow{OA}, \vec{F}\right],$$

а величину моменту $\left|\vec{M}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot \sin\alpha.$

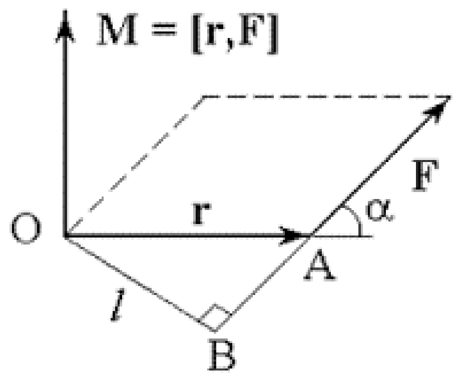

Рис. 4.4

Зауважимо, що векторне множення, так само як і скалярне, природно виникає під час розв’язання багатьох задач механіки і фізики. Отже, векторний добуток, як і скалярний, є математичною абстракцією одноманітних операцій з конкретними фізичними векторними величинами.

4.2. Мішаний добуток трьох векторів

Означення. Мішаним добутком упорядкованої трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називають число, що дорівнює скалярному добутку векторного добутку перших двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ на третій вектор $\vec{c}$:

$$\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right).$$

Щоб розкрити геометричний зміст мішаного добутку, побудуємо на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ паралелепіпед і розглянемо за означенням число $\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right)$ (рис. 4.5):

$$\left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right) = \left| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right| \cdot \left| \vec{c} \right| \cos\varphi = \left| \begin{matrix} \varphi - \textit{кут між} \\ \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \textit{ і } \vec{c} \end{matrix} \right| = S \cdot np_{\vec{a}\times\vec{b}} \vec{c} = S \cdot h = V.$$

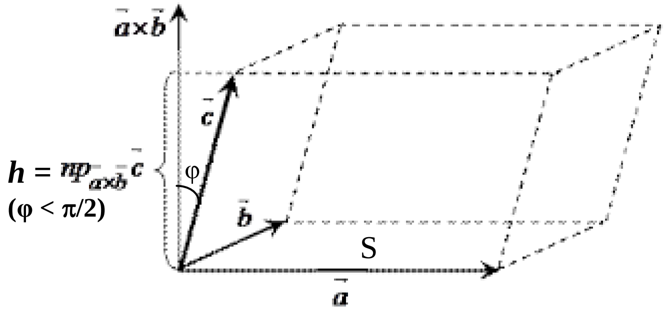

Рис. 4.5

Отже, абсолютна величина мішаного добутку $\left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right)$ трьох упорядкованих векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (віднесених до спільного початку) як на ребрах:

$$V_{\textit{паралелепіпеда}} = \left| \left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right) \right|.$$

Об'єм тетраедра (трикутної піраміди), побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, що мають спільний початок, знаходять за формулою

$$V_{\textit{тетраедра}} = \frac{1}{6} \left| \left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right) \right|.$$

Мішаний добуток у координатній формі

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задані своїми координатами $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$, то їх мішаний добуток визначають за формулою

$$\left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

яку називають **координатною формою** мішаного добутку.

Основні властивості мішаного добутку

1. Якщо в мішаному добутку поміняти місцями будь-які два множники, то мішаний добуток змінює знак на протилежний:

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=-\left(\left[\vec{a},\vec{c}\right],\vec{b}\right),\ \left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=-\left(\left[\vec{b},\vec{a}\right],\vec{c}\right).$$

2. Після циклічної перестановки множників мішаний добуток не змінюється:

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left(\left[\vec{b},\vec{c}\right],\vec{a}\right)=\left(\left[\vec{c},\vec{a}\right],\vec{b}\right).$$

3. Із властивості 2 і комутативності скалярного добутку випливає:

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right).$$

У зв’язку з цим мішаний добуток скорочено позначають $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ або $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

Застосування мішаного добутку векторів

1. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=0.$$

2. Три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ утворюють базис (некомпланарні), якщо

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)\neq 0.$$

3. Якщо мішаний добуток $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$ додатний, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів, а якщо від’ємний − ліву трійку.

Приклад. З’ясувати, чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис, якщо

$$\vec{a}=\{1;-2;0\},\quad \vec{b}=\{2,1;-1\},\quad \vec{c}=\{0;-1;3\}.$$

Р о з в ’ я з у в а н н я. Знайдемо мішаний добуток трьох векторів:

$$\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c} \right) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 + 12 = 14 \neq 0.$$

Отже, вектори некомпланарні, тому утворюють базис.

Приклад. Знайти об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах

$$\vec{a} = \{-1; 2; -3\}, \ \vec{b} = \{-2; -1; 1\}, \ \vec{c} = \{3; -1; 0\}.$$

Р о з в ’ я з у в а н н я. Знайдемо мішаний добуток трьох векторів:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 6 - 9 - 1 = -10,$$

$$V_{паралелепіпеда} = |-10| = 10.$$

Приклад застосування векторної алгебри до знаходження елементів тетраедра

Приклад. Точки $A(1;1;1)$, $B(-2;1;0)$, $C(3;-2;1)$, $D(1;-2;3)$ є вершинами тетраедра (рис. 4.6). Знайти:

а) довжину відрізка AB, довжину вектора $\overrightarrow{BC}$;

б) косинус внутрішнього кута B трикутника ABC;

в) площу трикутника ABC;

г) об’єм піраміди $ABCD$.

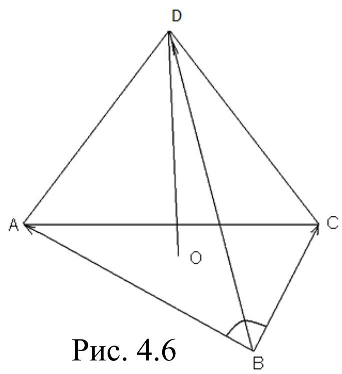

Рис. 4.6

Р о з в ’ я з у в а н н я. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{BA} = \{3; 0; 1\}, \ \overrightarrow{BC} = \{5; -3; 1\}, \ \overrightarrow{BD} = \{3; -3; 3\}.$$

а) Знаючи координати вектора $\vec{a} = \{x; y; z\}$, його довжину знаходять за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Отже, для векторів $\overrightarrow{BA} = \{3; 0; 1\}$ і $\overrightarrow{BC} = \{5; -3; 1\}$ маємо:

$$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10}, \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{35}.$$

б) Кут $\angle ABC$ обчислюємо, використовуючи скалярний добуток векторів $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$. Відомо, що кут α між векторами $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ і $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$ знаходять за формулою

$$\cos\alpha = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Отже,

$$\cos\left(\overrightarrow{BA}, \widehat{\ }\overrightarrow{BC}\right) = \frac{\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{15 + 0 + 1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{35}} = \frac{16}{5\sqrt{14}} = \frac{16\sqrt{14}}{5 \cdot 14} = \frac{8\sqrt{14}}{35},$$

звідки

$$\angle ABC = \arccos\frac{8\sqrt{14}}{35}.$$

в**)** Площу трикутника знаходимо, використовуючи векторний добуток. Знаючи, що модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах як на сторонах, отримаємо:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\Diamond}, \quad \text{де} \quad S_{\Diamond} = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|, \quad \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 9\vec{k}.$$

Звідси

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 4 + 81} = \frac{1}{2}\sqrt{94}.$$

г) Об'єм піраміди $ABCD$

$$V_{піраміди} = \frac{1}{6} V_{паралелепіпеда},$$

враховуючи, що модуль мішаного добутку трьох векторів $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3; y_3; z_3\}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, маємо

$$V_{піраміди} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\right|.$$

Отже,

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|-27 - 15 + 9 + 9\right| = \frac{1}{6}\left|-24\right| = 4.$$

Запитання для самоперевірки до розділу 2

1. Що називають вектором і що є його модулем?
2. Які вектори називають колінеарними, компланарними, рівними між собою?
3. Які дії над векторами називають лінійними і які вони мають властивості?
4. Що називають ортом вектора і як можна його знайти?
5. Що є базисом векторів на прямій, на площині, у просторі?
6. Яку упорядковану трійку некомпланарних векторів називають правою?
7. Що таке напрямні косинуси вектора і які їх властивості?
8. Яке правило знаходження координат вектора і його модуля?
9. Як виконати лінійні операції над векторами, заданими своїми кординатами?
10. Яка умова колінеарності векторів, заданих координатами?
11. Що називають скалярним добутком двох векторів?
12. Які властивості має скалярний добуток?
13. Як знайти скалярний добуток за відомими координатами векторів?
14. Що таке проекція вектора на вісь і як її знайти за допомогою скалярного добутку?
15. Як знайти кут між векторами?
16. Що називають векторним добутком двох векторів?
17. Які основні властивості векторного добутку?
18. Як знайти векторний добуток за відомими координатами векторів?
19. Який геометричний зміст модуля векторного добутку?
20. Що називають мішаним добутком трьох векторів?
21. Який геометричний зміст модуля мішаного добутку?
22. Як знайти мішаний добуток за заданими координатами векторів?
23. Які основні властивості мішаного добутку?

Розділ 3. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Лекція 5. Пряма на площині

5.1. Різні види рівнянь прямої на площині

Нехай на площині задано прямокутну декартову систему координат Oxy.

1. Знайдемо рівняння прямої, що проходить через задану фіксовану точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до заданого фіксованого ненульового вектора $\vec{n} = \{A; B\}$.

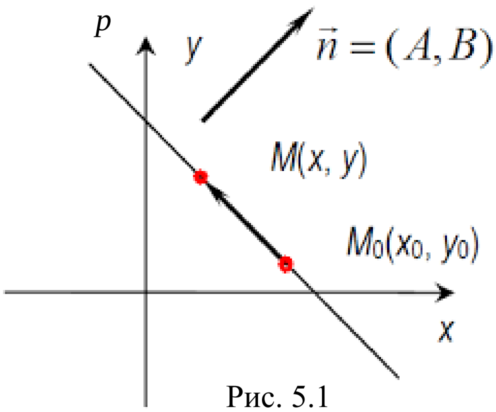

Рис. 5.1

Для цього на шуканій прямій p виберемо довільну точку $M(x; y)$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ (рис. 5.1).

За умовою вектори $\vec{n}$ та $\overrightarrow{M_0M}$ взаємно перпендикулярні, тому їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

Використовуючи координатну форму скалярного добутку для векторів $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$, отримаємо рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

яке називають **рівнянням прямої, що проходить через задану точку** $M_0(x_0; y_0)$ **перпендикулярно до заданого ненульового вектора** $\vec{n} = \{A; B\}$. Вектор $\vec{n} = \{A; B\}$ називають **нормальним вектором** прямої.

2. Розкриємо у рівнянні $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ дужки, введемо позначення $C = -Ax_0 - By_0$ і отримаємо рівняння

$$Ax + By + C = 0,$$

яке називають **загальним рівнянням прямої на площині**.

У загальному рівнянні прямої коефіцієнти A, B – координати нормального вектора, а C – вільний член рівняння прямої.

3. Знайдемо рівняння прямої, що проходить через задану фіксовану точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно заданому фіксованому ненульовому вектору $\vec{s} = \{l; m\}$. Для цього на шуканій прямій вибираємо довільну точку $M(x; y)$. Тоді вектор

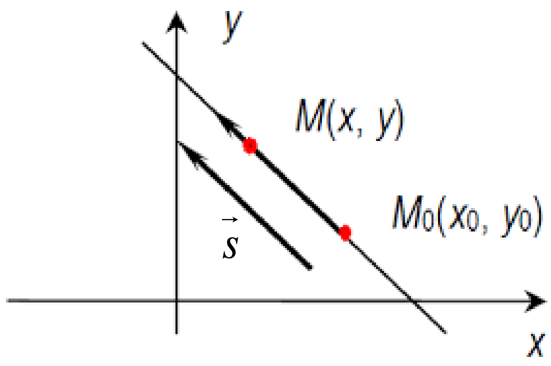

Рис. 5.2

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$$

буде колінеарним вектору $\vec{s}$ (рис. 5.2), тому їхні координати будуть пропорційні, звідки отримаємо рівняння

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m},$$

яке називають **канонічним рівнянням прямої на площині** з **напрямним вектором** $\vec{s} = \{l; m\}$.

4. Запишемо канонічне рівняння у вигляді $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t$, тоді отримаємо **параметричне рівняння прямої, що проходить через точку** $M_0(x_0; y_0)$:

$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, \end{cases} \quad t \in \mathrm{R}.$$

5. Тепер запишемо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$.

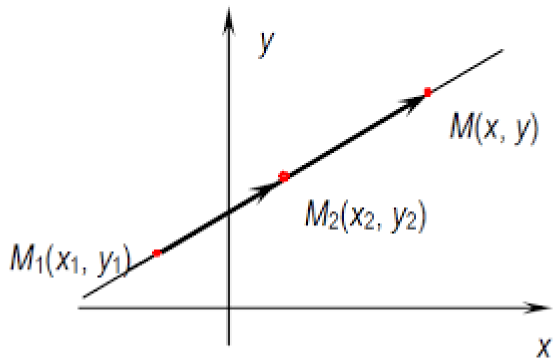

Рис. 5.3

У цьому випадку за напрямний вектор можна взяти вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\},$$

а за фіксовану точку – $M_1(x_1; y_1)$ (рис. 5.3), тоді, підставивши їх у канонічне рівняння прямої, отримаємо рівняння

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

яке називають **рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки**.

6. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(a;\,0)$ і $M_2(0;\,b)$, які лежать, відповідно, на осях Ox і Oy (рис. 5.4):

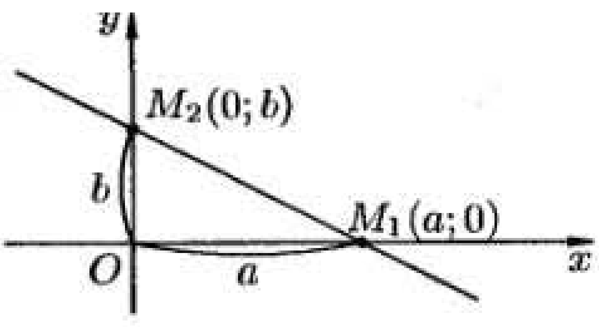

Рис. 5.4

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}$$

тоді

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b},\quad \frac{x}{-a}+1=\frac{y}{b},$$

й остаточно маємо

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

яке називають **рівнянням прямої у відрізках на осях.**

Зауваження. Рівняння прямої у відрізках на осях легко отримати із загального рівняння прямої $Ax+By+C=0$ за $C\neq 0.$ Для цього необхідно перенести коефіцієнт C в іншу частину рівності та поділити все рівняння на нього: $Ax+By=-C$, $\frac{A}{-C}x+\frac{B}{-C}y=1$. Увівши позначення $\frac{-C}{A}=a$, $\frac{-C}{B}=b$, отримаємо рівняння $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, при цьому на осі Ox пряма відтинає відрізок a, на осі OY – відповідно, b. Так, пряма $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$ перетинає вісь Ox у точці $A(-2;0)$, а вісь Oy – у точці $B(0;3)$ (рис. 5.5).

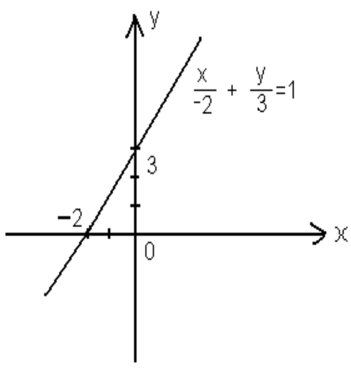

Рис. 5.5

7. Переписуючи рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

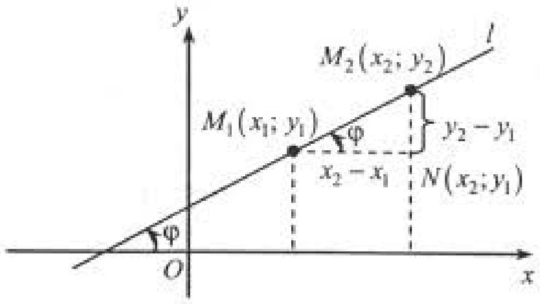

Рис. 5.6

у вигляді $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ та позначивши $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ (рис. 5.6), отримаємо рівняння

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

яке називають **рівнянням прямої, що проходить через задану точку** $M_1(x_1; y_1)$ **із заданим кутовим коефіцієнтом** k.

8. Із рис. 5.6 очевидно, що $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\varphi$, отже кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg}\varphi$, де φ – кут нахилу прямої до додатного напрямку осі Ox.

9. Розкриємо у рівнянні $y - y_1 = k(x - x_1)$ дужки і введемо позначення $b = y_1 - kx_1$, отримаємо рівняння

$$y = kx + b,$$

яке називають **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом,** де b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy (рис. 5.7).

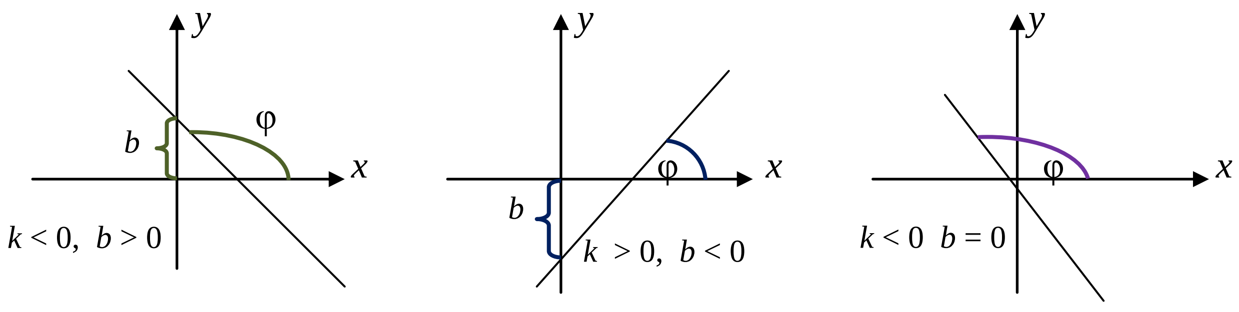

Рис. 5.7

Слід зауважити, що:

- за $k = 0$ пряма $y = b$ паралельна осі Ox;
- за $b = 0$ пряма $y = kx$ проходить через початок координат;
- за $k = 0$ та $b = 0$ пряма $y = 0$ збігається з віссю Ox.

5.2. Кут між двома прямими, умови паралельності та перпендикулярності двох прямих

Кут між прямими, умови паралельності та перпендикулярності двох прямих визначають залежно від вигляду рівнянь прямих.

1. Нехай прямі задані загальними рівняннями:

p_1 : $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ із нормальним вектором $\overrightarrow{n_1} = \{A_1; B_1\}$,

p_2 : $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ із нормальним вектором $\overrightarrow{n_2} = \{A_2; B_2\}$.

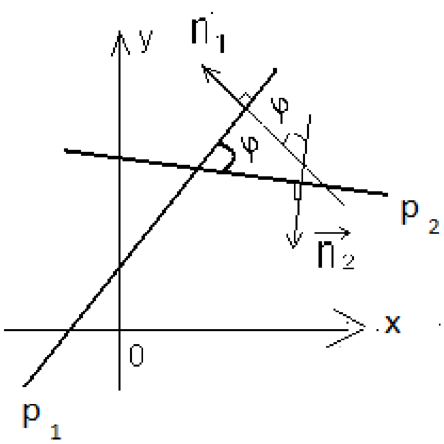

Рис. 5.8

Тоді кут між прямими можна визначити як кут між їхніми векторами нормалей $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ (рис. 5.8), а саме:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Оскільки вектори нормалі двох паралельних прямих колінеарні, у**мова паралельності двох прямих** має вигляд

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Слід зауважити, якщо $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то **прямі збігаються**.

Із перпендикулярності векторів нормалі двох перпендикулярних прямих випливає **умова перпендикулярності двох прямих через координати векторів нормалі:** $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

2. Нехай прямі p_1 та p_2 задані своїми канонічними рівняннями:

p_1 : $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}$, де $\overrightarrow{s_1} = \{l_1; m_1\}$ – напрямний вектор прямої p_1,

p_2 : $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}$, де $\overrightarrow{s_2} = \{l_2; m_2\}$ – напрямний вектор прямої p_2.

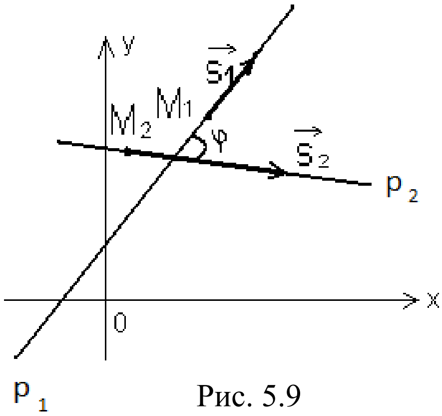

Рис. 5.9

Тоді кут між прямими можна визначити як кут між їхніми напрямними векторами $\vec{s_1}$, $\vec{s_2}$ (рис. 5.9), використовуючи скалярний добуток векторів:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}}{\left|\vec{s_1}\right|\cdot\left|\vec{s_2}\right|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}.$$

Оскільки напрямні вектори двох паралельних прямих колінеарні, **умова паралельності двох прямих** має вигляд

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Із перпендикулярності напрямних векторів двох перпендикулярних прямих випливає **умова перпендикулярності двох прямих через координати напрямних векторів:**

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0.$$

3. Нехай прямі p_1 та p_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами:

p_1 : $y = k_1 x + b_1$, де k_1 – кутовий коефіцієнт прямої p_1,

p_2 : $y = k_2 x + b_2$, де k_2 – кутовий коефіцієнт прямої p_2.

Тоді кут $\varphi = \alpha - \beta$ між прямими (рис. 5.10) можна визначити за допомогою відомої шкільної формули, а саме

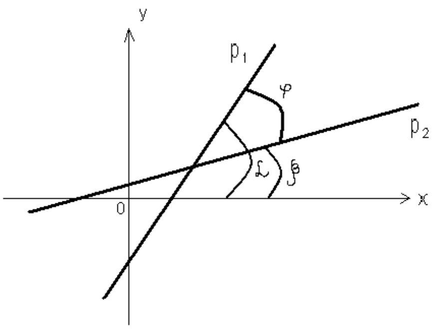

Рис. 5.10

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta},$$

враховуючи, що $\mathrm{tg}\alpha = k_1$, $\mathrm{tg}\beta = k_2$, маємо

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Якщо прямі p_1, p_2 паралельні, то $\varphi = 0$ і $\mathrm{tg}\varphi = 0$, тому з формули для знаходження кута між прямими маємо $k_1 - k_2 = 0$. Отже, **умова паралельності двох прямих** має вигляд

$$k_1 = k_2.$$

Якщо прямі p_1, p_2 перпендикулярні, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не існує, але існує $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$. Враховуючи, що $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1 + k_1 k_2}{k_1 - k_2} = 0$, маємо $1 + k_1 k_2 = 0$. Отже, **умова перпендекулярності двох прямих** має вигляд

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ або } k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Усі формули зручно звести у таблицю (табл. 5.1).

Таблиця 5.1. ***Кут між двома прямими, умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.***

Вигляд рівняння прямих	Кут між прямими	Умова паралельності двох прямих	Умова перпендикуляр-ності двох прямих
$p_1: \ A_1x + B_1y + C_1 = 0$ $p_2: \ A_2x + B_2y + C_2 = 0$	$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$
$p_1: \ \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}$ $p_2: \ \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}$	$\cos\varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$	$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$	$l_1l_2 + m_1m_2 = 0$
$p_1: \ y = k_1x + b_1$ $p_2: \ y = k_2x + b_2$	$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}$	$k_1 = k_2$	$k_2 = -\frac{1}{k_1}$

Зауваження. Формули для знаходження кута між прямими дають змогу визначити один із двох суміжних кутів, які утворюються при перетині двох прямих, а другий кут буде дорівнювати $\pi - \varphi$. Іноді вирази справа у цих формулах записують за модулем, тоді визначають гострий кут між прямими.

Приклад. Через точку $A(-1;\, 2)$ провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $4x - 2y - 3 = 0$ (рис. 5.11).

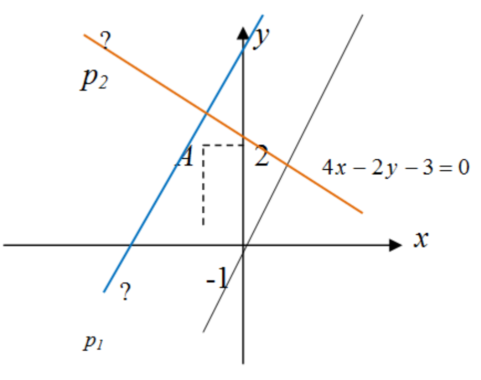

Рис. 5.11

Р о з в ' я з у в а н н я. Зведемо загальне рівняння прямої $4x - 2y - 3 = 0$ до рівняння з кутовим коефіцієнтом, маємо $y = 2x - \frac{3}{2}$. Отже, кутовий коефіцієнт прямої $k = 2$, тоді кутовий коефіцієнт прямої, що паралельна заданій прямій, $k_1 = k = 2$, а кутовий коефіцієнт прямої, яка перпендикулярна заданій прямій $k_2 = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{2}$. Тоді, скориставшись рівнянням $y - y_1 = k\left(x - x_1\right)$, дістанемо:

$p_1 : y - 2 = 2(x+1),\ \ y = 2x + 4$ або $2x - y + 4 = 0;$

$p_2 :\quad y - 2 = -\frac{1}{2}(x+1),\ \ y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 2,\ \ y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ або $x + 2y - 3 = 0.$

Лекція 6. Криві другого порядку

Означення. Лінією другого порядку називають множину точок площини, координати яких задовольняють рівняння другого степеня

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$$

де $A, B, C, D, E, F \in \mathrm{R}, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Зокрема, до ліній другого порядку належать коло, еліпс, гіпербола і парабола.

6.1. Коло

Означення. **Колом** називають геометричне місце точок площини, рівновіддалених від деякої фіксованої точки, яку називають центром кола. Відстань від центра кола до будь-якої його точки називають **радіусом кола** і позначають R.

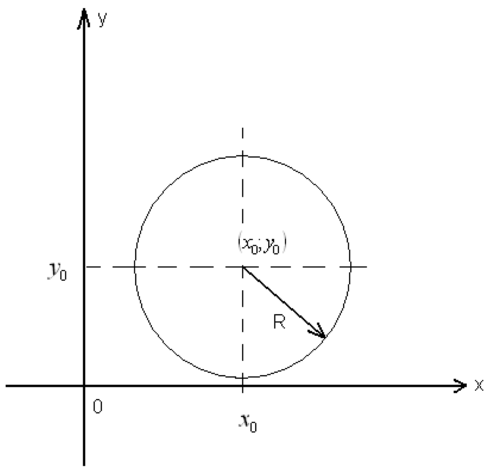

Рис. 6.1

Рівняння кола має вигляд

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

де $(x_0; y_0)$ – координати центра кола, а R – радіус (рис. 6.1).

Якщо центр кола розміщено у початку координат, тобто $x_0 = y_0 = 0$, тоді рівняння кола набуває вигляду

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

його називають **канонічним рівняння кола**.

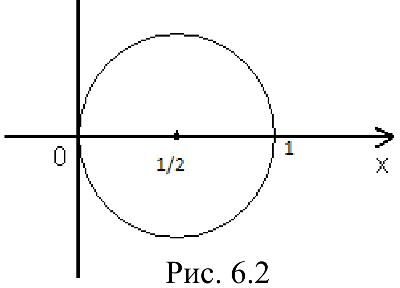

Рис. 6.2

Приклад. Розглянемо рівняння

$$x^2 - x + y^2 = 0.$$

Очевидно, це рівняння кривої другого порядку, виділимо повний квадрат відносно змінної x.

$$\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + y^2 = 0,$$

тоді маємо

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

тобто рівняння кола із центром у точці $\left(\frac{1}{2};\,0\right)$ і радіусом $R=\frac{1}{2}$ (рис. 6.2).

6.2. Еліпс

Означення. **Еліпсом** називають геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок площини, які називають **фокусами**, є величиною сталою і більшою за відстань між фокусами (рис. 6.3):

$$|MF_1|+|MF_2|=2a>2c.$$

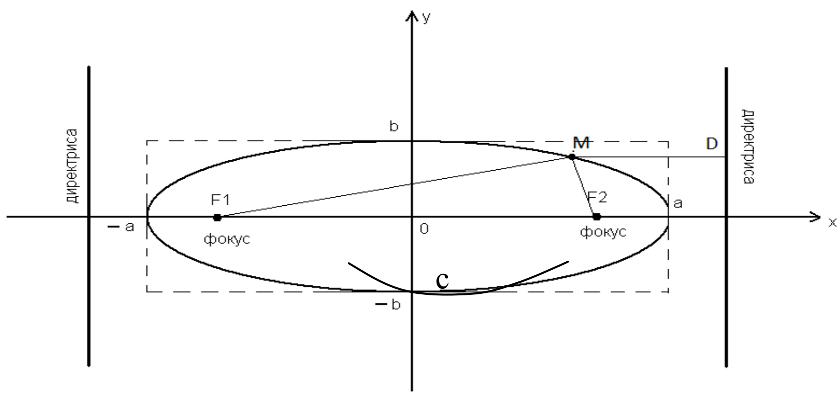

Рис. 6.3

Канонічне рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

де a, b – півосі еліпса. Еліпс симетричний відносно осей Ox, Oy, які називають осями симетрії еліпса, і симетричний відносно точки $O(0;\,0)$, яку називають центром еліпса.

Якщо $a>b$ (рис. 6.3), то a – більша піввісь, b – мала піввісь еліпса. Нехай відстань між фокусами F_1, F_2 дорівнює $2c$ (фокальна відстань), тоді $c^2=a^2-b^2$. **Фокуси завжди лежать на більшій вісі еліпса.** У цьому випадку координати фокусів $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Ексцентриситет еліпса – це величина, яка характеризує міру відхилення еліпса від кола і дорівнює відношенню половини фокальної відстані до довжини більшої півосі, тобто, якщо $a > b$, то

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1.$$

Директрисами еліпса називають прямі, перпендикулярні великій осі еліпса, рівняння яких мають вигляд $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Якщо $a < b$ (рис. 6.4), то a – менша піввісь, b – більша піввісь еліпса.

Оскільки фокуси завжди лежать на більшій осі еліпса, то їхні координати $F_1(0;-c)$, $F_2(0;c)$ ($2c$ – фокальна відстань). Параметри a, b та c пов’язані співвідношенням $c^2 = b^2 - a^2$.

Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \frac{c}{b} < 1$ (параметр c ділимо на більшу піввісь). Директриси за $a < b$ мають рівняння $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.

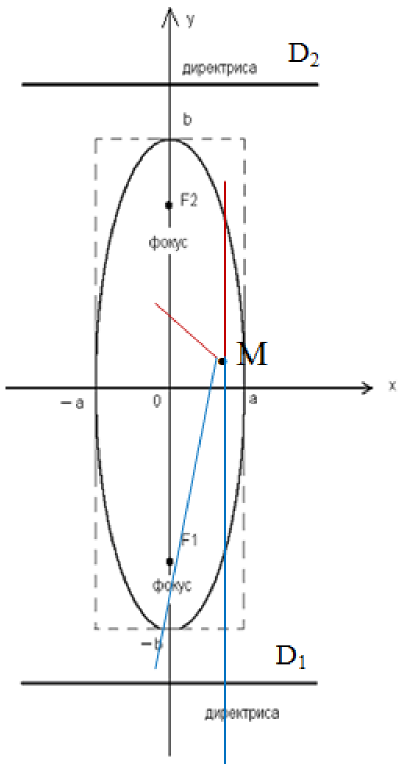

Рис. 6.4

Зауваження. Точки еліпса мають таку ***властивість***: відношення відстаней від довільної точки $M(x;y)$ еліпса до фокуса і до відповідної йому директриси є величиною сталою, що дорівнює ексцентриситету еліпса:

$$\frac{MF_1}{MD_1} = \frac{MF_2}{MD_2} = \varepsilon.$$

Зауваження. Якщо центр симетрії еліпса лежить у точці $C(x_0; y_0)$, а осі симетрії паралельні координатним осям, рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Знаходячи характеристики, треба враховувати зміщення еліпса.

Приклад. Визначити тип кривої, знайти її основні характеристики та побудувати криву:

$$9x^2+4y^2-36x-4y+1=0.$$

Р о з в ' я з у в а н н я. У рівнянні кривої згрупуємо доданки, що містять однакові змінні, винесемо спільні множники й виділимо повні квадрати відносно x, y:

$$9x^2+4y^2-36x-4y+1=0,$$

$$9(x^2-4x)+4(y^2-y)+1=0,$$

$$9(x^2-4x+4-4)+4(y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})+1=0,$$

$$9(x-2)^2-36+4(y-\frac{1}{2})^2-1+1=0, \quad 9(x-2)^2+4(y-\frac{1}{2})^2=36,$$

поділивши на 36, отримаємо рівняння еліпса:

$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{9}=1$$

із центром у точці $C\left(2;\frac{1}{2}\right)$, $a^2=4$, $b^2=9$ ($a=2$, $b=3$), $2b$ – більша вісь еліпса. Параметри еліпса a,b,c пов'язані співвідношенням $c^2=b^2-a^2$, тобто $c^2=9-4=5$, маємо $c=\sqrt{5}$. Фокуси містяться на більшій осі еліпса, тому їх координати $F_1\left(2;\frac{1}{2}-\sqrt{5}\right)$,

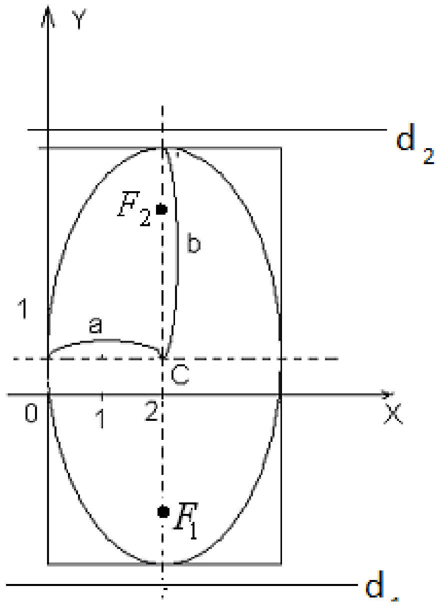

Рис. 6.5

$F_2\left(2;\frac{1}{2}+\sqrt{5}\right)$. Знайдемо ексцентриситет еліпса $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{5}}{3}<1$. Рівняння директрис: $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}+y_0$, тобто $y=\pm\frac{9}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2}$ або $y=\pm\frac{9\sqrt{5}}{5}+\frac{1}{2}$ (рис. 6.5).

6.3. Гіпербола

Означення. **Гіперболою** називають геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней від яких до двох фіксованих точок площини, які називають **фокусами**, є величиною сталою і меншою за відстань між фокусами (рис. 6.6):

$$\left| |MF_1| - |MF_2| \right| = 2a < 2c.$$

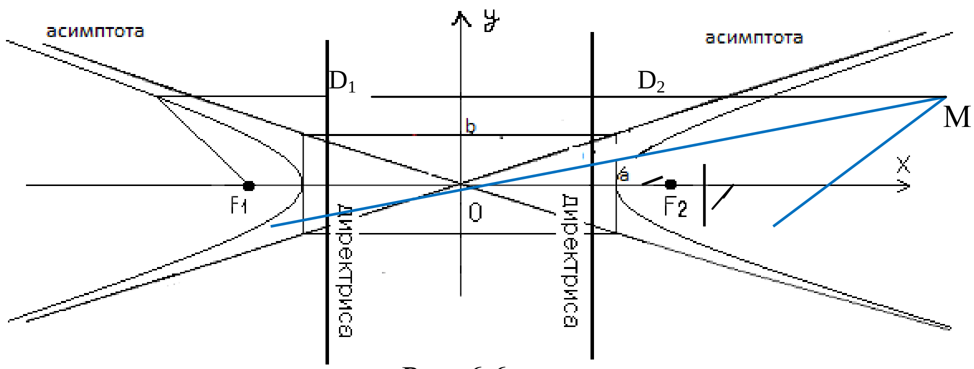

Рис. 6.6

Гіпербола симетрична відносно осей Ox, Oy, які називають осями симетрії гіперболи, і симетрична відносно точки $O(0;0)$, яку називають центром гіперболи. Вісь симетрії, яку перетинає гіпербола, називають **дійсною або фокальною** віссю гіперболи. Вісь симетрії, що проходить перпендикулярно до дійсної осі, називають **уявною віссю** гіперболи.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де a і b – півосі гіперболи.

На рис. 6.6 a – дійсна (фокальна) піввісь гіперболи, b – уявна піввісь. Нехай відстань між фокусами F_1 і F_2 дорівнює $2c$ (фокальна відстань), параметри a, b та c (c – половина відстані між фокусами) пов'язані співвідношенням: $c^2 = a^2 + b^2$.

Фокуси завжди лежать на дійсній осі гіперболи. У розглядуваному випадку маємо координати фокусів $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Ексцентриситет гіперболи − це величина, що характеризує міру стискання гіперболи і дорівнює відношенню половини фокальної відстані до довжини дійсної півосі, тобто $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$.

Директрисами гіперболи називають прямі, перпендикулярні до дійсної осі гіперболи, рівняння яких $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Зазначимо, що, на відміну від еліпса, який є замкненою кривою, гіпербола складається із двох гілок: лівої і правої.

Гіпербола має дві **асимптоти** – прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$. Прямокутник із сторонами $2a$ та $2b$ називають **основним прямокутником** гіперболи.

Тепер розглянемо рівняння спряженої гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

де b – дійсна (фокальна) піввісь гіперболи, a – уявна піввісь. Оскільки фокуси завжди лежать на дійсній осі гіперболи, то координати фокусів $F_1(0;-c)$, $F_2(0;c)$, параметри a, b та c пов'язані тим самим співвідношенням: $c^2 = a^2 + b^2$ (рис. 6.7).

Ексцентриситет гіперболи у цьому випадку $\varepsilon = \frac{c}{b} > 1$ (відношення половини фокальної відстані до довжини дійсної півосі). Рівняння директрис: $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$, а асимптоти − прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$.

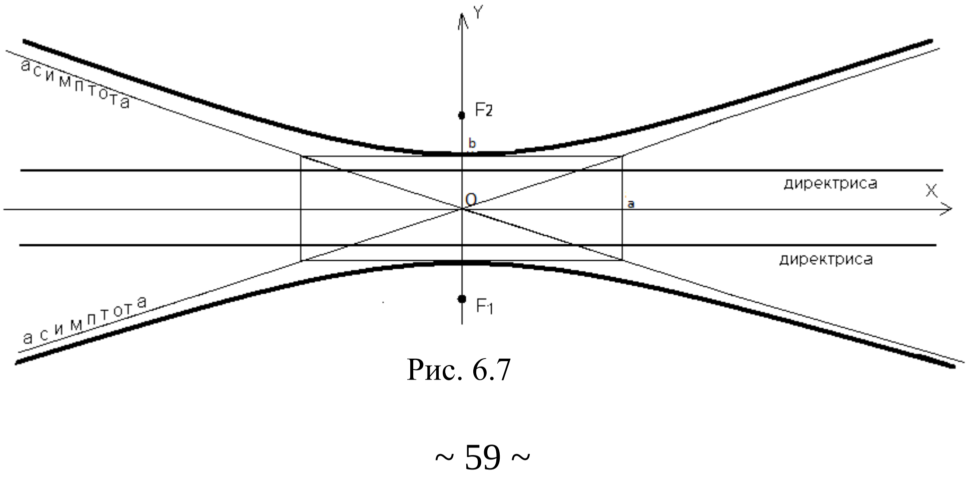

Рис. 6.7

Зауваження. Точки гіперболи мають таку властивість: відношення відстаней від довільної точки $M(x;y)$ гіперболи до фокуса і до відповідної йому директриси є величиною сталою, що дорівнює ексцентриситету:

$$\frac{MF_1}{MD_1}=\frac{MF_2}{MD_2}=\varepsilon .$$

Зауваження. Гіпербола, центр симетрії якої міститься у точці $C(x_0;y_0)$, а осі симетрії паралельні координатним осям, має рівняння

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, \quad \text{або} \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1.$$

Зауваження. Якщо у рівнянні гіперболи $a = b$, то гіперболу називають **рівносторонньою**, а її основний прямокутник – квадрат.

Приклад. Визначити тип кривої, знайти її основні характеристики та побудувати криву

$$x^2-4y^2-8y=0.$$

Р о з в ' я з у в а н н я. $x^2-4(y^2+2y+1-1)=0$, $x^2-4(y+1)^2=-4$.

Рівняння гіперболи $\frac{x^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{1}=-1$, де $a^2=4$, $b^2=1$ ($a=2$, $b=1$). Центр гіперболи $C(0;-1)$, прямі $x=0$ та $y+1=0$ – осі гіперболи, причому $x=0$ – дійсна вісь гіперболи , а пряма $y+1=0$ – уявна вісь гіперболи. Параметри гіперболи a,b,c пов'язані співвідношенням $c^2=a^2+b^2$, тобто $c^2=1+4=5$ й маємо $c=\sqrt{5}$. Отже, координати фокусів гіперболи $F_1\left(0;-1-\sqrt{5}\right)$, $F_2\left(0;-1+\sqrt{5}\right)$.

Побудову починаємо з основного прямокутника гіперболи із центром у точці $C(0;-1)$ і сторонами 4 і 2.

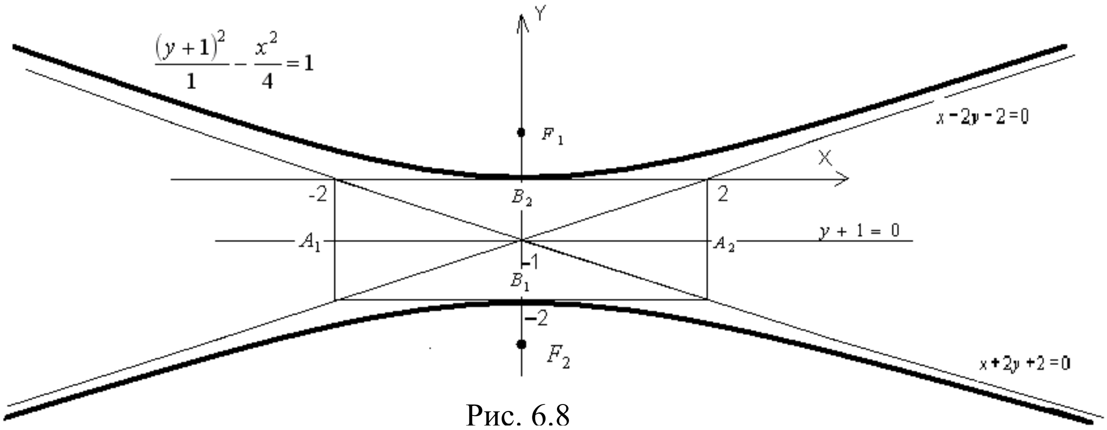

Рис. 6.8

Знайдемо ексцентриситет гіперболи $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{5}}{1}=\sqrt{5}>1$. Гіпербола має дві асимптоти, рівняння яких $x-2y-2=0$ (пряма проходить через точки $(0;-1)$ і $(2;0)$) та $x+2y+2=0$ (пряма проходить через точки $(0;-1)$ і $(-2;0)$). Рівняння директрис $y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}+(-1)$ або $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}-1$ (рис. 6.8).

6.4. Парабола

Означення. **Параболою** називають геометричне місце точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від даної точки, яку називають **фокусом**, і від даної прямої, яку називають **директрисою**.

1. **Канонічне рівняння параболи** має вигляд $y^2=2px$.

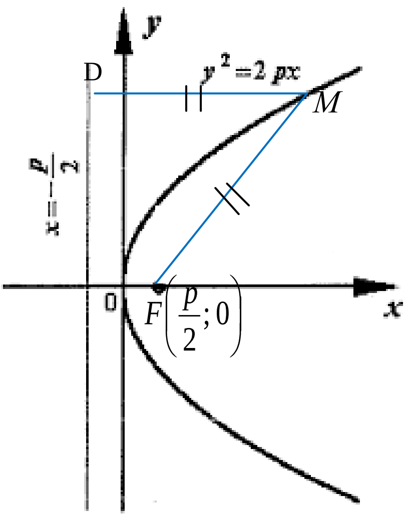

Рис. 6.9

Парабола симетрична відносно осі Ox, яку називають віссю симетрії параболи; точку перетину осі симетрії з параболою називають вершиною параболи $O(0;0)$.

Сталу $p>0$ – називають **фокальним параметром** параболи, який визначає відстань між фокусом F і директрисою.

Отже, фокус параболи міститься в точці $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, а рівняння директриси має вигляд $x=-\frac{p}{2}$ (рис. 6.9).

Зауваження. Рівняння $y^2 = -2px$ також є **канонічним рівнянням параболи** і визначає параболу, яка лежить у тій півплощині, де $x < 0$.

Парабола є симетричною відносно осі Ox, координати її фокуса $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$, а рівняння директриси $x = \frac{p}{2}$ (рис. 6.10).

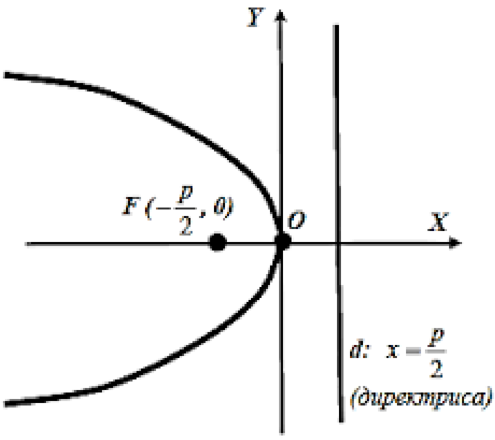

Рис. 6.10

2. Рівняння $x^2 = 2py$ також є **канонічним рівнянням параболи**.

Вершина параболи − точка $O(0;0)$, а віссю симетрії є вісь Oy.

Фокус параболи – точка $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$, а рівняння директриси $y = -\frac{p}{2}$ (рис. 6.11).

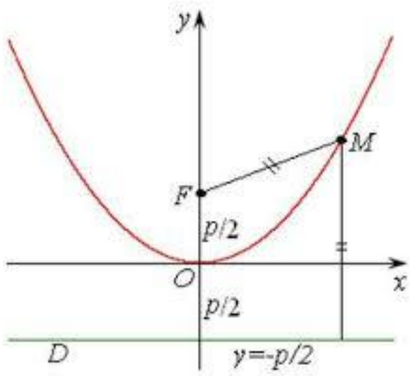

Рис. 6.11

Зауваження. Рівняння $x^2 = -2py$ також є **канонічним рівнянням параболи**, яка лежить у тій півплощині, де $y < 0$.

Парабола є симетричною відносно осі Oy, координати її фокуса $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$, а рівняння директриси $y = \frac{p}{2}$ (рис. 6.12).

Ексцентриситет довільної параболи дорівнює одиниці.

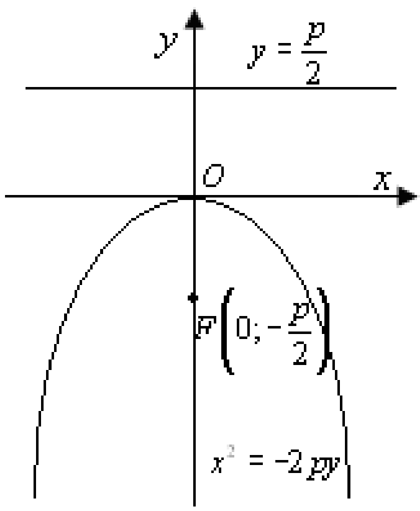

Рис. 6.12

Зауваження. Парабола з вершиною в точці $C(x_0; y_0)$ та симетрією відносно прямої $y = y_0$ може мати рівняння:

1) $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, тоді фокус параболи буде міститися у точці $F\left(\frac{p}{2} + x_0; y_0\right)$, а рівняння директриси $x = -\frac{p}{2} + x_0$;

2) $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$, тоді фокус параболи буде міститися у точці $F\left(-\frac{p}{2} + x_0; y_0\right)$, а рівняння директриси $x = \frac{p}{2} + x_0$.

Зауваження. Парабола з вершиною у точці $C(x_0; y_0)$ та симетрією відносно прямої $x = x_0$ може мати рівняння:

1) $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, тоді фокус такої параболи міститься у точці $F\left(x_0; \frac{p}{2} + y_0\right)$, а рівняння директриси $y = -\frac{p}{2} + y_0$;

2) $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$, тоді фокус такої параболи міститься у точці $F\left(x_0; -\frac{p}{2} + y_0\right)$, а рівняння директриси $y = \frac{p}{2} + y_0$.

Приклад. Визначити тип кривої, знайти її основні характеристики та побудувати криву $y^2 + 4y + 3x - 5 = 0$.

Розв'язування.

$$(y^2 + 4y + 4) - 4 + 3x - 5 = 0,$$

$$(y + 2)^2 = -3x + 9,$$

$$(y + 2)^2 = -3(x - 3).$$

Отже, отримали рівняння параболи

$$(y + 2)^2 = -3(x - 3).$$

Вершина параболи – точка $C(3;-2)$; $2p=3$; $p=\frac{3}{2}$ – фокальний параметр. Директриса параболи має рівняння $x=\frac{3}{4}+3$, $x=\frac{15}{4}$ або $4x-15=0$.

Ця парабола розміщена симетрично відносно прямої $y+2=0$ (вісь параболи). Парабола перетинає вісь Oy в точках $y_1=1$ та $y_2=-5$ за $x=0$; вісь Ox – у точці $x=\frac{5}{3}$ за $y=0$. Фокус міститься на осі параболи, тобто на прямій $y+2=0$, таким чином, координати фокуса $F\left(3-\frac{3}{4};-2\right)$ або $F\left(\frac{9}{4};-2\right)$ (рис. 6.13).

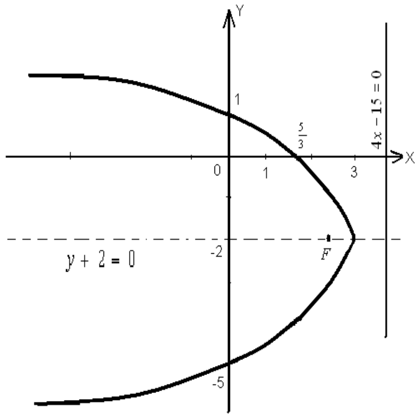

Рис. 6.13

Лекція 7. Пряма і площина у просторі

7.1. Площина у просторі

Нехай у просторі задано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$.

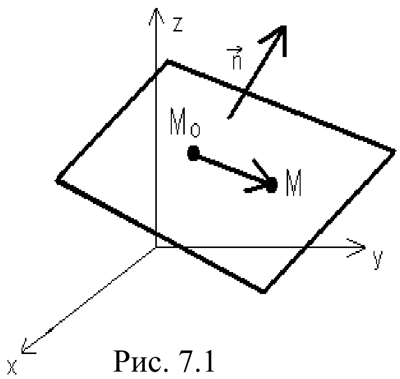

Рис. 7.1

1. Знайдемо рівняння площини, що проходить через задану фіксовану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно до заданого фіксованого ненульового вектора $\vec{n}=\{A;B;C\}$. Для цього на шуканій площині вибираємо довільну точку $M(x;y;z)$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$ (рис. 7.1).

За умовою вектори $\vec{n}$ та $\overrightarrow{M_0M}$ взаємно перпендикулярні, тому їх скалярний добуток дорівнює нулю. Використовуючи координатну форму скалярного добутку для векторів $\vec{n}$ та $\overrightarrow{M_0M}$, отримаємо

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

яке називають **рівнянням площини, що проходить через задану точку** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ **перпендикулярно до заданого вектора** $\vec{n}=\{A;B;C\}$. Вектор $\vec{n}=\{A;B;C\}$ називають **нормальним вектором площини** або **вектором нормалі**.

2. Розкриємо у рівнянні $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ дужки і введемо позначення $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, отримаємо рівняння:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

яке називають **загальним рівнянням площини у просторі**.

У загальному рівнянні площини коефіцієнти A, B, C – координати нормального вектора, а D – вільний член рівняння площини.

3. Знайдемо рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, що не належать одній прямій. Для цього на шуканій площині візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ і побудуємо три вектори (рис. 7.2):

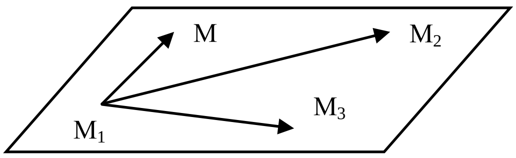

Рис. 7.2

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}.$$

Ці вектори лежать в одній площині, тобто вони компланарні. Оскільки мішаний добуток компланарних векторів дорівнює нулю, то, використовуючи координатну форму мішаного добутку, маємо:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

яке називають **рівнянням площини, що проходить через три фіксовані точки**.

4. Запишемо рівняння площини, що проходить через точки $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$, які лежать, відповідно, на осях Ox, Oy і Oz (рис. 7.3)

$$\begin{vmatrix} x - a & y - 0 & z - 0 \\ 0 - a & b - 0 & 0 - 0 \\ 0 - a & 0 - 0 & c - 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

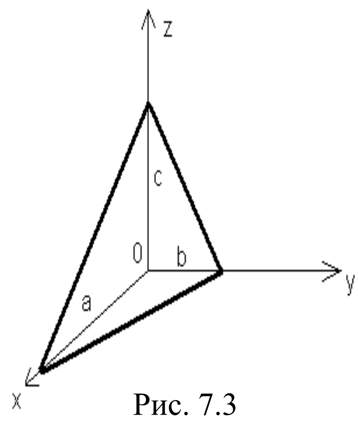

Рис. 7.3

Розкриємо визначник:

$$(x - a)bc + abz + acy = 0,$$

$$bcx + acy + abz = abc$$

і, поділивши обидві частини на abc, отримаємо

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

яке називають **рівнянням площини у відрізках на осях**.

Зауваження. Рівняння площини у відрізках на осях легко отримати із загального рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ за } D \neq 0.$$

Виконавши перетворення:

$$Ax+By+Cz=-D \Rightarrow \frac{A}{-D}x+\frac{B}{-D}y+\frac{C}{-D}z=1$$

та позначивши

$$\frac{-D}{A}=a,\ \frac{-D}{B}=b,\ \frac{-D}{C}=c,$$

отримаємо рівняння площини у відрізках на осях координат:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

7.2. Кут між двома площинами, умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Нехай площини у просторі задані загальними рівняннями:

$$\alpha_1:\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\alpha_2:\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

де $\overrightarrow{n_1}=\{A_1;B_1;C_1\}$, $\overrightarrow{n_2}=\{A_2;B_2;C_2\}$ – вектори нормалі площин (рис. 7.4).

1. **Двогранний кут між двома площинами** дорівнює лінійному куту φ між векторами нормалі, тоді

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

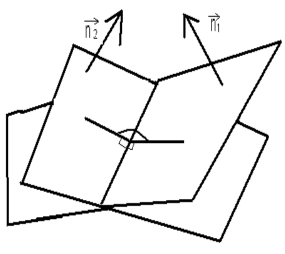

Рис. 7.4

Зауваження. Зрозуміло, що таким чином буде визначений лише один із двох двогранних кутів, інший буде дорівнювати $\pi-\varphi$.

2. Оскільки вектори нормалі двох паралельних площин колінеарні, **умова паралельності двох площин** має вигляд

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}.$$

Слід зауважити, якщо $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$, то **площини збігаються**.

3. Із перпендикулярності векторів нормалі двох перпендикулярних площин випливає **умова перпендикулярності двох площин через координати векторів нормалі**:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

7.3. Пряма у просторі

Нехай у просторі задано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$.

1. Знайдемо рівняння прямої, що проходить через задану фіксовану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно заданому ненульовому вектору $\vec{s} = \{l; m; n\}$.

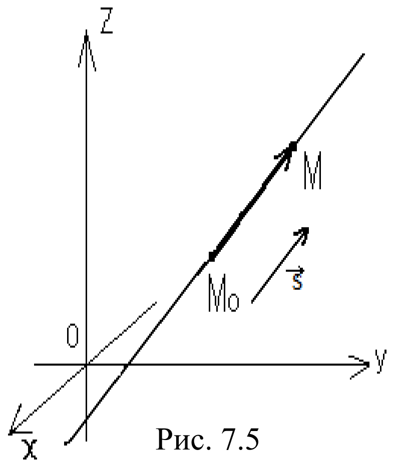

Рис. 7.5

Для цього на шуканій прямій вибираємо довільну точку $M(x; y; z)$ (рис. 7.5).

Вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ буде колінеарним вектору $\vec{s}$, тому їх координати будуть пропорційні, звідки отримаємо

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad -$$

яке називають **канонічним рівнянням прямої у просторі** з **напрямним вектором** $\vec{s} = \{l; m; n\}$.

Запишемо канонічне рівняння у вигляді

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t,$$

тоді отримаємо **параметричне рівняння прямої** у просторі:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \quad t \in \mathrm{R}, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

де $\vec{s} = \{l; m; n\}$ – напрямний вектор прямої, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – координати заданої точки.

2. Якщо пряма проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ та $M_2(x_2;y_2;z_2)$, то за напрямний вектор можна взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$, а за фіксовану точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, і підставити у канонічне рівняння прямої, отримаємо:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

яке називають **рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки**.

3. Нехай площини задані загальними рівняннями:

$$\alpha_1:\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\alpha_2:\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

де $\overrightarrow{n_1}=\{A_1;B_1;C_1\}$ – вектор нормалі площини α_1, $\overrightarrow{n_2}=\{A_2;B_2;C_2\}$ – вектор нормалі площини α_2, причому $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$ – неколінеарні вектори.

Тоді пряма, утворена при перетині двох площин, одночасно належить площині α_1 та площині α_2, тому задовольняє систему рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

яка і є рівняння прямої у просторі через перетин двох площин, його називають **загальним рівнянням прямої в просторі** (рис. 7.6).

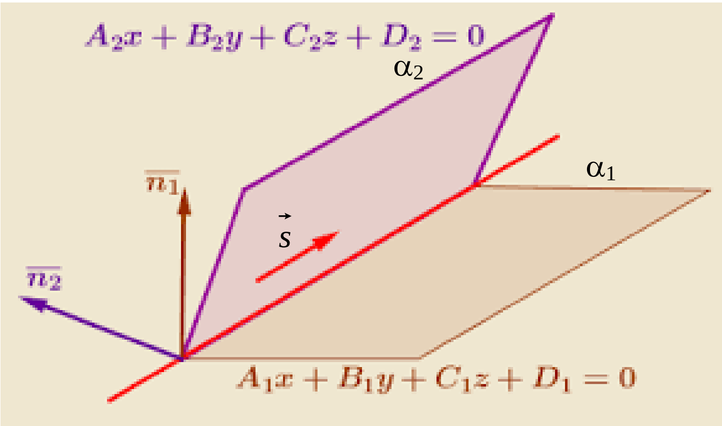

Рис. 7.6

Приклад. Скласти канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$$

Розв'язування. Щоб від розглядуваного загального рівняння прямої у просторі перейти до канонічного рівняння, необхідно знайти напрямний вектор $\vec{s}$ і будь-яку конкретну точку M_0 прямої, визначеної як переріз двох площин.

Із рис. 7.6 зрозуміло, що напрямним вектором шуканої прямої буде векторний добуток нормальних векторів площин. Знайдемо вектор $\vec{s}$ за допомогою векторів нормалі $\overrightarrow{n_1}=\{1;-2;3\}$ і $\overrightarrow{n_2}=\{3;\,2;-5\}$ площин $x-2y+3z-4=0$ і $3x+2y-5z-4=0$ відповідно.

Отже,

$$\vec{s}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4\vec{i}+14\vec{j}+8\vec{k},$$

$$\vec{s}=\{4;\ 14;\ 8\}.$$

Тепер знайдемо якусь конкретну точку M_0 прямої. Для цього покладемо, наприклад, $z=0$, тоді отримуємо систему

$$\begin{cases} x-2y-4=0, \\ 3x+2y-4=0, \end{cases}$$

звідки знаходимо $x=2,\ y=-1,$ отже, матимемо точку $M_0(2;-1;0)$.

Підставляючи координати точки $M_0(2;-1;0)$ та вектора $\vec{s}=\{4;\ 14;\ 8\}$ у канонічне рівняння прямої

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

отримаємо

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{14}=\frac{z}{8} \quad \text{або} \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}.$$

7.4. Кут між двома прямими, умови паралельності та перпендикулярності двох прямих

Нехай прямі p_1 та p_2 задані канонічними рівняннями:

$$p_1: \quad \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

де $\overrightarrow{s_1}=\{l_1;m_1;n_1\}$ – напрямний вектор прямої p_1, $M_1(x_1;y_1;z_1)$ – точка на прямій p_1;

$$p_2: \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

де $\overrightarrow{s_2}=\{l_2;m_2;n_2\}$ – напрямний вектор прямої p_2, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ – точка на прямій p_2.

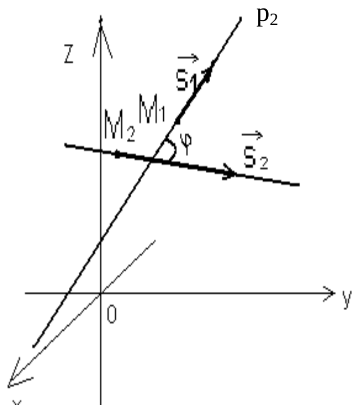

Рис. 7.7

Тоді кут між прямими можна визначити як кут між їхніми напрямними векторами $\overrightarrow{s_1}$, $\overrightarrow{s_2}$ (рис. 7.7), використовуючи скалярний добуток векторів:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{s_2}\right|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$ –

косинус кута між прямими у просторі через координати напрямних векторів.

Оскільки напрямні вектори двох паралельних прямих колінеарні, то **умова паралельності двох прямих** має вигляд

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

Із перпендикулярності напрямних векторів двох перпендикулярних прямих випливає **умова перпендикулярності двох прямих через координати напрямних векторів**

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

7.5. Взаємне розміщення прямої та площини у просторі

Пряма у просторі може перетинатися із площиною (одна спільна точка), може належати площині (безліч спільних точок), а може бути паралельна площині (жодної спільної точки).

Нехай пряма p задана канонічним рівнянням:

$$p: \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

де $\vec{s} = \{l; m; n\}$ – напрямний вектор прямої p, $M(x; y; z)$ – точка на прямій;

$$\alpha: \quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

де $\vec{n} = \{A; B; C\}$ – вектор нормалі площини.

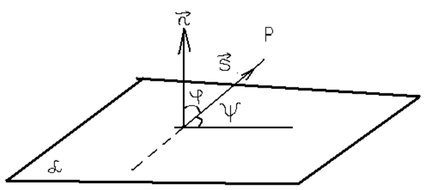

Рис. 7.8

1. Кут ψ між прямою $\boldsymbol{p}$ і площиною $\boldsymbol{\alpha}$ за означенням є кут між прямою $\boldsymbol{p}$ та її проекцією на площину $\boldsymbol{\alpha}$. Кут ψ можна визначити як різницю $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$, де φ – кут між напрямним вектором прямої $\vec{s}$ та вектором нормалі площини $\vec{n}$ (рис. 7.8).

Щоб знайти кут φ, використаємо скалярний добуток векторів:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s} \cdot \vec{n}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|},$$

або запишемо

$$\cos\varphi = \frac{lA + mB + nC}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Відомо, що $\cos\varphi = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \psi\right) = \sin\psi$ (формули зведення), тому

$$\psi = \arcsin\frac{lA + mB + nC}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Зауваження. Формула для знаходження кута ψ між прямою і площиною справедлива, коли кут φ є гострим, тобто скалярний добуток $\vec{s} \cdot \vec{n} > 0$. Якщо ж $\vec{s} \cdot \vec{n} < 0$, то треба змінити напрямок одного з векторів $\vec{s}$ чи $\vec{n}$, щоб кут φ між ними став гострим.

2. Площина $\alpha: \quad Ax + By + Cz + D = 0$ та пряма $p: \ \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ будуть між собою паралельні, якщо вектор нормалі $\vec{n} = \{A; B; C\}$ площини та напрямний вектор прямої $\vec{s} = \{l; m; n\}$ будуть взаємно перпендикулярні (рис. 7.9), тобто

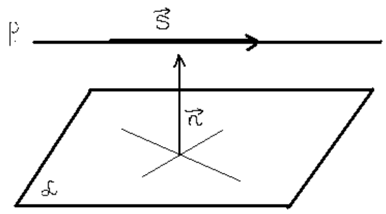

Рис. 7.9

$$lA + mB + nC = 0.$$

3. Площина $\alpha: \quad Ax + By + Cz + D = 0$ та пряма

$$p: \ \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

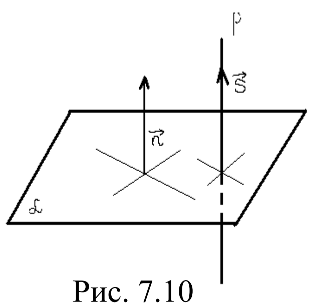

Рис. 7.10

будуть між собою перпендикулярні, якщо вектор нормалі $\vec{n} = \{A; B; C\}$ площини та напрямний вектор прямої $\vec{s} = \{l; m; n\}$ будуть колінеарні (паралельні) (рис. 7.10), тобто

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Приклад. Знайти кут між прямою $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{0}$ та площиною $2x+y+4z-1=0$.

Р о з в ' я з у в а н н я. Напрямний вектор прямої $\vec{s}=\{2;\,3;\,0\}$, нормальний вектор площини $\vec{n}=\{2;\,1;\,4\}$. Спочатку переконаємося, що пряма не є паралельною до площини: $2\cdot 2+3\cdot 1+0\cdot 4=7\neq 0$, тому пряма та площина перетинаються під певним кутом. Оскільки

$$\sin\psi=\frac{lA+mB+nC}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

то

$$\sin\psi=\frac{2\cdot 2+3\cdot 1+0\cdot 4}{\sqrt{(-2)^2+3^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+4^2}}=\frac{7}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{21}}=\frac{7}{\sqrt{273}}=\frac{7\sqrt{273}}{273},$$

$$\psi=\arcsin\frac{7\sqrt{273}}{273}.$$

Приклад. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$ та площини $2x-3y+4z-12=0$.

Р о з в ' я з у в а н н я. Напрямний вектор прямої $\vec{s}=\{2;3;1\}$, нормальний вектор площини $\vec{n}=\{2;-3;4\}$. Спочатку переконаємося, що пряма не є паралельною до площини: $2\cdot 2-3\cdot 3+4\cdot 1\neq 0$. Точка перетину прямої та площини повинна задовольняти як рівняння прямої, так і рівняння площини:

$$\begin{cases}\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1},\\ 2x-3y+4z-12=0.\end{cases}$$

Перепишемо рівняння прямої у параметричному вигляді:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}=t\ \Rightarrow\ x=2t+1,\ \ y=3t-1,\ \ z=t.$$

Тепер потрібно розв'язати систему: $\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = 3t-1, \\ z = t, \\ 2x-3y+4z-12=0. \end{cases}$

Підставимо значення x, y, z в останнє рівняння системи

$$2(2t+1)-3(3t-1)+4(t)-12=0$$

та знайдемо значення параметра t:

$$-t-7=0 \Rightarrow t=-7.$$

Підставляючи це значення у параметричне рівняння прямої, отримаємо координати точки перетину прямої та площини: $x=-13,\ y=-22,\ z=-7$.

Приклад знаходження елементів тетраедра за допомогою елементів аналітичної геометрії

Приклад. У прямокутному базисі задано вершини тетраедра $ABCS$: $A(1;1;1)$, $B(-2;1;0)$, $C(3;-2;1)$, $S(1;-2;-3)$. Знайти

а) рівняння бічних ребер SA, SB, SC тетраедра $ABCS$;

б) рівняння граней ABC, ABS;

в) плоский кут при вершині $A\hat{S}B$ між ребрами SA та SB;

г) двогранний кут при основі між площинами ABC та ABS.

Розв'язування. Побудуємо піраміду за координатами (рис. 7.11) та схематично (рис. 7.12).

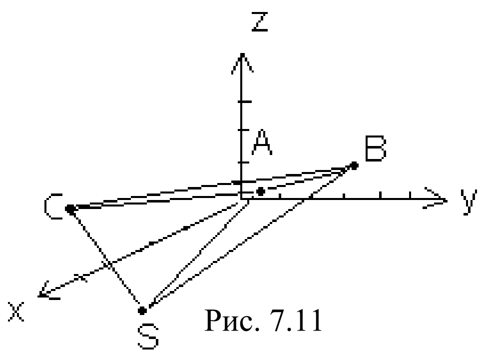

Рис. 7.11

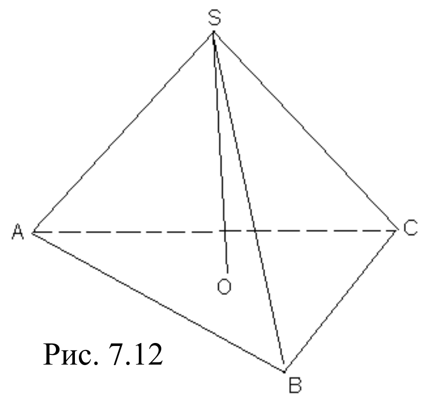

Рис. 7.12

а) Щоб знайти рівняння бічного ребра, треба скористатись формулою рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Звідси рівняння бічного ребра SA:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{-4},$$

рівняння SB:

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z}{-3} \quad \text{або} \quad \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1},$$

рівняння SC:

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-4}, \quad \frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{2}.$$

Зауважимо, що $\overrightarrow{s_1}=\{0;-3;-4\}$, $\overrightarrow{s_2}=\{1;-1;-1\}$, $\overrightarrow{s_3}=\{1;0;2\}$ – напрямні вектори відповідних ребер.

б) Щоб записати рівняння грані ABC, будемо використовувати рівняння площини, що проходить через три заданих точки A, B, C:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0 \;\Rightarrow\; (x-1)\cdot(-3)-(y-1)\cdot 2+(z-1)\cdot 9=0.$$

Остаточно маємо рівняння грані ABC: $3x+2y-9z+4=0$.

Аналогічно отримаємо рівняння грані ABS: $x+4y-3z-2=0$.

Зауважимо, що вектори $\overrightarrow{n_1}=\{3;2;-9\}$ та $\overrightarrow{n_2}=\{1;4;-3\}$ є векторами нормалі до відповідних граней ABC і ABS.

в) Плоский кут при вершині між ребрами SA та SB шукаємо як кут між прямими, що визначаються напрямними векторами $\overrightarrow{s_1}$ та $\overrightarrow{s_2}$, тобто

$$\cos\angle ASB = \frac{\left(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right)}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\left|\overrightarrow{s_2}\right|},$$

де $\overrightarrow{s_1} = \{0;-3;-4\}$, $\overrightarrow{s_2} = \{1;-1;-1\}$.

Отже, $\cos\angle ASB = \dfrac{0+3+4}{\sqrt{25}\sqrt{3}} = \dfrac{7}{5\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{15}$, звідки $\angle ASB = \arccos\dfrac{7\sqrt{3}}{15}$.

г) Двогранний кут φ при основі між гранями ABC і ABS треба розглядати як кут між площинами, що визначаються своїми нормальними векторами (рис. 7.13). Враховуючи, що $\vec{n}_{ABC} = \{3;2;-9\}$, $\vec{n}_{ABS} = \{1;4;-3\}$ за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|},$$

отримаємо

$$\cos\varphi = \frac{38}{\sqrt{94}\sqrt{26}} = \frac{19}{\sqrt{47}\sqrt{13}} = \frac{19}{\sqrt{611}} = \frac{19\sqrt{611}}{611},$$

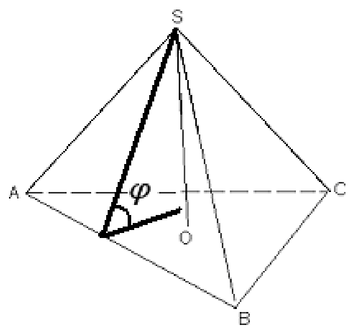

Рис. 7.13

звідки

$$\varphi = \arccos\frac{19\sqrt{611}}{611}.$$

Запитання для самоперевірки до розділу 3

1. Який вигляд має загальне рівняння прямої? Яким є зміст коефіцієнтів цього рівняння? Що таке нормальний вектор прямої?
2. Який вигляд має канонічне і параметричне рівняння прямої? Яким є зміст коефіцієнтів цього рівняння? Що таке напрямний вектор прямої?
3. Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
4. Який вигляд має рівняння прямої у відрізках на осях? Який геометричний зміст коефіцієнтів цього рівняння?
5. Яке рівняння прямої називають рівнянням із кутовим коефіцієнтом? Який геометричний зміст коефіцієнтів цього рівняння?
6. Як знайти кут між прямими, які задані:
   - загальними рівняннями;
   - канонічними рівняннями;
   - рівняннями з кутовим коефіцієнтом?
7. Як записати умови паралельності й перпендикулярності двох прямих, які задані:
   - загальними рівняннями;
   - рівняннями з напрямним вектором;
   - рівняннями з кутовим коефіцієнтом?
8. Що таке еліпс? Яке канонічне рівняння еліпса та основні його характеристики?
9. Що таке гіпербола? Яке її канонічне рівняння та основні характеристики?
10. Що таке парабола? Яке її канонічне рівняння та основні характеристики?
11. Який вигляд має загальне рівняння площини? Яким є зміст коефіцієнтів цього рівняння?
12. Який вигляд має рівняння площини у відрізках на осях? Яким є геометричний зміст коефіцієнтів цього рівняння?
13. Як записати рівняння площини, що проходить через три точки?
14. Як знайти кут між двома площинами?

15. Як записати умову паралельності та умову перпендикулярності двох площин?
16. Який вигляд загального рівняння прямої у просторі? Яка геометрична інтерпретація цього рівняння?
17. Який вигляд параметричного, канонічного рівнянь прямої і прямої, що проходить через дві задані точки у просторі?
18. Як знайти кут між двома прямими у просторі?
19. Як записати умови паралельності та перпендикулярності двох прямих, що задані канонічними рівняннями?
20. Як знайти кут між прямою і площиною у просторі?
21. Які умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини?

Розділ 4. ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ

Лекція 8. Числові послідовності та їх границі

8.1. Поняття числової послідовності

Означення. Якщо існує закон, згідно з яким кожному натуральному числу n поставлено у відповідність певне дійсне число a_n, то, кажуть, що задано **числову послідовність** $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ або $\{a_n\}$, при цьому a_n будемо називати n**-м членом послідовності**.

Приклад. Нехай $a_n = \dfrac{3n}{n+2}$, тоді

$$a_1 = \frac{3}{3} = 1, \quad a_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2},$$

$$a_3 = \frac{9}{5}, \quad a_4 = \frac{12}{6} = 2, \ldots$$

отже, числа 1, 3/2, 9/5, 2, … утворюють послідовність, а $a_n = \dfrac{3n}{n+2}$ – закон, згідно з яким її побудовано.

Є різні способи, щоб задати послідовність: аналітичний (як у прикладі – формулою), графічний, табличний, словесний, рекурентний (формулою, яка виражає будь-який член послідовності через один чи кілька попередніх).

Означення. Послідовність $\{ a_n\}$, $n \geq 1$ називають:

– **зростаючою**, якщо $a_n < a_{n+1}$;

– **спадною**, якщо $a_n > a_{n+1}$;

– **неспадною**, якщо $a_n \leq a_{n+1}$;

– **незростаючою**, якщо $a_n \geq a_{n+1}$.

Кожну таку послідовність називають **монотонною**.

Означення. Спадні та зростаючі послідовності називають **строго монотонними**.

Приклади.

1. $\{n\}: 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ – зростаюча, строго монотонна.

2. $\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ – спадна, строго монотонна.

3. $\{a_n\}, a_n$ – кількість натуральних чисел, що діляться на 3 і не перевищують n: $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 1, a_6 = 2, a_7 = 2, a_8 = 2,$ $a_9 = 3, \ldots$, де $\{a_n\}$ – неспадна послідовність.

Означення. Послідовність $\{a_n\}, n \geq 1$ називають **обмеженою**, якщо існує таке число $c > 0$, що для довільного натурального числа n виконується $|a_n| \leq c.$

Зауваження. У математиці повсякчас використовують символи для спрощення та скорочення викладення. Наведемо список математичних символів, які зустрічаються найчастіше (табл. 8.1).

Таблиця 8.1. ***Математичні символи***

Символ	***Позначення***	***Приклад***
$\Rightarrow$	випливає	$x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$
$\Leftrightarrow$	тоді і тільки тоді	$\lvert x\rvert > 2 \Leftrightarrow x^2 > 4$
$\forall$	для всіх, довільний	$\forall x : x^2 \geq 0$
$\exists$	існує	$\exists\, x : x^2 = 4$
$\exists!$	існує єдиний	$\exists!\, x : \lg x = 3$

Означення обмеженої послідовності можна подати у більш компактній формі, якщо використовувати **логічні символи** або **квантори**:

Означення. Послідовність $\{a_n\}, n \geq 1$ називають **обмеженою**, якщо $\exists c > 0 : \forall n \in N : |a_n| \leq c.$

Наприклад, послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ є обмеженою, оскільки

$$\exists c = 1 > 0 : \forall n \in N : \left|\frac{1}{n}\right| \leq c.$$

8.2. Границя числової послідовності

Означення. Число a називають **границею числової послідовності** $\{a_n\}$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε можна вказати таке число *N*, яке залежить від ε $(N(\varepsilon))$, що для всіх $n > N(\varepsilon)$ буде виконуватись умова:

$$|a_n - a| < \varepsilon. \tag{8.1}$$

Це можна записати як

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{8.2}$$

або як

$$a_n \to a,\ n \to \infty. \tag{8.3}$$

Записи (8.2), (8.3) – еквівалентні.

Подамо означення границі числової послідовності за допомогою кванторів.

Означення. Число a називають границею числової послідовності $\{a_n\}$, якщо $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$

Дамо геометричну інтерпретацію означення границі числової послідовності (рис. 8.1):

$$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

тобто $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

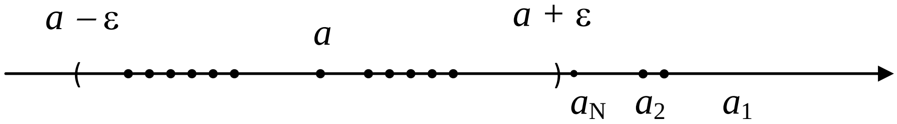

Рис. 8.1

Інтервал $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ називають *ε*-околом точки a. Запис (8.1) означає, що точки, які зображують числа a_n, потрапляють в *ε*-окіл точки a, коли $n > N(\varepsilon)$. Таким чином, послідовність $\{a_n\}$ має границю a, коли за межами довільного ε-околу точки a міститься скінченна або порожня множина точок a_n, а всередині ε-околу – нескінченна множина членів послідовності.

Означення. Послідовність, яка має скінченну границю, називають **збіжною**, в іншому випадку – **розбіжною**.

Теорема 8.1. Збіжна послідовність дійсних чисел має єдину границю.

Означення. Послідовність $\{a_n\}$ має нескінченну границю $+\infty$ (прямує до $+\infty$), якщо для кожного довільно великого числа *A* існує такий член послідовності, починаючи з якого кожний наступний більший за *A*. Це записують як $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty.$ Прикладами таких послідовностей є $\{\, n\}$, $\{\, 2^n\}$, $\{\, n^3 + n\}$.

Зауваження. Аналогічно формулюють означення послідовності, яка має нескінченну границю $-\infty$ (прямує до $-\infty$). У цьому випадку записують $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty.$

Означення. Послідовності, які прямують до $+\infty$ або до $-\infty$, називають **нескінченно великими**.

Зауваження.

1. Слід пам’ятати, що послідовності, які прямують до $+\infty$ або $-\infty$, **не мають границі** (розбіжні), а символи $\pm\infty$ не є числами, а введені для спрощення запису.

2. Числова послідовність буде розбіжною і у випадку, якщо існує кілька значень $a_1^*, a_2^*, ..., a_k^*$, які є точками згущення.

Наприклад, послідовність $\frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ 1-\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ 1-\frac{1}{5}, ...$ не має границі, бо за $n = 2k-1,\ k \ge 1$ члени послідовності $\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}, ...,\ \frac{1}{n}, ...$ наближаються до $a_1^* = 0$, а за $n = 2k, k \ge 1$ члени послідовності $\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5}, ...,\ 1-\frac{1}{n}, ...$ наближаються до $a_2^* = 1$.

8.3. Властивості збіжних послідовностей

1. Збіжна послідовність обмежена.

Зауваження. Обернене твердження не буде вірним. Справді, послідовність $\left\{(-1)^n\right\}: -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ буде обмеженою, бо

$$\forall n \in N : |a_n| \le 1,$$

але буде розбіжною (має дві точки згущення: -1 та 1).

2. Монотонна та обмежена послідовність – збіжна.

Приклади.

1) $\left\{n^2\right\}$ − зростаюча, але необмежена, тому розбіжна: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$;

2) $\left\{1-\dfrac{1}{n}\right\}$ − зростаюча та обмежена, тому збіжна: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = 1$;

3) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ − спадна й обмежена, тому збіжна: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$.

Означення. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то послідовність $\{a_n\}$ називають **нескінченно малою**.

3. Про граничний перехід у нерівностях.

Нехай є дві послідовності $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ й виконуються такі умови:

− $a_n \to a,\ n \to \infty,\ b_n \to b,\ n \to \infty$,

− $\forall n \ge 1 : a_n \le b_n$,

тоді $a \le b$.

4. Про три послідовності.

Нехай є три послідовності $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ й виконуються такі умови:

− $a_n \to a, n \to \infty,\ c_n \to a, n \to \infty$,

− $\forall n \ge 1 : a_n \le b_n \le c_n$,

тоді $b_n \to a, n \to \infty$.

5. Якщо всі елементи послідовності рівні одному і тому самому числу, то послідовність збігається до цього числа.

Приклад: $\{a_n = 5\} : 5,\ 5,\ 5, \ldots, 5, \ldots$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} 5 = 5.$

6. Нехай $a_n \to a,\ n \to \infty,\ \ b_n \to b,\ n \to \infty,\ \ a, b \in \mathrm{R}$, тоді

1) $\forall c \in \mathrm{R} : ca_n \to ca,\ n \to \infty;$

2) $a_n \pm b_n \to a \pm b,\ n \to \infty,$

3) $a_n b_n \to ab,\ n \to \infty,$

4) якщо $\forall n \geq 1,\ b_n \neq 0,\ b \neq 0$, то $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b},\ n \to \infty.$

Зауваження. Властивість **6** стверджує, що, якщо існують границі послідовностей $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$, тоді існують також і границі їх суми, різниці, добутку і (за вказаних умов) частки.

8.4. Число *e*

Розглянемо послідовність $\{a_n\}$, де $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, тобто

$$\{a_n\} :\ 2, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4, \ldots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

Теорема 8.2. Числова послідовність $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ збіжна, причому

$$2 < \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Означення. Границю числової послідовності $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ позначають e,

тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e.$

Це чудовий приклад того, як можна визначити нове дійсне число, використовуючи поняття числової послідовності. Позначення числа e, як і позначення числа π, належить Ейлеру.

Доведено, що число e − ірраціональне, його наближене значення з точність до 10^{-15} становить:

$$\boldsymbol{e \approx 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ldots}$$

Число e − одна з найважливіших фундаментальних сталих у математиці.

8.5. Методи знаходження границь послідовностей

Розв'язуючи приклади, слід мати на увазі, що

$$\infty + \infty \to \infty\,,\ \infty \cdot \infty \to \infty,\ \ \infty^{\infty} \to \infty,$$

але $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty - \infty]$, $\left[1^{\infty}\right]$ − це невизначеності, які треба розкривати.

1. Розглянемо випадок $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{3n-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{5}{n}}{3-\dfrac{2}{n}} = \left[\frac{1+0}{3-0}\right] = \frac{1}{3}.$$

Приклад.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot 2^{n}-1}{2^{n}+3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{7-\dfrac{1}{2^{n}}}{1+\dfrac{3}{2^{n}}} = \left[\frac{7-0}{1+0}\right] = 7.$$

Приклад.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^4+2n-5}}{3-n^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{4n^4+2n-5}}{n^2}}{\dfrac{3-n^2}{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{4n^4+2n-5}{n^4}}}{\dfrac{3}{n^2}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{2}{n^3}-\dfrac{5}{n^4}}}{\dfrac{3}{n^2}-1}=\left[\frac{\sqrt{4+0-0}}{0-1}\right]=\frac{2}{-1}=-2.$$

2. Випадок $[\infty-\infty]$.

Приклад.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{n^2+5}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{n^2+5}\right)\left(\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+5}\right)}{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+5}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+4n\right)-\left(n^2+5\right)}{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n-n^2-5}{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+5}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-5}{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+5}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4n-5}{n}}{\dfrac{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+5}}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\dfrac{5}{n}}{\sqrt{\dfrac{n^2+4n}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{n^2+5}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\dfrac{5}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{5}{n^2}}}=$$

$$=\left[\frac{4-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}\right]=\left[\frac{4}{1+1}\right]=2.$$

3. У випадках $\left[1^{\infty}\right]$ використовують границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e.$

Приклад.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{3n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}\cdot}\right]^{\frac{2}{n}\cdot 3n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{6}=e^{6}.$$

Зауваження. Проаналізувавши метод, застосуємо більш раціональний шлях розв’язання:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}=\left[1^{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot}\right]^{\frac{2}{n}\cdot 3n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{6}=e^{6}.$$

Лекція 9. Границя функції

9.1. Функції та їх класифікація

Означення. Якщо існує закон, згідно з яким кожному значенню змінної ***x*** з деякої області *D* поставлено у відповідність рівно одне значення другої змінної ***y*** з області *E*, то кажуть, що на області *D* визначена **однозначна функція** із значеннями в *E*. Це записують так: $y = f(x)$, $f : D \to E$. При цьому *x* – **аргумент функції**, *D* – **область визначення функції**, *E* – **область значень функції**.

Приклад. Розглянемо функцію $y = \sqrt{9 - x^2}$:

$$D:\ 9 - x^2 \geq 0 \ \Leftrightarrow\ x^2 \leq 9 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leq x \leq 3,$$

таким чином,

$$D : [-3, 3],\ \ E : [0, 3].$$

Зауваження. Функції можна задавати різними способами: аналітично, графічно, за допомогою таблиць, словесно. Ми будемо переважно розглядати випадки, коли функція задана аналітично, тобто за допомогою формули.

Означення. **Графіком** функції називають множину всіх точок площини з координатами $(x, f(x))$.

Означення. Якщо функція задовольняє умову $f(x + c) = f(x)$, то її називають **періодичною**, а найменше із значень c, для якого виконується ця умова, називають **періодом** функції, який позначають, як правило, T.

Приклади.

1. $\sin(x + 2\pi) = \sin x,\ \ T = 2\pi.$
2. $y = 5$ − періодична, з невизначеним періодом, бо

$$\forall c \in \mathrm{R} : y(x + c) = y(x) = 5.$$

Означення. Функцію, визначену на симетричному інтервалі $(-l, l)$, (l – число або символ ∞), називають **парною**, якщо $\forall x \in (-l, l)$: $f(-x) = f(x)$, і **непарною**, якщо $\forall x \in (-l, l) : f(-x) = -f(x)$.

Зауважимо, що графік парної функції симетричний відносно осі Oy, а непарної – відносно початку координат. Усі інші функції є функціями загального вигляду.

Твердження. Будь-яку функцію $y = f(x)$, яка визначена у симетричному інтервалі $(-l, l)$, можна розкласти на суму парної і непарної функцій.

Щоб довести це, достатньо $f(x)$ подати у вигляді

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

де $\frac{f(x) + f(-x)}{2}$ – парна, а $\frac{f(x) - f(-x)}{2}$ – непарна функції.

Означення. Нехай $f : D \to E,\ g : E \to F$.

Функцію $h : D \to F$, визначену за правилом $h(x) = g\left[f(x)\right]$, називають **складеною** функцією або **суперпозицією** функцій f і g, при цьому f − проміжний аргумент, а x – кінцевий. Можливий варіант кількох проміжних аргументів.

Основними елементарними функціями є:

− стала $y = c,\ \ c \in \mathrm{R}$;

− степенева $y = x^{\alpha},\ \ \alpha \in \mathrm{R}$;

− показникова $y = a^{x},\ \ a > 0,\ \ a \neq 1$;

− логарифмічна $y = \log_a x,\ a > 0,\ \ a \neq 1$;

− тригонометричні: $y = \sin x,\ \ y = \cos x,\ \ y = \mathrm{tg} x,\ \ y = \mathrm{ctg} x$;

− обернені тригонометричні: $y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \mathrm{arctg} x,$
$y = \mathrm{arcctg} x$.

Означення. Будь − яка функція, яка може бути явним чином задана за допомогою формули, що містить лише скінченну кількість арифметичних операцій $\left(\pm\left(\text{додавання – віднімання}\right),\ \ \times\left(\text{множення}\right),\ \ /\left(\text{ділення}\right)\right)$ і суперпозицій основних елементарних функцій, називають **елементарною функцією**. Наприклад, $y = x^3 \ln 5x,\ y = \sqrt[3]{2 - x^4}$.

Прикладом елементарних функцій є **гіперболічні функції**. Розглянемо показникову функцію $y = e^x$. Як відомо, область визначення цієї функції $(-\infty, +\infty)$. Тоді згідно з наведеним вище твердженням буде справедливим представлення:

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Парну частину представлення називають **гіперболічним косинусом** і позначають $\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, а непарну частину – **гіперболічним синусом** і позначають $\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Гіперболічним тангенсом і **гіперболічним котангенсом** називають функції

$$\mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\ \mathrm{cth}x = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Для гіперболічних функцій справедливі формули

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1,$$
$$\mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x,\ \ \mathrm{ch}2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x,\ \ \mathrm{th}x\mathrm{cth}x = 1.$$

Прикладом **неелементарної** функції є $n!$, кількість дій множення залежить від значення аргумента $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n.$

Означення. Елементарні функції, утворені тільки із степеневих функцій, називають **алгебраїчними**.

Наприклад, $y = P_n(x)$, де $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ – многочлен степеня n; $y = \sqrt[m]{P_n(x)}$ – алгебраїчна ірраціональна функція; $y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – дробово-раціональна функція, де $Q_m(x)$ – многочлен степеня m.

Означення. Усі неалгебраїчні функції називають **трансцендентними**.

Наприклад, $y = \cos x$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \mathrm{arctg}x$, $y = \mathrm{sh}x$.

9.2. Границя функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, за винятком хіба що самої точки x_0.

Означення. Число b називають **границею функції** $f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε можна вказати таке число δ, яке залежить від ε $\left(\delta(\varepsilon)\right)$, що для всіх x, які належать D і задовольняють умову $|x - x_0| < \delta$, буде виконуватись умова

$$|f(x) - b| < \varepsilon. \tag{9.1}$$

Це записують так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \tag{9.2}$$

або

$$f(x) \to b, x \to x_0. \tag{9.3}$$

Записи (9.2), (9.3) – еквівалентні.

Тепер подамо означення границі функції за допомогою кванторів.

Означення. Число b називають границею функції $f(x)$ у точці x_0, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in D, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$

Дамо геометричну інтерпретацію означення границі функції:

$$|x - x_0| < \delta \quad \Leftrightarrow \quad -\delta < x - x_0 < \delta \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,$$

де $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ – δ-окіл точки x_0;

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < f(x) - b < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon,$$

де $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ – ε-окіл точки b.

Запис (9.1) означає, що який би малий ε-окіл точки b ми не взяли, має існувати такий δ-окіл точки x_0, що коли x_0 змінюється між $(x_0 - \delta)$ та $(x_0 + \delta)$, за винятком хіба що точки x_0, відповідна частина графіка функції повністю належить смузі шириною 2ε, тобто міститься між прямими $y = b + \varepsilon$ та $y = b - \varepsilon$ (рис. 9.1).

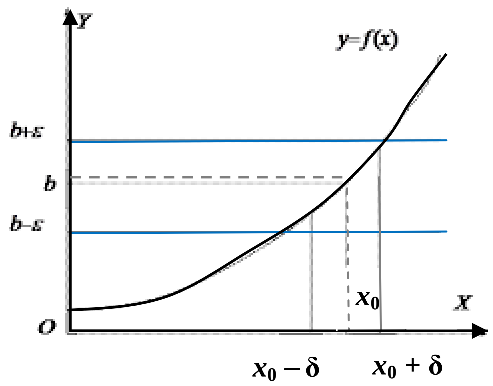

Рис. 9.1

Означення. Число b називають **правосторонньою** границею функції $f(x)$ у точці x_0, якщо

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Це записують так:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = b \text{ або } f(x_0 + 0) = b.$$

Означення. Число b називають **лівосторонньою** границею функції $f(x)$ у точці x_0, якщо

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Це записують так:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = b \text{ або } f(x_0 - 0) = b.$$

Означення. Правосторонню і лівосторонню границі функції називають **односторонніми** границями.

Теорема 9.1. Нехай функція $f(x)$ визначена в області D, за винятком хіба що точки x_0.

Функція $f(x)$ має границю в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли у цій точці існують як правостороння, так і лівостороння границі, причому вони рівні, а їх спільне значення і є границею функції $f(x)$ у точці x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = b.$$

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty, +\infty)$.

Означення. Число b називають **границею функції** $f(x)$ за $x \to \infty$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε можна вказати таке число N, яке залежить від ε $\left(N(\varepsilon)\right)$, що для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$, які задовольняють умову $|x| > N$, буде виконуватись $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Це записують так:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b.$$

Зауваження. Аналогічно визначають поняття границі функції за $x \to +\infty$ та за $x \to -\infty$.

9.3. Нескінченно великі і нескінченно малі функції

Означення. Функцію $f(x)$ називають **нескінченно великою** (прямує до ∞) за $x \to x_0$, якщо для довільного як завгодно великого числа $A > 0$ можна вказати таке число $\delta = \delta(A) > 0$, що для всіх $x \in D, |x - x_0| < \delta$ виконується $|f(x)| > A$.

Це записують так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

Означення. Функцію $y = \alpha(x)$ називають **нескінченно малою** за $x \to x_0$, якщо

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon): \quad \forall x \in D, \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Це записують так:

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Приклади.

1. $y = (x+3)^2$ буде нескінченно малою за $x \to -3$, бо $\lim\limits_{x\to -3} (x+3)^2 = 0$.

2. $y = e^x$ буде нескінченно малою за $x \to -\infty$, бо $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$.

3. $y = x^2 + 1$ не може бути нескінченно малою.

Властивості нескінченно малих функцій

1. Якщо $\alpha(x)$ нескінченно мала за $x \to a$ (a − число або символ $\pm\infty$), то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою за $x \to a$.

2. Алгебраїчна сума двох нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією.

3. Добуток нескінченно малої та обмеженої функцій є нескінченно малою функцією.

4. Добуток двох нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією.

5. Частка від ділення обмеженої функції на нескінченно малу функцію буде нескінченно великою.

6. Частка від ділення нескінченно малої функції на функцію, що має границю $b \neq 0$, є нескінченно малою функцією.

Зауваження. Частка від ділення двох нескінченно малих функцій у загальному випадку не є нескінченно малою функцією.

Означення. Функцію $y = f(x)$, $f : D \to E$ називають **обмеженою** в області *D*, якщо існує таке число $c > 0$, що для $\forall x \in D$ виконується $|f(x)| \leq c$.

9.4. Основні теореми про границі

Теорема 9.2 (про обмеженість функції, що має границю).

Якщо функція $f(x)$ за $x \to a$ має скінчену границю b, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$, то $f(x)$ обмежена у деякому околі точки a.

Теорема 9.3 (про зображення функції, що має границю).

Границя функції $f(x)$ за $x \to a$ існує і дорівнює b тоді і тільки тоді, коли функцію $f(x)$ можна подати у вигляді $f(x) = b + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція за $x \to a$, або

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = b + \alpha(x),\ \lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Теорема 9.4 (про границю невід'ємної функції).

Якщо $f(x) \geq 0$ за $x \to a$ та $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, тоді $b \geq 0$.

Теорема 9.5 (про границю проміжної функції).

Якщо за $x \to a$ функції $u(x), f(x), v(x)$ задовольняють умову $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ та існують границі $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \lim\limits_{x \to a} v(x) = b$, тоді буде існувати границя $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Теорема 9.6 (про границю в нерівностях).

Якщо за $x \to a$ функції $u(x)$ та $v(x)$ задовольняють умову $u(x) \leq v(x)$ та існують $\lim\limits_{x \to a} u(x)$, $\lim\limits_{x \to a} v(x)$, тоді $\lim\limits_{x \to a} u(x) \leq \lim\limits_{x \to a} v(x)$.

Теорема 9.7 (про границю сталої).

Границя сталої є ця ж стала, тобто $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

Теорема 9.8 (про дії над границями).

Нехай функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ визначені в деякій області *D* та існують границі

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = b_1,\ \lim_{x \to a} f_2(x) = b_2,$$

тоді

1) $\forall c \in R:\ \lim\limits_{x \to a} cf_1(x) = c \lim\limits_{x \to a} f_1(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to a}(f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$;

4) Якщо $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) \neq 0$: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)}$.

Методи знаходження границь функцій

Слід зауважити, що теореми про границі та основні властивості нескінченно малих функцій описують ситуації, в яких можна одразу писати значення границі, але вони не охоплюють всіх можливих випадків.

Приміром, розглянемо частку двох нескінченно малих функцій. Якщо $\alpha(x)$, $\beta(x)$ дві нескінченно малі функції за $x \to a$, тоді вираз $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ називають невизначеністю $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Щоб знайти границю (якщо вона існує), треба розкрити невизначеність.

Приклад.

$$\lim_{x\to -5}\frac{x^2-4}{2-x}=\frac{25-4}{2+5}=\frac{21}{7}=3.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3}{x-1}=\left[\frac{3}{0}\right]=\infty.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left[\frac{9-15+6}{9-9}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+3}=\left[\frac{3-2}{3+3}\right]=\frac{1}{6}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{\sqrt{x+7}-3}=\left[\frac{4-4}{\sqrt{9}-3}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x+7-9}=\lim_{x\to 2}\frac{2\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\cancel{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}2\left(\sqrt{x+7}+3\right)=12.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{3x+3}=\left[\frac{-1+1}{-3+3}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt[3]{x}+1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{x}+1\right)}{3(x+1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{x+1}}{3(\cancel{x+1})\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{x}+1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{3\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{x}+1\right)}=$$

$$=\left[\frac{1}{3(1+1+1)}\right]=\frac{1}{9}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}-\infty\right]=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=\left[\frac{0}{1-0}\right]=0.$$

Лекція 10. Перша і друга важливі границі та їхні наслідки. Порівняння нескінченно малих функцій

10.1. Перша важлива границя

Теорема 10.1 (*Перша важлива границя*).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (10.1)$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $\lim_{x\to 0}\sin x=\sin 0=0$, то за $x\to 0$ вираз $\frac{\sin x}{x}$ має невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Розкриємо цю невизначеність.

Розглянемо коло радіусом R із центром у точці $O(0;0)$ і промінь OC, що утворює кут x радіан із віссю Ox, $0<x<\frac{\pi}{2}$.

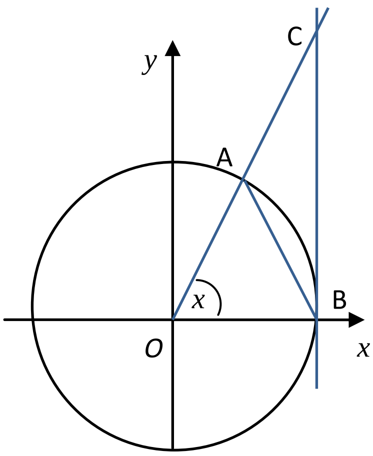

Рис. 10.1

Із рис. 10.1 очевидно, що

$$S_{\Delta OAB}<S_{сектора\ AOB}<S_{\Delta OCB}.$$

Знаходимо:

$$S_{сектора\ AOB}=\frac{1}{2}xR^2,$$

$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin x=\frac{1}{2}R^2\sin x,$$

$$S_{\Delta OCB}=\frac{1}{2}OB\cdot BC=\frac{1}{2}OB\cdot OB\cdot \mathrm{tg}x=\frac{1}{2}R^2\mathrm{tg}x,$$

тоді

$$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}xR^2<\frac{1}{2}R^2\mathrm{tg}x,$$

або, після скорочення на $\frac{1}{2}R^2$,

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x .$$

Розділивши останню нерівність на $\sin x > 0$, отримаємо:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

або

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 . \quad (10.2)$$

Неважко переконатися, що нерівність (10.2) виконується і для $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, оскільки функції $\frac{\sin x}{x}$ і $\cos x$ є парними.

Перейдемо в нерівності (10.2) до границі за $x \to 0$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1,$ а $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ як границя сталої, тоді за теоремою про границю проміжної функції, отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

що і треба було довести.

10.2. Наслідки першої важливої границі

Наслідок. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$.

Доведення.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = 1.$$

Наслідок. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$.

Д о в е д е н н я.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{c}\textit{зробимо заміну}\\ x=\sin y,\ \arcsin x=y\\ x\to 0\Rightarrow y\to 0.\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1.$$

Наслідок. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=1$.

Д о в е д е н н я.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

Аналогічно доводять такі наслідки.

Наслідок. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}=1$. ***Наслідок.*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\mathrm{tg}x}=1$.

Наслідок. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin x}=1$. ***Наслідок.*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\mathrm{arctg}x}=1$.

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=4\cdot 1=4.$$

1

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{5x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{c}\textit{використовуємо}\\ \textit{формулу}\\ 1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{5x^2}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}}{x\cdot x}=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}\cdot 2\cdot\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{10}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{10}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\operatorname{tg}(x-3)}{x^2-9}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{\operatorname{tg}(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\left|\begin{array}{l}\textit{зробимо заміну}\\ t=x-3,\ x=t+3\\ x\to 3\Rightarrow t\to 0\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}t}{t\cdot(t+6)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+6}=1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

10.3. Друга важлива границя

Теорема 10.2 (*Друга важлива границя*).

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{10.3}$$

Доведення.

У лекції 8 було встановлено, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, цю границю застосовують для розкриття невизначеності $\left[1^\infty\right]$.

Розглянемо $x\in\mathrm{R},\quad x\to+\infty.$

За $\forall x\ge 1, \forall n\in\mathrm{N}$ справедлива нерівність

$$n\le x<n+1, \tag{10.4}$$

тобто значення *x* завжди можна обмежити за допомогою натуральних чисел.

Тоді

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n},$$

звідси

$$1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n}. \tag{10.5}$$

Враховуючи (10.4), (10.5) отримаємо нерівність

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{10.6}$$

У нерівності (10.6) перейдемо до границі, зауваживши, якщо $x \to +\infty$, то і $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} = e\cdot 1 = e.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Таким чином, на підставі теореми про границю проміжної функції отримаємо:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Тепер розглянемо випадок $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left|\begin{array}{c} \textit{зробимо заміну} \\ y=-x,\ x=-y \\ x\to-\infty \Rightarrow y\to+\infty \end{array}\right| = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\right) = e\cdot 1 = e.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$, що і треба було довести.

Зауваження. Друга важлива границя усуває невизначеність $\left[1^{\infty}\right]$.

Зауваження. При обчисленні границь, пов'язаних із числом e використовують таке твердження:

якщо функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ мають границі за $x \to x_0$ (або $x\to\infty$), причому $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) > 0$, то і функція $f(x)^{\varphi(x)}$ також має границю за $x\to x_0$ $(x\to\infty)$, яку обчислюють за формулою

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)^{\varphi(x)} = \left(\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)\right)^{\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}}\varphi(x)}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5x-3} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{2}{x}\cdot(5x-3)} = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(5x-3)}{x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x-6}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(10-\frac{6}{x}\right)} = e^{10}.$$

10.4. Наслідки другої важливої границі

***Наслідок* 10.1.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Доведення.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left[1^{\infty}\right]=\left|\begin{array}{c}\textit{зробимо заміну}\\ y=\dfrac{1}{x},\ x=\dfrac{1}{y}\\ x\to 0\Rightarrow y\to\infty\end{array}\right|=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=\left[1^{\infty}\right]=e.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+2x}{1-3x}\right)^{\frac{3}{\sin 2x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+2x}{1-3x}-1\right)^{\frac{3}{\sin 2x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+2x-1+3x}{1-3x}\right)^{\frac{3}{\sin 2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{5x}{1-3x}\right)^{\frac{3}{\sin 2x}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{5x}{1-3x}\right)^{\frac{1-3x}{5x}}\right)^{\frac{5x}{1-3x}\cdot\frac{3}{\sin 2x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{15x}{(1-3x)\sin 2x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{15x}{(1-3x)\sin 2x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{15\cdot 2x}{(1-3x)\cdot 2\sin 2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{15}{2(1-3x)}}=e^{\frac{15}{2}}=e^{7}\sqrt{e}.$$

***Наслідок* 10.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Доведення.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

***Наслідок* 10.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$.

Доведення. Для доведення достатньо скористатися наслідком 10.2 і властивістю логарифмів:

$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}.$$

***Наслідок* 10.4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Доведення. Для доведення достатньо зробити заміну $y=a^x-1$, після чого скористатися наслідком 10.3.

***Наслідок* 10.5.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$

Доведення. Для доведення достатньо покласти $a=e$ і скористатися наслідком 10.4.

***Наслідок* 10.6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\lambda-1}{x}=\lambda,\ \lambda\in R.$

Доведення. Для доведення використовують основну логарифмічну тотожність та наслідки 10.2 та 10.5.

Наприклад, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}=\dfrac{3}{5}.$

10.5. Порівняння нескінченно малих функцій

Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малими функціями за $x\to a$ (a – число або символ $\pm\infty$). Щоб порівняти дві нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, необхідно розглянути $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Можливі такі випадки.

1. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A(A\neq 0,\ A\neq\infty)$, тоді $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають нескінченно малими функціями одного порядку малості.

Наприклад, $\alpha(x)=a^x-1$ і $\beta(x)=x$ за $x\to 0$; $\alpha(x)=(1+x)^\lambda-1$ і $\beta(x)=x$ за $x\to 0$.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, тоді $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають еквівалентними нескінченно малими функціями і позначають $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Наприклад,

$\alpha(x)=\sin x$ і $\beta(x)=x$ за $x\to 0$, це записують $\sin x\sim x, x\to 0$;

$\alpha(x)=\ln(1+x)$ і $\beta(x)=x$ за $x\to 0$, тобто $\ln(1+x)\sim x, x\to 0.$

3. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ називають нескінченно малою функцією вищого порядку малості порівняно з нескінченно малою $\beta(x)$.

Наприклад, $\alpha(x)=\sin^3 x$ та $\beta(x)=x$ за $x\to 0$,

тоді

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin^2 x=1\cdot 0=0,$$

тобто $\alpha(x)=\sin^3 x$ – нескінченно мала функція вищого порядку малості порівняно з нескінченно малою функцією $\beta(x)=x$.

4. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то $\alpha(x)$ називають нескінченно малою функцією нижчого порядку малості порівняно з нескінченно малою $\beta(x)$.

5. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=A(A\neq 0,\ A\neq\infty)$, тоді $\alpha(x)$ називають нескінченно малою *k*-го порядку малості щодо нескінченно малої $\beta(x)$.

Наприклад, $\alpha(x)=\sin^3 x$ і $\beta(x)=x$ при $x\to 0$, тоді

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^k}=1$$

за $k=3$, тобто $\alpha(x)=\sin^3 x$ нескінченно мала функція третього порядку малості щодо $\beta(x)=x$.

6. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, тоді $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають непорівнянними нескінченно малими функціями.

> ***Зауваження.*** При знаходженні границь нескінченно малі співмножники у виразі (від якого треба знайти границю) можна замінювати на еквівалентні нескінченно малі, при цьому зручно користуватися таблицею еквівалентних нескінченно малих функцій.

10.6. Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій

Якщо $\alpha(x)$ – деяка нескінченно мала функція, тоді справедливі такі еквівалентності:

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x);\quad \mathrm{tg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x);$$

$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x);\quad \mathrm{arctg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x);$$

$$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x);\quad \log_a(1+\alpha(x))\sim\frac{\alpha(x)}{\ln a};$$

$$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x);\quad a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a;$$

$$(1+\alpha(x))^{\lambda}-1\sim\lambda\alpha(x),\quad \lambda\in\mathrm{R}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot \mathrm{tg}^2 2x}{x\ln\left(1+15x^2\right)}=\begin{bmatrix}0\\ \hline 0\end{bmatrix}=\left|\begin{array}{c}3x\to 0,\ \ \sin 3x\sim 3x,\\ 2x\to 0,\ \ \ \mathrm{tg}2x\sim 2x,\\ 15x^2\to 0,\ \ln\left(1+15x^2\right)\sim 15x^2\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot(2x)^2}{x\cdot 15x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{12\cancel{x^3}}{15\cancel{x^3}}=\frac{4}{5}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\mathrm{tg}(x-3)}{x^2-9}=\begin{bmatrix}0\\ \hline 0\end{bmatrix}=\lim_{x\to 3}\frac{\mathrm{tg}(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\left|\begin{array}{l}(x-3)\to 0,\\ \mathrm{tg}(x-3)\sim(x-3)\end{array}\right|=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(e^{\frac{5}{x^2}}-1\right)=[\infty\cdot 0]=\left|\begin{array}{l}\dfrac{5}{x^2}\to 0,\\ e^{\frac{5}{x^2}}-1\sim\dfrac{5}{\cancel{x^2}}\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}\cancel{x^2}\cdot\frac{5}{x^2}=\lim_{x\to\infty}5=5.$$

Лекція 11. Неперервність функції

11.1. Неперервність функції в точці

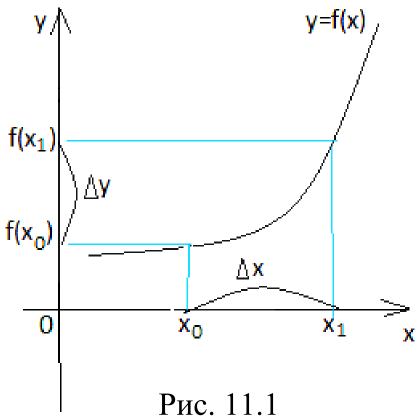

Рис. 11.1

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякій області D. Візьмемо довільне значення аргумента $x_0 \in D$, тоді близька до x_0 точка $x_1 \in D$ може бути записана у вигляді $x_1 = x_0 + \Delta x$, де Δx – додатнє чи від'ємне число, яке називають приростом аргумента (на рис. 11.1 $\Delta x > 0$). Тоді

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y,$$

де Δy – приріст функції, обумовлений приростом аргумента Δx, отже

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \qquad (11.1)$$

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають **неперервною у точці** x_0, якщо:

1) функція визначена в деякому околі точки x_0 і в самій точці x_0;
2) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. (11.2)

Згідно з (11.1), рівність (11.2) набуває вигляду

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0 \; . \qquad (11.3)$$

За теоремами про дії над границями і про границю сталою отримаємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0) = 0, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0,$$

звідки

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0). \qquad (11.4)$$

Позначимо: $x = x_0 + \Delta x$, тоді з $\Delta x \to 0 \Rightarrow x \to x_0$ та (11.4) набуває вигляду

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (11.5)$$

Записи (11.2), (11.3), (11.5) еквівалентні. Рівність (11.5) можна записати таким чином:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\,(\lim_{x\to x_0} x),$$

тобто ***у точках неперервності символ границі та символ функції можна міняти місцями***.

Тепер подамо означення неперервності функції у точці за допомогою кванторів.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають неперервною у точці x_0, якщо:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon): \forall x \in D, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

11.2. Властивості функцій, неперервних у точці

1. Нехай функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ – неперервні у точці x_0, тоді у цій точці будуть неперервними $cf_1(x), \forall c \in \mathrm{R},\ f_1(x) \pm f_2(x),\ f_1(x)\cdot f_2(x)$ і, за умови, що

$$f_2(x_0) \neq 0\,,\ \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

2. Якщо функція $u = \varphi(x)$ – неперервна у точці x_0, причому $\varphi(x_0) = u_0$, а функція $y = f(u)$ є неперервною у точці u_0, тоді складена функція $y = f[\varphi(x)]$ буде неперервною у точці x_0.

3. Основні елементарні функції є неперервними у кожній точці своєї області визначення.

Наслідок. Будь-яка елементарна функція є неперервною у кожній точці її області визначення.

Порівнюючи означення границі функції в точці x_0, означення неперервності функції в точці x_0, і беручи до уваги теорему про рівність односторонніх границь (Лекція 9), можна сформулювати таке важливе твердження.

Теорема 11.1. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і в самій точці x_0.

Функція $f(x)$ неперервна у точці x_0 тоді і тільки тоді, коли в цій точці існують як правостороння, так і лівостороння границі, причому вони рівні, а їх спільне значення дорівнює значенню функції у точці x_0. Тобто,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

11.3. Точки розриву функції

Означення. Точку x_0 називають точкою розриву функції $f(x)$, якщо:

1) $f(x)$ невизначена в точці x_0;

2) $f(x)$ визначена в точці x_0, але не є неперервною у цій точці.

Означення. Якщо x_0 – точка розриву функції та існують скінченні односторонні границі у точці x_0, тоді точку x_0 називають **точкою розриву першого роду**, причому,

1) якщо

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x),$$

але це значення не збігається з $f(x_0)$, або $f(x)$ не визначена у точці x_0, тоді x_0 називають **точкою усувного розриву**;

2) якщо

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-0} f(x),$$

тоді x_0 називають **точкою стрибка**.

Означення. Якщо x_0 – точка розриву функції і хоча б однієї з односторонніх границь не існує (зокрема ∞), тоді x_0 називають **точкою розриву другого роду** (точкою нескінченного розриву).

Приклад. Розглянемо функцію $y = \dfrac{x^2-4}{x+2}$. Область визначення функції $(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$.

Оскільки функція у точці $x = -2$ невизначена, то $x = -2$ – точка розриву функції. Знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{x \to -2-0} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to -2-0} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x \to -2-0} (x-2) = -2 - 2 = -4;$$

$$\lim_{x \to -2+0} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to -2+0} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x \to -2+0} (x-2) = -2 - 2 = -4.$$

Маємо скінченні односторонні границі, отже, згідно з означенням $x = -2$ – точка розриву першого роду, причому, оскільки лівостороння і правостороння границі рівні, то $x = -2$ є точкою усувного розриву (рис. 11.2).

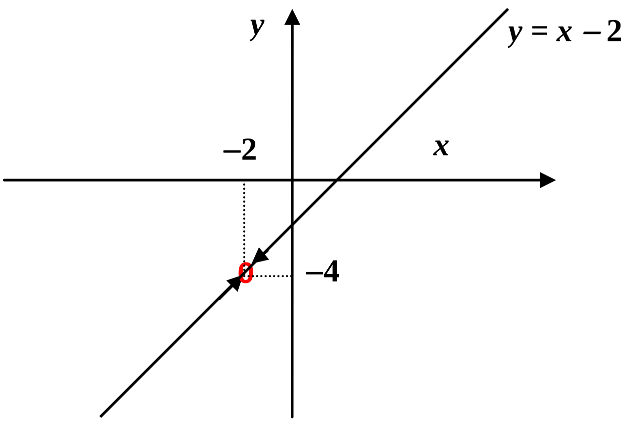

Рис. 11.2

У цьому випадку можна довизначити функцію $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ у точці $x = -2$ значенням $y = -4$ й отримати визначену для всіх $x \in \mathrm{R}$ і неперервну функцію вигляду

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2; \\ -4, & x = -2. \end{cases}$$

Приклад. Розглянемо функцію

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Функція визначена для всіх $x \in \mathrm{R}$. Досліджуємо поведінку функції в околі точки $x = 0$. Очевидно, $\lim\limits_{x \to 0-0} \operatorname{sign} x = -1$, $\lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{sign} x = 1$. Маємо скінченні односторонні границі, отже, згідно з означенням, $x = 0$ – точка розриву першого роду. Оскільки $\lim\limits_{x \to 0-0} \operatorname{sign} x \neq \lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{sign} x$, то $x = 0$ є точкою стрибка (рис. 11.3).

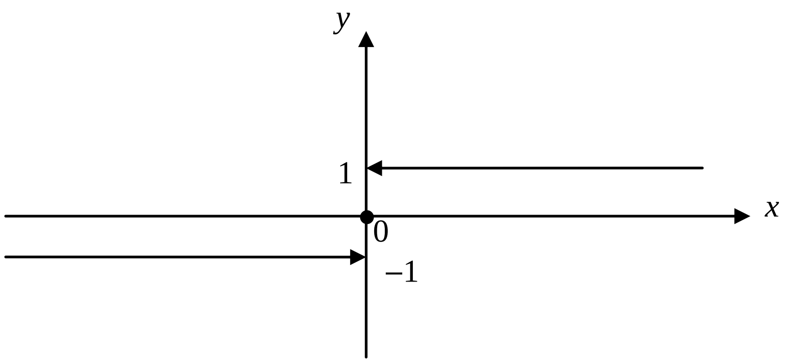

Рис. 11.3

Приклад. Розглянемо функцію $y = \dfrac{1}{x-5}$. Область визначення функції $(-\infty, 5) \cup (5, \infty)$. Оскільки функція у точці $x = 5$ невизначена, то $x = 5$ – точка розриву функції. Знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{x \to 5-0} \frac{1}{x-5} = \left[\frac{1}{5-0-5} \right] = \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 5+0} \frac{1}{x-5} = \left[\frac{1}{5+0-5} \right] = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty.$$

Односторонні границі у точці $x = 5$ є нескінченними, тому точка $x = 5$ – точка розриву другого роду (рис. 11.4).

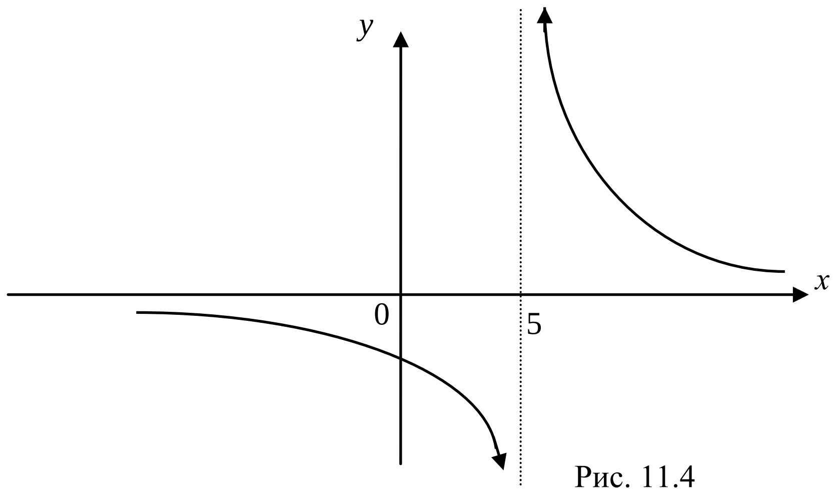

Рис. 11.4

Приклад. Розглянемо функцію $y = 3^{\frac{2}{x-4}}$. Область визначення функції $(-\infty,4)\cup(4,\infty)$. Оскільки функція у точці $x = 4$ невизначена, то $x = 4$ – точка розриву функції. Знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 4-0} 3^{\frac{2}{x-4}} = \left[3^{\frac{2}{4-0-4}}\right] = \left[3^{\frac{2}{-0}}\right] = \left[3^{-\infty}\right] = \left[\frac{1}{3^{+\infty}}\right] = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0;$$

$$\lim_{x\to 4+0} 3^{\frac{2}{x-4}} = \left[3^{\frac{2}{4+0-4}}\right] = \left[3^{\frac{2}{+0}}\right] = \left[3^{+\infty}\right] = +\infty.$$

Правостороння границя у точці $x = 4$ нескінченна, тому точка $x = 4$ – точка розриву другого роду (рис.11.5).

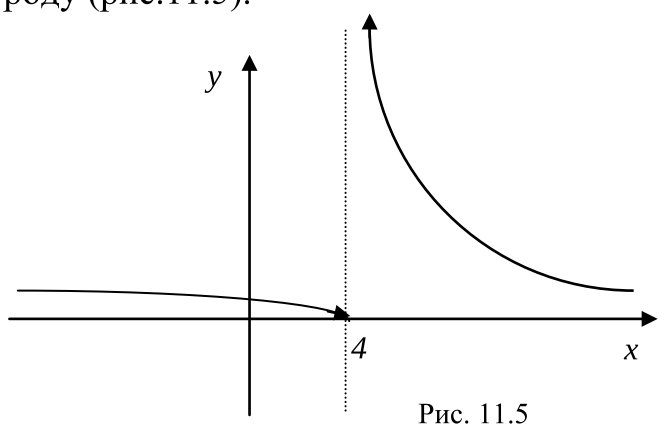

Рис. 11.5

Означення. Функцію $f(x)$ називають неперервною на множині A, якщо вона неперервна у кожній точці множини A. Це записують $f \in C(A)$.

11.4. Властивості функцій, неперервних на відрізку

Теорема 11.2. Якщо $f \in C([a;b])$, тоді $f(x)$ є обмеженою на відрізку $[a;b]$.

Теорема 11.3 (*теорема Вейєрштрасса*). Якщо $f \in C([a;b])$, то на цьому відрізку $f(x)$ досягає свого найменшого m і найбільшого M значень (рис. 11.6), тобто:

$$\exists x_* \in [a;b] : \forall x \in [a;b] \quad m = f(x_*) \le f(x),$$

$$\exists x^* \in [a;b] : \forall x \in [a;b] \quad M = f(x^*) \ge f(x).$$

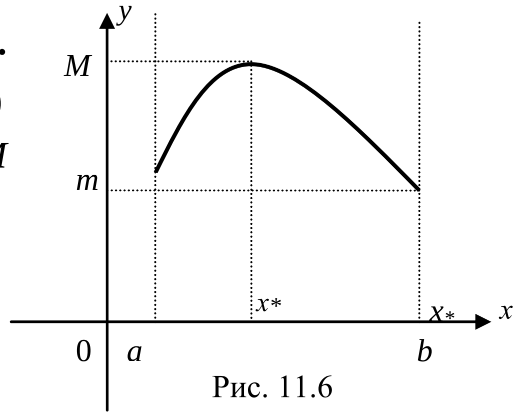

Рис. 11.6

Теорема 11.4 (*перша теорема Больцано−Коші*).

Якщо $f \in C([a;b])$ й на кінцях відрізка набуває значень різних знаків, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$, знайдеться принаймні одна така точка $x_0 \in (a,b)$, що $f(x_0) = 0$ (рис. 11.7).

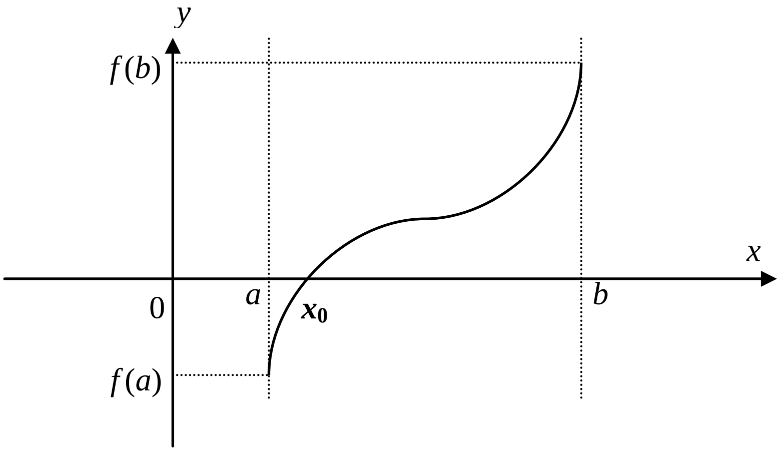

Рис. 11.7

Теорема 11.5 (*друга теорема Больцано−Коші*) .

Якщо $f \in C([a;b])$ й на кінцях відрізка набуває різних значень, тобто $f(a) = A \neq B = f(b)$, то для будь-якого значення $L \in (A;B)$ знайдеться принаймні одна така точка $x_0 \in (a;b)$, що $f(x_0) = L$ (рис. 11.8).

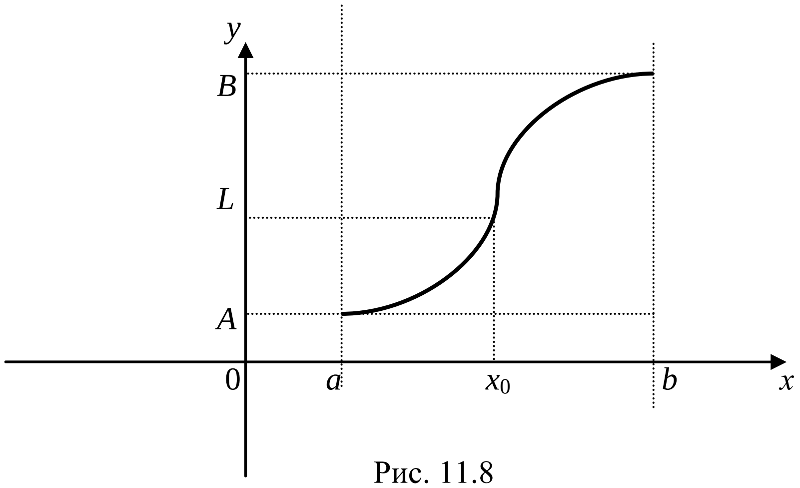

Рис. 11.8

Запитання для самоперевірки до розділу 4

1. Що таке числова послідовність і які способи її задання ви знаєте?
2. Яку послідовність називають функціональною?
3. Яку послідовність називають збіжною і як формулюють означення границі послідовності?
4. Що таке нескінченно мала та нескінченно велика послідовності?
5. Які властивості мають збіжні послідовності?
6. Яка послідовність має границю число e, що називають числом Ейлера?
7. Які існують види невизначеностей та способи їх розкриття?
8. Як сформулювати означення функції?
9. Які функції називають основними елементарними?
10. 9.Які функції називають гіперболічними?
11. Яке означення границі функції в точці і яка геометрична інтерпретація цієї границі?
12. Які функції називають нескінченно малими та нескінченно великими?
13. Які властивості нескінченно малих функцій?
14. Які властивості існують для функцій, що мають границю?
15. Що таке перша важлива границя і які її наслідки?
16. Що таке друга важлива границя і які її наслідки?
17. Які нескінченно малі функції називають еквівалентними і які існують основні еквівалентності?
18. Які функції називають неперервними в точці?
19. Які властивості мають неперервні функції?
20. Що можна сказати про неперервність основних елементарних функцій?
21. Яка існує класифікація точок розриву функції і якими прикладами це можна проілюструвати?
22. Які властивості мають функції, неперервні на відрізку?

Розділ 5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Лекція 12. Похідна функції однієї змінної

12.1. Поняття похідної, її геометричний і фізичний зміст

Під час вивчення залежностей, які описують різноманітні процеси, у першу чергу постає питання, з якою швидкістю протікають ці процеси.

Задача про визначення швидкості змінювання певної величини призводить до одного з найважливіших понять науки – до поняття похідної.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякій області *D*. Візьмемо довільне значення аргумента $x \in D$ і надамо йому приріст Δx, тоді приріст функції Δy, обумовлений приростом аргумента Δx, має вигляд $\Delta y = f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)$ (рис. 12.1).

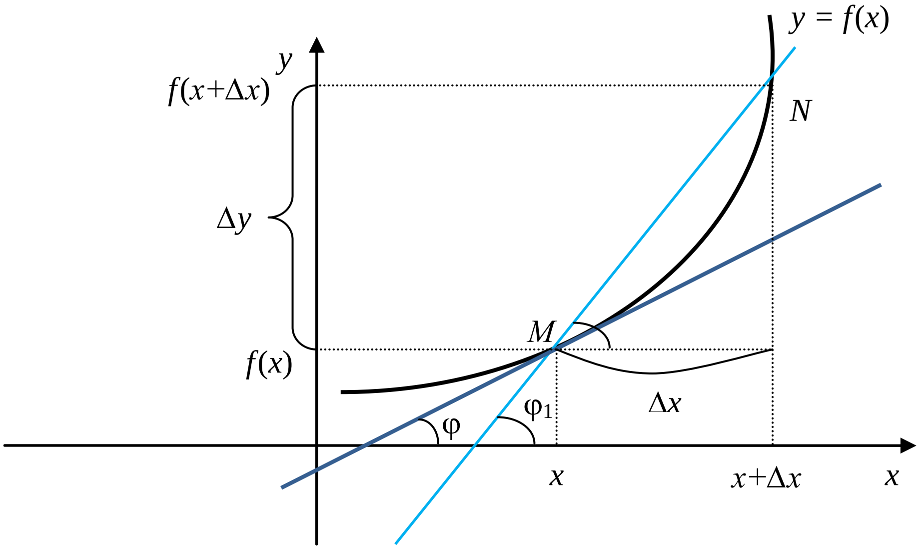

Рис. 12.1

Означення. Якщо існує границя відношення приросту функції Δy до приросту аргумента Δx, за умови, що $\Delta x \to 0$, то цю границю називають похідною функції $y = f(x)$ і це записують як

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = x^3$.

Знайдемо приріст функції:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \left(x+\Delta x\right)^3 - x^3 =$$

$$= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3 - x^3 =$$

$$= 3x^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3,$$

тоді

$$y' = \left(x^3\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(3x^2 + 3x\Delta x + \left(\Delta x\right)^2\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(3x^2 + 3x\Delta x + \left(\Delta x\right)^2\right) = 3x^2,$$

отже

$$\left(x^3\right)' = 3x^2.$$

Геометричний зміст похідної. Розглянемо знову рис. 5.1 і точки $M\left(x, f(x)\right)$ та $N\left(x+\Delta x,\ f\left(x+\Delta x\right)\right)$. Січна MN утворює кут φ_1 з віссю Ox, причому $\mathrm{tg}\varphi_1 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Якщо $\Delta x \to 0$, точка N, рухаючись по графіку функції, наближається до точки M, при цьому хорда MN буде повертатися навколо точки M і в границі (для значення аргумента x) займе положення дотичної до графіка функції у точці M. Кут нахилу дотичної до осі Ox позначимо через φ. Тоді

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\mathrm{tg}\varphi_1 = \mathrm{tg}\varphi.$$

Геометричний зміст похідної: *значення похідної функції у точці* x *дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної з додатним напрямком осі* Ox*, яка проведена до графіка функції у точці* x.

Фізичний зміст похідної. Розглянемо задачу з механіки. Нехай матеріальна точка, рухаючись прямолінійно, проходить шлях $S = S(t)$, де t – час. Тоді за проміжок часу $[t, t + \Delta t]$, точка пройде відрізок шляху $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$ із середньою швидкістю $v_{сер} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Щоб знайти швидкість руху в момент часу t, треба розглянути границю $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ за $\Delta t \to 0$, тоді

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{сер} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta x} = S'(t).$$

Механічний зміст похідної: *похідна від пройденого шляху* $S(t)$ – *швидкість руху матеріальної точки у момент часу* t.

Отже, ***похідна функції характеризує швидкість зміни відповідного процесу, який описує ця функція.***

Приклад. Якщо $Q = Q(t)$ – кількість речовини, що утворюється в результаті деякої хімічної реакції на момент часу t, то $Q'(t)$ – швидкість реакції в момент часу t.

Приклад. Якщо $T = T(t)$ – змінна температура тіла, що нагрівається, то $T'(t)$ – швидкість нагріву тіла в момент часу t.

Слід зауважити, що лише після того, як було встановлено поняття границі, було науково грамотно визначено поняття швидкості.

Означення. Процес знаходження похідної називають **диференціюванням функції.**

Означення. Функцію, яка має похідну в точці x_0, називають **диференційованою** в цій точці.

Теорема 12.1 (*про неперервність диференційованої функції*).

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в деякій точці x_0, то вона буде неперервною у цій точці.

Зауваження. Обернене твердження не справджується, тобто з того, що функція неперервна у точці, не завжди випливає, що вона диференційовна в ній. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад. Функція $y = |x|$ є неперервною за $x \in R$ (рис. 12.2) , але не існує похідної цієї функції у точці $x = 0$. Справді,

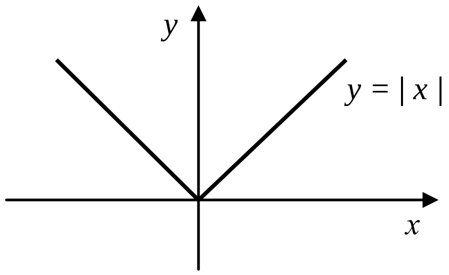

Рис. 12.2

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Отже, $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, тому за теоремою про рівність односторонніх границь робимо висновок, що похідної у точці $x = 0$ як границі не існує.

12.2. Правила обчислення похідних

1. ***Сталий множник можна виносити за знак похідної***, тобто

$$\left(Cf(x)\right)' = Cf'(x).$$

2. Нехай функції $u(x)$ та мають похідні в деякій точці x, тоді їх сума, різниця, добуток і, за умови $v(x) \neq 0$, частка теж мають похідні у цій точці, причому:

1) $\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x)$,

2) $\left(u(x) \cdot v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$,

3) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

3. ***Похідна від складеної функції.*** Нехай f та g – дві диференційовані функції, тоді похідну від складеної функції $y = g\left[f(x)\right]$ знаходять за формулою $y' = g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x)$.

4. ***Похідна оберненої функції.*** Нехай функція $y = f(x)$ – строго монотонна і неперервна. У цьому випадку рівняння можна розв'язати відносно x, тобто $x = \varphi(y)$. Якщо поміняти місцями x та y, то отримаємо функцію $y = \varphi(x)$, яку називають оберненою до функції $y = f(x)$.

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в деякій точці x та $f'(x) \neq 0$, тоді функція $y = \varphi(x)$, яка є оберненою до функції $y = f(x)$, також буде диференційовна у цій точці, причому

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'(y)}.$$

Приклад. Знайдемо похідну функції $y = \sqrt[3]{x}$.

Розв'язування. Функція $y = \sqrt[3]{x}$ є оберненою до функції $f(x) = x^3$, отже, за формулою знаходження похідної оберненої функції маємо:

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{\left(y^3\right)'} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Таким чином,

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

12.3. Таблиця похідних

1. Якщо $y = C = \text{const}$, то

$$y' = C' = 0.$$

Доведення. $y = C$, тоді

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0.$$

Отже,

$$y' = (C)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in R.$

Доведення. $y = x^{\alpha}$, тоді $\Delta y = (x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}$.

$$y' = (x^{\alpha})' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{\alpha}\left[\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right]}{\Delta x} = \left|\begin{array}{l} \Delta x \to 0, \quad \dfrac{\Delta x}{x} \to 0 \\ \left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1 \sim \alpha\dfrac{\Delta x}{x} \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{\alpha}\alpha\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{\alpha}\Delta x}{x\cdot\Delta x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Отже, $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Приклад. Знайти похідну функції $y = \sqrt{x}$.

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

отже, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Приклад. Знайти похідну функції $y = \dfrac{1}{x}$.

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$

отже, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

3. $(\sin x)' = \cos x.$

Д о в е д е н н я. $y = \sin x,$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2}\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \left|\begin{matrix} \Delta x \to 0, & \frac{\Delta x}{2} \to 0 \\ \sin\frac{\Delta x}{2} \sim \frac{\Delta x}{2} & \end{matrix}\right| = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Отже, $(\sin x)' = \cos x.$

Зауваження. Аналогічно доводять формулу для $\cos x.$

4. $(\cos x)' = -\sin x.$

5. $(\text{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

Д о в е д е н н я.

$$(\text{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отже, $(\text{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$ ►

Зауваження. Аналогічно доводять формулу для $\mathrm{ctg}x$.

6. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Доведення. $y = \ln x$, тоді

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\frac{x + \Delta x}{x} = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

$$y' = (\ln x)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{array}{l}\Delta x \to 0, \quad \frac{\Delta x}{x} \to 0\\ \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \sim \frac{\Delta x}{x}\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x}{x \cdot \Delta x} = \frac{1}{x},$$

отже, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

8. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Доведення. $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a}(\ln x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

9. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$

Доведення. $y = a^x$, $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$.

$$y' = (a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{array}{c}\Delta x \to 0,\\ a^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \ln a\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{a^x \Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a,$$

отже, $(a^x)' = a^x \ln a$.

10. $(e^x)' = e^x.$

11. $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x.$

Доведення.

$$(\mathrm{ch}x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}\cdot(-1)) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}x.$$

Зауваження. Аналогічно доводять формулу для $\mathrm{sh}x$.

12. $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x.$

13. $(\mathrm{th}x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}.$

Доведення.

$$(\mathrm{th}x)' = \left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\right)' = \frac{(\mathrm{sh}x)'\cdot\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x\cdot(\mathrm{ch}x)'}{\mathrm{ch}^2 x} =$$

$$= \frac{\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x\cdot\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}.$$

Зауваження. Аналогічно доводять формулу для $\mathrm{cth}x$.

14. $(\mathrm{cth}x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}.$

15. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Доведення. Функція $y = \arcsin x$ є оберненою для функції $f(x) = \sin x$, тоді за формулою про похідну оберненої функції маємо

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Зауваження. Аналогічно доводять формулу для $\arccos x$.

16. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

17. $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Доведення. Функція $y = \mathrm{arctg}x$ є оберненою для функції $f(x) = \mathrm{tg}x$, тоді за формулою про похідну оберненої функції маємо

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{(\mathrm{tg}y)'} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Зауваження. Аналогічно доводять формулу для $\mathrm{arcctg}x$.

18. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ

1. $(C)' = 0$.	**10.** $(e^x)' = e^x$.
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in R$.	**11.** $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$.
3. $(\sin x)' = \cos x$.	**12.** $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$.
4. $(\cos x)' = -\sin x$.	**13.** $(\mathrm{th}x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$.
5. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.	**14.** $(\mathrm{cth}x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$,
6. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.	**15.** $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.	**16.** $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
8. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$.	**17.** $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
9. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1$.	**18.** $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

12.4. Рівняння дотичної та нормалі до графіка функції

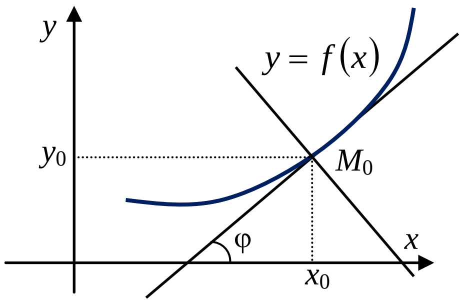

Рис. 12.3

Нехай функція задана рівнянням $y = f(x)$. Візьмемо на графіку функції точку $M_0(x_0, y_0)$, де $y_0 = f(x_0)$ (рис. 12.3). Запишемо рівняння дотичної до графіка функції у точці M_0.

Згідно з геометричним змістом похідної $f'(x_0) = \mathrm{tg}\varphi$, а з точки зору аналітичної геометрії $\mathrm{tg}\varphi = k$, де k – кутовий коефіцієнт прямої, тоді

$$k = f'(x_0).$$

Використаємо рівняння прямої, що проходить через задану точку із заданим кутовим коефіцієнтом вигляду $y - y_0 = k(x - x_0)$. Для рівняння дотичної $k = f'(x_0)$, $y_0 = f(x_0)$, отже, рівняння дотичної до графіка функції у точці M_0 має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Означення. Пряму, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ графіка функції $y = f(x)$ і перпендикулярна дотичній до $y = f(x)$ у цій точці, називають нормаллю до графіка функції.

З умови перпендикулярності двох прямих випливає, що кутовий коефіцієнт нормалі $k_н = -\frac{1}{k_д} = -\frac{1}{f'(x_0)}$. Тоді рівняння нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці M_0 має вигляд

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

Приклад. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = 2x^2 + 1$ у точці $x_0 = -1$.

Р о з в ’ я з у в а н н я.

Оскільки $x_0 = -1$, то $f(x_0) = f(-1) = 2(-1)^2 + 1 = 3$.

Знайдемо $y' : y' = 4x$, тоді

$$k_д = f'(x_0) = 4(-1) = -4,$$

а $k_н = -\dfrac{1}{k_д} = \dfrac{1}{4}$.

Запишемо рівняння дотичної:

$$y = -4(x+1) + 3,$$

звідки $y = -4x - 1$ або $4x + y + 1 = 0$.

Рівняння нормалі:

$$y = \frac{1}{4}(x+1) + 3,$$

звідки $4y = (x+1) + 12$ або $x - 4y + 13 = 0$.

Лекція 13. Диференціювання функцій. Диференціал

13.1. Логарифмічне диференціювання

Означення. Логарифмічне диференціювання – це диференціювання з попереднім логарифмуванням.

Означення. Функцію вигляду $y(x)=u(x)^{v(x)}$, де $u(x)$ та $v(x)$ – задані та диференційовні функції від x, називають **показниково-степеневою.**

Злогарифмуємо цю функцію за основою *e*:

$$\ln\left(y(x)\right)=\ln\left(u(x)^{v(x)}\right),$$

$$\ln\left(y(x)\right)=v(x)\ln\left(u(x)\right),$$

$$\left(\ln\left(y(x)\right)\right)'=\left(v(x)\ln\left(u(x)\right)\right)',$$

$$\frac{1}{y(x)}\cdot\left(y(x)\right)'=\left(v(x)\right)'\cdot\ln\left(u(x)\right)+v(x)\left(\ln\left(u(x)\right)\right)',$$

$$\frac{1}{y(x)}\cdot y'(x)=v'(x)\cdot\ln\left(u(x)\right)+v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x),$$

$$y'(x)=y(x)\left(v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

Підставляючи $y(x)=u(x)^{v(x)}$, маємо

$$y'(x)=u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\cdot\ln\left(u(x)\right)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

Зауваження**:** треба зрозуміти метод, а не запам'ятовувати громіздку формулу!!!

Приклад. Знайти похідну функції $y = (\text{ctg}3x)^{x^2}$. Застосуємо логарифмічне диференціювання:

$$\ln y = \ln\left((\text{ctg}3x)^{x^2}\right),$$

$$\ln y = x^2 \ln(\text{ctg}3x),$$

$$(\ln y)' = \left(x^2 \ln(\text{ctg}3x)\right)',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2x\ln(\text{ctg}3x) + x^2 \frac{1}{\text{ctg}3x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 3x}\right) \cdot 3,$$

$$y' = y \cdot \left(2x\ln(\text{ctg}3x) - 3x^2 \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \cdot \frac{1}{\sin^2 3x}\right),$$

$$y' = (\text{ctg}3x)^{x^2} \cdot \left(2x\ln(\text{ctg}3x) - 3x^2 \frac{1}{\cos 3x} \cdot \frac{1}{\sin 3x}\right),$$

$$y' = (\text{ctg}3x)^{x^2} \cdot \left(2x\ln(\text{ctg}3x) - \frac{6x^2}{\sin 6x}\right).$$

Зауваження. Якщо функція є добутком багатьох співмножників або дробом, у чисельнику і знаменнику якого багато співмножників, варто застосовувати логарифмічне диференціювання.

13.2. Диференціювання функцій, заданих неявно

Рівність $y = f(x)$ визначає функцію в явному вигляді. Якщо функцію задано рівнянням $F(x, y) = 0$, то кажуть, що функцію задано неявно.

Наприклад,

$$x^2 + y^2 = 4; \quad y^6 + x^4 y^5 - xy^2 + 3x - 4 = 0.$$

Щоб продиференціювати неявно задану функцію, потрібно взяти похідну за *x* від обох частин рівності, вважаючи *y* функцією від *x*, а отримане рівняння розв'язати відносно y'.

Приклад. Знайти y', якщо $x^2 + y^2 = 4$.

$$\left(x^2 + y^2\right)' = (4)', \quad 2x + 2yy' = 0, \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

Приклад. Знайти y', якщо $y^6 + x^4y^5 - xy^2 + 3x - 4 = 0$.

$$\left(y^6 + x^4y^5 - xy^2 + 3x - 4\right)' = (0)',$$

$$\underline{6y^5 \cdot y'} + 4x^3y^5 + \underline{x^4 5y^4 \cdot y'} - y^2 - \underline{x \cdot 2y \cdot y'} + 3 - 0 = 0,$$

$$y'\left(6y^5 + 5x^4y^4 - 2xy\right) = y^2 - 4x^3y^5 - 3$$

$$y' = \frac{y^2 - 4x^3y^5 - 3}{6y^5 + 5x^4y^4 - 2xy}.$$

13.3. Диференціювання функцій, заданих параметрично

Задача. Нехай точка рухається у площині так, що кожному значенню змінної t (наприклад, часу) з деякої області T відповідає певне положення точки. Треба знайти рівняння її траєкторії (рис. 13.1).

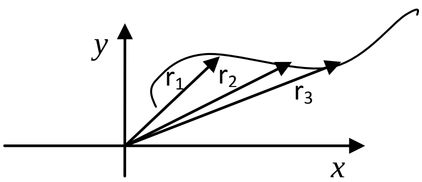

Рис. 13.1

Припустимо, що в площині задано прямокутну декартову систему координат Oxy. Очевидно, що зі зміною положення точки змінюється і її радіус-вектор. Отже радіус-вектор точки є функцією від t, яку записують у формі векторного рівняння $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Якщо радіус-вектор є функцією від t, то і координати вектора r є також деякими функціями від t, тому положення точки у момент часу t задають рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in T.$$

Ці рівняння називають ***параметричними рівняннями лінії, а*** t – ***параметром***.

Наприклад:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad t \in [0,\ 2\pi] \text{ – параметричні рівняння кола } x^2 + y^2 = R^2;$$

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in [0,\ 2\pi] \text{ – параметричні рівняння еліпса } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Наведемо приклад функції, що описує траєкторію руху точки кола, яке котиться без ковзання вздовж нерухомої осі (рис. 13.2).

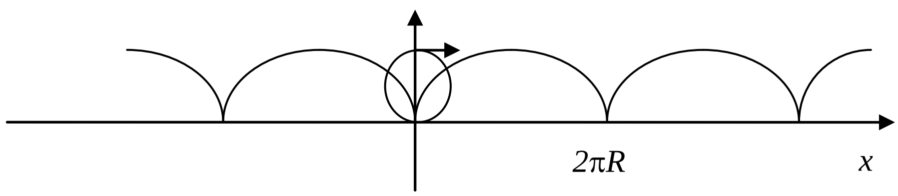

Рис. 13.2

Параметричне рівняння кривої має вигляд

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t), \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty,$$

а криву називають **циклоїдою**.

Виведемо формулу для похідної функції, яка задана параметрично. Зробимо у рівнянні $y = y(x)$ заміну: $x = x(t), y = y(t)$, отримаємо $y(t) = y(x(t))$.

Продиференціюємо останню рівність, використовуючи похідну складеної функції:

$$(y(t))' = (y(x(t)))',$$

$$y'(t) = y'(x(t)) \cdot x'(t),$$

тоді

$$y'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

таким чином,

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

що є формулою для знаходження похідної функції, заданої параметрично.

Приклад. Знайти y', якщо

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$$

Р о з в ’ я з у в а н н я.

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(R\sin t)'}{(R\cos t)'} = \frac{R\cos t}{-R\sin t} = -\mathrm{ctg}t.$$

Приклад. Знайти y', якщо

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t). \end{cases}$$

Р о з в ’ я з у в а н н я.

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\left(R(1 - \cos t)\right)'}{\left(R(t - \sin t)\right)'} = \frac{R\sin t}{R(1 - \cos t)} =$$

$$= \frac{\sin t}{1 - \cos t} == \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \mathrm{ctg}\frac{t}{2}.$$

13.4. Диференціал функції

Згідно з означенням похідної функції $y = f(x)$: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, тоді за теоремою про зображення функції, що має границю, можна записати:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),\ \alpha(\Delta x) \to 0,\ \Delta x \to 0,$$

тоді

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Означення. Головну частину приросту функції, що лінійно залежить від Δx, називають ***диференціалом функції*** $y = f(x)$ і позначають dy або $df(x)$, тобто

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad (13.1)$$

Означення. Диференціалом незалежної змінної x називають приріст цієї змінної, тобто

$$dx = \Delta x. \qquad (13.2)$$

Справді, $y = x \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow dy = dx$ та $dy = 1 \cdot \Delta x$, тобто $dx = \Delta x$.

Таким чином, згідно з (13.1) і (13.2) можна записати диференціал функції таким чином:

$$dy = f'(x)dx. \qquad (13.3)$$

Зауваження. З виразу (13.3) можна отримати ще одне позначення похідної: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

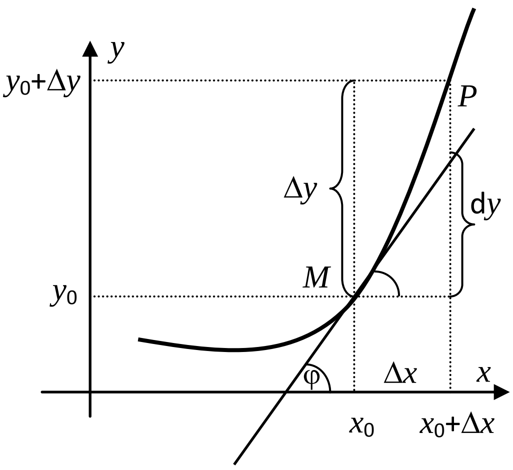

Рис. 13.3

Геометричний зміст диференціала. Розглянемо дотичну MP, яка побудована до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M(x_0, y_0)$. Дотична MP утворює кут φ із додатним напрямом осі Ox (рис. 13.3).

З геометричного змісту похідної випливає, що $f'(x_0) = \text{tg}\varphi$, тоді (13.1) набуває вигляду $dy = \text{tg}\varphi \cdot \Delta x$.

Отже, ***з геометричної точки зору*** диференціал – це приріст ординати дотичної, яка проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M(x_0, y_0)$ за відповідного приросту аргумента Δx.

Основні властивості диференціала аналогічні властивостям похідних:

1. $dc = 0.$

2. $d\left(cf(x)\right) = cd\left(f(x)\right).$

3. $d\left(u(x) \pm v(x)\right) = d\left(u(x)\right) \pm d\left(v(x)\right).$

4. $d\left(u(x) \cdot v(x)\right) = d\left(u(x)\right)v(x) + u(x)d\left(v(x)\right).$

5. $d\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right) = \dfrac{d\left(u(x)\right)v(x) - u(x)d\left(v(x)\right)}{v^2(x)}.$

6. $y = \mathrm{g}\left(f(x)\right), dy = d\left[g\left(f(x)\right)\right] = \mathrm{g}'\left(f(x)\right)d\left(f(x)\right) = g'\left(f(x)\right)f'(x)dx.$

Диференціал складеної функції може мати кілька однотипних виразів: за яким аргументом (кінцевим чи проміжним) беремо похідну, на диференціал того ж аргумента множиться ця похідна. Цю властивість збереження форми (13.3) диференціала називають **інваріантністю** (незалежністю) форми першого диференціала.

Приклад. Знайти dy, якщо $y = x^4$.

Розв'язування.

$$dy = \left(x^4\right)' dx = 4x^3dx.$$

Розглянемо складену функцію $y = \sin x^4$ і знайдемо її диференціал.

$$dy = (\sin x^4)'dx = \underline{\cos x^4 \cdot 4x^3dx} = \cos x^4 \cdot (x^4)'dx = \underline{\cos x^4 d(x^4)}.$$

Похідну за кінцевим аргументом x множимо на dx

Похідну за проміжним аргументом x^4 множимо на $d(x^4)$

13.5. Похідні та диференціали вищих порядків

Похідні вищих порядків явно заданої функції

Оскільки похідна y' від функції $y = f(x)$ також є функцією від x, то від неї теж можна знаходити похідну.

Означення. Якщо для функції $y = f(x)$ існує перша похідна $y' = f'(x)$, тоді, якщо існує $\left[f'(x)\right]'$, то її називають **другою похідною**, або **похідною другого порядку**, і позначають y'' або $f''(x)$, отже $y'' = \left(f'(x)\right)'$.

Приклад. Знайти y'', якщо $y = \sin^2 x$.

Розв'язування.

$$y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x.$$

$$y'' = 2\cos 2x.$$

Означення. Якщо існує $\left[f^{(n-1)}(x)\right]'$, то вона називається ***n*-ю похідною**, або **похідною *n*-го порядку** і позначається $y^{(n)}$ або $f^{(n)}(x)$.

Зауваження. Похідні порядку вище першого називають **похідними вищого порядку**.

Зауваження. Починаючи з похідної четвертого порядку, похідні позначають не штрихами, а цифрами. Порядок похідної беруть у дужки, щоб не сплутати його з показником степеня.

Приклад. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = x^n$.

Розв'язування.

$$y' = nx^{n-1},$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2},$$

$$y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$

$$y^{(4)} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}, \ldots$$

$$y^{(n-1)} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-2))x = n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 2\cdot x,$$

$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Отже, $\left(x^n\right)^{(n)} = n!$, наприклад, $\left(x^4\right)^{(4)} = 4! = 24$. Відповідно, $\left(x^n\right)^{(n+1)} = 0$.

Приклад. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = e^x$.

Розв'язування. $y' = y'' = y''' = \ldots = y^{(n)} = e^x$.

Приклад. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = a^x$.

Розв'язування.

$y' = a^x \ln a$,

$y'' = \left(a^x \ln a\right)' = \ln a \left(a^x\right)' = \ln a \cdot a^x \ln a = a^x \ln^2 a$,

$y''' = a^x \ln^3 a, \ldots, y^{(n)} = a^x \ln^n a$.

Похідні вищих порядків неявно заданої функції

Як знайти похідні вищих порядків від функцій, заданих неявно, розглянемо на прикладі.

Приклад. Знайти y'', якщо $x^2 + y^2 = 4$.

Розв'язування.

$$\left(x^2 + y^2\right)' = (4)', \quad 2x + 2yy' = 0, \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

$$(y')' = \left(-\frac{x}{y}\right)',$$

$$y'' = -\frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = \frac{xy' - y}{y^2} = \frac{-x \cdot \frac{x}{y} - y}{y^2} =$$

$$= -\frac{\frac{x^2}{y} + y}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{4}{y^3}.$$

Зауваження. Продовжуючи диференціювання, можна знайти послідовно одну за одною похідні будь-якого порядку. Усі вони будуть виражені через незалежну змінну x і саму функцію y.

Похідні вищих порядків параметрично заданої функції

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, тоді, як відомо,

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

або це записують $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Другу похідну як похідну від першої похідної знаходять від такої параметрично заданої функції: $x = x(t), y = y'(x(t))$, тобто

$$y''(x) = y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Аналогічно, може бути знайдена і кожна наступна похідна параметрично заданої функції. Так,

$$y'''(x) = y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}.$$

Приклад. Знайти y'', якщо $\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t). \end{cases}$

Р о з в ’ я з у в а н н я.

$$y'(x) = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(R(1-\cos t)\right)'}{\left(R(t-\sin t)\right)'} = \frac{R\sin t}{R(1-\cos t)} =$$

$$= \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2};$$

$$y''(x) = y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'}{\left(R(t-\sin t)\right)'} =$$

$$\frac{-\dfrac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}}{R(1-\cos t)} = -\frac{\dfrac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{R\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4R\sin^4\frac{t}{2}}.$$

Диференціали вищих порядків

Нехай $y = f(x)$, де x – незалежна змінна, тоді диференціал цієї функції $dy = f'(x)dx$ також є функцією від x, бо $f'(x)$ – функція від x, а $dx = \Delta x = const$, тому від диференціала можна знаходити диференціал.

Означення. Диференціал від диференціала функції називають **другим диференціалом** або **диференціалом другого порядку** і позначають d^2y, отже:

$$d^2y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) = d\left(f'(x)\right)\cdot dx =$$

$$= \left(f'(x)\right)' dx\cdot dx = f''(x)(dx)^2,$$

тобто

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

Аналогічно,

$$d^3y = f'''(x)dx^3, \ldots,\ d^ny = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Зауваження. З наведених формул можна отримати ще одне позначення для похідних:

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2},\ f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots,\ f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Лекція 14. Основні теореми диференціального числення. Правило Лопіталя

14.1. Основні теореми диференціального числення

Теорема 14.1 (*теорема Ферма*). Нехай $f:(a,b)\to \mathrm{R}$ і виконуються такі умови:

1) $\exists x_0 \in (a,b): f(x_0)=\max\limits_{x\in(a,b)} f(x) \quad \left(f(x_0)=\min\limits_{x\in(a,b)} f(x)\right)$,

2) $\exists\ f'(x_0)\in \mathrm{R}$.

Тоді $f'(x_0)=0$.

***Геометрична інтерпретація теореми Ферма*:**

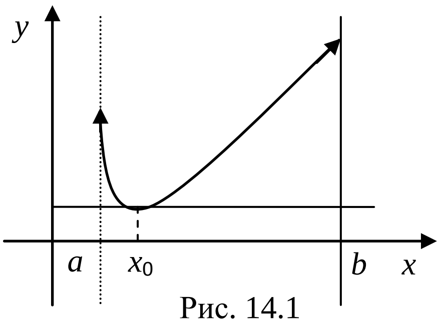

Рис. 14.1

$$f'(x_0)=0 \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0,$$

тобто дотична, яка проведена до кривої у точці x_0, має кутовий коефіцієнт $k=0$.

Це означає, що дотична у точці x_0 буде паралельна осі Ox (рис. 14.1).

Теорема 14.2 (*теорема Ролля*). Нехай $f:[a,b]\to \mathrm{R}$ і виконуються такі умови:

1) $f\in C([a,b])$;

2) $\forall x\in(a,b) \quad \exists f'(x)$;

3) $f(a)=f(b)$.

Тоді $\exists c\in(a,b): \quad f'(c)=0$.

Геометричну інтерпретацію теореми Ролля подано на рис. 14.2.

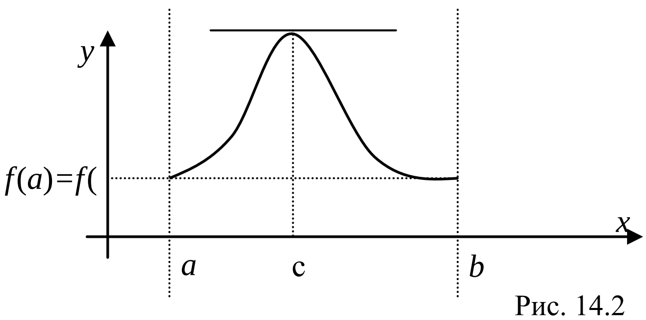

Рис. 14.2

Теорема 14.3 (*теорема Лагранжа*). Нехай $f:[a,b]\to \mathrm{R}$ і виконуються такі умови:

1) $f\in C([a,b])$;

2) $\forall x\in(a,b) \quad \exists f'(x)$.

Тоді $\exists c\in(a,b): \quad f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Геометричну інтерпретацію теореми Лагранжа подано на рис.14.3.

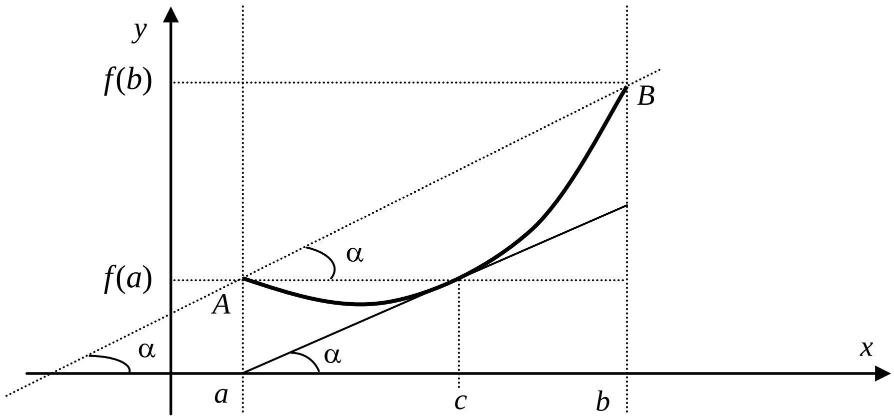

Рис. 14.3

Зауважимо, що $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\mathrm{tg}\alpha$, де α – кут, який утворює пряма AB з віссю Ox. Згідно з теоремою Лагранжа буде існувати принаймні одна така точка $c\in(a,b)$, в якій дотична до графіка функції буде паралельна до прямої AB (рис. 14.3).

Теорема 14.4 (*теорема Коші*). Нехай $f:[a,b]\to \mathrm{R}$, $g:[a,b]\to \mathrm{R}$ та виконуються такі умови:

1) $f\in C([a,b])$, $g\in C([a,b])$;

2) $\forall x\in(a,b) \quad \exists f'(x)$, $\exists g'(x)$, причому $g'(x)\neq 0$.

Тоді $\exists c\in(a,b): \quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Зауваження. Теорему Лагранжа можна розглядати як окремий випадок теореми Коші. Справді, якщо покласти у формулі теореми Коші $g(x) = x$, дістанемо формулу теореми Лагранжа.

14.2. Правило Лопіталя

Крім розглядуваних раніше методів обчислення границь функцій ефективним засобом обчислення границь є використання похідної за правилом, запропонованим французьким математиком Лопіталем.

Теорема 14.5 (правило Лопіталя).

Нехай:

1) функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені й диференційовні в околі точки x_0, за винятком хіба що самої точки x_0, причому в цьому околі $g'(x) \neq 0$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$;

3) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тоді буде існувати і $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, при цьому справедлива рівність

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (14.1)$$

Зауваження.

1. Правило (14.1) справедливе і за $x \to \infty$, справді,

$$\underline{\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left| \begin{matrix} \textit{заміна } x = \dfrac{1}{t}, \\ x \to \infty,\ t \to 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \left| \begin{array}{c} \textit{заміна} \\ \frac{1}{t} = x \end{array} \right| = \underline{\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}}.$$

2. Правило Лопіталя (14.1) справедливе і у випадку, коли вираз $\frac{f(x)}{g(x)}$ за $x \to \infty$ ($x \to \infty$) має невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

3. Якщо вираз $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ за $x \to \infty$ ($x \to \infty$) має невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, а функції $f'(x)$ та $g'(x)$ задовольняють умови теореми 14.5 (правило Лопіталя), тоді правило Лопіталя застосовують ще раз:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Аналогічно це можна поширити і на випадок невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Висновок. Правило Лопіталя (14.1) безпосередньо використовують для розкриття невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ і $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(x^2-5x+6\right)'}{\left(x^2-3x+2\right)'} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-5}{2x-3} = \frac{-1}{1} = -1;$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin 3x)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin 3x}\cdot\cos 3x\cdot 3}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cos 3x}{\sin 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)}_{\downarrow \atop 1}\cdot\cos 3x=\lim_{x\to 0}\cos 3x=1;$$

3) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{e^x}=0;$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x}-2x)'}{(x-\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

Зауваження. Крім розглянутих невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ та $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, зустрічаються невизначеності вигляду $[0\cdot\infty], [\infty-\infty], \left[0^0\right], \left[\infty^0\right], \left[1^\infty\right]$. Ці невизначеності можна звести до невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ та $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ алгебраїчними перетвореннями.

1. Невизначеності вигляду $\left[0\cdot\infty\right]$.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, тоді дослідження границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$ зводиться до дослідження або $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$, або $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад. Обчислити границі:

1) $$\lim_{x\to 0} x^2\cdot\ln x=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-2}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-2x^{-3}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{-2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^2=0;$$

2) $$\lim_{x\to 1}(1-x)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)'}{\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}\cdot\dfrac{\pi}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{2\cdot\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

2. Невизначеності вигляду $\left[0^0\right],\left[\infty^0\right],\left[1^\infty\right]$.

Ці невизначеності зводяться до невизначеності $\left[0\cdot\infty\right]$ за допомогою логарифмування.

Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ має одну з розглядуваних невизначеностей: $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$ або $\left[1^\infty\right]$. Припустимо, що $f(x)>0$, й покладемо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=A$, тоді $\ln A=\ln\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\ln f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln f(x)$.

Приклад. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}=\left[\infty^0\right]=A$,

$$\ln A=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(x+2^x\right)=[0\cdot\infty]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+2^x\right)}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\left(x+2^x\right)\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+2^x}\cdot\left(1+2^x\ln 2\right)}{1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+2^x\ln 2\right)'}{\left(x+2^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2\ln 2}{1+2^x\ln 2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2^x\ln 2\ln 2\right)'}{\left(1+2^x\ln 2\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2\ln 2\ln 2}{2^x\ln 2\ln 2}=\ln 2,$$

оскільки $\ln A=\ln 2$, то $A=2$;

2) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}=\left[1^\infty\right]=A$,

$$\ln A=\ln\left(\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}\right)=\lim_{x\to 1}\ln x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\cdot\ln x=[\infty\cdot 0]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1,$$

оскільки $\ln A=-1$, то $A=e^{-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{tg}2x\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \left[0^0\right] = A,$

$$\ln A = \ln\left(\lim_{x\to 0}\left(\mathrm{tg}2x\right)^{\frac{1}{\ln x}}\right) = \lim_{x\to 0}\ln\left(\mathrm{tg}2x\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\mathrm{tg}2x = \left[0\cdot\infty\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\mathrm{tg}2x}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\mathrm{tg}2x\right)'}{\left(\ln x\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\mathrm{tg}2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{2x}{\mathrm{tg}2x}\right)}_{\downarrow\atop 1}\cdot\frac{1}{\cos^2 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 2x} = 1,$$

оскільки $\ln A = 1,$ то $A = e.$

Лекція 15. Застосування диференціального числення для дослідження функцій і побудови їх графіків. Частина 1

15.1. Ознаки зростання, спадання функцій

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякій області D.

Означення. Якщо для довільних значень $\{x_1, x_2\} \subset D$, таких що $x_1 < x_2$, виконується умова:

– $f(x_1) < f(x_2)$, тоді функцію $f(x)$ називають зростаючою на D;

– $f(x_1) > f(x_2)$, тоді функцію $f(x)$ називають спадною на D;

– $f(x_1) \le f(x_2)$, тоді функцію $f(x)$ називають неспадною на D;

– $f(x_1) \ge f(x_2)$, тоді функцію $f(x)$ називають незростаючою на D.

Кожну таку функцію називають **монотонною** на D.

Означення. Спадні та зростаючі функції називаються **строго монотонними.**

Теорема 15.1 (про похідну зростаючої функції).

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в деякій області D. Якщо на області D функція $y = f(x)$ зростає, тоді її похідна – невід'ємна: $f'(x) \ge 0$.

Д о в е д е н н я. Якщо функція $y = f(x)$ зростає на області D, тоді згідно з означенням для довільних $\{x_1, x_2\} \subset D$, таких, що $x_1 < x_2$, виконується умова $f(x_1) < f(x_2)$. Таким чином, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) > 0$ та $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$, звідки $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. Перейдемо у цій нерівності до границі при $\Delta x \to 0$ і на підставі теореми 9.4 (про границю невід'ємної функції) отримаємо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$, звідки $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$, що і треба було довести.

Зауваження. ***У*** теоремі 15.1 не можна записати $f'(x)>0$. Справді, якщо розглянути функцію $y=x^3$, яка зростає на R, то її похідна $y'=3x^2$ не є завжди додатною, бо $y'(0)=0$.

Зауваження. Аналогічно доводять ***теорему про похідну спадної функції.***

> Нехай функція $y=f(x)$ диференційовна в деякій області D. Якщо на області D функція $y=f(x)$ спадає, тоді її похідна $f'(x)\le 0$.

Теорема 15.2 (ознака зростання функції).

> Нехай функція $y=f(x)$ диференційовна у деякій області D та $f'(x)>0$, тоді функція $y=f(x)$ зростає в області D.

Доведення. Візьмемо два довільні значення аргумента $\{x_1, x_2\}\subset D$ такі, що $x_1<x_2$. Оскільки за умовою теореми $y=f(x)$ диференційовна в області D, то вона буде неперервною на відрізку $[x_1, x_2]$ (за теоремою 12.1 про неперервність диференційовної функції). Отже, до функції $y=f(x)$ на відрізку $[x_1, x_2]$ можна застосувати теорему 14.3 (теорему Лагранжа), згідно з якою $\exists c\in(x_1, x_2)$ і справедлива формула $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$. За умовою теореми $f'(c)>0$, крім того, $x_2-x_1>0$, отже $f(x_2)-f(x_1)>0$, тобто за означенням функція $y=f(x)$ зростає в області D.

Зауваження. Аналогічно доводять ***теорему про ознаку спадання функції.***

> Нехай функція $y=f(x)$ диференційовна в деякій області D та $f'(x)<0$, тоді функція $y=f(x)$ спадає в області D.

Геометрична інтерпретація теореми 15.2

Оскільки $f'(x) > 0$ в області $D \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi > 0$, де φ – кут, який утворює з віссю Ox дотична до графіка функції $y = f(x)$. Отже, в цьому випадку дотична, проведена до графіка функції, буде утворювати гострий кут φ з віссю Ox (рис. 15.1).

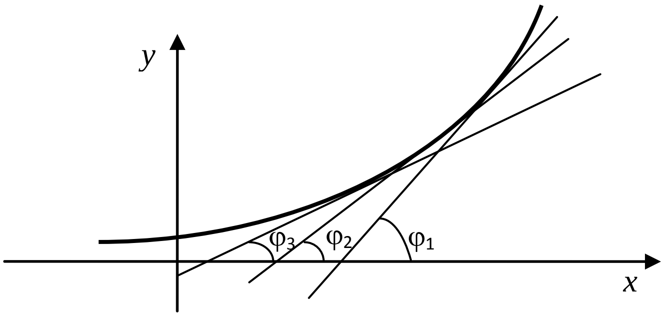

Рис. 15.1

Аналогічно щодо $f'(x) < 0$ в області D – дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$, буде утворювати тупий кут φ з віссю Ox (рис. 15.2).

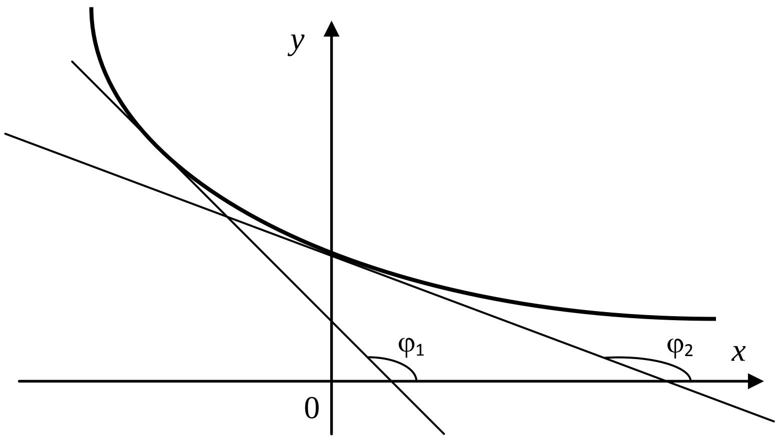

Рис. 15.2

15.2. Екстремуми функції

Означення. Точку x_0 називають точкою **максимуму (мінімуму)** функції $y = f(x)$, якщо для довільного $x\ (x \neq x_0)$ з деякого околу точки x_0 виконується умова

$$f(x) < f(x_0)\ \ (f(x) > f(x_0)).$$

Означення. Точки максимуму і мінімуму називають **точками екстремуму**.

Теорема 15.3 (*необхідна умова існування екстремуму*).

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякій області D. Точка $x_0 \in D$ є точкою екстремуму функції $y = f(x)$, тоді або $f'(x_0) = 0$, або $f'(x_0)$ не існує.

Зауваження. Якщо $f'(x_0) = 0$, то це ще не означає, що x_0 обов'язково є точкою екстремуму функції. Справді, якщо розглянути функцію $y = x^3$, її похідна $y' = 3x^2$, $3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, але $x = 0$ не є точкою екстремуму.

Означення. Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю, називають **стаціонарними точками** функції $y = f(x)$.

Означення. Стаціонарні точки і точки, в яких похідної не існує, називають **критичними точками** або точками можливого екстремуму.

Теорема 15.4 (*перша достатня умова існування екстремуму*).

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякій області D, $x_0 \in D$, $f(x)$ диференційована в області D, за винятком хіба що точки x_0, яка є точкою можливого екстремуму функції $y = f(x)$, тоді:

1) якщо $f'(x)$ змінює знак під час переходу через точку x_0, то x_0 – точка екстремуму, причому якщо $f'(x)$ змінює знак із «–» на «+» , то x_0 – точка мінімуму, а якщо із «+» на «–» , то x_0 – точка максимуму;

2) якщо $f'(x)$ не змінює знак під час переходу через точку x_0, то x_0 не є точкою екстремуму.

Теорема 15.5 (*друга достатня умова існування екстремуму*).

Нехай функція $y = f(x)$ має неперервну другу похідну в точці x_0 і $f'(x_0) = 0$, тоді якщо $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 – точка екстремуму функції, причому якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка мінімуму, якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимуму.

Приклад. Знайти точки екстремуму функції $y = x^3 - 6x^2 + 9x.$

Розв'язування. Очевидно, область визначення функції $(-\infty, +\infty)$.

Знайдемо y': $y' = 3x^2 - 12x + 9.$

Розв'яжемо рівняння $y'(x) = 0$, $3(x^2 - 4x + 3) = 0$, $3(x-1)(x-3) = 0$, тоді $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ – критичні точки функції $y = x^3 - 6x^2 + 9x.$

1. Використаємо *першу достатню умову існування екстремуму*:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1; 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$
		max			*min*

Отже, $x_1 = 1$ – точка максимуму, $x_2 = 3$ – точка мінімуму функції $y = x^3 - 6x^2 + 9x.$

2. Використаємо *другу достатню умову існування екстремуму*.

Знайдемо y'': $y'' = 6x - 12.$

Оскільки $y''(1) = 6 - 12 = -6 < 0$, то $x_1 = 1$ – точка максимуму функції; $y''(3) = 18 - 12 = 6 > 0$, $x_2 = 3$ – точка мінімуму функції.

15.3. Ознаки опуклості та увігнутості графіка функції. Точки перегину

Означення. Криву $y = f(x)$ називають **опуклою** в області D, якщо вона розміщена нижче дотичної, проведеної до неї в будь-якій точці області D (рис. 15.3).

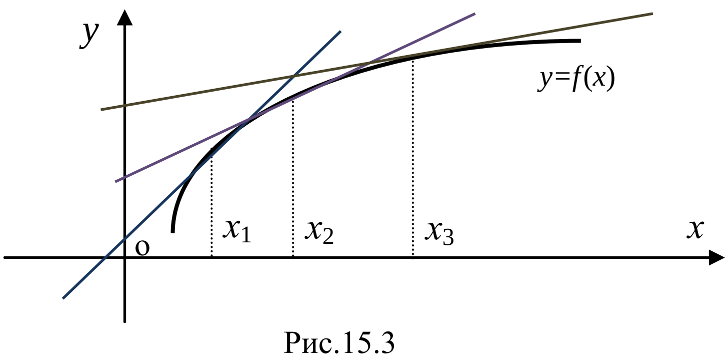

Рис.15.3

Означення. Криву $y = f(x)$ називають **увігнутою** в області D, якщо вона розміщена вище дотичної, проведеної до неї в будь-якій точці області D (рис. 15.4).

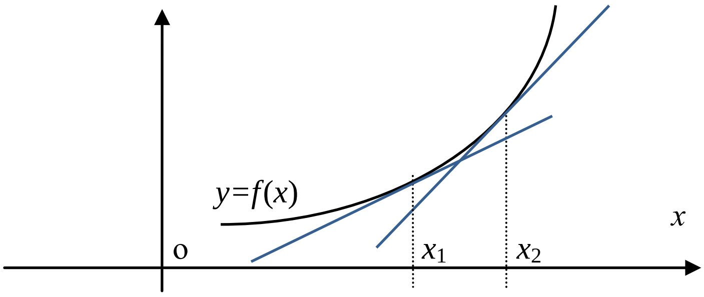

Рис. 15.4

Теорема 15.6 (*ознаки опуклості та увігнутості графіка функції*).

Нехай функція $y = f(x)$ має неперервну другу похідну в області D, тоді:

1) якщо $f''(x)<0$ для $x \in D$, то крива $y = f(x)$ є опуклою в області D;

2) якщо $f''(x)>0$ для $x \in D$, то крива $y = f(x)$ є увігнутою в області D.

Наприклад:

1) $y = e^x, y' = e^x, y'' = e^x > 0,\quad x \in \mathrm{R},$ крива $y = e^x$ увігнута на R (рис. 15.5);

2) $y = \ln x, y' = \dfrac{1}{x}, y'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0, x > 0,$ крива $y = \ln x$ опукла за $x > 0$ (рис.15.6).

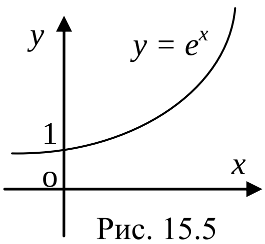

Рис. 15.5

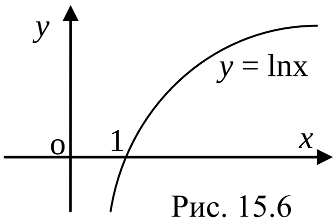

Рис. 15.6

Означення. Точка кривої, що відокремлює опуклу частину неперервної кривої від увігнутої, називають **точкою перегину кривої**.

Очевидно, у точці перегину дотична (якщо вона існує) перетинає криву, бо з одного боку від цієї точки графік кривої знаходиться нижче дотичної, а з другого боку – вище дотичної.

Теорема 15.7 (*необхідна умова існування точки перегину кривої*).

> Нехай функція $y = f(x)$ має неперервну другу похідну в області D, точка $x_0 \in D$ є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$, тоді або $f''(x_0) = 0$, або $f''(x_0)$ не існує.

Зауваження. Якщо $f''(x_0) = 0$, то це ще не означає, що x_0 обов'язково точка перегину графіка функції. Справді, якщо розглянути функцію $y = x^4$, то $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$, $12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, але $x = 0$ не є точкою перегину графіка функції, тому що $\forall x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}: f''(x) > 0$, тобто графік функції увігнутий на R.

Теорема 15.8 (*достатня умова існування точки перегину кривої*).

> Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в області $D, x_0 \in D$, $f(x)$ двічі диференційована в області D, за винятком хіба що точки x_0. У точці x_0 $f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує, тоді:
>
> 1) якщо $f''(x)$ змінює знак під час переходу через точку x_0, то x_0 – точка перегину графіка функції;
>
> 2) якщо $f''(x)$ не змінює знак під час переходу через точку x_0, то x_0 не є точкою перегину графіка функції.

Зауваження. Точку $x_0 \in D$, для якої $f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує, називають критичною точкою другого порядку.

Приклад. Знайти інтервали монотонності, точки екстремуму, інтервали опуклості, увігнутості та точки перегину графіка функції $y = x^4 - 2x^2 - 8$.

Розв'язування. Функція існує за будь-якого значення *x*. Отже, область визначення функції $x \in (-\infty; +\infty)$.

1. Для визначення інтервалів монотонності знаходимо похідну функції, користуючись правилами диференціювання і таблицею похідних:

$$y' = (x^4 - 2x^2 - 8)' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1),$$

яка є неперервною в області визначення функції. Знайдемо критичні точки функції, прирівнявши похідну до нуля:

$$4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$$

Після цього визначимо знак похідної на кожному з інтервалів, на які розбивають область визначення функції знайдені критичні точки, і дослідимо функцію на монотонність та екстремуми (рис. 15.7).

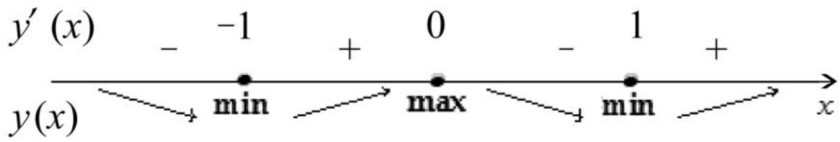

Рис. 15.7

Звідси випливає, що функція $y(x)$ зростає в інтервалах $(-1;0)\cup(1;+\infty)$ і спадає в інтервалах $(-\infty;-1)\cup(0;1)$; отже $x_1 = 0$ є точкою максимуму, $x_2 = 1$ та $x_3 = -1$ є точками мінімуму заданої функції, звідки остаточно знаходимо екстремуми цієї функції: $y(0) = -8$ – максимум функції; $y(1) = y(-1) = -9$ – мінімуми функції.

2. Для визначення інтервалів опуклості та увігнутості, знаходимо другу похідну заданої функції:

$$y'' = (4x^3 - 4x)' = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1),$$

яка існує на всій числовій прямій. Знайдемо критичні точки другого порядку, прирівнявши другу похідну до нуля: $4(3x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} (\approx \pm 0{,}6).$

Визначаючи знак другої похідної заданої функції на кожному з інтервалів, на які розбивають область визначення функції знайдені критичні точки другого порядку, дослідимо фукцію на опуклість та увігнутість (рис. 15.8).

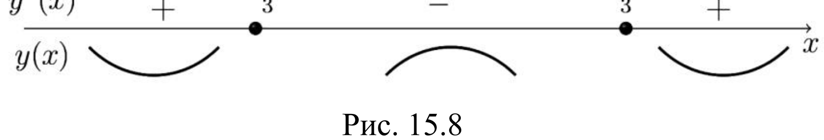

Рис. 15.8

Звідси випливає, що графік заданої функції опуклий в інтервалі $x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ й увігнутий в інтервалі $x\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$, а точки $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ будуть точками перегину графіка функції.

Лекція 16. Застосування диференціального числення для дослідження функцій і побудови їх графіків. Частина 2

16.1. Асимптоти графіка функції

Означення. Пряму ***l*** називають **асимптотою** кривої $y = f(x)$, якщо відстань від змінної точки $M(x, y)$ кривої до цієї прямої прямує до 0, коли точка $M(x, y)$, рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність.

Зауваження. Точка $M(x, y)$ віддаляється по кривій $y = f(x)$ на нескінченність, якщо відстань від точки $M(x, y)$ до початку координат необмежено зростає.

Розрізняють асимптоти двох типів: вертикальні і похилі (рис. 16.1).

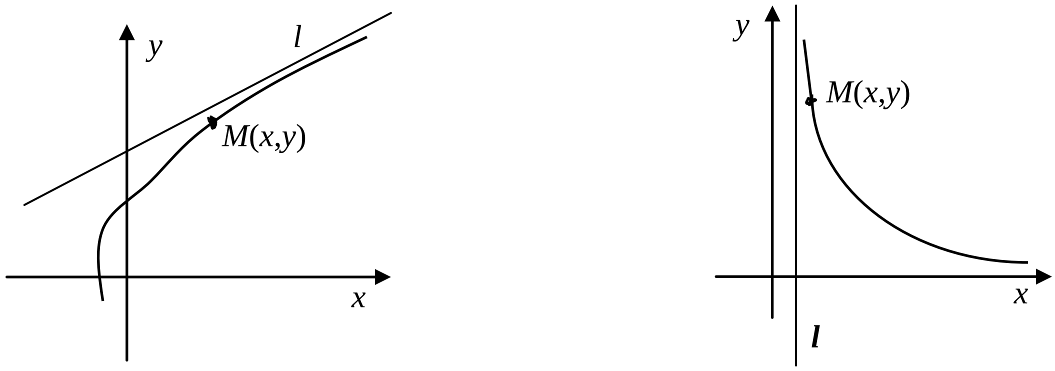

Рис. 16.1

Означення. Пряму $x = a,\ a \in \mathrm{R}$ називають **вертикальною асимптотою** графіка функції $y = f(x)$, якщо виконується принаймні одна з рівностей

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \infty, \tag{16.1}$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty. \tag{16.2}$$

Зауваження. У випадку (16.1) пряму $x = a$ називають **лівосторонньою** вертикальною асимптотою, а у випадку (16.2) – **правосторонньою** вертикальною асимптотою.

Зауваження. Беручи до уваги класифікацію точок розриву, отримуємо висновок: якщо $x=a$ є точкою розриву другого роду функції $y=f\left(x\right)$, то пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y=f\left(x\right)$.

Приклад. Знайти вертикальну асимптоту кривої $y=\dfrac{2}{x-3}$.

Розв'язування. Область визначення функції $y=\dfrac{2}{x-3}$:

$$(-\infty;3)\cup(3;+\infty).$$

Оскільки функція в точці $x=3$ невизначена, то $x=3$ – точка розриву функції. Знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{2}{x-3}=\left[\frac{2}{-0}\right]=-\infty,\ \lim_{x\to 3+0}\frac{2}{x-3}=\left[\frac{2}{+0}\right]=+\infty.$$

Точка $x=3$ – точка розриву другого роду, отже $x=3$ – вертикальна асимптота графіка функції $y=\dfrac{2}{x-3}$.

Приклад. Знайти вертикальну асимптоту кривої $y=e^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язування. Область визначення функції $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Оскільки функція $y=e^{\frac{1}{x}}$ у точці $x=0$ невизначена, то $x=0$ – точка розриву функції.

Знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 0-0}e^{\frac{1}{x}}=\left[e^{-\infty}\right]=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0,\ \lim_{x\to 0+0}e^{\frac{1}{x}}=\left[e^{+\infty}\right]=+\infty.$$

Отже, точка $x=0$ – точка розриву другого роду, тому $x=0$ – правостороння вертикальна асимптота графіка функції $y=e^{\frac{1}{x}}$.

Означення. Пряму $y=kx+b$ називають **похилою асимптотою** неперервної кривої $y=f(x)$ за $x\to+\infty\,(x\to-\infty)$, якщо справедливе представлення $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція за $x \to +\infty \left(x \to -\infty\right)$.

Теорема 16.1 (*умова існування похилої асимптоти*).

Якщо існують скінченні границі

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left(f(x) - kx\right) = b,$$

то пряма $y = kx + b$ – похила асимптота графіка функції $y = f(x)$.

Зауваження. Існування двох скінченних границь у теоремі про умову існування похилої асимптоти суттєве. Якщо хоча б одна із границь не існує або дорівнює нескінченності, то крива похилої асимптоти не має.

Зауваження. За $k = 0$ отримаємо асимптоту $y = b$, яку називають **горизонтальною** асимптотою кривої.

Зауваження. Асимптоти кривої $y = f(x)$ за $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$ можуть бути різні.

Приклад. Знайти асимптоти кривої $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$.

Р о з в ' я з у в а н н я. Область визначення функції $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Оскільки функція $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$ у точці $x = 0$ невизначена, то $x = 0$ – точка розриву функції. Знайдемо односторонні границі. Очевидно,

$$\lim_{\substack{x\to 0-0 \\ (x\to 0+0)}} \frac{x^3+4}{x^2} = \left[\frac{4}{+0}\right] = +\infty.$$

Отже, $x = 0$ – точка розриву другого роду, тому $x = 0$ – вертикальна асимптота графіка функції.

Знайдемо похилу асимптоту за $x \to +\infty$:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{4}{x^3}\right) = 1;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4-x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}=0.$$

Пряма $y=x$ є похилою асимптотою кривої за $x\to+\infty$.

Знайдемо похилу асимптоту за $x\to+\infty$:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x^3}\right)=1;$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+4-x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=0.$$

Отже, пряма $y=x$ є похилою асимптотою кривої і за $x\to-\infty$.

Приклад. Знайти асимптоти кривої $y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$.

Р о з в ’ я з у в а н н я. Оскільки область визначення функції $\left(-\infty;+\infty\right)$, то розглядувана крива не має вертикальних асимптот.

Знайдемо похилу асимптоту за $x\to+\infty$:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{\left(3+x^2\right)x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{3+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{x}}{\frac{3}{x^2}+1}=0;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2}{3+x^2}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{3+x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\frac{3}{x^2}+1}=4.$$

Пряма $y=4$ є горизонтальною асимптотою кривої за $x\to+\infty$.

Знайдемо похилу асимптоту за $x\to+\infty$:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2}{\left(3+x^2\right)x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{3+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4}{x}}{\frac{3}{x^2}+1}=0;$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2}{3+x^2}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2}{3+x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{\frac{3}{x^2}+1}=4.$$

Пряма $y=4$ є горизонтальною асимптотою кривої і за $x\to-\infty$.

Отже, пряма $y=4$ – горизонтальна асимптота кривої $y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$.

Приклад. Знайти похилу асимптоту кривої $y=\dfrac{e^x}{x}$.

Розв'язування. Знайдемо похилу асимптоту за $x\to+\infty$:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(2x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

Оскільки границя є нескінченною, то крива $y=\dfrac{e^x}{x}$ не має похилої асимптоти за $x\to+\infty$.

Знайдемо похилу асимптоту за $x\to+\infty$:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2}=\left[\frac{e^{-\infty}}{+\infty}\right]=\left[\frac{1}{+\infty\cdot e^{+\infty}}\right]=\left[\frac{1}{+\infty}\right]=0;$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x}-0\cdot x\right)=\left[\frac{e^{-\infty}}{-\infty}\right]=\left[\frac{1}{-\infty\cdot e^{+\infty}}\right]=\left[\frac{1}{-\infty}\right]=0.$$

Отже, пряма $y=0$ є горизонтальною асимптотою кривої $y=\dfrac{e^x}{x}$ за $x\to-\infty$.

16.2. Схема повного дослідження функції та побудова графіків

У поняття «дослідження функції» входить процес аналізу її властивостей, а саме ознак сталості та монотонності, екстремумів, опуклості та увігнутості, точок перегину, асимптот. Графік, побудований відповідно до результатів досліджень, дає чітке уявлення про поведінку функції.

Загальна схема дослідження функції і побудова її графіка:

1. Знайти область визначення функції.

2. З'ясувати питання про періодичність, парність або непарність функції.

3. Знайти точки перетину графіка функції з координатними осями та визначити інтервали знакосталості функції.

4. Дослідити функцію на неперервність.

5. Знайти асимптоти графіка функції або довести їх відсутність.

6. Знайти інтервали монотонності та точки екстремуму функції.

7. Знайти інтервали опуклості, увігнутості та точки перегину графіка функції.

8. Використовуючи результати проведеного дослідження, побудувати графік функції.

16.3. Приклади розв'язування типових задач

Приклад. Дослідити функцію $y = \dfrac{x^2 + x - 5}{x - 2}$ і побудувати її графік.

Р о з в ' я з у в а н н я. Проведемо дослідження функції за загальною схемою.

1. Функція існує за будь-якого значення $x \neq 2$. Отже, область визначення функції $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

2. Задана функція неперіодична, а оскільки область визначення не є симетричною щодо 0, то функція є функцією загального вигляду.

3. Знайдемо координати точки перетину графіка функції з віссю Oy. Підставивши у функцію значення $x = 0$, отримаємо

$$y(0) = 2{,}5.$$

Отже, графік функції перетинає вісь *Oy* в точці *A*(0; 2,5). Прирівнявши функцію до нуля і розв'язавши отримане рівняння, знайдемо точки перетину графіка з віссю *Ox*:

$$\frac{x^2+x-5}{x-2}=0 \Rightarrow$$

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}(\approx -2,8); x_2=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}(\approx 1,8).$$

Отже, графік заданої функції претинає вісь *Ox* у двох точках:

$$B\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2};0\right) \text{ та } C\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2};0\right).$$

Знайдемо інтервали знакосталості функції:

$$y(x)>0 \Rightarrow \frac{x^2+x-5}{x-2}>0 \Rightarrow (x^2+x-5)(x-2)>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)(x-2)>0.$$

Визначимо знаки лівої частини нерівності на інтервалах, на які корені поділяють числову вісь (рис. 16.2).

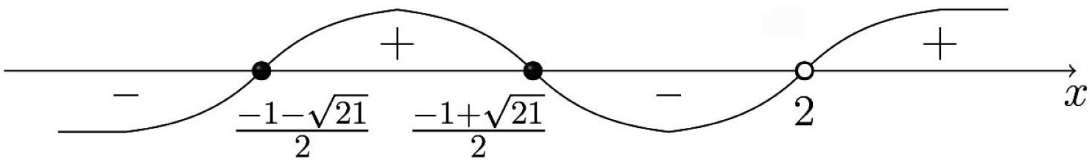

Рис. 16.2

Отже, $y(x) > 0$ за $x\in\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2};\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)\cup(2;+\infty)$. Аналогічно $y(x) < 0$ виконується, коли $x\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2};2\right)$.

4. Знайдемо односторонні границі функції у точці розриву $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2+x-5}{x-2}=-\infty;\quad \lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-x-5}{x-2}=+\infty,$$

звідки випливає, що для цієї функції $x = 2$ є точкою розриву другого роду.

5. Знайдемо асимптоти заданої кривої.

Оскільки функція має розрив другого роду (нескінченний) у точці $x = 2$, то пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою.

Похилі асимптоти графіка функції $y = f(x)$ будемо шукати у вигляді $y = kx + b$, де

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx).$$

Тоді

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-5}{x(x-2)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-5}{x^2-2x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2(1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2})}{x^2(1-\frac{2}{x})}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2})}{(1-\frac{2}{x})}=1;$$

$$b=\left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-5}{(x-2)}-x\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-5-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-5}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(3-\frac{5}{x})}{x(1-\frac{2}{x})}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-\frac{5}{x}}{1-\frac{2}{x}}=3.$$

Отже, пряма $y = x + 3$ є похилою асимптотою графіка цієї функції.

6. Щоб визначити інтервали монотонності, знаходимо похідну функції, користуючись правилами диференціювання і таблицею похідних:

$$y'=\left(\frac{x^2+x-5}{x-2}\right)'=\frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x-5)}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}.$$

Очевидно, що знайдена похідна існує на всій числовій прямій, крім точки $x = 2$. Оскільки в точці $x = 2$ функція невизначена, то ця точка не є критичною точкою заданої функції. Прирівнявши похідну до нуля, знайдемо критичні точки функції:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3.$$

Після цього визначимо знак похідної на кожному з інтервалів, на які розбивають область визначення функції знайдені критичні точки, і дослідимо функцію на монотонність та екстремуми (рис. 16.3).

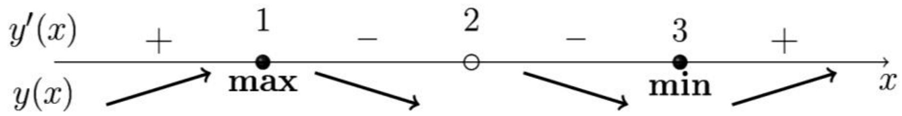

Рис. 16.3

Звідси випливає, що функція $y(x)$ зростає в інтервалах $(-\infty;1) \cup (3;+\infty)$ і спадає в інтервалах $(1;2) \cup (2;3)$; отже, $x_1 = 1$ є точкою максимуму, $x_2 = 3$ є точкою мінімуму заданої функції; звідси остаточно знаходимо екстремуми цієї функції: $y(1) = 3$ – максимум функції, який досягається в точці $M_1(1;3)$; $y(3) = 7$ – мінімум функції, який досягається в точці $M_2(3;7)$.

7. Для визначення інтервалів опуклості та увігнутості знаходимо другу похідну заданої функції:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}\right)' =$$

$$= \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x+3)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{(2x-4)(x-2) - 2(x^2-4x+3)}{(x-2)^3} = \frac{2}{(x-2)^3}.$$

Знайдена похідна існує на всій числовій прямій, крім точки $x = 2$, але в точці $x = 2$ функція невизначена, отже, ця точка не є критичною точкою другого порядку. Очевидно, що $y'' \neq 0$ за будь-якого значення. Таким чином встановлено, що задана функція не має критичних точок другого порядку, а тому її графік не має точок перегину.

Визначимо знак другої похідної заданої функції на її області визначення (рис. 16.4).

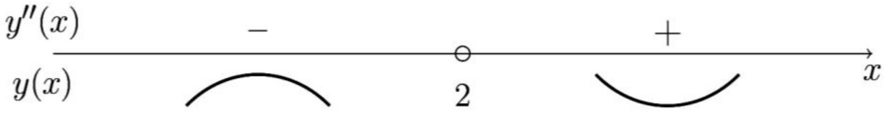

Рис. 16.4

Звідси випливає, що графік заданої функції опуклий, коли $x\in(-\infty;2)$, й увігнутий за $x\in(2,+\infty)$.

8. Побудуємо графік функції. Спочатку в системі координат Oxy будуємо асимптоти кривої, тобто прямі $x = 2$ та $y = x + 3$; наносимо точки перетину з координатними осями $A(0;\ 2{,}5)$, $B\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2};0\right)$, $C\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2};0\right)$ і точки екстремумів $M_1(1;3)$, $M_2(3;7)$. Тепер відповідно до дослідження проводимо гладкі криві – вони і визначають графік функції, який наочно ілюструє її властивості (рис. 16.5).

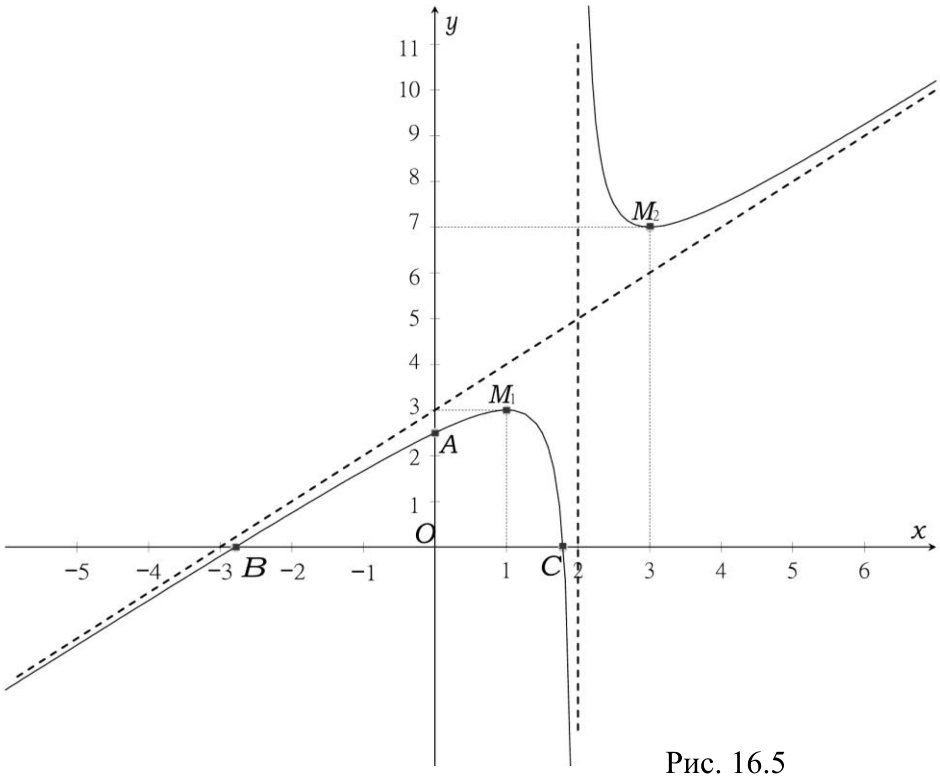

Рис. 16.5

Приклад. Дослідити функцію $y = x + \text{arctg}x$ і побудувати її графік.

Р о з в ' я з у в а н н я. Проведемо дослідження функції за загальною схемою.

1. Функція існує за будь-якого значення x. Отже, область визначення функції $x \in (-\infty;+\infty)$.

2. Задана функція неперіодична. Оскільки область визначення функції є симетричною відносно точки $x = 0$, то перевіримо її на парність та непарність. Для цього знайдемо

$$y(-x) = -x + \text{arctg}(-x) = -(x + \text{arctg}x) = -y(x).$$

Отже, функція непарна і її графік симетричний відносно точки початку координат.

3. Знайдемо координати точки перетину графіка функції з віссю Oy. Підставивши значення $x = 0$, отримаємо $y(0) = 0$. Отже, графік функцій перетинає вісь Oy у точці $O(0;0)$. Знайдемо точки перетину графіка з віссю Ox:

$$x + \text{arctg}x = 0 \Rightarrow -x = \text{arctg}x.$$

Отримане рівняння розв'язуємо графічно (рис. 16.6).

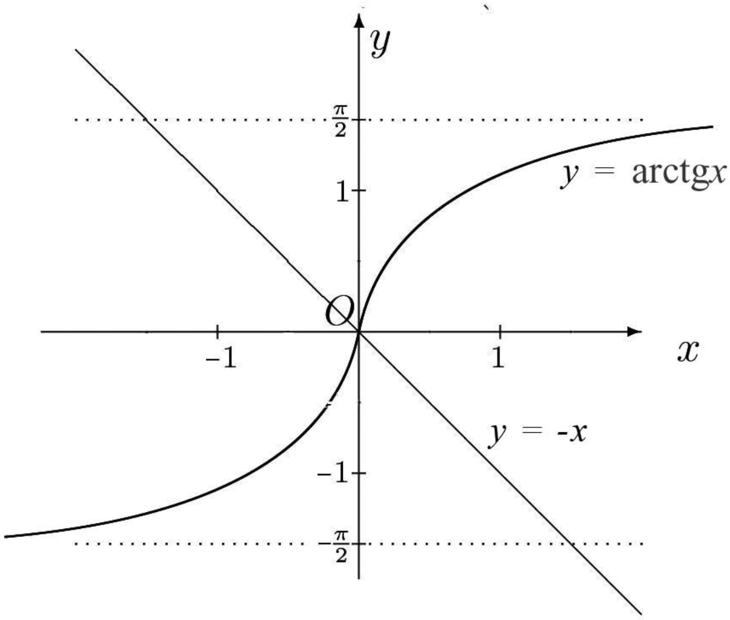

Рис. 16.6

З рис.16.6 видно, що існує єдина точка перетину графіків функцій $y = -x$ і $y = \text{arctg}x$, а це свідчить про існування розв'язку $x = 0$.

Отже, точка $O(0;\, 0)$ – точка перетину графіка функції з віссю Ox.

Знайдемо інтервали знакосталості функції. Із рис. 16.6 випливає, що $\text{arctg}x$ має знак свого аргумента ($\text{arctg}x > 0$, коли $x > 0$ та $\text{arctg}x < 0$, за $x < 0$), отже для заданої функції маємо $y(x) > 0$ за $x \in (0;+\infty)$ та $y(x) < 0$ виконується за $x \in (-\infty;0)$.

4. Функція неперервна на всій числовій осі.

5. Знайдемо асимптоти заданої кривої. Вертикальних асимптот немає, бо функція неперервна на множині $(-\infty;+\infty)$. Похилі асимптоти графіка функції будемо шукати у вигляді $y = kx + b$.

Знайдемо похилу асимптоту за $x \to +\infty$:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\text{arctg}x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\text{arctg}x}{x}\right) = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\text{arctg}x-1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty}\text{arctg}x = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, $y = x+\dfrac{\pi}{2}$ – права похила асимптота графіка функції.

Знайдемо похилу асимптоту за $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+\text{arctg}x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\text{arctg}x}{x}\right) = 1;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\text{arctg}x-1\cdot x\right) = \lim_{x\to-\infty}\text{arctg}x = -\frac{\pi}{2}.$$

Отже, $y = x-\dfrac{\pi}{2}$ – ліва похила асимптота графіка функції.

6. Для визначення інтервалів монотонності знаходимо похідну функції, користуючись правилами диференціювання і таблицею похідних:

$$y' = (x + \mathrm{arctg}x)' = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Очевидно, що похідна існує на всій числовій прямій, є строго додатною, тому функція $y(x)$ зростає на всій числовій осі.

7. Для визначення інтервалів опуклості та увігнутості знаходимо другу похідну заданої функції:

$$y'' = \left(1 + \frac{1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Друга похідна існує на всій числовій прямій. Знайдемо критичні точки другого порядку, прирівнявши другу похідну до нуля, маємо точку $x = 0$. Визначаючи знак другої похідної заданої функції на кожному з інтервалів, на які розбиває область визначення функції знайдена критична точка другого порядку, дослідимо фукцію на опуклість та увігнутість (рис. 16.7).

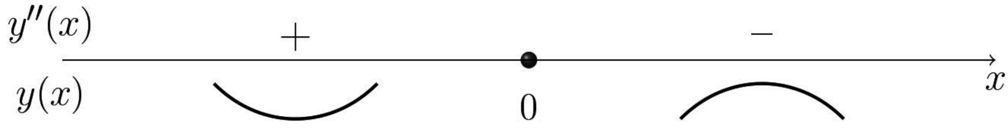

Рис. 16.7

Звідси випливає, що графік заданої функції опуклий в інтервалі $x \in (0; +\infty)$ й увігнутий в інтервалі $x \in (-\infty; 0)$, а точка $x = 0$ буде точкою перегину, причому $y(0) = 0$. Отже, точкою перегину на кривій буде точка $O(0;0)$.

8. Побудуємо графік функції. Спочатку в системі координат Oxy будуємо асимптоти кривої, тобто прямі $y = x \pm \frac{\pi}{2}$, далі відмічаємо точки перетину з координатними осями $O(0;0)$ і будуємо графік за результатами дослідження (рис. 16.8).

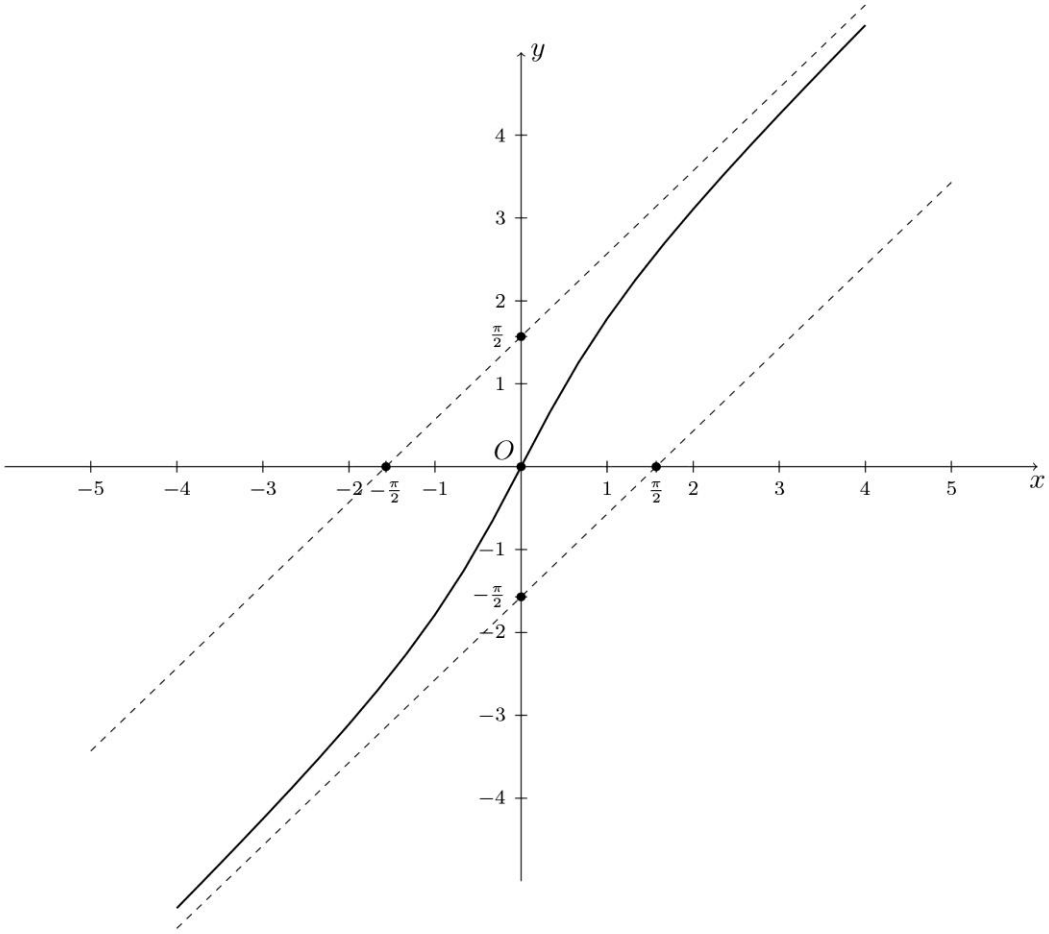

Рис. 16.8

Запитання для самоперевірки до розділу 5

1. Які задачі приводять до поняття похідної?
2. Як можна дати означення похідної?
3. Який геометричний та фізичний зміст похідної?
4. Як формулюють теорему про неперервність диференційованої функці?
5. Які існують правила знаходження похідної суми, різниці, добутку та частки двох функцій?
6. Як знайти похідну складеної функції?
7. Як виглядає таблиця похідних основних елементарних та гіперболічних функцій?
8. Який вигляд мають рівняння дотичної та нормалі до графіка функції?
9. Що таке логарифмічне диференціювання?
10. Як можна сформулювати правила диференціювання функцій, заданих неявно та параметрично?
11. Що називають диференціалом і в чому полягає його геометричний зміст?
12. Які існують правила знаходження диференціалів?
13. Як визначають та позначають похідні та диференціали вищих порядків?
14. Як формулюють теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші? В чому полягає правило Лопіталя?
15. Як досліджують функцію на зростання та спадання за допомогою першої похідної?
16. Що називають екстремумом функції? Як формулюють необхідну та достатню умови існування екстремуму?
17. Що таке опуклість та увігнутість графіка функції? Як визначають характер опуклості та увігнутісті функції за допомогою другої похідної?
18. Що називають точкою перегину кривої? Як формулюють достатню умову існування точки перегину?
19. Що таке асимптоти графіка функції? Якими бувають асимптоти і як знаходити їх рівняння

Розділ 6. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Лекція 17. Елементи диференціального числення функції багатьох змінних

17.1. Означення функції багатьох змінних. Лінії та поверхні рівня

Означення. Якщо існує закон, згідно з яким кожній парі дійсних чисел (***x, y***) із деякої множини D поставлено у відповідність рівно одне значення змінної z з області E, то кажуть, що на множині D задано функцію двох незалежних змінних ***x*** та ***y*** із значеннями в E і це записують $z = f(x, y)$.

При цьому D – область визначення, E – область значень функції.

Геометрично область визначення функції двох незалежних змінних являє собою або обмежену частину площини Oxy, або сукупність кількох частин площини Oxy, або всю площину.

Геометричним зображенням функції $z = f(x, y)$ у прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ є деяка поверхня.

Приклад. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Розв'язування.

$$D: 9 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9,$$

таким чином, областю визначення функції є круг із центром у точці $O(0;0)$ і радіусом $R = 3$ (рис. 17.1).

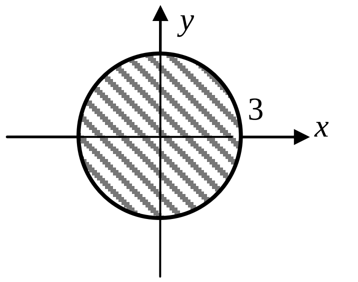

Рис.17.1

Приклад. Знайти область визначення функції $z = \ln(y - x)$.

Розв'язування. $D: y - x > 0 \Leftrightarrow y > x$, таким чином, областю визначення функції є частина площини над прямою $y = x$ (рис. 17.2).

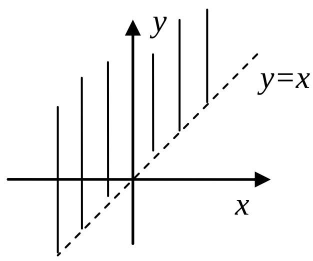

Рис. 17.2

Означення. **Лінією рівня** функції $z = f(x, y)$ називають проекцію на площину Oxy лінії перетину поверхні $z = f(x, y)$ площиною $z = c$. Рівняння лінії рівня $f(x, y) = c$.

Знаючи лінії рівня, легко дослідити характер поверхні (використовують на топографічних картах).

Приклад. Знайти лінії рівня функції $z = x^2 + y^2$.

Розв'язування. Маємо рівняння параболоїда з вершиною в точці $O(0;0;0)$ (рис. 17.3).

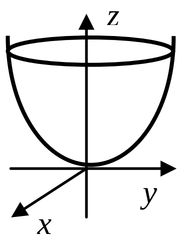

Рис. 17.3

Щоб знайти лінії рівня функції $z = x^2 + y^2$, розглянемо рівняння $x^2 + y^2 = c$.

За $c = 0$: $x^2 + y^2 = 0$ – точка $O(0;0)$;

за $c > 0$: $x^2 + y^2 = c$ – сімейство кіл із центром у точці $O(0;0)$ (рис. 17.4).

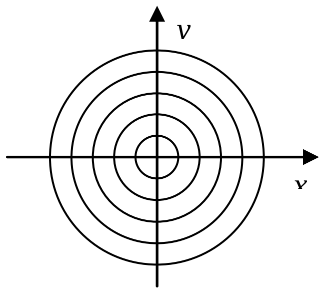

Рис. 17.4

Зауваження. Аналогічно означенню функції двох змінних визначають функцію трьох незалежних змінних $u = f(x, y, z)$. Область визначення цієї функції можна геометрично зобразити у вигляді деякої частини тривимірного простору, але сама функція $u = f(x, y, z)$ не має геометричного зображення у нашому тривимірному просторі. Функція трьох незалежних змінних може мати фізичний зміст, наприклад $\rho = \rho(x, y, z)$ – змінна густина деякої речовини в об'ємній області Ω.

Означення. **Поверхнею рівня** функції $u = f(x, y, z)$ називають поверхню $f(x, y, z) = c$, у точках якої функція $u = f(x, y, z)$ набуває одного й того самого значення $u = c$.

Зауваження. Надалі будемо розглядати функції двох змінних, тому що результати для функцій двох змінних за аналогією легко узагальнити на випадок функції довільного скінченного числа незалежних змінних.

17.2. Частинні похідні

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена у точці $M(x, y)$ і в деякому околі цієї точки.

Означення. Частинним приростом функції $z = f(x, y)$ **за змінною** x називають вираз

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Означення. Частинним приростом функції $z = f(x,\, y)$ **за змінною** y називають вираз

$$\Delta_y z = f\left(x,\, y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right).$$

Означення. Повним приростом функції $z = f(x,\, y)$ називають вираз

$$\Delta z = f\left(x + \Delta x,\, y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right).$$

Означення. Якщо існує границя відношення частинного приросту $\Delta_x z$ функції $z = f(x,\, y)$ до приросту аргумента Δx за умови, що $\Delta x \to 0$, то цю границю називають **частинною похідною** функції $z = f(x,\, y)$ **за змінною** x, що записують:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x,\, y) - f(x,\, y)}{\Delta x}.$$

Для частинних похідних за змінною x використовують і такі позначення: $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, z'_x, $f'_x\left(x, y\right)$.

Означення. Якщо існує границя відношення частинного приросту $\Delta_y z$ функції $z = f(x,\, y)$ до приросту аргумента Δy за умови, що $\Delta y \to 0$, то цю границю називають **частинною похідною** функції $z = f(x,\, y)$ **за змінною** y що записують:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\, y + \Delta y) - f(x,\, y)}{\Delta y}.$$

Для частинних похідних за змінною y використовують і такі позначення: $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, z'_y, $f'_y\left(x, y\right)$.

Зауваження. З означення частинних похідних випливає, що під час знаходження частинної похідної за змінною x аргумент y вважають сталою величиною, і навпаки, під час знаходження частинної похідної за змінною y аргумент x вважають сталою величиною згідно з означенням.

Приклад. Знайти частинні похідні функції

$$z = 4y^5 + x^3y^4 + 5xy^2 - 3x + 2.$$

Р о з в ' я з у в а н н я.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 + y^4 \cdot 3x^2 + 5y^2 \cdot 1 - 3 + 0 = 3x^2y^4 + 5y^2 - 3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 20y^4 + x^3 \cdot 4y^3 + 5x \cdot 2y - 0 + 0 = 20y^4 + 4x^3y^3 + 10xy.$$

Приклад. Знайти частинні похідні функції

$$z = \operatorname{arctg}(xy) + \cos\frac{y}{x}.$$

Р о з в ' я з у в а н н я.

$$z'_x = \frac{1}{1 + (xy)^2} \cdot y + \left(-\sin\frac{y}{x}\right) \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{y}{1 + x^2y^2} + \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x};$$

$$z'_y = \frac{1}{1 + (xy)^2} \cdot x + \left(-\sin\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{x}{1 + x^2y^2} - \frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}.$$

Зауваження. У випадку функції трьох і більшої кількості змінних під час знаходження похідної від неї за одним із її аргументів усі інші аргументи вважають сталими (змінним є тільки той аргумент, за яким знаходимо похідну).

Приклад. Знайти частинні похідні функції

$$u = x^2ye^{5z} + y^3\left(7x - z^4\right)^5.$$

Р о з в ' я з у в а н н я.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{5z} \cdot 2x + y^3 \cdot 5\left(7x - z^4\right)^4 \cdot 7 = 2xye^{5z} + 35y^3\left(7x - z^4\right)^4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2e^{5z} \cdot 1 + \left(7x - z^4\right)^5 \cdot 3y^2 = x^2e^{5z} + 3y^2\left(7x - z^4\right)^5;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^2y \cdot e^{5z} \cdot 5 + y^3 \cdot 5\left(7x - z^4\right)^4 \cdot \left(-4z^3\right) = 5x^2ye^{5z} - 20y^3z^3\left(7x - z^4\right)^4.$$

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена у точці $M\left(x, y\right)$ і в деякому околі цієї точки.

Означення. Функцію $z = f(x, y)$ називають **диференційованою у точці** $M\left(x, y\right)$, якщо її повний приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\left(\Delta x, \Delta y\right)\Delta x + \beta\left(\Delta x, \Delta y\right)\Delta y,$$

де $A, B \in \mathrm{R}$, $\alpha\left(\Delta x, \Delta y\right)$, $\beta\left(\Delta x, \Delta y\right)$ – нескінченно малі функції за $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0.$

Означення. Частину повного приросту функції $z = f(x, y)$, що лінійно залежить від Δx і Δy, називають **повним диференціалом функції** $z = f(x, y)$ у точці $M\left(x, y\right)$ і позначають dz, тобто

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Доведено, що

$$A = f'_x\left(x, y\right), \;\; B = f'_y\left(x, y\right),$$

тоді

$$dz = f'_x\left(x, y\right)\Delta x + f'_y\left(x, y\right)\Delta y$$

або

$$dz = \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y}\Delta y.$$

Оскільки $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то маємо ще один вигляд для диференціала:

$$dz = f'_x\left(x, y\right)dx + f'_y\left(x, y\right)dy.$$

Зауваження. Диференціал функції трьох незалежних змінних $u = f(x, y, z)$ має вигляд

$$du = f'_x\left(x, y, z\right)dx + f'_y\left(x, y, z\right)dy + f'_z\left(x, y, z\right)dz.$$

17.3. Частинні похідні вищих порядків

Оскільки для функції $z = f(x, y)$ частинні похідні z'_x, z'_y також є функціями від x та y, то від них теж можна знаходити частинні похідні. Їх позначають так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

або $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy}$.

Таким чином, функція двох незалежних змінних $z = f(x, y)$ має дві частинні похідні першого порядку і чотири частинні похідні другого порядку.

Означення. Частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ називаються **мішаними**.

Теорема 17.1 (про мішані похідні). Якщо функція $z = f(x, y)$ та її частинні похідні $z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$ визначені й неперервні у точці $M(x, y)$ і в деякому околі цієї точки, тоді мішані частинні похідні у точці $M(x, y)$ рівні, тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{ або } z''_{xy} = z''_{yx}.$$

Приклад. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln\left(x + e^{-y}\right)$.

Розв'язування.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + e^{-y}} \cdot 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + e^{-y}} \cdot e^{-y} \cdot (-1) = -\frac{e^{-y}}{x + e^{-y}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x+e^{-y}}\right)=-\frac{1}{\left(x+e^{-y}\right)^2}\cdot 1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+e^{-y}}\right)=-\frac{1}{\left(x+e^{-y}\right)^2}\cdot e^{-y}\cdot(-1)=\frac{e^{-y}}{\left(x+e^{-y}\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{e^{-y}}{x+e^{-y}}\right)=-e^{-y}\cdot\left(-\frac{1}{\left(x+e^{-y}\right)^2}\right)\cdot 1=\frac{e^{-y}}{\left(x+e^{-y}\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{e^{-y}}{x+e^{-y}}\right)=-\frac{e^{-y}\cdot(-1)\cdot\left(x+e^{-y}\right)-e^{-y}\cdot\left(e^{-y}\right)\cdot(-1)}{\left(x+e^{-y}\right)^2}=$$

$$=-\frac{-xe^{-y}-e^{-2y}+e^{-2y}}{\left(x+e^{-y}\right)^2}=\frac{xe^{-y}}{\left(x+e^{-y}\right)^2}.$$

Таким чином, під час знаходження частинних похідних другого порядку функції двох незалежних змінних $z=f(x,\,y)$ достатньо знайти три частинні похідні другого порядку: $z''_{xx},\ z''_{xy},\ z''_{yy}$.

Згідно з теоремою про рівність мішаних похідних робимо висновок, що під час знаходження частинних похідних третього порядку функції двох незалежних змінних $z=f(x,\,y)$ достатньо знайти чотири частинні похідні третього порядку: $z'''_{xxx},\ z'''_{xxy},\ z'''_{xyy},\ z'''_{yyy}$.

Приклад. Знайти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$ для функції $z=e^{xy^2}$.

Розв’язування.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy^2}\cdot y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{xy^2}\cdot 2xy\cdot y^2+e^{xy^2}\cdot 2y=2e^{xy^2}\left(xy^3+y\right);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=2e^{xy^2}\cdot 2xy\cdot\left(xy^3+y\right)+2e^{xy^2}\left(3xy^2+1\right)=2e^{xy^2}\left(2x^2y^4+5xy^2+1\right).$$

Зауваження. Для функції трьох незалежних змінних $u = f(x, y, z)$ маємо три частинні похідні першого порядку: u'_x, u'_y, u'_z, а під час знаходження частинних похідних другого порядку функції трьох незалежних змінних достатньо знайти шість частинних похідних другого порядку: $u''_{xx}, u''_{yy}, u''_{zz}, u''_{xy}, u''_{xz}, u''_{yz}$.

17.4. Диференціали вищих порядків

Нехай $z = f(x, y)$, де x, y – незалежні змінні, тоді диференціал цієї функції $dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$ також є функцією від x, y, тому від диференціала можна знаходити диференціал.

Означення. Диференціал від диференціала першого порядку функції $z = f(x, y)$ називають **другим диференціалом** або **диференціалом другого порядку** і позначають d^2z, отже:

$$d^2z = d(dz) = d\left(f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy\right) =$$

$$d\left(f'_x(x, y)dx\right) + d\left(f'_y(x, y)dy\right) =$$

$$= d\left(f'_x(x, y)\right)dx + d\left(f'_y(x, y)\right)dy = \left(f''_{xx}(x, y)dx + f''_{xy}(x, y)dy\right)dx +$$

$$+\left(f''_{yx}(x, y)dx + f''_{yy}(x, y)dy\right)dy = f''_{xx}(x, y)dx^2 +$$

$$\underline{+f''_{xy}(x, y)dydx} + \underline{f''_{yx}(x, y)dxdy} + f''_{yy}(x, y)dy^2 =$$

$$= f''_{xx}(x, y)dx^2 + 2f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{yy}(x, y)dy^2.$$

Таким чином,

$$d^2z = f''_{xx}(x, y)dx^2 + 2f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{yy}(x, y)dy^2.$$

Аналогічно можна отримати диференціал третього порядку d^3z як $d\left(d^2z\right)$:

$$d^3z = f'''_{xxx}(x, y)dx^3 + 3f'''_{xxy}(x, y)dx^2dy + 3f'''_{xyy}(x, y)dxdy^2 + f'''_{yyy}(x, y)dy^3.$$

Зауваження. Для функції трьох незалежних змінних $u = f(x, y, z)$ маємо

$$d^2u = f''_{xx}(x, y, z)dx^2 + f''_{yy}(x, y, z)dy^2 + f''_{zz}(x, y, z)dz^2 +$$

$$+2f''_{xy}(x, y, z)dxdy + 2f''_{yz}(x, y, z)dydz + 2f''_{zx}(x, y, z)dzdx.$$

Приклад. Знайти d^2z для функції $z = x\sin^2 y$.

Р о з в ' я з у в а н н я. Знаходимо частинні похідні:

$$z'_x = \sin^2 y,$$

$$z'_y = x \cdot 2\sin y \cdot \cos y = x\sin 2y,$$

$$z''_{xx} = 0,$$

$$z''_{xy} = 2\sin y\cos y = \sin 2y,$$

$$z''_{yy} = x\cos 2y \cdot 2 = 2x\cos 2y.$$

Підставивши отримані вирази у формулу

$$d^2z = f''_{xx}(x, y)dx^2 + 2f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{yy}(x, y)dy^2,$$

отримуємо

$$d^2z = 0 \cdot dx^2 + 2 \cdot \sin 2ydxdy + 2x\cos 2ydy^2 = 2\left(\sin 2ydxdy + x\cos 2ydy^2\right).$$

Лекція 18. Деякі застосування частинних похідних

18.1. Скалярне поле та його основні характеристики

Означення. Якщо кожній точці M деякої області $\Omega \subset R^3$ поставлено у відповідність деяку скалярну величину $u = u\left(M\right)$, то кажуть, що в цій області простору задано **скалярне поле**.

Прикладами скалярного поля є: поле температури певного тіла, поле густини певного неоднорідного середовища, поле вологості повітря, поле атмосферного тиску.

У декартовій системі координат задати просторове скалярне поле означає задати одну функцію трьох незалежних змінних: $u\left(M\right) = f\left(x, y, z\right)$ (або задати одну функцію двох незалежних змінних $z = f(x, y)$ у випадку плоского скалярного поля).

Похідна за напрямом

Для характеристики швидкості зміни скалярного поля в заданому напрямку введемо поняття похідної за напрямом.

Нехай задано скалярне поле $u = f\left(x, y, z\right)$. Припустимо, що функція $u = f\left(x, y, z\right)$ неперервна і має неперервні частинні похідні за своїми аргументами в деякій області $\Omega \subset R^3$.

Візьмемо довільну точку $M\left(x, y, z\right)$ у цій області й проведемо з цієї точки вектор $\vec{s}$, напрямок якого у просторі визначають ортом:

$$\vec{e}_{\vec{s}} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}.$$

На цьому напрямку візьмемо точку $M_1\left(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z\right)$. Після переходу від точки $M\left(x, y, z\right)$ до точки $M_1\left(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z\right)$ отримаємо приріст

$$\Delta s = \left|MM_1\right| = \sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2 + \left(\Delta z\right)^2},$$

тобто функція $u = f\left(x, y, z\right)$ отримає повний приріст, який за аналогією з повним приростом функції двох змінних запишемо у вигляді

$$\Delta u = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\Delta z +$$

$$+\alpha(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta y + \gamma(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta z,$$

де $\alpha(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$, $\beta(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$, $\gamma(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ – нескінченно малі функції за $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0,\ \Delta z \to 0.$

Означення. Якщо існує границя відношення приросту Δu функції $u = f(x,y,z)$ до приросту Δs за умови, що $\Delta s \to 0$, то таку границю називають **похідною** від функції $u = f(x,y,z)$ **за напрямком** $\vec{s}$ і це записують

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s}.$$

Враховуючи, що $\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha,\ \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta,\ \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma$, знаходимо границю та отримуємо формулу для знаходження похідної за напрямком:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (18.1)$$

Приклад. Знайти похідну від функції $u = x^2y + y^2z + z^2x$ у точці $M_1(1;\ 0;\ 2)$ за напрямом до точки $M_2(2;\ -3;\ 3)$.

Розв'язування. $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{1,-3,1\}$, тоді $\left|\vec{s}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{11}.$

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{s}$ за формулами

$$\cos\alpha = \frac{x_{\vec{s}}}{\left|\vec{s}\right|},\ \cos\beta = \frac{y_{\vec{s}}}{\left|\vec{s}\right|},\ \cos\gamma = \frac{z_{\vec{s}}}{\left|\vec{s}\right|},$$

маємо

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{11}},\ \cos\beta = \frac{-3}{\sqrt{11}},\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Знайдемо частинні похідні від функції $u = x^2y + y^2z + z^2x$ та їхні значення у точці $M_1(1;\,0;\,2)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_1} = 2xy + z^2\Big|_{M_1(1;\,0;\,2)} = 2\cdot 1\cdot 0 + 2^2 = 4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_1} = x^2 + 2yz\Big|_{M_1(1;\,0;\,2)} = 1^2 + 2\cdot 0\cdot 2 = 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_1} = y^2 + 2zx\Big|_{M_1(1;\,0;\,2)} = 0 + 2\cdot 2\cdot 1 = 4.$$

Підставляючи знайдені значення у формулу (18.1) , отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 4\cdot\frac{1}{\sqrt{11}} + 1\cdot\left(\frac{-3}{\sqrt{11}}\right) + 4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right) = \frac{4-3+4}{\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}.$$

Зауваження. Частинні похідні є частинним випадком похідної за напрямком. Справді, якщо напрямок $\vec{s}$ збігається з напрямком осі Ox, то

$$\alpha = 0,\ \beta = \frac{\pi}{2},\ \gamma = \frac{\pi}{2},$$

звідки

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогічно, якщо напрямок $\vec{s}$ збігається з напрямком осі Oy:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

а якщо напрямок $\vec{s}$ збігається з напрямком осі Oz:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Зауваження. У випадку функції двох змінних $z = f(x, y)$ для знаходження похідної за напрямком маємо формулу

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$$

або

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

оскільки $\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$

Зауваження. Похідна за напрямком показує швидкість зміни скалярного поля $u = f(x, y, z)$ ***у точці*** $M(x, y, z)$ ***за напрямком вектора*** $\vec{s}$**.**

Градієнт скалярного поля

Означення. **Градієнтом** скалярного поля $u = f(x, y, z)$ у точці $M(x, y, z)$ називають вектор із початком у точці $M(x, y, z)$, координатами якого є частинні похідні функції $u = f(x, y, z)$, тобто

$$\mathrm{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Зауваження. Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ градієнт знаходять за формулою $\mathrm{grad}z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$.

Приклад. Знайти градієнт функції $u = \ln\left(x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z\right)$.

Р о з в ’ я з у в а н н я. Знайдемо частинні похідні від функції u:

$$u'_x = \left(\ln(x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z)\right)'_x = \frac{2x + 1}{x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z},$$

$$u'_y = \left(\ln(x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z)\right)'_y = \frac{-2y - 1}{x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z},$$

$$u'_z = \left(\ln(x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z)\right)'_z = \frac{2z+2}{x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z},$$

$$\mathrm{grad}u = \frac{(2x+1)\vec{i}}{x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z} - \frac{(2y+1)\vec{j}}{x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z} +$$

$$+\frac{(2z+2)\vec{k}}{x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z},$$

$$\mathrm{grad}u = \frac{(2x+1)\vec{i} - (2y+1)\vec{j} + (2z+2)\vec{k}}{x^2 - y^2 + z^2 + x - y + 2z}.$$

Приклад. Знайти градієнт функції $u = x^2y^3z - 3z^2y$ у точці $A(1;2;-1)$.

Розв'язування. Знайдемо частинні похідні від функції u та їхні значення у точці $A(1;2;-1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = 2xy^3z\Big|_{A(1,2,-1)} = 2\cdot 1\cdot 8\cdot(-1) = -16,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = 3x^2y^2z - 3z^2\Big|_{A(1,2,-1)} = 3\cdot 1\cdot 4\cdot(-1) - 3(-1)^2 = -12 - 3 = -15.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A = x^2y^3 - 6zy\Big|_{A(1,2,-1)} = 1\cdot 8 - 6(-1)\cdot 2 = 8 + 12 = 20.$$

Отримаємо: $\mathrm{grad}u = -16\vec{i} - 15\vec{j} + 20\vec{k}.$

Теорема 18.1 (про зв'язок градієнта і похідної за напрямком).

Похідна функції $u = f(x, y, z)$ у точці $M(x, y, z)$ за напрямком вектора $\vec{s}$ дорівнює проекції градієнта функції у цій точці на вектор $\vec{s}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial s} = np_{\vec{s}}\mathrm{grad}u.$$

Властивості градієнта

1. Градієнт у кожній точці вказує той напрямок, похідна за яким буде мати найбільше значення:

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)\right|_{\max} = |\mathrm{grad}u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Інакше кажучи, швидкість зростання скалярного поля в довільній точці є максимальною у напрямку градієнта.

2. Похідна за напрямком вектора, який перпендикулярний до градієнта, дорівнює нулю.

Інакше кажучи, швидкість зміни скалярного поля у напрямку, перпендикулярному до градієнта, дорівнює нулю, тобто скалярне поле залишається сталим.

3. Градієнт у кожній точці скалярного поля $z = f(x, y)$ перпендикулярний до лінії рівня $f(x, y) = c$, яка проходить через цю точку.

4. Градієнт у кожній точці скалярного поля $u = f(x, y, z)$ перпендикулярний поверхні рівня $f(x, y, z) = c$, яка проходить через цю точку.

Рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні

Означення. **Дотичною площиною** до поверхні $f(x, y, z) = 0$ у точці $M(x_0, y_0, z_0)$ називають площину, якій належать дотичні до всіх кривих, що проходять через точку $M(x_0, y_0, z_0)$.

Означення. **Нормаллю** до поверхні $f(x, y, z) = 0$ у точці $M(x_0, y_0, z_0)$ називають пряму , що проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно дотичній площині.

Знайдемо рівняння дотичної площини і нормалі у точці $M(x_0, y_0, z_0)$ до поверхні, яка задана рівнянням $f(x, y, z) = 0$. Згідно із властивостями вектор-градієнт буде перпендикулярний до лінії рівня у точці $M(x_0, y_0, z_0)$, а отже, і до дотичної площини. Таким чином, будемо використовувати рівняння площини, що проходить через задану точку, перпендикулярно заданому вектору:

$$\vec{n} = \{A, B, C\}: \ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Як вектор нормалі будемо використовувати вектор-градієнт, тоді рівняння дотичної площини до поверхні $f(x, y, z) = 0$ у точці $M(x_0, y_0, z_0)$ матиме вигляд

$$f'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + f'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

Щоб скласти рівняння нормалі, скористаємося канонічним рівнянням прямої у просторі $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$, а як напрямний вектор $\{l, m, n\}$ прямої використаємо вектор-градієнт, тоді рівняння нормалі до поверхні $f(x, y, z) = 0$ у точці $M(x_0, y_0, z_0)$ матиме вигляд

$$\frac{x - x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{f'_z(M_0)}.$$

18.2. Векторне поле та його основні характеристики

Означення. Якщо кожній точці M деякої області $\Omega \subset R^3$ поставлено у відповідність деяку векторну величину $\vec{F} = \vec{F}(M)$, то кажуть, що в цій частині простору задано **векторне поле.**

Прикладами векторного поля є: поле швидкості рідини чи газу в каналах і апаратах, поле магнітної сили.

У декартовій системі координат задати просторове векторне поле означає задати три функції трьох незалежних змінних:

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

або дві функції двох незалежних змінних у випадку плоского векторного поля:

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}.$$

Потенціал – одна з характеристик векторних полів.

Означення. Якщо існує така скалярна функція $u = f\left(x, y, z\right)$, що $\vec{F} = \mathrm{grad}u$, тобто $\vec{F} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, то функцію u називають **потенціалом** векторного поля $\vec{F}$, а саме векторне поле $\vec{F}$ називають **потенціальним**.

Інакше кажучи, векторне поле називають потенціальним, якщо воно збігається з полем градієнта деякого скалярного поля.

Розглянемо векторне поле

$$\vec{F}\left(x, y, z\right) = P\left(x, y, z\right)\vec{i} + Q\left(x, y, z\right)\vec{j} + R\left(x, y, z\right)\vec{k}.$$

Означення. **Дивергенцією** векторного поля $\vec{F}$ називають скалярну величину, яку знаходять за формулою

$$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Означення. Векторне поле називають **соленоїдальним** (трубчастим), якщо $\mathrm{div}\vec{F} = 0$.

Означення. **Ротором** векторного поля $\vec{F}$ називають вектор

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k},$$

який легше запам’ятати, записавши його у символічній формі:

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Ротор використовують для перевірки векторного поля на потенціальність. Якщо $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$, то векторне поле є потенціальним.

Приклад. Знайти дивергенцію і ротор векторного поля

$$\vec{F} = (x+z)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + \left(x^2 - 2z\right)\vec{k}.$$

Р о в ’ я з у в а н н я. Оскільки, $\operatorname{div}\vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$, то маємо:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial(x+z)}{\partial x} + \frac{\partial(y+z)}{\partial y} + \frac{\partial\left(x^2-2z\right)}{\partial z} = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Отже, $\operatorname{div}\vec{F} = 0$, тобто векторне поле

$$\vec{F} = (x+z)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + \left(x^2 - 2z\right)\vec{k}$$

є соленоїдальним.

Знайдемо $\operatorname{rot}\vec{F}$:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+y & y+z & x^2-2z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial\left(x^2-2z\right)}{\partial y} - \frac{\partial(y+z)}{\partial z}\right) -$$

$$-\vec{j}\left(\frac{\partial\left(x^2-2z\right)}{\partial x} - \frac{\partial(x+y)}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial(y+z)}{\partial x} - \frac{\partial((x+y))}{\partial y}\right) =$$

$$= \vec{i}(0-1) - \vec{j}(2x-0) + \vec{k}(0-1) = -\vec{i} - 2x\vec{j} - \vec{k}.$$

Таким чином, $\operatorname{rot}\vec{F} = -\vec{i} - 2x\vec{j} - \vec{k}$, отже розглядуване векторне поле не є потенціальним.

Зауваження. Для спрощення запису понять і формул з теорії скалярних і векторних полів було введено символічний вектор ∇:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

який називають **оператором Гамільтона** або оператором **набла**.

За допомогою ∇ вирази для градієнта скалярного поля, дивергенції і ротора векторного поля можна записати наступним чином:

$$\mathrm{grad}\, u = \nabla u,$$

$$\mathrm{div}\vec{F} = \left(\nabla, \vec{F}\right),$$

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \left[\nabla, \vec{F}\right].$$

Запитання для самоперевірки до розділу 6

1. Що таке область визначення, лінії рівня та графік для функції двох змінних?
2. Що таке частинні похідні функції багатьох змінних? За якими правилами їх знаходять?
3. Що таке частинні похідні другого порядку функції двох змінних?
4. Які частинні похідні другого порядку називають мішаними? Як формулюють теорему про мішані частинні похідні?
5. Що називають повним диференціалом функції двох змінних?
6. Яка формула для знаходження диференціала другого порядку функції двох змінних?
7. Що називають плоским та просторовим скалярним полем?
8. За якою формулою знаходять похідну за напрямком?
9. Що називають градієнтом скалярного поля?
10. Як записати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні?
11. Що називають плоским та просторовим векторним полем?
12. Що називають потенціалом векторного поля? Які векторні поля називають потенціальними?
13. Що називають дивергенцією векторного поля?
14. Які векторні поля називають соленоїдальними?
15. Що називають ротором векторного поля?

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних. Прикладні задачі : навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – Київ : Книги України ЛТД, 2014. – 578 с.

2. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : Ігнатекс–Україна, 2013. – 648 с.

3. Петренко М. П. Курс лінійної алгебри та аналітичної геометрії : навч. посіб. / М. П. Петренко, О. П. Бойчук, Л. Г. Авраменко, В. В. Ясінський. – Київ : ІЗМН, 2000. – 224 с.

4. Шкіль М. І. Вища математика : підруч. для студ. вищ. пед. навч. закл. У 2-х кн. Кн. 1 / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – Київ : Либідь, 2010. – 592 с.

5. Вища математика. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної : зб. задач до розрахунк. роботи та приклади розв’язування типових задач [Електрон. ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спец. 161 «Хімічні технології та інженерія», 162 «Біотехнології та біоінженерія» / уклад. : О. Б. Качаєнко, О. О. Коваль, О. Б. Поліщук, В. І. Стогній; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові данні. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 117 с. – Режим доступу : https://ela.kpi.ua/handle/123456789/48741 – Назва з екрана.

ЗМІСТ