А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

10

АЛГЕБРА
І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

ГІМНАЗІЯ

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Профільний рівень

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2010

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]
ББК 22.141я721.6
М52

Видано за рахунок державних коштів
Продаж заборонено

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ від 08.06.2010 № 544)

Наукову експертизу проводив
Інститут математики Національної академії наук України

Психолого-педагогічну експертизу проводив
Інститут педагогіки
Національної академії педагогічних наук України

Експерти, які здійснювали експертизу:

О. В. Гордієнко, Фізико-технічний ліцей при Херсонському національному технічному університеті, вчитель, старший вчитель

Т. І. Калепко, СШ № 19 м. Нікополь Дніпропетровської обл., вчитель, вчитель-методист

Г. В. Скрипка, Кіровоградський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені Василя Сухомлинського, методист

Г. П. Досенко, Районний методичний кабінет відділу освіти Білозерської райдержадміністрації Херсонської обл., методист

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : проф. рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2010. — 416 с. : іл.
ISBN 978-966-474-093-4.

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]
ББК 22.141я721.6

ISBN 978-966-474-093-4

Від авторів

ЛЮБІ ДЕСЯТИКЛАСНИКИ!

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — **алгебру і початки аналізу**.

Цей предмет надзвичайно важливий. Мабуть, немає сьогодні такої галузі науки, де б не застосовувалися досягнення цього розділу математики. Фізики та хіміки, астрономи та біологи, географи та економісти, навіть мовознавці та історики використовують «математичний інструмент».

Алгебра і початки аналізу — корисний і дуже цікавий предмет, який розвиває аналітичне і логічне мислення, дослідницькі навички, математичну культуру, кмітливість.

Ви зробили серйозний життєвий крок: вирішили продовжити освіту в профільному класі, де математика вивчається на підвищеному рівні. Ми вітаємо вас з цим вибором і сподіваємося, що ви не розчаруєтеся у своєму рішенні.

Навчатися в профільному класі не просто. Потрібно бути наполегливим і завзятим, уважним і акуратним, при цьому найголовніше — не бути байдужим до математики, а любити цю красиву науку. Сподіваємося, що ви з інтересом будете засвоювати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник розділено на п'ять параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено зірочкою (*)).

Крім того, у підручнику ви зможете прочитати оповідання з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків. Назви цих оповідань надруковано синім кольором.

Дерзайте! Бажаємо успіху!

ШАНОВНІ КОЛЕГИ!

Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з підвищеним рівнем викладання математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає великих зусиль учителя, який формує навчальний матеріал по крихтах, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

Умовні позначення

n° завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

 задачі, у яких отримано результат, що може бути використаний при розв'язуванні інших задач;

▲ закінчення доведення теореми;

 рубрика «Коли зроблено уроки».

§ 1

МНОЖИНИ. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

1 Множина та її елементи

Ми часто говоримо: косяк риб; зграя птахів; рій бджіл; колекція марок; зібрання картин; набір ручок; букет квітів; компанія друзів; парк машин; отара овець.

Якщо в цих парах перетасувати перші слова, то може вийти смішно. Наприклад, букет овець, косяк картин, колекція друзів тощо. Водночас такі словосполучення, як колекція риб, колекція картин, колекція ручок, колекція машин тощо, достатньо прийнятні. Справа в тому, що слово «колекція» досить універсальне. Однак у математиці є більш всеосяжне слово, яким можна замінити будь-яке з перших слів у наведених парах. Це слово **множина**.

Наведемо ще кілька прикладів множин:

- множина учнів вашого класу;
- множина планет Сонячної системи;
- множина двоцифрових чисел;
- множина пар чисел $(x;\ y)$, які є розв'язками рівняння $x^2 + y^2 = 1$.

Окремі найважливіші множини мають загальноприйняті назви та позначення:

- множина точок площини — **геометрична фігура**;
- множина точок, яким притаманна певна властивість, — **геометричне місце точок (ГМТ)**;
- множина значень аргументу функції f — **область визначення функції** f, яку позначають $D(f)$;
- множина значень функції f — **область значень функції** f, яку позначають $E(f)$;
- множина натуральних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{N}$;
- множина цілих чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Z}$;
- множина раціональних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Q}$;
- множина дійсних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{R}$.

Множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — приклади **числових** множин. Також прикладами числових множин є **числові проміжки**. Наприклад, проміжки $[-3;\ 2]$, $(5;\ +\infty)$, $(-\infty;\ -4]$ є числовими множинами.

Як правило, множини позначають великими латинськими літерами: A, B, C, D тощо.

Об'єкти, які складають множину, називають **елементами** цієї множини. Зазвичай елементи позначають малими латинськими літерами: a, b, c, d тощо.

Якщо a належить множині A, то пишуть $a \in A$ (читають: «a належить множині A»). Якщо b не належить множині A, то пишуть $b \notin A$ (читають: «b не належить множині A»).

Наприклад, $12 \in \mathbb{N}$, $-3 \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Якщо множина A складається з трьох елементів a, b, c, то пишуть $A = \{a, b, c\}$.

Наприклад, якщо M — множина натуральних дільників числа 6, то пишуть $M = \{1, 2, 3, 6\}$. Множина дільників числа 6, які є складеними числами, має такий вигляд: $\{6\}$. Це приклад **одноелементної** множини.

Позначення множини за допомогою фігурних дужок, у яких указано список її елементів, є зручним у тих випадках, коли множина складається з невеликої кількості елементів.

Означення. Дві множини A і B називають рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B і, навпаки, кожний елемент множини B належить множині A.

Якщо множини A і B рівні, то пишуть $A = B$.

З означення випливає, що ***множина однозначно визначається своїми елементами***. Якщо множину записано за допомогою фігурних дужок, то порядок, у якому виписано її елементи, не має значення. Так, множина, яка складається з трьох елементів a, b, c, припускає шість варіантів запису:

$$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}.$$

Оскільки з означення рівних множин випливає, що, наприклад, $\{a, b, c\} = \{a, a, b, c\}$, то надалі будемо розглядати множини, які складаються з різних елементів. Так, множина букв слова «шаровари» має вигляд {ш, а, р, о, в, и}.

Зауважимо, що $\{a\} \neq \{\{a\}\}$. Справді, множина $\{a\}$ складається з одного елемента a; множина $\{\{a\}\}$ складається з одного елемента — множини $\{a\}$.

Найчастіше множину задають одним із двох таких способів.

Перший спосіб полягає в тому, що множину задають указанням (переліком) усіх її елементів. Ми вже використовували цей спосіб, записуючи множину за допомогою фігурних дужок, у яких зазначали список її елементів. Зрозуміло, що не всяку множину можна задати в такий спосіб. Наприклад, множину парних чисел так задати не можна.

Другий спосіб полягає в тому, що задається **характеристична властивість** елементів множини, тобто властивість, яка притаманна всім елементам даної множини і тільки їм. Наприклад, властивість «натуральне число при діленні на 2 дає в остачі 1» задає множину непарних чисел.

Якщо x — довільний елемент множини A, яку задано за допомогою характеристичної властивості її елементів, то пишуть $A = \{x \mid \dots\}$. Тут після вертикальної риски вказують характеристичну властивість, якій має задовольняти елемент x, щоб належати множині A.

Розглянемо кілька прикладів.

- $\{x \mid x = 3n,\ n \in \mathbb{N}\}$ — множина натуральних чисел, кратних 3.
- $\{x \mid x(x^2 - 1) = 0\}$ — множина коренів рівняння $x(x^2 - 1) = 0$. Ця множина дорівнює множині $\{-1, 0, 1\}$, яку, у свою чергу, можна задати за допомогою іншої характеристичної властивості:
$$\{x \mid x \in \mathbb{Z},\ |x| < 2\}.$$
Тому можна записати, що $\{x \mid x(x^2 - 1) = 0\} =$
$$= \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ |x| < 2\}.$$
- Нехай $(x; y)$ — координати точки. Тоді множина точок $\{(x; y) \mid y = 2x - 1,\ x$ — будь-яке число$\}$ — пряма, яка є графіком функції $y = 2x - 1$.

Узагалі, для точок координатної площини множина $\{(x; y) \mid y = f(x),\ x \in D(f)\}$ — це графік функції f.

У геометрії, задаючи множину точок за допомогою характеристичної властивості, тим самим задають ГМТ.

- Якщо A, B — дані точки площини, X — довільна точка цієї площини, то множина $\{X \mid XA = XB\}$ — серединний перпендикуляр відрізка AB.

Якщо задавати множину характеристичною властивістю її елементів, то може статися, що жодний об'єкт такої властивості не має.

Розглянемо приклади.

- Множина трикутників, сторони яких пропорційні числам 1, 2, 5. З нерівності трикутника випливає, що ця множина не містить жодного елемента.
- Позначимо через A множину учнів вашого класу, які є майстрами спорту з шахів. Може виявитися, що множина A також не містить жодного елемента.
- Розглядаючи множину коренів довільного рівняння, слід передбачити ситуацію, коли рівняння коренів не має.

Наведені приклади вказують на те, що зручно до сукупності множин віднести ще одну особливу множину, яка не містить жодного елемента. Її називають **порожньою множиною** і позначають символом $\varnothing$.

Наприклад, $\{x \mid 0x = 2\} = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x < 1\} = \varnothing$.

Зазначимо, що множина $\{\varnothing\}$ не є порожньою. Вона містить один елемент — порожню множину.

ПРИКЛАД Доведіть, що множина A всіх парних натуральних чисел дорівнює множині B чисел, які можна подати у вигляді суми двох непарних натуральних чисел.

Розв'язання. Нехай $x \in A$. Тоді можна записати, що $x = 2m$, де m — натуральне число. Маємо: $x = 2m = (2m - 1) + 1$. Отже, $x \in B$.

Тепер припустимо, що $x \in B$. Тоді $x = (2n - 1) + (2k - 1)$, де n і k — натуральні числа. Маємо: $x = 2n - 1 + 2k - 1 = 2(n + k - 1)$. Отже, $x \in A$.

Маємо: якщо $x \in A$, то $x \in B$, і навпаки, якщо $x \in B$, то $x \in A$. Звідси $A = B$.

Вправи

1.° Як називають множину точок кута, рівновіддалених від його сторін?

2.° Як називають множину вовків, які підкорюються одному ватажку?

3.° Назвіть яку-небудь множину запорізьких козаків.

4.° Як називають множину вчителів, які працюють в одній школі?

5.° Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $5 * \mathbb{N}$;
2) $0 * \mathbb{N}$;
3) $-5 * \mathbb{Q}$;
4) $-\frac{1}{2} * \mathbb{Z}$;
5) $3,14 * \mathbb{Q}$;
6) $\pi * \mathbb{Q}$;
7) $\sqrt{2} * \mathbb{R}$;
8) $\sqrt{3} * \varnothing$.

6.° Дано функцію $f(x) = x^2 + 1$. Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $3 * D(f)$;
2) $0 * D(f)$;
3) $0 * E(f)$;
4) $\frac{1}{2} * E(f)$;
5) $1,01 * E(f)$.

7.° Які з наступних тверджень є правильними:

1) $1 \in \{1, 2, 3\}$;
2) $1 \notin \{1\}$;
3) $\{1\} \in \{1, 2\}$;
4) $\{1\} \in \{\{1\}\}$;
5) $\varnothing \notin \{1, 2\}$;
6) $\varnothing \in \{\varnothing\}$?

8.° Запишіть множину коренів рівняння:

1) $x(x - 1) = 0$;
2) $(x - 2)(x^2 - 4) = 0$;
3) $x = 2$;
4) $x^2 + 3 = 0$.

9.° Задайте переліком елементів множину:
1) правильних дробів зі знаменником 7;
2) правильних дробів, знаменник яких не перевищує 4;
3) букв у слові «математика»;
4) цифр числа 5555.

10.° Задайте переліком елементів множину:
1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x^2 - 1 = 0\}$;
2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ |x| < 3\}$;
3) $C = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \leqslant 15,\ x = 7k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

11.° Задайте переліком елементів множину:
1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x(2|x| - 1) = 0\}$;
2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ -3 \leqslant x < 2\}$.

12.° Чи рівні множини A і B, якщо:
1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$;
2) $A = \{(1; 0)\}$, $B = \{(0; 1)\}$;
3) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$?

13.° Чи рівні множини A і B, якщо:
1) $A = [-1; 2)$, $B = (-1; 2]$;
2) A — множина коренів рівняння $|x| = x$, $B = [0; +\infty)$;
3) A — множина чотирикутників, у яких протилежні сторони попарно рівні; B — множина чотирикутників, у яких діагоналі точкою перетину діляться навпіл?

14.° Які з наступних множин дорівнюють порожній множині:
1) множина трикутників, сума кутів яких дорівнює 181°;
2) множина гірських вершин заввишки понад 8800 м;
3) множина гострокутних трикутників, медіана яких дорівнює половині сторони, до якої вона проведена;
4) множина функцій, графіком яких є коло?

15.° Нехай O — задана точка площини. Що являє собою множина точок M цієї площини:
1) $\{M \mid OM = 3\text{ см}\}$;
2) $\{M \mid OM > 5\text{ см}\}$;
3) $\{M \mid OM \leqslant 5\text{ см}\}$?

16.° Які з наведених множин дорівнюють порожній множині:
1) $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{Z},\ \frac{1}{2}x - 2 = 0\right\}$;
2) $B = \{x \mid x \neq x\}$;
3) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ |x| < 1\}$;
4) $D = \{x \mid 3x^4 + 5x^2 + 7 = 0\}$;
5) $E = \{x \mid x > |x|\}$?

2. Підмножина. Операції над множинами

Розглянемо множину цифр десяткової системи числення $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Виокремимо з множини A ті її елементи, які є парними цифрами. Отримаємо множину $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, усі елементи якої є елементами множини A.

Означення. Множину B називають підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A.

Це записують так: $B \subset A$ або $A \supset B$ (читають: «множина B є підмножиною множини A» або «множина A містить множину B»).

Розглянемо приклади:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;
- $\{x \mid 2x - 1 = 0\} \subset \left\{x \mid x^2 = \frac{1}{4}\right\}$;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$;
- множина учнів вашого класу є підмножиною множини учнів вашої школи;
- множина ссавців є підмножиною множини хребетних;
- множина точок променя CB є підмножиною множини точок прямої AB (рис. 1).

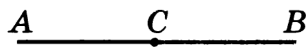


Рис. 1

Для ілюстрації співвідношень між множинами використовують схеми, які називають **діаграмами Ейлера**.

На рисунку 2 зображено множину A (більший круг) і множину B (менший круг, який міститься в більшому). Ця схема означає, що $B \subset A$ (або $A \supset B$).

На рисунку 3 за допомогою діаграм Ейлера показано співвідношення між множинами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$.

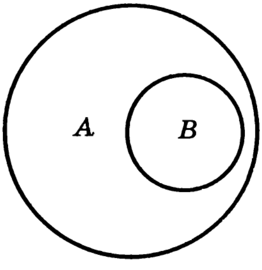
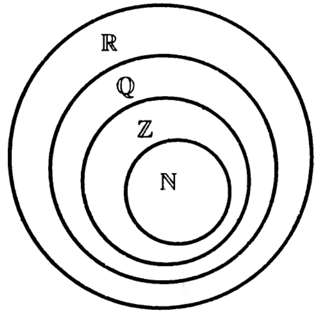


Рис. 2



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Рис. 3

Якщо $B \subset A$, то за допомогою рисунка 2 можна зробити такі висновки:

1) для того щоб елемент x належав множині A, достатньо, щоб він належав множині B;

2) для того щоб елемент x належав множині B, необхідно, щоб він належав множині A.

Наприклад, якщо A — множина натуральних чисел, кратних 5, а B — множина натуральних чисел, кратних 10, то очевидно, що $B \subset A$. Тому для того, щоб натуральне число n було кратним 5 ($n \in A$), достатньо, щоб воно було кратним 10 ($n \in B$). Для того щоб натуральне число n було кратним 10 ($n \in B$), необхідно, щоб воно було кратним 5 ($n \in A$).

Із означень підмножини і рівності множин випливає, що коли $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$.

Якщо в множині B немає такого елемента, який не належить множині A, то множина B є підмножиною множини A. У силу цих міркувань порожню множину вважають підмножиною будь-якої множини. Справді, порожня множина не містить жодного елемента, отже, у ній немає елемента, який не належить даній множині A. Тому для будь-якої множини A справедливе твердження: $\varnothing \subset A$.

Будь-яка множина A є підмножиною самої себе, тобто $A \subset A$.

Означення. Якщо $B \subset A$ і $B \neq A$, то множину B називають власною підмножиною множини A.

Наприклад, множина $\mathbb{Z}$ є власною підмножиною множини $\mathbb{Q}$.

ПРИКЛАД Випишіть усі підмножини множини $A = \{a, b, c\}$.

Розв'язання. Маємо: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\varnothing$. Усього отримали 8 підмножин. В 11 класі буде доведено, що кількість підмножин n-елементної множини дорівнює 2^n.

Нехай A — множина розв'язків рівняння $x + y = 5$, а B — множина розв'язків рівняння $x - y = 3$. Тоді множина C розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3 \end{cases}$$

складається з усіх елементів, які належать і множині A, і множині B. У такому випадку кажуть, що множина C є **перетином** множин A і B.

Означення. Перетином **множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать і множині A, і множині B.**

Перетин множин A і B позначають так: $A \cap B$.

З означення випливає, що

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Легко переконатися, що розв'язком системи, яка розглядалася, є пара (4; 1). Цей факт можна записати так:

$$\{(x;\ y) \mid x + y = 5\} \cap \{(x;\ y) \mid x - y = 3\} = \{(4;\ 1)\}.$$

Якщо множини A і B не мають спільних елементів, то їх перетином є порожня множина, тобто $A \cap B = \varnothing$. Також зазначимо, що $A \cap \varnothing = \varnothing$.

З означення перетину двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cap B = A$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cap A = A$.

Наприклад,

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N},$$
$$\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}.$$

Перетин множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 4 заштрихована фігура зображує множину $A \cap B$.

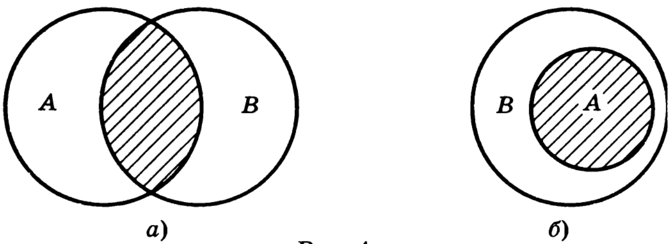


Рис. 4

Для того щоб розв'язати рівняння $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, треба розв'язати кожне з рівнянь $x^2 - x = 0$ і $x^2 - 1 = 0$.

Маємо: $A = \{0,\ 1\}$ — множина коренів першого рівняння, $B = \{-1,\ 1\}$ — множина коренів другого рівняння. Зрозуміло, що множина $C = \{-1,\ 0,\ 1\}$, кожний елемент якої належить або множині A, або множині B, є множиною коренів заданого рівняння. Множину C називають **об'єднанням** множин A і B.

Означення. Об'єднанням **множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин: або множині A, або множині B.**

Об'єднання множин A і B позначають так: $A \cup B$. З означення випливає, що

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Наприклад, $(-3;\ 1) \cup (0;\ 2] = (-3;\ 2]$, $(-\infty;\ 1) \cup (-1;\ +\infty) = (-\infty;\ +\infty)$.

Об'єднання множин ірраціональних і раціональних чисел дорівнює множині дійсних чисел.

Якщо треба знайти об'єднання множин розв'язків рівнянь (нерівностей), то кажуть, що треба розв'язати **сукупність рівнянь (нерівностей)**. Сукупність записують за допомогою квадратної дужки. Так, щоб розв'язати рівняння $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, треба розв'язати сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x = 0, \\ x^2 - 1 = 0. \end{array}\right.$$

Зауважимо, що $A \cup \varnothing = A$.

З означення об'єднання двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cup B = B$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cup A = A$.

Об'єднання множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 5 заштрихована фігура зображує множину $A \cup B$.

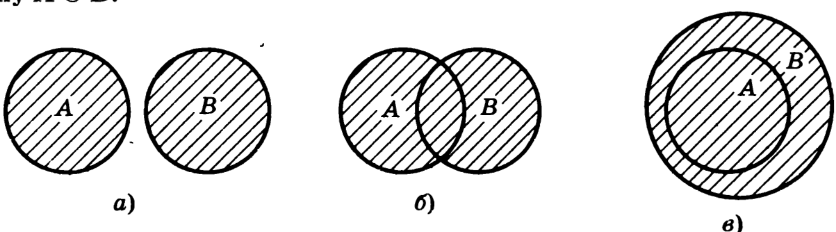


Рис. 5

Часто доводиться розглядати перетин і об'єднання трьох і більше множин.

Перетин множин A, B і C — це множина всіх елементів, які належать і множині A, і множині B, і множині C (рис. 6).

Наприклад, щоб розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 17, \end{cases}$$

треба знайти перетин трьох множин: $\{(x, y) \mid x + y = 5\}$, $\{(x, y) \mid x - y = 3\}$ і $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 17\}$.

Об'єднання множин A, B і C — це множина всіх елементів, які належать хоча б одній з цих множин: або множині A, або множині B, або множині C (рис. 7).

Наприклад, об'єднання множин гострокутних, тупокутних і прямокутних трикутників — це множина всіх трикутників.

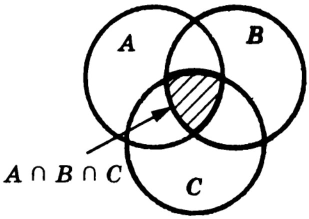


Рис. 6

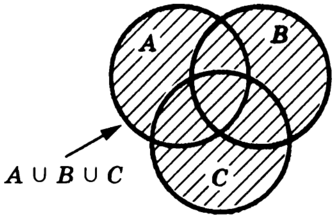


Рис. 7

ПРИКЛАД Знайдіть перетин множин A і B, якщо:

1) $A = \{x \mid x = 5k,\ k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 3n,\ n \in \mathbb{N}\}$;

2) A — множина ромбів, B — множина прямокутників;

3) $A = \{x \mid x > 3\}$, $B = \{x \mid x \leqslant 4\}$;

4) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x = 2m,\ m \in \mathbb{N}\}$, B — множина простих чисел.

Розв'язання

1) A — множина натуральних чисел, кратних 5.

B — множина натуральних чисел, кратних 3.

Тоді множина $A \cap B$ складається з усіх натуральних чисел, кратних 5 і 3 одночасно, тобто з усіх натуральних чисел, кратних 15. Отже, $A \cap B = \{x \mid x = 15k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

2) Множина $A \cap B$ складається з усіх чотирикутників, які одночасно є і ромбами, і прямокутниками. Отже, шукана множина — це множина квадратів.

3) $A \cap B = \{x \mid 3 < x \leqslant 4\}$.

4) A — множина парних натуральних чисел. Оскільки у множині простих чисел є тільки одне парне число (число 2), то $A \cap B = \{2\}$.

ПРИКЛАД Знайдіть об'єднання множин A і B, якщо:

1) $A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$;

2) $A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 4n + 1,\ n \in \mathbb{N}\}$;

3) $A = \{X \mid OX < 3\}$, $B = \{X \mid OX = 3\}$, де O і X — точки площини, O — дана точка.

Розв'язання

1) A — множина непарних натуральних чисел, B — множина парних натуральних чисел. Тоді $A \cup B$ — це множина натуральних чисел, тобто $A \cup B = \mathbb{N}$.

2) A — множина непарних натуральних чисел. Елементами множини B є тільки непарні числа. Отже, $B \subset A$. Тоді $A \cup B = A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}\}$.

3) Очевидно, що $A \cup B = \{X \mid OX \leqslant 3\}$. Отже, $A \cup B$ — це круг з центром O і радіусом 3.

Вправи

17.° Назвіть кілька підмножин учнів вашого класу.

18.° Назвіть які-небудь геометричні фігури, які є підмножинами множини точок прямої.

19.° Назвіть які-небудь геометричні фігури, які є підмножинами множини точок круга.

20.° Нехай A — множина букв у слові «координата». Множина букв якого слова є підмножиною множини A:

1) кора;	4) крокодил;	7) тин;	10) дорога;
2) дірка;	5) нитки;	8) криниця;	11) дар;
3) картина;	6) нирки;	9) сокирка;	12) кардинал?

21.° Нехай A — множина цифр числа 1958. Чи є множина цифр числа x підмножиною множини A, якщо:

1) $x = 98$;	3) $x = 519$;	5) $x = 195888$;
2) $x = 9510$;	4) $x = 5858$;	6) $x = 91258$?

22.° Нехай $A \neq \varnothing$. Які дві різні підмножини завжди має множина A?

23.° Знайдіть перетин множин цифр, які використовуються в запису чисел:

1) 555288 і 82223; 2) 470713 і 400007.

24.° Нехай A — множина двоцифрових чисел, B — множина простих чисел. Чи належить множині $A \cap B$ число: 5, 7, 11, 31, 57, 96?

25.° Знайдіть множину спільних дільників чисел 30 і 45.

26.° Знайдіть об'єднання множин цифр, які використовуються в запису чисел:

1) 27288 і 56383; 2) 55555 і 777777.

27.° Які з наступних тверджень є правильними:

1) $\{a\} \in \{a, b\}$;	3) $a \subset \{a, b\}$;
2) $\{a\} \subset \{a, b\}$;	4) $\{a, b\} \in \{a, b\}$?

28.• Доведіть, що коли $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

29.• Розмістіть дані множини у такій послідовності, щоб кожна наступна множина була підмножиною попередньої:

1) A — множина прямокутників;
B — множина чотирикутників;
C — множина квадратів;
D — множина паралелограмів;

2) A — множина ссавців;
B — множина собачих;
C — множина хребетних;

D — множина вовків;

E — множина хижих ссавців.

30.• Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера співвідношення між множинами:

1) A — множина невід'ємних раціональних чисел;
   $B = \{0\}$;
   $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

2) $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;
   A — множина натуральних чисел, кратних 6;
   B — множина натуральних чисел, кратних 3.

31.• Запишіть за допомогою символу $\subset$ співвідношення між множинами:

$A = \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$; $C = \{x \mid x = 10n,\ n \in \mathbb{N}\}$;
$B = \{x \mid x = 50n,\ n \in \mathbb{N}\}$; $D = \{x \mid x = 5n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

32.• Яка з множин A або B є підмножиною другої, якщо:
$A = \{x \mid x = 4n + 2,\ n \in \mathbb{N}\}$; $B = \{x \mid x = 8n + 2,\ n \in \mathbb{N}\}$?

33.• Дано множини $\{7\}$, $\{11\}$, $\{19\}$, $\{7, 11\}$, $\{7, 19\}$, $\{11, 19\}$, $\varnothing$, які є всіма власними підмножинами деякої множини A. Запишіть множину A.

34.• Запишіть усі підмножини множини $\{1, 2\}$.

35.• Опишіть мовою «необхідно й достатньо» належність елемента x множинам A, B і C (рис. 8).

а) б) в)

Рис. 8

36.• Замість крапок поставте слово «необхідно» або «достатньо», щоб утворилося правильне твердження:

1) для того щоб трикутник був рівностороннім, ..., щоб два його кути були рівні;
2) для того щоб чотирикутник був паралелограмом, ..., щоб дві його сторони були паралельні;
3) для того щоб число ділилося націло на 3, ..., щоб воно ділилося націло на 9;
4) для того щоб остання цифра десяткового запису числа була нулем, ..., щоб число було кратне 5.

37.• Відомо, що для будь-якої множини B множина A є її підмножиною. Знайдіть множину A.

38.• Які з наступних тверджень є правильними:

1) $\{a, b\} \cap \{a\} = a$;
2) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a, b\}$;
3) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{b\}$?

39.• Знайдіть перетин множин A і B, якщо:

1) A — множина рівнобедрених трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
2) A — множина прямокутних трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
3) A — множина двоцифрових чисел, B — множина натуральних чисел, кратних 19;
4) A — множина одноцифрових чисел, B — множина простих чисел.

40.• Знайдіть перетин множин A і B, якщо:

1) $A = \{x \mid x < 19\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 11\}$;
2) $A = \{x \mid x = 4n, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 6n, n \in \mathbb{N}\}$;
3) $A = \{(x; y) \mid 2x - y = 1\}$, $B = \{(x; y) \mid x + y = 5\}$.

41.• Накресліть два трикутники так, щоб їх перетином була така геометрична фігура: 1) відрізок; 2) точка; 3) трикутник; 4) п'ятикутник; 5) шестикутник.

42.• Які фігури можуть бути перетином двох променів, що лежать на одній прямій?

43.• Відомо, що для будь-якої множини B виконується рівність $A \cap B = A$. Знайдіть множину A.

44.• Які з наступних тверджень є правильними:

1) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\}$;
2) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{b\}$;
3) $\{a, b\} \cup \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{\{b\}\}$?

45.• Знайдіть об'єднання множин A і B, якщо:

1) A — множина рівнобедрених трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
2) A — множина простих чисел, B — множина складених чисел;
3) A — множина простих чисел, B — множина непарних чисел.

46.• Знайдіть об'єднання множин A і B, якщо:

1) $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \mid (x - 1)(x - 2) = 0\}$;
2) $A = \{x \mid 2x + 3 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + 3 = 2\}$;
3) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 5\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 7\}$.

47.° Накресліть два трикутники так, щоб їх об'єднанням був: 1) чотирикутник; 2) трикутник; 3) шестикутник. Чи може об'єднання трикутників бути відрізком?

48.° Які фігури можуть бути об'єднанням двох променів, що лежать на одній прямій?

49.° Відомо, що для будь-якої множини B виконується рівність $A \cup B = B$. Знайдіть множину A.

50.° Наведіть приклад такої одноелементної множини, що її елемент є одночасно підмножиною даної множини.

3. Скінченні множини. Взаємно однозначна відповідність

Якщо множина містить скінченну кількість елементів, то її називають **скінченною**, а якщо в ній нескінченно багато елементів — то **нескінченною**. Порожню множину вважають скінченною.

Наприклад, множина учнів вашого класу — скінченна множина, а множина натуральних чисел — нескінченна множина.

Якщо A — скінченна множина, то кількість її елементів позначатимемо так: $n(A)$.

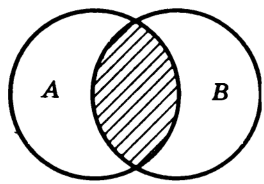


Рис. 9

Наприклад, якщо A — це множина днів тижня, то $n(A) = 7$; якщо B — це множина двоцифрових чисел, то $n(B) = 90$. Зрозуміло, що $n(\varnothing) = 0$.

Нехай A і B — такі скінченні множини, що $A \cap B = \varnothing$. Тоді очевидно, що

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B). \qquad (1)$$

Якщо A і B — скінченні множини, причому $A \cap B \neq \varnothing$ (рис. 9), то до суми $n(A) + n(B)$ двічі входить кількість елементів їх перетину, тобто двічі враховується число $n(A \cap B)$. Отже, у цьому випадку

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)} \qquad (2)$$

Коли $A \cap B = \varnothing$, то $n(A \cap B) = 0$. Тому формула (2) є узагальненням формули (1).

ПРИКЛАД 1 У фізико-математичному класі 25 учнів, і всі вони люблять математику. Відомо, що 23 учні люблять алгебру, а 21 — геометрію. Скільки учнів цього класу люблять і алгебру, і геометрію?

Розв'язання. Нехай A — множина учнів, які люблять алгебру, B — множина учнів, які люблять геометрію. Тоді $n(A) = 23$, $n(B) = 21$, $n(A \cup B) = 25$. Водночас $A \cap B$ — множина учнів, які люблять і алгебру, і геометрію. З формули (2) отримуємо $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 23 + 21 - 25 = 19$.

З'ясуємо, як знайти кількість елементів множини $A \cup B \cup C$, де A, B і C — скінченні множини.

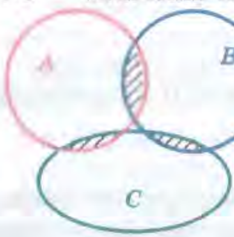


Рис. 10

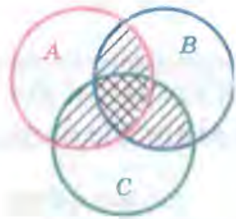


Рис. 11

Якщо $A \cap B \cap C = \varnothing$ (рис. 10), то зрозуміло, що

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - \\ - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A). \quad (3)$$

Якщо $A \cap B \cap C \neq \varnothing$ (рис. 11), то права частина формули (3) не враховує кількості спільних елементів множин A, B і C. Отже, у цьому випадку формула набуває вигляду:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - \\ - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C). \quad (4)$$

Аналогічну формулу можна отримати для будь-якої кількості множин. Її називають «формулою включення-виключення».

ПРИКЛАД 2 У спортивній школі є три секції: акробатики, баскетболу, волейболу. Відомо, що школу відвідують 200 школярів, а кожну із секцій — 80 школярів. Доведіть, що знайдеться 14 школярів, які відвідують одні й ті самі дві секції.

Розв'язання. Позначимо множини школярів, які відвідують секції акробатики, баскетболу й волейболу, буквами A, $Б$ і $В$ відповідно. Тоді $n(A \cup Б \cup В) = 200$, $n(A) = n(Б) = n(В) = 80$. Підставимо ці значення у формулу (4):

$$200 = 80 + 80 + 80 - n(A \cap Б) - n(Б \cap В) - \\ - n(В \cap A) + n(A \cap Б \cap В).$$

Звідси

$$n\,(A \cap Б) + n\,(Б \cap В) + n\,(В \cap A) = 40 + n\,(A \cap Б \cap В) \geqslant 40.$$

Якщо припустити, що кожне з чисел $n\,(A \cap Б)$, $n\,(Б \cap В)$, $n\,(В \cap A)$ не перевищує 13, то їх сума не перевищує 39. Отримали суперечність.

Нам доволі часто доводиться порівнювати скінченні множини за кількістю їх елементів.

Як дізнатися, чи вистачить у шкільній бібліотеці підручників з алгебри і початків аналізу для десятикласників? Звичайно, можна порахувати окремо учнів і підручники, а можна видати підручники учням. Якщо, наприклад, усім підручників вистачить, а в бібліотеці не залишиться жодного підручника, то це означатиме, що десятикласників і підручників однакова кількість.

Так само, щоб дізнатися, чи вистачить стільців у класі, зовсім не обов'язково їх перераховувати. Достатньо запросити учнів сісти на стільці. Якщо, наприклад, місць вистачить не всім, то це означатиме, що кількість учнів більша, ніж кількість стільців.

У цих прикладах, порівнюючи кількість елементів двох множин, ми *кожному елементу однієї множини поставили у відповідність єдиний елемент другої множини.* Скористаємося цією ідеєю в наступному прикладі.

ПРИКЛАД 3 Порівняйте кількість елементів множини A двоцифрових чисел і множини B трицифрових чисел, десятковий запис яких закінчується цифрою 1.

Розв'язання. Поставимо у відповідність кожному двоцифровому числу те трицифрове число, яке отримаємо з нього, приписавши справа одиницю. Дістанемо:

$$\begin{array}{cccccc} 10, & 11, & 12, & \ldots, & 98, & 99 \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & \Updownarrow \\ 101, & 111, & 121, & \ldots, & 981, & 991 \end{array}$$

Зазначимо, що за такої відповідності всі елементи множини B виявляться «задіяними». Справді, якщо в числі виду $\overline{ab1}$ закреслити останню цифру, то отримаємо двоцифрове число $\overline{ab}$.

На основі відповідності між елементами множин A і B можна зробити висновок, що $n\,(A) = n\,(B)$.

Означення. Якщо кожному елементу множини A поставлено у відповідність єдиний елемент множини B і при цьому будь-який елемент множини B є відповідним деякому єдиному елементу множини A, то кажуть, що між множинами A і B встановлено взаємно однозначну відповідність.

У прикладі 3 кожному двоцифровому числу було поставлено у відповідність єдине трицифрове число зазначеного вигляду і, навпаки, кожне таке трицифрове число є відповідним єдиному двоцифровому числу. Отже, між множинами, що розглядаються, було встановлено взаємно однозначну відповідність.

Зазначимо, що коли в класі всі учні сидять і при цьому є вільні стільці, то між множиною учнів і множиною стільців взаємно однозначної відповідності не встановлено.

Цікаво, що з дитинства кожному з нас неодноразово доводилося встановлювати взаємно однозначні відповідності. Дитина, промовляючи «один», «два», «три» і при цьому послідовно показуючи на машинку, м'ячик і коника, тим самим встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною своїх іграшок і множиною $\{1, 2, 3\}$. Рахуючи іграшки, дитина ніби прив'язує до кожного з предметів ярлики з написами «1», «2», «3». Зауважимо, що, показуючи іграшки в іншому порядку, наприклад, «м'ячик», «коник», «машинка», одержуємо іншу взаємно однозначну відповідність між цими множинами.

Якщо між скінченними множинами A і B встановлено взаємно однозначну відповідність, то $n(A) = n(B)$. *І навпаки, якщо* $n(A) = n(B)$, *то між скінченними множинами A і B можна встановити взаємно однозначну відповідність.*

Отже, між скінченними множинами з різною кількістю елементів неможливо встановити взаємно однозначну відповідність. Це дозволяє сформулювати таке правило.

Якщо між скінченними множинами A і C встановлено взаємно однозначну відповідність і $C \subset B$, $C \neq B$, *то* $n(A) < n(B)$.

Вправи

51.° Кожний з 32 учнів класу вивчає щонайменше одну іноземну мову. З них 20 вивчають англійську мову і 18 — французьку. Скільки учнів вивчають і англійську, і французьку мови?

52.° Відомо, що 26 мешканців будинку тримають котів і собак, 16 з них мають котів, а 15 — собак. Скільки мешканців мають і собаку, і кота?

53.° З анкети, проведеної в класі, з'ясувалося, що з 30 учнів класу 18 мають брата, 14 — сестру, а у 10 учнів є сестра і брат. Чи є в цьому класі учні, у яких немає ні сестри, ні брата?

54.° У грудні було 10 ясних і затишних днів, 15 днів був вітер і 12 днів ішов сніг. Скільки днів у грудні була хуртовина (сніг і вітер)?

55.° Чи встановлено взаємно однозначну відповідність між множинами A і B (рис. 12)? Точками на рисунку зображено елементи множин.

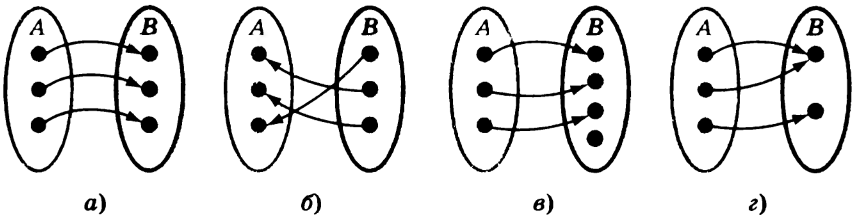


Рис. 12

56.° Одинадцять гравців футбольної команди отримали футболки з номерами від 1 до 11. Між якими множинами встановлено взаємно однозначну відповідність?

57.° У результаті жеребкування кожна з 20 пар фігуристів отримала порядковий номер її виступу. Між якими множинами встановлено взаємно однозначну відповідність?

58.° Кожний глядач, який прийшов до кінотеатру, купив квиток із зазначеними рядом і місцем. Між якими множинами встановлено взаємно однозначну відповідність?

59.• Між першими n натуральними числами і правильними дробами зі знаменником 7 установлено взаємно однозначну відповідність. Знайдіть n.

60.• Кожному елементу множини $\{n, n+1, n+2\}$, де $n \in \mathbb{N}$, поставили у відповідність остачу від ділення цього елемента на 3. Чи встановлено таким чином взаємно однозначну відповідність між множинами $\{n, n+1, n+2\}$ і $\{0, 1, 2\}$?

61.* В олімпіаді взяли участь 46 учнів. Їм було запропоновано розв'язати 3 задачі. Після підведення підсумків з'ясувалося, що кожен з учасників розв'язав хоча б одну задачу. Першу і другу задачі розв'язали 11 учасників, другу і третю — 8 учасників, першу і третю — 5 учасників, а всі три задачі розв'язали тільки 2 учасники. Доведіть, що одну із задач розв'язали не менше ніж половина учасників.

4. Нескінченні множини. Зліченні множини

У попередньому пункті ми розглядали скінченні множини, між якими встановлено взаємно однозначну відповідність, і з'ясували, що такі множини мають однакову кількість елементів.

Керуючись принципом «частина менша від цілого», доходимо висновку, що коли B — власна підмножина скінченної множини A, то $n(B) < n(A)$. Отже, між скінченною множиною та її власною підмножиною неможливо встановити взаємно однозначну відповідність.

Оскільки $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, то, здавалося б, природно вважати, що цілих чисел більше, ніж натуральних. Проте це не так.

Нескінченні множини в цьому сенсі поводяться незвично.

Розглянемо множину $\mathbb{N}$ і підмножину M парних чисел. Множина M є власною підмножиною множини $\mathbb{N}$. Кожному елементу $n \in \mathbb{N}$ поставимо у відповідність єдиний елемент $2n \in M$:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & \\ 2, & 4, & 6, & 8, & \ldots, & 2n, & \ldots \end{array}$$

При цьому кожне парне число відповідатиме єдиному натуральному числу. Тим самим між множинами $\mathbb{N}$ і M встановлено взаємно однозначну відповідність, а тому не можна вважати, що в множині $\mathbb{N}$ міститься більше елементів, ніж в її власній підмножині — множині парних чисел.

Цей приклад показує, що звичні для нас уявлення про скінченні множини не можна переносити на нескінченні множини.

Узагалі, математиками було доведено, що в будь-якій нескінченній множині A можна виокремити власну підмножину A_1 таким чином, що між множинами A і A_1 можна встановити взаємно однозначну відповідність. Це принципова відмінність нескінченних множин від скінченних.

Якщо множини A і B є скінченними і між ними встановлено взаємно однозначну відповідність, то $n(A) = n(B)$. Якщо ж взаємно однозначну відповідність установлено між нескінченними множинами A і B, то в математиці не прийнято говорити, що ці множини мають однакову кількість елементів, а кажуть, що множини A і B мають однакову **потужність**.

Означення. Дві множини називають рівнопотужними, якщо між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Для нескінченних множин слово «потужність» означає те саме, що для скінченних множин «кількість елементів».

Доведемо ще один дивовижний факт: множина точок прямої рівнопотужна множині точок **відкритого відрізка** (відрізка, у якого «виколото» кінці), тобто пряма містить стільки ж точок, скільки містить їх відкритий відрізок.

На рисунку 13 зображено пряму MN, яка дотикається до півкола з центром у точці O і діаметром AB, паралельним прямій MN. Вилучимо з півкола точки A і B. Таке півколо називають **відкритим**.

Кожній точці X відкритого півкола поставимо у відповідність точку X_1 прямої MN, яка лежить на промені OX. Зрозуміло, що точці X відповідає єдина точка прямої MN і, навпаки, кожна точка прямої MN є відповідною єдиній точці відкритого півкола. Отже, установлено взаємно однозначну відповідність між множиною точок прямої і множиною точок відкритого півкола.

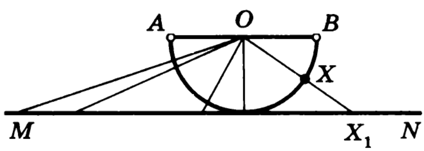


Рис. 13

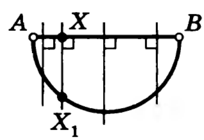


Рис. 14

На рисунку 14 показано, як встановити взаємно однозначну відповідність між множиною точок відкритого відрізка і множиною точок відкритого півкола. Отже, множина точок відкритого відрізка AB рівнопотужна множині точок прямої MN.

У розповіді на с. 27 ви дізнаєтесь ще про один несподіваний факт, у який важко повірити, керуючись лише інтуїцією: множина точок сторони квадрата рівнопотужна множині точок квадрата.

Означення. Множину, рівнопотужну множині натуральних чисел, називають зліченною множиною.

Вище ми показали, що множина парних чисел є зліченною. Зрозуміло, що жодна скінченна множина не є зліченною.

Натуральне число n, яке відповідає елементу a зліченної множини A, називають *номером цього елемента*. Якщо елемент a має номер n, то пишуть: a_n. Коли встановлюють взаємно однозначну відповідність між множинами A і $\mathbb{N}$, кожний елемент множини A отримує свій номер, і ці елементи можна розмістити послідовно:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\ .$$

Так, якщо елементи множини P простих чисел розмістити у порядку зростання 2, 3, 5, 7, 11, ..., то всі елементи цієї множини можна пронумерувати:

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 3, & 5, & 7, & 11, & \ldots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots \end{array}$$

Тим самим установлено взаємно однозначну відповідність між множинами P і $\mathbb{N}$.

У такий спосіб можна показати, що будь-яка нескінченна підмножина множини $\mathbb{N}$ є зліченною (зробіть це самостійно).

На перший погляд здається, що елементи множини $\mathbb{Z}$ пронумерувати неможливо: адже множина $\mathbb{N}$ є власною підмножиною множини $\mathbb{Z}$. Отже, чисел для нумерації не вистачить: усі вони будуть «витрачені» на множину $\mathbb{N}$.

Проте якщо елементи множини $\mathbb{Z}$ розмістити у вигляді послідовності 0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, ..., то тим самим можна кожному цілому числу надати свій номер:

$$\begin{array}{cccccccc} 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \ldots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots \end{array}$$

Можна показати, що множина $\mathbb{Q}$ є також зліченною.

Зазначимо, що не будь-яка нескінченна множина є зліченною. Можна довести, що, наприклад, множина $\mathbb{R}$ не є зліченною.

Вправи

62.° Установіть взаємно однозначну відповідність між множиною натуральних чисел і множиною натуральних чисел, кратних 3.

63.° Установіть взаємно однозначну відповідність між множиною натуральних чисел і множиною чисел виду $4n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

64.° Доведіть, що множини парних і непарних натуральних чисел рівнопотужні.

65.° Доведіть, що множина чисел виду 2^n ($n \in \mathbb{N}$) зліченна.

66. Доведіть, що множина чисел виду $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) зліченна.

67.° Установіть взаємно однозначну відповідність між множиною чисел виду 2^n ($n \in \mathbb{N}$) і множиною десяткових дробів виду 0,1; 0,01; 0,001; ... .

68.• Покажіть, що множини точок сторони і діагоналі квадрата рівнопотужні.

69.• Покажіть, що множини точок будь-яких двох концентричних кіл рівнопотужні.

70.•• Покажіть, що множина точок прямої і множина точок кола з «виколотою» точкою рівнопотужні.

71.•• На координатній прямій позначили точки O (0), A (1), B (5). Доведіть, що:

1) множина точок відрізка OA рівнопотужна множині точок відрізка OB;
2) множина точок відрізка OA з «виколотою» точкою O рівнопотужна множині точок променя AB.

72.•• Покажіть, що множини точок будь-яких двох відрізків рівнопотужні.

«Я бачу це, але ніяк не можу цьому повірити!»

Ці слова належать видатному математику, засновнику теорії множин Георгу Кантору. Вони свідчать про те, що навіть генію часом буває складно примирити свою інтуїцію з формальним результатом.

Мабуть, і ви зазнавали подібного дискомфорту, коли логіка міркувань вимушувала вас погодитися з тим, що на будь-якому, навіть дуже маленькому, відрізку стільки ж точок, скільки їх на всій прямій.

Георг Кантор
(1845–1918)

А чи можна повірити в те, що множина точок квадрата рівнопотужна множині точок його сторони? Мабуть, ні. Цьому не вірив і сам великий Кантор.

У 1874 р. в одному зі своїх листів до видатного математика Р. Дедекінда (1831–1916) Кантор писав: «Чи можна зіставити поверхню (наприклад, квадратну площадку, включаючи її межі) з відрізком прямої таким чином, щоб кожній точці поверхні відповідала одна точка на цьому відрізку, і навпаки?»

Кантор думав, що відповідь має бути негативною, і намагався це довести протягом трьох років. Проте в 1877 р. він отримує несподіваний результат: будує взаємно однозначну відповідність між множиною точок квадрата і множиною точок його сторони.

Ознайомимося з ідеєю доведення Кантора.

Розглянемо на координатній площині квадрат з вершинами $A\ (0;\ 0)$, $B\ (0;\ 1)$, $C\ (1;\ 1)$, $D\ (1;\ 0)$ (рис. 15).

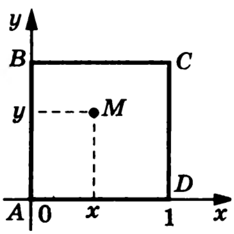


Рис. 15

Нехай точка $M\ (x;\ y)$ належить квадрату. Координати x і y задовольняють нерівності $0 \leqslant x \leqslant 1$ і $0 \leqslant y \leqslant 1$. Тому числа x і y можна подати у вигляді нескінченних десяткових дробів:

$$x = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ \ldots,$$
$$y = 0,\beta_1\beta_2\beta_3\ \ldots\ .$$

Зауважимо, що коли $x = 1$ або $y = 1$, то координату можна записати у вигляді дробу 0,999... .

За допомогою цих записів сконструюємо новий десятковий дріб, «перемішуючи» цифри десяткового запису чисел x і y через одну:

$$z = 0,\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3\ \ldots\ .$$

Точці $M\ (x;\ y)$ поставимо у відповідність точку $K\ (z;\ 0)$. Очевидно, що ця точка належить стороні AD квадрата.

Зрозуміло, що різні точки квадрата мають різні координати. Тому при зазначеній відповідності різним точкам квадрата відповідають різні точки його сторони AD[1].

• Після викладеного ви, мабуть, уже не дивуватиметесь тому, що, наприклад, множина точок куба рівнопотужна множині точок його ребра.

Множини, рівнопотужні множині точок відрізка, називають множинами потужності **континууму** (від латинського *continuum* — неперервний).

[1] Деякі числа мають два десяткових записи. Наприклад, дробам 0,7000... і 0,6999... відповідає одне й те саме число. Оскільки ідея доведення Кантора пов'язана з десятковим записом числа, то в строгому доведенні має бути показано, як вирішується проблема неоднозначності запису числа при встановленні взаємно однозначної відповідності.

§ 2

ФУНКЦІЇ, МНОГОЧЛЕНИ, РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

5. Повторення та розширення відомостей про функцію

У повсякденному житті нам часто доводиться спостерігати процеси, у яких зміна однієї величини (незалежної змінної) призводить до зміни іншої величини (залежної змінної). Вивчення цих процесів потребує створення їх математичних моделей. Однією з таких найважливіших моделей є **функція**.

З цим поняттям ви ознайомилися в 7 класі. Нагадаємо й уточнимо основні відомості.

Нехай X — множина значень незалежної змінної, Y — множина значень залежної змінної. **Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y.**

Зазвичай незалежну змінну позначають буквою x, залежну — буквою y, функцію (правило) — буквою f. Кажуть, що змінна y **функціонально залежить** від змінної x. Цей факт позначають так: $y = f(x)$.

Незалежну змінну ще називають **аргументом функції**.

Множину значень, яких набуває аргумент, тобто множину X, називають **областю визначення функції** і позначають $D(f)$ або $D(y)$.

Так, областю визначення оберненої пропорційності $y = \frac{2}{x}$ є множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Також можна записати $D(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

У функціональній залежності кожному значенню аргументу x відповідає певне значення залежної змінної y. Значення залежної змінної ще називають **значенням функції** і для функції f позначають $f(x)$. Множину значень, яких набуває залежна змінна y, тобто множину Y, називають **областю значень функції** і позначають $E(f)$ або $E(y)$. Так, областю значень функції $y = \sqrt{x}$ є множина $[0; +\infty)$.

Елементами множин $D(f)$ і $E(f)$ можуть бути об'єкти найрізноманітнішої природи.

Так, якщо кожному многокутнику поставити у відповідність його площу, то можна говорити про функцію, область визначення якої — множина многокутників, а область значень — множина додатних чисел.

Якщо кожній людині поставити у відповідність день тижня, у який вона народилася, то можна говорити про функцію, область визначення якої — множина людей, а область значень — множина днів тижня.

Коли $D(f) \subset \mathbb{R}$ і $E(f) \subset \mathbb{R}$, функцію f називають **числовою.**

Якщо областю визначення функції f є множина X, а областю значень — множина Y, то функцію f також називають **відображенням множини X на множину Y**. Слова «відображення» і «функція» є синонімами. Проте термін «відображення» частіше використовують тоді, коли при заданні функції хочуть наголосити, які множини є областю визначення і областю значень.

На рисунку 16 проілюстровано відображення множини X на множину Y (точками позначено елементи множин).

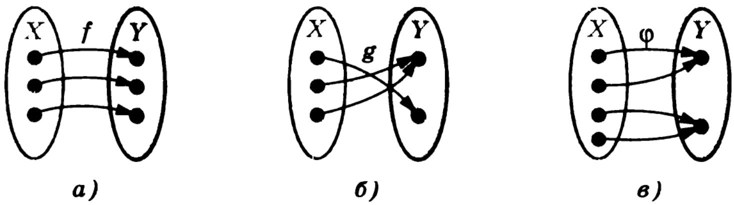


Рис. 16

Відображення f принципово відрізняється від відображень g і φ (рис. 16): у відображенні f кожний елемент множини Y є відповідним деякому єдиному елементу множини X. Таке відображення називають **взаємно однозначним відображенням множини X на множину Y**. Наприклад, нумерація елементів деякої зліченної множини M — це взаємно однозначне відображення множини $\mathbb{N}$ на множину M.

Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення і правило, за яким за кожним значенням незалежної змінної з області визначення можна знайти значення залежної змінної з області значень.

Функцію можна задати одним з таких способів:

- описово;
- за допомогою формули;
- за допомогою таблиці;
- графічно.

Розглянемо кілька прикладів функцій, заданих описово.

Кожному раціональному числу поставимо у відповідність число 1, а кожному ірраціональному — число 0. Функцію, задану таким чином, називають **функцією Діріхле** і позначають $y = \mathfrak{D}(x)$. Пишуть:

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, \text{ якщо } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Тут $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = \{0, 1\}$.

- Кожному дійсному числу x поставимо у відповідність найбільше ціле число, яке не перевищує число x. Таку функцію називають **цілою частиною числа** x і позначають $y = [x]$. Наприклад, $[\sqrt{2}] = 1$, $[2] = 2$, $[-\sqrt{2}] = -2$. Тут $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = \mathbb{Z}$.
- Кожному дійсному числу x поставимо у відповідність різницю $x - [x]$. Таку функцію називають **дробовою частиною числа** x і позначають $y = \{x\}$. Наприклад, $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - [\sqrt{2}] = \sqrt{2} - 1$, $\{2\} = 2 - [2] = 2 - 2 = 0$, $\{-\sqrt{2}\} = -\sqrt{2} - [-\sqrt{2}] = -\sqrt{2} - (-2) = 2 - \sqrt{2}$. Тут $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = [0; 1)$.
- Кожному від'ємному числу поставимо у відповідність число -1, кожному додатному числу — число 1, нулю — число 0. Функцію, задану таким чином, називають **сигнум** (від латинського *signum* — знак) і позначають $y = \operatorname{sgn} x$. Пишуть:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, \text{ якщо } x < 0, \\ 0, \quad \text{якщо } x = 0, \\ 1, \quad \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

  Значення цієї функції характеризує знак відповідного аргументу. Зауважимо, що $x \cdot \operatorname{sgn} x = |x|$.
- Розглянемо функцію f, у якої $D(f) = \mathbb{N}$. Вважатимемо, що $f(n) = 1$, якщо десятковий запис числа π містить n цифр 4, що йдуть поспіль, і $f(n) = 0$, якщо цей запис такої властивості не має. Звернемо увагу на те, що значення функції f обчислювати важко. Наприклад, ми не знаємо, чому дорівнює f (10 000 000 000). Проте й у такому випадку функцію вважають заданою.

Найчастіше функцію задають за допомогою формули. Якщо при цьому не вказано область визначення, то вважають, що областю визначення функції є область визначення виразу, який входить до формули. Наприклад, якщо функція f задана формулою $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, то її областю визначення є область визначення виразу $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, тобто проміжок $(1; +\infty)$.

Значення однієї функції можуть слугувати значеннями аргументу іншої функції.

Наприклад, розглянемо функції $f(x) = 2x - 1$ і $g(x) = x^2 + x + 1$. Тоді $f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2(x^2 + x + 1) - 1 = 2x^2 + 2x + 1$. Отже, можна говорити, що формула $y = 2x^2 + 2x + 1$ задає функцію $y = f(g(x))$.

Якщо значеннями аргументу функції f є значення функції g, то говорять, що задано складену функцію $y = f(g(x))$.

Існують функції, які на різних підмножинах області визначення задаються різними формулами. Наприклад,

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ 2x - 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Такі функції називають **кусково заданими.**

Спосіб задання функції однією чи кількома формулами називають **аналітичним.**

У тих випадках, коли область визначення функції є скінченною множиною і кількість її елементів не дуже велика, зручно використовувати табличний спосіб задання функції. Цей спосіб досить часто використовують на практиці. Так, результатом запису спостережень за якою-небудь характеристикою процесу (температурою, швидкістю, тиском і т. п.) є таблиця, яка задає відповідну функцію залежності цієї величини від часу.

Нагадаємо означення графіка функції.

Означення. Графіком числової функції f називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f.

Сказане означає, що коли якась фігура є графіком функції f, то виконуються дві умови:

1) якщо x_0 — деяке значення аргументу, а $f(x_0)$ — відповідне значення функції, то точка з координатами $(x_0; f(x_0))$ належить графіку;
2) якщо $(x_0; y_0)$ — координати довільної точки графіка, то x_0 і y_0 — відповідні значення незалежної і залежної змінних функції f, тобто $y_0 = f(x_0)$.

Фігура на координатній площині може бути графіком деякої числової функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має з цією фігурою не більше однієї спільної точки. Наприклад, коло не може слугувати графіком жодної функції.

Графічний спосіб задання функції широко застосовується при дослідженні реальних процесів. Існують прилади, які видають оброблену інформацію у вигляді графіків. Так, у медицині використовують електрокардіограф. Цей прилад рисує криві, які характеризують роботу серця.

Осцилограф

Електрокардіограф

ПРИКЛАД 1 Знайдіть область визначення функції

$$y=\sqrt{x^2(x-1)}.$$

Розв'язання. Область визначення даної функції — множина розв'язків нерівності

$$x^2(x-1) \geqslant 0.$$

Ця нерівність рівносильна сукупності $\left[\begin{array}{l} x^2=0, \\ x-1 \geqslant 0. \end{array}\right.$

Звідси $D(y) = \{0\} \cup [1; +\infty)$.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть область значень функції $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Розв'язання. Нехай $a \in E(y)$. Тоді задача зводиться до знаходження всіх значень a, при яких рівняння $\dfrac{2x}{1+x^2}=a$ має розв'язки.

Це рівняння рівносильне такому:

$2x = a + ax^2$, звідки $ax^2 - 2x + a = 0$.

Якщо $a = 0$, то отримане рівняння має корінь $x = 0$.

Якщо $a \neq 0$, то це рівняння є квадратним, і наявність коренів визначається умовою $D \geqslant 0$.

Маємо: $D = 4 - 4a^2$. Залишається розв'язати нерівність $4 - 4a^2 \geqslant 0$:

$$4a^2 \leqslant 4,\ a^2 \leqslant 1,\ |a| \leqslant 1.$$

Отже, $E(y) = [-1; 1]$.

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік функції $y = [x]$.

Розв'язання. Нехай $x \in [k; k+1)$, де $k \in \mathbb{Z}$. Тоді за означенням цілої частини числа $[x] = k$.

Тепер зрозуміло, що для побудови шуканого графіка потрібно область визначення функції розбити на проміжки виду $[k; k+1)$, де $k \in \mathbb{Z}$. На кожному з цих проміжків значення функції $y = [x]$ є сталим і дорівнює k.

Шуканий графік зображено на рисунку 17.

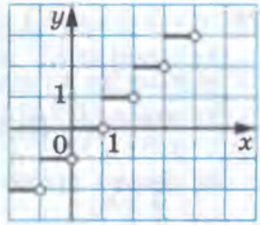


Рис. **17**

ПРИКЛАД 4 Побудуйте графік функції $y = \{x\}$.

Розв'язання. Спочатку доведемо важливі властивості цілої і дробової частин числа.

Якщо $k \in \mathbb{Z}$, то $[x + k] = [x] + k$.

Нехай $[x] = c$. Тоді за означенням цілої частини числа $c \leqslant x < c + 1$. Звідси $c + k \leqslant x + k < (c + k) + 1$. Отже, $[x + k] = c + k = [x] + k$.

Якщо $k \in \mathbb{Z}$, то $\{x + k\} = \{x\}$.

Маємо: $\{x + k\} = x + k - [x + k] = x + k - ([x] + k) = x - [x] = \{x\}$.

Доведена властивість дробової частини числа дозволяє стверджувати, що на кожному з проміжків виду $[k; k + 1)$, де $k \in \mathbb{Z}$, графік функції $y = \{x\}$ має однаковий вигляд. Тому досить побудувати його, наприклад, на проміжку $[0; 1)$, а потім отриману фігуру «розмножити».

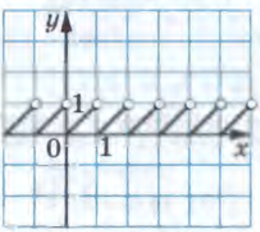


Рис. 18

Якщо $x \in [0; 1)$, то $[x] = 0$ і $\{x\} = x - [x] = x$, тобто при $x \in [0; 1)$ маємо $y = x$.

Шуканий графік зображено **на рисунку 18.**

Вправи

73.° Кожному натуральному числу, більшому за 10, але меншому від 20, поставили у відповідність остачу від ділення цього числа на 5.

1) Яким способом задано цю функцію?
2) Яка область значень цієї функції?
3) Задайте цю функцію таблично.

74.° Дано функції: $f(x) = [x]$, $g(x) = \{x\}$, $\varphi(x) = \mathfrak{D}(x)$. Знайдіть: 1) $f(3{,}2)$, $g(3{,}2)$, $\varphi(3{,}2)$; 2) $f(-3{,}2)$, $g(-3{,}2)$, $\varphi(-3{,}2)$; 3) $f(\sqrt{3})$, $g(\sqrt{3})$, $\varphi(\sqrt{3})$; 4) $f(-\sqrt{3})$, $g(-\sqrt{3})$, $\varphi(-\sqrt{3})$.

75.° На рисунку 19 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 5]$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) $f(-3{,}5)$; $f(-2{,}5)$; $f(-1)$; $f(2)$;
2) значення x, при яких $f(x) = -2{,}5$; $f(x) = -2$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$;
3) область значень функції.

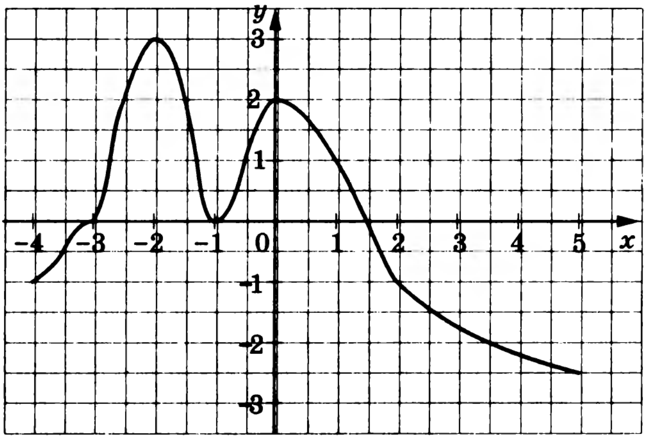


Рис. 19

76.° Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину з осями координат графіка функції:

1) $f(x) = \frac{1}{6}x - 7$;
2) $f(x) = \frac{20 + 4x}{3x - 5}$;
3) $g(x) = 9 - x^2$;
4) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 3$;
5) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

77.° Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину з осями координат графіка функції:

1) $h(x) = 9 - 10x$; 2) $p(x) = 4x^2 + x - 3$; 3) $s(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$.

78.° Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{якщо } x \leqslant -1, \\ x^2 - 5, & \text{якщо } -1 < x < 4, \\ 11, & \text{якщо } x \geqslant 4. \end{cases}$

Знайдіть: 1) $f(-3)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(6{,}4)$.

79.° Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} 9, & \text{якщо } x \leqslant -3, \\ x^2, & \text{якщо } -3 < x < 1, \\ x, & \text{якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$

80.° Побудуйте графік функції $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{4}{x}, \text{ якщо } x<-2,\\ -x, \text{ якщо } -2\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x>0.\end{cases}$

81.° Побудуйте графік функції $y = \operatorname{sgn} x$.

82.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{x+2}{x-5}$;
3) $f(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x^2-9}$;
2) $f(x)=\dfrac{x}{|x|-7}$;
4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{4x-3}{x^2-7x+6}$.

83.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\sqrt{x+4}+\dfrac{2}{x+1}$;
2) $f(x)=\sqrt{8-x}+\dfrac{4}{x^2-8x}$.

84.° Знайдіть область значень функції:

1) $f(x)=\sqrt{x}-1$;
4) $f(x) = |x+2|+2$;
2) $f(x) = 5 - x^2$;
5) $f(x)=\sqrt{-x^2}$;
3) $f(x) = -7$;
6) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$.

85.° Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = x^2 + 3$;
2) $f(x)=6-\sqrt{x}$;
3) $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$.

86.° Дано функції $f(x) = 1 - 3x$ і $g(x) = x^2 - 1$. Задайте формулою функцію:

1) $y = f(x+1)$;
3) $y = f(g(x))$;
5) $y = f(f(x))$;
2) $y=g\left(\dfrac{1}{x}\right)$;
4) $y = g(f(x))$;
6) $y = g(g(x))$.

87.° Дано функції $f(x)=\sqrt{x+1}$ і $g(x) = x^2 - 2x$. Задайте формулою функцію:

1) $y = f(3x)$;
3) $y = f(g(x))$;
5) $y = f(f(x))$;
2) $y = g(-x)$;
4) $y = g(f(x))$;
6) $y = g(g(x))$.

88.° Задайте формулою яку-небудь функцію, областю визначення якої є:

1) множина дійсних чисел, крім чисел 1 і 2;
2) множина всіх чисел, не менших від 5;
3) множина всіх чисел, не більших за 10, крім числа −1;
4) множина, яка складається з одного числа −4.

89.° Знайдіть область визначення та побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$;
2) $f(x)=\dfrac{12x-72}{x^2-6x}$;
3) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-9}$.

90.° Знайдіть область визначення та побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^3}{x}$.

91.• Функцію f задано описом: кожному натуральному числу поставлено у відповідність остачу від ділення цього числа на 3. Знайдіть $f(2)$, $f(0)$, $f(16)$, $f(21)$. Знайдіть $E(f)$. Доведіть, що $f(x)=f(x+3)$ для будь-якого $x \in \mathbb{N}$.

92.• Функцію g задано описом: кожному натуральному числу поставлено у відповідність остачу від ділення цього числа на 4. Знайдіть $g(3)$, $g(0)$, $g(14)$, $g(32)$. Знайдіть $E(g)$. Доведіть, що $g(x)=g(x+4)$ для будь-якого $x \in \mathbb{N}$.

93.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{4-|x|}+\dfrac{1}{x+2}$; 4) $y=\sqrt{|x+1|(x-3)}$;

2) $y=\sqrt{|x|-3}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$; 5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2(x+2)}}$;

3) $y=\sqrt{(x-1)^2(x-2)}$; 6) $y=\sqrt{\operatorname{sgn} x}$.

94.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-|x|}}+\dfrac{1}{x-2}$; 4) $y=\sqrt{(x+4)^2(x-3)}$;

2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-1}}+\sqrt{x+4}$; 5) $y=\sqrt{|x+5|(x+2)}$;

3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2(x+3)}}$; 6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sgn} x}}$.

95.•• Знайдіть область значень функції:

1) $y=3x^2-2x+1$; 3) $y=\dfrac{3x+1}{2x+3}$; 5) $y=x+\dfrac{9}{x}$.

2) $y=-2x^2+3x-4$; 4) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$;

96.•• Знайдіть область значень функції:

1) $y=5x^2-x+1$; 3) $y=\dfrac{2x-1}{5x+4}$; 5) $y=4x+\dfrac{1}{x}$.

2) $y=-3x^2-x-2$; 4) $y=\dfrac{2x}{x^2-4}$;

97.•• Побудуйте графік функції $y=\left(\sqrt{(x+2)^2x}\right)^2-x^3-4x^2$.

98.•• Побудуйте графік функції $y=x^3-\left(\sqrt{x^2(x-1)}\right)^2$.

99.•• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{1}{\mathfrak{D}(x)}$;

2) $y = \frac{1}{[x]}$;

3) $y = \frac{1}{\{x\}}$;

4) $y = \sqrt{-\mathfrak{D}(x)}$;

5) $y = \sqrt{\mathfrak{D}(x) - 1}$.

6. Зростання і спадання функції. Найбільше і найменше значення функції

Часто про властивості об'єкта можна робити висновки за його зображенням: фотографією, рентгенівським знімком, рисунком тощо.

«Зображенням» функції може слугувати її графік. Покажемо, як графік функції дозволяє визначити певні її властивості.

На рисунку 20 зображено графік деякої функції $y = f(x)$.

Її областю визначення є проміжок $[-4; 7]$, а областю значень — проміжок $[-4; 4]$.

При $x = -3$, $x = 1$, $x = 5$ значення функції дорівнює нулю.

Означення. **Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають нулем функції.**

Так, числа -3, 1, 5 є нулями даної функції.

Зауважимо, що на проміжках $[-4; -3)$ і $(1; 5)$ графік функції f розташований над віссю абсцис, а на проміжках $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ — під віссю абсцис. Це означає, що на проміжках $[-4; -3)$ і $(1; 5)$ функція набуває додатних значень, а на проміжках $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ — від'ємних.

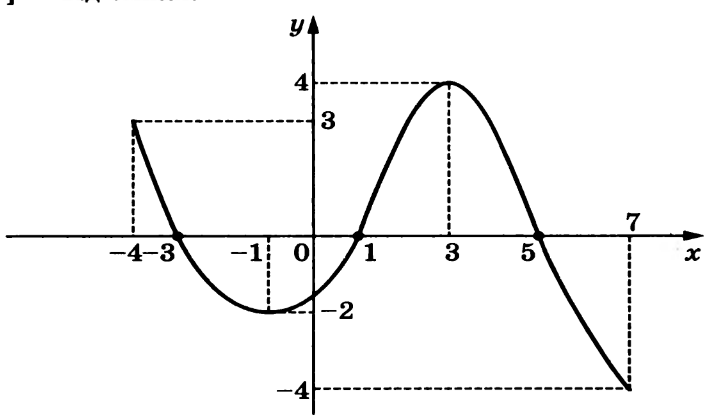


Рис. 20

Означення. Проміжок, на якому функція набуває значень однакового знака, називають проміжком знакосталості функції.

Наприклад, проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $y = x^2$.

Зауваження. Під час пошуку проміжків знакосталості функції прийнято вказувати проміжки максимальної довжини (точніше, ті, які не є власними підмножинами інших проміжків знакосталості). Наприклад, проміжок $(-2; -1)$ є проміжком знакосталості функції f (рис. 20), але до відповіді увійде проміжок $(-3; 1)$, який містить проміжок $(-2; -1)$.

Якщо переміщатися по осі абсцис від -4 до -1, то можна помітити, що графік функції йде вниз, тобто значення функції зменшуються. Кажуть, що на проміжку $[-4; -1]$ **функція спадає**. Із збільшенням x від -1 до 3 графік функції йде вгору, тобто значення функції збільшуються. Кажуть, що на проміжку $[-1; 3]$ **функція зростає**.

Означення. Функцію f називають зростаючою на множині $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Означення. Функцію f називають спадною на множині $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Часто використовують коротше формулювання.

Означення. Функцію f називають зростаючою (спадною) на множині M, якщо для будь-яких значень аргументу з цієї множини більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції.

Якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають **зростаючою**. Якщо функція спадає на всій області визначення, то її називають **спадною**.

Наприклад, на рисунку 21 зображено графік функції $y = \sqrt{x}$. Ця функція є зростаючою. На рисунку 22 зображено графік спадної функції $y = -x$.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, спадає на проміжку $(-\infty; 0]$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з проміжку $(-\infty; 0]$, до того ж $x_1 < x_2$. Покажемо, що $x_1^n > x_2^n$,

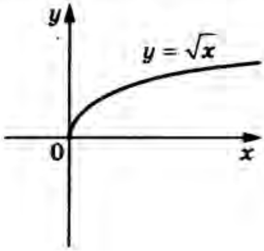


Рис. 21

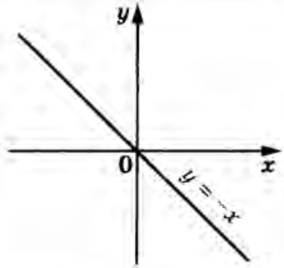


Рис. 22

тобто більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Маємо: $x_1 < x_2$, $-x_1 > -x_2$. Обидві частини останньої нерівності є невід'ємними числами. Тоді за властивістю числових нерівностей можна записати, що $(-x_1)^n > (-x_2)^n$. Оскільки n парне, то $x_1^n > x_2^n$.

Зазначимо, що в таких випадках кажуть, що проміжок $(-\infty; 0]$ є **проміжком спадання** заданої функції. Аналогічно можна довести, що проміжок $[0; +\infty)$ є **проміжком зростання** функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число.

З а у в а ж е н н я. У задачах на пошук проміжків зростання і спадання функції вказують ті проміжки, які не є власними підмножинами жодних інших проміжків зростання (спадання), аналогічно тому, як це робиться під час пошуку проміжків знакосталості.

Зазначимо, що існують функції, визначені на $\mathbb{R}$, які не є зростаючими (спадними) на жодному проміжку області визначення. Наприклад, такою функцією є константа. Ще одним прикладом такої функції є функція Діріхле.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з проміжку $(0; +\infty)$, причому $x_1 < x_2$. Тоді за властивістю числових нерівностей $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$. Отже, дана функція спадає на проміжку $(0; +\infty)$.

Аналогічно доводять, що функція f спадає на проміжку $(-\infty; 0)$.

Зауважимо, що не можна стверджувати, що дана функція спадає на всій області визначення $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, тобто є спадною. Дійсно, якщо, наприклад, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, то з нерівності $x_1 < x_2$ не випливає, що $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$.

Теорема 6.1. ***Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою (спадною) на множині M, то функція $y = -f(x)$ є спадною (зростаючою) на множині M.***

Доведення. Нехай, наприклад, функція $y = f(x)$ є зростаючою на множині M. Тоді для будь-яких x_1 і x_2, які належать множині M і таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$. Звідси $-f(x_1) > -f(x_2)$. Отже, функція $y = -f(x)$ є спадною.

Аналогічно доводять, що коли функція $y = f(x)$ спадає на множині M, то функція $y = -f(x)$ зростає на множині M. ▲

Теорема 6.2. ***Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є зростаючими (спадними) на множині M, то функція $y = f(x) + g(x)$ є зростаючою (спадною) на множині M.***

Доведіть теорему 6.2 самостійно.

Теорема 6.3. ***Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою (спадною) на множині $D(f)$, то рівняння $f(x) = a$, де a — деяке число, має не більше одного кореня.***

Доведення. Нехай функція f є зростаючою та рівняння $f(x) = a$ має два корені x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Тоді $f(x_1) < f(x_2)$. Проте $f(x_1) = a$, $f(x_2) = a$, тобто $f(x_1) = f(x_2)$. Отримали суперечність. Отже, рівняння $f(x) = a$ має не більше одного кореня.

Аналогічно розглядається випадок, коли функція f є спадною. ▲

З цього випливає таке твердження:

якщо функція f зростає (спадає) на $D(f)$ і $f(x_1) = f(x_2)$, то $x_1 = x_2$, тобто зростаюча (спадна) функція кожного свого значення набуває лише при одному значенні аргументу.

Наслідок. ***Якщо одна з функцій f або g є зростаючою на множині $D(f) \cap D(g)$, а інша — спадною на цій множині, то рівняння $f(x) = g(x)$ має не більше одного кореня.***

Доведіть це твердження самостійно.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $x^5 + \sqrt{2x-1} = 2$.

Розв'язання. Легко довести (зробіть це самостійно), що функції $f(x) = x^5$ і $g(x) = \sqrt{2x-1}$ є зростаючими. Отже, згідно з теоремою 6.2 функція $y = f(x) + g(x)$ є зростаючою на множині $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Тоді теорема 6.3 дозволяє стверджувати, що дане рівняння має не більше одного кореня.

Нескладно помітити, що $x = 1$ є коренем даного рівняння. Ураховуючи вищесказане, цей корінь є єдиним.

Відповідь: 1.

Нехай у множині $M \subset D(f)$ існує таке число x_0, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$. У такому випадку говорять, що число $f(x_0)$ — **найбільше значення функції f на множині M**, і записують $\max\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Якщо для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$, то число $f(x_0)$ називають **найменшим значенням функції f на множині M** і записують $\min\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Розглянемо кілька прикладів.

Для $f(x) = \sqrt{x}$ і множини $M = [0; 4]$ маємо: $\min\limits_{[0;4]} f(x) = \min\limits_{[0;4]} \sqrt{x} = f(0) = 0$, $\max\limits_{[0;4]} f(x) = f(4) = 2$ (рис. 23).

Для $f(x) = |x|$ і множини $M = [-1; 2]$ маємо: $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 2$ (рис. 24).

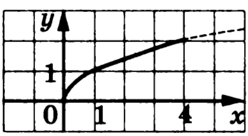


Рис. 23

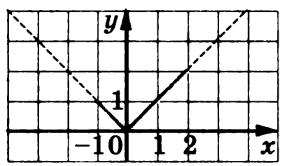


Рис. 24

Якщо c — деяке число і $f(x) = c$ для будь-якого $x \in M$, то число c є і найбільшим, і найменшим значенням функції f на множині M.

Не будь-яка функція на заданій множині $M \subset D(f)$ має найменше або найбільше значення. Так, для функцій $f(x) = x^2$ і $f(x) = \{x\}$ маємо, що $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 0$. Найбільшого значення на множині $\mathbb{R}$ ці функції не мають.

Функція $f(x) = \frac{1}{x}$ на множині $M = (0; +\infty)$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень.

Часто для знаходження найбільшого і найменшого значень функції зручно користуватися таким очевидним фактом:

- якщо функція f зростає на проміжку $[a; b]$, то $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ (рис. 25);
- якщо функція f спадає на проміжку $[a; b]$, то $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ (рис. 26).

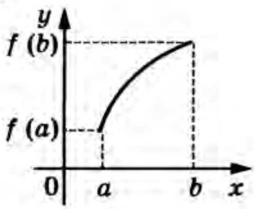


Рис. 25

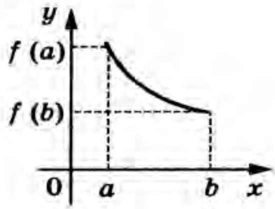


Рис. 26

ПРИКЛАД 4 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 + 3x + 2$ на відрізку $[-2; 1]$.

Розв'язання. Функції $y = x^3$ і $y = 3x + 2$ є зростаючими. За теоремою 6.2 зростаючою є і функція f. Отже, $\min\limits_{[-2;1]} f(x) = f(-2) = -12$, $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = f(1) = 6$.

Вправи

100.° На рисунку 27 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині $\mathbb{R}$. Які з даних тверджень є правильними:

1) функція спадає на проміжку $(-\infty; -9]$;
2) $f(x) < 0$ при $-5 \leqslant x \leqslant 1$;
3) функція зростає на проміжку $[-2; +\infty)$;
4) $f(x) = 0$ при $x = -5$ і при $x = 1$;
5) функція набуває найменшого значення при $x = -2$?

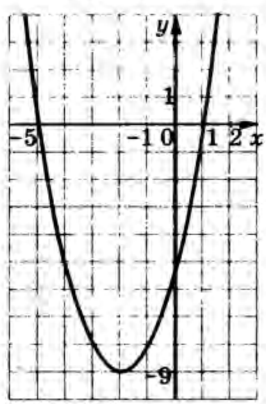


Рис. 27

101.° На рисунку 28 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині $\mathbb{R}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) значення x, при яких $y < 0$;
3) проміжок спадання функції;
4) область значень функції.

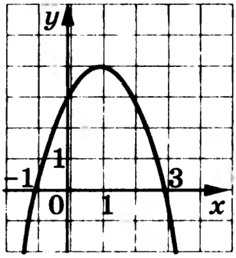


Рис. 28

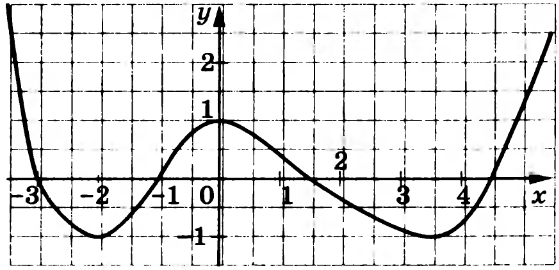


Рис. 29

102.° На рисунку 29 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині $\mathbb{R}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) проміжки знакосталості функції;
3) проміжки зростання і проміжки спадання функції;
4) $\min\limits_{R} f(x)$, $\max\limits_{R} f(x)$;
5) $\min\limits_{[-2;1]} f(x)$, $\max\limits_{[-2;1]} f(x)$;
6) $\min\limits_{[-1;4]} f(x)$, $\max\limits_{[-1;4]} f(x)$;
7) $\min\limits_{(-2;0)} f(x)$, $\max\limits_{(-2;0)} f(x)$.

103.° На рисунку 30 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині $\mathbb{R}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) проміжки знакосталості функції;
3) проміжки зростання і проміжки спадання функції;
4) $\min\limits_{[0;2]} f(x)$, $\max\limits_{[0;2]} f(x)$;
5) $\min\limits_{R} f(x)$, $\max\limits_{R} f(x)$;
6) $\min\limits_{[-1;0)} f(x)$, $\max\limits_{[-1;0)} f(x)$.

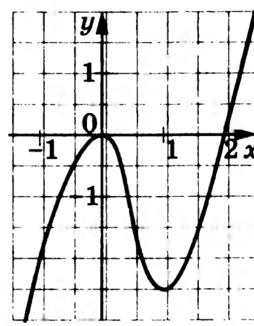


Рис. 30

104.° Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} 2x+8, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ -2x+8, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі даної функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання.

105.° Побудуйте графік функції $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, \text{ якщо } x<-1,\\ \dfrac{x}{4}, \text{ якщо } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{4}{x}, \text{ якщо } x>1.\end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі даної функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання.

106.° Доведіть, що лінійна функція $f(x) = kx + b$ є зростаючою при $k > 0$ і спадною при $k < 0$.

107.° Зростаючою чи спадною є функція:

1) $y = 9x - 4$;
2) $y = -4x + 10$;
3) $y = 12 - 3x$;
4) $y = -x$?

108.° Знайдіть нулі функції:

1) $y=\sqrt{x^2-1}$;
2) $y=\dfrac{x^2+x-6}{x+3}$;
3) $y = x^3 - 4x$;
4) $y = x^2 + 1$;
5) $y=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$;
6) $y=x\sqrt{x-1}$;
7) $y = |x| - x$.

109.° Знайдіть нулі функції:

1) $y=\sqrt{x^2-4}$;
2) $y = -5$;
3) $y=\dfrac{x^2-25}{x+5}$;
4) $y = |x| + x$;
5) $y=\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x-2}}$.

110.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = x^2 - 2x + 1$;
2) $y=\dfrac{9}{3-x}$;
3) $y=\sqrt{x-1}$;
4) $y = |x + 1|$.

111.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = -x^2 - 1$;
2) $y = x^2 + 4x + 4$;
3) $y=\sqrt{x}+2$;
4) $y = |x| - 1$;
5) $y = |x^2 - 4|$.

112.° Доведіть, що є зростаючою функція:

1) $y=\sqrt{x-1}$;
2) $y=\sqrt{2x+1}$.

113.° Доведіть, що є зростаючою функція:

1) $y=\sqrt{x-3}+2$;
2) $y=\sqrt{3x-1}-1$.

114.• Функція $y = f(x)$ є спадною. Зростаючою чи спадною є функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $y = 3f(x)$;
2) $y=\dfrac{1}{3}f(x)$;
3) $y = -f(x)$;
4) $y = f(x) + 5$?

115.° Функція $y = f(x)$ є зростаючою. Зростаючою чи спадною є функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $y = \frac{1}{2}f(x)$; 2) $y = -3f(x)$?

116.° Доведіть, що функція $y = x^n$, де $n \in \mathbb{N}$, n — непарне, є зростаючою.

117.° Доведіть, що функція $y = \frac{6}{3-x}$ зростає на проміжку $(3; +\infty)$.

118.° Доведіть, що функція $y = \frac{7}{x+5}$ спадає на проміжку $(-5; +\infty)$.

119.° Доведіть, що функція $y = \frac{k}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ при $k > 0$ і зростає на кожному з цих проміжків при $k < 0$.

120.° Доведіть, що є зростаючою функція:

1) $y = x^5 + x$; 2) $y = x^4 + \sqrt{x}$; 3) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x}$.

121.° Доведіть, що є спадною функція:

1) $y = -x^3 - x$; 2) $y = \sqrt{-x} - x$.

122.° При якому найменшому цілому значенні m функція $y = 7mx + 6 - 20x$ є зростаючою?

123.° При яких значеннях k функція $y = kx - 2k + 3 + 6x$ є спадною?

124.° При яких значеннях b функція $y = 3x^2 - bx + 1$ зростає на множині $[3; +\infty)$?

125.° При яких значеннях b функція $y = bx - 4x^2$ спадає на множині $[-1; +\infty)$?

126.° Функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел, є зростаючою і набуває лише додатних значень. Доведіть, що:

1) функція $y = f^2(x)$ зростає на множині $\mathbb{R}$;

2) функція $y = \frac{1}{f(x)}$ спадає на множині $\mathbb{R}$;

3) функція $y = \sqrt{f(x)}$ зростає на множині $\mathbb{R}$.

127.° Функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел, є зростаючою і набуває лише від'ємних значень. Доведіть, що:

1) функція $y = f^2(x)$ спадає на множині $\mathbb{R}$;

2) функція $y = \frac{1}{f(x)}$ спадає на множині $\mathbb{R}$.

128.° Чи можна стверджувати, що коли функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ зростають на множині M, то функція $y = f(x) - g(x)$ теж зростає на множині M?

129.˙ **Функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ спадають на деякій множині M і набувають на цій множині від'ємних значень. Доведіть, що функція $y = f(x)\,g(x)$ зростає на множині M.**

130.˙ **Наведіть приклад двох зростаючих на множині M функцій, добуток яких не є зростаючою на цій множині функцією.**

131.˙ **Знайдіть $\min\limits_M f(x)$ і $\max\limits_M f(x)$, якщо:**

1) $f(x) = x^2 - 6x + 10$, $M = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, $M = D(f)$.

132.˙ **Знайдіть $\min\limits_M f(x)$ і $\max\limits_M f(x)$, якщо:**

1) $f(x) = -x^2 - 8x - 3$, $M = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $M = (0;\ +\infty)$.

133.˙ **При яких значеннях c найбільше значення функції $y = -0{,}6x^2 + 18x + c$ дорівнює 2?**

134.˙ **При яких значеннях c найменше значення функції $y = 2x^2 - 12x + c$ дорівнює -3?**

135.˙ **Сума двох чисел дорівнює 8. Знайдіть:**

1) якого найбільшого значення може набувати добуток цих чисел;

2) якого найменшого значення може набувати сума квадратів цих чисел.

136.˙ Ділянку землі прямокутної форми обгородили парканом завдовжки 200 м. Яку найбільшу площу може мати ця ділянка?

137.˙˙ Розв'яжіть рівняння:

1) $x^5 + x^3 + x = -3$; 2) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} + \sqrt{x+13} = 9$.

138.˙˙ **Розв'яжіть рівняння:**

1) $2x^7 + x^5 + x = 4$; 2) $2\sqrt{x} + \sqrt{x-5} + \sqrt{2x+7} = 13$.

139.˙˙ **Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = 23 - 2x$.**

140.˙˙ **Розв'яжіть рівняння $x^2 + \sqrt{x} = \dfrac{12}{x} + 15$.**

7. Парні і непарні функції

Означення. Функцію f називають парною, якщо для будь-якого x з області визначення $f(-x) = f(x)$.

Означення. Функцію f називають непарною, якщо для будь-якого x з області визначення $f(-x) = -f(x)$.

Очевидно, що функція $y = x^2$ є парною, а функція $y = x^3$ — непарною.

Виконання рівності $f(-x) = f(x)$ або рівності $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого $x \in D(f)$ означає, що область визначення функції f має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $-x_0 \in D(f)$. Таку множину називають **симетричною відносно початку координат.**

З вищенаведених означень випливає, що коли область визначення функції не є симетричною відносно початку координат, то ця функція не може бути парною (непарною).

Наприклад, область визначення функції $y = \dfrac{1}{x-1}$ не є симетричною відносно початку координат. Тому ця функція не є ні парною, ні непарною.

Водночас у функції $f(x) = x^3 + x^2$ її область визначення $D(f) = \mathbb{R}$ є симетричною відносно початку координат. Проте ця функція не є ні парною, ні непарною. Дійсно,

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2; \quad -f(x) = -x^3 - x^2.$$

Існують деякі значення x, наприклад 0, при яких $f(-x) = f(x)$ або $f(-x) = -f(x)$, проте ці рівності виконуються не для всіх $x \in \mathbb{R}$. Наприклад, при $x = 1$ маємо $f(x) = 2$, а $f(-x) = 0$.

Підкреслимо, що для парності або непарності функції f необхідно, але не достатньо, щоб її область визначення була симетричною відносно початку координат.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що функція $f(x) = x^3 - x$ є непарною.

Розв'язання. Оскільки $D(f) = \mathbb{R}$, то область визначення функції f симетрична відносно початку координат.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$.

Отже, функція f є непарною.

ПРИКЛАД 2 Дослідіть на парність функцію

$$f(x) = \frac{|x-2|}{1+x} + \frac{|x+2|}{1-x}.$$

Розв'язання. Оскільки $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ і } x \neq 1\}$, то область визначення функції f симетрична відносно початку координат.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо:

$$f(-x) = \frac{|-x-2|}{1-x} + \frac{|-x+2|}{1-(-x)} = \frac{|x+2|}{1-x} + \frac{|x-2|}{1+x} = f(x).$$

Отже, функція f є парною.

Теорема 7.1. ***Вісь ординат є віссю симетрії графіка парної функції.***

Доведення. Якщо точка $M(a; b)$ належить графіку функції f, то $f(a) = b$. Оскільки функція f є парною, то $f(-a) = f(a) = b$. Це означає, що точка M_1 $(-a;\ b)$ також належить графіку функції f (рис. 31). ▲

Теорема 7.2 ***Початок координат є центром симетрії графіка непарної функції.***

Доведіть цю теорему самостійно (рис. 32).

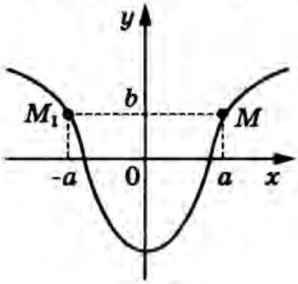


Рис. 31

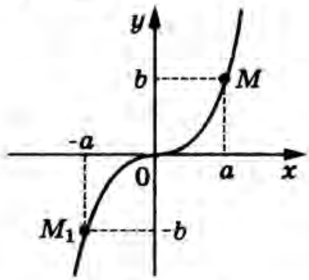


Рис. 32

Очевидно, що функція $y = 0$, у якої $D(y) = \mathbb{R}$, одночасно є і парною, і непарною. Можна показати, що інших функцій з областю визначення $\mathbb{R}$, які є одночасно і парними, і непарними, не існує.

Вправи

141.° Функція f є парною. Чи може виконуватися рівність:

1) $f(2) - f(-2) = 1$; 2) $f(5)\,f(-5) = -2$; 3) $\dfrac{f(1)}{f(-1)} = 0$?

142.° Функція f є парною. Чи обов'язково виконується рівність $\dfrac{f(1)}{f(-1)} = 1$?

143.° Функція f є непарною. Чи може виконуватися рівність:

1) $f(1) + f(-1) = 1$; 2) $f(2)\,f(-2) = 3$; 3) $\dfrac{f(-2)}{f(2)} = 0$?

144.° Доведіть, що є парною функція:

1) $f(x) = 171$;
2) $f(x) = x^n$, де $n \in \mathbb{N}$ і n — парне;
3) $f(x) = -3x^2 + |x| - 1$;
4) $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}$;
5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5} + \sqrt{x^2 + 3x + 5}$;
6) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}$;

7) $f(x)=\dfrac{|5x-2|+|5x+2|}{x^2-1}$;

8) $f(x)=\dfrac{1}{(3x-1)^7}-\dfrac{1}{(3x+1)^7}$;

9) $f(x)=(x+2)|x-4|-(x-2)|x+4|$.

145.° **Доведіть, що є непарною функція:**

1) $g(x)=x^n$, де $n\in\mathbb{N}$ і n — непарне;

2) $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$;

3) $g(x)=\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}$;

4) $g(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}$;

5) $g(x)=\dfrac{|4x-1|-|4x+1|}{x^4-1}$;

6) $g(x)=\dfrac{3x+2}{x^2-x+1}+\dfrac{3x-2}{x^2+x+1}$.

146.• **Дослідіть на парність функцію:**

1) $y=\dfrac{x}{x}$;

2) $y=\dfrac{x-1}{x-1}$;

3) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-1}$;

4) $y=\sqrt{x^2-1}$;

5) $y=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$.

147.• **На рисунку 33 зображено частину графіка функції $y=f(x)$, визначеної на проміжку $[-5;5]$. Добудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.**

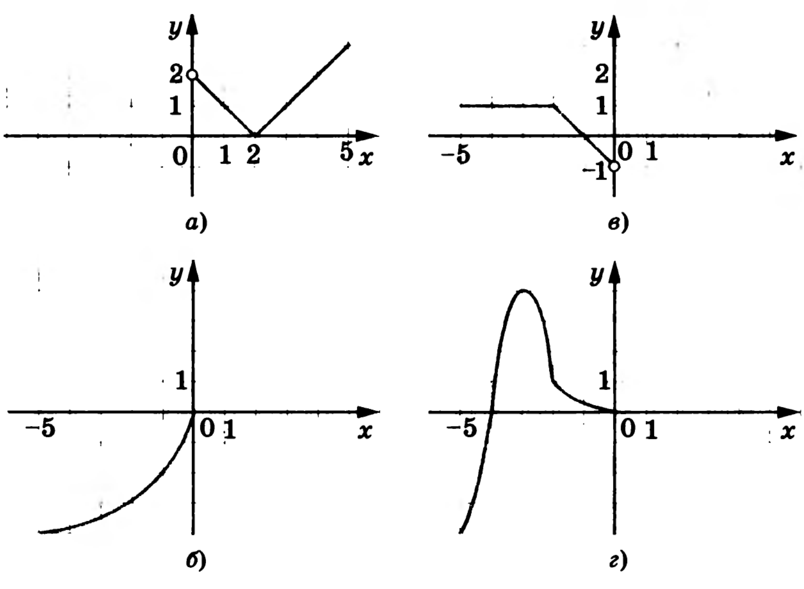


Рис. 33

148.° Ламана $ABCD$, де A (0; 0), B (2; −2), C (3; 4), D (6; 1), є частиною графіка функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку [−6; 6]. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

149.° Про функцію f, яка визначена на множині $\mathbb{R}$, відомо, що $f(x) = x^2 - 4x$ при $x \geqslant 0$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

150.° Про функцію f, яка визначена на множині $\mathbb{R}$, відомо, що $f(x) = -0,5x^2$ при $0 \leqslant x \leqslant 2$ і $f(x) = -\frac{4}{x}$ при $x > 2$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

151.° Область визначення функції f симетрична відносно початку координат. Доведіть, що функція $g(x) = f(x) + f(-x)$ є парною, а функція $h(x) = f(x) - f(-x)$ є непарною.

152.° Областю визначення парних функцій f і g є множина M. Дослідіть на парність функцію:

1) $y = f(x) + g(x)$; 2) $y = f(x) - g(x)$; 3) $y = f(x)\,g(x)$.

153.° Областю визначення парної функції f і непарної функції g є множина M. Дослідіть на парність функцію:

1) $y = f(x) + g(x)$; 2) $y = f(x) - g(x)$; 3) $y = f(x)\,g(x)$.

154.° Областю визначення непарних функцій f і g є множина M. Дослідіть на парність функцію:

1) $y = f(x) + g(x)$; 2) $y = f(x) - g(x)$; 3) $y = f(x)\,g(x)$.

155.° Непарні функції f і g такі, що функція $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ визначена. Дослідіть на парність функцію h.

156.° Одна з функцій, f або g, є парною, інша — непарною. Відомо, що $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ визначена. Дослідіть на парність функцію h.

157.•• Доведіть, що область значень непарної функції симетрична відносно початку координат.

158.•• Непарна функція f така, що $0 \in D(f)$. Знайдіть $f(0)$.

159.•• Непарна функція f має 4 нулі. Доведіть, що $0 \notin D(f)$.

160.•• Непарна функція f має 7 нулів. Знайдіть $f(0)$.

161.•• Парна функція f має 7 нулів. Знайдіть $f(0)$.

162.•• Дослідіть на парність функцію $f(n) = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$, $D(f) = \mathbb{Z}$.

163.•• Дослідіть на парність функцію $f(n) = (\sqrt{2}+1)^n - (\sqrt{2}-1)^n$, $D(f) = \mathbb{Z}$.

164.** **Парна функція f, визначена на $\mathbb{R}$, зростає на проміжку $[0;\ +\infty)$. Визначте, зростаючою чи спадною є функція f на проміжку $(-\infty;\ 0]$.**

165.** Непарна функція f, визначена на $\mathbb{R}$, зростає на проміжку $[0;\ +\infty)$. Визначте, зростаючою чи спадною є функція f на проміжку $(-\infty;\ 0]$.

166.** **Функція f є парною і $\min\limits_{[1;3]} f(x)=2$, $\max\limits_{[1;3]} f(x)=5$. Знайдіть $\min\limits_{[-3;-1]} f(x)$, $\max\limits_{[-3;-1]} f(x)$.**

167.** **Функція f є непарною і $\min\limits_{[2;5]} f(x)=1$, $\max\limits_{[2;5]} f(x)=3$. Знайдіть $\min\limits_{[-5;-2]} f(x)$, $\max\limits_{[-5;-2]} f(x)$.**

8. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

У 9 класі ви навчилися **за** допомогою графіка функції $y = f(x)$ будувати графіки функцій $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$, $y = kf(x)$. Нагадаємо правила, які дозволяють виконати такі побудови.

Графік функції $y = f(x) + b$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ на b одиниць угору, якщо $b > 0$, і на $-b$ одиниць униз, якщо $b < 0$.

На рисунках 34, 35 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = x^2 - 4$ і $y = \sqrt{x} + 3$.

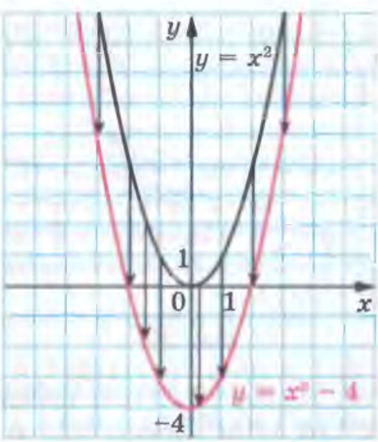


Рис. 34

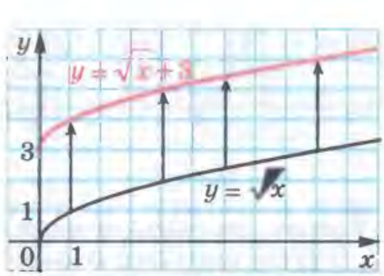


Рис. 35

Графік функції $y = f(x + a)$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ на a одиниць уліво, якщо $a > 0$, і на $-a$ одиниць управо, якщо $a < 0$.

На рисунках 36, 37 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = (x - 2)^2$ і $y = \sqrt{x+3}$.

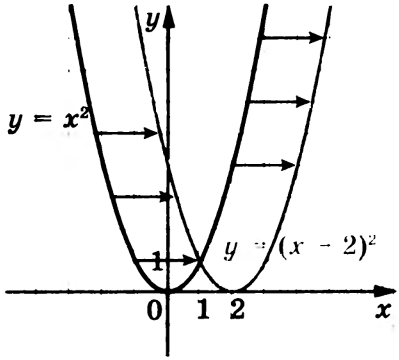


Рис. 36

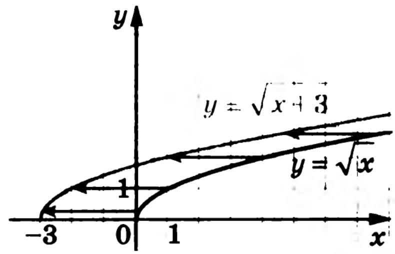


Рис. 37

Графік функції $y = kf(x)$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою абсцисою і ординатою, помноженою на k.

На рисунках 38, 39, 40 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$, $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ і $y = -2\sqrt{x}$.

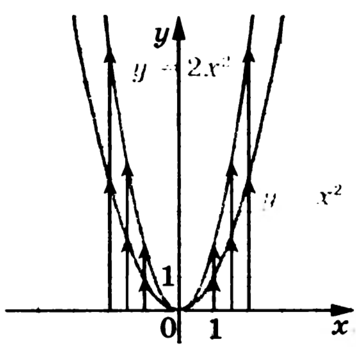


Рис. 38

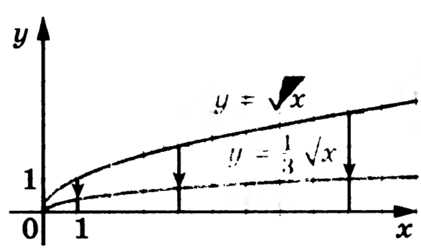


Рис. 39

Кажуть, що графік функції $y = kf(x)$ отримано з графіка функції $y = f(x)$ у результаті **розтягу в k разів від осі абсцис**, якщо $k > 1$, або в результаті **стиску в $\frac{1}{k}$ разів до осі абсцис**, якщо $0 < k < 1$.

Покажемо, як можна побудувати графік функції $y = f\ (kx)$, якщо відомо графік функції $y = f\ (x)$.

Розглянемо випадок, коли $k > 0$. Якщо точка $(x_0;\ y_0)$ належить графіку функції $y = f\ (x)$, то точка $\left(\frac{x_0}{k};\ y_0\right)$ належить графіку функції $y = f\ (kx)$. Справді, при $x = \frac{x_0}{k}$ маємо:

$$f\,(kx) = f\left(k \cdot \frac{x_0}{k}\right) = f\,(x_0) = y_0.$$

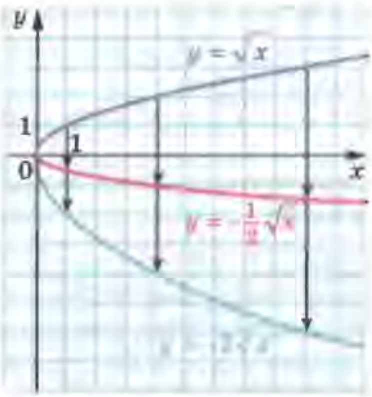


Рис. 40

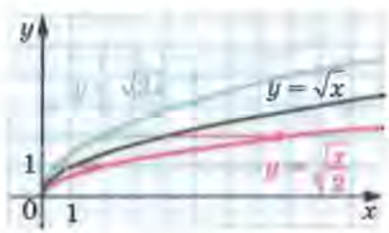


Рис. 41

Отже, кожній точці $(x_0;\ y_0)$ графіка функції $y = f(x)$ відповідає єдина точка $\left(\frac{x_0}{k};\ y_0\right)$ графіка функції $y = f\ (kx)$. Аналогічно можна показати (зробіть це самостійно), що кожна точка $(x_1;\ y_1)$ графіка функції $y = f\ (kx)$ є відповідною єдиній точці $(kx_1;\ y_1)$ графіка функції $y = f\ (x)$. Тобто між точками графіків функцій $y = f\ (x)$ і $y = f\ (kx)$ можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Тому *графік функції $y = f\ (kx)$, де $k > 0$, можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f\ (x)$ на точку з тією самою ординатою і абсцисою, поділеною на k.*

На рисунку 41 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = \sqrt{2x}$ і $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$.

Говорять, що графік функції $y = f\ (kx)$ отримано з графіка функції $y = f\ (x)$ у результаті стиску в k разів до осі ординат, якщо $k > 1$, або в результаті розтягу в $\frac{1}{k}$ разів від осі ординат, якщо $0 < k < 1$.

Покажемо, як побудувати графік функції $y = f(-x)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$.

Зазначимо, що коли точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $(-x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(-x)$. Дійсно, $f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$.

Зрозуміло, що між точками графіків функцій $y = f(x)$ і $y = f(-x)$ можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Тоді всі точки графіка функції $y = f(-x)$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку, симетричну їй відносно осі ординат, тобто відобразивши графік функції $y = f(x)$ симетрично відносно осі ординат.

Таке перетворення графіка функції $y = f(x)$ називають **симетрією відносно осі ординат.**

На рисунку 42 показано, як за допомогою графіка функції $y=\sqrt{x}$ побудовано графік функції $y=\sqrt{-x}$.

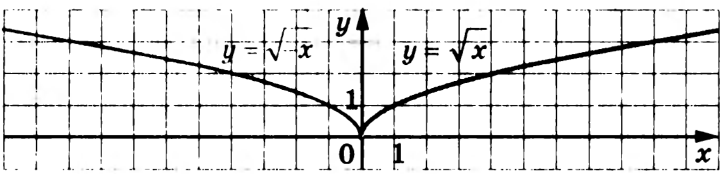


Рис. 42

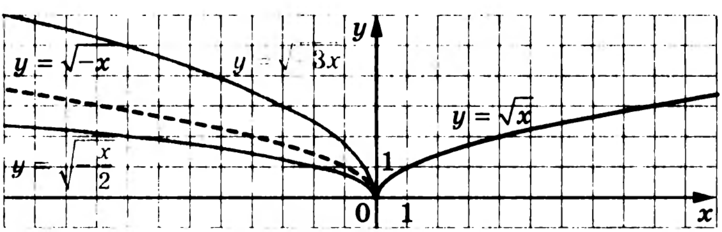


Рис. 43

З огляду на сказане стає зрозумілим, що правило побудови графіка функції $y = f(kx)$, де $k < 0$, аналогічне випадку, коли $k > 0$. Наприклад, на рисунку 43 показано, як можна за допомогою графіка функції $y=\sqrt{x}$ побудувати графіки функцій $y=\sqrt{-3x}$ і $y=\sqrt{-\frac{x}{2}}$.

ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік функції $y=\sqrt{3x-2}$.

Розв'язання. Схема побудови має такий вигляд (рис. 44):

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{на 2 од.}]{\text{управо}} y=\sqrt{x-2}\xrightarrow[\text{до осі ординат}]{\text{стиск у 3 рази}} y=\sqrt{3x-2}$$

Якщо задану функцію подати у вигляді $y=\sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}$, то побудову графіка можна вести і за такою схемою (рис. 45):

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{до осі ординат}]{\text{стиск у 3 рази}} y=\sqrt{3x}\xrightarrow[\text{на }\frac{2}{3}\text{ од.}]{\text{управо}} y=\sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}$$

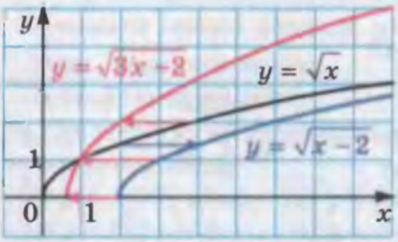


Рис. 44

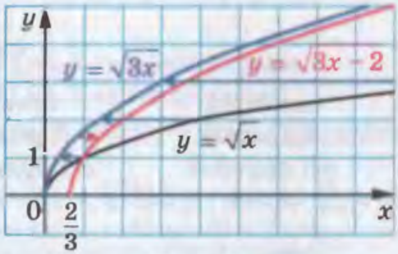


Рис. 45

ПРИКЛАД 2 Побудуйте графік функції $y=\sqrt{1-3x}$.

Розв'язання. Побудову графіка можна вести за такою схемою (рис. 46):

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{1 од.}]{\text{уліво на}} y=\sqrt{x+1}\xrightarrow[\text{ординат}]{\text{симетрія відносно осі}} y=\sqrt{-x+1}\xrightarrow[\text{осі ординат}]{\text{стиск у 3 рази до}} y=\sqrt{-3x+1}$$

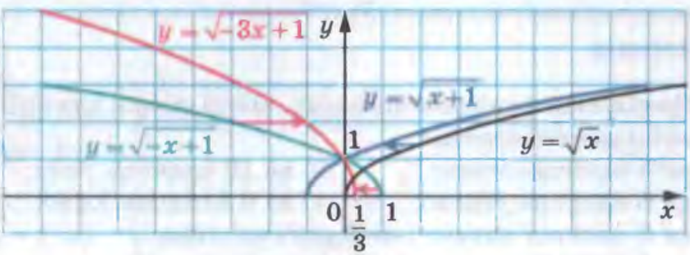


Рис. 46

Зауважимо, що можливі й інші схеми розв'язування цієї задачі, наприклад, так (рис. 47, 48):

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{уліво на 1 од.}} y=\sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}} y=\sqrt{3x+1} \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y=\sqrt{-3x+1}$$

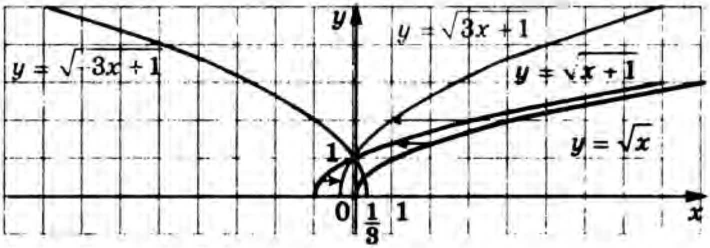


Рис. 47

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y=\sqrt{-x} \xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}} y=\sqrt{-3x} \xrightarrow{\text{управо на } \frac{1}{3} \text{ од.}} y=\sqrt{-3\left(x-\frac{1}{3}\right)}$$

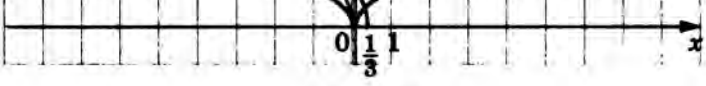


Рис. 48

Вправи

168. Графік якої функції отримаємо, якщо графік функції $y = x^2$ паралельно перенесемо:

1) на 5 одиниць угору;
2) на 8 одиниць управо;
3) на 10 одиниць униз;
4) на 6 одиниць уліво;
5) на 3 одиниці вправо і на 2 одиниці вниз;
6) на 1 одиницю вліво і на 1 одиницю вгору?

169.° Графік якої з наведених функцій отримаємо, якщо паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ на 4 одиниці вправо:

1) $y = x^2 + 4$;
2) $y = x^2 - 4$;
3) $y = (x + 4)^2$;
4) $y = (x - 4)^2$?

170.° Графік якої з наведених функцій отримаємо, якщо паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ на 5 одиниць угору:

1) $y = x^2 + 5$;
2) $y = x^2 - 5$;
3) $y = (x + 5)^2$;
4) $y = (x - 5)^2$?

171. Як треба паралельно перенести графік функції $y = \frac{5}{x}$, щоб отримати графік функції $y = \frac{5}{x-8}$:

1) на 8 одиниць угору;
2) на 8 одиниць униз;
3) на 8 одиниць управо;
4) на 8 одиниць уліво?

172.° Як треба паралельно перенести графік функції $y = \sqrt{x}$, щоб отримати графік функції $y = \sqrt{x+3}$:

1) на 3 одиниці вгору;
2) на 3 одиниці вниз;
3) на 3 одиниці вправо;
4) на 3 одиниці вліво?

173.° На рисунку 49 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = f(x) - 2$;
2) $y = f(x) + 4$;
3) $y = f(x - 3)$;
4) $y = f(x + 1)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = 3 - f(x)$.

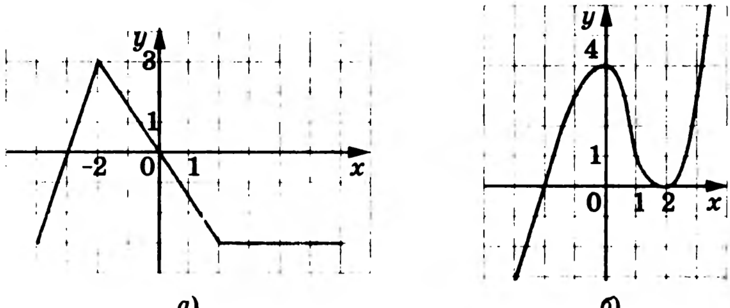


Рис. 49

174.° На рисунку 50 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = f(x) + 5$;
2) $y = f(x) - 3$;
3) $y = f(x + 1)$;
4) $y = f(x - 2)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = -f(x) - 1$.

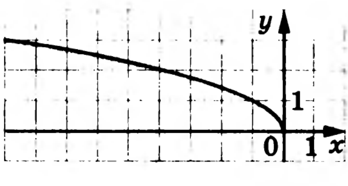


Рис. 50

175.° Побудуйте графік функції $y = x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 - 3$;
2) $y = x^2 + 4$;
3) $y = (x - 5)^2$;
4) $y = (x + 2)^2$;
5) $y = (x - 1)^2 + 2$;
6) $y = (x + 3)^2 - 2$.

176.° Побудуйте графік функції $y = -x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = -x^2 + 1$;
2) $y = -x^2 - 2$;
3) $y = -(x - 2)^2$;
4) $y = -(x + 4)^2$;
5) $y = -(x + 1)^2 - 1$;
6) $y = -(x - 3)^2 + 4$.

177.• Побудуйте графік функції $y = -\frac{6}{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = -\frac{6}{x} + 5$;
2) $y = -\frac{6}{x-2}$;
3) $y = -\frac{6}{x+4} - 2$.

178.• Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x} - 4$;
2) $y = \sqrt{x-4}$;
3) $y = \sqrt{x-1} + 3$.

179.• Побудуйте графік функції $y = \frac{2}{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{2}{x} - 1$;
2) $y = \frac{2}{x+1}$;
3) $y = \frac{2}{x-3} + 6$.

180.• Задайте дану функцію формулою виду $y = a(x - m)^2 + n$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 4x + 6$;
2) $y = -x^2 + 6x - 6$;
3) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
4) $y = 0{,}2x^2 - 2x - 4$.

181.• Задайте дану функцію формулою виду $y = \frac{k}{x+a} + b$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = \frac{k}{x}$:

1) $y = \frac{3x+8}{x}$;
2) $y = \frac{2x+14}{x+3}$;
3) $y = \frac{-2x}{x-1}$.

182.• Задайте дану функцію формулою виду $y = \frac{k}{x+a} + b$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = \frac{k}{x}$:

1) $y = \frac{4x+14}{x+1}$; 2) $y = \frac{7-x}{x-2}$.

183.• На рисунку 51 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{2} f(x)$; 2) $y = -3f(x)$.

184.• На рисунку 52 зображено графік функції $y = g(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2g(x)$; 2) $y = -\frac{1}{4} g(x)$.

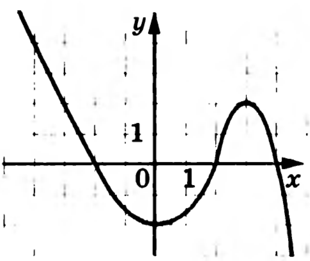


Рис. 51

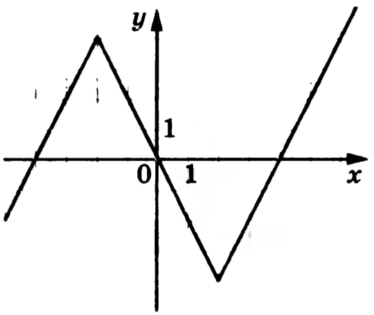


Рис. 52

185.• Побудуйте графік функції:

1) $y = 0{,}5\sqrt{x}$; 2) $y = -2\sqrt{x-2}$.

186.• Побудуйте графік функції:

1) $y = 3\sqrt{x}$; 2) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x+4}$.

187.• На рисунку 51 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = f(2x)$; 2) $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$.

188.• На рисунку 52 зображено графік функції $y = g(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = g\left(\frac{x}{2}\right)$; 2) $y = g(4x)$.

189.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{\frac{x}{3}}$; 2) $y=\sqrt{-2x}$.

190.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{3x}$; 2) $y=\sqrt{\frac{x}{4}}$; 3) $y=\sqrt{-\frac{x}{3}}$.

191.$^{\bullet}$ Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x+1=\sqrt{x+7}$; 2) $2\sqrt{x}=3-x$; 3) $\frac{2}{x-2}=x-3$.

192.$^{\bullet}$ Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{3-x}=0{,}5x$; 2) $\sqrt{x}+2=\frac{12}{x-1}$.

193.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{2x-1}$; 2) $y=\sqrt{3-4x}$; 3) $y=\sqrt{\frac{1}{2}x+2}$.

194.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{3x+1}$; 2) $y=\sqrt{5-2x}$.

9. Як побудувати графіки функцій $y=f(|x|)$ і $y=|f(x)|$, якщо відомо графік функції $y=f(x)$

Скориставшись означенням модуля, запишемо:

$$y=f(|x|)=\begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ f(-x), & \text{якщо } x<0. \end{cases}$$

Звідси можна зробити висновок, що графік функції $y=f(|x|)$ при $x \geqslant 0$ збігається з графіком функції $y=f(x)$, а при $x<0$ — з графіком функції $y=f(-x)$.

Тоді побудову графіка функції $y = f(|x|)$ можна проводити за такою схемою:

1) побудувати ту частину графіка функції $y = f(x)$, усі точки якої мають невід'ємні абсциси;
2) побудувати ту частину графіка функції $y = f(-x)$, усі точки якої мають від'ємні абсциси.

Об'єднання цих двох частин і складатиме графік функції $y = f(|x|)$.

Фактично це означає, що слід побудувати графік функції $y = f(x)$ для $x \geqslant 0$, а потім відобразити його симетрично відносно осі ординат.

На рисунку 53 показано, як за допомогою графіка функції $y = (x-2)^2$ побудовано графік функції $y = (|x|-2)^2$.

Для функції $y = |f(x)|$ можна записати:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що графік функції $y = |f(x)|$ при всіх x, для яких $f(x) \geqslant 0$, збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при всіх x, для яких $f(x) < 0$, — з графіком функції $y = -f(x)$.

Тоді будувати графік функції $y = |f(x)|$ можна за такою схемою:

1) усі точки графіка функції $y = f(x)$ з невід'ємними ординатами залишити незмінними;

2) точки з від'ємними ординатами замінити на точки з тими самими абсцисами, але протилежними ординатами, тобто частину графіка $y = f(x)$, розміщену нижче від осі абсцис, відобразити симетрично відносно осі абсцис.

На рисунку 54 показано, як за допомогою графіка функції $y = (x-1)^2 - 2$ побудовано графік функції $y = |(x-1)^2 - 2|$.

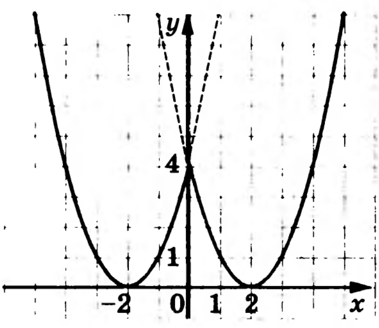


Рис. 53

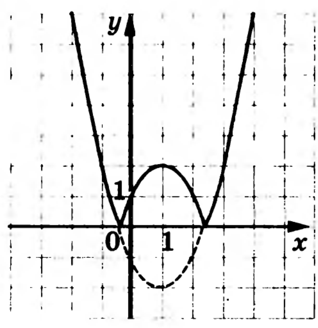


Рис. 54

ПРИКЛАД Побудуйте графік функції $y=\left|\sqrt{|x|+1}-2\right|$.

Розв'язання. Алгоритм побудови шуканого графіка можна подати у вигляді такої схеми (рис. 55):

$$y=\sqrt{x+1}\xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y=\sqrt{|x|+1}\xrightarrow{\text{униз на 2 од.}} y=\sqrt{|x|+1}-2\xrightarrow{\text{симетрія відносно осі абсцис}} y=\left|\sqrt{|x|+1}-2\right|$$

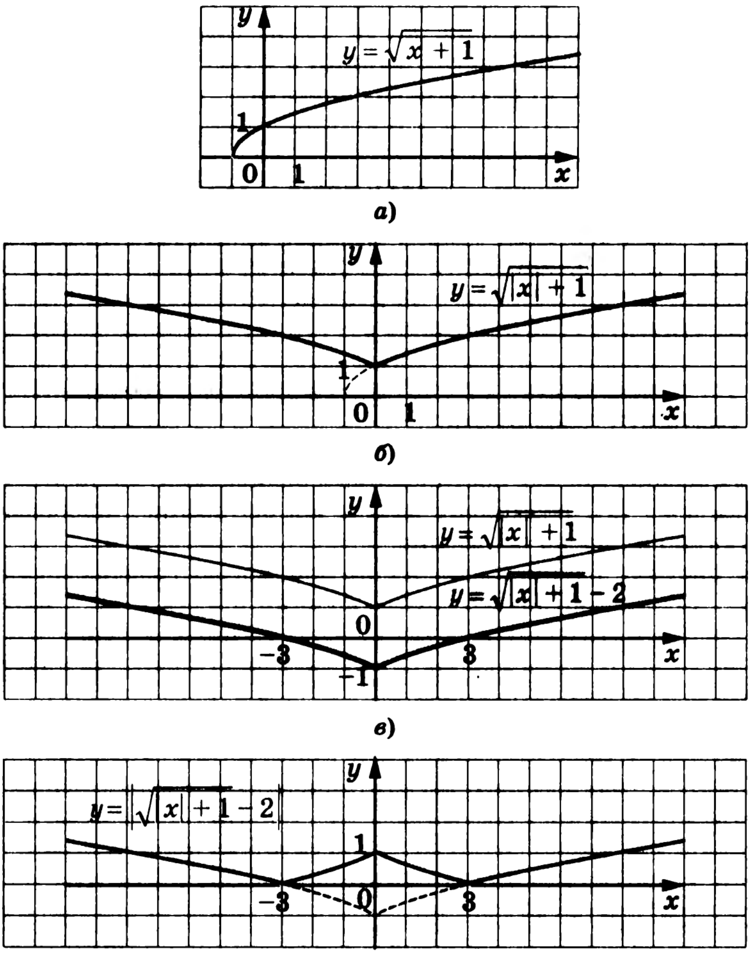


Рис. 55

ПРИКЛАД 2 Побудуйте графік функції $y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$.

Розв'язання. Побудову шуканого графіка можна подати за такою схемою (рис. 56):

$$y = \sqrt{|x|} \xrightarrow[\text{1 од.}]{\text{уліво на}} y = \sqrt{|x+1|} \xrightarrow[\text{1 од.}]{\text{униз на}} y = \sqrt{|x+1|} - 1 \xrightarrow[\text{осі абсцис}]{\text{симетрія відносно}} y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$$

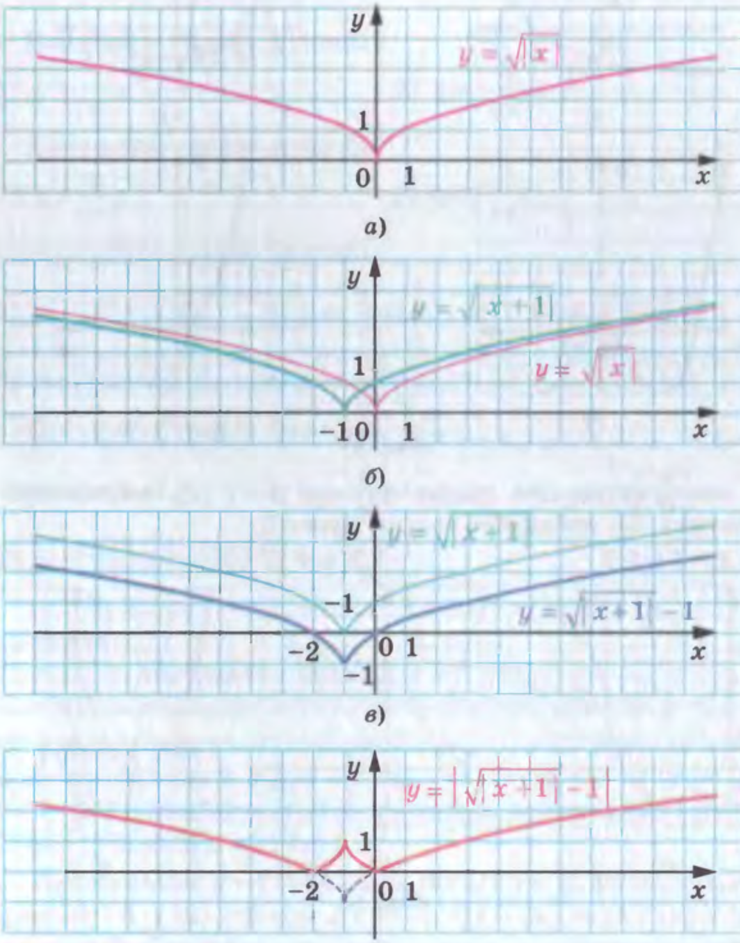


Рис. 56

Вправи

195.° Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 57, побудуйте графік функції:

1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

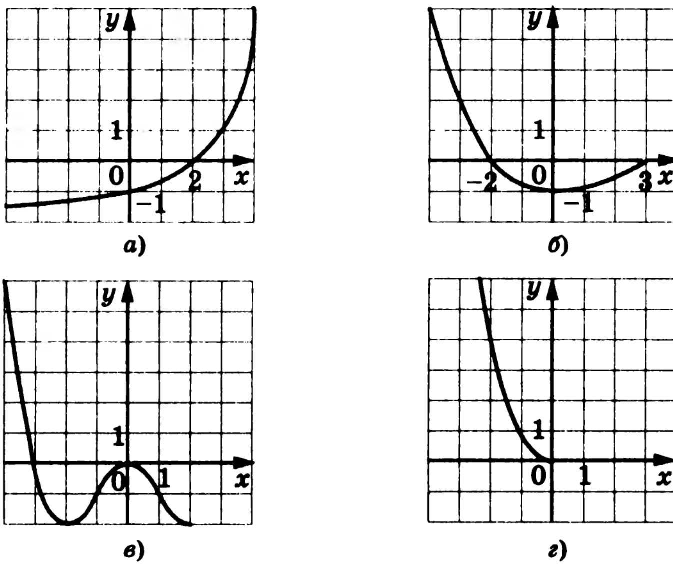


Рис. 57

196.° Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 58, побудуйте графік функції:

1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

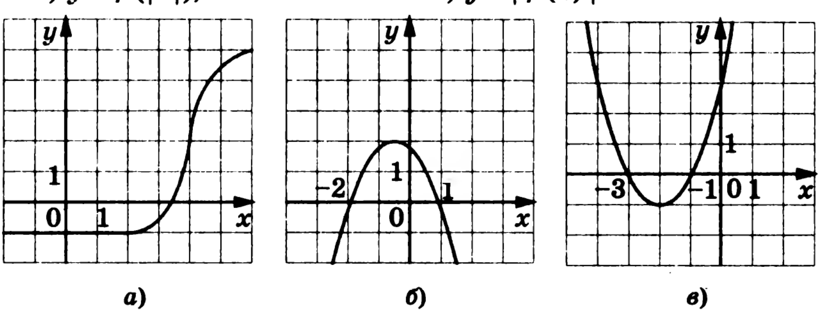


Рис. 58

197.° Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 59, побудуйте графік функції $y = |f(|x|)|$.

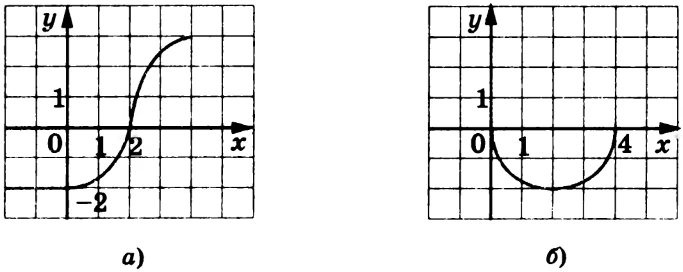


Рис. 59

198.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{1}{|x|}$; 2) $y = -\dfrac{6}{|x|}$.

199.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{2}{|x|}$; 2) $y = -\dfrac{1}{|x|}$.

200.• Побудуйте графік функції:

1) $y = |x^2 - 1|$; 3) $y = \left|\dfrac{2}{x} - 1\right|$; 5) $y = \left|\dfrac{x-4}{x+1}\right|$.

2) $y = |\sqrt{x} - 2|$; 4) $y = \left|\dfrac{2}{x-1}\right|$;

201.• Побудуйте графік функції:

1) $y = |x^2 - 4|$; 3) $y = \left|\dfrac{4}{x} - 2\right|$; 5) $y = \left|\dfrac{x+2}{x-3}\right|$.

2) $y = |\sqrt{x} - 1|$; 4) $y = \left|\dfrac{4}{x-2}\right|$;

202.•• Про функцію $y = f(x)$ відомо, що $D(f) = [-3; 7]$ і $E(f) = [-6; 5]$. Знайдіть:

1) область визначення функції $y = f(|x|)$;

2) область визначення та область значень функції $y = |f(x)|$.

203.•• Про функцію $y = f(x)$ відомо, що $D(f) = \mathbb{R}$, функція має два нулі −3 і 2, $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$ і $f(x) < 0$ при $x \in (-3; 2)$. Знайдіть нулі та проміжки знакосталості функції: 1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

204.•• Про функцію $y = f(x)$ відомо, що $D(f) = \mathbb{R}$, функція має два нулі −1 і 3, $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ і $f(x) > 0$ при $x \in (-1; 3)$. Знайдіть нулі та проміжки знакосталості функції: 1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

205.** Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 60, побудуйте графік функції: 1) $y = f(|x| - 1)$; 2) $y = f(|x - 1|)$.

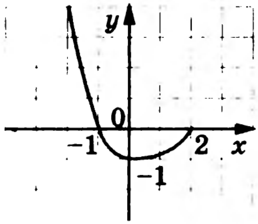


Рис. 60

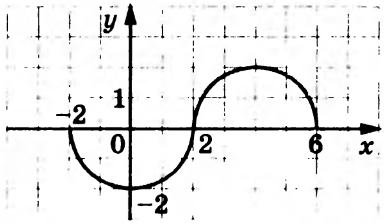


Рис. 61

206.** Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 61, побудуйте графік функції: 1) $y = f(|x| + 2)$; 2) $y = f(|x + 2|)$.

207.** Побудуйте графік функції:

1) $y = (|x| - 1)^2$; 2) $y = \sqrt{|x| + 2}$; 3) $y = \dfrac{1}{|x| - 3}$; 4) $y = \sqrt{1 - |x|}$.

208.** Побудуйте графік функції:

1) $y = (|x| + 2)^2$; 2) $y = \sqrt{|x| - 3}$; 3) $y = \dfrac{1}{|x| - 4}$; 4) $y = \sqrt{2 - |x|}$.

209.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{|x + 2|}$;
2) $y = (|x - 2| - 1)^2$;
3) $y = \sqrt{|x - 1| + 2}$;
4) $y = \dfrac{1}{|x + 1| - 3}$.

210.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{|x - 3|}$;
2) $y = (|x + 1| + 2)^2$;
3) $y = \sqrt{|x - 2| - 3}$;
4) $y = \dfrac{1}{|x - 1| - 4}$.

211.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{2|x| - 1}$; 2) $y = \sqrt{1 - 3|x|}$; 3) $y = \sqrt{|2x - 1|}$.

212.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{3|x| + 1}$; 2) $y = \sqrt{|3x + 1|}$.

213.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\dfrac{4}{|x|} - 2\right|$; 2) $y = \left|\dfrac{4}{|x| - 2}\right|$; 3) $y = |1 - |1 - |x|||$.

214.** **Побудуйте графік функції:**

1) $y = ||x| - 4|$;
2) $y = |2|x| - 4|$;
3) $y = |||x - 1| - 1| - 1|$.

215.** **Побудуйте графік функції:**

1) $y = \left|\sqrt{|x| - 1} - 1\right|$;
2) $y = \left|\sqrt{|x - 1|} - 1\right|$;
3) $y = \left|\frac{1}{|x| - 2} - 1\right|$;
4) $y = \left|\frac{1}{|x - 2|} - 1\right|$;
5) $y = \left|\frac{|x| + 2}{|x| - 1}\right|$.

216.** **Побудуйте графік функції:**

1) $y = \left|\sqrt{2|x| - 1} - 1\right|$;
2) $y = \left|\sqrt{|3x + 1|} - 2\right|$;
3) $y = \left|\frac{|x| - 2}{|x| + 1}\right|$.

10. Обернена функція

На рисунках 62, 63 зображено графіки функцій f і g.

Будь-яка горизонтальна пряма перетинає графік функції f не більше ніж в одній точці. Це означає, що кожному числу $y_0 \in E(f)$ відповідає єдине число $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$. Функція g такої властивості не має. Справді, з рисунка 63 видно, що значенню y_0 відповідають два значення аргументу x_1 і x_2 такі, що $y_0 = g(x_1)$ і $y_0 = g(x_2)$.

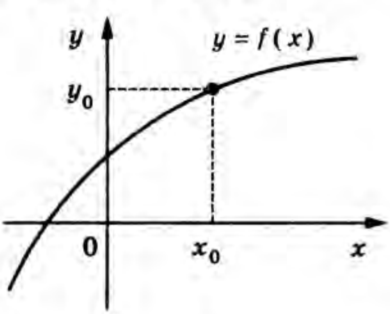


Рис. 62

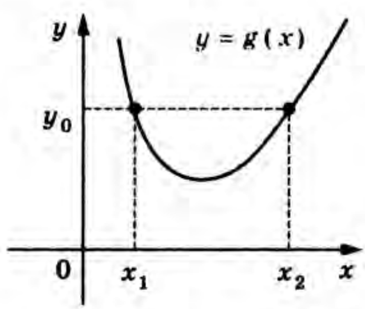


Рис. 63

Означення. **Функцію $y = f(x)$ називають** оборотною, **якщо для будь-якого $y_0 \in E(f)$ існує єдине $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$.**

Функція f (рис. 62) є оборотною. Функція g (рис. 63) не є оборотною.

Функції $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ є прикладами оборотних функцій (рис. 64).

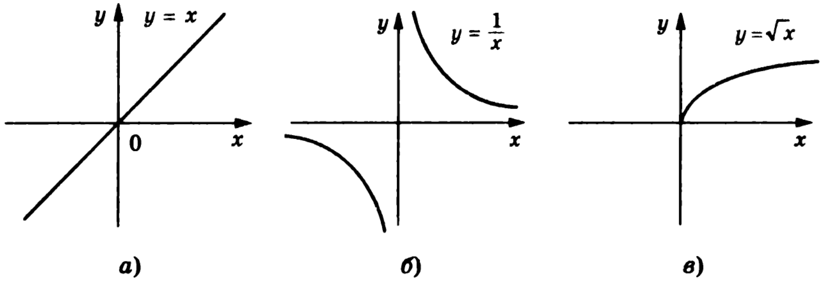


Рис. 64

Функція $y = x^2$ не є оборотною. Наприклад, значенню функції, яке дорівнює 4, відповідають два значення аргументу $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$.

Теорема 10.1. ***Якщо функція є зростаючою (спадною), то вона є оборотною.***

Доведення. Припустимо, що існує зростаюча функція f, яка не є оборотною. Тоді знайдеться $y_0 \in E(f)$, для якого існують x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$) такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Разом з тим функція f — зростаюча, і з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) < f(x_2)$. Отримали суперечність.

Аналогічно розглядається випадок, коли функція f є спадною. ▲

Зазначимо, що обернена теорема не є правильною, тобто не будь-яка оборотна функція є зростаючою (спадною).

На рисунку 65 зображено графік оборотної функції, яка не є ні зростаючою, ні спадною.

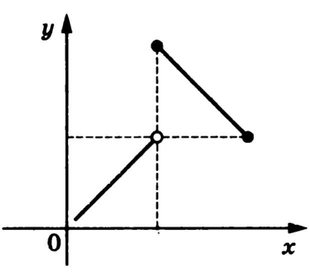


Рис. 65

Розглянемо функцію $y = f(x)$, задану таблично:

x	5	6	7
y	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

Функція f є оборотною.

Поміняємо рядки таблиці місцями і розглянемо функцію $y = g(x)$, задану отриманою таблицею:

x	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$
y	5	6	7

Функції f і g зв'язані такими властивостями:

1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;

2) $f(5) = \sqrt{5}$, $g(\sqrt{5}) = 5$;

$f(6) = \sqrt{6}$, $g(\sqrt{6}) = 6$;

$f(7) = \sqrt{7}$, $g(\sqrt{7}) = 7$.

Ці рівності означають, що коли $f(x_0) = y_0$, то $g(y_0) = x_0$.

У таких випадках говорять, що функція g є **оберненою** до функції f, а функція f — **оберненою** до функції g. Такі функції f і g називають **взаємно оберненими.**

Означення. **Функції f і g називають взаємно оберненими, якщо:**

1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;

2) для будь-якого $x_0 \in D(f)$ з рівності $f(x_0) = y_0$ випливає, що $g(y_0) = x_0$, тобто $g(f(x_0)) = x_0$.

Можна показати, що другу умову в означенні можна замінити на таке: для будь-якого $x_0 \in D(g)$ з рівності $g(x_0) = y_0$ випливає, що $f(y_0) = x_0$, тобто $f(g(x_0)) = x_0$.

Коли функція f не є оборотною, то не існує функції, оберненої до неї. Будь-яка оборотна функція має обернену.

ПРИКЛАД Доведіть, що функція $f(x) = 2x - 1$ є оборотною. Знайдіть обернену функцію.

Розв'язання. Функція $f(x) = 2x - 1$ є зростаючою. Отже, вона є оборотною.

Щоб задати обернену функцію, потрібно вказати правило, яке дає змогу за кожним значенням змінної y знайти відповідне значення змінної x таке, що $y = 2x - 1$.

Маємо: $2x = y + 1$; $x = \frac{y+1}{2}$.

Отримана рівність задає функцію з аргументом y і залежною змінною x.

Традиційно незалежну змінну позначають буквою x, а залежну — буквою y. Дотримуючись таких позначень, можна сказати, що ми отримали функцію, яка задається формулою $y = \frac{x+1}{2}$.

Покажемо, що функції $g(x)=\frac{x+1}{2}$ і $f(x) = 2x - 1$ є взаємно оберненими.

Маємо: $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$, $E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = 2x_0 - 1$. Доведемо, що $g(y_0) = x_0$.

Маємо: $g(y_0)=\frac{y_0+1}{2}=\frac{2x_0-1+1}{2}=x_0$.

Функція $f(x) = x^2$ не є оборотною. Разом з тим ця функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Отже, функція $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, є оборотною. Також прийнято говорити, що функція $f(x) = x^2$ є **оборотною на множині** $[0; +\infty)$. Знайдемо обернену функцію.

Маємо: $y = x^2$, де $x \in [0; +\infty)$. Звідси $\sqrt{y}=\sqrt{x^2}=|x|=x$.

Скориставшись традиційними позначеннями, отримаємо функцію $y=\sqrt{x}$.

Покажемо, що функції $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, і $g(x)=\sqrt{x}$ є взаємно оберненими.

Маємо: $D(f) = E(g) = [0; +\infty)$, $E(f) = D(g) = [0; +\infty)$.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = x_0^2$, де $x_0 \geqslant 0$. Запишемо $g(y_0)=$ $=\sqrt{y_0}=\sqrt{x_0^2}=|x_0|=x_0$.

Теорема 10.2. ***Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.***

Доведення. Нехай точка $M(a; b)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Тоді $b = f(a)$. Якщо функція g обернена до функції f, то $g(b) = a$, тобто точка $N(b; a)$ належить графіку функції $y = g(x)$.

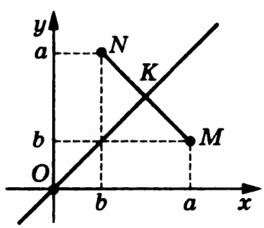


Рис. 66

Покажемо, що точки M і N є симетричними відносно прямої $y = x$.

Якщо $a = b$, то точки M і N збігаються і належать прямій $y = x$.

При $a \neq b$ маємо (рис. 66): $ON=\sqrt{a^2+b^2}$, $OM=\sqrt{a^2+b^2}$, тобто точка O рівновіддалена від кінців відрізка MN, а отже, належить серединному перпендикуляру відрізка MN. Середина K відрізка MN має координати $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$, тобто належить прямій $y = x$. Отже, пряма $y = x$ і є серединним перпендикуляром відрізка MN. ▲

Доведену теорему ілюструють графіки взаємно обернених функцій, що розглядалися вище (рис. 67).

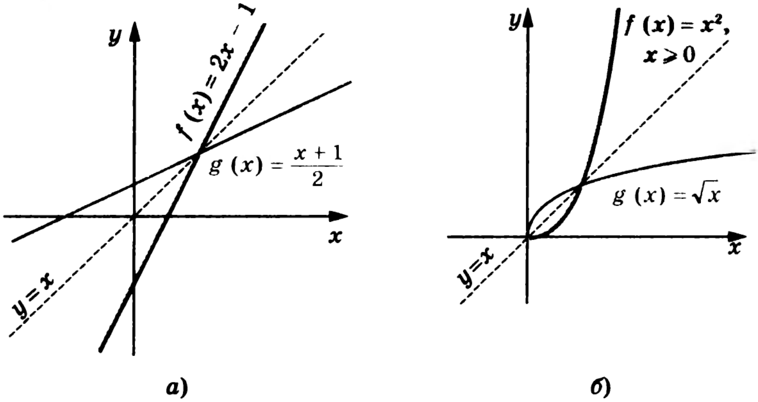


Рис. 67

Теорема 10.3. ***Якщо функція f є зростаючою (спадною), то обернена функція g є також зростаючою (спадною).***

Доведення. Припустимо, що функція f — зростаюча і при цьому обернена до неї функція g не є зростаючою. Тоді знайдуться такі $y_1 \in D(g)$ і $y_2 \in D(g)$, що з нерівності $y_1 < y_2$ випливатиме нерівність $g(y_1) \geqslant g(y_2)$. Нехай $g(y_1) = x_1$, $g(y_2) = x_2$. Отримуємо, що $x_1 \geqslant x_2$. Оскільки функція f — зростаюча, то $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, тобто $y_1 \geqslant y_2$. Отримали суперечність.

Для спадної функції міркуємо аналогічно. ▲

Вправи

217. Які з функцій, графіки яких зображено на рисунку 68, є оборотними?

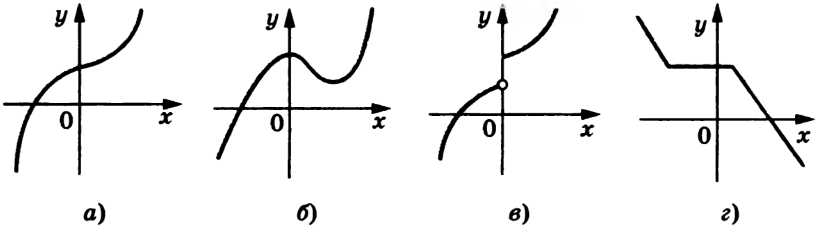


Рис. 68

218. **Які з функцій, графіки яких зображено на рисунку 69, є оборотними?**

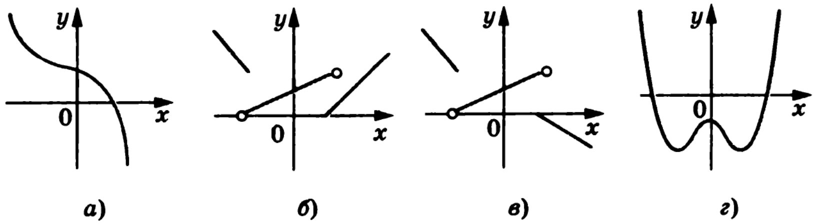


Рис. 69

219.° **Доведіть, що дана функція не є оборотною:**

1) $y = |x|$; 2) $y = \frac{1}{x^4}$; 3) $y = 5$; 4) $y = [x]$.

220.° **Доведіть, що функції f і g є взаємно оберненими:**

1) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$, $g(x) = 3x - 1$;

2) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x}$;

3) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = x^2 - 2$, $D(g) = [0; +\infty)$.

221.° **Доведіть, що функції f і g є взаємно оберненими:**

1) $f(x) = 4x + 2$, $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$;

2) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \frac{x}{1-x}$;

3) $f(x) = (x - 3)^2$, $D(f) = [3; +\infty)$, $g(x) = \sqrt{x} + 3$.

222.° **Знайдіть функцію, обернену до даної:**

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = \frac{1}{2x+1}$; 4) $y = \frac{1}{3}x + 4$.

223.° **Знайдіть функцію, обернену до даної:**

1) $y = 0{,}2x + 3$; 2) $y = \frac{1}{x-1}$; 3) $y = \frac{4}{x+2}$; 4) $y = 4x - 5$.

224.° **Знайдіть функцію, обернену до даної:**

1) $y = \frac{x}{x-1}$;

2) $y = \sqrt{2x-1}$;

3) $y = 2\sqrt{x} - 1$;

4) $y = x^2$, $D(y) = (-\infty; 0]$;

5) $y = \frac{1-x}{1+x}$;

6) $y = \begin{cases} \sqrt{x-2}, \text{ якщо } x \geqslant 3, \\ 2x - 5, \text{ якщо } x < 3. \end{cases}$

225.° Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y=\dfrac{x+2}{x}$;

2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

3) $y=\sqrt{x^2-4}$, $D(y)=[2;\ +\infty)$;

4) $y=\begin{cases}2-x^2, & \text{якщо } x\geqslant 1,\\ 2-x, & \text{якщо } x<1.\end{cases}$

226.° Знайдіть функцію $y=g(x)$, обернену до функції $y=\dfrac{2x}{3x-1}$. Чи буде функція g оборотною? Яка функція буде оберненою до $y=g(x)$?

227.° Побудуйте в одній системі координат графік даної функції і графік функції, оберненої до неї:

1) $y=-0{,}5x+2$;
2) $y=\sqrt{x+1}$;
3) $y=\begin{cases}x, & \text{якщо } x\geqslant 0,\\ 2x, & \text{якщо } x<0.\end{cases}$

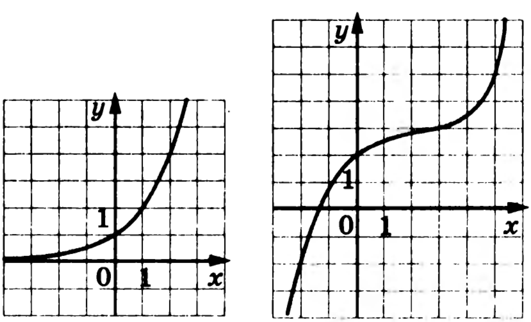
228.° Побудуйте в одній системі координат графік даної функції і графік функції, оберненої до неї:

1) $y=3x-1$;

2) $y=x^2-4$, якщо $x\geqslant 0$;

3) $y=\begin{cases}\sqrt{x}, & \text{якщо } x\geqslant 0,\\ \frac{1}{2}x, & \text{якщо } x<0.\end{cases}$

229.° Користуючись графіком функції $y=f(x)$, зображеним на рисунку 70, побудуйте графік функції, оберненої до функції f.



а) *б)*

Рис. 70

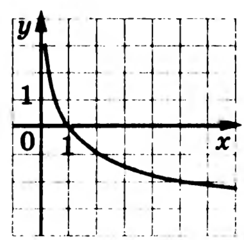


Рис. 71

230.° Користуючись графіком функції $y=f(x)$, зображеним на рисунку 71, побудуйте графік функції, оберненої до функції f.

231.° Доведіть, що функція, обернена до лінійної функції $y=kx+b$ при $k\neq 0$, теж є лінійною.

232.** Нехай g — функція, обернена до функції $f(x) = x^5 + 6x^3$.
1) Знайдіть $g(7)$.
2) Розв'яжіть рівняння $g(x) = -1$.
3) Скільки коренів має рівняння $g(x) = c$ залежно від значення c?

233.** Нехай g — функція, обернена до функції

$$f(x) = x^3 + \sqrt{x-2}.$$

1) Знайдіть $g(28)$.
2) Розв'яжіть рівняння $g(x) = 1$.
3) Чи існує таке значення c, що рівняння $g(x) = c$ має два корені?

234.** Доведіть, що функція, обернена до непарної функції, теж є непарною.

235.* При яких значеннях k і b функція $y = kx + b$, де $k \neq 0$, буде збігатися з оберненою до неї функцією?

236.* При яких значеннях a і b функція $y = \frac{1}{ax+b}$, де $a \neq 0$, буде збігатися з оберненою до неї функцією?

Львівська математична школа

Підручник Банаха «Курс функціонального аналізу»

Ви тримаєте в руках підручник «Алгебра і початки аналізу». У назві з'явилося нове словосполучення — «початки аналізу». Що ж приховано за цією назвою? Відповідь дуже проста — математичний аналіз вивчає функції. З цього року ви починаєте знайомство з елементами аналізу; вам доведеться розглядати все нові й нові класи функцій, вивчати їх властивості, опановувати методи дослідження функцій.

У першій половині XX ст. при вивченні певних класів функцій з'явилася нова математична дисципліна, вершина сучасної математики — «функціональний аналіз». Важливу, фактично головну роль у створенні цієї дисципліни відіграли науковці Львівської математичної школи.

У 20–30-х рр. XX ст. місто Львів було справжньою світовою математичною столицею. У той час у його закладах працювали такі легендарні математики, як Казимир Куратовський, Станіслав Мазур, Владислав Орліч, Вацлав Серпінський, Станіслав Улам, Юліуш Шаудер, Гуґо Штейнгауз та ін. Кваліфікація науковців Львова була настільки високою, що всесвітньо відомий математик, автор видатних теорем у математичній логіці та теорії множин Альфред Тарський не пройшов за конкурсом на вакантну посаду професора Львівського університету.

Математики Львова створили міцний науковий колектив, відомий як «львівська математична школа». Її керівником вважають геніального математика Стефана Банаха.

Стефан Банах
(1892–1945)

Вручення гусака

Сьогодні С. Банаха в усьому світі з цілковитою підставою вважають засновником функціонального аналізу. Один з перших у світі підручників з цієї дисципліни написано самим С. Банахом. Багато результатів С. Банаха та введених ним понять стали класичними. Наприклад, досліджені ним множини одержали назву «простори Банаха» і зараз входять до необхідного мінімуму знань кожного студента-математика, фізика, кібернетика тощо.

Розповідають, що багато теорем львівські математики доводили... у кав'ярні. С. Банах з учнями облюбували «Шкотську (шотландську) кав'ярню», де маленькі столики мали мармурове покриття — дуже зручне для запису математичних формул і теорем. Господар кав'ярні був незадоволений таким свавіллям науковців, але ситуацію врятувала дружина С. Банаха, яка придбала великий зошит для записів. Так з'явилася знаменита «Шкотська книга» — збірка математичних проблем, над якими працювала група С. Банаха. Як винагороду за розв'язання складних задач автори з гумором пропонували коли кухлі пива, коли вечерю в ресторані. Так, одна з проблем, за яку автор пообіцяв живого гусака (1936 р.), була розв'язана лише в 1972 р., тоді ж і було вручено винагороду.

Проблеми, поставлені в «Шкотській книзі», вважають настільки важливими і складними, що кожний, кому вдасться розв'язати хоча б одну з них, одразу дістає світового визнання. Сама ж «Шкотська книга» є однією з найвідоміших і найцінніших реліквій світової науки.

11. Рівносильні рівняння. Рівняння-наслідок. Рівносильні нерівності

Нехай задано дві функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ і поставлено задачу знайти множину значень аргументу x, при яких значення функцій f і g рівні. У такому випадку кажуть, що треба розв'язати рівняння $f(x) = g(x)$.

Означення. **Областю визначення рівняння $f(x) = g(x)$ називають множину значень змінної x, при яких мають зміст обидві частини рівняння.**

З означення випливає, що областю визначення рівняння $f(x) = g(x)$ є множина $D(f) \cap D(g)$.

Розглянемо кілька прикладів:

- областю визначення лінійного рівняння, тобто рівняння виду $ax = b$, є множина дійсних чисел;
- областю визначення рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ є множина $\{x \mid x \neq -2\}$;
- областю визначення рівняння $\frac{x+3}{|x|-x}=0$ є множина $\{x \mid x < 0\}$.

Незважаючи на те що рівняння $x^2 = -2$ не має коренів, його областю визначення є множина дійсних чисел.

Зрозуміло, що кожний корінь рівняння обов'язково належить його області визначення. Цей факт ілюструє діаграма Ейлера (рис. 72). Наприклад, не розв'язуючи рівняння $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47$, можна сміливо стверджувати, що число 0 не є його коренем.

Рис. 72

Розглянемо два рівняння: $x^2 = 4$ і $|x| = 2$.

Очевидно, що кожне з них має одні й ті самі корені: -2 і 2.

У таких випадках кажуть, що рівняння $x^2 = 4$ і $|x| = 2$ **рівносильні**.

Означення. **Рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ називають рівносильними, якщо множини їх коренів рівні.**

З означення випливає, що коли потрібно довести рівносильність двох рівнянь, то треба довести, що кожний корінь першого рівняння є коренем другого рівняння і, навпаки, кожний корінь другого рівняння є коренем першого рівняння.

Наведемо приклади пар рівносильних рівнянь:

$$\frac{1}{2}x=0 \text{ і } 2x = 0;$$

$$x^2 = 1 \text{ і } (x-1)(x+1) = 0;$$

$$x - 1 = 0 \text{ і } (x^2+1)(x-1) = 0;$$

$$(x-1)^{100} = 0 \text{ і } (x-1)^{1000} = 0.$$

Множина коренів кожного з рівнянь $x^2 = -5$ і $|x| = -3$ є порожньою, тобто множини коренів цих рівнянь рівні. Отже, за означенням ці рівняння є рівносильними.

Якщо будь-який корінь рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, що належить множині M, є коренем рівняння $f_2(x) = g_2(x)$, а будь-який корінь рівняння $f_2(x) = g_2(x)$, що належить множині M, є коренем рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, то такі два рівняння називають **рівносильними на множині M**.

Наприклад, рівняння $x^2 - 1 = 0$ і $x + 1 = 0$ є рівносильними на множині $(-\infty; 0)$.

Розв'язуючи рівняння, важливо знати, за допомогою яких перетворень можна замінити дане рівняння на рівносильне.

Теорема 11.1. ***Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Доведення. Доведемо, що рівняння

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

і

$$f(x) + c = g(x) + c \quad (c \text{ — деяке число}) \qquad (2)$$

рівносильні.

Нехай деяке число a є коренем рівняння (1). Тоді справджується числова рівність $f(a) = g(a)$. Отже, правильною буде й така числова рівність: $f(a) + c = g(a) + c$. Це означає, що число a є коренем рівняння (2). Таким чином, кожний корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2).

За допомогою аналогічних міркувань можна показати, що кожний корінь рівняння (2) є коренем рівняння (1).

Отже, рівняння (1) і (2) рівносильні. ▲

Теорема 11.2. ***Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Теорема 11.3. ***Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Доведення теорем 11.2 і 11.3 аналогічні доведенню теореми 11.1. Проведіть доведення самостійно.

Зауваження. З теорем 11.1 і 11.3 не випливає, що коли до обох частин рівняння додати один і той самий вираз зі змінною або обидві частини помножити на один і той самий вираз зі змінною, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Так, якщо до обох частин рівняння $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$ додати дріб $\frac{1}{5-x}$, то отримаємо рівняння $x^2 = 25$, яке не рівносильне даному.

Означення. **Якщо множина коренів рівняння $f_2(x) = g_2(x)$ містить множину коренів рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, то рівняння $f_2(x) = g_2(x)$ називають наслідком рівняння $f_1(x) = g_1(x)$.**

Наприклад, рівняння $x^2 = 25$ є наслідком рівняння $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$.

Також говорять, що з рівняння $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$ **випливає** рівняння $x^2 = 25$.

На рисунку 73 означення рівняння-наслідку проілюстровано за допомогою діаграми Ейлера.

Рис. 73

Оскільки порожня множина є підмножиною будь-якої множини, то, наприклад, наслідком рівняння $x^2 = -5$ є будь-яке рівняння з однією змінною x.

Зауважимо, що коли два рівняння рівносильні, то кожне з них можна вважати наслідком іншого.

Ті корені рівняння-наслідку, які не є коренями даного рівняння, називають **сторонніми коренями** даного рівняння.

Наприклад, рівняння $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+2) = 0$ є наслідком рівняння $2x - 1 = 0$. Рівняння-наслідок має два корені: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -2$, а рівняння $2x - 1 = 0$ має один корінь $\frac{1}{2}$. У цьому випадку корінь -2 є стороннім коренем рівняння $2x - 1 = 0$.

Розв'язуючи рівняння, треба намагатися побудувати ланцюжок рівносильних рівнянь, щоб урешті-решт отримати рівняння, яке рівносильне даному і корені якого легко знайти.

Проте якщо під час розв'язування рівняння рівносильність не було дотримано і відбувся перехід до рівняння-наслідку, то отримані при цьому сторонні корені, як правило, можна відкинути за допомогою перевірки.

Розв'яжемо рівняння $\frac{x^2-4}{x+2} = 0$. Прирівнявши чисельник дробу до нуля, отримаємо рівняння $x^2 - 4 = 0$, коренями якого є числа -2 і 2. Проте число -2 не належить області визначення даного рівняння, а число 2 задовольняє задане рівняння і є його єдиним коренем.

Розв'язуючи рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$, ми перейшли до рівняння-наслідку $x^2 - 4 = 0$, корені якого було перевірено.

При розв'язуванні рівняння важливо розуміти, на якому етапі було порушено рівносильність і що спричинило це порушення.

Так, при переході від рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ до рівняння $x^2 - 4 = 0$ було розширено область визначення даного рівняння. Інакше кажучи, зняття обмеження $x \neq -2$ якраз і призвело до появи стороннього кореня -2.

Зазначимо, що розширення області визначення рівняння не завжди призводить до появи сторонніх коренів. Наприклад, перехід від рівняння $\frac{x^2-4}{x+1}=0$ до рівняння $x^2 - 4 = 0$ є рівносильним, хоча при цьому розширюється область визначення даного рівняння.

Ви знаєте, що *дріб дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля.* Тому розв'язування рівняння $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ зводиться до розв'язування рівняння $f(x) = 0$ і перевірки умови $g(x) \neq 0$. Іншими словами, множина коренів рівняння $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ дорівнює перетину множин $\{x \mid f(x) = 0\}$ і $\{x \mid g(x) \neq 0\}$. У таких випадках кажуть, що рівняння $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0. \end{cases}$

Наприклад, рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2-4=0, \\ x+2\neq 0. \end{cases}$$

Означення. Нерівності називають рівносильними, якщо множини їх розв'язків рівні.

Наведемо кілька прикладів.

Нерівності $x^2 \leqslant 0$ і $|x| \leqslant 0$ є рівносильними. Справді, кожна з них має єдиний розв'язок $x = 0$.

Нерівності $x^2 > -1$ і $|x| > -2$ є рівносильними, оскільки множиною розв'язків кожної з них є множина дійсних чисел.

Оскільки кожна з нерівностей $|x| < -1$ і $0x < -3$ розв'язків не має, то вони також є рівносильними.

Розв'язуючи рівняння, ми заміняли його іншим, більш простим рівнянням, але рівносильним даному. За аналогічною схемою розв'язують і нерівності, використовуючи такі правила.

- **Якщо до обох частин нерівності додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.**
- **Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини нерівності в іншу, замінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.**
- **Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.**
- **Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.**

Означення. **Якщо множина розв'язків першої нерівності є підмножиною множини розв'язків другої нерівності, то другу нерівність називають наслідком першої нерівності.**

Наприклад, нерівність $x > 2$ є наслідком нерівності $x > 5$ (рис. 74).

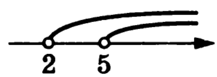


Рис. 74

Оскільки порожня множина є підмножиною будь-якої множини, то будь-яка нерівність з однією змінною є наслідком нерівності, яка не має розв'язків, наприклад нерівності $|x| < 0$.

Вправи

237. Чи рівносильні рівняння:

1) $x + 2 = 10$ і $3x = 24$;

2) $-2x = -6$ і $\frac{1}{3}x = 1$;

3) $x - 5 = 0$ і $x(x - 5) = 0$;

4) $(3x - 12)(x + 2) = 0$ і $(0{,}4 - 0{,}1x)(7x + 14) = 0$;

5) $\frac{6}{x} = 0$ і $x^2 = -4$;

6) $x + 1 = 1 + x$ і $\frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$;

7) $x^3 = 1$ і $|x| = 1$;

8) $x^{100} = 1$ і $x^{1000} = 1$;

9) $\sqrt{x-2}=1$ і $x^2 - 6x + 9 = 0$;

10) $\frac{x}{x}=1$ і $x = x$;

11) $x^2 + 2x + 1 = 0$ і $x + 1 = 0$;

12) $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$ і $x + 1 = 0$;

13) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ і $x - 1 = 0$;

14) $\frac{x^2-9}{x+2}=0$ і $x^2 - 9 = 0$;

15) $\sqrt{x^2-3x+1}=3$ і $|x - 4| = -2$?

238. **Чи рівносильні рівняння:**

1) $x + 6 = 10$ і $2x - 1 = 7$;

2) $x^2 = x$ і $x = 1$;

3) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x+1)=0$ і $4x^2 - 1 = 0$;

4) $\sqrt{x-1}=2$ і $x^2 - 10x + 25 = 0$;

5) $x^2 + 1 = 0$ і $\frac{3}{x-1}=0$;

6) $\frac{x+1}{x+1}=1$ і $\frac{x^2+1}{x^2+1}=1$;

7) $\frac{x-2}{x-2}=0$ і $2x^2 + 3 = 0$;

8) $x^2 + 4x + 4 = 0$ і $\frac{x+2}{x-1}=0$;

9) $\frac{x^2-9}{x-3}=0$ і $x + 3 = 0$;

10) $\frac{x+1}{x+1}=0$ і $\frac{x^2-1}{x^2-1}=0$;

11) $\sqrt{x-4}=-4$ і $x^2 + x + 1 = 0$?

239.° **Складіть рівняння, яке рівносильне даному:**

1) $2x - 3 = 4$;

2) $|x| = 1$;

3) $x + 6 = x - 2$;

4) $\frac{x-1}{x-1}=0$;

5) $\frac{x-1}{x-1}=1$.

240.° **Обґрунтуйте рівносильність рівнянь:**

1) $4x - 8 = x + 3$ і $4x - x = 8 + 3$;

2) $x^2 - 1 = 3$ і $x^2 + 5 = 9$;

3) $\frac{3x-5}{2} - \frac{x}{6} = 1$ і $9x - 15 - x = 6$;

4) $(2x + 1)(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1)$ і $2x + 1 = 3$.

241.° **Чи буде рівняння, отримане в результаті вказаного перетворення, рівносильним даному:**

1) у рівнянні $3(2x - 1) - 5(4x + 2) = 1$ розкрити дужки і звести подібні доданки;

2) у рівнянні $x^2 + \frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-7} = 49$ різницю $\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-7}$ замінити на нуль;

3) у рівнянні $\frac{x^2-1}{x-1} + 3x - 5 = 0$ скоротити дріб;

4) обидві частини рівняння $x^3 = x$ поділити на x;

5) обидві частини рівняння $(x + 1)(x^2 + 4) = x^2 + 4$ поділити на $x^2 + 4$;

6) обидві частини рівняння $\frac{x^2}{x} = 2$ помножити на x;

7) обидві частини рівняння $2x + 1 = 5$ помножити на $x + 1$?

242.° **Яке з двох рівнянь є наслідком другого:**

1) $x^2 = x$ і $x = 1$;

2) $\frac{x}{x} = 1$ і $0x = 0$;

3) $x^3 = 1$ і $x^2 = 1$;

4) $|x| = 1$ і $x^3 = 1$;

5) $\frac{x^2}{x-6} = \frac{36}{x-6}$ і $x^2 = 36$;

6) $x^2 = 4$ і $x^2 - \frac{1}{x+2} = 4 - \frac{1}{x+2}$;

7) $\frac{x^2-1}{x+1} = 0$ і $x^2 - 1 = 0$;

8) $x^2 - 1 = 0$ і $x^2 + \sqrt{x} - 1 = \sqrt{x}$?

243.° **Яке з двох рівнянь є наслідком другого:**

1) $\frac{x^2}{x} = 1$ і $x^2 = x$;

2) $x^2 + 1 = 1$ і $x(x - 1) = 0$;

3) $\frac{x^2}{x+8} = \frac{64}{x+8}$ і $x^2 = 64$;

4) $x^2 + \frac{1}{x+3} = 9 + \frac{1}{x+3}$ і $x^2 = 9$?

244.° **Складіть пару рівносильних рівнянь, кожне з яких:**

1) має один корінь;

2) має два корені;

3) має безліч коренів;

4) не має коренів.

245.° Чи рівносильні нерівності:

1) $x + 3 > 6$ і $-4x < -12$;
2) $(x + 2)^2 (x + 1) < 0$ і $x + 1 < 0$;
3) $(x + 2)^2 (x + 1) \leqslant 0$ і $x + 1 \leqslant 0$;
4) $\frac{1}{x} < 1$ і $x > 1$;
5) $x^2 \geqslant x$ і $x \geqslant 1$;
6) $(x + 4)^2 < 0$ і $|x - 2| < 0$;
7) $(x - 1)^2 > 0$ і $|x - 1| > 0$;
8) $|x| \leqslant 0$ і $x^2 \leqslant 0$;
9) $(x - 2)^2 \leqslant 0$ і $(x - 1)^2 \leqslant 0$?

246.° Чи рівносильні нерівності:

1) $(x - 3)^2 (x + 4) \leqslant 0$ і $x + 4 \leqslant 0$;
2) $(x - 3)^2 (x + 4) < 0$ і $x + 4 < 0$;
3) $\frac{x-2}{x-4} > 0$ і $x - 2 > 0$;
4) $\sqrt{x} \leqslant 0$ і $x^4 \leqslant 0$?

247.• Як може змінитися (розширитися чи звузитися) множина коренів заданого рівняння, якщо:

1) рівняння $(|x| + 3)\, f(x) = 2|x| + 6$ замінити на рівняння $f(x) = 2$;
2) рівняння $\frac{f(x)}{x^2+1} = 0$ замінити на рівняння $f(x) = 0$;
3) рівняння $(x + 1)\, f(x) = x + 1$ замінити на рівняння $f(x) = 1$;
4) рівняння $\frac{f(x)}{x+1} = \frac{g(x)}{x+1}$ замінити на рівняння $f(x) = g(x)$;
5) рівняння $f(x) = g(x)$ замінити на рівняння $(x + 1)\, f(x) = (x + 1)\, g(x)$?

248.• Яка з двох нерівностей є наслідком другої:

1) $x < -4$ і $x < 1$;
2) $x \geqslant 5$ і $x > 5$;
3) $x^2 < 0$ і $x < 0$;
4) $\sqrt{x} > -1$ і $|x| \geqslant 0$;
5) $|x| \geqslant x$ і $x^2 + x + 2 > 0$?

249.• Яка з двох нерівностей є наслідком другої:

1) $x > -2$ і $x > 1$;
2) $x^2 - 4 > 0$ і $x - 2 > 0$;
3) $x^2 \geqslant 0$ і $x > 0$?

12. Метод інтервалів

На рисунку 75 зображено графік деякої функції f, у якої $D(f) = \mathbb{R}$ і нулями є числа x_1, x_2 і x_3. Ці числа розбивають область визначення функції на проміжки знакосталості $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$.

А чи завжди нулі функції розбивають її область визначення на проміжки знакосталості? Відповідь на це запитання негативна. Для функції g, графік якої зображено на рисунку 76, проміжок $(x_2; x_3)$ не є проміжком знакосталості. Справді, якщо $x \in (x_2; x_0)$, то $g(x) > 0$, а якщо $x \in (x_0; x_3)$, то $g(x) < 0$.

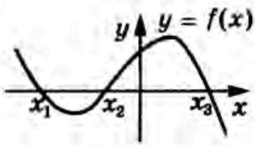


Рис. 75

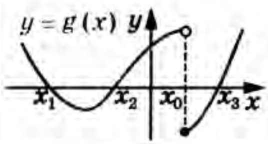


Рис. 76

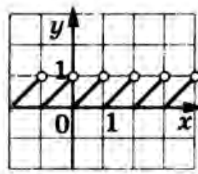


Рис. 77

Принципова відмінність між функціями f і g полягає в тому, що графіком функції f є **неперервна крива**, а графік функції g такої властивості не має. Говорять, що функція f **неперервна в кожній точці області визначення**, або, як ще прийнято говорити, **неперервна на $D(f)$**, а функція g **у точці $x_0 \in D(g)$ має розрив**.

Так, функція $y = \{x\}$ має розрив у кожній точці x такій, що $x \in \mathbb{Z}$. При цьому, наприклад, у кожній точці проміжку $(0; 1)$ ця функція є неперервною (рис. 77).

Таке уявлення про неперервну функцію інтуїтивно зрозуміле. Детальніше з цим поняттям ви ознайомитеся в 11 класі. Там же буде доведено таку наочно очевидну теорему:

Теорема 12.1. ***Якщо функція f неперервна і не має нулів на деякому проміжку, то вона на цьому проміжку зберігає постійний знак.***

Ілюстрацією до цієї теореми слугує графік функції, зображений на рисунку 75.

Ця теорема дозволяє, не будуючи графіка функції f, розв'язувати нерівності $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$.

Звернемося знову до рисунку 75.

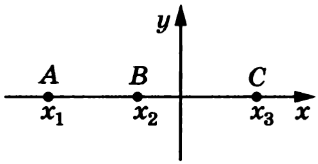


Рис. 78

Уявімо собі, що з цього рисунка «зникли» всі точки графіка функції f, за винятком точок $A\ (x_1;\ 0)$, $B\ (x_2;\ 0)$, $C\ (x_3;\ 0)$ (рис. 78). Очевидно, що кожний з проміжків $(-\infty;\ x_1)$, $(x_1;\ x_2)$, $(x_2;\ x_3)$, $(x_3;\ +\infty)$ не містить нулів функції f.

Тоді, пам'ятаючи, що функція f неперервна на $D(f) = \mathbb{R}$, можна стверджувати: указані проміжки є проміжками знакосталості функції f.

Залишається лише з'ясувати, якого знака набувають значення функції f на цих проміжках. Це можна зробити за допомогою «пробних точок».

Нехай, наприклад, $a \in (-\infty;\ x_1)$ і $f(a) > 0$. Тоді для будь-якого $x \in (-\infty;\ x_1)$ виконується нерівність $f(x) > 0$. Аналогічно можна «взяти пробу» з кожного проміжку знакосталості.

Описаний метод розв'язування нерівностей називають **методом інтервалів**.

Справедливою є така теорема, яку буде доведено в 11 класі.

Теорема 12.2. ***Функція*** $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, ***де*** $f(x)$ ***і*** $g(x)$ ***— многочлени, неперервна на*** $D(y)$.

Наприклад, функція $y = \dfrac{1}{x}$ неперервна в кожній точці множини $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, тобто на $D(y)$.

Ця теорема дозволяє для нерівностей виду $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ або $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$, де $f(x)$ і $g(x)$ – многочлени, застосовувати метод інтервалів.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $(x + 3)(x - 1)(x - 2) > 0$.

Розв'язання. Числа -3, 1 і 2 є нулями функції $f(x) = (x + 3) \times (x - 1)(x - 2)$, яка неперервна на $D(f) = \mathbb{R}$. Тому ці числа розбивають множину $\mathbb{R}$ на проміжки знакосталості функції f: $(-\infty;\ -3)$, $(-3;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$ (рис. 79).

За допомогою «пробних точок» установимо знаки функції f на зазначених проміжках.

Маємо:

$3 \in (2;\ +\infty)$; $f(3) > 0$, тому $f(x) > 0$ при будь-якому $x \in (2;\ +\infty)$;

$\dfrac{3}{2} \in (1;\ 2)$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0$, тому $f(x) < 0$ при будь-якому $x \in (1;\ 2)$;

$0 \in (-3;\ 1)$; $f(0) > 0$, тому $f(x) > 0$ при будь-якому $x \in (-3;\ 1)$;

$-4 \in (-\infty; -3)$; $f(-4) < 0$, тому $f(x) < 0$ при будь-якому $x \in (-\infty; -3)$.

Результати дослідження знака функції f показано на рисунку 80.

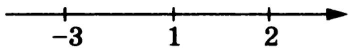


Рис. 79

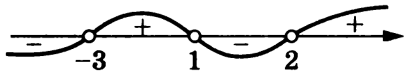


Рис. 80

Тепер можна записати відповідь.

Відповідь: $(-3; 1) \cup (2; +\infty)$.

Зауваження. При оформленні розв'язування нерівностей процес дослідження знака функції можна проводити усно, фіксуючи результати у вигляді схеми, показаної на рисунку 80.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $(x + 1)(3 - x)(x - 2)^2 > 0$.

Розв'язання. Позначимо нулі функції $f(x) = (x + 1)(3 - x)\times$ $\times(x - 2)^2$ на координатній прямій (рис. 81). Вони розбивають множину $D(f) = \mathbb{R}$ на проміжки знакосталості функції f.

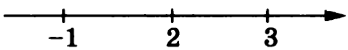


Рис. 81

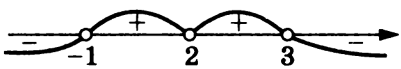


Рис. 82

Дослідимо знак функції f на цих проміжках. Результат дослідження показано на рисунку 82.

Відповідь: $(-1; 2) \cup (2; 3)$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\dfrac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2} < 0$.

Розв'язання. Областю визначення функції

$$f(x) = \frac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2}$$

є множина $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; 4\right) \cup (4; +\infty)$. Функція f є неперервною на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right), \left(-\dfrac{1}{2}; 4\right), (4; +\infty)$. Тому нулі -2, 1, 5 функції f розбивають $D(f)$ на проміжки знакосталості $(-\infty; -2)$, $\left(-2; -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2}; 1\right)$, $(1; 4)$, $(4; 5)$, $(5; +\infty)$.

Результат дослідження знака функції f на цих проміжках показано на рисунку 83.

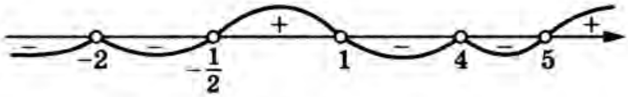


Рис. 83

Відповідь: $(-\infty;\ -2) \cup \left(-2;\ -\frac{1}{2}\right) \cup (1;\ 4) \cup (4;\ 5)$.

ПРИКЛАД Розв'яжіть нерівність $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{2+x+10-5x-4+x^2}{(2-x)(2+x)} < 0$; $\frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)} < 0$.

Областю визначення функції $f(x) = \frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)}$ є множина $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$. Функція f нулів не має. Оскільки функція f неперервна на кожному з проміжків $(-\infty;\ -2)$, $(-2;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$, то ці проміжки є для неї проміжками знакосталості.

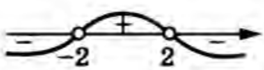


Рис. 84

На рисунку 84 показано результат дослідження знака функції f.

Розв'язання цієї нерівності можна оформити інакше. Оскільки дискримінант квадратного тричлена $x^2 - 4x + 8$ від'ємний, а старший коефіцієнт додатний, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ маємо $x^2 - 4x + 8 > 0$. Тому нерівність $\frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)} < 0$ рівносильна такій: $(2 - x)(2 + x) < 0$. Далі слід звернутися до рисунка 84.

Відповідь: $(-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$.

За допомогою методу інтервалів можна розв'язувати і нестрогі нерівності $f(x) \geqslant 0$ або $f(x) \leqslant 0$. Множина розв'язків такої нерівності — це об'єднання множини розв'язків нерівності $f(x) > 0$ (або відповідно $f(x) < 0$) і множини коренів рівняння $f(x) = 0$.

ПРИКЛАД Розв'яжіть нерівність $\frac{4x^2+4x+1}{x^2+2x-3} \geqslant 0$.

Розв'язання. Радимо, якщо це можливо, многочлени, записані в чисельнику і знаменнику дробу, розкладати на множники. Тоді набагато зручніше досліджувати знак функції на проміжках знакосталості.

Маємо: $\dfrac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} \geqslant 0$

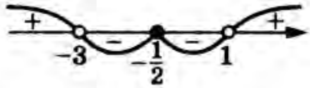


Рис. 85

Установлюємо (рис. 85), що множина $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ є множиною розв'язків нерівності $\dfrac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} > 0.$

Рівняння $\dfrac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} = 0$ має єдиний корінь $x = -\dfrac{1}{2}.$

Об'єднавши множини розв'язків рівняння і нерівності, отримаємо відповідь.

Відповідь: $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty) \cup \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}.$

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $(x^2-6x+8)\sqrt{x^2-4x+3} \geqslant 0.$

Розв'язання. Маємо: $(x-2)(x-4)\sqrt{(x-1)(x-3)} \geqslant 0.$

Розглянемо функцію $f(x) = (x-2)(x-4)\sqrt{(x-1)(x-3)}.$ Легко встановити (рис. 86), що $D(f) = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty).$

Рис. 86

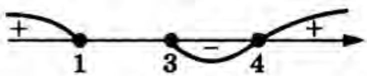


Рис. 87

Множина коренів рівняння $f(x) = 0$ має вигляд $\{1; 3; 4\}$.

Розв'яжемо нерівність $f(x) > 0$. Нулі функції f розбивають її область визначення на такі проміжки знакосталості: $(-\infty; 1)$, $(3; 4)$, $(4; +\infty)$.

Установлюємо (рис. 87), що множина $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$ є множиною розв'язків нерівності $f(x) > 0$. Об'єднавши множини розв'язків рівняння $f(x) = 0$ і нерівності $f(x) > 0$, отримаємо відповідь.

Відповідь: $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty) \cup \{3\}$.

Вправи

250.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+1)(x-2)(x+5) > 0$;
2) $x(x-3)(x+2) < 0$;
3) $(2x+3)(3x-1)(x+4) > 0$;
4) $(2x-1)(3-x)(x+1) < 0$;
5) $(x-3)(2x+1)(1-5x)(x+4) > 0$;
6) $(x+6)(x-9)(4-x)(3x+2) < 0$.

251.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(x + 3)(x - 1)(x + 4) < 0$; 3) $(1 - 3x)(x + 2)(3 - x) < 0$;
2) $(3x + 2)(x - 5)(4x - 1) > 0$; 4) $x(5x + 3)(2 - x)(4x - 3)(x + 5) > 0$.

252.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(x - 1)(x + 3)^2(x - 2) < 0$;
2) $|x - 4|(x + 1)(x - 3) > 0$;
3) $(2x + 3)(1 - 4x)^4(x - 2)^3(x + 6) < 0$;
4) $(1 - 3x)^3(x + 2)^2(x + 4)^5(x - 3) > 0$.

253.° Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2(x + 1)(x - 4) > 0$;
2) $(3 - x)^3|x + 2|(x - 1)(2x - 5) < 0$;
3) $(1 - 2x)(x - 3)^9(2x + 7)^6(x + 4)(x - 2)^2 > 0$.

254.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(2x + 1)(x - 3)(x^2 + 4) < 0$; 5) $3x^3 + 2x^2 - x < 0$;
2) $(2 - x)(3x + 5)(x^2 - x + 1) > 0$; 6) $x^3 - 6x + 5 > 0$;
3) $(2x + 1)^2(x^2 - 4x + 3) > 0$; 7) $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$;
4) $(3x^2 - 5x - 2)(2x^2 + x + 1) < 0$; 8) $(2x^2 + 5x - 3)(2x^2 - 5x + 2) > 0$.

255.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(4 - x)(3x + 1)(x^4 + x^2 + 1) < 0$;
2) $|x - 3|(3x + 2)^3(3x^2 - 5x + 6) > 0$;
3) $4x^3 - 25x < 0$;
4) $(x^2 - 4)(3x^2 + 7x + 2) > 0$.

256.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{x+3}{x-1} > 0$; 2) $\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-4} < 0$; 3) $\dfrac{(2x+1)(x-3)}{(2-x)(x-5)} < 0$.

257.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{x}{x+2} < 0$; 2) $\dfrac{(3x-2)(4-x)}{(x+3)(x-1)} > 0$.

258.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{x^3(x-1)^4(x+5)}{(x-8)(1-4x)} > 0$; 4) $\dfrac{(x-2)(x^2-1)(4x-5-3x^2)}{x+7} < 0$;

2) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8} < 0$; 5) $\dfrac{(x^3-8)(x^2-6x-7)}{(3x-2x^2-4)(3x^2-10x+3)} < 0$;

3) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} > 0$; 6) $\dfrac{x^2+5x-6}{(x+2)(1-3x)} < 0$.

259.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{(x-2)(2x+1)^3}{(3-x)^4(1-5x)^5} > 0$; 2) $\dfrac{x^2-5x+7}{-2x^2+3x+2} > 0$.

260.˙ Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{1}{x}<1$;
2) $\frac{x}{x+3}>\frac{1}{2}$;
3) $\frac{1}{x+2}<\frac{3}{x-3}$;
4) $\frac{4}{x+1}+\frac{2}{1-x}<1$;
5) $\frac{x-1}{x}-\frac{x+1}{x-1}<2$;
6) $\frac{2x-5}{x^2-6x-7}<\frac{1}{x-3}$;
7) $\frac{7}{x^2-5x+6}+\frac{9}{x-3}<-1$;
8) $\frac{2}{3x+7}<\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+1}$.

261.˙ Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x}{x-4}<\frac{1}{3}$;
2) $\frac{5x+8}{4-x}<2$;
3) $\frac{2}{x+3}>\frac{1}{x-1}$;
4) $\frac{2(x-3)}{x(x-6)}<\frac{1}{x-1}$;
5) $\frac{2x+3}{x^2+x-12}<\frac{1}{2}$;
6) $\frac{x+7}{x-5}+\frac{3x+1}{2}>0$;
7) $\frac{2x}{x^2-9}<\frac{1}{x+2}$;
8) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}>\frac{1}{x}$.

262.˙ Розв'яжіть нерівність:

1) $(2x+1)^2(x-1)(x-2)\geqslant 0$;
2) $(x-5)(x+4)(x^2+6x+9)\geqslant 0$;
3) $\frac{4x^2-4x+1}{x^2+x-12}\geqslant 0$;
4) $\frac{(x-3)(5x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)^2}\geqslant 0$;
5) $\frac{x^5\,|3x-1|\,(x+3)}{x-2}\leqslant 0$;
6) $\frac{5x+4}{x+3}-\frac{x+2}{1-x}\leqslant 0$.

263.˙ Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-3)(x+2)^2(x-5)\geqslant 0$;
2) $(x^2-4)(x^2+x-2)\leqslant 0$;
3) $\frac{(2-x)(4x+3)}{(x-3)^3(x+1)^2}\leqslant 0$;
4) $\frac{(x+6)^3(x+4)(6-x)^5}{|x+5|}\geqslant 0$;
5) $\frac{20}{x^2-7x+12}+\frac{10}{x-4}+1\geqslant 0$.

264.˙˙ Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2+2x-15)(x^2-4x+3)(x-1)\leqslant 0$;
2) $\frac{x^3-3x+2}{6-x}\leqslant 0$;
3) $\frac{|x|(x+1)^3}{|x-4|^3(x+3)}\leqslant 0$.

265.˙˙ Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^3-4x)(x^2+2x-8)(x^2+7x+10)\leqslant 0$;
2) $\frac{(x^2-10x+21)(x^2-6x-7)}{(x^2+5x+6)(x^2-4)}\leqslant 0$;
3) $\frac{|x-5|^5\,|x-2|}{(1-x)^3(x+4)}\leqslant 0$.

266.'' Розв'яжіть нерівність $\left|\frac{x+2}{x}\right|(x^2-4x-5)\leqslant 0.$

267.'' Розв'яжіть нерівність $\left|\frac{x-5}{x}\right|(x^2-x-12)\leqslant 0.$

268.'' Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}>0;$
2) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}\geqslant 0;$
3) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}<0;$
4) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}\leqslant 0;$
5) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}<0;$
6) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}>0;$
7) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\leqslant 0;$
8) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\geqslant 0;$
9) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}<0;$
10) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}>0;$
11) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}\leqslant 0;$
12) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}\geqslant 0.$

269.'' Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}>0;$
2) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}\geqslant 0;$
3) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}<0;$
4) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}\leqslant 0;$
5) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}<0;$
6) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}>0;$
7) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}\leqslant 0;$
8) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}\geqslant 0;$
9) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6}>0;$
10) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6}<0;$
11) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6}\leqslant 0;$
12) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6}\geqslant 0.$

12. Рівняння і нерівності з параметрами

Розв'яжемо такі лінійні рівняння:

1) $3x = 1$. Відповідь: $x=\frac{1}{3}$.

2) $(-6)\cdot x = 1$. Відповідь: $x=-\frac{1}{6}$.

3) $0x = 1$. Відповідь: розв'язків немає.

Якщо коефіцієнт при змінній x позначити через a, то всі розглянуті рівняння можна записати у вигляді одного загального рівняння $ax = 1$, де буква a відіграє роль відомого числа, а буква x — роль змінної рівняння. Кажуть, що a є **параметром**, а рівняння $ax = 1$ (фактично цілий набір однотипних рівнянь) називають **рівнянням з параметром**.

Розв'язати рівняння з параметром означає розв'язати всі такі однотипні рівняння.

Розглянемо рівняння з параметром $ax = 1$.

Якщо $a = 0$, то дане рівняння коренів не має. Якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний корінь $x = \frac{1}{a}$.

Підкреслимо подвійну природу параметра: з одного боку, ми вважаємо параметр фіксованим числом, з іншого — це число невідоме. Саме це не дозволяє, розв'язуючи рівняння $ax = 1$, просто записати у відповідь $x = \frac{1}{a}$. Ми змушені розглядати дві можливості: $a = 0$ і $a \neq 0$.

Хоча термін «параметр» для вас новий, проте ви вже зустрічалися з цим поняттям. Наприклад, лінійним рівнянням називають рівняння виду $ax = b$. Тут a і b — параметри. Квадратичну функцію задають формулою $y = ax^2 + bx + c$, де a, b і c — параметри, $a \neq 0$.

Процес розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами полягає в побудові алгоритму, який дозволяє для будь-якого значення параметра знаходити відповідну множину розв'язків.

ПРИКЛАД 1 Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння $\frac{x^2 + ax - 2}{x + 2} = x - a$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{x^2 + ax - 2 - (x+2)(x-a)}{x+2} = 0;$

$$\frac{x^2 + ax - 2 - x^2 + ax - 2x + 2a}{x+2} = 0; \quad \frac{2ax - 2x + 2a - 2}{x+2} = 0.$$

Отримане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 2ax - 2x + 2a - 2 = 0, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x(a-1) = 1 - a, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Якщо $a = 1$, то маємо: $0x = 0$, тобто коренем рівняння $x(a - 1) = 1 - a$ є будь-яке число. Оскільки $x \neq -2$, то при $a = 1$ множиною коренів заданого рівняння є $\{x \mid x \neq -2\}$.

Якщо $a \neq 1$, то обидві частини рівняння $x(a - 1) = 1 - a$ можна поділити на вираз $(a - 1)$, що не дорівнює нулю:

$$\begin{cases} x = \frac{1-a}{a-1}, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Звідси $x = -1$.

Відповідь: якщо $a = 1$, то коренем рівняння є будь-яке число, крім -2; якщо $a \neq 1$, то $x = -1$.

ПРИКЛАД 2 Для кожного значення параметра b розв'яжіть рівняння $\frac{b(x+1)}{x}+\frac{b+1}{x-1}=b.$

Розв'язання. Маємо: $\frac{b(x+1)(x-1)+x(b+1)-bx(x-1)}{x(x-1)}=0;$

$$\frac{bx^2-b+bx+x-bx^2+bx}{x(x-1)}=0; \quad \frac{x(2b+1)-b}{x(x-1)}=0.$$

Це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x(2b+1)=b, \\ x(x-1)\neq 0. \end{cases}$$

Якщо $b=-\frac{1}{2}$, то рівняння системи, а отже, і дане рівняння коренів не мають.

Якщо $b\neq-\frac{1}{2}$, то

$$\begin{cases} x=\frac{b}{2b+1}, \\ x(x-1)\neq 0. \end{cases}$$

Знайдемо ті значення параметра b, при яких значення виразу $\frac{b}{2b+1}$ дорівнює 0 або 1.

Рівність $\frac{b}{2b+1}=0$ виконується тільки при $b = 0$, а рівність $\frac{b}{2b+1}=1$ виконується тільки при $b = -1$.

Отже, при $b = 0$ або $b = -1$ число $\frac{b}{2b+1}$ не є коренем даного рівняння.

Відповідь: якщо $b=-\frac{1}{2}$, або $b = 0$, або $b = -1$, то рівняння коренів не має; якщо $b\neq-\frac{1}{2}$, $b \neq 0$ і $b \neq -1$, то $x=\frac{b}{2b+1}$.

Цю відповідь можна записати ще й так: якщо $b\in\left\{-\frac{1}{2}, 0, -1\right\}$, то коренів немає; якщо $b\notin\left\{-\frac{1}{2}, 0, -1\right\}$, то $x=\frac{b}{2b+1}$.

ПРИКЛАД 3 При яких значеннях параметра b має один корінь рівняння:

1) $2x^2 - bx + 18 = 0$; 2) $(b + 6)\,x^2 - (b - 2)\,x + 1 = 0$?

Розв'язання

1) Дане рівняння є квадратним. Тому воно має один корінь тоді, коли його дискримінант дорівнює нулю. Маємо:

$$D = b^2 - 4\cdot 2\cdot 18 = 0;$$

$$b = -12 \text{ або } b = 12.$$

Відповідь: $b = -12$ або $b = 12$.

2) Звернемо увагу на поширену помилку: вважати рівняння $(b + 6)\,x^2 - (b - 2)\,x + 1 = 0$ квадратним. Насправді це рівняння степеня не вище другого.

При $b = -6$ отримуємо лінійне рівняння $8x + 1 = 0$, яке має один корінь.

При $b \neq -6$ дане рівняння є квадратним, тому воно має один корінь, якщо його дискримінант дорівнює нулю:

$D = (b - 2)^2 - 4\,(b + 6) = b^2 - 4b + 4 - 4b - 24 = b^2 - 8b - 20.$

Маємо: $b^2 - 8b - 20 = 0$, звідси $b = -2$ або $b = 10$.

Відповідь: $b = -2$, або $b = 10$, або $b = -6$.

ПРИКЛАД 4 При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{(x-a)(x+2)}{x-1} = 0$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання. Треба знайти всі значення параметра a, при яких множина коренів даного рівняння є одноелементною.

Переходимо до рівносильної системи:

$$\begin{cases}(x-a)(x+2)=0,\\ x-1\neq 0.\end{cases}$$

Звідси $\begin{cases}x=a \text{ або } x=-2,\\ x\neq 1.\end{cases}$

При будь-якому значенні параметра a дане рівняння має корінь $x = -2$. Для того щоб цей корінь залишався єдиним, потрібно, щоб корінь $x = a$:

- або дорівнював тому самому кореню, який уже знайдено, тобто числу -2;
- або не задовольняв умову $x \neq 1$.

Звідси $a = -2$ або $a = 1$.

Відповідь: $a = -2$ або $a = 1$.

ПРИКЛАД [illegible] При яких значеннях параметра m рівняння $m(x-1)=0$ і $x+m^2+m=1$ є рівносильними?

Розв'язання. При будь-якому значенні параметра m число 1 є коренем першого рівняння. Для рівносильності рівнянь необхідно, щоб число 1 було коренем і другого рівняння. Підставимо це значення змінної x до другого рівняння:

$$1+m+m^2=1;$$
$$m(m+1)=0;$$
$$m=0 \text{ або } m=-1.$$

Тепер можна зробити висновок: якщо шукані значення параметра m існують, то їх слід шукати серед елементів множини $\{-1, 0\}$.

Якщо $m=-1$, то дані рівняння набувають вигляду $(-1)(x-1)=0$ і $x+1-1=1$. Ці рівняння є рівносильними.

При $m=0$ маємо: $0(x-1)=0$ і $x=1$. Очевидно, що ці рівняння не рівносильні.

Відповідь: $m=-1$.

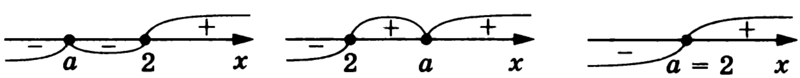
ПРИКЛАД [illegible] Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(x-a)^2(x-2) \geqslant 0$.

Розв'язання

Якщо $a<2$ (рис. 88, *а*), то $x \in \{a\} \cup [2; +\infty)$.

Якщо $a>2$ (рис. 88, *б*), то $x \in [2; +\infty)$.

Якщо $a=2$, то задана нерівність набуває вигляду $(x-2)^3 \geqslant 0$. Звідси (рис. 88, *в*) $x \in [2; +\infty)$.



а) *б*) *в*)

Рис. 88

ПРИКЛАД 7 При яких значеннях параметра a нерівність $(a-1)x^2+4ax-2a-4 \geqslant 0$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання. Якщо $a=1$, то дана нерівність набуває вигляду $4x-6 \geqslant 0$ і має безліч розв'язків. Отже, $a=1$ не підходить.

Для випадку, коли $a \neq 1$, розглянемо квадратичну функцію $y=(a-1)x^2+4ax-2a-4$.

Якщо $a-1>0$, то цій умові відповідають клітинки 1–3 таблиці, розміщеної на форзаці 2. У цьому разі множина значень аргументу, при яких квадратична функція набуває невід'ємних значень, є нескінченною.

Залишилося розглянути випадок, коли $a-1<0$. Тоді вимозі задачі відповідає клітинка 5 таблиці. Отже, шуканими значеннями параметра a є розв'язки системи $\begin{cases} a-1<0, \\ D=0, \end{cases}$ тобто системи $\begin{cases} a-1<0, \\ (4a)^2-4(a-1)(-2a-4)=0. \end{cases}$

Розв'язавши цю систему, отримаємо $a=-1$ або $a=\frac{2}{3}$.

Відповідь: $a=-1$ або $a=\frac{2}{3}$.

На завершення цього пункту дамо таку пораду. Якщо ви не знаєте, з чого почати розв'язування задачі з параметром, то робіть те саме, що ви робили б у цій задачі при відомому значенні параметра.

Вправи

270.° Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{a(x-1)}{x-1}=0$;
2) $\frac{a(x-a)}{x-3}=0$;
3) $\frac{x-2a}{x+a}=0$;
4) $\frac{a(x-4)}{x-a}=0$.

271.° Для кожного значення параметра b розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+b}{x-5}=0$;
2) $\frac{x+4}{x-2b}=0$;
3) $\frac{x-3b}{x+b+2}=0$;
4) $\frac{(b-1)x}{x+b}=0$.

272.° Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-1}{x-a}=0$;
2) $\frac{x(x-a)}{x+2}=0$;
3) $\frac{(x-a)(x-6)}{x-7}=0$;
4) $\frac{(x-4)(x+2)}{x-a}=0$;
5) $\frac{x-a}{(x-1)(x+3)}=0$;
6) $\frac{(x-a)(x-2)}{x-2a}=0$.

273.° Для кожного значення параметра b розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{(x-2)(x-3)}{x+b}=0$;
2) $\frac{x+b}{(x+1)(x-4)}=0$;
3) $\frac{x+2b}{(x-b+1)x}=0$;
4) $\frac{(x+2b)(x-3)}{x-b}=0$.

274.° Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $ax>0$;
2) $ax<1$;
3) $ax\geqslant a$;
4) $(a-2)x>a^2-4$;
5) $(a+3)x\leqslant a^2-9$;
6) $2(x-a)<ax-4$.

275.° Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $a^2x\leqslant 0$;
2) $(a+4)x>1$;
3) $a+x<2-ax$.

276.** При яких значеннях параметра a множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x \geqslant 7, \\ x < a \end{cases}$ містить рівно чотири цілих розв'язки?

277.** При яких значеннях параметра b множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x < 5, \\ x \geqslant b \end{cases}$ містить рівно три цілих розв'язки?

278.** При яких значеннях параметра a розв'язком системи $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant a+8, \\ x \geqslant 4 \end{cases}$ є відрізок, довжина якого дорівнює 5?

279.** При яких значеннях параметра a розв'язком системи $\begin{cases} a-7 \leqslant x \leqslant a, \\ x \leqslant 3 \end{cases}$ є відрізок, довжина якого дорівнює 4?

280.** Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-2}{x-a} = a-1;$

2) $\frac{ax-2}{x-1} = a+\frac{1}{x};$

3) $\frac{ax^2-3}{x^2-1} = a+\frac{2}{x-1};$

4) $\frac{3x+1}{(x-1)(x+a)} + \frac{1}{x+a} = \frac{3}{x-1};$

5) $\frac{a}{x+3} + \frac{3}{x+2} = \frac{a^2+2a}{(x+2)(x+3)};$

6) $\frac{x}{2a} + \frac{2}{x-2} = \frac{3x-2a}{2(x-2)};$

7) $\frac{x}{x+a} - \frac{a-2}{x-a} = \frac{4a-2a^2}{x^2-a^2}.$

281.** Для кожного значення параметра b розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{bx+3}{x+2} = b-\frac{1}{x-1};$

2) $\frac{bx^2-2}{x^2-4} = b+1+\frac{1-x}{x+2};$

3) $\frac{1}{x+1} + \frac{2b-b^2}{(x+1)(x-2b)} = \frac{b}{2b-x};$

4) $\frac{x}{x-b} - \frac{2b}{x+b} = \frac{8b^2}{x^2-b^2}.$

282.** При яких значеннях параметра a має єдиний розв'язок рівняння:

1) $\frac{x-1}{x-a} = 0;$

2) $\frac{(x+1)(x-5)}{x-a} = 0;$

3) $\frac{(x-a)(x+3a)}{x-3} = 0;$

4) $\frac{(x-2)(x-a)}{x-2a} = 0;$

5) $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-a)(x+3a)} = 0;$

6) $\frac{x^2-ax+5}{x-1} = 0;$

7) $\frac{x^2-(3a+1)x+2a^2+3a-2}{x^2-6x+5} = 0;$

8) $\frac{x^2-(a+4)x+3a+3}{\sqrt{x-2}} = 0?$

283.•• При яких значеннях параметра b має єдиний розв'язок рівняння:

1) $\frac{(x+3)(x-8)}{x+b}=0$; 4) $\frac{x^2-bx+1}{x+3}=0$;

2) $\frac{(x+2b)(x-4b)}{x-2}=0$; 5) $\frac{x^2+(3-2b)x+4b-10}{x^2-4x+3}=0$;

3) $\frac{(x-2)(x+1)}{(x+b)(x-2b)}=0$; 6) $\frac{x^2-bx+b-1}{\sqrt{x+1}}=0$?

284.•• При яких значеннях параметра a дані рівняння є рівносильними:

1) $\frac{x-1}{x-a}=0$ і $x-1=0$; 4) $(a^2-1)x=a-1$ і $\frac{x-1}{x-a}=1$;

2) $\frac{x(x-a)}{x-2}=0$ і $x=0$; 5) $a(x-1)=0$ і $x+a^2=2a$?

3) $\frac{(x+a)(x-4a)}{x-1}=0$ і $x-4a=0$;

285.•• При яких значеннях параметра b дані рівняння є рівносильними:

1) $\frac{x-4}{x+b}=0$ і $x-4=0$;

2) $\frac{(x-1)(x+b)}{x-3}=0$ і $x-1=0$;

3) $\frac{(x+b)(x-2b)}{x-3b}=0$ і $\frac{x+b}{x-3b}=0$;

4) $(b^2-4)(x+2)=0$ і $bx+2b=4-b^2$?

286.•• При яких значеннях параметра a друга з нерівностей пари є наслідком першої нерівності:

1) $x+2a-3>0$ і $2x-a>0$; 3) $ax>1$ і $x>0$?

2) $x>1$ і $ax<1$;

287.•• При яких значеннях параметра a нерівності є рівносильними:

1) $2x-a>0$ і $x+2a-3>0$; 3) $ax\geqslant 1$ і $2ax>3$?

2) $3x-a\geqslant 0$ і $ax-3\geqslant 0$;

288.•• При яких значеннях параметра a дана нерівність виконується при всіх значеннях x:

1) $x^2-4x+a>0$; 3) $(a-3)x^2-2ax+3a-6>0$?

2) $x^2+(a-1)x+1-a-a^2\geqslant 0$;

289.•• При яких значеннях параметра a не має розв'язків нерівність:

1) $-x^2+6x-a>0$; 3) $ax^2+(a-1)x+(a-1)<0$?

2) $x^2-(a+1)x+3a-5<0$;

290.•• Залежно від значення параметра a знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $|x-a|(5x^2-2x-3)<0$; 2) $|x-a|(5x^2-2x-3)\leqslant 0$.

291.•• Залежно від значення параметра a знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $|x-a|(7x^2-4x-3)<0$; 2) $|x-a|(7x^2-4x-3)\leqslant 0$.

14. Рівняння і нерівності, які містять знак модуля

Нагадаємо основні відомості про модуль числа.

Означення. **Модулем числа a називають відстань від точки, яка зображує число a на координатній прямій, до початку відліку.**

Модуль числа a позначають так: $|a|$.

З означення модуля випливає, що $|a|=\begin{cases}a, & \text{якщо } a\geqslant 0,\\ -a, & \text{якщо } a<0.\end{cases}$

Отже, щоб знайти модуль числа (або, як ще кажуть, розкрити модуль), треба знати знак числа.

Наприклад, $|\sqrt{10}-3|=\sqrt{10}-3$, оскільки $\sqrt{10}>3$.

$|\sqrt{10}-4|=4-\sqrt{10}$, оскільки $\sqrt{10}<4$.

$|x^2+1|=x^2+1$, оскільки $x^2+1>0$ при будь-якому значенні x.

ПРИКЛАД 1 Розкрийте модуль $|2x-1|$.

Розв'язання. З означення модуля числа випливає, що

$$|2x-1|=\begin{cases}2x-1, & \text{якщо } x\geqslant \dfrac{1}{2},\\ 1-2x, & \text{якщо } x<\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Властивості модуля, які випливають з означення

1) $|a|\geqslant 0$;
2) $|a|=|-a|$;
3) якщо $|a|=|b|$, то $a=b$ або $a=-b$;
4) якщо $|a|=b$, то $b\geqslant 0$ і виконується одна з двох рівностей: $a=b$ або $a=-b$;
5) відстань між точками $A\,(a)$ і $B\,(b)$ координатної прямої дорівнює $|a-b|$ (рис. 89).

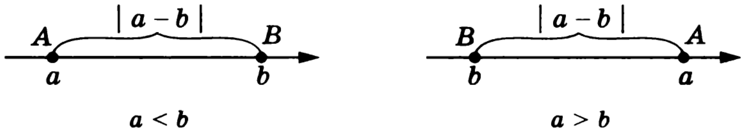


Рис. 89

Розглянемо основні прийоми розв'язування рівнянь, які містять знак модуля.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $|x - 1| = 2$.

Розв'язання. Використовуючи властивість 4, перейдемо до сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x-1=2, \\ x-1=-2. \end{array}\right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-1. \end{array}\right.$

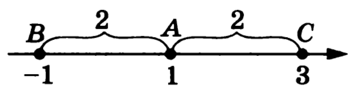


Рис. 90

Відповідь: −1; 3.

Це рівняння можна розв'язати інакше, якщо умову задачі перекласти геометричною мовою: знайдіть координати всіх точок координатної прямої, які віддалені від точки A (1) на 2 одиничних відрізки. Очевидно, що існують дві такі точки: B (−1) і C (3) (рис. 90).

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $|2x - 1| = 3x + 1$.

Розв'язання. Якщо замінити дане рівняння на сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} 2x-1=3x+1, \\ 2x-1=-3x-1, \end{array}\right.$$

то отримаємо два значення змінної x: −2 і 0. Очевидно, що число −2 не є коренем даного рівняння.

Певна річ, виникає запитання: «Чому заміна рівняння на сукупність призвела до появи стороннього кореня, тобто чому такий перехід не є рівносильним?»

Справа в тому, що ліва частина даного рівняння набуває тільки невід'ємних значень. Тому $3x + 1 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant -\frac{1}{3}$. Отже, шукані корені мають належати проміжку $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. У записаній сукупності такої вимоги немає.

Насправді дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 3x+1 \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-1=3x+1, \\ 2x-1=-3x-1, \end{array}\right. \end{cases}$$

яка має єдиний розв'язок $x = 0$.

Узагалі, *рівняння виду* $|f(x)| = g(x)$ *рівносильне системі*

$$\begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

Рівняння зазначеного виду можна розв'язати й іншим способом: розглянути два випадки $f(x) \geqslant 0$ і $f(x) < 0$, тобто розкрити модуль $|f(x)|$. При такому підході рівняння виду $|f(x)| = g(x)$ можна замінити на сукупність двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x)=g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x)=g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Наприклад, розв'язання рівняння $|2x - 1| = 3x + 1$ можна записати так:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-1 \geqslant 0, \\ 2x-1=3x+1, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-1 < 0, \\ -2x+1=3x+1; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x=-2, \end{cases} \\ \begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ x=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Звідси $x = 0$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $|x + 1| + |x - 2| = 3$.

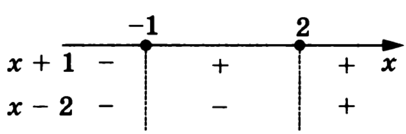


Рис. 91

Розв'язання. Розіб'ємо область визначення рівняння (рис. 91) на такі проміжки: $(-\infty; -1)$ (значення виразів $x + 1$ і $x - 2$ на цьому проміжку від'ємні), $[-1; 2]$ (вираз $x + 1$ набуває на цьому проміжку невід'ємних значень, а вираз $x - 2$ — недо-

датних) і (2; +∞) (значення виразів $x + 1$ і $x - 2$ на цьому проміжку додатні). Зазначимо, що точки, у яких значення виразів дорівнюють нулю, можна віднести до будь-якого з проміжків. Отже, дане рівняння рівносильне сукупності трьох систем.

1) $\begin{cases} x < -1, \\ -(x+1)-(x-2)=3. \end{cases}$ **Звідси** $\begin{cases} x < -1, \\ x = -1. \end{cases}$ **Ця система розв'язків не має.**

2) $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ (x+1)-(x-2)=3. \end{cases}$ **Звідси** $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0x = 0. \end{cases}$ **Розв'язком цієї системи є проміжок [−1; 2].**

3) $\begin{cases} x > 2, \\ (x+1)+(x-2)=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2, \\ x = 2. \end{cases}$ **Ця система розв'язків не має.**

***Відповідь*: [−1; 2].**

Розв'язання даного рівняння можна оформити в інший спосіб, одразу записавши сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -1, \\ -x-1-x+2=3, \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x+1-x+2=3, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2, \\ x+1+x-2=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рис. 92

Також це рівняння можна розв'язати за допомогою геометричної інтерпретації: шукані корені — це координати точок координатної прямої, сума відстаней від яких до точок A (−1) і B (2) дорівнює 3. Зрозуміло, що координати всіх точок відрізка AB, і лише вони, утворюють шукану множину коренів (рис. 92).

Розглянемо основні методи розв'язування нерівностей, які містять знак модуля.

Теорема 14.1. ***Нерівність виду $|x| < a$ рівносильна системі***

$$\begin{cases} x < a, \\ x > -a. \end{cases}$$

Доведення. **Якщо $a \leqslant 0$, то як дана нерівність, так і записана система не мають розв'язків. Отже, вони є рівносильними.**

Якщо $a > 0$, то, розкривши модуль, можна записати, що дана нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 0,\\ x < a,\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ -x < a.\end{cases}\end{array}\right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l}0 \leqslant x < a,\\ -a < x < 0;\end{array}\right.$ $-a < x < a$.

Очевидно, що отримана подвійна нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases}x < a,\\ x > -a.\end{cases} \blacktriangle$$

Зауважимо, що для випадку, коли $a > 0$, доведення теореми можна провести, використовуючи геометричну інтерпретацію: і нерівність $|x| < a$, і систему $\begin{cases}x < a,\\ x > -a\end{cases}$ задовольняють координати тих і тільки тих точок координатної прямої, які віддалені від початку відліку на відстань меншу, ніж a.

Узагальненням теореми 14.1 є така теорема.

Теорема 14.2. ***Нерівність виду $|f(x)| < g(x)$ рівносильна системі***

$$\begin{cases}f(x) < g(x),\\ f(x) > -g(x).\end{cases}$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 14.1.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $|3x - 1| < 2$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases}3x - 1 < 2,\\ 3x - 1 > -2.\end{cases}$$

Звідси $\begin{cases}x < 1,\\ x > -\frac{1}{3}.\end{cases}$

Відповідь: $\left(-\frac{1}{3};\, 1\right)$.

Теорема 14.3. ***Нерівність виду $|x| > a$ рівносильна сукупності нерівностей***

$$\left[\begin{array}{l}x > a,\\ x < -a.\end{array}\right.$$

Доведення. Якщо $a = 0$, то множиною розв'язків як даної нерівності, так і сукупності є множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Якщо $a < 0$, то множиною розв'язків нерівності й сукупності є множина $(-\infty; +\infty)$. Тому, якщо $a \leqslant 0$, то дана нерівність і записана сукупність нерівностей є рівносильними.

Якщо $a > 0$, то, розкривши модуль, можна записати, що дана нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 0,\\ x > a,\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ -x > a.\end{cases}\end{array}\right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l}x > a,\\ x < -a.\end{array}\right.$ ▲

Зауважимо, що для випадку, коли $a > 0$, доведення теореми можна провести, використовуючи геометричну інтерпретацію: і нерівність $|x| > a$, і сукупність $\left[\begin{array}{l}x > a,\\ x < -a\end{array}\right.$ задовольняють координати тих і тільки тих точок координатної прямої, які віддалені від початку відліку на відстань, більшу за a.

Узагальненням теореми 14.3 є така теорема.

Теорема 14.4. ***Нерівність виду*** $|f(x)| > g(x)$ ***рівносильна сукупності нерівностей***

$$\left[\begin{array}{l}f(x) > g(x),\\ f(x) < -g(x).\end{array}\right.$$

Доведення цієї теореми подібне доведенню теореми 14.3.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $|4x - 3| > 5$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності нерівностей

$$\left[\begin{array}{l}4x - 3 > 5,\\ 4x - 3 < -5.\end{array}\right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l}4x > 8,\\ 4x < -2;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x > 2,\\ x < -\frac{1}{2}.\end{array}\right.$

Відповідь: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть нерівність $|x-1|+|x-2|>x+3$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності трьох систем.

1) $\begin{cases} x<1, \\ 1-x-x+2>x+3; \end{cases}$ $\begin{cases} x<1, \\ x<0. \end{cases}$ Отже, $x<0$.

2) $\begin{cases} 1\leqslant x\leqslant 2, \\ x-1-x+2>x+3; \end{cases}$ $\begin{cases} 1\leqslant x\leqslant 2, \\ x<-2. \end{cases}$ Ця система розв'язків не має.

3) $\begin{cases} x>2, \\ x-1+x-2>x+3; \end{cases}$ $\begin{cases} x>2, \\ x>6. \end{cases}$ Отже, $x>6$.

Відповідь: $(-\infty;\ 0)\cup(6;\ +\infty)$.

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть нерівність $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6}\geqslant 2$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем.

1) $\begin{cases} x<3, \\ \dfrac{3-x}{x^2-5x+6}\geqslant 2. \end{cases}$ Перетворивши другу нерівність системи, отримуємо:

$$\begin{cases} x<3, \\ \dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}\leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x<3, \\ \dfrac{2(x-3)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)}{(x-2)(x-3)}\leqslant 0. \end{cases}$$

Схема розв'язання отриманої системи зображена на рисунку 93. Отже, маємо: $\dfrac{3}{2}\leqslant x<2$.

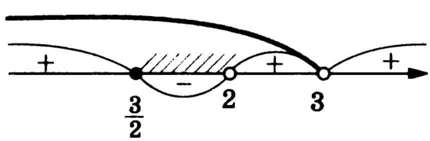


Рис. 93

2) $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ \dfrac{x-3}{x^2-5x+6}\geqslant 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ \dfrac{2x^2-11x+15}{x^2-5x+6}\leqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ \dfrac{2(x-3)\left(x-\dfrac{5}{2}\right)}{(x-2)(x-3)}\leqslant 0. \end{cases}$

Ця система розв'язків не має (переконайтеся в цьому самостійно).

Відповідь: $\left[\dfrac{3}{2};\ 2\right)$.

Вправи

292.° Розкрийте модуль:

1) $\left|\sqrt{2}-1\right|$;
2) $|\pi - 3{,}14|$;
3) $\left|2-\sqrt{2}\right|$;
4) $|x^2 + 1|$;
5) $\left|x-\frac{x^2}{4}-1\right|$;
6) $|x^2 + 2x + 2|$.

293.° Розкрийте модуль:

1) $\left|\frac{\pi}{4}-0{,}7\right|$;
2) $\left|\frac{\pi}{4}-0{,}8\right|$;
3) $|\pi - 3{,}15|$;
4) $|x^4 + 2|$;
5) $\left|x^2+x+\frac{1}{4}\right|$;
6) $|x^2 + 4x + 5|$.

294.° Доведіть, що:

1) $|ab| = |a|\cdot|b|$;
2) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$;
3) $(|a|)^2 = |a^2| = a^2$;
4) $|a - b| = |b - a|$;
5) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

295.° Відомо, що $a + b < 0$, $a > 0$, $b < 0$. Порівняйте з нулем значення виразу $|a| - |b|$.

296.° Відомо, що $a + b > 0$, $a < 0$, $b > 0$. Порівняйте з нулем значення виразу $|a| - |b|$.

297.° Спростіть вираз:

1) $(3|x| - |y|)(3|x| + |y|)$;
2) $(2|a| - 3|b|)^2 + (2|a| + 3|b|)^2$;
3) $\frac{|m|-|n|}{|m|+|n|}-\frac{|m|+|n|}{|m|-|n|}$.

298.° Розв'яжіть рівняння:

1) $|x + 3| = 2$;
2) $|1 - 2x| = 5$;
3) $|6x + 5| = 1$.

299.° Розв'яжіть рівняння:

1) $|x - 1| = 4$;
2) $|1 - 3x| = 7$;
3) $|-4x - 1| = 8$.

300.° Доведіть, що:

1) нерівність $|f(x)| \leqslant g(x)$ рівносильна системі
$$\begin{cases} f(x) \leqslant g(x), \\ f(x) \geqslant -g(x); \end{cases}$$
2) нерівність $|f(x)| \geqslant g(x)$ рівносильна сукупності
$$\left[\begin{array}{l} f(x) \geqslant g(x), \\ f(x) \leqslant -g(x). \end{array}\right.$$

301.° Розв'яжіть нерівність:

1) $|x + 5| < 4$;
2) $|2x - 1| > 3$;
3) $|3x + 2| \leqslant 1$;
4) $|5x - 1| \geqslant 4$.

302.° Розв'яжіть нерівність:

1) $|x-3| \leqslant 6$;
2) $|3x-2| \geqslant 3$;
3) $|1-4x| < 2$;
4) $|5x+2| > 6$.

303.• Доведіть, що:

1) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$;
2) $|a-b| \geqslant |a| - |b|$;
3) $|a+b| = |a| + |b|$ тоді і тільки тоді, коли $ab \geqslant 0$;
4) $|a| + |b| = a + b$ тоді і тільки тоді, коли $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$;
5) $|a-b| = |a| + |b|$ тоді і тільки тоді, коли $ab \leqslant 0$.

304.• Розв'яжіть рівняння:

1) $||x|-2| = 2$;
2) $||x|+2| = 1$.

305.• Розв'яжіть рівняння:

1) $||x|-3| = 1$;
2) $||x|+1| = 1$.

306.• Розв'яжіть рівняння:

1) $|2x-1| = |3x+2|$;
2) $|3-4x| = |2x+1|$.

307.• Розв'яжіть рівняння:

1) $|x+2| = 4x-1$;
2) $|3x+2| = 2x-1$;
3) $|x-1| = 4x+3$;
4) $|x^2-x-8| = -x$;
5) $|3x-4| = 4x^2+3x-2$.

308.• Розв'яжіть рівняння:

1) $|x+2| = 2(3-x)$;
2) $|3x-1| = x+1$;
3) $|x^2-2x| = 3-2x$;
4) $|x+3| = x^2+x-6$.

309.• Розв'яжіть нерівність:

1) $|x+5| < 2x+3$;
2) $|1-2x| \leqslant x+1$;
3) $|4x+5| > 3x-1$;
4) $|2x-7| \geqslant x-2$;
5) $x^2+6 \geqslant |3x+2| - 7x$;
6) $|x^2-4| + 2x + 1 > 0$.

310.• Розв'яжіть нерівність:

1) $|x+2| < 2x-1$;
2) $5x+3 \geqslant |x+1|$;
3) $|3x-2| \geqslant 2x+1$;
4) $|3x-5| > 9x+1$;
5) $|x^2-4| < 3x$;
6) $|x^2+3x| \geqslant 2-x^2$.

311.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right| \geqslant 2$;
2) $\left|\dfrac{3x}{x^2-4}\right| \leqslant 1$;
3) $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \leqslant 1$.

312.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\left|\dfrac{x-3}{x-5}\right| \geqslant 1$;
2) $\left|\dfrac{x+4}{x+2}\right| \leqslant 1$;
3) $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| < 1$.

313.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{|x+2|-x}{x} < 2$;
2) $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3} \geqslant 2x$.

314.** Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{|x+3|+x}{x+2}>1$; 2) $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0$; 3) $\frac{2}{x|x-1|}\leqslant -1$.

315.** Розв'яжіть рівняння:

1) $|x-2|+|x-4|=3$;
2) $|x-2|-3|3-x|+x=0$;
3) $|4-x|+|2x-2|=5-2x$;
4) $|x|-2|x+1|=5$;
5) $|x|+|x-6|=6$;
6) $|x+2|-|x-3|=5$;
7) $\frac{|x-2|}{|x-1|-1}=1$.

316.** Розв'яжіть рівняння:

1) $|x+1|+|x-5|=20$;
2) $|x+3|-|5-2x|=2-3x$;
3) $|x-3|+2|x+1|=4$;
4) $|x+5|+|x-8|=13$;
5) $|x|-|x-2|=2$;
6) $|7x-12|-|7x-11|=1$;
7) $\frac{|x-6|}{3-|x-3|}=1$.

317.** Доведіть, що:

1) $|x|+|x-3|\geqslant 3$; 2) $|x-1|+|x-3|\geqslant 2$.

318.** Знайдіть найменше значення виразу:

1) $|x|+|x+4|$; 2) $|x+2|+|x-3|$.

319.** Розв'яжіть нерівність:

1) $|x+1|+|x+2|>2x+3$;
2) $2|x-3|+|x+1|\leqslant 3x+1$;
3) $|x+1|+|x-1|\leqslant 2$.

320.** Розв'яжіть нерівність:

1) $2|x+1|-|x-1|>3$;
2) $|x-1|-2|x+3|>x+7$;
3) $|x-1|+|x+3|\leqslant 4$.

15. Рівняння з двома змінними та його графік

Вирази x^2+y^2, $\frac{x+y}{x-y}$, $(x-1)(y+2)$, $\sqrt{x-3y}$ є прикладами виразів з двома змінними x і y.

Вираз зі змінними x і y позначають так: $F(x; y)$ (читають: «еф від ікс, ігрек»).

Тоді рівність $F(x; y)=0$ є рівнянням з двома змінними x і y.

Наприклад, якщо $F(x; y)=ax+by+c$, то $F(x; y)=0$ є лінійним рівнянням з двома змінними.

Нагадаємо, що коли $F(x; y)$ — многочлен стандартного вигляду, то його степенем називають найбільший із степенів одночленів, які в нього входять. У цьому разі степенем відповідного рівняння $F(x; y) = 0$ називають степінь многочлена $F(x; y)$.

Наприклад, степінь рівняння $x^2 - x^2y^3 + y^3 = 0$ дорівнює 5.

Якщо в лінійному рівнянні $ax + by + c = 0$ параметри a і b одночасно не дорівнюють нулю ($a^2 + b^2 \neq 0$), то це рівняння є **рівнянням першого степеня зі змінними x і y**.

Рівняння другого степеня зі змінними x і y має вигляд: $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$, де a, b, c, d, e, f — параметри, причому $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Нагадаємо, що пару чисел $(x_0; y_0)$ називають **розв'язком** рівняння $F(x; y) = 0$, коли $F(x_0; y_0) = 0$ — правильна числова рівність.

Якщо на координатній площині xy позначити всі точки, координати яких є розв'язком рівняння $F(x; y) = 0$, то отриману фігуру називають **графіком** цього рівняння.

Наприклад, графіком рівняння першого степеня є пряма, графіком рівняння $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, де $R \neq 0$, є коло, графіком рівняння $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, є парабола.

Навчившись перетворювати графіки функцій, ви тим самим істотно розширили клас функцій, графіки яких ви вмієте будувати.

Аналогічні перетворення можна виконувати з графіками рівнянь.

- **Графік рівняння $F(x + a; y) = 0$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ вздовж осі абсцис на a одиниць уліво, якщо $a > 0$, і на $-a$ одиниць управо, якщо $a < 0$.**

Наприклад, графік рівняння $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ можна отримати, якщо перенести коло $x^2 + y^2 = 4$ вздовж осі абсцис на дві одиниці вліво (рис. 94).

- **Графік рівняння $F(x; y + b) = 0$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ вздовж осі ординат на b одиниць униз, якщо $b > 0$, і на $-b$ одиниць угору, якщо $b < 0$.**

Наприклад, графік рівняння $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ можна отримати, якщо перенести коло $x^2 + y^2 = 4$ вздовж осі ординат на дві одиниці вниз (рис. 95).

- **Графік рівняння $F(-x; y) = 0$ можна отримати в результаті симетричного відображення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ відносно осі ординат.**

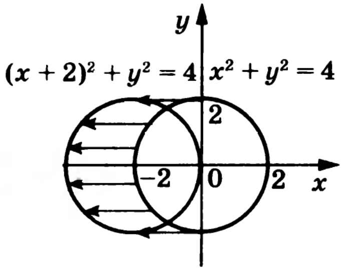


Рис. 94

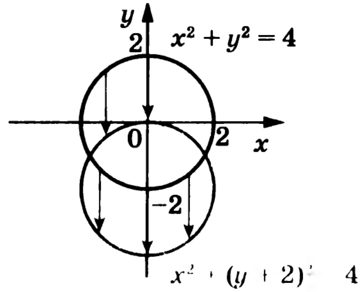


Рис. 95

Наприклад, графік рівняння $(-x + 2)^2 + y^2 = 4$ можна отримати, симетрично відобразивши коло $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ відносно осі ординат (рис. 96).

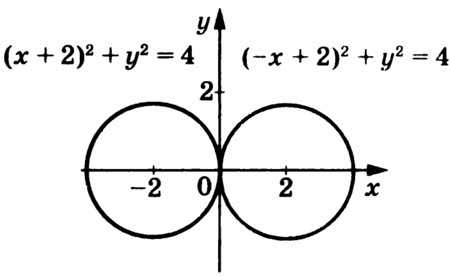


Рис. 96

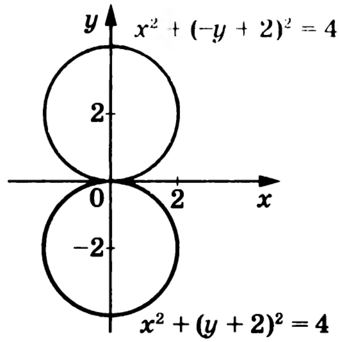


Рис. 97

- **Графік рівняння $F(x; -y) = 0$ можна отримати в результаті симетричного відображення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ відносно осі абсцис.**

Наприклад, графік рівняння $x^2 + (-y + 2)^2 = 4$ можна отримати, симетрично відобразивши коло $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ відносно осі абсцис (рис. 97).

- **Графік рівняння $F(kx; y) = 0$, де $k > 0$, можна отримати з графіка рівняння $F(x; y) = 0$ в результаті стиску в k разів до осі ординат, якщо $k > 1$, або в результаті розтягу в $\frac{1}{k}$ разів від осі ординат, якщо $0 < k < 1$.**

Наприклад, графік рівняння $(2x)^2 + y^2 = 4$ можна отримати, якщо стиснути у 2 рази коло $x^2 + y^2 = 4$ до осі ординат (рис. 98). Отриману фігуру називають **еліпсом**.

- **Графік рівняння $F(x; ky) = 0$, де $k > 0$, можна отримати з графіка рівняння $F(x; y) = 0$ в результаті стиску в k разів до осі абсцис, якщо $k > 1$, або в результаті розтягу в $\frac{1}{k}$ разів від осі абсцис, якщо $0 < k < 1$.**

Наприклад, графік рівняння $x^2 + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = 4$ можна отримати, якщо розтягнути у 2 рази коло $x^2 + y^2 = 4$ від осі абсцис (рис. 99). Отримана фігура також є еліпсом.

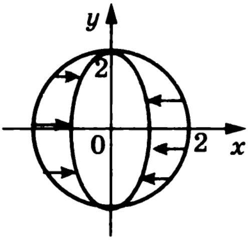


Рис. 98

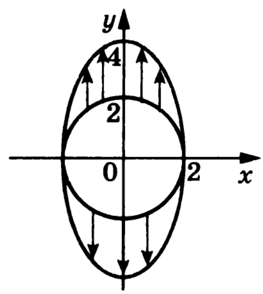


Рис. 99

- **Графік рівняння $F(|x|; y) = 0$ можна отримати з графіка рівняння $F(x; y) = 0$ таким чином: побудувати фігуру M_1, яка є графіком рівняння $F(x; y) = 0$ при $x \geqslant 0$, і побудувати фігуру M_2, симетричну фігурі M_1 відносно осі ординат. Фігура $M_1 \cup M_2$ є шуканим графіком.**

На рисунку 100 зеленим кольором зображено графік рівняння $(|x| - 1)^2 + y^2 = 4$.

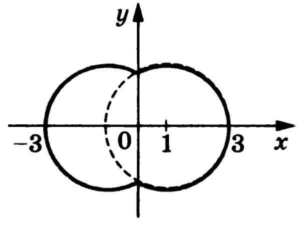


Рис. 100

- **Графік рівняння $F(x; |y|) = 0$ можна отримати з графіка рівняння $F(x; y) = 0$ таким чином: побудувати фігуру M_1, яка є графіком рівняння $F(x; y) = 0$ при $y \geqslant 0$, і побудувати фігуру M_2, симетричну фігурі M_1 відносно осі абсцис. Фігура $M_1 \cup M_2$ є шуканим графіком.**

На рисунку 101 синім кольором зображено графік рівняння $x^2 + (|y| + 1)^2 = 4$.

ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік рівняння $x = y^2$.

Розв'язання. Якщо в даному рівнянні замінити x на y, а y на x, то отримаємо рівняння $y = x^2$, графіком якого є парабола.

Виконана заміна означає, що шуканий графік — це графік рівняння $y = x^2$, побудований на координатній площині yx, тобто в системі координат, у якій осі абсцис і ординат поміняли місцями.

Зі сказаного випливає, що графіком рівняння $x = y^2$ є парабола, зображена на рисунку 102.

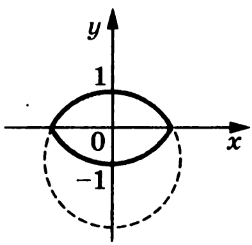


Рис. 101

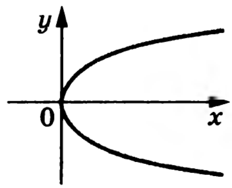


Рис. 102

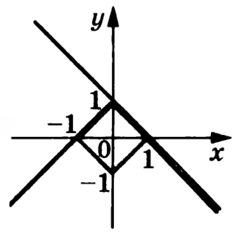


Рис. 103

ПРИКЛАД 2 Побудуйте графік рівняння $|x| + |y| = 1$.

Розв'язання. Нехай рівняння $F(x; y) = 0$ позначає рівняння $x + y - 1 = 0$. Тоді шуканий графік можна побудувати за такою схемою (рис. 103):

$$F(x; y) = 0 \to F(|x|; y) = 0 \to F(|x|; |y|) = 0.$$

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік рівняння $x = \sqrt{1 - y^2}$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$\begin{cases} x^2 = 1 - y^2, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

Отже, шуканим графіком є півколо, яке лежить у правій півплощині відносно осі ординат (рис. 104).

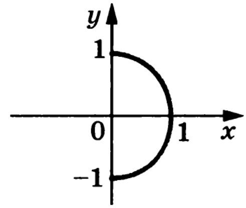


Рис. 104

ПРИКЛАД 4 При яких значеннях параметра a модуль різниці коренів рівняння $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ набуває найбільшого значення?

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння так: $(x - 3)^2 + (a - 2)^2 = 1$.

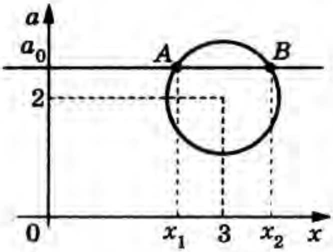


Рис. 105

Його графіком у системі координат xa є коло (рис. 105).

Якщо пряма $a = a_0$ перетинає коло в точках A і B, то модуль різниці коренів рівняння дорівнює довжині відрізка AB (рис. 105). Отже, слід знайти таке положення прямої $a = a_0$, при якому хорда AB має найбільшу довжину. Очевидно, що ця умова виконується тоді, коли хорда AB є діаметром кола. Звідси $a = 2$.

Вправи

321.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 8x + y^2 + 4y + 20 = 0$; 2) $5x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 1 = 0$.

322.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 13 = 0$; 2) $x^2 + 2xy + 10y^2 - 12y + 4 = 0$.

323.° Побудуйте графік рівняння:

1) $x^2 = y^2$;
2) $x^2 = 4$;
3) $(x + 2)(y - 3) = 0$;
4) $y^2 + 6xy = 0$.

324.° Побудуйте графік рівняння:

1) $x^2 = 4y^2$;
2) $y^2 = 1$;
3) $xy - 4x + 2y = 8$;
4) $x^2 - 6xy + 5y^2 = 0$.

325.° Побудуйте графік рівняння:

1) $|x + 2y| = 1$;
2) $|x + 3| = |y - 2|$;
3) $xy = |x|$;
4) $|x|y = 1$.

326.° Побудуйте графік рівняння:

1) $|x - 3y| = 2$; 2) $(x - 4)^2 = (y + 1)^2$; 3) $xy = |y|$.

327.° На рисунку 106 зображено графік рівняння $F(x; y) = 0$. За допомогою цього графіка побудуйте графік рівняння:

1) $F(-x; y) = 0$;
2) $F(x; y - 1) = 0$;
3) $F(2x; y) = 0$;
4) $F(x; |y|) = 0$;
5) $F(|x + 1|; y) = 0$.

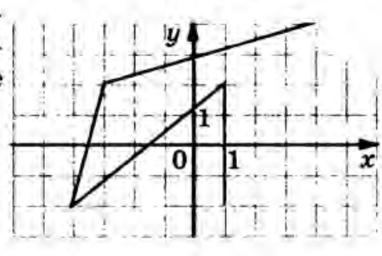


Рис. 106

328.$^{\bullet}$ На рисунку 107 зображено графік рівняння $F(x; y) = 0$. За допомогою цього графіка побудуйте графік рівняння:

1) $F(x; -y) = 0$;
2) $F(x + 1; y) = 0$;
3) $F(x; 2y) = 0$;
4) $F(|x|; |y|) = 0$;
5) $F(x; |y - 1|) = 0$.

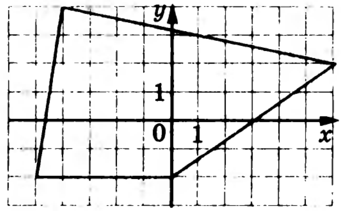


Рис. 107

329.$^{\bullet}$ Побудуйте графік рівняння:

1) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$;
2) $(|x| - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$;
3) $(|x| - 2)^2 + (|y| - 1)^2 = 9$.

330.$^{\bullet}$ Побудуйте графік рівняння:

1) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$;
2) $(|x| - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$;
3) $(|x| - 1)^2 + (|y| - 2)^2 = 16$.

331.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік рівняння:

1) $x = \sqrt{y}$;
2) $x = \sqrt{y - 1}$;
3) $x = \sqrt{y - 1} + 2$;
4) $x = \sqrt{-y}$;
5) $x - 2 = \sqrt{-y}$;
6) $x = \sqrt{|y|}$;
7) $x = \sqrt{|y + 1|}$;
8) $x = \sqrt{|y| + 1}$;
9) $|x| = \sqrt{|y|}$;
10) $|x - 1| = \sqrt{|y + 1|}$;
11) $|x| - 1 = \sqrt{|y + 1|}$;
12) $|x| - 1 = \sqrt{|y| + 1}$.

332.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік рівняння:

1) $|y| = \sqrt{x}$;
2) $|y + 1| = \sqrt{x}$;
3) $|y| = \sqrt{x + 1}$;
4) $|y| + 1 = \sqrt{x + 1}$;
5) $|y + 1| = \sqrt{|x| + 1}$;
6) $|y| = \sqrt{|x + 1|}$;
7) $|y| + 1 = \sqrt{|x| + 1}$.

333.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік рівняння:

1) $|x| + |y| = 2$;
2) $|x - 1| + |y| = 2$;
3) $|x - 1| + |y + 2| = 2$.

334.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік рівняння:

1) $|x| - |y| = 2$;
2) $|x + 1| - |y| = 2$;
3) $|x + 1| - |y - 1| = 2$.

335.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік рівняння:

1) $x = \sqrt{4 - y^2}$;
2) $|y| = \sqrt{4 - x^2}$;
3) $x = \sqrt{2y - y^2}$;
4) $y = \sqrt{2|x| - x^2}$.

336.** Побудуйте графік рівняння:

1) $y=\sqrt{1-x^2}$; 3) $x=\sqrt{4y-y^2}$;

2) $|x|=\sqrt{1-y^2}$; 4) $x=\sqrt{4|y|-y^2}$.

337.** Побудуйте графік рівняння:

1) $\frac{y-x^2}{y-x}=0$; 2) $\frac{x^2+y^2-1}{|x|-1}=0$; 3) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-1}=0$.

338.** Побудуйте графік рівняння:

1) $\frac{y^2-x}{x+y}=0$; 2) $\frac{x^2+y^2-1}{|y|-1}=0$; 3) $\frac{|x|-|y|}{y-x^2}=0$.

Нерівності з двома змінними

Нерівності $2x-y>1$, $y \geqslant x^2$, $x^2+y^2<4$ є прикладами **нерівностей з двома змінними.**

Означення. Пару значень змінних, яка перетворює нерівність з двома змінними на правильну числову нерівність, називають розв'язком нерівності з двома змінними.

Так, для нерівності $2x-y>1$ кожна з пар чисел (3; –1), (0; –2), (1; 0) є її розв'язком, а, наприклад, пара (0; 0) не є її розв'язком.

Рис. 108

Означення. Графіком нерівності з двома змінними називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, координати яких є розв'язками даної нерівності.

ПРИКЛАД 1 Зобразіть графік нерівності $2x-y>1$.

Розв'язання. Графіком рівняння $2x-y=1$ є пряма. Ця пряма розбиває координатну площину на дві області, кожну з яких називають **відкритою півплощиною**[1] (рис. 108). Покажемо, що жовта область є шуканим графіком.

---

[1] Відкрита півплощина відрізняється від півплощини тим, що вона не містить пряму, яка її обмежує.

Перепишемо дану нерівність так: $y < 2x - 1$.

Розглянемо довільну точку $M(x_1; y_1)$, яка належить зазначеній відкритій півплощині.

Нехай пряма, яка проходить через точку M і перпендикулярна до осі абсцис, перетинає пряму $y = 2x - 1$ у точці $K(x_1; y_2)$. Зрозуміло, що $y_2 > y_1$. Маємо: $y_2 = 2x_1 - 1 > y_1$. Отже, пара $(x_1; y_1)$ є розв'язком даної нерівності.

Ми показали, що координати будь-якої точки жовтої області є розв'язком даної нерівності. Залишилося показати, що будь-який розв'язок нерівності є координатами точки, яка належить зазначеній області.

Розглянемо пару $(x_0; y_0)$, яка є розв'язком нерівності $y < 2x - 1$, тобто $y_0 < 2x_0 - 1$. Нехай $2x_0 - 1 = y'$. Тоді точка $A(x_0; y')$ належить прямій $y = 2x - 1$ (рис. 108). Оскільки $y_0 < y'$, то точка $B(x_0; y_0)$ лежить нижче від точки A, тобто належить жовтій області.

Міркуючи аналогічно, можна показати, що синя область є графіком нерівності $2x - y < 1$.

Також говорять, що нерівності $2x - y > 1$ і $2x - y < 1$ задають відповідно жовту і синю області.

Домовимося, що в зображенні графіка пунктирна лінія позначає точки, які не належать шуканому графіку. Тому на рисунку 108 пряма $y = 2x - 1$ зображена пунктиром.

ПРИКЛАД 2 Зобразіть графік нерівності $x > 2$.

Розв'язання. На координатній площині xy графіком рівняння $x = 2$ є вертикальна пряма, яка розбиває площину на дві відкриті півплощини (рис. 109). Покажемо, що відкрита півплощина, розміщена праворуч від прямої $x = 2$, є шуканим графіком. Перепишемо дану нерівність так: $x + 0y > 2$.

Нехай точка $M(x_1; y_1)$ належить зазначеній області. Тоді $x_1 > 2$, а отже, пара $(x_1; y_1)$ є розв'язком даної нерівності.

Нехай пара $(x_2; y_2)$ є розв'язком нерівності $x + 0y > 2$, тобто $x_2 + 0 \cdot y_2 > 2$; $x_2 > 2$. Отже, точка $K(x_2; y_2)$ розміщена праворуч від прямої $x = 2$.

Ми показали, що координати будь-якої точки відкритої півплощини є розв'язком даної нерівності, і навпаки, будь-який розв'язок нерівності є координатами точки, яка належить відкритій півплощині.

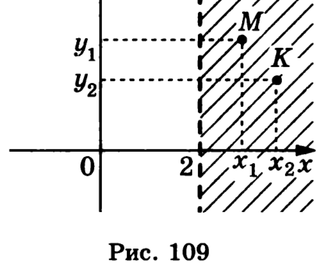


Рис. 109

Нерівності, розглянуті в прикладах 1 і 2, є окремими випадками нерівності $ax + by > c$.

Означення. **Лінійною нерівністю з двома змінними називають нерівність виду $ax + by > c$ або $ax + by < c$, де x і y — змінні, a, b і c — параметри.**

Міркуючи аналогічно наведеному в прикладах 1 і 2, можна показати, що при $a^2 + b^2 \neq 0$ графіком лінійної нерівності є одна з відкритих півплощин, на які пряма $ax + by = c$ розбиває координатну площину xy.

Якщо $a^2 + b^2 = 0$, то графіком лінійної нерівності є або вся координатна площина, або порожня множина (доведіть це самостійно).

Нерівності виду $ax + by \geqslant c$ і $ax + by \leqslant c$ теж вважають лінійними. Зрозуміло, що графіком нерівності $ax + by \geqslant c$ або $ax + by \leqslant c$, де $a^2 + b^2 \neq 0$, є півплощина.

Розглянемо приклади побудови графіків нелінійних нерівностей.

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік нерівності $y > x^2$.

Розв'язання. Парабола $y = x^2$ розбиває координатну площину на дві області (рис. 110). Шуканим графіком є множина точок, які лежать вище від параболи $y = x^2$. Це можна показати, міркуючи так, як у прикладі 1.

ПРИКЛАД 4 Побудуйте графік нерівності $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

Розв'язання. Графіком рівняння $x^2 + y^2 = 4$ є коло радіуса 2 з центром у початку координат. Очевидно, що розв'язками даної нерівності є координати тих і тільки тих точок, які віддалені від початку координат на відстань, не більшу за 2. Тому шуканим графіком є круг радіуса 2 з центром у початку координат (рис. 111).

Зрозуміло, що графіком нерівності $x^2 + y^2 > 4$ є множина точок координатної площини, які не належать кругу радіуса 2 з центром у початку координат (рис. 112).

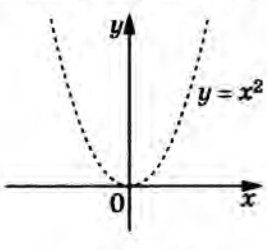


Рис. 110

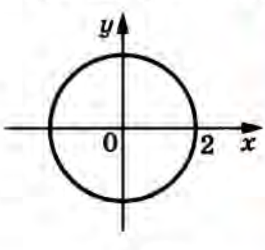


Рис. 111

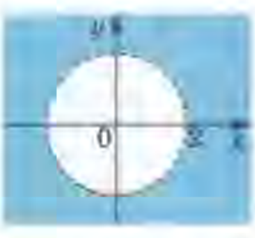


Рис. 112

Зазначимо, що графіки нерівностей прикладів 1–4 можна знайти за однією загальною схемою: побудувати графік рівняння $F(x; y) = 0$, який розбиває координатну площину на дві області. Тоді одна з цих областей (можливо, разом з графіком рівняння) є шуканим графіком нерівності. Ця схема застосовна і в тих випадках, коли графік рівняння $F(x; y) = 0$ розбиває область визначення виразу $F(x; y)$ на три і більше областей. Які з цих областей належать шуканому графіку, з'ясовують за допомогою «пробних точок». Пояснимо суть цього прийому на прикладах[1].

ПРИКЛАД 5 **Зобразіть на координатній площині xy графік нерівності $xy > 6$.**

Розв'язання. **Графік рівняння $xy = 6$ розбиває координатну площину на три області (рис. 113). Як «пробні» розглянемо точки $A(-3; -3)$, $O(0; 0)$, $B(3; 3)$. Вони належать відповідно жовтій, синій і зеленій областям. Пари (3; 3) і (−3; −3) є розв'язками даної нерівності, а пара (0; 0) розв'язком не є.**

Тоді можна зробити такий висновок: жовта і зелена області належать графіку нерівності, а синя область не належить.

Звідси шуканим графіком є об'єднання жовтої та зеленої областей.

ПРИКЛАД 6 **Зобразіть графік нерівності $x^2 - y^2 < 0$.**

Розв'язання. **Графіком рівняння $x^2 - y^2 = 0$ є об'єднання прямих $x + y = 0$ і $x - y = 0$. Тому графік рівняння $x^2 - y^2 = 0$ розбиває координатну площину на чотири області (рис. 114).**

За допомогою «пробних точок» встановлюємо, що шуканим графіком є об'єднання блакитної та жовтої областей (рис. 114).

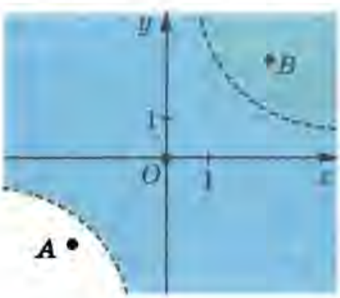


Рис. 113

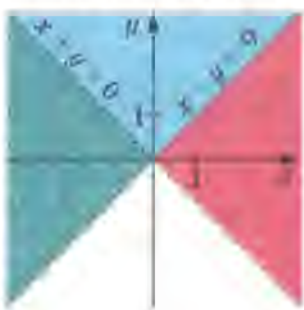


Рис. 114

[1] **Повне обґрунтування описаного методу для нерівностей, наведених у підручнику, вимагає знань, які виходять за межі шкільної програми.**

Вправи

339.° Укажіть нерівності, для яких пара $(-1; 2)$ є розв'язком:

1) $-2x + y > 3$;
2) $x^2 + y^2 \geqslant 7$;
3) $x^2 + y^2 < 5$;
4) $y \leqslant 3x^2 + x$.

340.° Чи є розв'язком нерівності $x^2 - xy + y^2 \geqslant 2$ пара чисел:

1) $(1; 1)$; 2) $(-1; 1)$; 3) $(1; -1)$; 4) $\left(\sqrt{3}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 5) $\left(0; \sqrt{2}\right)$?

341.° Чи належить графіку нерівності $\sqrt{x} > y$ точка:

1) $A\ (0; -1)$; 2) $B\ (-1; 0)$; 3) $C\ (1; 0)$; 4) $D\ (4; 3)$?

342.° Задайте нерівністю з двома змінними півплощину з межею $2x + 3y = -1$, яка містить точку $A\ (-1; 1)$.

343.° Задайте нерівністю з двома змінними відкриту півплощину з межею $3x - y = 2$, яка не містить точку $B\ (0; -1)$.

344.° Зобразіть графік нерівності:

1) $3x - y > 1$; 2) $2x + y \geqslant 2$; 3) $y \leqslant -1$; 4) $x < 3$.

345.° Зобразіть графік нерівності:

1) $x - 2y < 3$; 2) $x + 4y \geqslant 5$; 3) $y > -2$; 4) $x \geqslant -2$.

346.° Чи є відкрита півплощина графіком нерівності:

1) $3x > y + 1$;
2) $x > 0$;
3) $y \leqslant 0$;
4) $x + y \geqslant 1$;
5) $\dfrac{y - x - 1}{x^2 + y^2} < 0$;
6) $\dfrac{x + y}{x^2 + y^2} > 0$;
7) $\dfrac{(x + y)^2}{x + y} \geqslant 0$;
8) $\sqrt{x} > -y^2$;
9) $|x| > x$?

347.° Чи є півплощина графіком нерівності:

1) $x - 5y < -3$;
2) $x \geqslant 2$;
3) $y < 1$;
4) $\dfrac{x + y}{x^2 + y^2} \geqslant 0$;
5) $\dfrac{(x - y)^2}{x - y} \geqslant 0$;
6) $\dfrac{y - x + 1}{x^2 + y^2} \geqslant 0$;
7) $\sqrt{x} \geqslant -y^2$;
8) $|x| \geqslant x$?

348.° Побудуйте графік нерівності:

1) $y < 2x - x^2$;
2) $y \leqslant x^2 - 4x + 3$;
3) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 < 1$;
4) $x^2 + 2x + y^2 \geqslant 3$;
5) $xy < 2$;
6) $xy \geqslant 12$;
7) $(x - y)(x + y - 1) < 0$.

349.° Побудуйте графік нерівності:

1) $y > x^2 - x - 2$;
2) $y \leqslant -x^2 - 3x$;
3) $(x + 2)^2 + y^2 \leqslant 4$;
4) $x^2 + y^2 - 4y > 0$;
5) $xy \leqslant 6$;
6) $xy > -12$;
7) $(x + y)(x - y - 1) > 0$.

350.• Побудуйте графік нерівності:

1) $x^2 > 4$;
2) $|y| < 1$;
3) $y > |x|$;
4) $y \leqslant 2|x| - 1$;
5) $y \geqslant |2|x| - 1|$.

351.• Побудуйте графік нерівності:

1) $y^2 \leqslant 4$;
2) $|x| < 3$;
3) $y < |x + 1| - 2$.

352.•• Побудуйте графік нерівності:

1) $y < |x^2 - 4x|$;
2) $y \geqslant x^2 - 4|x|$;
3) $y \leqslant |x^2 - 4|x||$;
4) $|y| < |x^2 - 4x|$;
5) $x^2 - 2|x| + y^2 \leqslant 0$;
6) $x^2 - 2|x| + y^2 - 2|y| + 1 > 0$;
7) $|x| + |y| \leqslant 1$;
8) $|x| - |y| > 1$.

353.•• Побудуйте графік нерівності:

1) $y \geqslant x^2 - 4|x| + 3$;
2) $|y| < x^2 - 4x + 3$;
3) $|y| > x^2 - 4|x| + 3$;
4) $x^2 - 2|x| + y^2 \leqslant 3$.

17. Системи нерівностей з двома змінними

Пара (1; 2) є розв'язком кожної з нерівностей $y - x^2 \geqslant 0$ і $y - x \geqslant 1$. У такому разі говорять, що пара (1; 2) є **розв'язком системи нерівностей**

$$\begin{cases} y - x^2 \geqslant 0, \\ y - x \geqslant 1. \end{cases}$$

Щоб знайти множину розв'язків системи, потрібно знайти перетин множин розв'язків нерівностей, які входять до системи.

Розв'язки системи можна зображати на координатній площині. Для цього слід побудувати графіки нерівностей, які складають систему, і знайти їх перетин. Отриману фігуру називають **графіком системи нерівностей**.

Побудуємо графік записаної вище системи.

Графіком першої нерівності є фігура, показана на рисунку 115 синьою горизонтальною штриховкою. Графіком другої нерівності є півплощина, показана на рисунку 115 червоною вертикальною штриховкою. Фігура, яка зображує розв'язки системи, позначена подвійною штриховкою.

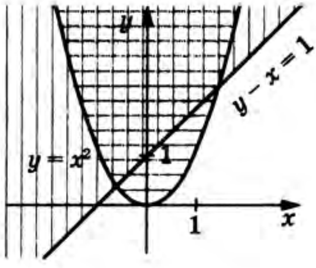


Рис. 115

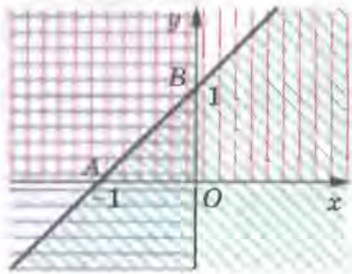


Рис. 116

Також кажуть, що **система нерівностей** $\begin{cases} y - x^2 \geqslant 0, \\ y - x \geqslant 1 \end{cases}$ **задає** побудовану фігуру.

Наприклад, система нерівностей $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ x \leqslant 0, \\ -x + y \leqslant 1 \end{cases}$ задає трикутник ABO (рис. 116).

Система нерівностей $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ x - y \geqslant 0 \end{cases}$ задає півкруг, зображений на рисунку 117.

ПРИКЛАД Зобразіть графік нерівності $\sqrt{1 - x^2 - y^2}\,(x + y) > 0$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x + y > 0, \\ 1 - x^2 - y^2 > 0. \end{cases}$$

Графіком першої нерівності системи є відкрита півплощина, графіком другої — внутрішня область круга радіуса 1 з центром у початку координат.

Отже, графіком даної нерівності є відкритий півкруг (рис. 118).

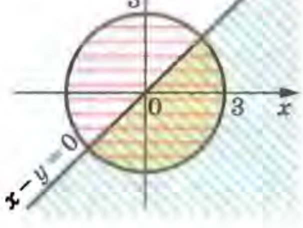


Рис. 117

Рис. 118

Вправи

354.° Зобразіть на координатній площині xy множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} 2x-3y\geqslant 1, \\ x+2y<2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x<2, \\ 2x-y>-1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x+2y>5, \\ y<-1{,}5x+1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x+y\leqslant 0, \\ y\geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-y>1, \\ 2x-y<2; \end{cases}$

355.° Побудуйте графік системи нерівностей:

1) $\begin{cases} -x+2y<-2, \\ x-y>1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+3y>1, \\ x>0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x-y>2, \\ 6x-2y<1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y\geqslant -1, \\ 2x-y\leqslant 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y+3\geqslant 2x, \\ 2x-y\geqslant -2; \end{cases}$

356.• Зобразіть на координатній площині xy множину $C=A\cap B$, де:

1) $A=\{(x;\ y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$, $B=\{(x;\ y)\mid y\geqslant 2x\}$;

2) $A=\{(x;\ y)\mid y\leqslant -x^2+1\}$, $B=\{(x;\ y)\mid y\geqslant -4\}$;

3) $A=\{(x;\ y)\mid y\geqslant x^2-4x+3\}$, $B=\{(x;\ y)\mid y\leqslant -x^2+4x-5\}$;

4) $A=\{(x;\ y)\mid x^2+y^2\geqslant 4\}$, $B=\{(x;\ y)\mid y\leqslant x^2\}$.

357.• Побудуйте графік системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4, \\ x^2+(y+3)^2\leqslant 9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 5, \\ xy\geqslant 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 9, \\ x^2+y^2\geqslant 4; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y\leqslant -x^2+1, \\ y\geqslant |x|-1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2>4, \\ (x-3)^2+y^2<9; \end{cases}$

358.• Зобразіть на координатній площині xy множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 9, \\ |x|\leqslant 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 10, \\ xy\leqslant -3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4, \\ xy\geqslant 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2\geqslant 1, \\ y\leqslant -|x|; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy\geqslant 6, \\ |y|\leqslant 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+y^2\geqslant 9, \\ xy\leqslant 0. \end{cases}$

359.** Задайте системою нерівностей фігуру, зображену на рисунку 119.

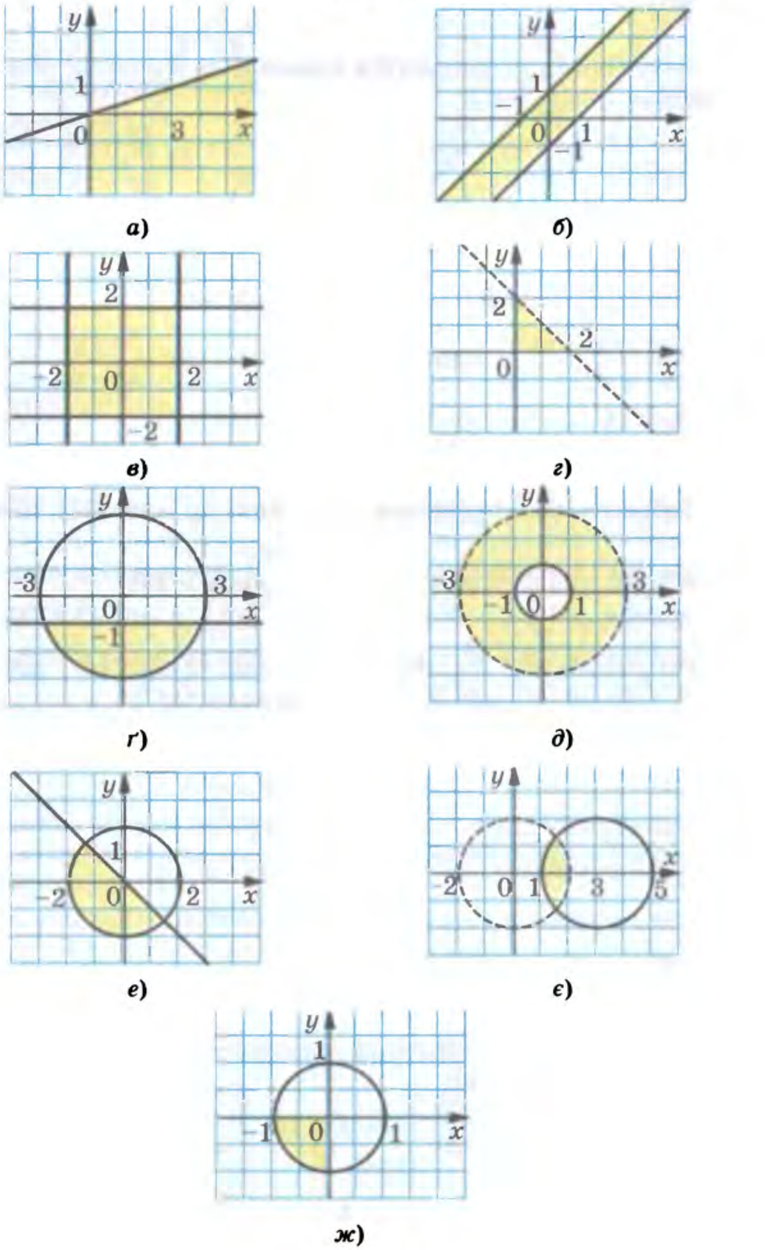


Рис. 119

360." **Задайте** системою нерівностей фігуру, зображену **на рисунку 120.**

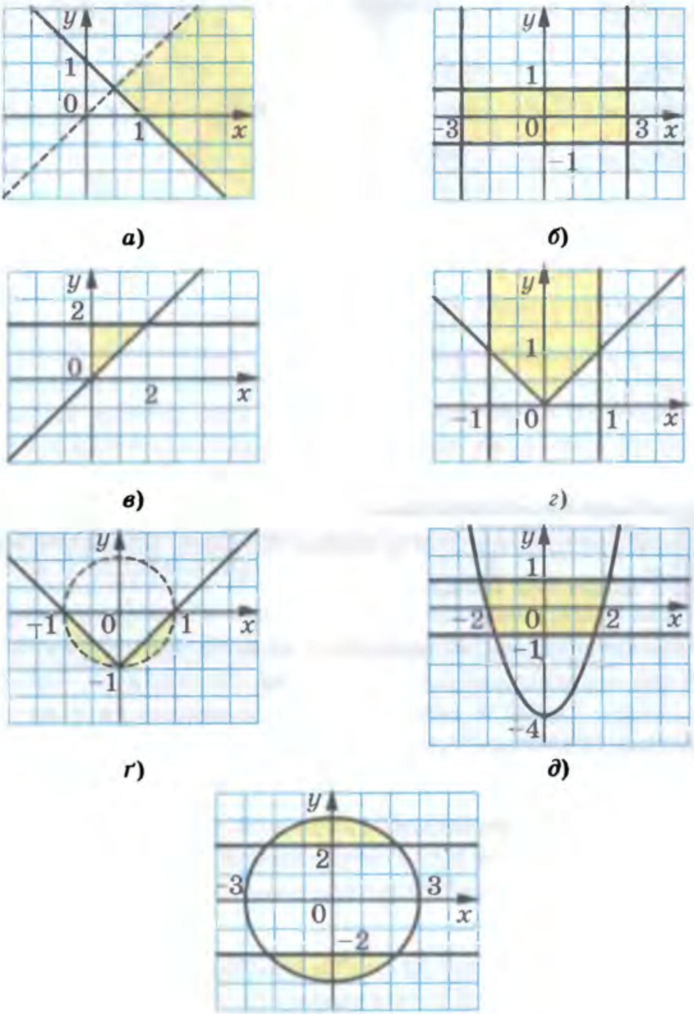


Рис. 120

361." **Зобразіть графік нерівності:**

1) $|x-y| \leqslant 2$;
2) $|y-3x| \geqslant 4$;
3) $|x+y| \leqslant x-y$;
4) $|x-y| \geqslant 2x+y$;
5) $\sqrt{x-y} \leqslant 2$;
6) $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{2x-y+1}$;
7) $\sqrt{2x+y} \geqslant \sqrt{x-y-1}$.

362.** Зобразіть графік нерівності:

1) $|x + y| \geqslant 3$;
2) $|2x - y| \leqslant 1$;
3) $|2x - y| \leqslant x + y$;
4) $|x + y| \geqslant x - y$;
5) $\sqrt{x+y} \leqslant 1$;
6) $\sqrt{x-2y-1} \leqslant \sqrt{x-y}$.

363.** Зобразіть графік нерівності:

1) $(x+y-1)\sqrt{x^2+y^2-1} < 0$;
2) $(x+y-1)\sqrt{x^2+y^2-1} \geqslant 0$.

364.** Зобразіть графік нерівності:

1) $\sqrt{1-|x|}(y-x^2) > 0$;
2) $\sqrt{1-|x|}(y-x^2) \leqslant 0$.

18. Ділення многочленів. Корені многочлена. Теорема Безу

Ви вмієте додавати, віднімати і множити многочлени. У цьому пункті ми запровадимо дію ділення многочленів.

Ви знаєте, що ціле число a ділиться націло на ціле число b ($b \neq 0$), якщо існує таке ціле число c, що $a = bc$. Засновуючись на цих міркуваннях, приймемо таке означення.

Означення. **Кажуть, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на тотожно не рівний нулю многочлен $B(x)$, якщо існує такий многочлен $Q(x)$, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$.**

Многочлен $A(x)$ називають **діленим**, многочлен $B(x)$ — **дільником**, многочлен $Q(x)$ — **часткою**.

Якщо многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$, то це позначають так: $A(x) \vdots B(x)$.

Розглянемо кілька прикладів.

Многочлен $x^3 + 1$ ділиться націло на многочлен $x + 1$. Справді, $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Тут роль частки виконує многочлен $x^2 - x + 1$.

Многочлен $6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x$ ділиться націло на многочлен $2x^2 - x + 1$, оскільки $6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x = (2x^2 - x + 1)(3x^2 - x)$. У цьому можна переконатися, розкривши дужки.

Пошук частки від ділення двох многочленів можна здійснювати за алгоритмом ділення «куточком», аналогічно тому, як це роблять при діленні чисел:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3+1 & x+1 \\ \cline{2-2}
x^3+x^2 & x^2-x+1 \\ \cline{1-1}
-\,-x^2+1 & \\
-x^2-x & \\ \cline{1-1}
-\,x+1 & \\
x+1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
-\,6x^4-5x^3+4x^2-x & 2x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
6x^4-3x^3+3x^2 & 3x^2-x \\ \cline{1-1}
-\,-2x^3+x^2-x & \\
-2x^3+x^2-x & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Якщо $A(x) \vdots B(x)$, тобто $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$, і многочлен $A(x)$ ненульовий, то очевидно, що степінь многочлена $A(x)$ дорівнює сумі степенів многочленів $B(x)$ і $Q(x)$. Тому для ділення націло ненульових многочленів необхідно, щоб степінь діленого був не меншим від степеня дільника. Проте ця умова не є достатньою. Так, многочлен $x^3 + 1$ не ділиться націло на многочлен $x - 1$. Справді, якби існував многочлен $Q(x)$ такий, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконувалася рівність $x^3 + 1 = (x - 1)\,Q(x)$, то при $x = 1$ отримали б неправильну рівність $1^3 + 1 = 0$.

Теорема 18.1. ***Для будь-якого многочлена $A(x)$ і ненульового многочлена $B(x)$ існує єдина пара многочленів $Q(x)$ і $R(x)$ таких, що***

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

де степінь многочлена $R(x)$ менший від степеня многочлена $B(x)$ або $R(x)$ — нульовий многочлен.

У цій рівності многочлен $Q(x)$ називають **неповною часткою**, а многочлен $R(x)$ — **остачею**.

Ви зможете довести цю теорему на заняттях математичного гуртка.

Розглянемо многочлени $A(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 1$ і $B(x) = x^2 - 3x + 2$. Знайдемо для цих многочленів неповну частку й остачу. Це можна зробити за допомогою ділення «куточком»:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,2x^4-x^3+x^2-1 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2}
2x^4-6x^3+4x^2 & 2x^2+5x+12 \text{ (неповна частка)} \\ \cline{1-1}
-\,5x^3-3x^2-1 & \\
5x^3-15x^2+10x & \\ \cline{1-1}
-\,12x^2-10x-1 & \\
12x^2-36x+24 & \\ \cline{1-1}
26x-25 \text{ (остача)} &
\end{array}
$$

Тепер можна записати:

$$2x^4 - x^3 + x^2 - 1 = (x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 5x + 12) + 26x - 25. \quad (1)$$

Розглянемо раціональний дріб $\frac{2x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$. За допомогою рівності (1) можна записати:

$$\frac{2x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = 2x^2 + 5x + 12 + \frac{26x - 25}{x^2 - 3x + 2}.$$

Права частина цієї рівності є сумою многочлена і дробу. У чисельнику дробу записано многочлен, степінь якого менший від степеня многочлена, який записано в знаменнику. Такий дріб називають **правильним**. Подання раціонального дробу у вигляді суми многочлена і правильного дробу називають **виділенням цілої частини з раціонального дробу**.

Означення. **Число α називають коренем многочлена $A(x)$, якщо $A(\alpha) = 0$.**

Зрозуміло, що корінь многочлена $A(x)$ — це корінь рівняння $A(x) = 0$.

Легко знайти множину коренів рівняння

$$(3x - 7)(5x + 1)(2x - 9)(x + 1) = 0.$$

Проте, якщо рівняння переписати так: $30x^4 - 169x^3 + 75x^2 + 337x + 63 = 0$, то задача пошуку його коренів стає непростою.

Тому при розв'язуванні рівнянь виду $A(x) = 0$, де $A(x)$ — многочлен, важливо навчитися виділяти в многочлені лінійний множник, тобто подавати його у вигляді добутку: $A(x) = (x - \alpha)B(x)$, де $B(x)$ — деякий многочлен, степінь якого на 1 менший від степеня многочлена $A(x)$.

Цьому значною мірою сприятимуть такі теореми.

Теорема 18.2 (теорема Безу). ***Остача від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x - \alpha$ дорівнює $A(\alpha)$.***

Доведення. Оскільки степінь дільника (двочлена $x - \alpha$) дорівнює 1, то степінь остачі має дорівнювати нулю або остача має бути нульовим многочленом, тобто шукана остача — це деяке число r. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ маємо:

$$A(x) = (x - \alpha)Q(x) + r.$$

Поклавши в цій рівності $x = \alpha$, отримаємо:

$$A(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + r.$$

Звідси $A(\alpha) = r$. ▲

Етьєн Безу́
(1730–1783)

Французький математик, основні роботи якого стосуються вищої алгебри. Викладав математику в училищі гардемаринів, Королівському артилерійському корпусі. Автор шеститомної праці «Курс математики»

Для того щоб число α було коренем многочлена A (x), необхідно й достатньо, щоб многочлен A (x) ділився націло на двочлен x − α.

Доведення. Нехай $A(\alpha) = 0$, тобто число α є коренем многочлена $A(x)$. Доведемо, що $A(x) \vdots (x - \alpha)$.

За теоремою Безу $A(\alpha)$ є остачею від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x - \alpha$. Проте $A(\alpha) = 0$, отже, $A(x) \vdots (x - \alpha)$.

Нехай тепер $A(x) \vdots (x - \alpha)$. Доведемо, що $A(\alpha) = 0$.

Оскільки $A(x) \vdots (x - \alpha)$, то остача від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x - \alpha$ дорівнює 0, тобто $A(\alpha) = 0$. ▲

Якщо $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ — множина коренів многочлена $A(x)$, то $A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot ... \cdot (x - \alpha_n)\, Q(x)$, де $Q(x)$ — деякий многочлен.

Доведення. Якщо α_1 — корінь многочлена $A(x)$, то за теоремою 18.3 маємо $A(x) = (x - \alpha_1)\, Q_1(x)$. Покладемо в цій рівності $x = \alpha_2$. Отримаємо $(\alpha_2 - \alpha_1)\, Q_1(\alpha_2) = 0$. Оскільки $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то α_2 — корінь многочлена $Q_1(x)$. Тоді за теоремою 18.3 маємо $Q_1(x) = (x - \alpha_2)\, Q_2(x)$. Отримуємо $A(x) = (x - \alpha_1)\, Q_1(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\, Q_2(x)$.

Застосовуючи аналогічні перетворення для коренів $\alpha_3, \alpha_4, ..., \alpha_n$, отримаємо, що $A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot ... \cdot (x - \alpha_n)\, Q_n(x)$. ▲

Множина коренів многочлена степеня n містить не більше ніж n елементів.

Доведення. Припустимо, що $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}$ — корені многочлена $A(x)$, степінь якого дорівнює n. Міркуючи так само, як у доведенні наслідку 1, можна записати:

$$A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot ... \cdot (x - \alpha_{n+1})\, Q(x).$$

Проте ця рівність неможлива, оскільки в лівій частині записано многочлен степеня n, а в правій — вираз, який тотожно дорівнює многочлену, степінь якого більший за n. ▲

З наслідку 2 випливає таке твердження.

Наслідок 3. ***Якщо множина коренів многочлена $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ містить більше ніж n елементів, то $a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$, тобто цей многочлен тотожно дорівнює нулю.***

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що вираз $A(x) = (x - 2)^{100} + (x - 1)^{50} - 1$ ділиться націло на многочлен $B(x) = x^2 - 3x + 2$.

Розв'язання. Маємо: $B(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. Оскільки $A(1) = 0$, то многочлен $A(x)$ ділиться націло на $x - 1$, тобто $A(x) = (x - 1)Q(x)$. Оскільки $A(2) = (2 - 1)Q(2) = 0$, то многочлен $Q(x)$ ділиться націло на $x - 2$, тобто $Q(x) = (x - 2)Q_1(x)$. Таким чином, $A(x) = (x - 1)(x - 2)Q_1(x)$, тобто многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $x^2 - 3x + 2$.

ПРИКЛАД 2 Остачі від ділення многочлена $P(x)$ на двочлени $x - 2$ і $x - 3$ відповідно дорівнюють 5 і 7. Знайдіть остачу від ділення многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2 - 5x + 6$.

Розв'язання. Оскільки степінь многочлена $x^2 - 5x + 6$ дорівнює 2, то степінь шуканої остачі не більший за 1 або остача є нульовим многочленом. Тому остача — це многочлен виду $ax + b$.

Маємо: $P(x) = (x^2 - 5x + 6)Q(x) + ax + b$;

$$P(x) = (x - 2)(x - 3)Q(x) + ax + b.$$

Підставимо по черзі в цю рівність $x = 2$ і $x = 3$. Отримуємо:

$$P(2) = 2a + b,\ P(3) = 3a + b.$$

Застосовуючи теорему Безу, маємо: $P(2) = 5$ і $P(3) = 7$. Тоді отримуємо систему $\begin{cases} 2a + b = 5, \\ 3a + b = 7. \end{cases}$

Звідси $a = 2$, $b = 1$. Тоді шуканою остачею є многочлен $2x + 1$.

Відповідь: $2x + 1$.

ПРИКЛАД 3 При яких натуральних n многочлен $f(x) = x^n + a^n$ ділиться націло на двочлен $x + a$, де $a \neq 0$?

Розв'язання. Маємо: $x + a = x - (-a)$. З'ясуємо, при яких натуральних n виконується рівність $f(-a) = 0$, тобто $(-a)^n + a^n = 0$. Очевидно, ця рівність виконується тільки при всіх непарних n.

ПРИКЛАД 4 Доведіть тотожність:

$$\frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}-1=0.$$

Розв'язання. Розглянемо ліву частину рівняння як многочлен зі змінною d і позначимо його $f(d)$. Зазначимо, що многочлен $f(d)$ має степінь не більший за 2 або є нульовим многочленом.

Легко перевірити, що $f(a)=f(b)=f(c)=0$. З наслідку 3 випливає, що цей многочлен тотожно дорівнює нулю.

Вправи

365.° Доведіть, що **многочлен $A(x)$ ділиться націло** на многочлен $B(x)$:

1) $A(x)=x^2-7x+6$, $B(x)=x-6$;
2) $A(x)=x^4-1$, $B(x)=x^3+x^2+x+1$;
3) $A(x)=3x^4-7x^3+2x^2+3x-1$, $B(x)=x^3-2x^2+1$

366.° Доведіть, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$:

1) $A(x)=x^3-1$, $B(x)=x^2+x+1$;
2) $A(x)=4x^3-8x^2+5x-1$, $B(x)=2x^2-3x+1$;
3) $A(x)=2x^4-x^3+2x^2+1$, $B(x)=x^2-x+1$.

367.° Поділивши «куточком» многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, знайдіть неповну частку й остачу:

1) $A(x)=2x^5+5x^3+6x-7$, $B(x)=x^3+x$;
2) $A(x)=x^4+x+1$, $B(x)=x^2+x+1$;
3) $A(x)=x^4+x^2+1$, $B(x)=x+5$.

368.° Поділивши «куточком» многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, знайдіть неповну частку й остачу:

1) $A(x)=x^5-6x^3+2x^2-4$, $B(x)=x^2-x+1$;
2) $A(x)=x^7-1$, $B(x)=x^3+x+1$;
3) $A(x)=x^3+5x^2-6x-6$, $B(x)=x-2$.

369.° Доведіть, що многочлен $A(x)$ не ділиться націло на многочлен $B(x)$:

1) $A(x)=x^2+1$, $B(x)=x-1$;
2) $A(x)=x^3+x-1$, $B(x)=x+1$;
3) $A(x)=2x^4-3x^3-x+1$, $B(x)=x^2-3x+2$.

370.° Знайдіть остачу від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $B(x)$:

1) $A(x)=x^3+2x^2+3x+1$, $B(x)=x-1$;
2) $A(x)=2x^4-4x^3-x-1$, $B(x)=x+2$.

371.° Знайдіть остачу від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $B(x)$:

1) $A(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + 3$, $B(x) = x - 4$;

2) $A(x) = 6x^4 - 5x^3 - 53x^2 + 45x - 9$, $B(x) = x + 1$.

372.° Доведіть, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на двочлен $B(x)$:

1) $A(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$, $B(x) = x + 2$;

2) $A(x) = 3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 5x - 2$, $B(x) = x - 2$;

3) $A(x) = 5x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 1$, $B(x) = x - 1$;

4) $A(x) = x^6 - 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x - 3$, $B(x) = x - 3$.

373.• Виділіть цілу частину з раціонального дробу:

1) $\frac{x^3 - x + 2}{x^2 + 1}$;

2) $\frac{2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 1}{x^2 - 1}$;

3) $\frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1}{x^2 + x - 2}$.

374.• Виділіть цілу частину з раціонального дробу:

1) $\frac{2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1}{x^2 - x}$;

2) $\frac{5x^4 - 3x^5 + 3x - 1}{x + 1 - x^2}$;

3) $\frac{x^5 - 3x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 1}$.

375.• Доведіть, що вираз $(x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ ділиться націло на вираз $x(x + 1)(2x + 1)$, де $n \in \mathbb{N}$.

376.• Доведіть, що вираз $(x^2 + x - 1)^{2n} + (x^2 - x + 1)^{2n} - 2$ ділиться націло на многочлен $x^2 - x$, де $n \in \mathbb{N}$.

377.• При яких значеннях параметра a остача від ділення многочлена:

1) $x^4 + ax^3 - 2x^2 + x - 1$ на двочлен $x - 1$ дорівнює 5;

2) $2x^4 - 3x^3 - ax^2 - x - 2$ на двочлен $x + 1$ дорівнює 3?

378.• При яких значеннях параметра b многочлен $x^3 + 3x^2 - bx + 6$ ділиться націло на двочлен $x + 2$?

379.• При яких значеннях параметрів a і b многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$:

1) $A(x) = 2x^3 - x^2 + ax + b$, $B(x) = x^2 - 1$;

2) $A(x) = 6x^4 - x^3 + ax^2 + bx + 4$, $B(x) = x^2 - 4$?

380.• При яких значеннях параметрів a і b многочлен $A(x) = 3x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + 10$ ділиться націло на многочлен $B(x) = x^2 + x - 2$?

381.•• Доведіть, що коли $n \vdots k$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, то $(x^n - a^n) \vdots (x^k - a^k)$.

382.** При яких значеннях параметрів a, b і c многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ ділиться націло на двочлени $x - 1$ і $x + 2$, а при діленні на двочлен $x + 1$ дає в остачі 10?

383.** При яких значеннях параметрів a і b многочлен $x^3 + ax^2 + bx + ab$ при діленні на $x - 2$ дає в остачі 15, а при діленні на $x + 1$ дає в остачі 0?

384.** Остачі від ділення многочлена $A(x)$ на двочлени $x - 3$ і $x - 1$ відповідно дорівнюють 6 і 4. Знайдіть остачу від ділення многочлена $A(x)$ на многочлен $x^2 - 4x + 3$.

385.* Доведіть тотожність

$$a\frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}+b\frac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)}+c\frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}=d.$$

19. Алгебраїчні рівняння

Означення. **Рівняння виду $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, де a_0, a_1, ..., a_n — параметри, називають алгебраїчним рівнянням.**

Числа a_0, a_1, ..., a_n називають **коефіцієнтами** алгебраїчного рівняння.

Число a_0 називають **вільним членом** цього рівняння.

Теорема 19.1. ***Якщо алгебраїчне рівняння з цілими коефіцієнтами має цілий корінь, то він є дільником вільного члена.***

Доведення. Нехай x_0 — цілий корінь рівняння

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,$$

де a_0, a_1, ..., a_n — цілі числа. Тоді виконується рівність

$$a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1x_0 + a_0 = 0.$$

Звідси $a_0 = -a_nx_0^n - a_{n-1}x_0^{n-1} - \ldots - a_1x_0$;

$$a_0 = x_0(-a_nx_0^{n-1} - a_{n-1}x_0^{n-2} - \ldots - a_1).$$

Отже, ціле число a_0 дорівнює добутку двох цілих чисел, одне з яких x_0. Тому $a_0 \,\vdots\, x_0$. ▲

Зауваження. З доведеної теореми не випливає, що дільник вільного члена алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами обов'язково є коренем рівняння. У теоремі йдеться тільки про те, що цілі корені алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами слід шукати лише серед дільників вільного члена.

Іншими словами: для того щоб число було цілим коренем алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами, необхідно, щоб воно було дільником вільного члена (рис. 121). Однак ця умова не є достатньою.

Наприклад, числа -1, 1, -2 і 2 є дільниками вільного члена рівняння $3x^2 - 5x - 2 = 0$. Проте тільки одне з них, число 2, є коренем рівняння.

Рис. 121

Теорема 19.1 допомагає розв'язувати ті алгебраїчні рівняння з цілими коефіцієнтами, які мають цілі корені. Переконаємося в цьому на такому прикладі.

ПРИКЛАД Розв'яжіть рівняння $2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - x - 6 = 0$.

Розв'язання. Щоб перевірити наявність цілих коренів у цього рівняння, випишемо всі дільники його вільного члена: 1; −1; 2; −2; 3; −3; 6; −6.

Перевіркою встановлюємо, що $x = -1$ є коренем даного рівняння. Отже, многочлен $f(x)$, який стоїть у лівій частині рівняння, ділиться націло на двочлен $x + 1$, тобто $f(x) = (x + 1)\, g(x)$.

Многочлен $g(x)$ знайдемо, виконавши ділення «куточком» многочлена $f(x)$ на двочлен $x + 1$:

$$
\begin{array}{l|l}
-\; 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - x - 6 & x + 1 \\
\quad 2x^4 + 2x^3 & \overline{2x^3 - 7x^2 + 5x - 6} \\
\hline
\qquad -\; -7x^3 - 2x^2 - x - 6 & \\
\qquad\quad -7x^3 - 7x^2 & \\
\hline
\qquad\qquad -\; 5x^2 - x - 6 & \\
\qquad\qquad\quad 5x^2 + 5x & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad -\; -6x - 6 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad -6x - 6 &
\end{array}
$$

Те саме можна записати в «одноповерховому» вигляді.

$$2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - x - 6 = 2x^4 + \underbrace{2x^3 - 7x^3}_{-5x^3} \underbrace{-7x^2 + 5x^2}_{-2x^2} + \underbrace{5x - 6x}_{-x} - 6 =$$

$$= 2x^3(x + 1) - 7x^2(x + 1) + 5x(x + 1) - 6(x + 1) =$$
$$= (x + 1)(2x^3 - 7x^2 + 5x - 6).$$

Отже, $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 6$.

З'ясуємо, чи має цілі корені рівняння $2x^3 - 7x^2 + 5x - 6 = 0$. Випишемо дільники вільного члена: 1; −1; 2; −2; 3; −3; 6; −6.

Перевіркою встановлюємо, що $x = 3$ є коренем цього рівняння. Тоді $g\ (x) = (x - 3)\ h\ (x)$. Знайдемо многочлен $h\ (x)$. Для цього подамо многочлен $g\ (x)$ у вигляді суми двочленів, кожний з яких ділиться націло на $x - 3$:

$$2x^3 - 7x^2 + 5x - 6 = 2x^3 \underbrace{-\,6x^2 - x^2}_{-7x^2} + \underbrace{3x + 2x}_{5x} - 6 =$$

$$= 2x^2(x-3) - x(x-3) + 2(x-3) = (x-3)(2x^2 - x + 2).$$

Отже, $h\ (x) = 2x^2 - x + 2$.

Очевидно, що рівняння $h\ (x) = 0$ коренів не має. Таким чином, дане рівняння має два корені -1 і 3.

Відповідь: -1; 3.

Вправи

386.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$;
2) $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$;
3) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$;
4) $5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$;
5) $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = 0$;
6) $x^5 + 8x^4 + 24x^3 + 35x^2 + 28x + 12 = 0$.

387.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$;
2) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$;
3) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$;
4) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$;
5) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$;
6) $3x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 9x + 10 = 0$.

388.** Доведіть, що коли алгебраїчне рівняння з цілими коефіцієнтами

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

має раціональний корінь, то він є цілим числом.

389.** Доведіть, що коли алгебраїчне рівняння з цілими коефіцієнтами

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

має раціональний корінь $x_0 = \frac{p}{q}$, де $\frac{p}{q}$ — нескоротний дріб, то p — дільник вільного члена a_0, q — дільник коефіцієнта a_n.

20. Метод математичної індукції

Вивчаючи навколишній світ, нам часто доводиться на підставі результатів спостережень і дослідів робити висновки.

Загальні висновки, отримані на підставі окремих випадків, називають **індуктивними**, а сам метод таких міркувань — **індуктивним методом** або **індукцією** (від лат. *inductio* – наведення).

Наприклад, задовго до відкриття законів руху Землі люди зробили висновок, що Сонце вранці встає на сході, а ввечері зникає за обрієм на заході. Цей висновок є індуктивним: адже він базувався лише на спостереженнях.

Звісно, за допомогою індукції не завжди можна отримати правильні висновки. Так, якщо у вашій і сусідній школах серед учителів початкових класів немає чоловіків, то це не означає, що всі вчителі початкових класів — жінки.

Незважаючи на необхідність ставитися до індуктивних висновків з певним ступенем недовіри, індуктивний метод знаходить широке застосування в математиці.

Розглянемо два приклади.

- Будемо спостерігати, як «поводяться» суми n перших непарних натуральних чисел. Маємо:

$S_1 = 1 = 1;$
$S_2 = 1 + 3 = 4;$
$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9;$
$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16;$
$S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$

Числа 1, 4, 9, 16, 25 є квадратами послідовних натуральних чисел.

Тепер можна зробити таке припущення: для будь-якого натурального n

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2. \qquad (1)$$

- Розглянемо значення многочлена $f(n) = n^2 - n + 41$ при значеннях n, які дорівнюють 1, 2, 3, 4, 5. Маємо:

$f(1) = 41$ — просте число;
$f(2) = 43$ — просте число;
$f(3) = 47$ — просте число;
$f(4) = 53$ — просте число;
$f(5) = 61$ — просте число.

Припущення: для будь-якого натурального n значення виразу $f(n)$ є простим числом.

Два наведених припущення є лише гіпотезами, які належить або довести, або спростувати.

Спростувати гіпотезу можна контрприкладом. Для другого припущення такий контрприклад легко знайти. Маємо: $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ — складене число.

Спроба знайти контрприклад для першого індуктивного висновку може привести до таких рівностей:

$S_6 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$;

$S_7 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7^2$;

$S_8 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64 = 8^2$.

Отримані рівності лише підкріплюють упевненість у тому, що висунута гіпотеза є правильною.

Зрозуміло, що приєднання до суми чергового непарного доданка не призведе до доведення гіпотези: скільки б сум ми не обчислили, неможливо гарантувати того, що серед нескінченної кількості сум, що залишаються, не трапиться така, для якої рівність (1) не виконується.

Щоб довести справедливість висловленої гіпотези, потрібно провести деякі загальні міркування.

Нехай рівність (1) є справедливою для k доданків, тобто

$$S_k = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2.$$

Розглянемо суму, яка містить $k + 1$ доданок:

$$S_{k+1} = \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)}_{S_k} + (2k + 1) = S_k + (2k + 1).$$

З урахуванням припущення маємо: $S_{k+1} = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Наведені міркування гарантують, що *коли рівність* (1) *є правильною для $n = k$, то вона залишається правильною і для $n = k + 1$*.

Тепер можна стверджувати, що рівність (1) доведено для будь-якого натурального значення n. Пояснимо це.

Ми показали, що рівність (1) є правильною для $n = 1$. Отже, вона є правильною для $n = 1 + 1 = 2$, а тоді вона є правильною при $n = 2 + 1 = 3$, при $n = 3 + 1 = 4$, при $n = 4 + 1 = 5$ і взагалі, цей «ланцюжок» можна протягнути до будь-якого натурального значення n. Отже, рівність (1) є правильною при всіх натуральних значеннях n.

Описаний метод доведення називають **методом математичної індукції**. У загальному вигляді його можна описати так.

Нехай потрібно довести, що деяке твердження є правильним для будь-якого натурального значення n.

Доведення цього факту методом математичної індукції складається з двох частин (теорем):

1) доводять (перевіряють) справедливість твердження для $n = 1$;

2) роблять припущення, що твердження є правильним для $n = k$, і на підставі цього доводять, що воно є правильним для $n = k + 1$.

Теорему, яку доводять у першій частині, називають **базою індукції**.

Наприклад, при доведенні рівності (1) базою індукції було твердження, що рівність (1) виконується при $n = 1$.

Теорему, яку доводять у другій частині методу, називають **індуктивним переходом**.

ПРИКЛАД 1 Виведіть формулу для обчислення значення суми

$$S_n = \frac{1}{1\cdot3}+\frac{7}{3\cdot5}+\frac{17}{5\cdot7}+\ldots+\frac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)},\text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

Розв'язання. Для $n = 1$: $S_1 = \frac{1}{1\cdot3} = \frac{1}{3}$.

Для $n = 2$: $S_2 = \frac{1}{1\cdot3}+\frac{7}{3\cdot5} = \frac{4}{5}$.

Для $n = 3$: $S_3 = \frac{1}{1\cdot3}+\frac{7}{3\cdot5}+\frac{17}{5\cdot7} = \frac{9}{7}$.

Для $n = 4$: $S_4 = \frac{1}{1\cdot3}+\frac{7}{3\cdot5}+\frac{17}{5\cdot7}+\frac{31}{7\cdot9} = \frac{16}{9}$.

Бачимо, що тепер можна зробити таке припущення:

$$S_n = \frac{n^2}{2n+1}. \qquad (2)$$

Доведемо цю гіпотезу методом математичної індукції.

Вище ми перевірили справедливість формули (2) для $n = 1$, тим самим ми довели теорему «база індукції».

Тепер доведемо теорему «індуктивний перехід».

Нехай формула (2) є правильною при $n = k$, тобто $S_k = \frac{k^2}{2k+1}$.

Маємо: $S_{k+1} = \underbrace{\frac{1}{1\cdot3}+\frac{7}{3\cdot5}+\frac{17}{5\cdot7}+\ldots+\frac{2k^2-1}{(2k-1)(2k+1)}}_{S_k}+\frac{2(k+1)^2-1}{(2k+1)(2k+3)} =$

$$= S_k + \frac{2(k+1)^2-1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k^2}{2k+1}+\frac{2k^2+4k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^3+5k^2+4k+1}{(2k+1)(2k+3)} =$$

$$= \frac{2k^3+2k^2+3k^2+3k+k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2(k+1)+3k(k+1)+k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k^2+3k+1)}{(2k+1)(2k+3)} =$$

$$=\frac{(k+1)(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)^2}{2k+3}.$$

Отже, припустивши, що формула (2) є правильною при $n = k$, ми довели, що вона є правильною і при $n = k + 1$. А з урахуванням теореми «база індукції» можна зробити висновок, що гіпотеза є правильною.

ЗАДАЧА 1 Доведіть, що $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, де $n \in \mathbb{N}$.

Користуючись методом математичної індукції, доведіть цю рівність самостійно.

ПРИКЛАД 2 Виведіть формулу **для обчислення** суми $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$, де $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. Для $n = 1$: $S_1 = 1^3 = 1$.

Для $n = 2$: $S_2 = 1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1 + 2)^2$.

Для $n = 3$: $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$.

Для $n = 4$: $S_4 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$.

Тепер можна зробити таке припущення:

$$S_n = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

Ураховуючи ключову задачу 1, гіпотезу можна записати в такій формі:

$$S_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \qquad (3)$$

Справедливість цієї формули при $n = 1$ було встановлено вище.

Нехай формула (3) є правильною при $n = k$, тобто $S_k=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$.

Маємо: $S_{k+1}=1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=$

$$=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=\frac{(k+1)^2\,(k^2+4k+4)}{4}=\frac{(k+1)^2\,(k+2)^2}{4}=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Методом математичної індукції формулу (3) доведено.

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ значення виразу $5^n - 3^n + 2n$ кратне 4.

Розв'язання. При $n = 1$ отримуємо $5^1 - 3^1 + 2\cdot 1 = 4 \,\vdots\, 4$, тобто теорему «база індукції» доведено.

Нехай при $n = k$ є правильним твердження

$$(5^k - 3^k + 2k) \,\vdots\, 4.$$

Доведемо, що тоді це твердження є правильним при $n = k + 1$, тобто

$$(5^{k+1} - 3^{k+1} + 2(k + 1)) \vdots 4.$$

Для доведення достатньо показати, що різниця $(5^{k+1} - 3^{k+1} + 2k + 2) - (5^k - 3^k + 2k)$ кратна 4.

Перепишемо цю різницю так:

$$5^k(5 - 1) - 3^k(3 - 1) + 2 = 4 \cdot 5^k - 2(3^k - 1).$$

Оскільки $(3^k - 1) \vdots 2$, то значення отриманого виразу кратне 4.

Отже, твердження, що доводиться, є правильним, у чому ми переконалися за допомогою методу математичної індукції.

Методом математичної індукції можна скористатися і в тих випадках, коли потрібно довести твердження, правильне для всіх натуральних n таких, що $n \geqslant n_0$, де $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > 1$. У цьому разі теорему «база індукції» доводять (перевіряють) для $n = n_0$.

ПРИКЛАД Доведіть, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і $n > 4$ виконується нерівність $2^n > n^2$.

Розв'язання. При $n = 5$ маємо правильну нерівність $2^5 > 5^2$.

Нехай $2^k > k^2$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 4$. Маємо:

$$2 \cdot 2^k > 2k^2;$$
$$2^{k+1} > 2k^2.$$

Легко показати (переконайтеся в цьому самостійно), що при $k > 1 + \sqrt{2}$, а тим більше при $k > 4$, виконується нерівність $2k^2 > (k + 1)^2$. Звідси

$$2^{k+1} > (k + 1)^2.$$

Ми показали, що при $n = 5$ виконується теорема «база індукції», і довели теорему «індуктивний перехід». Отже, нерівність, що розглядається, є правильною при будь-яких натуральних n таких, що $n > 4$.

Завершуючи розгляд методу математичної індукції, наголосимо на такому.

Кожний з обох етапів доведення методом математичної індукції — і база індукції, і індуктивний перехід — є важливим. Вище ми переконалися, що твердження може бути правильним у цілій низці окремих випадків, але неправильним узагалі. Це переконує нас в тому, наскільки важливим є довести теорему «індуктивний перехід». Але було б помилково вважати, що доведення теореми «база індукції» є менш суттєвим.

Покажемо, як, користуючись лише теоремою «індуктивний перехід», можна, наприклад, «довести», що при будь-якому натуральному n число $2n + 1$ є парним.

Нехай це твердження є правильним при $n = k$, тобто $2k + 1$ є парним числом. Доведемо, що тоді воно буде правильним для $n = k + 1$, тобто число $2(k + 1) + 1$ також буде парним.

Маємо: $2(k + 1) + 1 = (2k + 1) + 2$.

За припущенням число $2k + 1$ є парним. Сума двох парних чисел — число парне. Отже, число $(2k + 1) + 2$ також є парним.

Ми коректно довели теорему «індуктивний перехід». Але при цьому не виявили, що теорема «база індукції» є неправильною (при $n = 1$ число $2n + 1$ є непарним). У цьому й полягає причина того, що нам удалося «довести» настільки безглузде твердження.

Вправи

390.° Числа 24, 44, 64, 84 кратні 4. Чи можна звідси зробити висновок, що число, яке закінчується цифрою 4, кратне 4?

391.° Розгляньте значення многочлена $f(n) = n^2 + n + 17$ при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$. Зробіть припущення. Установіть, чи є висловлена гіпотеза правильною.

392.° Доведіть, що при будь-якому натуральному n виконується рівність:

1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

2) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

3) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \ldots + n(2n+1) = \dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$;

4) $\dfrac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} + \dfrac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} + \dfrac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+1)}{n+2}$;

5) $\left(1 - \dfrac{4}{1}\right)\left(1 - \dfrac{4}{9}\right)\left(1 - \dfrac{4}{25}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{4}{(2n-1)^2}\right) = \dfrac{1+2n}{1-2n}$.

393.° Доведіть, що при будь-якому натуральному n виконується рівність:

1) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

2) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$;

3) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$;

4) $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$.

394.** Доведіть, що при будь-якому натуральному $n \geqslant 2$ виконується рівність

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

395.** Доведіть, що при будь-якому натуральному n виконується рівність

$$-1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \ldots + (-1)^n\cdot(2n - 1) = (-1)^n\cdot n.$$

396.** Виведіть формулу для обчислення суми

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

397.** Виведіть формулу для обчислення суми

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

398.** Доведіть нерівність $2^n > 2n + 1$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

399.** Доведіть нерівність $3^n > 4n + 1$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

400.** Знайдіть усі натуральні значення n такі, що $4^n > 3n^2 + 1$.

401.** Доведіть нерівність $|a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n|$.

402.** Доведіть, що для будь-якого натурального n:

1) $(3^{2n+1} + 2^{n+2}) \vdots 7$;
2) $(6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}) \vdots 17$;
3) $(4^n + 15n - 1) \vdots 9$;
4) $(5^n - 3^n + 2n) \vdots 4$.

403.** Доведіть, що для будь-якого натурального n:

1) $(7^{n+1} + 8^{2n-1}) \vdots 19$;
2) $(7\cdot 24^n - 5\cdot 13^n - 2^{n+1}) \vdots 11$;
3) $(3^{2n+2} - 8n - 9) \vdots 64$.

§ 3

СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

21. Степенева функція з натуральним показником

Властивості і графіки функцій $y = x$ і $y = x^2$ добре знайомі вам з попередніх класів. Ці функції є окремими випадками функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, яку називають **степеневою функцією з натуральним показником**.

Оскільки вираз x^n, $n \in \mathbb{N}$, має зміст при будь-якому x, то *областю визначення степеневої функції з натуральним показником є множина* $\mathbb{R}$.

Очевидно, що розглядувана *функція має єдиний нуль* $x = 0$.

Подальше дослідження властивостей функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

- **Перший випадок:** $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

Зазначимо, що при $k = 1$ отримуємо функцію $y = x^2$, властивості і графік якої були розглянуті у 8 класі.

Оскільки при будь-якому x вираз x^{2k} набуває тільки невід'ємних значень, то область значень розглядуваної функції не містить жодного від'ємного числа.

Можна показати, що для будь-якого $a \geqslant 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{2k} = a$.

↳ Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^n$, *де* n *— парне натуральне число, є множина* $[0; +\infty)$.

Якщо $x \neq 0$, то $x^{2k} > 0$.

↳ Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^n$, *де* n *— парне натуральне число.*

↳ *Функція* $y = x^n$, *де* n *— парне натуральне число, є парною.* Справді, для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Звідси $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

↳ Отже, *функція* $y = x^n$, *де* n *— парне натуральне число, спадає на проміжку* $(-\infty; 0]$. Аналогічно можна показати, що ця функція *зростає на проміжку* $[0; +\infty)$.

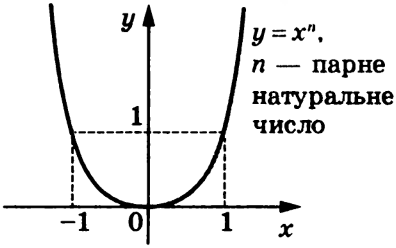


Рис. 122

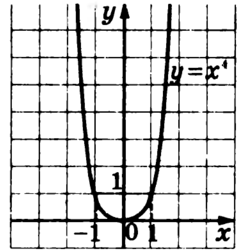


Рис. 123

Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число (рис. 122). Зокрема, графік функції $y = x^4$ зображено на рисунку 123.

- **Другий випадок: n — непарне натуральне число.**

Зазначимо, що при $n = 1$ отримуємо функцію $y = x$, властивості і графік якої були розглянуті в 7 класі.

Тепер нехай $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Можна показати, що для будь-якого a існує таке значення аргументу x, що $x^{2k+1} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є множина* $\mathbb{R}$.

Якщо $x < 0$, то $x^{2k+1} < 0$; якщо $x > 0$, то $x^{2k+1} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число.*

Функція $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є непарною. Справді, для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 < x_2$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$.

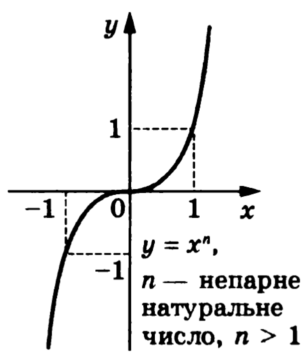


Рис. 124

Отже, *функція $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є зростаючою.*

Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, $n > 1$ (рис. 124).

Зокрема, графіки функцій $y = x^3$ і $y = x^5$ зображено на рисунку 125.

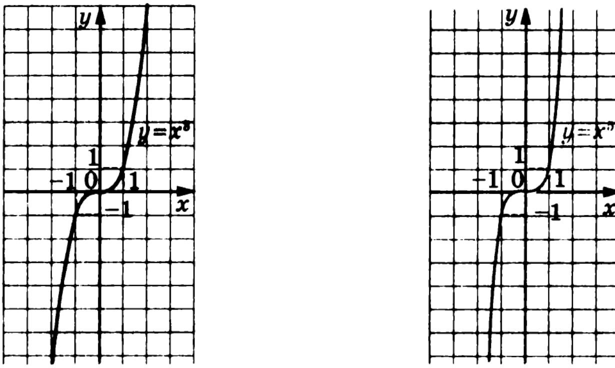


Рис. 125

Дослідимо взаємне розміщення графіків функцій $y = x^m$ і $y = x^n$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > n$, на проміжку $[0; +\infty)$. Очевидно, що ці графіки мають дві спільні точки: (0; 0) і (1; 1).

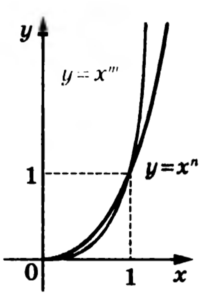
Розглянемо різницю $x^m - x^n = x^n\,(x^{m-n} - 1)$. Оскільки $m > n$, то $(m - n) \in \mathbb{N}$.

Якщо $0 < x < 1$, то $x^n > 0$ і $x^{m-n} < 1$. Звідси $x^n\,(x^{m-n} - 1) < 0$.

Якщо $x > 1$, то $x^n > 0$ і $x^{m-n} > 1$. Звідси $x^n\,(x^{m-n} - 1) > 0$.

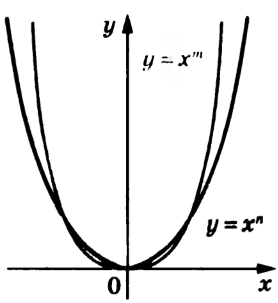
Отже, на проміжку (0; 1) графік функції $y = x^m$ знаходиться нижче від графіка функції $y = x^n$, а на проміжку $(1; +\infty)$ — вище (рис. 126).

Якщо m і n — парні натуральні числа, то, відобразивши графік, зображений на рисунку 126, симетрично відносно осі ординат, отримаємо рисунок 127. Для непарних m і n застосуємо симетрію відносно початку координат (рис. 128).



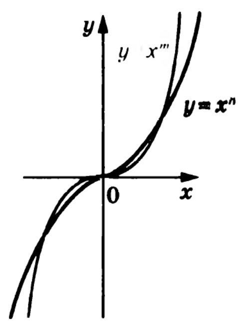
$m > n$,
$x \geqslant 0$

Рис. 126



m і n — парні натуральні числа, $m > n$

Рис. 127



m і n — непарні натуральні числа, $m > n$

Рис. 128

У таблиці наведено властивості функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, установлені в цьому пункті.

	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число
Область визначення	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значень	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання / спадання	Спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$	Зростаюча

Вправи

404.° При яких значеннях a графік функції $y = ax^4$ проходить через точку: 1) $A\ (2; -12)$; 2) $B\ (-3; -3)$?

405.° При яких значеннях a графік функції $y = ax^3$ проходить через точку: 1) $C\ (3; -18)$; 2) $D\ (-2; 64)$?

406.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{19}$. Порівняйте:

1) $f(1{,}4)$ і $f(1{,}8)$;
2) $f(-7{,}6)$ і $f(-8{,}5)$;
3) $f(-6{,}9)$ і $f(6{,}9)$;
4) $f(0{,}2)$ і $f(-12)$.

407.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{21}$. Порівняйте:

1) $f(20)$ і $f(17)$; 2) $f(-44)$ і $f(1{,}5)$; 3) $f(-52)$ і $f(-45)$.

408.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{20}$. Порівняйте:

1) $f(3{,}6)$ і $f(4{,}2)$;
2) $f(-6{,}7)$ і $f(-5{,}8)$;
3) $f(-2{,}4)$ і $f(2{,}4)$;
4) $f(-15)$ і $f(2)$.

409.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{50}$. Порівняйте:

1) $f(9{,}2)$ і $f(8{,}5)$;
2) $f(-1{,}1)$ і $f(-1{,}2)$;
3) $f(19)$ і $f(-19)$;
4) $f(-7)$ і $f(9)$.

410.° Скільки коренів має рівняння $x^n = 1600$, якщо:

1) n — парне натуральне число;

2) n — непарне натуральне число?

411.° Чи має дане рівняння від'ємний корінь:

1) $x^6 = 2$; 2) $x^5 = -3$; 3) $x^7 = 9$; 4) $x^6 = -10$?

412.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^5 = 32$; 2) $x^3 = -\frac{8}{27}$; 3) $x^4 = 81$; 4) $x^4 = -16$.

413.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 = -27$; 2) $x^5 = 0{,}00032$; 3) $x^6 = 64$; 4) $x^8 = -1$.

414.° Знайдіть точки перетину графіків функцій:

1) $y = x^6$ і $y = 2x^4$; 2) $y = x^4$ і $y = -27x$.

415.° Знайдіть точки перетину графіків функцій $y = x^5$ і $y = x^3$.

416.° Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $x^8 = x + 1$; 3) $x^4 = 0{,}5x - 2$;

2) $x^5 = 3 - 2x$; 4) $x^3 = x^2 - 3$.

417.° Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^6, \\ 2x - y - 3 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^5, \\ y = 2 - 0{,}5x^2. \end{cases}$

418.° Чи випливає з рівності $x_1^n = x_2^n$, що $x_1 = x_2$, коли: 1) n — парне; 2) n — непарне?

419.° Чи випливає з нерівності $x_1^n > x_2^n$, що $x_1 > x_2$, коли: 1) n — парне; 2) n — непарне?

420. Чи випливає з нерівності $x_1 > x_2$, що $x_1^n > x_2^n$, коли: 1) n — парне; 2) n — непарне?

421.° Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння:

1) $x^{12} = a - 6$; 2) $x^{24} = a^2 + 7a - 8$?

422. Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $x^8 = 9a - a^3$?

423.• Побудуйте графік функції:

1) $y = x^3 - 1$; 4) $y = (x - 1)^4$; 7) $y = -\frac{1}{2}x^4$;

2) $y = (x + 2)^3$; 5) $y = (x + 1)^4 - 1$; 8) $y = |x^3|$;

3) $y = x^4 - 4$; 6) $y = -x^3$; 9) $y = (|x| + 1)^4$.

424.$^{\bullet}$ **Побудуйте графік функції:**

1) $y = x^3 + 3$;
2) $y = (x - 3)^3$;
3) $y = x^4 + 2$;
4) $y = (x + 1)^4$;
5) $y = (x - 1)^3 + 2$;
6) $y = \frac{1}{4}x^3$;
7) $y = -x^4$;
8) $y = (|x| - 2)^3$;
9) $y = |x + 1|^3$.

425.$^{\bullet}$ **Побудуйте графік функції:**

1) $f(x) = \begin{cases} x^4, & \text{якщо } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geqslant 0; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x^5, & \text{якщо } x < -1, \\ -x - 2, & \text{якщо } x \geqslant -1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

426.$^{\bullet}$ **Побудуйте графік функції** $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{якщо } x < 0, \\ -\sqrt{x}, & \text{якщо } x \geqslant 0. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

427.$^{\bullet}$ **Побудуйте графік функції:**

1) $y = |x| x^4$;
2) $y = |x| x^4 + x^5$.

428.$^{\bullet}$ **Побудуйте графік функції:**

1) $y = |x| x^3$;
2) $y = |x| x^4 - x^5$.

429.$^{\bullet}$ **Знайдіть найбільше і найменше значення функції** $f(x) = x^8$ **на проміжку:**

1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-1; 1]$; 4) $(-\infty; -2]$; 5) $(-2; 1)$.

430.$^{\bullet}$ **Знайдіть найбільше і найменше значення функції** $f(x) = x^6$ **на проміжку:**

1) $[-13; -1]$; 2) $[-2; 1]$; 3) $[1; +\infty)$; 4) $(1; +\infty)$.

431.$^{\bullet}$ **Парним чи непарним натуральним числом є показник степеня** n **функції** $f(x) = x^n$, **якщо:**

1) $f(-4) > f(-2)$;
2) $f(-4) < f(2)$;
3) $f(-4) < f(-2)$;
4) $f(4) > f(2)$;
5) $f(-4) > f(2)$;
6) $f(4) > f(-2)$?

432.$^{\bullet\bullet}$ **Розв'яжіть рівняння:**

1) $x^{11} + x^3 = 2$;
2) $2x^4 + x^{10} = 3$.

433.$^{\bullet\bullet}$ **Розв'яжіть рівняння:**

1) $4x^3 + x^7 = -5$;
2) $x^6 + 3x^8 = 4$.

22. Степенева функція з цілим показником

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^n$, де $n \in \mathbb{Z}$, називають степеневою функцією з цілим показником.

Властивості цієї функції для натурального показника було розглянуто в попередньому пункті. Тут ми розглянемо випадки, коли показник n є цілим від'ємним числом або нулем.

Областю визначення функції $y = x^0$ є множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, областю значень — одноелементна множина $\{1\}$. Графік цієї функції зображено на рисунку 129.

Розглянемо функцію $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbb{N}$.

З окремим випадком цієї функції, коли $n = 1$, тобто з функцією $y = \frac{1}{x}$, ви знайомі з курсу алгебри 8 класу.

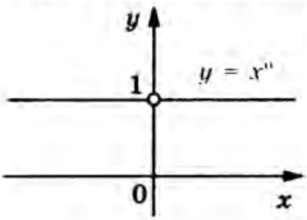


Рис. 129

Запишемо функцію $y = x^{-n}$ у вигляді $y = \frac{1}{x^n}$. Зрозуміло, що *областю визначення функції $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, є множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.*

Очевидно, що ця функція нулів не має.

Подальші дослідження властивостей функції $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

- **Перший випадок: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.**

Маємо: $x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}$. Оскільки вираз $\frac{1}{x^{2k}}$ набуває тільки додатних значень, то до області значень розглядуваної функції не входять від'ємні числа, а також число 0.

Можна показати, що для будь-якого $a > 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{-2k} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число, є множина $(0; +\infty)$.*

Очевидно, що *проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число.*

Функція $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число, є парною. Справді, для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{-2k} = \frac{1}{(-x)^{2k}} = \frac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 > 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо $0 < -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$. Звідси $\left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k}$; $\frac{1}{x_1^{2k}} < \frac{1}{x_2^{2k}}$; $x_1^{-2k} < x_2^{-2k}$.

Отже, *функція $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число, зростає на проміжку* $(-\infty; 0)$.

Аналогічно можна показати, що *функція $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число, спадає на проміжку* $(0; +\infty)$.

Зауважимо, що зі збільшенням модуля x значення виразу $\frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, стає все меншим і меншим. Тому відстань від точки графіка функції $y = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, до осі абсцис зменшується і може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Аналогічно можна встановити, що зі збільшенням модуля ординати відстань від точки графіка до осі ординат зменшується і може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число (рис. 130). Зокрема, графік функції $y = \frac{1}{x^2}$ зображено на рисунку 131.

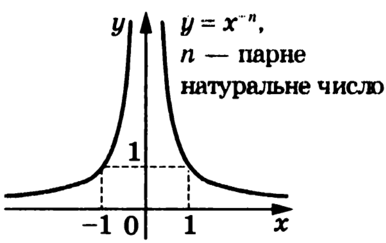


Рис. 130

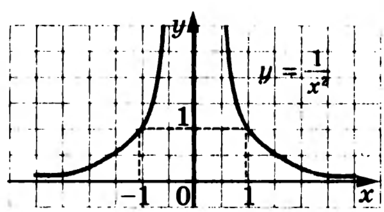


Рис. 131

- **Другий випадок: $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.**

Можна показати, що для будь-якого $a \neq 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{-(2k-1)} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число, є множина* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Якщо $x < 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$; якщо $x > 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$.

☞ Отже, *проміжки* $(-\infty;\ 0)$ *і* $(0;\ +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^{-n}$, *де* n — *непарне натуральне число*.

☞ *Функція* $y = x^{-n}$, *де* n — *непарне натуральне число, є непарною.* Справді, для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{-x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty;\ 0)$, $x_2 \in (-\infty;\ 0)$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 > 0$. Скориставшись властивостями числових нерівностей, отримуємо $-\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$; $\left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k-1}$; $-\frac{1}{x_1^{2k-1}} < -\frac{1}{x_2^{2k-1}}$; $\frac{1}{x_1^{2k-1}} > \frac{1}{x_2^{2k-1}}$. Отже, розглядувана функція спадає на проміжку $(-\infty;\ 0)$. Аналогічно можна показати, що ця функція спадає і на проміжку $(0;\ +\infty)$.

☞ Отже, *функція* $y = x^{-n}$, *де* n — *непарне натуральне число, спадає на кожному з проміжків* $(-\infty;\ 0)$ *і* $(0;\ +\infty)$.

Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число (рис. 132). Зокрема, графік функції $y = \frac{1}{x^3}$ зображено на рисунку 133.

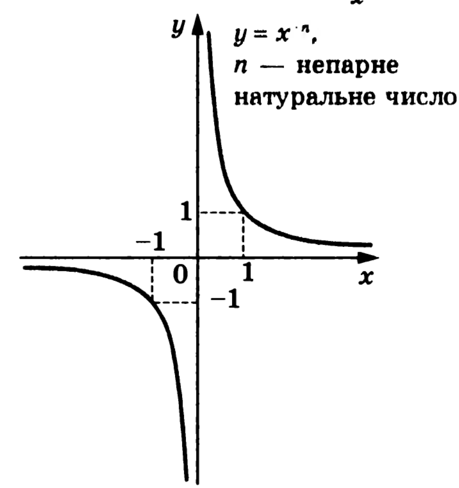


Рис. 132

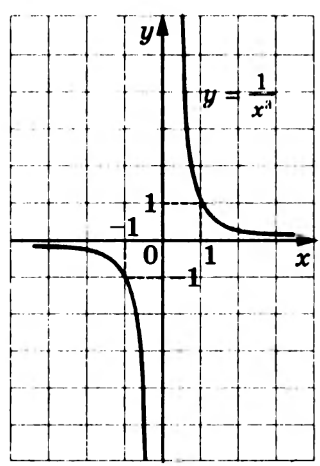
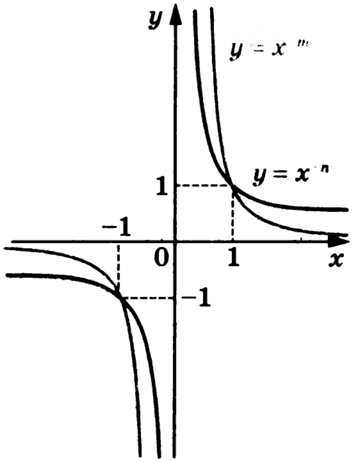


Рис. 133

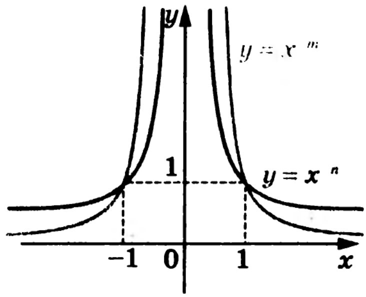
У попередньому пункті було проведено дослідження взаємного розміщення графіків функцій $y = x^m$ і $y = x^n$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$,

$m > n$. Міркуючи аналогічно, можна показати, що схематичне розміщення графіків функцій $y = x^{-m}$ і $y = x^{-n}$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > n$, є таким, як показано на рисунках 134, 135.



m і n — непарні, $m > n$

Рис. 134



m і n — парні, $m > n$

Рис. 135

У таблиці наведено властивості функції $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, вивчені в цьому пункті.

	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число
Область визначення	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Область значень	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Нулі функції	–	–
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання / спадання	Зростає на проміжку $(-\infty; 0)$, спадає на проміжку $(0; +\infty)$	Спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$

Вправи

434.° Чи проходить графік функції $y = x^{-4}$ через точку:

1) $A\left(2;\ \frac{1}{16}\right)$; 2) $B\left(-2;\ \frac{1}{8}\right)$; 3) $C\left(\frac{1}{3};\ 81\right)$; 4) $D\left(\sqrt{2};\ -\frac{1}{4}\right)$?

435.° Чи проходить графік функції $y = x^{-5}$ через точку:

1) $A\ (0;\ 0)$; 2) $B\ (-1;\ -1)$; 3) $C\left(\frac{1}{2};\ 32\right)$; 4) $D\left(-3;\ -\frac{1}{243}\right)$?

436.° При яких значеннях a графік функції $y = ax^{-3}$ проходить через точку: 1) $A\ (-5;\ 20)$; 2) $B\left(2;\ \frac{1}{24}\right)$?

437.° При яких значеннях a графік функції $y = ax^{-4}$ проходить через точку: 1) $A\ (3;\ -3)$; 2) $B\left(-2;\ \frac{1}{2}\right)$?

438.° Дано функцію $f\ (x) = x^{-19}$. Порівняйте:

1) $f\ (1{,}6)$ і $f\ (2)$;
2) $f\ (-5{,}6)$ і $f\ (-6{,}5)$;
3) $f\ (-9{,}6)$ і $f\ (9{,}6)$;
4) $f\ (0{,}1)$ і $f\ (-10)$.

439.° Дано функцію $f\ (x) = x^{-25}$. Порівняйте:

1) $f\ (18)$ і $f\ (16)$; 2) $f\ (-42)$ і $f\ (2{,}5)$; 3) $f\ (-32)$ і $f\ (-28)$.

440.° Функцію задано формулою $f\ (x) = x^{-16}$. Порівняйте:

1) $f\ (1{,}6)$ і $f\ (2{,}2)$;
2) $f\ (-4{,}5)$ і $f\ (-3{,}6)$;
3) $f\ (-3{,}4)$ і $f\ (3{,}4)$;
4) $f\ (-18)$ і $f\ (3)$.

441.° Функцію задано формулою $f\ (x) = x^{-40}$. Порівняйте:

1) $f\ (6{,}2)$ і $f\ (5{,}5)$;
2) $f\ (-1{,}6)$ і $f\ (-1{,}7)$;
3) $f\ (24)$ і $f\ (-24)$;
4) $f\ (-8)$ і $f\ (6)$.

442.° Скільки коренів має рівняння $x^{-n} = 2500$, якщо:

1) n — парне натуральне число;
2) n — непарне натуральне число?

443.° Чи має дане рівняння від'ємний корінь:

1) $x^{-6} = 2$; 2) $x^{-5} = 0{,}3$; 3) $x^{-7} = -3$; 4) $x^{-8} = -2$?

444.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = (x^{-1})^{-1}$;
2) $y = ((x - 2)^{-2})^{-2}$.

445.° Побудуйте графік функції:

1) $y = (x - 2)^0$; 2) $y = (x^2 - 4x + 3)^0$; 3) $y = \left(\frac{1}{x+1}\right)^{-1}$.

446.° Побудуйте графік рівняння:

1) $(y + 2)^0 = x - 2$;
2) $(y - 2)^0 = (x + 1)^0$.

447.° **Знайдіть точки перетину графіків функцій:**

1) $y = x$ і $y = x^{-3}$; 2) $y = x^{-2}$ і $y = \frac{1}{8}x$.

448.° **Знайдіть точки перетину графіків функцій $y = x^{-7}$ і $y = x^{-4}$.**

449.° **Побудуйте графік функції:**

1) $y = x^{-2} + 2$; 4) $y = x^{-3} - 1$; 7) $y = |x^{-3}|$;
2) $y = (x - 3)^{-2}$; 5) $y = (x - 1)^{-3}$; 8) $y = |x - 1|^{-3}$;
3) $y = -\frac{1}{2}x^{-2}$; 6) $y = 3x^{-3}$; 9) $y = \frac{1}{x|x|}$.

450.° **Побудуйте графік функції:**

1) $y = x^{-5} - 3$; 3) $y = (x + 1)^{-4}$; 5) $y = |x^{-5}|$;
2) $y = 4x^{-5}$; 4) $y = -x^{-4}$; 6) $y = \frac{1}{x^2|x|}$.

451.° **Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-6}$ на проміжку:**

1) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; 2) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$; 3) $[1; +\infty)$; 4) $[-1; 0)$.

452.° **Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-3}$ на проміжку:**

1) $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $(-\infty; -3]$; 4) $(0; 2]$.

453.° **Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:**

1) $\begin{cases} y = x^{-6}, \\ y = 4 - x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = x^3 + 3. \end{cases}$

454.° **Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:**

1) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = \frac{1}{8}x^2 - 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^{-2}, \\ y = x^2 - 2. \end{cases}$

455.° **Побудуйте графік функції** $f(x) = \begin{cases} x^{-2}, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ x^2, \text{ якщо } x > -1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, установіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

456.° **Побудуйте графік функції** $f(x) = \begin{cases} x^{-3}, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ -x^2, \text{ якщо } -1 < x \leqslant 1, \\ x^{-3}, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, установіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

457.$^{\bullet}$ **Парним чи непарним є натуральне число n у показнику степеня функції $f(x) = x^{-n}$, якщо:**

1) $f(-2) > f(-1)$; **3) $f(-2) < f(-1)$;**

2) $f(-2) < f(1)$; **4) $f(2) < f(1)$?**

23. Означення кореня n-го степеня

Ви знаєте, що квадратним коренем (коренем другого степеня) з числа a називають таке число, квадрат якого дорівнює a. Аналогічно дають означення кореня n-го степеня з числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

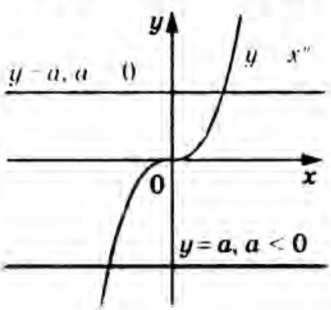
Означення. **Коренем n-го степеня з числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке число, n-й степінь якого дорівнює a.**

Наприклад, коренем п'ятого степеня з числа 32 є число 2, оскільки $2^5 = 32$; коренем третього степеня з числа -64 є число -4, оскільки $(-4)^3 = -64$; коренями четвертого степеня з числа 81 є числа 3 і -3, оскільки $3^4 = 81$ і $(-3)^4 = 81$.

З означення випливає, що будь-який корінь рівняння $x^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є коренем n-го степеня з числа a і, навпаки, корінь n-го степеня з числа a є коренем розглядуваного рівняння.

Якщо n — непарне натуральне число, то функція $y = x^n$ є зростаючою і, оскільки її областю значень є множина $\mathbb{R}$, то рівняння $x^n = a$ має єдиний корінь при будь-якому a (див. теорему 6.3). Тоді можна зробити такий висновок:

якщо n — непарне натуральне число, більше за 1, то корінь n-го степеня з будь-якого числа існує, причому тільки один.



n — непарне натуральне число

Рис. 136

Рисунок 136 ілюструє останній висновок: при будь-якому значенні a графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ мають одну спільну точку.

Корінь непарного степеня n, $n > 1$, з числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$ (читають: «корінь n-го степеня з a»). Знак $\sqrt[n]{}$ називають **знаком кореня n-го степеня** або **радикалом**. Вираз, який стоїть під радикалом, називають **підкореневим виразом**.

Наприклад, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[3]{-64} = -4$, $\sqrt[7]{0} = 0$.

Корінь третього степеня також прийнято називати **кубічним коренем.** Наприклад, запис $\sqrt[3]{2}$ читають: «корінь кубічний з числа 2».

Наголосимо, що вираз $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$, існує при будь-якому a.

З означення кореня n-го степеня випливає, що ***при будь-якому а виконується рівність***

$$\boxed{\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a}$$

Наприклад, $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$, $\left(\sqrt[7]{-0{,}1}\right)^7 = -0{,}1$.

Розглянемо рівняння $x^n = a$, де n — парне натуральне число.

Оскільки областю значень функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є множина $[0; +\infty)$, то при $a < 0$ дане рівняння не має розв'язків.

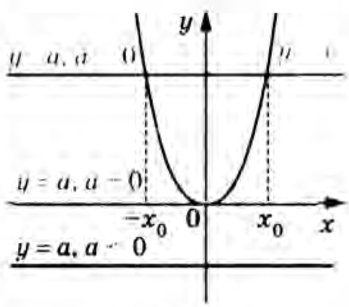
Очевидно, що при $a = 0$ рівняння має єдиний корінь $x = 0$.

Функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, зростає на $[0; +\infty)$ і набуває всіх додатних значень. Отже, при $a \geqslant 0$ рівняння $x^n = a$, де n — парне натуральне число, на проміжку $[0; +\infty)$ має єдиний корінь.

Оскільки розглядувана функція є парною, то при $a > 0$ дане рівняння має два корені, які є протилежними числами.

Тепер можна зробити такий висновок:

якщо n — парне натуральне число, то при a < 0 корінь n-го степеня з числа a не існує; при a = 0 корінь n-го степеня з числа a дорівнює 0; при a > 0 існують два протилежні числа, які є коренями n-го степеня з числа a.



n — парне натуральне число

Рис. 137

Отримані висновки мають просту геометричну інтерпретацію (рис. 137). Якщо $a < 0$, то графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ не мають спільних точок; якщо $a = 0$, то розглядувані графіки мають одну спільну точку; якщо $a > 0$, то спільних точок дві, причому їх абсциси — протилежні числа.

Вище було встановлено, що рівняння $x^n = a$ при $a \geqslant 0$ обов'язково має один невід'ємний корінь. Його називають **арифметичним коренем n-го степеня з числа a.**

Означення. **Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.**

Арифметичний корінь n-го степеня з невід'ємного числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$.

Наприклад, $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3 \geqslant 0$ і $3^4 = 81$;

$\sqrt[6]{64} = 2$, оскільки $2 \geqslant 0$ і $2^6 = 64$;

$\sqrt[10]{0} = 0$, оскільки $0 \geqslant 0$ і $0^{10} = 0$.

Узагалі, якщо $b \geqslant 0$ і $b^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{a} = b$.

Звернемо увагу на те, що для позначення арифметичного кореня n-го степеня з невід'ємного числа a і кореня непарного степеня n з числа a використовують один і той самий запис: $\sqrt[n]{a}$. Запис $\sqrt[2k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$, використовують тільки для позначення арифметичного кореня. Зазначимо, що корінь парного степеня з числа a не має позначення.

За допомогою знака кореня n-го степеня можна записувати розв'язки рівняння $x^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

- Якщо n — непарне натуральне число, то при будь-якому значенні a розглядуване рівняння має єдиний корінь $x = \sqrt[n]{a}$.
- Якщо n — парне натуральне число і $a > 0$, то рівняння має два корені: $x_1 = \sqrt[n]{a}$, $x_2 = -\sqrt[n]{a}$.
- Якщо $a = 0$, то $x = 0$.

Наприклад, коренем рівняння $x^3 = 7$ є число $\sqrt[3]{7}$; коренями рівняння $x^4 = 5$ є два числа: $-\sqrt[4]{5}$ і $\sqrt[4]{5}$.

З означення арифметичного кореня n-го степеня випливає, що для будь-якого невід'ємного числа a має місце таке:

$\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ ***і виконується рівність*** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Наприклад, $\left(\sqrt[6]{7}\right)^6 = 7$.

Покажемо, що при будь-якому a і $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}}$$

Для того щоб довести рівність $\sqrt[2k+1]{x} = y$, потрібно показати, що $y^{2k+1} = x$.

Маємо: $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$.

Доведена властивість дозволяє корінь непарного степеня з від'ємного числа виразити через арифметичний корінь.

Наприклад, $\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{-12}=-\sqrt[5]{12}$.

Вправи

458.° Чи має зміст запис:

1) $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[3]{-2}$; 3) $\sqrt[4]{2}$; 4) $\sqrt[4]{-2}$; 5) $\sqrt[6]{0}$; 6) $\sqrt[6]{-1}$?

459.° Чи є правильною рівність (відповідь обґрунтуйте):

1) $\sqrt[3]{27}=3$; 2) $\sqrt[8]{1}=1$; 3) $\sqrt[3]{-27}=-3$; 4) $\sqrt[4]{16}=2$; 5) $\sqrt[4]{-16}=-2$; 6) $\sqrt[5]{-32}=2$?

460.° Доведіть, що:

1) число 2 є арифметичним кубічним коренем з числа 8;
2) число 3 є арифметичним коренем четвертого степеня з числа 81;
3) число -3 не є арифметичним коренем четвертого степеня з числа 81;
4) число 10 не є арифметичним коренем п'ятого степеня з числа 10 000.

461.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{0{,}25}$; 2) $\sqrt[3]{216}$; 3) $\sqrt[4]{0{,}0016}$; 4) $\sqrt[5]{-0{,}00001}$; 5) $\sqrt[4]{3\frac{13}{81}}$; 6) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; 7) $4\sqrt[3]{0{,}125}$; 8) $\frac{1}{3}\sqrt[5]{-243}$; 9) $\sqrt[4]{9^2}$; 10) $\sqrt[6]{8^2}$.

462.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt[3]{343}$; 2) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$; 3) $0{,}5\sqrt[3]{-64}$; 4) $-8\sqrt[5]{-\frac{1}{1024}}$; 5) $\sqrt[6]{27^2}$; 6) $\sqrt[100]{49^{50}}$?

463.° Обчисліть:

1) $\left(\sqrt{11}\right)^2$; 2) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$; 3) $\left(-\sqrt[4]{7}\right)^4$; 4) $\left(-\sqrt[7]{2}\right)^7$; 5) $-\sqrt[4]{7^4}$; 6) $\left(5\sqrt[3]{3}\right)^3$; 7) $\left(-3\sqrt[4]{10}\right)^4$; 8) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{48}\right)^6$; 9) $\frac{1}{2}\sqrt[6]{48^6}$.

464.° Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\sqrt[8]{18}\right)^8$; 2) $\left(-\sqrt[9]{9}\right)^9$; 3) $\left(-\sqrt[6]{11}\right)^6$; 4) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{45}\right)^3$; 5) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{45^3}$; 6) $\left(-2\sqrt[5]{-5}\right)^5$.

465.° Обчисліть:

1) $0,3\sqrt[3]{1000}-5\sqrt[8]{256}+6\cdot\left(-\sqrt[10]{6}\right)^{10}$;

2) $\sqrt[5]{14^5}+\left(-2\sqrt{10}\right)^2-\sqrt[7]{-128}$;

3) $\sqrt[4]{2\frac{113}{256}}\cdot\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}+\frac{1}{16}\cdot\sqrt[3]{14^3}-\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{-5}\right)^3$.

466.° Обчисліть:

1) $200\sqrt[3]{0,001}-\sqrt[5]{-0,00032}-\left(-4\sqrt{2}\right)^2$;

2) $\sqrt[3]{8000}\cdot\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}-\left(-\sqrt[5]{8}\right)^5+\sqrt[7]{17^7}$.

467.° При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\sqrt[8]{x+6}$; 3) $\sqrt[4]{y(y-1)}$; 5) $\sqrt[6]{-x^2}$;

2) $\sqrt[9]{a-10}$; 4) $\sqrt[6]{-x}$; 6) $\sqrt[10]{x^2+2x-8}$?

468.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt[4]{x-2}$; 2) $y=\sqrt[7]{4-x}$; 3) $y=\sqrt[12]{2x-x^2}$; 4) $y=\frac{1}{\sqrt[8]{x^2-4x+4}}$.

469.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 = 27$; 4) $x^4 = 16$; 7) $27x^3 - 1 = 0$;

2) $x^5 = 9$; 5) $x^6 = 5$; 8) $(x - 2)^3 = 125$;

3) $x^7 = -2$; 6) $x^4 = -81$; 9) $(x + 5)^4 = 10\,000$.

470.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^9 = 1$; 4) $x^{18} = 0$; 7) $64x^5 + 2 = 0$;

2) $x^8 = 12$; 5) $x^5 = -32$; 8) $(2x + 1)^3 = 8$;

3) $x^{10} = 1$; 6) $x^6 = -64$; 9) $(x - 3)^6 = 729$.

471.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}=9$; 4) $\sqrt[3]{x}=-6$; 7) $\sqrt[3]{2x}+7=0$;

2) $\sqrt[3]{x}=\frac{4}{5}$; 5) $\sqrt[6]{x}=-2$; 8) $\sqrt[3]{2x+7}=0$;

3) $\sqrt[4]{x}=3$; 6) $\sqrt[8]{x}=0$; 9) $\sqrt[3]{2x+7}=7$.

472.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{x}=-2$; 3) $\sqrt[5]{x}=-2$; 5) $\sqrt[4]{3x-2}=0$;

2) $\sqrt[4]{x}=-2$; 4) $\sqrt[4]{3x}-2=0$; 6) $\sqrt[4]{3x-2}=2$.

473.° Побудуйте графік функції:

1) $y=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3$; 2) $y=\left(\sqrt[4]{x}\right)^4$.

474.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^8 - 82x^4 + 81 = 0$; 2) $x^6 + x^3 - 56 = 0$; 3) $x^{12} + x^6 - 12 = 0$.

475.* Розв'яжіть рівняння:

1) $x^6 - 25x^3 - 54 = 0$; 2) $x^8 + 13x^4 - 48 = 0$.

476.* Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt[4]{\dfrac{|x|-1}{x^2-9}}$; 2) $\sqrt[8]{6-|x|}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{3-x}}$.

477.* Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt[6]{\dfrac{|x|-4}{x^2-36}}$; 2) $\sqrt[10]{|x|-3}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x+4}}$.

478.* Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2-4)\sqrt[4]{x+1}=0$; 2) $(x-1)\sqrt[10]{x^2-2x-3}=0$.

479.* Розв'яжіть рівняння:

1) $(|x|-3)\sqrt[6]{2-x}=0$; 2) $(x+2)\sqrt[6]{x^2+2x-3}=0$.

480.* Побудуйте графік функції:

1) $y=\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4+\left(\sqrt[4]{1-x}\right)^4+1$; 2) $y=\left(\sqrt[6]{x}\right)^6+\left(\sqrt[6]{1-x}\right)^6$.

481.* Побудуйте графік функції:

1) $y=x\left(\sqrt[4]{x}\right)^4$; 2) $y=\left(\sqrt[8]{2+x}\right)^8+\left(\sqrt[6]{2-x}\right)^6$.

482.** Залежно від значення параметра a визначте кількість коренів рівняння:

1) $(x-a)\sqrt[4]{x+1}=0$; 2) $(x-a)\left(\sqrt[4]{x}+1\right)=0$; 3) $(x-a)\left(\sqrt[4]{x}-1\right)=0$.

483.** Залежно від значення параметра a визначте кількість коренів рівняння:

1) $(x+1)\sqrt[4]{x-a}=0$; 2) $(x-1)\left(\sqrt[4]{x}-a\right)=0$.

24. Властивості кореня n-го степеня

Розглянемо теореми, які виражають властивості кореня n-го степеня.

Теорема 24.1 (корінь із степеня). ***Для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ і $k \in \mathbb{N}$ виконуються рівності:***

$$\boxed{\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a}$$

$$\boxed{\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|}$$

Доведення. Для того щоб довести рівність $\sqrt[2k+1]{x} = y$, достатньо показати, що $y^{2k+1} = x$. Тоді перша з рівностей, що доводяться, є очевидною.

Для того щоб довести рівність $\sqrt[2k]{x} = y$, достатньо показати, що $y \geqslant 0$ і $y^{2k} = x$. Маємо: $|a| \geqslant 0$ і $(|a|)^{2k} = a^{2k}$. ▲

Теорема 24.2 (**корінь з добутку**). ***Якщо*** $a \geqslant 0$ ***і*** $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ***то***

$$\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$$

Доведення. Для того щоб довести рівність $\sqrt[n]{x} = y$, де $x \geqslant 0$, достатньо показати, що $y \geqslant 0$ і $y^n = x$.

Маємо: $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ і $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Тоді $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Крім того,

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab. \ ▲$$

Зауважимо, що коли $a \leqslant 0$ і $b \leqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{-b}$.

Теорема 24.3 (**корінь з дробу**). ***Якщо*** $a \geqslant 0$ ***і*** $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ***то***

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Доведіть цю теорему самостійно.

Зауважимо, що коли $a \leqslant 0$ і $b < 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{-a}}{\sqrt[n]{-b}}$.

Теорема 24.4 (**степінь кореня**). ***Якщо*** $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ***то***

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}}$$

Доведення. Якщо $k = 1$, то рівність, що доводиться, є очевидною.

Нехай $k > 1$. Маємо: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ множників}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множників}}} = \sqrt[n]{a^k}$. ▲

Теорема 24.5 (**корінь з кореня**). ***Якщо*** $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, ***то***

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}}$$

Доведення. Маємо: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geqslant 0$.

Крім того, $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$. ▲

Теорема 24.6. ***Якщо*** $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ***то***

$$\boxed{\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}}$$

Доведення. Якщо $k = 1$, то рівність, що доводиться, є очевидною.

Нехай $k > 1$. Маємо: $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}} = \sqrt[n]{a}$. ▲

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу: 1) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}}$.

Розв'язання

1) Замінивши добуток коренів коренем з добутку, дістанемо:

$$\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{16 \cdot 2} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

2) Замінивши частку коренів коренем з частки (дробу), матимемо:

$$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}} = \sqrt[3]{\frac{24}{375}} = \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}.$$

ПРИКЛАД 2 Спростіть вираз: 1) $\sqrt[12]{a^3}$; 2) $\sqrt[4]{a^{12}}$; 3) $\sqrt[6]{a^2}$; 4) $\sqrt[6]{x^6 y^6}$, якщо $x \geqslant 0$ і $y \leqslant 0$.

Розв'язання. Застосуємо теореми 24.5 і 24.1.

1) З умови випливає, що $a \geqslant 0$. Тоді $\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a}$.

2) $\sqrt[4]{a^{12}} = \sqrt[4]{(a^3)^4} = |a^3|$.

3) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[3]{|a|}$.

4) Ураховуючи, що $x \geqslant 0$ і $y \leqslant 0$, можна записати:

$$\sqrt[6]{x^6 y^6} = \sqrt[6]{(xy)^6} = |xy| = |x|\,|y| = x(-y) = -xy.$$

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік функції

$$y = \sqrt[6]{x^6} + x.$$

Розв'язання. Оскільки $\sqrt[6]{x^6} = |x|$, то $y = |x| + x$.

Якщо $x \geq 0$, то $y = x + x = 2x$.

Якщо $x < 0$, то $y = -x + x = 0$.

Отже, $y = \begin{cases} 2x, \text{ якщо } x \geqslant 0, \\ 0, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

Графік функції зображено на **рисунку 138**.

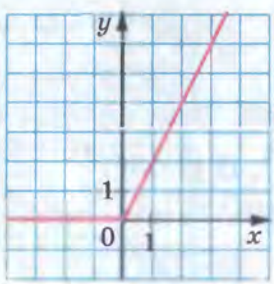


Рис. 138

Вправи

484.° Знайдіть:

1) $\sqrt[3]{64\cdot125}$;
2) $\sqrt[4]{0{,}0625\cdot81}$;
3) $\sqrt[5]{2^{10}\cdot7^5}$;
4) $\sqrt[6]{3^{18}\cdot10^{24}}$;
5) $\sqrt[4]{\dfrac{3^{12}\cdot11^4}{5^8\cdot2^{16}}}$.

485.° Обчисліть:

1) $\sqrt[3]{0{,}064\cdot343}$; 2) $\sqrt[4]{0{,}0081\cdot11^4}$; 3) $\sqrt[5]{\dfrac{7^5}{2^{10}}}$; 4) $\sqrt[8]{\dfrac{2^{24}\cdot3^{16}}{5^{16}}}$.

486.° Знайдіть:

1) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$;
2) $\sqrt[3]{0{,}054}\cdot\sqrt[3]{4}$;
3) $\dfrac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}$;
4) $\dfrac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{128}}$;
5) $\sqrt[6]{3^4\cdot5^2}\cdot\sqrt[6]{3^8\cdot5^4}$;
6) $\dfrac{\sqrt[8]{2^{30}\cdot7^{12}}}{\sqrt[8]{2^6\cdot7^4}}$;
7) $\sqrt[4]{11-\sqrt{40}}\cdot\sqrt[4]{11+\sqrt{40}}$;
8) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}\cdot\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$;
9) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[3]{-9}$;
10) $\dfrac{\sqrt[4]{28}\cdot\sqrt[4]{20}}{\sqrt[4]{35}}$.

487.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}$;
2) $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$;
3) $\sqrt[7]{2^{15}\cdot5^3}\cdot\sqrt[7]{2^6\cdot5^4}$;
4) $\dfrac{\sqrt[6]{3^{10}\cdot10^2}}{\sqrt[6]{10^8\cdot3^4}}$;
5) $\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}$;
6) $\sqrt[5]{2\sqrt{17}+10}\cdot\sqrt[5]{2\sqrt{17}-10}$;
7) $\dfrac{\sqrt[3]{256}\cdot\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{12}}$;
8) $\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{80}$?

488.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt[4]{(-13)^4}$; 2) $\sqrt[5]{(-9)^5}$; 3) $\sqrt[6]{(-8)^6}$?

489.° Подайте вираз у вигляді одночлена, якщо $a\geqslant0$ і $b\geqslant0$:

1) $\sqrt{25a^2}$;
2) $\sqrt[3]{27b^9}$;
3) $\sqrt[4]{625a^{12}b^4}$;
4) $\sqrt[6]{729a^{54}b^{18}}$.

490.° Подайте вираз у вигляді одночлена, якщо $m \geqslant 0$ і $n \geqslant 0$:

1) $\sqrt{49m^2}$;
3) $\sqrt[6]{0{,}000064m^{30}n^{42}}$;
2) $\sqrt[3]{125n^{15}}$;
4) $\sqrt[8]{m^{72}n^{24}}$.

491.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\sqrt[5]{a}}$; 3) $\sqrt[27]{b^9}$; 5) $\sqrt[18]{a^8b^{24}}$; 7) $\sqrt[12]{81}$; 9) $\dfrac{\sqrt[4]{m^7n^9}}{\sqrt[4]{m^5n^3}}$.

2) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$; 4) $\sqrt[15]{c^6}$; 6) $\sqrt[6]{16}$; 8) $\dfrac{\sqrt[10]{x^7}}{\sqrt[10]{x^2}}$;

492.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{\sqrt{x}}$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 5) $\sqrt[21]{a^{14}b^7}$; 7) $\sqrt[9]{64}$;

2) $\sqrt{\sqrt{y}}$; 4) $\sqrt[9]{b^6}$; 6) $\sqrt[6]{27}$; 8) $\dfrac{\sqrt[4]{c^3}}{\sqrt[4]{c}}$.

493.° Подайте вираз $\sqrt{a}$ у вигляді кореня:

1) четвертого степеня;
3) десятого степеня;
2) шостого степеня;
4) вісімнадцятого степеня.

494.° Подайте вираз $\sqrt[3]{b}$, $b \geqslant 0$, у вигляді кореня:

1) шостого степеня;
3) п'ятнадцятого степеня;
2) дев'ятого степеня;
4) тридцятого степеня.

495.• При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{a^4} = a$;
6) $\sqrt[3]{(a-5)^4} = \left(\sqrt[3]{a-5}\right)^4$;
2) $\sqrt[4]{a^4} = -a$;
7) $\sqrt[4]{(a-2)^4} = \left(\sqrt[4]{a-2}\right)^4$;
3) $\sqrt[3]{a^3} = a$;
8) $\sqrt[6]{a(a-1)} = \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{(1-a)}$;
4) $\sqrt[3]{a^3} = -a$;
9) $\sqrt[10]{a-4} \cdot \sqrt[10]{(a-4)^9} = a-4$;
5) $\sqrt[4]{(a-5)^3} = \left(\sqrt[4]{a-5}\right)^3$;
10) $\dfrac{\sqrt[12]{a-2}}{\sqrt[12]{3-a}} = \sqrt[12]{\dfrac{2-a}{a-3}}$?

496.• При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt[6]{a^{30}} = a^5$; 2) $\sqrt[6]{a^{30}} = -a^5$; 3) $\sqrt[4]{a^4} = \left(\sqrt[4]{a}\right)^4$; 4) $\sqrt[4]{a^4} = \left(\sqrt[4]{-a}\right)^4$?

497.• При яких значеннях a і b виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b}$; 3) $\sqrt[4]{-ab} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{-b}$; 5) $\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{-a} \cdot \sqrt[5]{-b}$?

2) $\sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{-a} \cdot \sqrt[4]{-b}$; 4) $\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{b}$;

498.° При яких значеннях x виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{x^2-4}=\sqrt[4]{x-2}\cdot\sqrt[4]{x+2}$;

2) $\sqrt[8]{(x-3)(7-x)}=\sqrt[8]{x-3}\cdot\sqrt[8]{7-x}$;

3) $\sqrt[3]{(x-6)(x-10)}=\sqrt[3]{x-6}\cdot\sqrt[3]{x-10}$;

4) $\sqrt[6]{(x+1)(x+2)(x+3)}=\sqrt[6]{x+1}\cdot\sqrt[6]{x+2}\cdot\sqrt[6]{x+3}$?

499.° Замініть вираз тотожно рівним виразом, який не містить знака кореня:

1) $\sqrt[4]{b^4}$; 3) $\sqrt[3]{a^{18}}$; 5) $\sqrt[8]{m^{16}}$;

2) $-0{,}4\sqrt[6]{c^6}$; 4) $\sqrt[6]{a^{18}}$; 6) $\sqrt[12]{(x-5)^{12}}$.

500.° Замініть вираз тотожно рівним виразом, який не містить знака кореня:

1) $1{,}2\sqrt[10]{x^{10}}$; 2) $\sqrt[6]{y^{12}}$; 3) $\sqrt[12]{n^{36}}$; 4) $\sqrt[14]{(8-y)^{14}}$.

501.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{m^6}$, якщо $m\geqslant 0$;

2) $\sqrt[4]{n^4}$, якщо $n\leqslant 0$;

3) $\sqrt[4]{16p^4}$, якщо $p\geqslant 0$;

4) $\sqrt[8]{256k^8}$, якщо $k\leqslant 0$;

5) $\sqrt[6]{c^{24}}$;

6) $\sqrt{0{,}25b^{14}}$, якщо $b\leqslant 0$;

7) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$, якщо $y\geqslant 0$;

8) $\sqrt{0{,}01a^6b^{10}}$, якщо $a\leqslant 0$, $b\geqslant 0$;

9) $-1{,}2x\sqrt[6]{64x^{30}}$, якщо $x\leqslant 0$;

10) $\dfrac{\sqrt[4]{a^{12}b^{28}c^{32}}}{a^4b^8c^{10}}$, якщо $a>0$, $b<0$.

502.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{625a^{24}}$;

2) $\sqrt[4]{0{,}0001b^{20}}$, якщо $b\geqslant 0$;

3) $-5\sqrt{4x^2}$, якщо $x\leqslant 0$;

4) $-0{,}1\sqrt[6]{1\,000\,000z^{42}}$, якщо $z\geqslant 0$;

5) $\sqrt[10]{p^{30}q^{40}}$, якщо $p\geqslant 0$;

6) $\sqrt[12]{m^{36}n^{60}}$, якщо $m\leqslant 0$, $n\leqslant 0$;

7) $ab^2\sqrt[4]{a^{48}b^{36}c^{44}}$, якщо $b\geqslant 0$, $c\leqslant 0$;

8) $-\dfrac{8m^3p^4}{k^2}\sqrt[4]{\dfrac{k^{60}p^{40}}{256m^{12}}}$, якщо $m<0$, $k>0$.

503.° При яких значеннях a виконується нерівність:

1) $\sqrt[3]{a^3}\geqslant\sqrt[4]{a^4}$; 2) $\sqrt[5]{a^5}\leqslant\sqrt[6]{a^6}$?

504.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{a^4}+a$, якщо $a>0$;

2) $\sqrt[6]{a^6}+\sqrt[3]{a^3}$, якщо $a<0$;

3) $\sqrt[5]{a^5}+\sqrt[4]{a^4}$;

4) $\sqrt{a^2}-\sqrt[7]{a^7}$.

505.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{(x+4)^4}=x+4$;
2) $\sqrt[4]{(1-3x)^8}=(1-3x)^2$;
3) $\sqrt[6]{(x^2-2x-3)^6}=3+2x-x^2$.

506.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{(\sqrt{6}-2)^3}$; 2) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2}$; 3) $\sqrt[9]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3}$; 4) $\sqrt[6]{(\sqrt{3}-2)^2}$.

507.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4}$; 2) $\sqrt[10]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}$; 3) $\sqrt[12]{(\sqrt{11}-3)^3}$; 4) $\sqrt[15]{(\sqrt{7}-3)^3}$.

508.° Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt[4]{x^4}-x$;
2) $y=2x+\sqrt[6]{x^6}$;
3) $y=\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{x^3}$;
4) $y=\sqrt[8]{(x-2)^8}$;
5) $y=\sqrt[4]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^2}$;
6) $y=\dfrac{x^3}{\sqrt[6]{x^6}}+2$;
7) $y=\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{x^9}$.

509.° Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt[8]{x^8}-2x$; 2) $y=\sqrt[4]{-x}\cdot\sqrt[4]{-x^3}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt[6]{x^6}}{x}$.

510.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[6]{x^6}=x-4$; 2) $\sqrt[10]{x^{10}}=6-x$; 3) $2\sqrt[4]{x^4}=x+3$.

511.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[8]{x^8}=x+8$; 2) $\sqrt[12]{x^{12}}=6x-10$.

512.°° Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{(x-3)^4}+\sqrt[6]{(5-x)^6}=2$.

513.°° Побудуйте графік функції $y=\sqrt[8]{(x+1)^8}+\sqrt{(x-3)^2}$.

25. Тотожні перетворення виразів, які містять корені n-го степеня

Користуючись теоремою про корінь з добутку, перетворимо вираз $\sqrt[4]{48}$:

$$\sqrt[4]{48}=\sqrt[4]{16\cdot3}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{3}=2\sqrt[4]{3}.$$

Отже, вираз $\sqrt[4]{48}$ ми подали у вигляді добутку раціонального числа 2 та ірраціонального числа $\sqrt[4]{3}$. Таке перетворення називають ***винесенням множника з-під знака кореня***. У даному випадку було винесено з-під кореня множник 2.

Розглянемо виконане перетворення у зворотному порядку:

$$2\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{16\cdot 3}=\sqrt[4]{48}.$$

Таке перетворення називають ***внесенням множника під знак кореня***.

ПРИКЛАД Винесіть множник з-під знака кореня: 1) $\sqrt[3]{250}$; 2) $\sqrt[4]{162a^8}$; 3) $\sqrt[8]{b^{43}}$; 4) $\sqrt[8]{-b^{43}}$; 5) $\sqrt[6]{a^6b^7}$, якщо $a<0$.

Розв'язання

1) Подамо число, яке стоїть під знаком кореня, у вигляді добутку двох чисел, одне з яких є кубом раціонального числа:

$$\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{125\cdot 2}=5\sqrt[3]{2}.$$

2) $\sqrt[4]{162a^8}=\sqrt[4]{81a^8\cdot 2}=3a^2\sqrt[4]{2}.$

3) З умови випливає, що $b\geqslant 0$. Тоді

$$\sqrt[8]{b^{43}}=\sqrt[8]{b^{40}b^3}=|\,b^5\,|\sqrt[8]{b^3}=b^5\sqrt[8]{b^3}.$$

4) З умови випливає, що $b\leqslant 0$. Тоді

$$\sqrt[8]{-b^{43}}=\sqrt[8]{b^{40}\,(-b)^3}=|\,b^5\,|\sqrt[8]{-b^3}=-b^5\sqrt[8]{-b^3}.$$

5) З умови випливає, що $b\geqslant 0$. Тоді

$$\sqrt[6]{a^6b^7}=\sqrt[6]{a^6b^6b}=|\,a\,|\,|\,b\,|\sqrt[6]{b}=-ab\sqrt[6]{b}.$$

ПРИКЛАД Внесіть множник під знак кореня: 1) $-2\sqrt[6]{3}$; 2) $a\sqrt[4]{7}$; 3) $c\sqrt[10]{c^7}$; 4) $3b\sqrt[4]{-\frac{b}{3}}$.

Розв'язання

1) $-2\sqrt[6]{3}=-\sqrt[6]{64}\cdot\sqrt[6]{3}=-\sqrt[6]{192}.$

2) Якщо $a\geqslant 0$, то $a\sqrt[4]{7}=\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{7}=\sqrt[4]{7a^4}$; якщо $a<0$, то $a\sqrt[4]{7}=-\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{7}=-\sqrt[4]{7a^4}$.

3) З умови випливає, що $c\geqslant 0$. Тоді $c\sqrt[10]{c^7}=\sqrt[10]{c^{10}}\cdot\sqrt[10]{c^7}=\sqrt[10]{c^{17}}$.

4) З умови випливає, що $b\leqslant 0$. Тоді

$$3b\sqrt[4]{-\frac{b}{3}}=-\sqrt[4]{81b^4}\cdot\sqrt[4]{-\frac{b}{3}}=-\sqrt[4]{81b^4\cdot\left(-\frac{b}{3}\right)}=-\sqrt[4]{-27b^5}.$$

ПРИКЛАД Спростіть вираз: 1) $\sqrt[3]{54a}+\sqrt[3]{16a}-\sqrt[3]{2000a}$; 2) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}$; 3) $\sqrt{4-\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23+8\sqrt{7}}$.

Розв'язання

1) Маємо:

$$\sqrt[3]{54a}+\sqrt[3]{16a}-\sqrt[3]{2000a}=\sqrt[3]{27\cdot 2a}+\sqrt[3]{8\cdot 2a}-\sqrt[3]{1000\cdot 2a}=$$
$$=3\sqrt[3]{2a}+2\sqrt[3]{2a}-10\sqrt[3]{2a}=-5\sqrt[3]{2a}.$$

2) Внесемо множник 4 під знак кубічного кореня, а потім скористаємося теоремою про корінь з кореня:

$$\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{4^3 \cdot 4}} = \sqrt[12]{4^4}.$$

Далі остаточно отримуємо:

$$\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[3]{4}.$$

3) $\sqrt{4-\sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23+8\sqrt{7}} = \sqrt[4]{\left(4-\sqrt{7}\right)^2} \cdot \sqrt[4]{23+8\sqrt{7}} =$

$$= \sqrt[4]{16-8\sqrt{7}+7} \cdot \sqrt[4]{23+8\sqrt{7}} = \sqrt[4]{\left(23-8\sqrt{7}\right)\left(23+8\sqrt{7}\right)} =$$

$$= \sqrt[4]{23^2-\left(8\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt[4]{529-448} = \sqrt[4]{81} = 3.$$

ПРИКЛАД 4 Скоротіть дріб: 1) $\dfrac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1}$; 2) $\dfrac{2-3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}$.

Розв'язання

1) Розклавши чисельник даного дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1} = \frac{\left(\sqrt[6]{b}\right)^2-1}{\sqrt[6]{b}+1} = \frac{\left(\sqrt[6]{b}-1\right)\left(\sqrt[6]{b}+1\right)}{\sqrt[6]{b}+1} = \sqrt[6]{b}-1.$$

2) $\dfrac{2-3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{\left(\sqrt[4]{2}\right)^4-3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{\sqrt[4]{2}\left(\sqrt[4]{2^3}-3\right)}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{8}-3.$

3) Розклавши чисельник і знаменник даного дробу на множники, маємо:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}} = \frac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2} = \frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}.$$

ПРИКЛАД 5 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу: 1) $\dfrac{15}{2\sqrt[3]{3}}$; 2) $\dfrac{5}{2-\sqrt[3]{3}}$.

Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу означає перетворити дріб так, щоб його знаменник не містив знака кореня n-го степеня.

Розв'язання

1) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на $\sqrt[3]{3^2}$, отримуємо:

$$\frac{15}{2\sqrt[3]{3}} = \frac{15\sqrt[3]{3^2}}{2\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}} = \frac{15\sqrt[3]{9}}{2\left(\sqrt[3]{3}\right)^3} = \frac{15\sqrt[3]{9}}{2\cdot 3} = \frac{5\sqrt[3]{9}}{2}.$$

2) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на неповний квадрат суми чисел 2 і $\sqrt[3]{3}$, отримуємо:

$$\frac{5}{2-\sqrt[3]{3}}=\frac{5\left(4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}{\left(2-\sqrt[3]{3}\right)\left(4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}=\frac{5\left(4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}{2^3-\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}=$$

$$=\frac{5\left(4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}{8-3}=4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}.$$

ПРИКЛАД 6 Доведіть тотожність

$$\left(\frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}+\frac{\sqrt[8]{b}}{\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}}-\frac{2\sqrt[8]{ab}}{\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}}\right)\cdot\left(\sqrt[8]{a}-\frac{\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}\right)=\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}.$$

Розв'язання

$$\left(\frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}+\frac{\sqrt[8]{b}}{\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}}-\frac{2\sqrt[8]{ab}}{\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}}\right)\cdot\left(\sqrt[8]{a}-\frac{\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[8]{a}\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)+\sqrt[8]{b}\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)+2\sqrt[8]{ab}}{\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)}\cdot\left(\sqrt[8]{a}-\frac{\sqrt[8]{b}\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[8]{ab}+\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b}+2\sqrt[8]{ab}}{\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)}\cdot\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)=\frac{\sqrt[4]{a}+2\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}=\frac{\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)^2}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}=$$

$$=\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}.$$

ПРИКЛАД 7 Скоротіть дріб $\dfrac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}$.

Розв'язання. З умови випливає, що числа a і b однакового знака. Розглянемо два випадки.

Перший випадок: $a > 0$ і $b > 0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}=\frac{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[10]{b}+\sqrt[10]{b}\cdot\sqrt[10]{b}}{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[10]{b}}=\frac{\sqrt[10]{b}\left(\sqrt[10]{a}+\sqrt[10]{b}\right)}{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[10]{b}}=\frac{\sqrt[10]{a}+\sqrt[10]{b}}{\sqrt[10]{a}}.$$

Другий випадок: $a < 0$, $b < 0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}=\frac{\sqrt[10]{-a}\sqrt[10]{-b}-\left(\sqrt[10]{-b}\right)^2}{\sqrt[10]{-a}\cdot\sqrt[10]{-b}}=\frac{\sqrt[10]{-b}\left(\sqrt[10]{-a}-\sqrt[10]{-b}\right)}{\sqrt[10]{-a}\cdot\sqrt[10]{-b}}=\frac{\sqrt[10]{-a}-\sqrt[10]{-b}}{\sqrt[10]{-a}}.$$

Випадок, коли $a < 0$ і $b < 0$, можна розглянути інакше. Нехай $a = -x$, $b = -y$, де $x > 0$, $y > 0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}=\frac{\sqrt[10]{xy}+\sqrt[5]{-y}}{\sqrt[10]{xy}}=\frac{\sqrt[10]{x}\cdot\sqrt[10]{y}-\sqrt[10]{y}\cdot\sqrt[10]{y}}{\sqrt[10]{xy}}=\frac{\sqrt[10]{y}\left(\sqrt[10]{x}-\sqrt[10]{y}\right)}{\sqrt[10]{x}\cdot\sqrt[10]{y}}=$$

$$=\frac{\sqrt[10]{x}-\sqrt[10]{y}}{\sqrt[10]{x}}=\frac{\sqrt[10]{-a}-\sqrt[10]{-b}}{\sqrt[10]{-a}}.$$

ПРИКЛАД 8 Доведіть, що $\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[12]{49-20\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Розв'язання. Маємо: $\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[12]{49-20\sqrt{6}}=$

$$=\sqrt[6]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[12]{49-20\sqrt{6}}=\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[12]{49-20\sqrt{6}}=$$

$$=\sqrt[6]{\left(5-2\sqrt{6}\right)^2}\cdot\sqrt[12]{49-20\sqrt{6}}=\sqrt[6]{49-20\sqrt{6}}\cdot\sqrt[12]{49-20\sqrt{6}}=$$

$$=\sqrt[12]{\left(49-20\sqrt{6}\right)^2}\cdot\sqrt[12]{49-20\sqrt{6}}=\sqrt[12]{\left(49-20\sqrt{6}\right)^3}=\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}=$$

$$=\sqrt[4]{\left(5-2\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

ПРИКЛАД 9 Доведіть, що $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=x$. Скористаємося тим, що $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

Маємо:

$$x^3=9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\cdot\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right).$$

Звідси $x^3=18+3x$; $x^3-3x-18=0$.

Розглянувши дільники числа 18, нескладно установити, що $x=3$ є коренем даного рівняння. Поділивши многочлен $x^3-3x-18$ на двочлен $x-3$, отримуємо x^2+3x+6.

Маємо: $(x-3)(x^2+3x+6)=0$.

Це рівняння має єдиний корінь $x=3$.

Вправи

514.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[3]{16}$; 3) $\sqrt[3]{250}$; 5) $\sqrt[3]{40a^5}$; 7) $\sqrt[3]{-54a^5b^9}$;

2) $\sqrt[4]{162}$; 4) $\sqrt[6]{7290}$; 6) $\sqrt[3]{-a^7}$; 8) $\sqrt[3]{-108a^7b^{10}}$.

515.° Спростіть вираз:

1) $-\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}$; 2) $\frac{1}{8}\sqrt[7]{640}$; 3) $\frac{3}{7}\sqrt[3]{686}$; 4) $-1{,}2\sqrt[5]{96}$.

516.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{80}$; 3) $\sqrt[3]{432}$; 5) $\sqrt[3]{54y^8}$;

2) $\sqrt[4]{486}$; 4) $\sqrt[7]{30\,000\,000}$; 6) $\sqrt[4]{243b^9c^{18}}$.

517.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $2\sqrt{3}$; 3) $-10\sqrt[4]{0{,}271}$; 5) $5\sqrt[3]{0{,}04x}$; 7) $b\sqrt[5]{3b^3}$;

2) $4\sqrt[3]{5}$; 4) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}$; 6) $2\sqrt[5]{6y}$; 8) $c\sqrt[3]{\frac{5}{c^2}}$.

518.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{320}$; 2) $2\sqrt[4]{7}$; 3) $5\sqrt[4]{4a}$; 4) $0{,}3\sqrt[3]{100c^2}$; 5) $2x^3\sqrt[5]{\frac{x^3}{8}}$.

519.° Замініть вираз на тотожно рівний йому:

1) $\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{320}-\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}$;

2) $\sqrt[3]{56m}+\sqrt[3]{-189m}-\sqrt[3]{-81n}-1{,}5\sqrt[3]{24n}+\sqrt[3]{448m}$.

520.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{2000}$;

2) $\sqrt[4]{625a}+3\sqrt[4]{16a}-2\sqrt[4]{81a}+4\sqrt[4]{1296a}$.

521.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{2\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$; 5) $\sqrt[8]{x^3\sqrt[3]{x^7}}$;

2) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}}$; 4) $\sqrt[5]{b\sqrt[6]{b}}$; 6) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

522.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a\sqrt{a}}$; 3) $\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 5) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[6]{x^{13}}}$;

2) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt[9]{c^2\sqrt[4]{c}}$; 6) $\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}$.

523.° Спростіть вираз:

1) $\left(1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)\left(1-\sqrt[3]{a}\right)$; 2) $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)$.

524.° Спростіть вираз:

1) $\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}\right)\left(\sqrt[8]{m}+\sqrt[8]{n}\right)\left(\sqrt[8]{m}-\sqrt[8]{n}\right)$;

2) $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)$.

525.° Подайте у вигляді кореня вираз:

1) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a}$; 4) $\frac{\sqrt[12]{a^5}}{\sqrt[4]{a}}$; 7) $\frac{\sqrt[6]{3\sqrt[7]{3^5}}}{\sqrt[14]{9}}$;

2) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[6]{b}$; 5) $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{6}}$; 8) $\sqrt[4]{a^2b}\cdot\sqrt[6]{ab^2}\cdot\sqrt[12]{a^8b}$;

3) $\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[12]{n}$; 6) $\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a}}\cdot\sqrt[5]{a}$; 9) $\frac{\sqrt[6]{a^3b^2\sqrt[3]{ab^2}}}{\sqrt{ab}}$.

526.° **Подайте у вигляді кореня вираз:**

1) $\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[3]{x}$; 3) $a\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a}$; 5) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}$;

2) $\sqrt[5]{y^2}\cdot\sqrt[15]{y^4}$; 4) $\dfrac{\sqrt[9]{a^8}}{\sqrt[6]{a^5}}$; 6) $\sqrt[5]{a^2b}\cdot\sqrt[10]{a^2b}\cdot\sqrt[15]{ab^3}$.

527.° **Обчисліть значення виразу:**

1) $\left(5\sqrt[3]{4}+0,5\sqrt[3]{108}-\sqrt[3]{500}\right)\sqrt[3]{2}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{9}-6\sqrt[3]{72}+2\sqrt[3]{1125}}{\sqrt[3]{9}}$;

2) $\sqrt[3]{0,25}\left(\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{32}-2\sqrt[3]{108}\right)$; 5) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}\right)^2}{4+3\sqrt{2}}$.

3) $\left(2\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{100}\right)\left(\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)$;

528.° **Обчисліть значення виразу:**

1) $\left(4\sqrt[3]{72}-3\sqrt[3]{9}+5\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}\right)\sqrt[3]{3}$; 3) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{24}-\sqrt[4]{6}\right)^2}{4\sqrt{3}-3\sqrt{6}}$.

2) $\dfrac{5\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}$;

529.° **Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:**

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$; 5) $\dfrac{10}{\sqrt[4]{8}}$; 7) $\dfrac{n^4}{\sqrt[8]{n^5}}$; 9) $\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{x^4}}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 4) $\dfrac{12}{\sqrt[5]{-3}}$; 6) $\dfrac{18}{\sqrt[5]{8}}$; 8) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{6}}$; 10) $\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$.

530.° **Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:**

1) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{3}}$; 3) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{2}}$; 5) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{10}}$; 7) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}$;

2) $\dfrac{20}{\sqrt[3]{25}}$; 4) $\dfrac{15}{\sqrt[4]{27}}$; 6) $\dfrac{24}{\sqrt[5]{16}}$; 8) $\dfrac{m^5}{\sqrt[7]{m^3}}$.

531.• **Скоротіть дріб:**

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[6]{x}-9}{\sqrt[12]{x}+3}$; 5) $\dfrac{\sqrt[8]{ab^2}-\sqrt[8]{a^2b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$;

2) $\dfrac{\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{m}+\sqrt[4]{m}}{m-\sqrt[4]{m^3}}$; 6) $\dfrac{\sqrt[6]{a}+\sqrt[12]{ab}}{\sqrt[12]{ab}+\sqrt[6]{b}}$;

7) $\frac{a\sqrt[3]{b^2}-b\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2b^2}}$; 9) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}$; 11) $\frac{\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{2}}$;

8) $\frac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{x-64}$; 10) $\frac{2-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$; 12) $\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}+\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}$.

532.˙ **Скоротіть дріб:**

1) $\frac{\sqrt[6]{a}+1}{\sqrt[3]{a}-1}$; 3) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; 5) $\frac{\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{a^2b}}$;

2) $\frac{\sqrt{m}-\sqrt[4]{mn}}{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}$; 4) $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$; 6) $\frac{3+\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}}$.

533.˙ Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$; 3) $\frac{15}{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{6}+1}$; 5) $\frac{5}{2+\sqrt[3]{2}}$.

2) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}$; 4) $\frac{7}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}}$;

534.˙ **Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:**

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; 3) $\frac{27}{\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{10}+1}$;

2) $\frac{2}{\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{63}+\sqrt[3]{49}}$; 4) $\frac{11}{3-\sqrt[3]{5}}$.

535.˙˙ При яких значеннях a і b є правильною рівність:

1) $\sqrt[4]{a^5b^5}=ab\sqrt[4]{ab}$; 2) $\sqrt[4]{a^4b}=a\sqrt[4]{b}$; 3) $\sqrt[4]{a^4b}=-a\sqrt[4]{b}$?

536.˙˙ Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{-m^9}$; 5) $\sqrt[4]{162a^4b^8c^{12}}$, якщо $a>0$, $c<0$;

2) $\sqrt[4]{a^8b^{13}}$, якщо $a>0$; 6) $\sqrt[4]{a^{15}b^{15}}$;

3) $\sqrt[6]{x^6y^7}$, якщо $x\neq 0$; 7) $\sqrt[8]{-a^{25}b^{50}}$.

4) $\sqrt[4]{32m^{18}n^{17}}$;

537.˙˙ **Винесіть множник з-під знака кореня:**

1) $\sqrt[4]{32a^6}$, якщо $a\leqslant 0$; 3) $\sqrt[6]{a^7b^7}$, якщо $a<0$, $b<0$;

2) $\sqrt[4]{-625a^5}$; 4) $\sqrt[6]{a^{20}b^{19}}$, якщо $a>0$.

538.'' Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt[4]{2}$, якщо $a \geqslant 0$;
2) $ab\sqrt[6]{\dfrac{6}{a^3b^2}}$, якщо $a > 0$, $b < 0$;
3) $mn\sqrt[4]{\dfrac{1}{m^3n^3}}$;
4) $b\sqrt[6]{6}$;
5) $a\sqrt[6]{-a}$.
6) $ab\sqrt[4]{ab^2}$, якщо $b \leqslant 0$.

539.'' Внесіть множник під знак кореня:

1) $c\sqrt[8]{3}$, якщо $c \leqslant 0$;
2) $a\sqrt[6]{a}$;
3) $-ab\sqrt[4]{6}$, якщо $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$;
4) $ab\sqrt[8]{\dfrac{3}{a^4b^5}}$, якщо $a < 0$;
5) $a\sqrt[4]{-a^3}$.

540.'' Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{10}-3}\cdot\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}}$;
2) $\sqrt[4]{24-8\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2\sqrt{5}+2}$;
3) $\sqrt[6]{\sqrt{15}+4}\cdot\sqrt[12]{31-8\sqrt{15}}$;
4) $\sqrt{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{6-4\sqrt{2}}$;
5) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}$.

541.'' Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$;
2) $\sqrt{2\sqrt{6}-1}\cdot\sqrt[4]{25+4\sqrt{6}}$.

542.'' Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-1}-\dfrac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt{a}}\right):\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a}+1}$;
2) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}-\dfrac{4\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}$;
3) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}+1\right)$;
4) $\dfrac{\sqrt{a}+27}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt[6]{a}-3}{\sqrt[3]{a}-3\sqrt[6]{a}+9}-\dfrac{\sqrt[6]{ab}-9}{\sqrt{a}+27}\right)$;
5) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{bc^2}+\sqrt[3]{b^2c}}{\sqrt[3]{b^2}+2\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}}+\dfrac{b-c}{\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{c^2}}-2\sqrt[3]{c}\right):(\sqrt[6]{b}+\sqrt[6]{c})$;
6) $\dfrac{a-b}{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}}:\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{b}}\right)$;

7) $\dfrac{\sqrt[3]{2a+2\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}+\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}+2}}$.

543.** **Доведіть тотожність:**

1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}+1}-\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}\right):\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+1}=\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{x}$;

2) $\dfrac{\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\dfrac{\left(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}\right)^2}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}=\dfrac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$;

4) $\dfrac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}}\cdot\dfrac{m-4\sqrt{m-4}}{m-8}=1$.

544.* Доведіть, що значення виразу є числом раціональним:

1) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$;   2) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$.

545.* Доведіть, що $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

26. Функція $y=\sqrt[n]{x}$

- **У пункті 23 було встановлено, що корінь непарного степеня з будь-якого числа існує і набуває тільки одного значення. Тому кожному числу $x \in \mathbb{R}$ можна поставити у відповідність єдине число y таке, що $y=\sqrt[2k+1]{x}$. Тим самим для всіх $k \in \mathbb{N}$ задано функцію $f(x)=\sqrt[2k+1]{x}$ з областю визначення $\mathbb{R}$.**

Покажемо, що функція f є оберненою до функції $g(x) = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Оскільки рівняння $\sqrt[2k+1]{x}=a$ при будь-якому a має корінь $x = a^{2k+1}$, то областю значень функції f є множина $\mathbb{R}$.

Маємо: $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$,

$E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\sqrt[2k+1]{x^{2k+1}}=x$. Іншими словами, $f(g(x)) = x$ для всіх $x \in D(g)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Використовуючи графік функції $y = x^{2k+1}$ і теорему 10.2, можна побудувати графік функції $y=\sqrt[2k+1]{x}$ (рис. 139). Зокрема, на рисунку 140 зображено графіки функцій $y=\sqrt[3]{x}$ і $y=\sqrt[5]{x}$.

Оскільки функція $g(x) = x^{2k+1}$ є зростаючою, то за теоремою 10.3 функція $f(x)=\sqrt[2k+1]{x}$ також є зростаючою.

Функція $f(x)=\sqrt[2k+1]{x}$ має єдиний нуль $x = 0$.

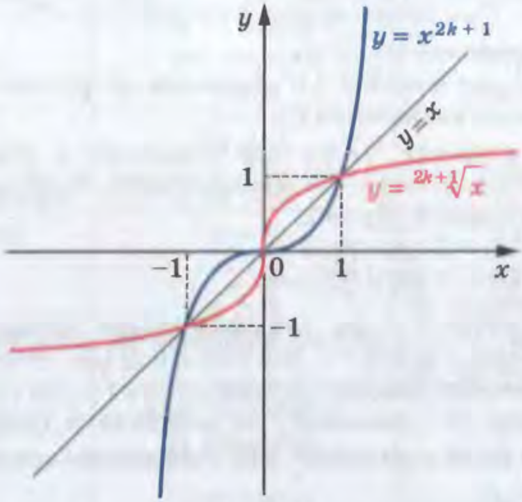


Рис. 139

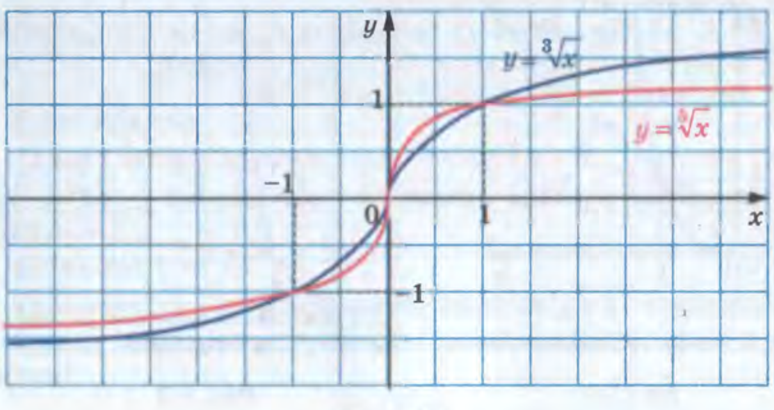


Рис. 140

Якщо $x < 0$, то $f(x) < 0$; якщо $x > 0$, то $f(x) > 0$. Отже, проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції f.

Для будь-якого x з області визначення функції f виконується рівність $f(-x)=\sqrt[2k+1]{-x}=-\sqrt[2k+1]{x}=-f(x)$. Отже, функція f є непарною.

- У пункті 23 було встановлено, що арифметичний корінь парного степеня з будь-якого невід'ємного числа існує і набуває тільки одного значення. Тому кожному числу x з проміжку $[0; +\infty)$ можна поставити у відповідність єдине число y таке, що $y=\sqrt[2k]{x}$. Тим самим задано функцію $f(x)=\sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, з областю визначення $[0; +\infty)$.

Покажемо, що функція f є оберненою до функції $g(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, з областю визначення $[0; +\infty)$.

Оскільки рівняння $\sqrt[2k]{x}=a$ при будь-якому $a \geqslant 0$ має корінь $x = a^{2k}$ і при будь-якому $a < 0$ не має коренів, то областю значень функції f є проміжок $[0; +\infty)$.

Маємо: $D(f) = E(g) = [0; +\infty)$,

$E(f) = D(g) = [0; +\infty)$.

Для будь-якого $x \in [0; +\infty)$ виконується рівність $\sqrt[2k]{x^{2k}}=x$. Іншими словами, $f(g(x)) = x$ для всіх $x \in D(g)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

На рисунку 141 показано, як побудувати графік функції $y=\sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$. На рисунку 142 зображено графік функції $y=\sqrt[4]{x}$.

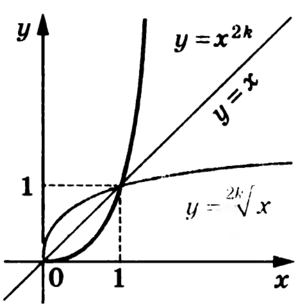


Рис. 141

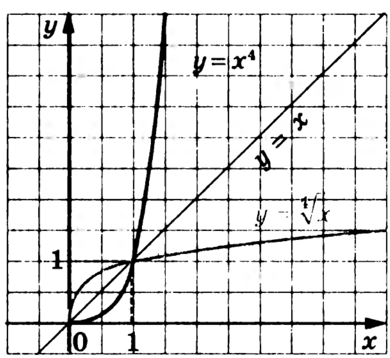


Рис. 142

Оскільки функція $g(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, $D(g) = [0; +\infty)$, є зростаючою, то функція $f(x)=\sqrt[2k]{x}$ також є зростаючою.

Функція f має єдиний корінь $x = 0$.

Якщо $x > 0$, то $f(x) > 0$. Отже, проміжок $(0; +\infty)$ є проміжком знакосталості функції f.

Оскільки область визначення функції f не є симетричною відносно початку координат, то функція f **не** є ні парною, ні непарною.

У таблиці наведено властивості функції $y=\sqrt[n]{x}$, вивчені в цьому пункті.

	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число, $n > 1$
Область визначення	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Область значень	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Не є ні парною, ні непарною	Непарна
Зростання / спадання	Зростаюча	Зростаюча

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність: 1) $\sqrt[3]{x}<2$; 2) $\sqrt[4]{x-2}<1$; 3) $\sqrt[6]{x^2-4}>\sqrt[6]{3x}$.

Розв'язання

1) Дана нерівність рівносильна такій: $\sqrt[3]{x}<\sqrt[3]{8}$. Оскільки функція $y=\sqrt[3]{x}$ є зростаючою, то можна зробити висновок, що $x < 8$.

Відповідь: $(-\infty; 8)$.

2) Маємо: $\sqrt[4]{x-2}<\sqrt[4]{1}$. Оскільки функція $y=\sqrt[4]{t}$ є зростаючою з областю визначення $[0; +\infty)$, то дана нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} x-2<1, \\ x-2\geqslant 0. \end{cases}$$

Звідси $2 \leqslant x < 3$.

Відповідь: $[2; 3)$.

3) Дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x^2-4>3x, \\ 3x\geqslant 0. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} x^2-3x-4>0, \\ x\geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ x>4, \end{array}\right. \\ x\geqslant 0. \end{cases}$ Звідси отримуємо, що $x>4$.

Відповідь: $(4;\ +\infty)$.

ПРИКЛАД 2 Порівняйте $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[4]{2}$.

Розв'язання. Маємо: $\sqrt[3]{2}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[12]{16}$; $\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[12]{8}$.

Оскільки функція $y=\sqrt[12]{x}$ є зростаючою, то $\sqrt[12]{16}>\sqrt[12]{8}$.

Відповідь: $\sqrt[3]{2}>\sqrt[4]{2}$.

Вправи

546.° Через які з даних точок проходить графік функції $y=\sqrt[4]{x}$:

$A\ (2;\ 16)$; $B\ (16;\ 2)$; $C\ (-1;\ 1)$; $D\left(\frac{1}{81};\ 3\right)$; $E\ (81;\ 3)$; $F\ (0{,}001;\ 0{,}1)$; $G\ (10\ 000;\ 10)$?

547.° Через які з даних точок проходить графік функції $y=\sqrt[3]{x}$:

$A\ (-8;\ -2)$; $B\left(\frac{1}{125};\ \frac{1}{5}\right)$; $C\ (3;\ 27)$; $D\ (0{,}64;\ 0{,}4)$; $E\ (-216;\ 6)$; $F\ (-1000;\ -10)$?

548.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt[3]{x-1}$;
2) $y=\sqrt[6]{x+1}$;
3) $y=\sqrt[5]{\frac{x-1}{x+2}}$;
4) $y=\sqrt[4]{x^2-x-2}$;
5) $y=\sqrt[4]{|x|-1}$;
6) $y=\sqrt[6]{x^2(x-3)}$.

549.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt[5]{x+2}$;
2) $y=\sqrt[4]{x-2}$;
3) $y=\sqrt[9]{\frac{x+1}{x-3}}$;
4) $y=\sqrt[6]{x^2-4x+3}$;
5) $y=\sqrt[8]{3-|x|}$;
6) $y=\sqrt[10]{|x|(x-6)}$.

550.° Знайдіть область значень функції:

1) $y=\sqrt[4]{x}+1$;
2) $y=\sqrt[6]{x}-2$;
3) $y=\sqrt[3]{x}-3$;
4) $y=\left|\sqrt[8]{x}-1\right|$;
5) $y=\left|\sqrt[5]{x}+2\right|$.

551.° **Знайдіть область значень функції:**

1) $y=\sqrt[8]{x}+2$; 3) $y=\sqrt[5]{x}-2$; 5) $y=\left|\sqrt[7]{x}+1\right|$.

2) $y=\sqrt[4]{x}-4$; 4) $y=\left|\sqrt[6]{x}-2\right|$;

552.° **Знайдіть область значень функції:**

1) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $D(f)=[-27;\ 8]$; 3) $f(x)=\sqrt[5]{x}$, $D(f)=\left[-\frac{1}{32};\ 32\right]$.

2) $f(x)=\sqrt[4]{x}$, $D(f)=\left[\frac{1}{16};\ 10\,000\right]$;

553.° **Оцініть значення виразу $\sqrt[3]{x}$, якщо:**

1) $1 \leqslant x \leqslant 216$; 2) $-729 < x < 8$.

554.° **Оцініть значення виразу $\sqrt[4]{x}$, якщо:**

1) $0 \leqslant x \leqslant 256$; 2) $16 < x < 10\,000$.

555.° Порівняйте:

1) $\sqrt[3]{1,6}$ і $\sqrt[3]{1,4}$; 4) $\sqrt[3]{5}$ і $\sqrt[6]{28}$; 7) $4\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ і $5\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$;

2) $\sqrt[5]{-23}$ і $\sqrt[5]{-26}$; 5) $\sqrt[15]{60}$ і $\sqrt[5]{4}$; 8) $6\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ і $4\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$.

3) 2 і $\sqrt[4]{17}$; 6) $2\sqrt[3]{3}$ і $3\sqrt[3]{2}$;

556.° **Порівняйте:**

1) $\sqrt{5}$ і $\sqrt[6]{80}$; 3) $3\sqrt[3]{4}$ і $4\sqrt[3]{2}$;

2) $\sqrt[6]{2}$ і $\sqrt[24]{18}$; 4) $5\sqrt[4]{0,2}$ і $10\sqrt[4]{0,012}$.

557.° **Між якими двома послідовними цілими числами знаходиться на координатній прямій число:**

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[3]{3}$; 3) $\sqrt[4]{21}$; 4) $\sqrt[3]{100}$; 5) $-\sqrt[5]{30}$; 6) $-\sqrt[3]{81}$?

558.° **Між якими двома послідовними цілими числами знаходиться на координатній прямій число:**

1) $\sqrt[3]{18}$; 2) $\sqrt[4]{139}$; 3) $-\sqrt[3]{212}$?

559.° **Укажіть усі цілі числа, які розташовані на координатній прямій між числами:**

1) 4 і $\sqrt[3]{140}$; 2) $\sqrt[5]{-35}$ і $\sqrt[4]{640}$.

560.° **Укажіть усі цілі числа, які розташовані на координатній прямій між числами $-\sqrt[4]{1300}$ і $\sqrt[3]{40}$.**

561.• Порівняйте:

1) $\sqrt[3]{6}$ і $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt[6]{2\sqrt{7}}$; 5) $\sqrt{3}$ і $\sqrt[3]{\sqrt{28}}$; 7) $\sqrt[5]{2}$ і $\sqrt[4]{2}$;

2) $\sqrt[9]{12}$ і $\sqrt[6]{5}$; 4) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$ і $\sqrt[4]{4}$; 6) $\sqrt[5]{\sqrt{32}}$ і $\sqrt[6]{8}$; 8) $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ і $\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$.

562.° Порівняйте:

1) $\sqrt{5}$ і $\sqrt[3]{10}$;
2) $\sqrt[8]{16}$ і $\sqrt[5]{\sqrt{33}}$;
3) $\sqrt[10]{7}$ і $\sqrt[5]{2\sqrt{2}}$;
4) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ і $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$.

563.° Розташуйте в порядку зростання числа:

1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ і $\sqrt[5]{4}$;
2) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[15]{30}$;
3) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ і $\sqrt[4]{7}$;
4) $\sqrt[15]{125}$, $\sqrt[5]{6}$ і $\sqrt[6]{4\sqrt[5]{4}}$.

564.° Розташуйте в порядку спадання числа:

1) $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[3]{4}$ і $\sqrt{3}$;
2) $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[6]{30}$ і $\sqrt[4]{10}$.

565.° Побудуйте графік функції:

1) $y=-\sqrt[3]{x}$;
2) $y=\sqrt[3]{x}-2$;
3) $y=\sqrt[3]{x-2}$;
4) $y=\sqrt[3]{2-x}$;
5) $y=\sqrt[3]{x-2}-2$;
6) $y=\sqrt[3]{|x|}$;
7) $y=\sqrt[3]{|x|-1}$;
8) $y=\sqrt[3]{|x-1|}$;
9) $y=\left|\sqrt[3]{x+1}-2\right|$.

566.° Побудуйте графік функції:

1) $y=-\sqrt[4]{x}$;
2) $y=\sqrt[4]{-x}$;
3) $y=\sqrt[4]{x}+3$;
4) $y=\sqrt[4]{x+3}$;
5) $y=\sqrt[4]{x+3}+1$;
6) $y=\sqrt[4]{|x|}$;
7) $y=\sqrt[4]{|x|+1}$;
8) $y=\sqrt[4]{|x+1|}$;
9) $y=\left|\sqrt[4]{x+2}-2\right|$.

567.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)=\sqrt[4]{|x|}$ на проміжку:

1) $[1;\ 2]$;
2) $[-3;\ -1]$;
3) $[-1;\ 1]$;
4) $[-1;\ 2]$;
5) $[-3;\ +\infty)$;
6) $(-\infty;\ -1]$.

568.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)=\sqrt[3]{|x|}$ на проміжку:

1) $[2;\ 3]$;
2) $[-1;\ 0]$;
3) $[-2;\ 2]$;
4) $[-2;\ 1]$;
5) $[-1;\ +\infty)$;
6) $(-\infty;\ 2)$.

569.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[6]{x-1}>2$;
2) $\sqrt[3]{3x+1}<4$;
3) $\sqrt[8]{4x+1}\leqslant 1$;
4) $\sqrt[4]{x^2-8}>\sqrt[4]{2x}$;
5) $\sqrt[6]{x^2+2x}\geqslant\sqrt[6]{x^2-x-6}$.

570.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[10]{x+2}>1$;
2) $\sqrt[5]{3x+2}<2$;
3) $\sqrt[4]{5x+1}<3$;
4) $\sqrt[8]{x^2-|x|+1}>\sqrt[8]{5-|x|}$.

571.** Скільки коренів має рівняння залежно від значення параметра a:

1) $\sqrt[3]{x}=a-x$; 2) $\sqrt[4]{x}=a-x$?

572.** Скільки коренів має рівняння $\left|\sqrt[6]{x}-1\right|=a$ залежно від значення параметра a?

573.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x-26}+\sqrt[3]{x}=4$.

574.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x-9}+\sqrt[4]{x+6}=3$.

27. Означення та властивості степеня з раціональним показником

Нагадаємо означення степеня з натуральним показником:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ множників}},\ n\in\mathbb{N},\ n>1;$$

$$a^1=a.$$

Ви знаєте, що степінь з натуральним показником має такі властивості:

1. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;
2. $a^m:a^n=a^{m-n}$, $a\neq 0$, $m>n$;
3. $(a^m)^n=a^{mn}$;
4. $(ab)^n=a^nb^n$;
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, $b\neq 0$.

Пізніше ви ознайомилися з означеннями степеня з нульовим показником і степеня з від'ємним цілим показником:

$a^0=1$, $a\neq 0$;

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $a\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$.

Ці означення дуже вдалі: при такому підході всі п'ять властивостей степеня з натуральним показником залишилися справедливими і для степеня з цілим показником.

Введемо поняття степеня з дробовим показником, тобто степеня a^r, показник якого є раціональним числом виду $r=\frac{m}{n}$, де $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, $n>1$. Бажано зробити це так, щоб степеню з дробовим показником залишилися притаманними всі властивості степеня з цілим показником. Підказкою для такого означення може слугувати такий приклад.

Якщо через x позначити шукане значення степеня $2^{\frac{2}{3}}$, то, ураховуючи властивість $(a^m)^n = a^{mn}$, можна отримати рівності $x^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2^2$. Отже, x — це кубічний корінь з числа 2^2, тобто $x = \sqrt[3]{2^2}$ або $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Ці міркування підказують таке означення.

Означення. Степенем додатного числа a з раціональним показником r, поданим у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають число $\sqrt[n]{a^m}$, тобто

$$\boxed{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Наприклад, $5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3}$, $3^{-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{-1}{5}} = \sqrt[5]{3^{-1}}$, $0{,}4^{0{,}3} = 0{,}4^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{0{,}4^3}$.

Зауважимо, що значення степеня a^r, де r — раціональне число, не залежить від дробу, у вигляді якого подано число r. Це можна показати, використовуючи рівності $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ і $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Степінь з основою, яка дорівнює нулю, означають тільки для додатного раціонального показника.

Означення. $0^{\frac{m}{n}} = 0$, **де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.**

Зазначимо, що, наприклад, запис $0^{-\frac{1}{2}}$ не має змісту.

Зауважимо, що в означенні не йдеться про степінь $a^{\frac{m}{n}}$ для $a < 0$, наприклад, вираз $(-2)^{\frac{1}{3}}$ залишився невизначеним. Разом з тим вираз $\sqrt[3]{-2}$ має зміст. Виникає природне запитання: чому б не вважати, що $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}}$? Покажемо, що така домовленість привела б до суперечності:

$$\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}.$$

Отримали, що від'ємне число $\sqrt[3]{-2}$ дорівнює додатному числу $\sqrt[6]{4}$.

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, називають степеневою функцією з раціональним показником.

Якщо нескоротний дріб $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є числом додатним, то областю визначення функції $y = x^{\frac{m}{n}}$ є проміжок $[0; +\infty)$; а якщо цей дріб — від'ємне число, то — проміжок $(0; +\infty)$.

Властивості функції $y = x^r$ для цілого показника було вивчено в п. 21 і 22. Випадок, коли показник r не є цілим числом, буде розглянуто в 11 класі. Зараз зазначимо таке.

Функція $y = x^{\frac{1}{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, нічим не відрізняється від функції $y = \sqrt[2k]{x}$. Функції $y = x^{\frac{1}{2k+1}}$ і $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, мають різні області визначення. Так, на проміжку $[0; +\infty)$ обидві ці функції не відрізняються, але на проміжку $(-\infty; 0)$ визначена лише функція $y = \sqrt[2k+1]{x}$.

На рисунку 143 зображено графіки функцій $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{4}}$.

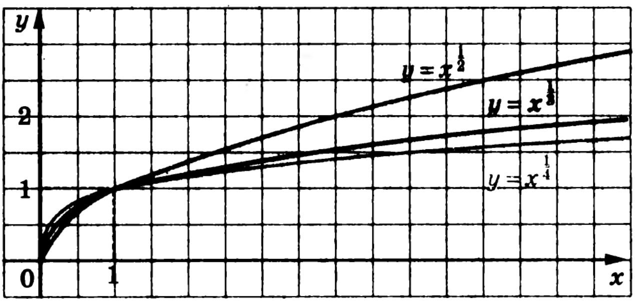


Рис. 143

Покажемо, що властивості степеня з цілим показником залишаються справедливими і для степеня з довільним раціональним показником.

Теорема 27.1 (добуток степенів). ***Для будь-якого $a > 0$ і будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність***

$$\boxed{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$$

Доведення. Запишемо раціональні числа p і q у вигляді дробів з однаковими знаменниками: $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Маємо:

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{n}} = a^{p+q}. \blacktriangle$$

Наслідок. ***Для будь-якого $a > 0$ і будь-якого раціонального числа p виконується рівність***

$$\boxed{a^{-p} = \frac{1}{a^p}}$$

Доведення. Застосовуючи теорему 27.1, запишемо: $a^{-p} \cdot a^p = a^{-p+p} = a^0 = 1$. Звідси $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. ▲

Теорема 27.2 (частка степенів). ***Для будь-якого $a > 0$ і будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність***

$$\boxed{a^p : a^q = a^{p-q}}$$

Доведення. Застосовуючи теорему 27.1, запишемо: $a^q \cdot a^{p-q} = a^{q+p-q} = a^p$. Звідси $a^{p-q} = a^p : a^q$. ▲

Теорема 27.3 (степінь степеня). ***Для будь-якого $a > 0$ і будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність***

$$\boxed{(a^p)^q = a^{pq}}$$

Доведення. Нехай $p = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, та $q = \frac{s}{k}$, $s \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Маємо:

$$(a^p)^q = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{s}{k}} = \sqrt[k]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^s} = \sqrt[k]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^s} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{ms}}} = \sqrt[kn]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{kn}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{s}{k}} = a^{pq}. ▲$$

Теорема 27.4 (степінь добутку і степінь дробу). ***Для будь-яких $a > 0$ і $b > 0$ та будь-якого раціонального числа p виконуються рівності***

$$\boxed{(ab)^p = a^p b^p}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}}$$

Доведіть цю теорему самостійно.

ПРИКЛАД Побудуйте графік функції

$$f(x) = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}.$$

Розв'язання. Областю визначення функції f є множина $(0; +\infty)$. Дану функцію можна задати такими умовами: $f(x) = x$, $D(f) = (0; +\infty)$. Графік функції зображено на рисунку 144.

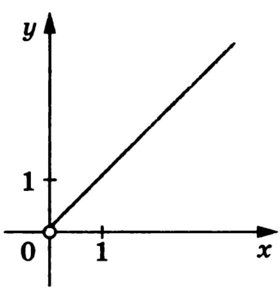


Рис. 144

Вправи

575.° Подайте степінь з дробовим показником у вигляді кореня:

1) $5^{\frac{1}{3}}$; 3) $b^{-\frac{1}{7}}$; 5) $(ab)^{\frac{4}{7}}$; 7) $(m+n)^{2,5}$;

2) $a^{\frac{3}{5}}$; 4) $10^{-\frac{5}{6}}$; 6) $ab^{\frac{4}{7}}$; 8) $(x-3y)^{1\frac{1}{3}}$.

576.° Замініть степінь з дробовим показником коренем:

1) $13^{\frac{1}{2}}$; 3) $c^{0,2}$; 5) $3m^{1,25}n^{0,75}$;

2) $3^{-\frac{1}{9}}$; 4) $x^{\frac{6}{7}}$; 6) $(a-2b)^{\frac{9}{16}}$.

577.° Подайте корінь у вигляді степеня з дробовим показником:

1) $\sqrt{x}$; 3) $\sqrt[7]{6^5}$; 5) $\sqrt[5]{2^{-2}}$; 7) $\sqrt[8]{(a-b)^7}$;

2) $\sqrt[4]{a^3}$; 4) $\sqrt[3]{3a}$; 6) $\sqrt[11]{49}$; 8) $\sqrt[8]{a^7-b^7}$.

578.° Замініть корінь степенем з дробовим показником:

1) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt[14]{m^{-9}}$; 5) $\sqrt[4]{x+y}$;

2) $\sqrt[7]{a^3}$; 4) $\sqrt[6]{5a^5}$; 6) $\sqrt[13]{0,3^8}$.

579.° Знайдіть значення виразу:

1) $4^{\frac{1}{2}}$; 3) $3\cdot 64^{-\frac{1}{3}}$; 5) $0,216^{-\frac{1}{3}}$; 7) $27^{\frac{4}{3}}$;

2) $25^{-\frac{1}{2}}$; 4) $-5\cdot 0,01^{-\frac{3}{2}}$; 6) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 8) $32^{-0,2}$.

580.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 3) $0,0081^{-0,25}$; 5) $0,125^{-\frac{2}{3}}$;

2) $10\,000^{\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$; 6) $\left(11\frac{25}{64}\right)^{\frac{5}{6}}$?

581.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=x^{\frac{5}{6}}$; 3) $y=(x-3)^{2,6}$;

2) $y=x^{-1,4}$; 4) $y=(x^2-6x-7)^{-\frac{1}{9}}$.

582.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=x^{-\frac{2}{3}}$; 3) $y=(x+1)^{-\frac{7}{12}}$;

2) $y=x^{3,2}$; 4) $y=(x^2-x-30)^{\frac{4}{15}}$.

583.° **Спростіть вираз:**

1) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}$; 5) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-6}$; 9) $a^{\frac{7}{8}} : a^{-\frac{3}{4}}$; 13) $\left(a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{14}{27}}\right)^{\frac{3}{7}}$;

2) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$; 6) $\sqrt[3]{a} \cdot a^{\frac{1}{4}}$; 10) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{6}}a^{-\frac{1}{3}}$; 14) $a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{8}}a^{\frac{5}{3}}a^{\frac{1}{8}}$;

3) $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{3}}$; 7) $a^{\frac{2}{3}} : \sqrt[5]{a^2}$; 11) $(a^{0,4})^{0,8}a^{0,18}$; 15) $\dfrac{a^{-\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{12}}}{a^{-\frac{17}{4}}b^{\frac{1}{3}}}$;

4) $a^{-0,6}a^{1,5}$; 8) $(a^{-2,4})^{-3}$; 12) $\dfrac{a^{\frac{1}{6}}a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{4}}}$; 16) $\left(a^{\frac{5}{9}}\right)^{1,8}\left(a^{-\frac{3}{8}}\right)^{2,4}$.

584.° **Спростіть вираз:**

1) $b^{3,5}b^{-4,2}$; 5) $\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{6}}$; 9) $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{7}{12}}a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{2}{3}}$; 13) $b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}}$;

2) $b^{\frac{-3}{7}}b^{\frac{3}{7}}$; 6) $b^{-\frac{1}{2}} : \sqrt{b}$; 10) $\dfrac{a^{\frac{7}{4}}b^{\frac{5}{24}}}{a^{\frac{5}{16}}b^{-\frac{1}{8}}}$; 14) $(b^{0,6})^{0,5}b^{-0,4}$;

3) $b : b^{\frac{2}{3}}$; 7) $\sqrt[4]{b} : b^{-\frac{1}{6}}$; 11) $\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{-3}$; 15) $(b^{-0,3})^{1,2}(b^{0,8})^{0,4}$;

4) $b : b^{-\frac{1}{4}}$; 8) $\dfrac{b^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}}}{b^{-\frac{4}{3}}}$; 12) $\left(a^{-\frac{4}{5}}b^{\frac{1}{6}}\right)^{-\frac{3}{4}}$; 16) $(b^4)^{-0,7} : (b^{-0,8})^{-5}$.

585.° **Знайдіть значення виразу:**

1) $3^{1,8} \cdot 3^{-2,6} \cdot 3^{2,8}$; 4) $\left(\dfrac{1}{49}\right)^{-1,5}$; 7) $\dfrac{8^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$;

2) $(5^{-0,8})^6 \cdot 5^{4,8}$; 5) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{4,5} \cdot 1,2^{4,5}$; 8) $36^{0,4} \cdot 6^{1,2}$;

3) $\left(25^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}$; 6) $\left(\dfrac{7}{10}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\dfrac{1}{700}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 9) $\left(4^{-\frac{1}{8}}\right)^{1,6} \cdot 16^{0,6}$.

586.° **Чому дорівнює значення виразу:**

1) $5^{3,4} \cdot 5^{-1,8} \cdot 5^{-2,6}$; 4) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,25}$; 7) $8^{0,4} \cdot 2^{1,8}$;

2) $(7^{-0,7})^8 : 7^{-7,6}$; 5) $\left(2\dfrac{6}{7}\right)^{2,5} \cdot 1,4^{2,5}$; 8) $(6^{-1,8})^{\frac{1}{3}} \cdot 216^{0,2}$?

3) $\left(9^{\frac{3}{7}}\right)^{4\frac{2}{3}}$; 6) $\dfrac{81^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}$;

587.° Відомо, що a — додатне число. Подайте a у вигляді:

1) квадрата; 3) шостого степеня;

2) куба; 4) восьмого степеня.

588.° Відомо, що m — додатне число. Подайте у вигляді квадрата вираз:

1) m^4; 3) m^3; 5) $m^{\frac{1}{3}}$; 7) $m^{-1,2}$;

2) m^{-6}; 4) $m^{\frac{1}{2}}$; 6) $m^{\frac{5}{6}}$; 8) $m^{\frac{2}{7}}$.

589.° Відомо, що b — додатне число. Подайте у вигляді куба вираз:

1) b^6; 3) b^2; 5) $b^{\frac{1}{3}}$; 7) $b^{-1,8}$;

2) b^{-15}; 4) $b^{\frac{1}{2}}$; 6) $b^{\frac{4}{5}}$; 8) $b^{\frac{7}{11}}$.

590.° При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\left((a-2)^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a-2$; 2) $\left((a-2)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3} = a-2$?

591.° Побудуйте графік функції:

1) $y=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$; 2) $y=\left((x-2)^{\frac{1}{4}}\right)^4$; 3) $y=x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{6}}$.

592.° Обчисліть значення виразу:

1) $12^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{2}{3}}\cdot(0,5)^{\frac{1}{3}}$;

2) $25^{1,5}+(0,25)^{-0,5}-81^{0,75}$;

3) $0,008^{-\frac{2}{3}}+0,064^{-\frac{1}{3}}-0,0625^{-\frac{3}{4}}$;

4) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(0,81)^{-0,5}$;

5) $16^{\frac{1}{8}}\cdot 8^{-\frac{5}{6}}\cdot 4^{1,5}$;

6) $\dfrac{10\,000^{0,4}\cdot 10^{0,5}}{100^{0,3}\cdot 1000^{\frac{1}{6}}}$;

7) $\dfrac{5^{\frac{3}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{12}}}{9^{\frac{1}{6}}}\cdot\dfrac{8^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{5}{2}}\cdot 9^{\frac{1}{3}}}$;

8) $\left(72^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{4}{3}}:36^{-\frac{1}{6}}$;

9) $\left(12^{-\frac{1}{3}}\cdot 18^{-\frac{4}{3}}\cdot 6^{3,5}\right)^4-5^{\frac{1}{4}}\cdot 25^{\frac{3}{8}}$;

10) $\left(\dfrac{3^{-\frac{5}{6}}\cdot 7^{-\frac{5}{6}}}{21^{-1}\cdot 5^{\frac{1}{3}}}\right)^{-6}$;

11) $\left(\dfrac{128^{\frac{3}{28}}\cdot 27^{-\frac{4}{9}}}{3^{\frac{1}{6}}\cdot 16^{\frac{1}{8}}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{16^{\frac{3}{2}}\cdot 81^{\frac{9}{8}}}{9^3\cdot 4^{-\frac{3}{8}}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

593.° Знайдіть значення виразу:

1) $\left(343^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{3}}$;

2) $10^{\frac{1}{4}}\cdot 40^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}$;

3) $0{,}0016^{-\frac{3}{4}}-0{,}04^{-\frac{1}{2}}+0{,}216^{-\frac{2}{3}}$;

4) $625^{-1{,}25}\cdot 25^{1{,}5}\cdot 125^{\frac{2}{3}}$;

5) $\frac{32^{0{,}24}\cdot 4^{0{,}7}}{64^{0{,}6}\cdot 16^{0{,}25}}$;

6) $\frac{12^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{2}{3}}\cdot 8^{-\frac{1}{6}}}\cdot\frac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{5}{3}}}{8^{\frac{1}{2}}}$;

7) $\left(\frac{5^{-\frac{2}{3}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{15^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{-\frac{16}{3}}}\right)^{-1{,}5}$;

8) $\left(\frac{81^{\frac{4}{3}}\cdot 8^{\frac{1}{9}}}{9^{-\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{2}{3}}}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2^{\frac{11}{9}}\cdot 27^{\frac{14}{5}}}{3^{-\frac{18}{5}}\cdot 128^{-\frac{1}{9}}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

594.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{-\frac{2}{3}}=0{,}04$; 2) $(x-2)^{\frac{5}{2}}=32$; 3) $(x^2-2x)^{-\frac{1}{4}}=-1$.

595.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{-1{,}5}=27$; 2) $(x-1)^{-\frac{2}{5}}=100$; 3) $(x-5)^{\frac{3}{7}}=0$.

28. Перетворення виразів, які містять степені з раціональним показником

Розглянемо приклади, у яких виконуються тотожні перетворення виразів, що містять степені з раціональним показником.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз:

1) $(3a^{0,3}+b^{0,2})(a^{0,3}-4b^{0,2})-(a^{0,3}+2b^{0,2})(a^{0,3}-2b^{0,2})$;

2) $\left(a^{\frac{1}{12}}-b^{\frac{1}{12}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{12}}+b^{\frac{1}{6}}\right)+\left(a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{8}}\right)^2$.

Розв'язання

1) Розкриємо дужки, використовуючи правило множення многочленів, формулу різниці квадратів, а потім зведемо подібні доданки:

$(3a^{0,3}+b^{0,2})(a^{0,3}-4b^{0,2})-(a^{0,3}+2b^{0,2})(a^{0,3}-2b^{0,2})=$

$=\underline{3a^{0,6}}-\underline{\underline{12a^{0,3}b^{0,2}}}+\underline{\underline{a^{0,3}b^{0,2}}}-4b^{0,4}-\underline{a^{0,6}}+4b^{0,4}=2a^{0,6}-11a^{0,3}b^{0,2}$.

2) Маємо: $\left(a^{\frac{1}{12}}-b^{\frac{1}{12}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{12}}+b^{\frac{1}{6}}\right)+\left(a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{8}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{12}}\right)^3-\left(b^{\frac{1}{12}}\right)^3+$

$+\left(a^{\frac{1}{8}}\right)^2+2a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}+\left(b^{\frac{1}{8}}\right)^2=a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{4}}+2a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{4}}=2a^{\frac{1}{4}}+2a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}$.

ПРИКЛАД 2 Розкладіть на множники вираз $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{4}}$, використовуючи формулу: 1) різниці квадратів; 2) різниці кубів.

Розв'язання

1) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{4}}=\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(b^{\frac{3}{8}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{3}{8}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{3}{8}}\right)$.

2) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{4}}=\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^3-\left(b^{\frac{1}{4}}\right)^3=\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$.

ПРИКЛАД 3 Скоротіть дріб: 1) $\dfrac{4a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{3}}}$; 2) $\dfrac{b^{\frac{5}{6}}+3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}}-9c^{\frac{1}{2}}}$; 3) $\dfrac{32^{\frac{1}{3}}-16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}$.

Розв'язання

1) Розкладемо знаменник дробу на множники, винісши за дужки спільний множник, і скоротимо дріб:

$$\frac{4a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{3}}}=\frac{4a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{6}}-1\right)}=\frac{4}{a^{\frac{1}{6}}-1}.$$

2) Розклавши чисельник і знаменник дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{b^{\frac{5}{6}}+3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}}-9c^{\frac{1}{2}}}=\frac{b^{\frac{1}{2}}\left(b^{\frac{1}{3}}+3c^{\frac{1}{4}}\right)}{\left(b^{\frac{1}{3}}-3c^{\frac{1}{4}}\right)\left(b^{\frac{1}{3}}+3c^{\frac{1}{4}}\right)}=\frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}-3c^{\frac{1}{4}}}.$$

3) Маємо: $\dfrac{32^{\frac{1}{3}}-16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{16^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)}{2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)}=\dfrac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}=\left(\dfrac{16}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=2.$

ПРИКЛАД 4 Спростіть **вираз** $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+2}{x^{\frac{1}{3}}-2}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-2}{x^{\frac{1}{3}}+2}-\dfrac{16}{x^{\frac{2}{3}}-4}$.

Розв'язання. Зробимо заміну $x^{\frac{1}{3}}=y$. Тоді даний вираз набуває вигляду:

$$\frac{y+2}{y-2}-\frac{y-2}{y+2}-\frac{16}{y^2-4}.$$

Цей вираз легко спростити. Завершіть розв'язування самостійно.

Відповідь: $\dfrac{8}{x^{\frac{1}{3}}+2}$.

Вправи

596.° Розкрийте дужки:

1) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$;

2) $2a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-4\right)+8a^{\frac{1}{2}}$;

3) $(a^{0,5}-3b^{0,3})(2a^{0,5}+b^{0,3})$;

4) $\left(m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{4}}\right)\left(m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}\right)$;

5) $\left(3b^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{3}{2}}\right)\left(3b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{3}{2}}\right)$;

6) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^2$;

7) $\left(4n^{-\frac{5}{6}}+3n^{\frac{5}{6}}\right)^2$;

8) $\left(a^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}a^{-\frac{1}{6}}\right)^2$;

9) $(b^{0,4}+3)^2-6b^{0,4}$;

10) $\left(c^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(c^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{1}{3}}+1\right)$;

11) $\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{5}{6}}+a\right)$;

12) $a^{\frac{1}{6}}\left(a^{\frac{1}{6}}+10\right)-\left(a^{\frac{1}{6}}+5\right)^2$;

13) $\left(b^{\frac{3}{5}}-2b^{\frac{1}{3}}\right)^2+4b^{\frac{1}{6}}\left(b^{\frac{23}{30}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$;

14) $\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)$;

15) $\left(x^{\frac{2}{9}}-1\right)\left(x^{\frac{4}{9}}+x^{\frac{2}{9}}+1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)$.

597.° Розкрийте дужки:

1) $(5a^{0,4}+b^{0,2})(3a^{0,4}-4b^{0,2})$;

2) $(m^{0,5}+n^{0,5})(m^{0,5}-n^{0,5})$;

3) $\left(a^{\frac{1}{3}}-5b^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+5b^{-\frac{1}{4}}\right)$;

4) $\left(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

5) $\left(b^{\frac{4}{3}}-b^{-\frac{2}{3}}\right)^2$;

6) $\left(x^{\frac{1}{6}}+2\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+4\right)$;

7) $(y^{1,5}-4y^{0,5})^2+8y^2$;

8) $\left(c^{\frac{2}{3}}+3c^{\frac{1}{6}}\right)^2-3c^{\frac{1}{12}}\left(3c^{\frac{1}{4}}+2c^{\frac{3}{4}}\right)$;

9) $\left(a^{\frac{1}{8}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{8}}+1\right)$;

10) $\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$.

598.° Подайте даний вираз у вигляді різниці квадратів і розкладіть його на множники (змінні набувають тільки невід'ємних значень):

1) $a-b$;

2) a^3-b^3;

3) $m^{\frac{2}{3}}-n^{\frac{2}{5}}$;

4) $x^{\frac{1}{2}}-3$;

5) $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{7}}$;

6) $4x^{0,4}-9y^{0,7}$.

599.° Розкладіть на множники, використовуючи формулу різниці квадратів (змінні набувають тільки невід'ємних значень):

1) a^5-b^5;

2) $m^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}$;

3) $x^{\frac{1}{8}}-y^{\frac{1}{6}}$;

4) $x^{\frac{1}{4}}-2$;

5) $5-c$;

6) $16x^{0,3}-25y^{\frac{2}{9}}$.

600.° **Подайте даний вираз у вигляді суми кубів і розкладіть його на множники (змінні набувають тільки невід'ємних значень):**

1) $a+b$; 3) $a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}$; 5) $a^{1,2}+2$;

2) $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}$; 4) $a^{\frac{3}{2}}+27$; 6) $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$.

601.° **Розкладіть на множники, використовуючи формулу різниці кубів (змінні набувають тільки невід'ємних значень):**

1) $a-b$; 2) $a^{1,5}-b^{1,5}$; 3) $m^{0,6}-8n^{1,8}$; 4) $x^{\frac{6}{7}}-6$.

602.° **Винесіть за дужки спільний множник:**

1) $a+3a^{\frac{1}{2}}$; 3) $ab^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b$; 5) $m^{\frac{3}{5}}-m^{\frac{1}{5}}$; 7) $2-2^{\frac{1}{7}}$;

2) $b^{\frac{1}{2}}-4b^{\frac{1}{4}}$; 4) $c^{\frac{3}{4}}-c^{\frac{1}{2}}$; 6) $6^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{4}}$; 8) $x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{1}{3}}$.

603.° **Винесіть за дужки спільний множник:**

1) $x-5x^{\frac{2}{3}}$; 4) $3b-b^{0,5}c^{0,5}$; 7) $8^{\frac{1}{12}}-4^{\frac{1}{12}}$;

2) $a^{\frac{1}{2}}+6a^{\frac{1}{3}}$; 5) $ab^{\frac{2}{5}}-a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{10}}$; 8) $10+10^{\frac{5}{8}}$.

3) $p^{\frac{4}{9}}-p^{\frac{7}{9}}$; 6) $m^{\frac{3}{2}}n^{\frac{1}{2}}+mn+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{3}{2}}$;

604.• **Скоротіть дріб:**

1) $\dfrac{a-5a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-5}$; 5) $\dfrac{a-b}{ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b}$; 9) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}$;

2) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}$; 6) $\dfrac{a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$; 10) $\dfrac{x-6x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{7}{6}}-6x^{\frac{1}{3}}}$;

3) $\dfrac{b^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}+c^{\frac{1}{4}}}$; 7) $\dfrac{4c^{\frac{2}{3}}-12c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}+9d^{\frac{2}{3}}}{2c^{\frac{1}{3}}-3d^{\frac{1}{3}}}$; 11) $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}+7a^{\frac{1}{2}}}{a-49a^{\frac{1}{2}}}$;

4) $\dfrac{a-4b}{a^{0,5}+2b^{0,5}}$; 8) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 12) $\dfrac{30^{\frac{1}{5}}-6^{\frac{1}{5}}}{10^{\frac{1}{5}}-2^{\frac{1}{5}}}$.

605.• **Скоротіть дріб:**

1) $\dfrac{a+2a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+2}$; 3) $\dfrac{a-b^2}{a-a^{\frac{1}{2}}b}$; 5) $\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a-b}$;

2) $\dfrac{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{1}{4}}-m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{5}{4}}}{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{5}{4}}}$; 4) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$; 6) $\dfrac{x^{3,5}y^{2,5}-x^{2,5}y^{3,5}}{x+2x^{0,5}y^{0,5}+y}$;

7) $\dfrac{a-125}{a^{\frac{2}{3}}-25}$; 8) $\dfrac{m^{\frac{7}{6}}-36m^{\frac{5}{6}}}{m^{\frac{1}{2}}-6m^{\frac{1}{3}}}$; 9) $\dfrac{24^{\frac{1}{4}}-8^{\frac{1}{4}}}{6^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}}$.

606.° **Знайдіть значення виразу:**

1) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\dfrac{1}{2^{-1,5}}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-\left(2\sqrt{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)$;

2) $\left(\dfrac{5^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{6}}+3^{\frac{1}{6}}}\right)^6+\left(\dfrac{3^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{4}}}\right)^6$.

607.° **Спростіть вираз:**

1) $\dfrac{a-b}{a^{0,5}-b^{0,5}}-\dfrac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a-b}$;

2) $\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}+\dfrac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}-b^{0,5}}$;

3) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}-1}{b^{\frac{1}{10}}-1}+\left(1-b^{\frac{1}{30}}\right)\left(1+b^{\frac{1}{30}}+b^{\frac{1}{15}}\right)$;

4) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{5}{6}}-a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{7}{6}}}\cdot\dfrac{a-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}}$;

5) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}$.

608.° **Спростіть вираз:**

1) $\dfrac{m-n}{m^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}}$;

2) $\left(1-a^{\frac{1}{36}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{36}}+a^{\frac{1}{18}}\right)+\dfrac{4-a^{\frac{1}{6}}}{2-a^{\frac{1}{12}}}$;

3) $\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right):\left(\dfrac{b^{\frac{5}{4}}}{a}-\dfrac{b}{a^{\frac{3}{4}}}\right)$;

4) $\dfrac{m^{\frac{5}{2}}-m^{\frac{3}{2}}}{m^3-m^{\frac{5}{2}}}-\dfrac{m^{\frac{1}{2}}+m}{m^2+m^{\frac{3}{2}}}$.

609.°° **Доведіть тотожність:**

1) $\left(\dfrac{m^2+n^2}{m^{\frac{3}{2}}+mn^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{m}{n}=n^{\frac{1}{2}}-m^{\frac{1}{2}}$;

2) $\left(\dfrac{a^{0,5}+2}{a+2a^{0,5}+1}-\dfrac{a^{0,5}-2}{a-1}\right):\dfrac{a^{0,5}}{a^{0,5}+1}=\dfrac{2}{a-1}$;

3) $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}{a^{-1}-b^{-1}}-\dfrac{1}{a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}}\right):\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$;

4) $\dfrac{(a-b)^2}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{a^2-b^2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}=2a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}}$.

610.** Спростіть вираз:**

1) $\left(\frac{x^{\frac12}-y^{\frac12}}{xy^{\frac12}+x^{\frac12}y}+\frac{x^{\frac12}+y^{\frac12}}{xy^{\frac12}-x^{\frac12}y}\right):\frac{2x+2y}{\sqrt{xy}}$;

2) $\left(\frac{x^{\frac16}+3y^{\frac16}}{x^{\frac13}-2x^{\frac16}y^{\frac16}+y^{\frac13}}+\frac{x^{\frac16}-3y^{\frac16}}{x^{\frac13}-y^{\frac13}}\right):\frac{x^{\frac13}+3y^{\frac13}}{x^{\frac16}-y^{\frac16}}$.

611.** Спростіть вираз:**

1) $\left(\frac{\left(z^{\frac2p}+z^{\frac2q}\right)^2-4z^{\frac2p+\frac2q}}{\left(z^{\frac1p}-z^{\frac1q}\right)^2+4z^{\frac1p+\frac1q}}\right)^{\frac12}$;

2) $\frac{a^{\frac73}-2a^{\frac53}b^{\frac23}+ab^{\frac43}}{a^{\frac53}-a^{\frac43}b^{\frac13}-ab^{\frac23}+a^{\frac23}b}:a^{\frac13}$;

3) $\frac{\left(x^{\frac23}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{\frac23}\right)}{\left(\sqrt[3]{x^4}-8y\sqrt[3]{x}\right):\sqrt[3]{xy}}\cdot\left(2-\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\right)$.

612.** Спростіть вираз:**

1) $\frac{x-y}{x^{\frac34}+x^{\frac12}y^{\frac14}}\cdot\frac{x^{\frac12}y^{\frac14}+x^{\frac14}y^{\frac12}}{x^{\frac12}+y^{\frac12}}\cdot\frac{x^{\frac14}y^{-\frac14}}{x^{\frac12}-2x^{\frac14}y^{\frac14}+y^{\frac12}}$;

2) $\frac{m^{\frac43}-27m^{\frac13}n}{m^{\frac23}+3\sqrt[3]{mn}+9n^{\frac23}}:\left(1-3\sqrt[3]{\frac{n}{m}}\right)-\sqrt[3]{m^2}$;

3) $\left(\frac{x-9}{x+3x^{\frac12}+9}:\frac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27}\right)^{0,5}-x^{0,5}$.

29. Ірраціональні рівняння

Розглянемо функцію $y = x^3$. Вона є зростаючою, а отже, оборотною. Тому функція $y = x^3$ кожного свого значення набуває тільки один раз. Іншими словами: з рівності $x_1^3 = x_2^3$ випливає, що $x_1 = x_2$. А оскільки з рівності $x_1 = x_2$ випливає, що $x_1^3 = x_2^3$, то можна стверджувати, що *коли обидві частини рівняння піднести до куба, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.*

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{2x+1}=-3$.

Розв'язання. Підносячи обидві частини рівняння до куба, отримаємо рівняння, рівносильне даному. Маємо:

$$\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^3=(-3)^3;$$
$$2x+1=-27;$$
$$x=-14.$$

Відповідь: -14.

Оскільки функція $y = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, є оборотною, то міркування, використані при розв'язуванні прикладу 1, можна узагальнити у вигляді такої теореми.

Теорема 29.1. ***Якщо обидві частини рівняння піднести до непарного степеня, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Доведення. Покажемо, що рівняння

$$f(x) = g(x) \tag{1}$$

і

$$(f(x))^{2k-1} = (g(x))^{2k-1},\ k \in \mathbb{N} \tag{2}$$

є рівносильними.

Нехай число α — корінь рівняння (1). Тоді маємо правильну числову рівність $f(\alpha) = g(\alpha)$. Звідси можна записати:

$$(f(\alpha))^{2k-1} = (g(\alpha))^{2k-1}.$$

Це означає, що число α є коренем рівняння (2).

Нехай число β — корінь рівняння (2). Тоді отримуємо, що $(f(\beta))^{2k-1} = (g(\beta))^{2k-1}$. Оскільки функція $y = x^{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, є оборотною, то $f(\beta) = g(\beta)$. Отже, число β — корінь рівняння (1).

Ми показали, що кожний корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2) і, навпаки, кожний корінь рівняння (2) є коренем рівняння (1). Це означає, що рівняння (1) і (2) рівносильні. ▲

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt[7]{x^2-2}=\sqrt[7]{x}$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини даного рівняння до сьомого степеня. Отримаємо рівносильне рівняння:

$$\left(\sqrt[7]{x^2-2}\right)^7=\left(\sqrt[7]{x}\right)^7;$$
$$x^2-2=x;$$
$$x^2-x-2=0;$$
$$x_1=-1,\ x_2=2.$$

Відповідь: -1; 2.

Рівняння, які ми розглянули в прикладах 1 і 2, містять змінну під знаком кореня. Такі рівняння називають **ірраціональними.**

Ось ще приклади ірраціональних рівнянь:

$$\sqrt{x-3}=2;\ \ \sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}+1=0;\ \ \sqrt{3-x}=\sqrt[3]{2+x}.$$

При розв'язуванні прикладів 1 і 2 нам довелося спрощувати вирази виду $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n$, де n — непарне натуральне число. Розглянемо випадок, коли n — парне натуральне число.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{3x+4}\right)^2=\left(\sqrt{x-2}\right)^2$. (1)

Розв'язання. Природно замінити це рівняння на таке:

$$3x+4=x-2. \qquad (2)$$

Звідси $x=-3$.

Але перевірка показує, що число -3 не є коренем початкового рівняння. Отже, рівняння (1) не має коренів. Причина появи стороннього кореня полягає в тому, що застосування формули $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ призводить до розширення області визначення рівняння. Тому рівняння (2) є наслідком рівняння (1).

Ще однією причиною появи сторонніх коренів при розв'язуванні ірраціональних рівнянь є необоротність функції $y=x^{2k}$, $k\in\mathbb{N}$. Це означає, що з рівності $x_1^{2k}=x_2^{2k}$ не обов'язково випливає, що $x_1=x_2$. Наприклад, $(-2)^4=2^4$, але $-2\neq 2$. Водночас із рівності $x_1=x_2$ випливає рівність $x_1^{2k}=x_2^{2k}$.

Наведені міркування підказують, що справедливою є така теорема.

Теорема 29.2. ***При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня отримане рівняння є наслідком даного.***

Доведення. Покажемо, що рівняння

$$(f(x))^{2k}=(g(x))^{2k},\ k\in\mathbb{N}, \qquad (3)$$

є наслідком рівняння

$$f(x)=g(x). \qquad (4)$$

Нехай число α — корінь рівняння (4), тобто $f(\alpha)=g(\alpha)$. Тоді $(f(\alpha))^{2k}=(g(\alpha))^{2k}$. Отже, число α є коренем рівняння (3).

Ми показали, що кожний корінь рівняння (4) є коренем рівняння (3). Це означає, що рівняння (3) є наслідком рівняння (4). ▲

Зауважимо, що коли число β — корінь рівняння (3), то з рівності $(f(\beta))^{2k}=(g(\beta))^{2k}$ не обов'язково випливає, що $f(\beta)=g(\beta)$. Тому в результаті переходу від рівняння $f(x)=g(x)$ до його наслідку $(f(x))^{2k}=(g(x))^{2k}$ можуть з'явитися сторонні корені, які можна виявити за допомогою перевірки.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4+3x}=x$.

Розв'язання. Підносячи обидві частини рівняння до квадрата, отримаємо рівняння, яке є наслідком даного:

$$4 + 3x = x^2;$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0;\ x_1 = -1,\ x_2 = 4.$$

Перевірка показує, що число -1 є стороннім коренем, а число 4 задовольняє дане рівняння.

Відповідь: 4.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини даного рівняння до квадрата:

$$2x-3+2\sqrt{2x-3}\,\sqrt{4x+1}+4x+1=16.$$

Звідси $\sqrt{2x-3}\,\sqrt{4x+1}=9-3x$.

Переходячи до рівняння-наслідку, отримуємо:

$$8x^2 - 10x - 3 = 81 - 54x + 9x^2;$$

$$x^2 - 44x + 84 = 0;\ x_1 = 42,\ x_2 = 2.$$

Перевірка показує, що число 42 є стороннім коренем, а число 2 задовольняє дане рівняння.

Відповідь: 2.

Вправи

613. Поясніть, чому не має коренів рівняння:

1) $\sqrt{x-2}+1=0$;
2) $\sqrt[6]{x}+\sqrt[8]{x-1}=-2$;
3) $\sqrt{x-4}+\sqrt{1-x}=5$;
4) $\sqrt[4]{x-6}+\sqrt{6-x}=1$;
5) $\sqrt{26+\sqrt{x+1}}=5$.

614.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{2x-2}=2$;
2) $\sqrt[3]{x-4}=2$;
3) $\sqrt[5]{x-6}=-3$;
4) $\sqrt[3]{x^3-2x+3}=x$;
5) $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}}=3$;
6) $\sqrt[3]{x^2+15}=2\sqrt[3]{x+1}$.

615.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-3}=4$;
2) $\sqrt{3x^2-x-15}=3$;
3) $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}=3$.

616.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[7]{2x-1}=\sqrt[7]{3-x}$;
2) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{1-2x}$;
3) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-3}$;
4) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x^2+4x-16}$.

617.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{x+3}=\sqrt[4]{2x-3}$;
2) $\sqrt{4x-5}=\sqrt{1-x}$;
3) $\sqrt[5]{x^2-25}=\sqrt[5]{2x+10}$;
4) $\sqrt{x^2-36}=\sqrt{2x-1}$.

618.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2-x}=x$;
2) $\sqrt{x+1}=x-1$;
3) $\sqrt{3x-2}=x$;
4) $\sqrt{2x^2-3x-10}=x$;
5) $2\sqrt{x+5}=x+2$;
6) $\sqrt{15-3x}-1=x$;
7) $x-\sqrt{2x^2+x-21}=3$;
8) $x+2+\sqrt{8-3x-x^2}=0$.

619.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{10-3x}=-x$;
2) $x=\sqrt{x+5}+1$;
3) $\sqrt{2x^2+5x+4}=2x+2$;
4) $3\sqrt{x+10}-11=2x$;
5) $x-\sqrt{3x^2-11x-20}=5$.

620.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{(2x+3)(x-4)}=x-4$;
2) $\sqrt{(x-2)(2x-5)}+2=x$;
3) $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12$;
4) $(x+1)\sqrt{x^2-5x+5}=x+1$.

621.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{(3x-1)(4x+3)}=3x-1$;
2) $(x-1)\sqrt{x^2-3x-3}=5x-5$.

622.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$;
2) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1$.

623.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$;
2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=1$;
3) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$;
4) $2\sqrt{2-x}-\sqrt{7-x}=1$.

624.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{3x-5}=2$;
2) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}=2$.

625.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3$;
2) $\sqrt{x-7}+\sqrt{x-1}=4$;
3) $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=1$;
4) $\sqrt{13-4x}+\sqrt{x+3}=5$.

626.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}=3$;
2) $\sqrt{5x+1}+\sqrt{7-x}=6$;
3) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+5}=3$.

627.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$;
2) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-1}$;
3) $2\sqrt{3x-1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x-9}$.

628.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+7}=\sqrt{8-x}$;
2) $\sqrt{6x-11}-\sqrt{x-2}=\sqrt{x+3}$.

629.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}=6;$

2) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1;$

3) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}=4.$

630.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=6;$

2) $\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}-\sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}}=2.$

30. Метод рівносильних перетворень при розв'язуванні ірраціональних рівнянь

Ви знаєте, що сторонні корені рівняння можна виявити в результаті перевірки.

Коли йдеться про перевірку як про етап розв'язування рівняння, неможливо уникнути проблеми її технічної реалізації. Наприклад, число $\frac{-2+6\sqrt{11}}{7}$ є коренем рівняння $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}$. Щоб у цьому переконатися, потрібно провести значну обчислювальну роботу.

Для подібних ситуацій можливий інший шлях розв'язування — метод рівносильних перетворень.

Теорема 30.1 ***Рівняння виду*** $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ ***рівносильне системі***

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\geqslant 0. \end{cases}$$

Доведення. Нехай число α є коренем даного рівняння. Тоді $\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{g(\alpha)}$. Звідси $f(\alpha)\geqslant 0$. Обидві частини числової рівності піднесемо до квадрата. Отримаємо правильну числову рівність $f(\alpha)=g(\alpha)$. Таким чином, число α є розв'язком системи.

Нехай число β є розв'язком системи, тобто

$$\begin{cases} f(\beta)=g(\beta), \\ f(\beta)\geqslant 0. \end{cases}$$

Звідси отримуємо, що $g(\beta)\geqslant 0$. З того, що невід'ємні числа $f(\beta)$ і $g(\beta)$ рівні, випливає, що $\sqrt{f(\beta)}=\sqrt{g(\beta)}$. Отже, число β є коренем даного рівняння.

Таким чином, кожний розв'язок даного рівняння є розв'язком системи, і навпаки, кожний розв'язок системи є розв'язком даного рівняння. Отже, множини розв'язків рівняння і системи рівні. ▲

Зауваження. Зрозуміло, що рівняння $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ також рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Вибір відповідної системи, як правило, пов'язаний з тим, яку з нерівностей, $f(x) \geq 0$ чи $g(x) \geq 0$, розв'язати легше.

ПРИКЛАД 1 **Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{x - 1}$.**

Розв'язання. **Дане рівняння рівносильне системі**

$\begin{cases} x^2 - 3x = x - 1, \\ x \geq 1. \end{cases}$ **Звідси** $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{3}, \\ x = 2 - \sqrt{3}, \end{array}\right. \\ x \geq 1; \end{array}\right.$ $x = 2 + \sqrt{3}$.

Відповідь: $2 + \sqrt{3}$.

Теорема 30.2. ***Рівняння виду $\sqrt{f(x)} = g(x)$ рівносильне системі***

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Скориставшись ідеєю доведення теореми 30.1, доведіть цю теорему самостійно.

ПРИКЛАД 2 **Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x + 7} = x - 3$.**

Розв'язання. **Дане рівняння рівносильне системі**

$$\begin{cases} x + 7 = (x - 3)^2, \\ x - 3 \geq 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x^2 - 7x + 2 = 0, \\ x \geq 3; \end{cases}$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7 + \sqrt{41}}{2}, \\ x = \dfrac{7 - \sqrt{41}}{2}, \end{array}\right. \\ x \geq 3; \end{array}\right.$ $x = \dfrac{7 + \sqrt{41}}{2}$.

Відповідь: $\dfrac{7 + \sqrt{41}}{2}$.

Теореми 30.1 і 30.2 можна узагальнити, керуючись таким очевидним твердженням: якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то з рівності $a^{2k} = b^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, випливає, що $a = b$.

Теорема 30.3. ***Якщо для будь-якого $x \in M$ виконуються нерівності $f(x) \geqslant 0$ і $g(x) \geqslant 0$, то рівняння $f(x) = g(x)$ і $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, рівносильні на множині M.***

Скориставшись ідеєю доведення теорем 30.1 і 30.2, доведіть цю теорему самостійно.

ПРИКЛАД [illegible] **Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$.**

Розв'язання. **Областю визначення цього рівняння є множина $M=\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$. На цій множині обидві частини даного рівняння набувають невід'ємних значень. Тому дане рівняння на множині M рівносильне рівнянню**

$$\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}\right)^2=4^2.$$

Звідси $2x-3+2\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1}+4x+1=16$; $\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1}=9-3x$.

Ліва частина останнього рівняння на множині $M=\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$ набуває невід'ємних значень. Тому права частина, тобто $9-3x$, має також бути невід'ємною. Звідси $9-3x \geqslant 0$; $x \leqslant 3$. Тоді на множині $M_1=\left[\frac{3}{2};3\right]$ обидві частини рівняння $\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1}=9-3x$ набувають невід'ємних значень. Отже, за теоремою 30.3 це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}(2x-3)(4x+1)=(9-3x)^2,\\ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-44x+84=0,\\ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3;\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=42,\end{array}\right.\\ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3;\end{cases}\quad x=2.$$

Рівняння $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$ можна розв'язувати й інакше. Розглянемо функції $f(x)=\sqrt{2x-3}$ і $g(x)=\sqrt{4x+1}$. Легко переконатися (зробіть це самостійно), що ці функції є зростаючими. Тоді за теоремою 6.2 функція $y=\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}$ є зростаючою на множині $M=\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$. За теоремою 6.3 дане рівняння має не більше ніж один корінь. Нескладно помітити, що $x=2$ є коренем розглядуваного рівняння.

***Відповідь*: 2.**

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}$.

Розв'язання. Областю визначення даного рівняння є множина $M=\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$. Обидві частини даного рівняння на цій множині набувають невід'ємних значень. Тому дане рівняння на множині M рівносильне рівнянню $\left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}\right)^2=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2$. Звідси $2\sqrt{2x-5}\sqrt{x+2}=4-x$.

Скориставшись теоремою 30.3, отримуємо:

$$\begin{cases} 4(2x-5)(x+2)=(4-x)^2, \\ \frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 4. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} 7x^2+4x-56=0, \\ \frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 4; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{-2-6\sqrt{11}}{7}, \\ x=\frac{-2+6\sqrt{11}}{7}, \end{array}\right. \\ \frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 4. \end{cases}$

Відповідь: $\frac{-2+6\sqrt{11}}{7}$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}.$$

Розв'язання. Вигідно розкласти квадратні тричлени, які стоять під радикалами, на множники:

$$\sqrt{(x+1)(4x+5)}-\sqrt{(x+1)(2x-1)}=\sqrt{(x-1)(x+1)}.$$

Тепер важливо не зробити поширену помилку, а саме: застосувати теорему про корінь з добутку в такому вигляді: $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$. Насправді записана формула справедлива лише для $a\geqslant 0$ і $b\geqslant 0$, а якщо $a\leqslant 0$ і $b\leqslant 0$, то $\sqrt{ab}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$.

Оскільки областю визначення даного рівняння є множина $\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right]\cup[1;+\infty)\cup\{-1\}$ (рис. 145), то дане рівняння рівносильне сукупності двох систем і одного рівняння.

Рис. 145

1) $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ \sqrt{x+1}\,\sqrt{4x+5} - \sqrt{x+1}\,\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+5}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 2\sqrt{2x-1}\,\sqrt{x-1} = x+7; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 4(2x-1)(x-1) = x^2 + 14x + 49; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 7x^2 - 26x - 45 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ \left[\begin{aligned} & x = 5, \\ & x = -\frac{9}{7}; \end{aligned} \right. \end{cases}$ $x = 5.$

2) $\begin{cases} x \leqslant -\frac{5}{4}, \\ \sqrt{-x-1}\,\sqrt{-4x-5} - \sqrt{-x-1}\,\sqrt{-2x+1} = \sqrt{-x+1}\,\sqrt{-x-1}; \end{cases}$

$\begin{cases} x \leqslant -\frac{5}{4}, \\ \sqrt{-2x+1} + \sqrt{-x+1} = \sqrt{-4x-5}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant -\frac{5}{4}, \\ 2\sqrt{-2x+1}\,\sqrt{-x+1} = -x-7; \end{cases}$

$\begin{cases} x \leqslant -7, \\ 4(2x-1)(x-1) = x^2 + 14x + 49; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant -7, \\ 7x^2 - 26x - 45 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant -7, \\ \left[\begin{aligned} & x = 5, \\ & x = -\frac{9}{7}. \end{aligned} \right. \end{cases}$

Зрозуміло, що ця система розв'язків не має.

3) $x + 1 = 0$; $x = -1$.

Відповідь: -1; 5.

Вправи

631.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+4} = 6$;

2) $\sqrt{2x+3}\,\sqrt{x-2} = 3$;

3) $\sqrt{x+1}\,\sqrt{x+2} = 4$;

4) $\sqrt{x}\,\sqrt{1-x} = x$;

5) $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-7}} = \sqrt{x-4}$;

6) $\sqrt{x-9} + \sqrt{x} = \dfrac{36}{\sqrt{x-9}}$;

7) $\sqrt{7-x} + \dfrac{12}{\sqrt{7-x}} = 2\sqrt{5x+37}$.

632.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+2}\,\sqrt{x+8}=4$;

2) $x-1=\sqrt{2x-5}\,\sqrt{x+1}$;

3) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{3x+1}$;

4) $\dfrac{12}{\sqrt{x+10}}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{x+10}$.

633.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$;

2) $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$;

3) $\sqrt{x^2+8}=2x+1$;

4) $\sqrt{2x^2-7x+5}=1-x$;

5) $\sqrt{x}=x-1$;

6) $\sqrt{x^2-1}=3-2x$.

634.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2-4x+13}=\dfrac{1}{2}x+2$;

2) $\sqrt{2x^2+8x+7}-2=x$;

3) $\sqrt{x+2}=1-x$.

635.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+1}=2$;

2) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$;

3) $\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}=1$;

4) $\sqrt{2x+5}=8-\sqrt{x-1}$;

5) $\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}=4$;

6) $\sqrt{3x-1}+\sqrt{x+3}=2$;

7) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.

636.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$;

2) $\sqrt{x+11}-\sqrt{2x+1}=2$;

3) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{16-3x}=5$.

637.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$;

2) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$.

638.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}=0$;

2) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-1}$.

639.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2+2x-8}=\sqrt{x^2-6x+8}$;

2) $\sqrt{2x^2+5x+2}-\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{3x+6}$.

640.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-6x+8}=\sqrt{x^2-11x+18}$;

2) $\sqrt{x^2-3x-10}+\sqrt{x^2+3x+2}=\sqrt{x^2+8x+12}$.

31. Різні прийоми розв'язування ірраціональних рівнянь та їх систем

У попередніх пунктах ви ознайомилися з методами розв'язування ірраціональних рівнянь, заснованими на піднесенні обох частин рівняння до одного й того самого степеня.

Розширимо арсенал прийомів розв'язування ірраціональних рівнянь.

Насамперед звернемося до методу заміни змінної.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x^2+3x-6}=t$. Тоді $x^2+3x-18=t^2-12$, і дане рівняння набуває вигляду $t^2-12+4t=0$. Звідси

$$\left[\begin{array}{l} t=-6, \\ t=2. \end{array}\right.$$

Оскільки $t \geqslant 0$, то підходить лише $t=2$. Отже, дане рівняння рівносильне такому:

$\sqrt{x^2+3x-6}=2$. Звідси $x^2+3x-6=4$; $x=-5$ або $x=2$.

Відповідь: -5; 2.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2x+2\sqrt{x^2-16}-12$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=t$. Тоді, підносячи до квадрата обидві частини останньої рівності, отримаємо

$$2x+2\sqrt{x^2-16}=t^2.$$

Дане рівняння набуває вигляду $t=t^2-12$. Звідси $t=4$ або $t=-3$.

Очевидно, що рівняння $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=-3$ не має розв'язків. Отже, початкове рівняння рівносильне такому: $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=4$. Далі,

$$\begin{cases} x \geqslant 4, \\ 2x+2\sqrt{x^2-16}=16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 4, \\ \sqrt{x^2-16}=8-x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \leqslant x \leqslant 8, \\ x^2-16=64-16x+x^2; \end{cases} \qquad x=5.$$

Відповідь: 5.

ПРИКЛАД [illegible] Розв'яжіть рівняння $2(x+1)-x\sqrt{x+1}-x^2=0.$

Розв'язання. Оскільки число 0 не є коренем даного рівняння, то рівняння $\frac{2(x+1)}{x^2}-\frac{\sqrt{x+1}}{x}-1=0$ рівносильне даному.

Нехай $\frac{\sqrt{x+1}}{x}=t$, тоді $2t^2-t-1=0$. Звідси $t=1$ або $t=-\frac{1}{2}$.

Маємо: $\left[\begin{array}{l}\frac{\sqrt{x+1}}{x}=1,\\ \frac{\sqrt{x+1}}{x}=-\frac{1}{2};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ x+1=x^2,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ 4x+4=x^2;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\\ x=2-2\sqrt{2}.\end{array}\right.$

Відповідь: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $2-2\sqrt{2}$.

Метод заміни змінних є ефективним і для розв'язування систем ірраціональних рівнянь.

ПРИКЛАД [illegible] Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{xy+22}=5,\\ \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{xy+22}=3.\end{cases}$

Розв'язання. Нехай $\sqrt[4]{x+y}=a$, $\sqrt[4]{xy+22}=b$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$. Тоді дана система набуває вигляду $\begin{cases}a^2+b^2=5,\\ a+b=3.\end{cases}$ Далі маємо:

$$\begin{cases}(a+b)^2-2ab=5,\\ a+b=3;\end{cases}\qquad \begin{cases}ab=2,\\ a+b=3.\end{cases}$$

Звідси $\begin{cases}a=1,\\ b=2\end{cases}$ або $\begin{cases}a=2,\\ b=1.\end{cases}$

Отже, дана система рівносильна сукупності двох систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}=1,\\ \sqrt[4]{xy+22}=2,\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[4]{x+y}=2,\\ \sqrt[4]{xy+22}=1,\end{cases}\end{array}\right. \text{звідси} \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=1,\\ xy=-6,\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=16,\\ xy=-21.\end{cases}\end{array}\right.$$

Розв'язавши останні дві системи, отримуємо відповідь.

Відповідь: $(3;\,-2)$, $(-2;\,3)$, $\left(8+\sqrt{85};\,8-\sqrt{85}\right)$, $\left(8-\sqrt{85};\,8+\sqrt{85}\right)$.

Вправи

641. Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}-3=0$;
2) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-6=0$;
3) $2x-7\sqrt{x}-15=0$;
4) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}=4$;
5) $2\sqrt{x+1}-5=\frac{3}{\sqrt{x+1}}$;
6) $x^2-x+9+\sqrt{x^2-x+9}=12$;
7) $\sqrt[3]{x^2-4x+4}-2\sqrt[3]{x-2}-3=0$;
8) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}+\frac{3}{\sqrt[4]{x}+1}=2$;
9) $\sqrt{\frac{x+5}{x-1}}+7\sqrt{\frac{x-1}{x+5}}=8$;
10) $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.

642.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x-\sqrt{x}-12=0$;
2) $\sqrt[3]{x^2}+8=9\sqrt[3]{x}$;
3) $\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=1$;
4) $\sqrt{x+5}-3\sqrt[4]{x+5}+2=0$;
5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}+3}=1$;
6) $\sqrt[6]{9-6x+x^2}+2\sqrt[6]{3-x}-8=0$;
7) $x^2-x+\sqrt{x^2-x+4}=2$;
8) $\sqrt{\frac{3x+2}{2x-3}}+\sqrt{\frac{2x-3}{3x+2}}=2{,}5$.

643.• Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x^2-5x+16-3\sqrt{x^2-5x+20}=0$;
2) $x^2+4-5\sqrt{x^2-2}=0$;
3) $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$;
4) $\sqrt{3x^2-9x-26}=12+3x-x^2$;
5) $2x^2+6x-3\sqrt{x^2+3x-3}=5$;
6) $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}+\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=72$.

644.• Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x^2-4x-3\sqrt{x^2-4x+20}+10=0$;
2) $2\sqrt{x^2-3x+11}=4+3x-x^2$;
3) $\sqrt{2x^2-6x+40}=x^2-3x+8$;
4) $5x^2+10x+\sqrt{x^2+2x-15}=123$.

645. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ x+y+4\sqrt{xy}=37; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}=1, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ xy=8; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4, \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}}=2, \\ x^2-8y^2=18-18y; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \sqrt{4-x+y}+\sqrt{9-2x+y}=7, \\ 2y-3x=12. \end{cases}$

646. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2, \\ xy=27; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=2{,}5, \\ x+y=5. \end{cases}$

647. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x$.

648. Розв'яжіть рівняння $x+\sqrt{(x+6)(x-2)}=2+\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}$.

649. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$.

650. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+5}}+\sqrt{2x+5}=2x$.

651. Розв'яжіть рівняння $4x^2+12x\sqrt{1+x}=27(1+x)$.

652. Розв'яжіть рівняння $6x^2-5x\sqrt{x+3}+x+3=0$.

653.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{(x+3)^2}+\sqrt[3]{(6-x)^2}-\sqrt[3]{(x+3)(6-x)}=3$.

654.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{(x+4)^2}+\sqrt[3]{(x-5)^2}+\sqrt[3]{(x+4)(x-5)}=3$.

32. Ірраціональні нерівності

Розглянемо теореми, за допомогою яких розв'язують основні типи ірраціональних нерівностей. Доведення цих теорем аналогічні **доведенню** теореми 30.1.

Теорема 32.1. ***Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі***

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2-3x+1} \geqslant \sqrt{3x-4}$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x^2-3x+1 \geqslant 3x-4, \\ 3x-4 \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-6x+5 \geqslant 0, \\ x \geqslant \frac{4}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 5, \\ x \leqslant 1, \end{array}\right. \\ x \geqslant \frac{4}{3}; \end{cases} \qquad x \geqslant 5.$$

Відповідь: $[5; +\infty)$.

Теорема 32.2. ***Нерівність виду $\sqrt{f(x)} < g(x)$ рівносильна системі***

$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x^2-3x-5} < x-1$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 2x^2-3x-5 < (x-1)^2, \\ x-1 > 0, \\ 2x^2-3x-5 \geqslant 0. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} -2 < x < 3, \\ x > 1, \\ x \leqslant -1 \text{ або } x \geqslant 2,5. \end{cases}$$

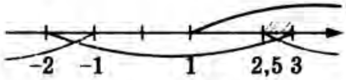


Рис. 146

Розв'язування цієї системи проілюстровано на рисунку 146.

Отримуємо $2,5 \leqslant x < 3$.

Відповідь: $[2,5; 3)$.

Теорема 32.3. ***Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > g(x)$ рівносильна сукупності двох систем***

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}\end{array}\right.$$

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2+7x+12} > 6-x$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем.

1) $\begin{cases} 6-x<0, \\ x^2+7x+12 \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>6, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -4, \\ x \geqslant -3; \end{array}\right. \end{cases}$ $x > 6$.

2) $\begin{cases} 6-x \geqslant 0, \\ x^2+7x+12 > (6-x)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 6, \\ x > \dfrac{24}{19}; \end{cases}$ $\dfrac{24}{19} < x \leqslant 6$.

Відповідь: $\left(\dfrac{24}{19}; +\infty\right)$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leqslant x^2-9$.

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність у такому вигляді:

$$(x-3)\left(\sqrt{x^2+4}-x-3\right) \leqslant 0.$$

Ця нерівність рівносильна сукупності двох систем.

1) $\begin{cases} x-3 \geqslant 0, \\ \sqrt{x^2+4} \leqslant x+3; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x^2+4 \leqslant x^2+6x+9; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \geqslant -\dfrac{5}{6}; \end{cases}$ $x \geqslant 3$.

2) $\begin{cases} x-3 \leqslant 0, \\ \sqrt{x^2+4} \geqslant x+3. \end{cases}$ Друга нерівність системи рівносильна сукупності $\left[\begin{array}{l} x+3<0, \\ \begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ x^2+4 \geqslant (x+3)^2; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x<-3, \\ -3 \leqslant x \leqslant -\dfrac{5}{6}; \end{array}\right.$ $x \leqslant -\dfrac{5}{6}$. Тоді маємо: $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \leqslant -\dfrac{5}{6}; \end{cases}$ $x \leqslant -\dfrac{5}{6}$.

Відповідь: $\left(-\infty; -\dfrac{5}{6}\right] \cup [3; +\infty)$.

Нерівність прикладу 4 можна розв'язати інакше, використовуючи метод інтервалів (див. п. 12). Справді, розв'язавши рівняння $(x-3)\left(\sqrt{x^2+4}-x-3\right)=0$, отримуємо два корені $x=3$, $x=-\frac{5}{6}$. Розв'язування даної нерівності проілюстровано на рисунку 147.

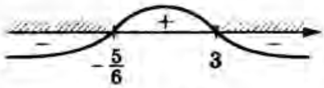


Рис. 147

При розв'язуванні ірраціональних нерівностей можна користуватися більш загальною теоремою.

Теорема 32.4. ***Якщо для будь-якого $x \in M$ виконуються нерівності $f(x) \geqslant 0$ і $g(x) \geqslant 0$, то нерівності $f(x) > g(x)$ і $(f(x))^{2k} > (g(x))^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, рівносильні на множині M.***

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3} \leqslant 2\sqrt{x}$.

Розв'язання. Обидві частини даної нерівності набувають невід'ємних значень на множині $M = [3; +\infty)$, яка є областю визначення цієї нерівності. Тому дана нерівність на множині M рівносильна нерівності

$$\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}\right)^2 \leqslant \left(2\sqrt{x}\right)^2.$$

Звідси $2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3} \leqslant x+2$.

На множині $M = [3; +\infty)$ обидві частини останньої нерівності набувають невід'ємних значень. Тому за теоремою 32.4 отримуємо:

$$\begin{cases} 4(2x+1)(x-3) \leqslant (x+2)^2, \\ x \geqslant 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x^2-24x-16 \leqslant 0, \\ x \geqslant 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{4}{7} \leqslant x \leqslant 4, \\ x \geqslant 3; \end{cases}$$

$$3 \leqslant x \leqslant 4.$$

Відповідь: $[3; 4]$.

Вправи

655.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x-1}>4$; 2) $\sqrt{x-1}<4$; 3) $\sqrt{x-1}>-4$; 4) $\sqrt{x-1}<-4$.

656.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2x-4}\geqslant\sqrt{5-x}$;
2) $\sqrt{x}<\sqrt{x+1}$;
3) $\sqrt{x^2+x}<\sqrt{x^2+1}$;
4) $\sqrt{x^2-3x+1}>\sqrt{2x-3}$;
5) $\sqrt{8-5x}\geqslant\sqrt{x^2-16}$;
6) $\sqrt{x^2-3x+2}<\sqrt{2x^2-3x+1}$.

657.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{3x-2}<\sqrt{x+6}$;
2) $\sqrt{2x^2+6x-3}\geqslant\sqrt{x^2+4x}$;
3) $\sqrt{x^2+3x-10}<\sqrt{x-2}$.

658.• Розв'яжіть нерівність:

1) $x>\sqrt{24-5x}$;
2) $\sqrt{2x+7}\leqslant x+2$;
3) $\sqrt{3x-x^2}<4-x$;
4) $3-x>3\sqrt{1-x^2}$;
5) $\sqrt{x^2+3x+3}<2x+1$;
6) $\sqrt{7x-x^2-6}<2x+3$.

659.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{9x-20}<x$;
2) $\sqrt{x+61}<x+5$;
3) $2\sqrt{4-x^2}\leqslant x+4$;
4) $\sqrt{x^2+4x-5}<x-3$.

660.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2-x}>x$;
2) $\sqrt{x+7}\geqslant x+1$;
3) $\sqrt{x^2-1}>x$;
4) $\sqrt{x^2-2x}\geqslant 4-x$;
5) $\sqrt{x^2+x-2}>x$;
6) $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$.

661.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x+2}>x$;
2) $\sqrt{2x+14}>x+3$;
3) $\sqrt{x^2-5x-24}\geqslant x+2$;
4) $\sqrt{x^2+4x-5}>x-3$.

662.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+10)\sqrt{x-4}\leqslant 0$;
2) $(x+2)\sqrt{(4-x)(5-x)}\geqslant 0$;
3) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\leqslant 0$.

663.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-12)\sqrt{x-3}\leqslant 0$;
2) $(x-3)\sqrt{x^2+x-2}\geqslant 0$;
3) $(x^2-9)\sqrt{16-x^2}\geqslant 0$.

664.** Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{\sqrt{2x-1}}{x-2}<1$;

2) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$;

3) $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}\leqslant\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$.

665.** Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+1)\sqrt{x^2+1}>x^2-1$;

2) $\frac{\sqrt{x+20}}{x}-1<0$;

3) $\frac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7}\leqslant\frac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}$.

666.** Розв'яжіть нерівність:

1) $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3}>1$;

2) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-x^2}<2$;

3) $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$.

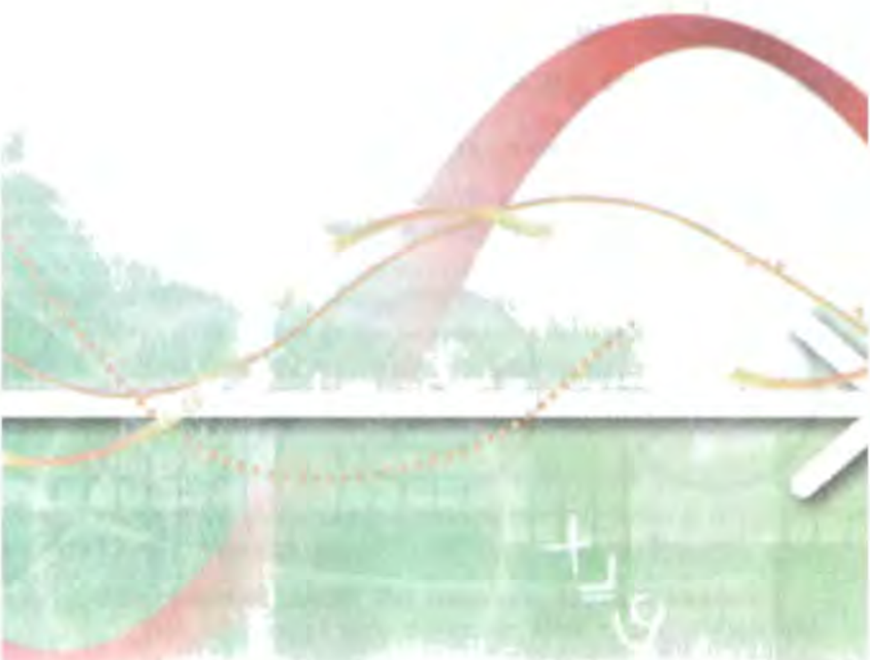
667.** Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x-6}-\sqrt{x+10}\leqslant 1$;

2) $2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}>\sqrt{x+21}$.

§4

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ



31. Радіанне вимірювання кутів

Досі для вимірювання кутів ви використовували градуси або частини градуса — мінути і секунди.

У багатьох випадках зручно користуватися іншою одиницею вимірювання кутів. Її називають **радіаном.**

Означення. **Кутом в один радіан називають центральний кут кола, який спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола.**

На рисунку 148 зображено центральний кут AOB, величина якого дорівнює одному радіану. Пишуть: $\angle AOB = 1$ рад. Також говорять, що радіанна міра дуги AB дорівнює одному радіану. Пишуть: $\cup AB = 1$ рад.

Радіанна міра кута (дуги) не залежить від радіуса кола. Справді, розглянемо два кола зі спільним центром O і радіусами R і r $(R > r)$ (рис. 149). Сектор AOB гомотетичний сектору A_1OB_1 з центром O і коефіцієнтом $\frac{R}{r}$. Тоді, якщо довжина дуги AB дорівнює радіусу R, то довжина дуги A_1B_1 дорівнює радіусу r.

На рисунку 150 зображено коло радіуса R і дугу MN, довжина якої дорівнює $\frac{3}{2}R$. Тоді радіанна міра кута MON (дуги MN) дорівнює $\frac{3}{2}$ рад. Узагалі, якщо центральний кут кола радіуса R спирається на дугу кола довжини αR, то кажуть, що **радіанна міра цього центрального кута дорівнює α рад.**

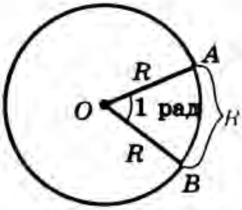


Рис. 148

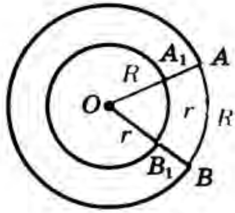


Рис. 149

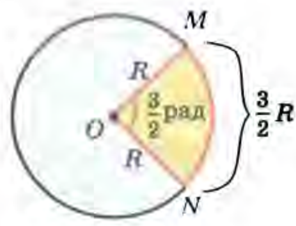


Рис. 150

Довжина півкола дорівнює πR. Отже, радіанна міра півкола дорівнює π рад, а його градусна міра становить $180°$.

Це дозволяє встановити зв'язок між радіанною та градусною мірами, а саме:

$$\pi \text{ рад} = 180°. \qquad (1)$$

Звідси

$$\boxed{1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}}$$

Поділивши 180 на 3,14 (нагадаємо, що $\pi \approx 3{,}14$), можна установити: 1 рад $\approx 57°$.

Рівність (1) дозволяє також записати, що

$$\boxed{1° = \frac{\pi}{180} \text{ рад}} \qquad (2)$$

З цієї формули легко встановити, що, наприклад,

$$15° = 15 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{12} \text{ рад}, \quad 90° = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{2} \text{ рад},$$

$$135° = 135 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{3\pi}{4} \text{ рад}.$$

Зазвичай при записі радіанної міри кута позначення «рад» опускають. Наприклад, пишуть $135° = \frac{3\pi}{4}$.

У таблиці наведено градусну і радіанну міри кутів, які часто зустрічаються:

Градусна міра кута	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
Радіанна міра кута	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Використовуючи радіанну міру кута, можна отримати зручну формулу для обчислення довжини дуги кола. Оскільки центральний кут в 1 рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу R, то кут в α рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює αR. Якщо довжину дуги, яка містить α рад, позначити l, то можна записати

$$\boxed{l = \alpha R}$$

На координатній площині розглянемо коло одиничного радіуса з центром у початку координат. Таке коло називають **одиничним**.

Нехай точка P, починаючи рух від точки $P_0(1;\ 0)$, переміщується по одиничному колу проти годинникової стрілки.

У певний момент часу вона займе положення, при якому $\angle P_0OP = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (рис. 151).

Будемо говорити, що **точку P отримано з точки P_0 у результаті повороту навколо початку координат** на кут $\frac{2\pi}{3}$ (на кут 120°). Пишуть: $P = R_O^{\frac{2\pi}{3}}(P_0)$.

Нехай тепер точка P перемістилася по одиничному колу за годинниковою стрілкою і зайняла положення, при якому $\angle POP_0 = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (рис. 152). Говоритимемо, що точку P отримано з точки P_0 у результаті повороту навколо початку координат на кут $-\frac{2\pi}{3}$ (на кут −120°). Пишуть: $P = R_O^{-\frac{2\pi}{3}}(P_0)$.

Узагалі, коли розглядають рух точки по колу проти годинникової стрілки, то кут повороту вважають додатним, а за годинниковою стрілкою — від'ємним.

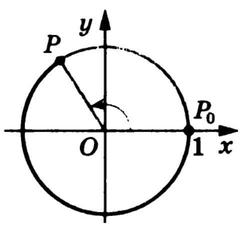


Рис. 151

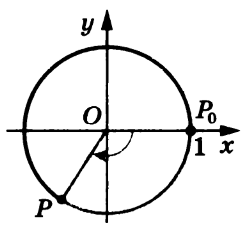


Рис. 152

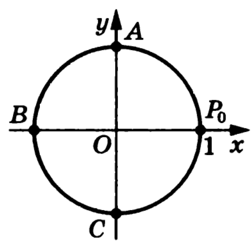


Рис. 153

Розглянемо ще кілька прикладів. Звернемося до рисунку 153. Можна говорити, що точку A отримано з точки P_0 у результаті повороту навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{2}$ (на кут 90°) або на кут $-\frac{3\pi}{2}$ (на кут −270°), тобто $A = R_O^{\frac{\pi}{2}}(P_0)$, $A = R_O^{-\frac{3\pi}{2}}(P_0)$. Точку B отримано з точки P_0 у результаті повороту на кут π (на кут 180°) або на кут $-\pi$ (на кут −180°), тобто $B = R_O^{\pi}(P_0)$, $B = R_O^{-\pi}(P_0)$. Точку C отримано з точки P_0 у результаті повороту на кут $\frac{3\pi}{2}$ (на кут 270°) або на кут $-\frac{\pi}{2}$ (на кут −90°), тобто $C = R_O^{\frac{3\pi}{2}}(P_0)$, $C = R_O^{-\frac{\pi}{2}}(P_0)$.

Якщо точка P, рухаючись по одиничному колу, зробить повний оберт, то можна говорити, що кут повороту дорівнює 2π (тобто $360°$) або -2π (тобто $-360°$).

Якщо точка P зробить півтора оберти проти годинникової стрілки, то природно вважати, що кут повороту дорівнює 3π (тобто $540°$), якщо за годинниковою стрілкою — то -3π (тобто $-540°$).

Зрозуміло, що кут повороту як у радіанах, так і в градусах може виражатися будь-яким дійсним числом.

Кут повороту однозначно визначає положення точки P на одиничному колі. Проте будь-якому положенню точки P на колі відповідає безліч кутів повороту. Наприклад, точці P (рис. 154) відповідають такі кути повороту: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}+2\pi$, $\frac{\pi}{4}+4\pi$, $\frac{\pi}{4}+6\pi$ і т. д., а також $\frac{\pi}{4}-2\pi$, $\frac{\pi}{4}-4\pi$, $\frac{\pi}{4}-6\pi$ і т. д.

Кожному дійсному числу α поставимо у відповідність точку P одиничного кола таку, що $P = R_O^{\alpha}(P_0)$. Тим самим ми задали відображення множини дійсних чисел на множину точок одиничного кола. Зауважимо, що це відображення не є взаємно однозначним: кожній точці одиничного кола відповідає безліч дійсних чисел. Наприклад, точці P (рис. 154) відповідають усі дійсні числа виду $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Зауважимо, що множину чисел виду $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, можна задати й інакше. Наприклад: $\frac{9\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, або $-\frac{7\pi}{4}+2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

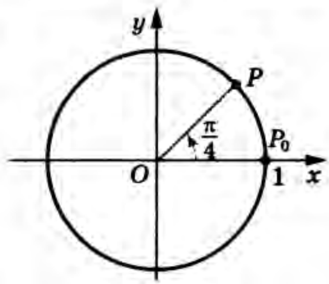


Рис. 154

Вправи

668.° Знайдіть радіанну міру кута, який дорівнює:

1) $25°$; 2) $40°$; 3) $100°$; 4) $160°$; 5) $210°$; 6) $300°$.

669.° Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:

1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) $1{,}2\pi$; 5) 3π; 6) $2{,}5\pi$.

670.° Заповніть таблицю:

Градусна міра кута		12°	36°			105°	225°			240°
Радіанна міра кута	$\frac{\pi}{18}$			$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{5}$			4π	$1{,}8\pi$	

671.° Чому дорівнює довжина дуги кола, радіус якого дорівнює 12 см, якщо радіанна міра дуги становить:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 2; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) 2π?

672.° Обчисліть довжину дуги кола, якщо відомо її радіанну міру α і радіус R кола:

1) $\alpha = 3$, $R = 5$ см; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $R = 6$ см; 3) $\alpha = 0{,}4\pi$, $R = 2$ см.

673.° Порівняйте величини кутів, заданих у радіанах:

1) $\frac{\pi}{2}$ і 1,5; 2) $-\frac{\pi}{2}$ і -2; 3) $\frac{\pi}{3}$ і 1; 4) $\frac{3\pi}{2}$ і 4,8.

674.° Порівняйте величини кутів, заданих у радіанах:

1) $\frac{\pi}{4}$ і 1; 2) $-\frac{1}{2}$ і $-\frac{\pi}{6}$.

675.° Позначте на одиничному колі точку, яку отримаємо при повороті точки $P_0(1;\ 0)$ на кут:

1) 45°; 3) 150°; 5) $\frac{5\pi}{3}$; 7) −120°; 9) 450°; 11) $-\frac{5\pi}{2}$;

2) $\frac{\pi}{3}$; 4) 210°; 6) −45°; 8) −300°; 10) −480°; 12) $-\frac{7\pi}{3}$.

676.° Позначте на одиничному колі точку, яку отримаємо при повороті точки $P_0(1;\ 0)$ на кут:

1) 225°; 3) $\frac{\pi}{6}$; 5) 420°; 7) $\frac{2\pi}{3}$; 9) 6π;

2) −60°; 4) 320°; 6) −315°; 8) $-\frac{5\pi}{6}$; 10) −720°.

677.° У якій чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана при повороті точки P_0 (1; 0) на кут:

1) 127°; 5) −240°; 9) −470°; 13) $\frac{-7\pi}{6}$; 17) 3;

2) 89°; 6) 400°; 10) $\frac{\pi}{5}$; 14) $-1{,}8\pi$; 18) 6;

3) 276°; 7) 750°; 11) $\frac{4\pi}{3}$; 15) $2{,}6\pi$; 19) −2;

4) −130°; 8) −24°; 12) $\frac{5\pi}{6}$; 16) $-\frac{17}{4}$; 20) 7?

678.° У якій чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана при повороті точки P_0 (1; 0) на кут:

1) 94°; 4) −100°; 7) −800°; 10) $-\frac{7\pi}{3}$; 13) 1;

2) 176°; 5) −380°; 8) $\frac{3\pi}{4}$; 11) 5,5π; 14) −3;

3) 200°; 6) 700°; 9) $-\frac{3\pi}{4}$; 12) $-\frac{11\pi}{6}$; 15) 5?

679.° Знайдіть координати точки одиничного кола, отриманої при повороті точки P_0 (1; 0) на кут:

1) $\frac{\pi}{2}$; 3) −90°; 5) $\frac{5\pi}{2}$; 7) 450°;

2) π; 4) −180°; 6) $-\frac{3\pi}{2}$; 8) −2π.

680.° Які координати має точка одиничного кола, отримана при повороті точки P_0 (1; 0) на кут:

1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) 3π; 3) $-\frac{\pi}{2}$; 4) 180°; 5) −270°; 6) −540°?

681.• Кути трикутника відносяться як 2 : 3 : 5. Знайдіть радіанні міри його кутів.

682.• Кути чотирикутника відносяться як 1 : 3 : 4 : 7. Знайдіть радіанні міри його кутів.

683.• Скільки сторін має правильний многокутник, кут якого дорівнює $\frac{13\pi}{15}$?

684.• Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 36°. Знайдіть радіанні міри кутів цього трикутника.

685.• Укажіть найменший додатний і найбільший від'ємний кути, при повороті на які точки P_0 (1; 0) буде отримано точку з координатами:

1) (0; 1); 2) (−1; 0); 3) (0; −1); 4) (1; 0).

686.• Укажіть усі дійсні числа, які відповідають точці P одиничного кола (рис. 155).

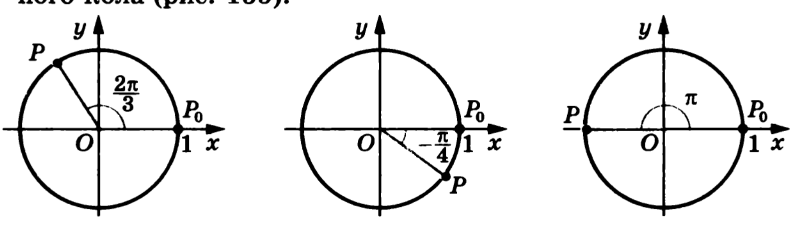


Рис. 155

687. Укажіть усі дійсні числа, які відповідають точці P одиничного кола (рис. 156).

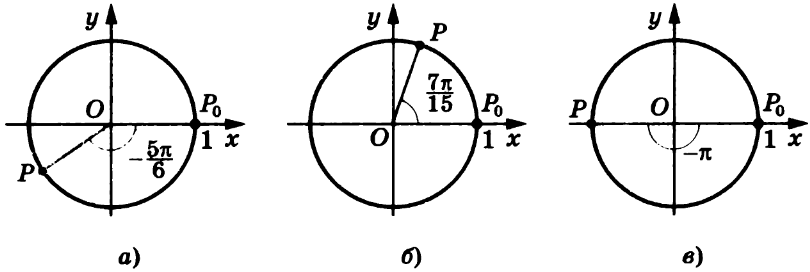


Рис. 156

688. Серед кутів 400°, 510°, 870°, 1230°, −150°, −320°, −210°, −680°, −1040° укажіть ті, при повороті на які точка P_0 (1; 0) займе те саме положення, як при повороті на кут: 1) 40°; 2) 150°.

689. Знайдіть кут α, $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$, при повороті на який точка P_0 (1; 0) займе те саме положення, як при повороті на кут: 1) 440°; 2) −170°; 3) −315°; 4) 1000°.

690. Знайдіть координати точок одиничного кола, отриманих при повороті точки P_0 (1; 0) на кути:

1) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
2) $-\frac{\pi}{2}+4\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
3) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
4) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
5) $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
6) $\frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

691. Побудуйте на одиничному колі точки, яким відповідає така множина чисел:

1) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
2) $\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
3) $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
4) $\frac{\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

692. Знайдіть усі кути, на які потрібно повернути точку P_0 (1; 0), щоб отримати точку:

1) $P_1(0; 1)$; 2) $P_2(-1; 0)$; 3) $P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; 4) $P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

693. Знайдіть усі кути, на які потрібно повернути точку P_0 (1; 0), щоб отримати точку:

1) $P_1(0; -1)$; 2) $P_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

694.° Доведіть, що площу сектора, який містить дугу в α рад, можна обчислити за формулою $S = \frac{\alpha R^2}{2}$, де R — радіус кола.

34 Тригонометричні функції числового аргументу

Поняття «синус», «косинус» і «тангенс» кутів від 0° до 180° знайомі вам з курсу геометрії 9 класу. Узагальнимо ці поняття для довільного кута повороту α.

Означаючи тригонометричні функції кутів від 0° до 180°, ми користувалися одиничним півколом. Для довільних кутів повороту природно звернутися до одиничного кола.

Означення. Косинусом і синусом кута повороту α називають відповідно абсцису x і ординату y точки P (x; y) одиничного кола такої, що $P = R_O^{\alpha}(P_0)$ (рис. 157).

Пишуть: $\cos \alpha = x$, $\sin \alpha = y$.

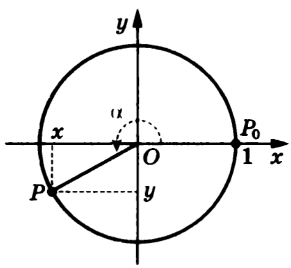


Рис. 157

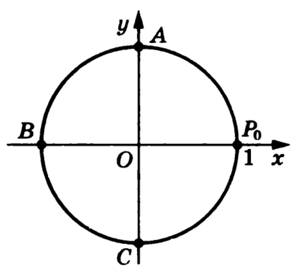


Рис. 158

Точки P_0, A, B і C (рис. 158) мають відповідно такі координати: (1; 0), (0; 1), (−1; 0), (0; −1). Вони отримані з точки P_0 (1; 0) у результаті повороту відповідно на такі кути: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. Тому, користуючись даним означенням, можна скласти таблицю:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	−1
$\cos x$	1	0	−1	0

ПРИКЛАД 1 Знайдіть усі кути повороту α, при яких: 1) $\sin \alpha = 0$; 2) $\cos \alpha = 0$.

Розв'язання

1) Ординату, яка дорівнює нулю, мають тільки дві точки одиничного кола: P_0 і B (рис. 158). Ці точки отримано з точки P_0 у результаті поворотів на такі кути:

$$0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots \text{ або}$$
$$-\pi,\ -2\pi,\ -3\pi,\ \ldots$$

Отже, $\sin \alpha = 0$ при $\alpha = \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

2) Абсцису, яка дорівнює нулю, мають тільки дві точки одиничного кола: A і C (рис. 158). Ці точки отримано з точки P_0 у результаті поворотів на такі кути:

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+\pi,\ \frac{\pi}{2}+2\pi,\ \frac{\pi}{2}+3\pi,\ \ldots \text{ або}$$
$$\frac{\pi}{2}-\pi,\ \frac{\pi}{2}-2\pi,\ \frac{\pi}{2}-3\pi,\ \ldots$$

Отже, $\cos \alpha = 0$ при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

Означення. Тангенсом кута повороту α називають відношення синуса цього кута до його косинуса:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$$

Означення. Котангенсом кута повороту α називають відношення косинуса цього кута до його синуса:

$$\boxed{\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}$$

Наприклад, $\operatorname{tg} \pi = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = 0$, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 0$,

$$\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = \frac{\cos \frac{3\pi}{4}}{\sin \frac{3\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1.$$

З означення тангенса випливає, що тангенс визначено для тих кутів повороту α, для яких $\cos \alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

З означення котангенса випливає, що котангенс визначено для тих кутів повороту α, для яких $\sin \alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ви знаєте, що кожному куту повороту α відповідає *єдина* точка одиничного кола. Отже, кожному значенню кута α відповідає єдине число, яке є значенням синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, котангенса для $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) кута α. Тому залежність значень синуса (косинуса, тангенса, котангенса) від величини кута повороту є функціональною.

Функції $f(\alpha) = \sin \alpha$, $g(\alpha) = \cos \alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha$, $p(\alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$, які відповідають цим функціональним залежностям, називають **тригонометричними функціями** кута повороту α.

Кожному дійсному числу α поставимо у відповідність кут α рад. Це дозволяє розглядати тригонометричні функції числового аргументу.

Наприклад, запис $\sin 2$ означає синус кута 2 радіана.

З означення синуса і косинуса випливає, що областю визначення функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є множина $\mathbb{R}$.

Оскільки абсциси і ординати точок одиничного кола набувають усіх значень від -1 до 1 включно, то областю значень функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є проміжок $[-1; 1]$.

Кутам повороту α і $\alpha + 2\pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$, відповідає одна й та сама точка одиничного кола. Тому

$$\boxed{\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin (\alpha + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z} \\ \cos \alpha &= \cos (\alpha + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z} \end{aligned}}$$

Областю визначення функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Областю визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$ є множина

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Щоб знайти області значень цих функцій, звернемося до такої геометричної інтерпретації.

Проведемо пряму $x = 1$. Вона проходить через точку P_0 (1; 0) і дотикається до одиничного кола (рис. 159).

Нехай точка P отримана з точки P_0 (1; 0) у результаті повороту на кут α і розміщена так, як показано на рисунку 159. Пряма OP перетинає пряму $x = 1$ у точці M. Проведемо $PN \perp OP_0$.

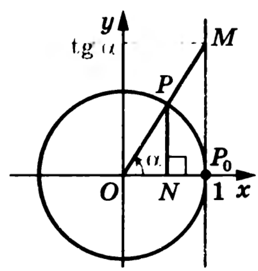


Рис. 159

З подібності трикутників OPN і OMP_0 випливає, що $\frac{PN}{ON} = \frac{MP_0}{OP_0}$.

Оскільки $PN = \sin\alpha$, $ON = \cos\alpha$, $OP_0 = 1$, то $MP_0 = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Отже, ордината точки M дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$.

Можна показати, що і при будь-якому іншому положенні точки P на одиничному колі виконується таке: якщо пряма OP перетинає пряму $x = 1$, то ордината точки перетину дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$. Тому пряму $x = 1$ називають **віссю тангенсів**.

Зрозуміло, що при зміні положення точки P на одиничному колі (рис. 160) точка M може зайняти довільне положення на прямій $x = 1$. Це означає, що областю значень функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина $\mathbb{R}$.

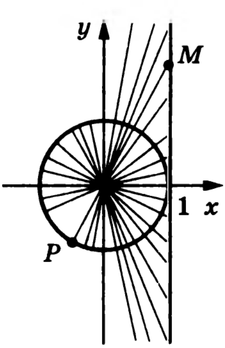


Рис. 160

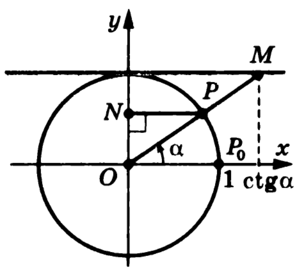


Рис. 161

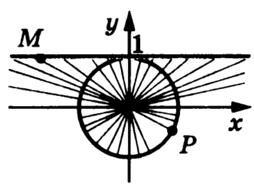


Рис. 162

Нехай точка P отримана з точки $P_0\,(1; 0)$ у результаті повороту на кут α і розміщена так, як показано на рисунку 161. Можна показати, що коли пряма OP перетинає пряму $y = 1$, то абсциса точки перетину дорівнює $\operatorname{ctg}\alpha$ (рис. 161). Тому пряму $y = 1$ називають **віссю котангенсів**.

З рисунка 162 зрозуміло, що областю значень функції $y = \operatorname{ctg} x$ є множина $\mathbb{R}$.

Якщо точки P_1, O і P_2 лежать на одній прямій, то прямі OP_1 і OP_2 перетинають вісь тангенсів (котангенсів) в одній і тій самій точці M (рис. 163, 164). Це означає, що тангенси (котангенси) кутів, які відрізняються на π, 2π, 3π і т. д., рівні. Звідси

$$\boxed{\begin{array}{c}\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi n),\ n \in \mathbb{Z}\\ \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n),\ n \in \mathbb{Z}\end{array}}$$

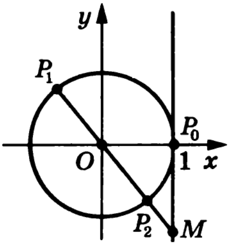


Рис. 163

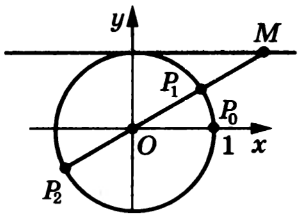


Рис. 164

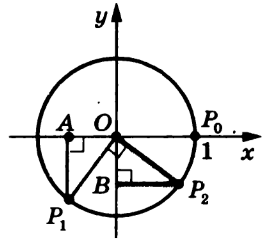


Рис. 165

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Нехай точки P_1 і P_2 отримано з точки P_0 у результаті поворотів на кути α і $\alpha + \frac{\pi}{2}$ відповідно. Опустимо перпендикуляри P_1A і P_2B на осі x і y відповідно (рис. 165). Оскільки $\angle P_1OP_2 = \frac{\pi}{2}$, то можна встановити, що $\Delta OP_1A = \Delta OP_2B$. Звідси $OA = OB$. Отже, абсциса точки P_1 дорівнює ординаті точки P_2, тобто $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

Випадки розміщення точок P_1 і P_2 в інших координатних чвертях розглядаються аналогічно.

Розгляньте самостійно випадки, коли точки P_1 і P_2 лежать на координатних осях.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть найбільше і найменше значення виразу: 1) $1 - 4\cos\alpha$; 2) $\frac{(2-\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha}$.

Розв'язання. 1) Оскільки $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, то $-4 \leqslant -4\cos\alpha \leqslant 4$, $-3 \leqslant 1 - 4\cos\alpha \leqslant 5$. Отже, найменше значення даного виразу дорівнює -3; вираз набуває його при $\cos\alpha = 1$. Найбільше значення дорівнює 5; вираз набуває його при $\cos\alpha = -1$.

Відповідь: 5; -3.

2) Маємо: $\frac{(2-\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2 - \sin\alpha$. Зрозуміло, що вираз $2 - \sin\alpha$ набуває всіх значень від 1 до 3. Найменше значення виразу $2 - \sin\alpha$, яке дорівнює 1, досягається лише при $\sin\alpha = 1$, проте при цьому $\cos\alpha = 0$ і вираз $\frac{(2-\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha}$ не визначений. Отже, найменшого значення не існує.

Аналогічно, найбільшого значення вираз $2 - \sin\alpha$ набуває лише при $\sin\alpha = -1$, проте при цьому також $\cos\alpha = 0$. Отже, і найбільшого значення не існує.

Відповідь: не існують.

ПРИКЛАД 4 Знайдіть область значень виразу: 1) $\frac{1}{2-\cos 2x}$; 2) $\frac{1}{3\sin x-2}$.

Розв'язання. 1) Маємо: $-1 \leqslant \cos 2x \leqslant 1$; $1 \leqslant 2 - \cos 2x \leqslant 3$; $1 \geqslant \frac{1}{2-\cos 2x} \geqslant \frac{1}{3}$. Зрозуміло, що коли значення $\cos 2x$ змінюється від -1 до 1 включно, то значення виразу $\frac{1}{2-\cos 2x}$ змінюється від $\frac{1}{3}$ до 1 включно.

Відповідь: $\left[\frac{1}{3};1\right]$.

2) Маємо: $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; $-3 \leqslant 3\sin x \leqslant 3$; $-5 \leqslant 3\sin x - 2 \leqslant 1$.

При $0 < 3\sin x - 2 \leqslant 1$ отримуємо, що $\frac{1}{3\sin x-2} \geqslant 1$, причому рівність досягається при $\sin x = 1$.

При $-5 \leqslant 3\sin x - 2 < 0$ отримуємо, що $\frac{1}{3\sin x-2} \leqslant -\frac{1}{5}$, причому рівність досягається при $\sin x = -1$. Отже, область значень даного виразу — множина $\left(-\infty;-\frac{1}{5}\right] \cup [1;+\infty)$.

Вправи

695.° Обчисліть значення виразу:

1) $2\cos 0° + 3\sin 90°$;

2) $4\operatorname{tg} 180° - 2\operatorname{ctg} 90°$;

3) $\sin 45° + \cos 45°$;

4) $\sin^2 60° + \cos^2 30°$;

5) $\sin 45° \cos 60° \operatorname{ctg} 30°$;

6) $\sin 0 + \operatorname{tg}\pi - \sin\frac{3\pi}{2}$;

7) $5\cos\pi + 4\cos\frac{3\pi}{2} + 2\cos 2\pi$;

8) $6\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - 7\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;

9) $2\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{6}$;

10) $\sin\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.

696.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sin 270° - 3\cos 180°$;

2) $\cos 60° + \sin 30°$;

3) $7\,\mathrm{tg}^2\, 45° - 3\,\mathrm{ctg}\, 45°$;

4) $\sin 180° \cos 120° \,\mathrm{tg}\, 60°$;

5) $\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos\pi+\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}}{2\sin\dfrac{\pi}{6}}$;

6) $\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{4}\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\pi}{3}$;

7) $\cos\dfrac{3\pi}{2}-\sin\dfrac{3\pi}{2}+\mathrm{ctg}\,\dfrac{3\pi}{2}$;

8) $6\cos 0+4\sin 2\pi+4\sin^2\dfrac{2\pi}{3}$?

697.° Відомо, що $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$. Знайдіть і порівняйте значення виразів:

1) $\sin 2\alpha$ і $2\sin\alpha$;

2) $\cos 3\alpha$ і $3\cos\alpha$.

698.° Відомо, що $\beta=\dfrac{\pi}{4}$. Знайдіть і порівняйте значення виразів:

1) $\sin 4\beta$ і $4\sin\beta$;

2) $\mathrm{tg}\, 4\beta$ і $4\,\mathrm{tg}\,\beta$.

699.° Чи можлива рівність:

1) $\cos\alpha=\dfrac{4}{7}$;

2) $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$;

3) $\sin\alpha=-\sqrt[3]{1{,}2}$;

4) $\cos\alpha=\dfrac{\pi}{3}$;

5) $\cos\alpha=\dfrac{\pi}{4}$;

6) $\sin\alpha=\dfrac{9}{8}$;

7) $\mathrm{tg}\,\alpha=-4$;

8) $\mathrm{ctg}\,\alpha=\sqrt{26}$?

700. Чи може дорівнювати числу $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ значення:

1) $\sin\alpha$;

2) $\cos\alpha$;

3) $\mathrm{tg}\,\alpha$;

4) $\mathrm{ctg}\,\alpha$?

701.° Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{12}\right)+3\,\mathrm{tg}\,\alpha}$, якщо $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}$, якщо $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, $\beta=\dfrac{\pi}{6}$;

3) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2-(\sin\alpha-\sin\beta)^2$, якщо $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$, $\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

702.° **Знайдіть значення виразу:**

1) $\dfrac{\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{12}\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{12}-\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)}$, якщо $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$;

2) $\dfrac{\sin 3\beta-\sin\beta\operatorname{tg}\alpha}{\cos 3\alpha-3\sin(3\alpha+3\beta)}$, якщо $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, $\beta=\dfrac{\pi}{6}$.

703.° **Укажіть найбільше і найменше значення виразу:**

1) $3\sin\alpha$; 3) $2-\sin\alpha$; 5) $\sin^2\alpha$;
2) $4+\cos\alpha$; 4) $6-2\cos\alpha$; 6) $2\cos^2\alpha-3$.

704.° **Укажіть найбільше і найменше значення виразу:**

1) $-5\cos\alpha$; 2) $\cos\alpha-2$; 3) $5+\sin^2\alpha$; 4) $7-3\sin\alpha$.

705.• **Знайдіть усі значення x, при яких виконується рівність:**

1) $\sin x=1$; 2) $\sin x=-1$.

706.• **Знайдіть усі значення x, при яких виконується рівність:**

1) $\cos x=1$; 2) $\cos x=-1$.

707.• **Чи існує таке значення $x\in\mathbb{R}$, при якому обидві функції $y=\operatorname{tg}x$ і $y=\operatorname{ctg}x$ не визначені?**

708.• **При яких значеннях a можлива рівність:**

1) $\cos x=a+3$; 3) $\cos x=a^2-1$; 5) $\cos x=a^2-5a+5$;
2) $\sin x=a^2+1$; 4) $\sin x=a^2-a-1$; 6) $\operatorname{tg}x=\dfrac{a+2}{a-2}$?

709.• **При яких значеннях a можлива рівність:**

1) $\sin x=a-2$; 3) $\cos x=a^2-3$;
2) $\cos x=a^2+2$; 4) $\sin x=2a-a^2-2$?

710.• **Порівняйте значення виразів $2\sin\alpha$ і $\sin^2\alpha$, якщо $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.**

711.• **Порівняйте:**

1) $\cos 10°$ і $\cos 10°\cos 20°$; 2) $\sin 40°$ і $\sin^2 40°$.

712.• **Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:**

1) $\dfrac{1}{1+\sin\alpha}$; 3) $\dfrac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$;
2) $\dfrac{\cos^3\alpha}{\cos\alpha}$; 4) $2\cos\alpha+3\sin\alpha-\dfrac{2\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$.

713.• **Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:**

1) $\dfrac{1}{\cos\alpha-2}$; 2) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 3) $\sin\alpha+\cos\alpha-\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}$.

714.* Знайдіть область значень виразу:

1) $\dfrac{1}{2+\sin x}$; 2) $\dfrac{1}{1-\cos x}$; 3) $\dfrac{2}{4\sin x-3}$.

715.* Знайдіть область значень функції:

1) $y=\dfrac{2}{3-\cos x}$; 2) $y=\dfrac{1}{\sin x+1}$; 3) $y=\dfrac{1}{1-2\cos x}$.

716.** Доведіть, що $\sin\alpha=-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

717.** Доведіть, що $\cos\alpha=-\cos(\pi+\alpha)$.

Знаки значень тригонометричних функцій. Парність і непарність тригонометричних функцій

Нехай точку P отримано з точки $P_0\,(1;\,0)$ у результаті повороту навколо початку координат на кут α. Якщо точка P належить I чверті, то говорять, що кут α є **кутом I чверті**. Аналогічно можна говорити про кути II, III і IV чвертей.

Наприклад, $\dfrac{\pi}{7}$ і $-300°$ — кути I чверті, $\dfrac{2\pi}{3}$ і $-185°$ — кути II чверті, $\dfrac{5\pi}{4}$ і $-96°$ — кути III чверті, $355°$ і $-\dfrac{\pi}{8}$ — кути IV чверті.

Кути виду $\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, не відносять до жодної чверті.

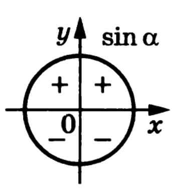
Точки, розміщені в I чверті, мають додатні абсцису і ординату. Отже, якщо α — кут I чверті, то $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$.

Зрозуміло, що коли α — кут II чверті, то $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$.

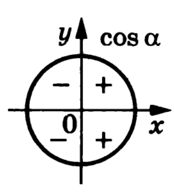
Якщо α — кут III чверті, то $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha<0$.

Якщо α — кут IV чверті, то $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$.

Знаки значень синуса і косинуса схематично показано на рисунку 166.



а)



б)

Рис. 166

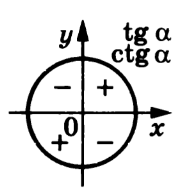


Рис. 167

Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то тангенси і котангенси кутів I і III чвертей є додатними, а кутів II і IV чвертей — від'ємними (рис. 167).

Нехай точки P_1 і P_2 отримано в результаті повороту точки P_0 (1; 0) на кути α і $-\alpha$ відповідно (рис. 168).

Для будь-якого α точки P_1 і P_2 мають рівні абсциси і протилежні ординати. Тоді з означень синуса і косинуса випливає, що для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$

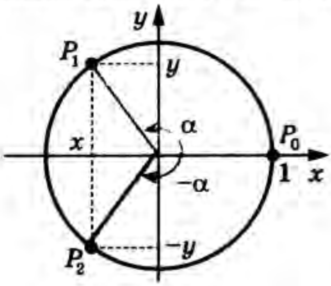


Рис. 168

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha\end{array}}$$

Це означає, що ***функція косинус є парною, а функція синус — непарною.***

Області визначення функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ симетричні відносно початку координат (перевірте це самостійно). Крім того:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Отже, ***функції тангенс і котангенс є непарними.***

ПРИКЛАД 1 Який знак має: 1) $\sin 280°$; 2) $\operatorname{tg}(-140°)$; 3) $\operatorname{tg} 2$?

Розв'язання. 1) $\sin 280° < 0$, оскільки кут 280° є кутом IV чверті;

2) $\operatorname{tg}(-140°) > 0$, оскільки кут −140° є кутом III чверті;

3) оскільки $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, то кут 2 рад є кутом II чверті. Отже, $\operatorname{tg} 2 < 0$.

ПРИКЛАД 2 Визначте знак виразу $\cos 123° \operatorname{tg} 231° \sin 312°$.

Розв'язання. Оскільки 123° — кут II чверті, 231° — кут III чверті, 312° — кут IV чверті, то $\cos 123° < 0$, $\operatorname{tg} 231° > 0$, $\sin 312° < 0$ і їх добуток більший за 0.

ПРИКЛАД 3 Порівняйте $\sin 200°$ і $\sin(-200°)$.

Розв'язання. Оскільки кут 200° — кут III чверті, кут −200° — кут II чверті, то $\sin 200° < 0$, $\sin(-200°) > 0$. Отже, $\sin 200° < \sin(-200°)$.

ПРИКЛАД 4 Дослідіть на парність функцію: 1) $f(x)=\frac{1+\cos x}{x^2}$; 2) $f(x) = 1 + \sin x$; 3) $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$; 4) $f(x)=\frac{\cos x}{x-1}$.

Розв'язання. 1) Область визначення даної функції $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ є симетричною відносно початку координат. Маємо:

$$f(-x)=\frac{1+\cos(-x)}{(-x)^2}=\frac{1+\cos x}{x^2}=f(x).$$

Отже, дана функція є парною.

2) Область визначення даної функції $D(f) = (-\infty; +\infty)$ є симетричною відносно початку координат. Маємо:

$$f(-x) = 1 + \sin(-x) = 1 - \sin x.$$

Тоді $f(-x) \neq f(x)$; $f(-x) \neq -f(x)$. Отже, дана функція не є ні парною, ні непарною.

3) Область визначення даної функції — усі дійсні числа, крім чисел виду $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, — є симетричною відносно початку координат. Маємо:

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos^2(-x)}=-\frac{\sin x}{\cos^2 x}=-f(x).$$

Отже, дана функція є непарною.

4) Область визначення даної функції $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ не є симетричною відносно початку координат. Отже, дана функція не є ні парною, ні непарною.

Вправи

718.° Кутом якої чверті є кут:

1) $38°$; 3) $302°$; 5) $-98°$; 7) $\frac{3\pi}{5}$; 9) $-\frac{2\pi}{3}$;

2) $119°$; 4) $217°$; 6) $-285°$; 8) $\frac{7\pi}{6}$; 10) $-\frac{5\pi}{4}$?

719.° Додатним чи від'ємним числом є значення тригонометричної функції:

1) $\sin 110°$; 4) $\sin(-280°)$; 7) $\sin(-130°)$; 10) $\operatorname{tg} 1$;

2) $\cos 200°$; 5) $\cos 340°$; 8) $\cos 2$; 11) $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}$;

3) $\operatorname{tg} 160°$; 6) $\operatorname{tg}(-75°)$; 9) $\sin(-3)$; 12) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$?

720.° **Який знак має:**

1) $\sin 186°$; 3) $\operatorname{ctg} 340°$; 5) $\operatorname{ctg}(-291°)$; 7) $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{8}$;

2) $\operatorname{tg} 104°$; 4) $\cos(-78°)$; 6) $\sin\frac{3\pi}{7}$; 8) $\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$?

721.° **Знайдіть значення виразу:**

1) $\sin(-30°)$; 2) $\operatorname{tg}(-60°)$; 3) $\operatorname{ctg}(-45°)$; 4) $\cos(-30°)$.

722.° **Чому дорівнює значення виразу:**

1) $\cos(-60°) + \operatorname{tg}(-45°)$; 2) $\operatorname{ctg}(-60°)\sin(-45°)\cos(-45°)$?

723.° **Знайдіть значення виразу:**

1) $\sin(-30°) - 2\operatorname{tg}(-45°) + \cos(-45°)$;

2) $5\operatorname{tg}0 + 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 3\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\cos(-\pi) + 4\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

4) $\dfrac{1{,}5 + \sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

724.° **Знайдіть значення виразу:**

1) $3\sin(-45°) + \cos(-45°) + 2\sin(-30°) + 6\cos(-60°)$;

2) $\sin^2(-60°) + \cos^2(-30°)$;

3) $2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

725.° **Визначте знак виразу:**

1) $\sin 100° \sin 132°$;
2) $\cos 210° \sin 115°$;
3) $\cos 285° \cos(-316°)$;
4) $\operatorname{tg} 112° \sin 165°$;
5) $\cos 318° \operatorname{tg}(-214°)$;
6) $\operatorname{ctg} 300° \sin 220°$;
7) $\sin 1 \cos 2$;
8) $\sin 5 \operatorname{tg} 5$;
9) $\sin 3 \cos 4 \operatorname{tg} 5$;
10) $\sin(-118°)\cos 118° \operatorname{tg} 118°$.

726.• **Порівняйте з нулем значення виразу:**

1) $\sin 102° \cos 350°$; 3) $\dfrac{\sin 157°}{\cos 256°}$; 5) $\sin 112° \cos(-128°) \operatorname{tg} 198°$;

2) $\sin 134° \cos 131°$; 4) $\dfrac{\cos 142°}{\sin 72°}$; 6) $\sin(-245°) \operatorname{tg} 183° \operatorname{ctg}(-190°)$.

727.° **Відомо, що** $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. **Порівняйте з нулем значення виразу:**

1) $\sin\alpha \operatorname{tg}\alpha$; 2) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$; 3) $\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha}$; 4) $\sin\alpha - \cos\alpha$.

728.° Відомо, що $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin\beta\cos\beta$; 2) $\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}$; 3) $\frac{\operatorname{tg}^3\beta}{\sin\beta}$; 4) $\sin\beta + \cos\beta$.

729.° Порівняйте:

1) $\operatorname{tg} 130°$ і $\operatorname{tg}(-130°)$;
2) $\operatorname{tg} 110°$ і $\operatorname{tg} 193°$;
3) $\cos 80°$ і $\sin 330°$;
4) $\sin 60°$ і $\sin\frac{8\pi}{7}$;
5) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$ і $\cos 280°$;
6) $\operatorname{ctg} 6$ і $\operatorname{ctg} 6°$.

730.° Порівняйте:

1) $\sin 200°$ і $\sin(-250°)$;
2) $\operatorname{ctg} 100°$ і $\operatorname{ctg} 80°$;
3) $\cos 250°$ і $\cos 290°$;
4) $\cos 6{,}2$ і $\sin 5$.

731.° Відомо, що α — кут III чверті. Спростіть вираз:

1) $\sin\alpha - |\sin\alpha|$;
2) $|\cos\alpha| - \cos\alpha$;
3) $|\operatorname{tg}\alpha| - \operatorname{tg}\alpha$.

732.° Відомо, що β — кут IV чверті. Спростіть вираз:

1) $|\sin\beta| + \sin\beta$;
2) $\cos\beta - |\cos\beta|$;
3) $|\operatorname{ctg}\beta| - \operatorname{ctg}\beta$.

733.° Кутом якої чверті є кут α, якщо:

1) $\sin\alpha > 0$ і $\cos\alpha < 0$;
2) $\sin\alpha < 0$ і $\operatorname{tg}\alpha > 0$;
3) $|\sin\alpha| = \sin\alpha$ і $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha + |\operatorname{ctg}\alpha| = 0$ і $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$?

734.° Кутом якої чверті є кут α, якщо:

1) $\cos\alpha > 0$ і $\operatorname{tg}\alpha > 0$;
2) $\sin\alpha < 0$ і $\operatorname{ctg}\alpha < 0$;
3) $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$ і $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;
4) $|\operatorname{tg}\alpha| - \operatorname{tg}\alpha = 0$ і $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$?

735.• Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = \sin^2 x$;
2) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$;
3) $f(x) = \operatorname{tg} x + \cos x$;
4) $f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$;
5) $f(x) = x^3 + \cos x$;
6) $f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x}$;
7) $f(x) = \frac{(x-1)\cos x}{x-1}$;
8) $f(x) = \frac{x^3\sin x}{x}$.

736.• Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
2) $f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\sin x - \operatorname{tg} x}$;
3) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2-1}$;
4) $f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^3-1}$;
5) $f(x) = \cos x + \frac{\pi}{3}$;
6) $f(x) = \frac{(x^2-1)\operatorname{ctg} x}{x^2-1}$.

36. Періодичні функції

Багато процесів і подій, які відбуваються в навколишньому світі, повторюються через рівні проміжки часу. Наприклад, через 27,3 доби повторюється значення відстані від Землі до Місяця; якщо сьогодні субота, то через 7 діб знову настане субота.

Подібні явища і процеси називають **періодичними**, а функції, які є їх математичними моделями, — **періодичними функціями**.

Ви знаєте, що для будь-якого числа x виконуються рівності

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi);$$
$$\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi).$$

Це означає, що значення функцій синус і косинус періодично повторюються при зміні аргументу на 2π. Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є прикладами періодичних функцій.

Означення. **Функцію f називають періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x з області визначення функції f виконуються рівності**

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Число T називають періодом функції f.

Виконання записаних рівностей для будь-якого $x \in D(f)$ означає, що область визначення періодичної функції f має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $(x_0 - T) \in D(f)$ і $(x_0 + T) \in D(f)$.

Ви знаєте, що для будь-якого x з області визначення функції $y = \operatorname{tg} x$ виконуються рівності

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi).$$

Також для будь-якого x з області визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$ виконуються рівності:

$$\operatorname{ctg}(x - \pi) = \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi).$$

Тоді з означення періодичної функції випливає, що тангенс і котангенс є періодичними з періодом π.

Періодичною є функція дробова частина числа[1] $y = \{x\}$. Її періодом є будь-яке ціле число, відмінне від нуля. Справді, у прикладі 4 п. 5 було доведено, що для будь-яких $x \in \mathbb{R}$ і $k \in \mathbb{Z}$ виконується рівність $\{x + k\} = \{x\}$.

Розглянемо деякі властивості періодичних функцій.

Теорема 36.1. ***Якщо число T є періодом функції f, то і число $-T$ також є періодом функції f.***

Справедливість цієї теореми випливає з означення періодичної функції.

[1] З цією функцією ви ознайомилися в п. 5 на с. 32.

Теорема 36.2. ***Якщо числа T_1 і T_2 є періодами функції f, причому $T_1 + T_2 \neq 0$, то число $T_1 + T_2$ також є періодом функції f.***

Доведення. Для будь-якого $x \in D(f)$ можна записати:

$$f(x) = f(x + T_1) = f((x + T_1) + T_2) = f(x + (T_1 + T_2));$$
$$f(x) = f(x - T_1) = f((x - T_1) - T_2) = f(x - (T_1 + T_2)).$$

Звідси для будь-якого $x \in D(f)$ виконуються рівності:

$$f(x - (T_1 + T_2)) = f(x) = f(x + (T_1 + T_2)).$$

Отже, число $T_1 + T_2$ є періодом функції f. ▲

Наслідок. ***Якщо число T є періодом функції f, то будь-яке число виду nT, де $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, також є її періодом.***

Доведіть цей факт самостійно.

Остання властивість означає, що кожна періодична функція має безліч періодів.

Наприклад, будь-яке число виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, є періодом функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$; будь-яке число виду πn, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, є періодом функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$.

Теорема 36.3. ***Якщо число T є періодом функції $y = f(x)$, то число $\frac{T}{k}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$.***

Доведення. Для будь-якого x з області визначення функції $y = f(kx + b)$ можна записати:

$$f(kx+b) = f((kx+b)+T) = f\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)+b\right);$$

$$f(kx+b) = f((kx+b)-T) = f\left(k\left(x-\frac{T}{k}\right)+b\right).$$

Звідси для будь-якого x з області визначення функції $y = f(kx + b)$ виконується:

$$f\left(k\left(x-\frac{T}{k}\right)+b\right) = f(kx+b) = f\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)+b\right).$$

Отже, число $\frac{T}{k}$ є періодом функції $y = f(kx + b)$. ▲

Якщо серед усіх періодів функції f існує найменший додатний період, то його називають **головним періодом** функції f.

Наприклад, головним періодом функції $y = \{x\}$ є число 1.

Теорема 36.4. ***Головним періодом функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є число 2π; головним періодом функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ є число π.***

Доведення. Проведемо доведення для функції $y = \sin x$ (решту тверджень теореми доводять аналогічно).

Якщо число T є періодом функції $y = \sin x$, то рівність $\sin(x + T) = \sin x$ виконується при будь-якому дійсному значенні x, зокрема при $x = -\frac{T}{2}$. Тоді маємо:

$$\sin\left(-\frac{T}{2}+T\right)=\sin\left(-\frac{T}{2}\right);\quad \sin\frac{T}{2}=-\sin\frac{T}{2};\quad \sin\frac{T}{2}=0.$$

Звідси $\frac{T}{2}=\pi k$, $T = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. З останньої рівності випливає, що будь-який період функції $y = \sin x$ має вигляд $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Найменшим додатним числом виду $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, є число 2π, яке є періодом функції $y = \sin x$.

Отже, число 2π — головний період функції $y = \sin x$. ▲

Застосовуючи теореми 36.3 і 36.4 до функцій $y = \sin(kx + b)$ і $y = \cos(kx + b)$, де $k \neq 0$, отримуємо, що число $\frac{2\pi}{k}$ є періодом, а число $\frac{2\pi}{|k|}$ є головним періодом цих функцій.

Головним періодом функцій $y = \operatorname{tg}(kx + b)$ і $y = \operatorname{ctg}(kx + b)$, де $k \neq 0$, є число $\frac{\pi}{|k|}$.

Зазначимо, що не будь-яка періодична функція має головний період. Наприклад, функція $y = c$, де c — деяке число, є періодичною. Очевидно, що будь-яке дійсне число, відмінне від нуля, є її періодом. Отже, ця функція не має головного періоду.

Існують періодичні функції, відмінні від константи, які теж не мають головного періоду.

Наприклад, розглянемо функцію Діріхле[1] $y = \mathfrak{D}(x)$. Ця функція є періодичною, причому будь-яке раціональне число, відмінне від нуля, є її періодом. Це випливає з того, що сума двох раціональних чисел — число раціональне, а сума раціонального і ірраціонального чисел — число ірраціональне. Отже, функція Діріхле не має головного періоду.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу: 1) $\sin 660°$; 2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$; 3) $\operatorname{tg} 135°$.

Розв'язання. 1) $\sin 660° = \sin(720° - 60°) = \sin(-60° + 360° \cdot 2) = \sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)=-\sin\frac{13\pi}{3}=-\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

[1] З цією функцією ви ознайомилися в п. 5 на с. 31.

3) $\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg} (-45° + 180°) = \operatorname{tg} (-45°) = -1$.

На рисунку 169 зображено графік деякої періодичної функції f з періодом T, $D(f) = \mathbb{R}$.

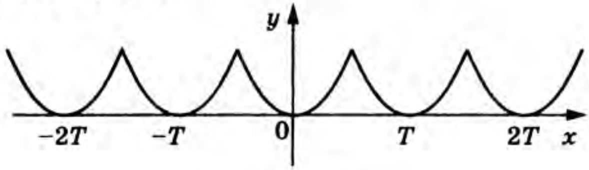


Рис. 169

Очевидно, що фрагменти графіка цієї функції на проміжках $[0; T]$, $[T; 2T]$, $[2T; 3T]$ і т. д., а також на проміжках $[-T; 0]$, $[-2T; -T]$, $[-3T; -2T]$ і т. д. є рівними фігурами, причому будь-яка з цих фігур може бути отримана з будь-якої іншої паралельним перенесенням на вектор з координатами $(nT; 0)$, де n — деяке ціле число.

Узагалі, якщо проміжки $[a; b]$ і $[c; d]$ є такими, що $c = a + Tn$, $d = b + Tn$, $n \in \mathbb{Z}$, то частини графіка функції f на цих проміжках є рівними фігурами (рис. 170).

Рис. 170

ПРИКЛАД 2 На рисунку 171 зображено фрагмент графіка періодичної функції, період якої дорівнює T. Побудуйте графік цієї функції на проміжку $\left[-\frac{3T}{2}; \frac{5T}{2}\right]$.

Розв'язання. Побудуємо образи зображеної фігури при паралельних перенесеннях на вектори з координатами $(T; 0)$, $(2T; 0)$ і $(-T; 0)$. Об'єднання даної фігури та отриманих образів — шуканий графік (рис. 172).

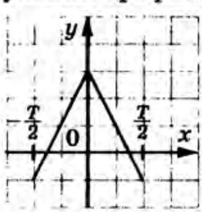


Рис. 171

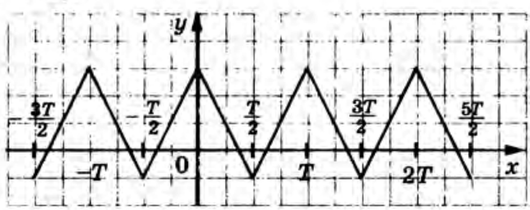


Рис. 172

ПРИКЛАД 3 Покажіть, що число $T = \pi$ є періодом функції $f(x) = \sqrt{-\cos^2 x}$.

Розв'язання. Областю визначення функції f є множина значень змінної x, при яких $\cos x = 0$, тобто $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Тоді якщо $x \in D(f)$, то $(x + \pi) \in D(f)$ і $(x - \pi) \in D(f)$.

Оскільки $E(f) = \{0\}$, то $f(x - \pi) = f(x) = f(x + \pi) = 0$.

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{x-2}$ не є періодичною.

Розв'язання. Зауважимо, що $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Припустимо, що функція f є періодичною з періодом $T \neq 0$. Очевидно, що $x_0 = 2 - T \in D(f)$, тоді $x_0 + T = 2 - T + T \in D(f)$, тобто $2 \in D(f)$ — отримали суперечність.

Вправи

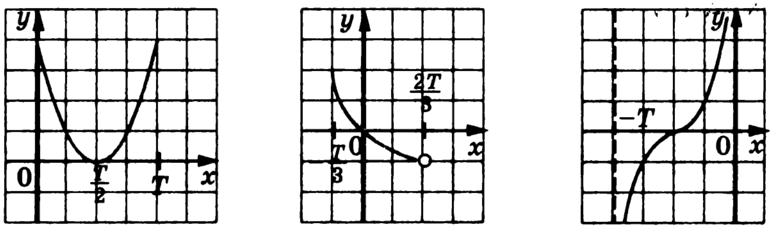
737.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sin 390°$;
2) $\cos 420°$;
3) $\operatorname{tg} 780°$;
4) $\operatorname{ctg} 405°$;
5) $\cos(-750°)$;
6) $\sin(-390°)$;
7) $\operatorname{tg}(-210°)$;
8) $\operatorname{ctg} 225°$;
9) $\cos 300°$;
10) $\operatorname{tg} 150°$;
11) $\cos \frac{11\pi}{6}$;
12) $\sin \frac{23\pi}{4}$;
13) $\sin \frac{5\pi}{3}$;
14) $\cos \frac{7\pi}{4}$;
15) $\operatorname{tg}\left(-\frac{19\pi}{3}\right)$.

738.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sin 420°$;
2) $\cos 405°$;
3) $\operatorname{tg}(-315°)$;
4) $\sin 1110°$;
5) $\operatorname{tg} 765°$;
6) $\cos \frac{7\pi}{3}$;
7) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4}$;
8) $\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$;
9) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$.

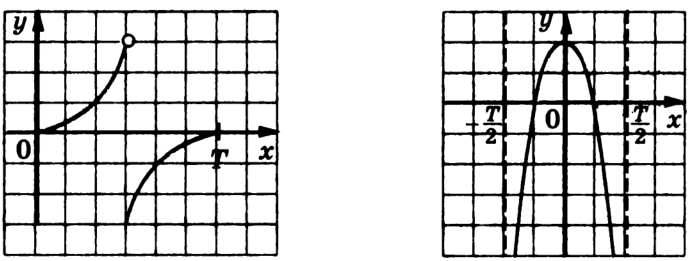
739.° На рисунку 173 зображено частину графіка періодичної функції, період якої дорівнює T. Побудуйте графік цієї функції на проміжку $[-2T; 3T]$.



а) *б)* *в)*

Рис. 173

740." **На рисунку 174 зображено частину графіка періодичної функції, період якої дорівнює T. Побудуйте графік цієї функції на проміжку $[-2T; 2T]$.**



а) *б)*

Рис. 174

741.° **Доведіть, що число T є періодом функції f:**

1) $f(x) = \cos \frac{x}{4}$, $T = 8\pi$;
2) $f(x) = \text{tg}\, 3x$, $T = -\frac{2\pi}{3}$;
3) $f(x) = \text{ctg}\, \pi x$, $T = 3$;
4) $f(x) = \sin(5x - 2)$, $T = \frac{4\pi}{5}$.

742.° **Доведіть, що числа $\frac{2\pi}{3}$ і -4π є періодами функції $f(x) = \cos 3x$.**

743.° **Знайдіть головний період функції:**

1) $f(x) = \cos(3x + 1)$;
2) $f(x) = \text{tg}(2x + 1)$;
3) $f(x) = \text{ctg}(-7x + 2)$;
4) $f(x) = \sin 2\pi x$;
5) $f(x) = \cos \sqrt{3}x$;
6) $f(x) = \text{tg}(4\pi x - 3)$;
7) $f(x) = \left\{6x + \frac{5}{8}\right\}$;
8) $f(x) = \left\{-\sqrt{2}x\right\}$;
9) $f(x) = \left\{\pi x + \frac{1}{\pi}\right\}$.

744.° Знайдіть головний період функції:

1) $f(x) = \sin(3x - 1)$; 3) $f(x) = \operatorname{tg}(-x + 1)$; 5) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + 4\right)$;

2) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + 2\right)$; 4) $f(x) = \cos \pi x$; 6) $f(x) = \left\{ \frac{x}{4} - 2 \right\}$.

745.• Доведіть, що число π не є періодом функції $f(x) = \sin x$.

746.• Доведіть, що число $-\frac{\pi}{2}$ не є періодом функції $f(x) = \operatorname{tg} x$.

747.• Знайдіть головний період функції $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}$.

748.• Знайдіть головний період функції $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{\sin^2 x}}$.

37. Властивості і графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$

Періодичність тригонометричних функцій дозволяє досліджувати їх властивості та будувати графіки за такою схемою.

1) Розглянути проміжок виду $[a; a + T]$, тобто довільний проміжок завдовжки в період T $\Big($найчастіше обирають проміжок $[0; T]$ або проміжок $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]\Big)$.
2) Дослідити властивості функції на вибраному проміжку.
3) Побудувати графік функції на цьому проміжку.
4) Здійснити паралельне перенесення отриманої фігури на вектори з координатами $(nT; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Розглянемо функцію $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$, тобто на проміжку завдовжки в період цієї функції.

Рис. 175

При повороті точки $P_0(1; 0)$ навколо початку координат на кути від 0 до $\frac{\pi}{2}$ ордината точки одиничного кола збільшується від 0 до 1 (рис. 175). Це означає, що функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

При повороті точки $P_0(1; 0)$ на кути від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ ордината точки одиничного кола зменшується від 1 до −1 (рис. 175). Отже, функція $y = \sin x$ спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

При повороті точки P_0 (1; 0) на кути від $\frac{3\pi}{2}$ до 2π ордината точки одиничного кола збільшується від −1 до 0 (рис. 175). Отже, функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Функція $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ має три нулі: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Якщо $x \in (0; \pi)$, то $\sin x > 0$; якщо $x \in (\pi; 2\pi)$, то $\sin x < 0$.

Функція $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ досягає свого найбільшого значення, яке дорівнює 1, при $x = \frac{\pi}{2}$, і найменшого значення, яке дорівнює −1, при $x = \frac{3\pi}{2}$.

Отримані властивості функції $y = \sin x$ дозволяють побудувати її графік на проміжку $[0; 2\pi]$ (рис. 176). Графік можна побудувати точніше, якщо скористатися даними таблиці значень тригонометричних функцій деяких кутів, наведеної на форзаці 3.

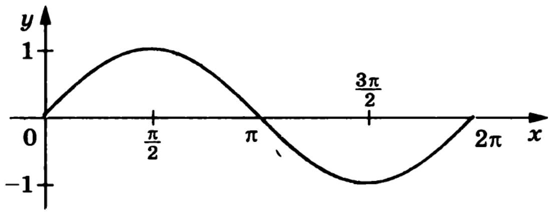


Рис. 176

На всій області визначення графік функції $y = \sin x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(2\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 177).

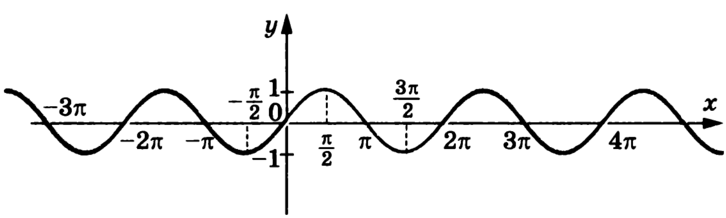


Рис. 177

Графік функції $y = \sin x$ називають **синусоїдою**.

У таблиці наведено основні властивості функції $y = \sin x$.

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$[-1; 1]$
Періодичність	Періодична з головним періодом, який дорівнює 2π
Нулі функції	Числа виду πn, $n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\sin x > 0$ на кожному з проміжків виду $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$ $\sin x < 0$ на кожному з проміжків виду $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
Парність	Непарна
Зростання/ спадання	Зростає на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ Спадає на кожному з проміжків виду $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$
Найбільше і найменше значення	Найбільшого значення, яке дорівнює 1, набуває в точках виду $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ Найменшого значення, яке дорівнює -1, набуває в точках виду $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Розглянемо функцію $y = \cos x$ на проміжку $[0; 2\pi]$.

Розглядаючи повороти точки $P_0\,(1; 0)$ навколо початку координат, можна дійти такого висновку: функція $y = \cos x$ спадає на проміжку $[0; \pi]$ і зростає на проміжку $[\pi; 2\pi]$.

Функція $y = \cos x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ має два нулі: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

Якщо $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, то $\cos x > 0$; якщо $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, то $\cos x < 0$.

Функція $y = \cos x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ досягає свого найбільшого значення, яке дорівнює 1, при $x = 0$ або $x = 2\pi$ і найменшого значення, яке дорівнює -1, при $x = \pi$.

Графік функції $y = \cos x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ зображено на рисунку 178.

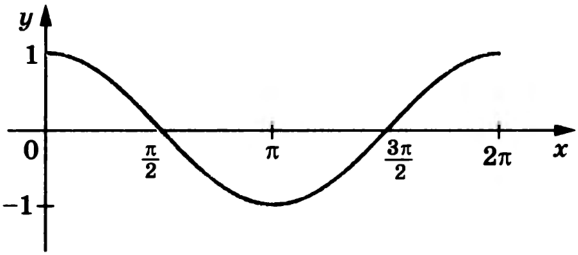


Рис. 178

На всій області визначення графік функції $y = \cos x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(2\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 179).

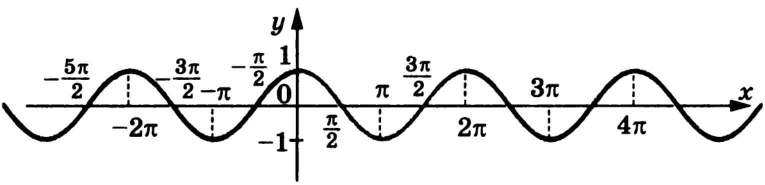


Рис. 179

Графік функції $y = \cos x$ називають косинусоїдою.

Якщо скористатися формулою $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ (див. приклад 2 п. 34), то зрозуміло, що графік функції $y = \cos x$ можна отримати як результат паралельного перенесення графіка функції $y = \sin x$ на вектор з координатами $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ (рис. 180). Це означає, що графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ — рівні фігури.

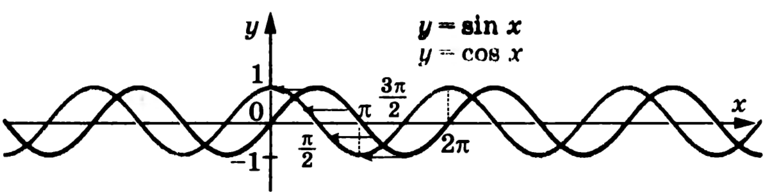


Рис. 180

У таблиці наведено основні властивості функції $y = \cos x$.

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$[-1; 1]$
Періодичність	**Періодична з головним періодом, який дорівнює 2π**
Нулі функції	**Числа виду** $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\cos x > 0$ **на кожному з проміжків виду** $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$ $\cos x < 0$ **на кожному з проміжків виду** $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$
Парність	**Парна**
Зростання/ спадання	**Зростає на кожному з проміжків виду** $[\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n],\ n \in \mathbb{Z}$ **Спадає на кожному з проміжків виду** $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n],\ n \in \mathbb{Z}$
Найбільше і найменше значення	**Найбільшого значення, яке дорівнює 1, набуває в точках виду** $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ **Найменшого значення, яке дорівнює** -1**, набуває в точках виду** $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

ПРИКЛАД 1 Порівняйте: 1) $\sin 0{,}7\pi$ і $\sin 0{,}71\pi$; 2) $\cos 324°$ і $\cos 340°$.

Розв'язання. 1) Оскільки числа $0{,}7\pi$ і $0{,}71\pi$ належать проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, на якому функція $y = \sin x$ спадає, і $0{,}7\pi < 0{,}71\pi$, то $\sin 0{,}7\pi > \sin 0{,}71\pi$.

2) Оскільки $324°$ і $340°$ належать проміжку $[180°; 360°]$, на якому функція $y = \cos x$ зростає, і $324° < 340°$, то $\cos 324° < < \cos 340°$.

ПРИКЛАД 2 Порівняйте $\sin 40°$ і $\cos 40°$.

Розв'язання. Оскільки $\sin 40° < \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 40° > \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos 40° > \sin 40°$.

ПРИКЛАД 3 Чи можлива рівність $\sin \alpha = 2 \sin 31°$?

Розв'язання. Оскільки $\sin 31° > \sin 30° = \frac{1}{2}$, то $2 \sin 31° > 1$. Отже, дана рівність неможлива.

ПРИКЛАД 4 Побудуйте графік функції $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. Шуканий графік отримуємо з графіка функції $y = \sin x$ у результаті його паралельного перенесення вздовж осі абсцис у від'ємному напрямі на $\frac{\pi}{3}$ одиниць (рис 181).

Рис. 181

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{2} \sin 2x$.

Розв'язання. Стиснемо графік функції $y = \sin x$ до осі ординат у 2 рази, тобто зменшимо у 2 рази відстані від кожної точки графіка функції $y = \sin x$ до осі ординат. Отримаємо графік функції $y = \sin 2x$. Потім цей графік стиснемо у 2 рази до осі абсцис. Це і буде шуканий графік (рис. 182).

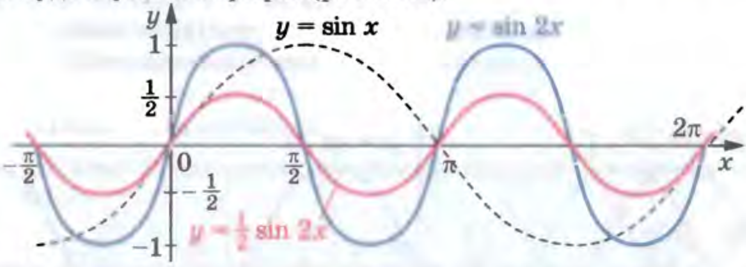


Рис. 182

ПРИКЛАД 6 Побудуйте графік функції $y = \sin\left|2x - \frac{\pi}{3}\right|$.

Розв'язання. Проведемо такі перетворення:

1) $y = \sin x \to y = \sin |x|$ — симетрія відносно осі ординат частини графіка, яка лежить у півплощині $x \geqslant 0$;

2) $y = \sin|x| \rightarrow y = \sin|2x|$ — стиск до осі ординат у 2 рази;

3) $y = \sin|2x| \rightarrow y = \sin\left|2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$ — паралельне перенесення вздовж осі абсцис у додатному напрямі на $\frac{\pi}{6}$ одиниць (рис. 183).

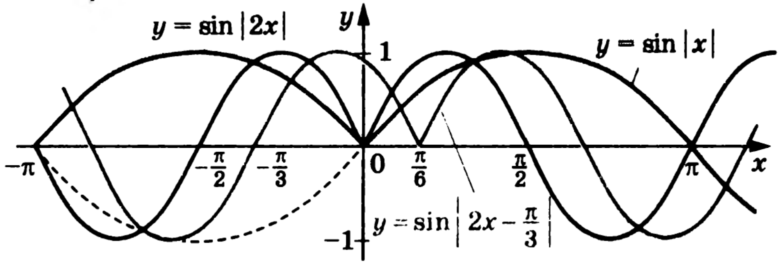


Рис. 183

ПРИКЛАД 7 Побудуйте графік функції $y = \sin\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. Проведемо такі перетворення:

1) $y = \sin x \rightarrow y = \sin 2x$ — стиск до осі ординат у 2 рази;

2) $y = \sin 2x \rightarrow y = \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)$ — паралельне перенесення вздовж осі абсцис у додатному напрямі на $\frac{\pi}{6}$ одиниць;

3) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow y = \sin\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right)$ — симетрія відносно осі ординат частини графіка, яка лежить у півплощині $x \geqslant 0$. Шуканий графік складається з двох симетричних частин (рис. 184).

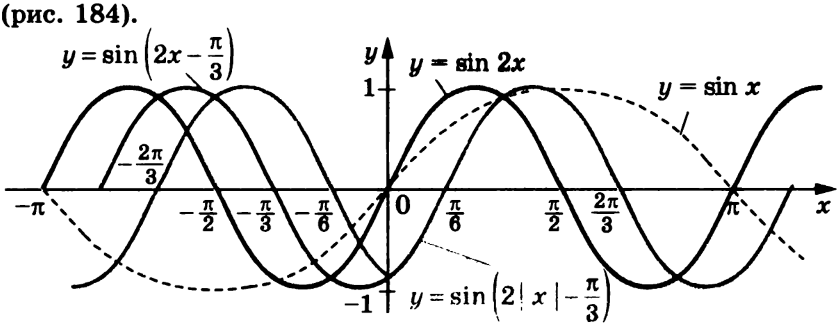


Рис. 184

ПРИКЛАД Побудуйте графік рівняння $\cos x + \cos y = 2$.

Розв'язання. Оскільки $|\cos x| \leqslant 1$ і $|\cos y| \leqslant 1$, то дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos y = 1. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ y = 2\pi m, \ m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Шуканий графік — це множина точок, зображених на рисунку 185.

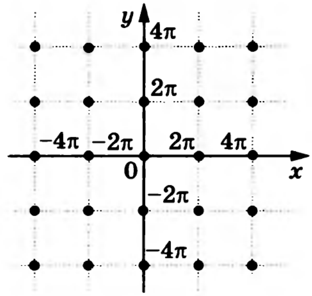


Рис. 185

Вправи

749.° Серед чисел -3π, $-\frac{5\pi}{2}$, -2π, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{9\pi}{2}$, 6π, 7π укажіть:

1) нулі функції $y = \sin x$;
2) значення аргументу, при яких функція $y = \sin x$ набуває найбільшого значення;
3) значення аргументу, при яких функція $y = \sin x$ набуває найменшого значення.

750.° Серед чисел $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, 5π, 8π укажіть:

1) нулі функції $y = \cos x$;
2) значення аргументу, при яких функція $y = \cos x$ набуває найбільшого значення;
3) значення аргументу, при яких функція $y = \cos x$ набуває найменшого значення.

751.° На яких з наведених проміжків функція $y = \sin x$ є зростаючою:

1) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 3) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$?

752.° На яких з наведених проміжків функція $y = \sin x$ є спадною:

1) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $[-\pi; 0]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$?

753.° Серед наведених проміжків укажіть проміжки спадання функції $y = \cos x$:

1) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $[-2\pi; -\pi]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $[6\pi; 7\pi]$.

754.° **Серед наведених проміжків укажіть проміжки зростання функції $y = \cos x$:**

1) $[-3\pi; -2\pi]$; 2) $[0; \pi]$; 3) $[-\pi; \pi]$; 4) $[3\pi; 4\pi]$.

755.° **Порівняйте:**

1) $\cos 1{,}6\pi$ і $\cos 1{,}68\pi$;
2) $\sin 20°$ і $\sin 21°$;
3) $\cos 20°$ і $\cos 21°$;
4) $\sin\frac{10\pi}{9}$ і $\sin\frac{25\pi}{18}$;
5) $\cos\frac{10\pi}{9}$ і $\cos\frac{25\pi}{18}$;
6) $\cos 5{,}1$ і $\cos 5$;
7) $\sin 2$ і $\sin 2{,}1$.

756.° **Порівняйте:**

1) $\cos\frac{\pi}{9}$ і $\cos\frac{4\pi}{9}$;
2) $\sin\frac{5\pi}{9}$ і $\sin\frac{17\pi}{18}$;
3) $\sin\left(-\frac{7\pi}{30}\right)$ і $\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$;
4) $\cos\frac{10\pi}{7}$ і $\cos\frac{11\pi}{9}$.

757.° **Розташуйте числа в порядку зростання:**

1) $\sin 3{,}2$, $\sin 4$, $\sin 3{,}6$, $\sin 2{,}4$, $\sin 1{,}8$;
2) $\cos 3{,}5$, $\cos 4{,}8$, $\cos 6{,}1$, $\cos 5{,}6$, $\cos 4{,}2$.

758.° **Розташуйте числа в порядку спадання:**

1) $\sin(-0{,}2)$, $\sin 0{,}2$, $\sin 1{,}5$, $\sin 1$, $\sin 0{,}9$;
2) $\cos 0{,}1$, $\cos 1{,}4$, $\cos 2{,}4$, $\cos 3{,}1$, $\cos 1{,}8$.

759.• **Порівняйте:**

1) $\sin 58°$ і $\cos 58°$; 2) $\sin 18°$ і $\cos 18°$; 3) $\cos 80°$ і $\sin 70°$.

760.• **Чи можлива рівність:**

1) $\cos\alpha = 2\sin 25°$;
2) $\sin\alpha = \sqrt{2}\cos 35°$?

761.• **Побудуйте графік функції:**

1) $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$;
2) $y = -\frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

762.• **Побудуйте графік функції:**

1) $y = -3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$;
2) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$.

763.• **Побудуйте графік функції:**

1) $y = \sin\left|x + \frac{\pi}{4}\right|$;
2) $y = 2\cos\left|x - \frac{\pi}{3}\right|$.

764.• **Побудуйте графік функції:**

1) $y = 2\sin\left|x + \frac{\pi}{6}\right|$;
2) $y = -\cos\left|x - \frac{\pi}{4}\right|$.

765.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції, укажіть область значень даної функції, її нулі, проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання, якого найбільшого і найменшого значення може набувати функція і при яких значеннях аргументу:

1) $y = \sin x + 1$;
2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
3) $y = \sin 2x$;
4) $y = -\frac{1}{2}\sin x$.

766.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції, укажіть область значення даної функції, її нулі, проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання, якого найбільшого і найменшого значення може набувати функція і при яких значеннях аргументу:

1) $y = \cos x - 1$; 2) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 3) $y = \cos\frac{x}{2}$; 4) $y = 3\cos x$.

767.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції $y = \sin\left(|x| - \frac{\pi}{4}\right)$.

768.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції $y = 2\cos\left(|x| - \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

769.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

770.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції $y = -3\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 2$.

771.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\cos|3x + 2|$;
2) $y = -2\sin\left(\frac{1}{2}|x| - 1\right)$.

772.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = 3\sin|2x - 1|$;
2) $y = \frac{1}{2}\cos\left(2|x| + \frac{\pi}{3}\right)$.

773.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\sin\left|\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right|\right|$;
2) $y = \left|\cos\left|2x - \frac{\pi}{3}\right|\right|$.

774.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\cos\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right)\right|$;
2) $y = \left|\sin\left(\frac{1}{2}|x| + \frac{\pi}{6}\right)\right|$.

775.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt{\sin x}\right)^2$;
2) $y = \sin x + \sin|x|$;
3) $y = \cos x + \sqrt{\cos^2 x}$;
4) $y = \sqrt{-\sin^2 x}$;
5) $y = \sqrt{\cos x - 1}$;
6) $y = \frac{\sin|x|}{\sin x}$;
7) $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$;
8) $y = \operatorname{tg} x \cos x$;
9) $y = \operatorname{tg} x\,|\cos x|$;
10) $y = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\sin^2 x}}$.

776.`` Побудуйте графік функції:

1) $y=\left(\sqrt{\cos x}\right)^2$;
2) $y=\sin x-\sqrt{\sin^2 x}$;
3) $y=\sqrt{-\cos^2 x}$;
4) $y=\sqrt{\sin x-1}$;
5) $y=\dfrac{|\cos x|}{\cos x}$;
6) $y = \operatorname{ctg} x \sin x$;
7) $y = \operatorname{ctg} x\,|\sin x|$;
8) $y=\dfrac{\sin|x|}{|\sin x|}$.

777.`` Побудуйте графік рівняння:

1) $\sin \pi (x^2 + y^2) = 0$;
2) $\sin x + \sin y = 2$.

778.`` Побудуйте графік рівняння:

1) $\cos \pi (x^2 + y^2) = 1$;
2) $\cos x + \cos y = -2$.

38 Властивості і графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$

Розглянемо функцію $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тобто на проміжку завдовжки в період цієї функції (нагадаємо, що функція $y = \operatorname{tg} x$ в точках $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$ не визначена).

З рисунка 186 видно, що при зміні аргументу x від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ значення функції $y = \operatorname{tg} x$ збільшується від $-\infty$ до $+\infty$. Це означає, що функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

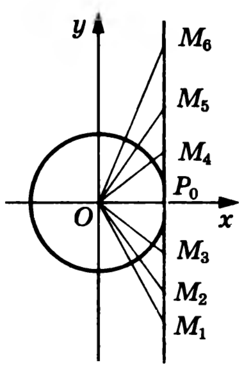


Рис. 186

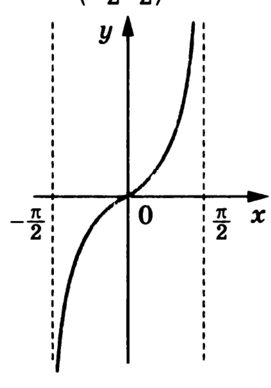


Рис. 187

Функція $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ має один нуль: $x = 0$.

Якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то $\mathrm{tg}\, x < 0$; якщо $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\mathrm{tg}\, x > 0$.

Отримані властивості функції $y = \mathrm{tg}\, x$ дозволяють побудувати її графік на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 187). Графік можна побудувати точніше, якщо скористатися даними таблиці значень тригонометричних функцій деяких кутів, наведеної на форзаці 3.

На всій області визначення графік функції $y = \mathrm{tg}\, x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 188).

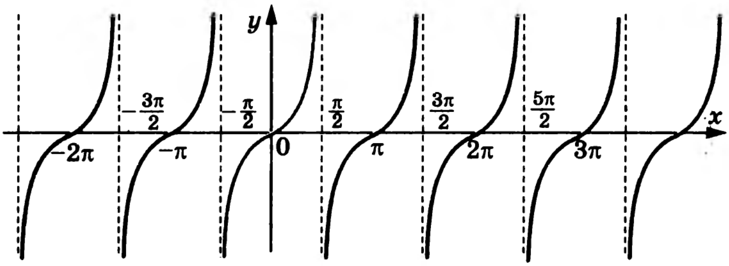


Рис. 188

У таблиці наведено основні властивості функції $y = \mathrm{tg}\, x$.

Область визначення	$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\right\}$
Область значень	$\mathbb{R}$
Періодичність	**Періодична з головним періодом, який дорівнює π**
Нулі функції	**Числа виду πn, $n \in \mathbb{Z}$**
Проміжки знакосталості	**$\mathrm{tg}\, x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$** **$\mathrm{tg}\, x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$**
Парність	**Непарна**
Зростання/спадання	**Зростає на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$**
Найбільше і найменше значення	**Найбільшого і найменшого значень не набуває**

Розглянемо функцію $y = \text{ctg}\ x$ на проміжку $(0; \pi)$, тобто на проміжку завдовжки в період (нагадаємо, що функція $y = \text{ctg}\ x$ не визначена в точках 0 і π).

З рисунка 189 видно, що при зміні аргументу x від 0 до π значення функції $y = \text{ctg}\ x$ зменшується від $+\infty$ до $-\infty$. Це означає, що функція $y = \text{ctg}\ x$ спадає на проміжку $(0; \pi)$.

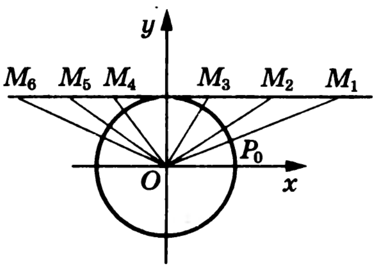


Рис. 189

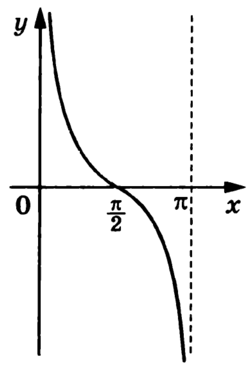


Рис. 190

Функція $y = \text{ctg}\ x$ на проміжку $(0; \pi)$ має один нуль: $x = \frac{\pi}{2}$.

Якщо $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\text{ctg}\ x > 0$; якщо $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то $\text{ctg}\ x < 0$.

Графік функції $y = \text{ctg}\ x$ на проміжку $(0; \pi)$ зображено на рисунку 190.

На всій області визначення графік функції $y = \text{ctg}\ x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 191).

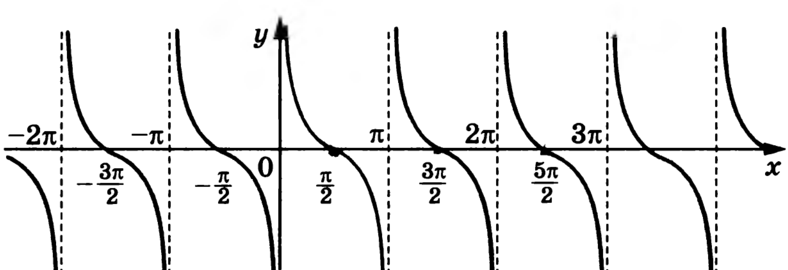


Рис. 191

У таблиці наведено основні властивості функції $y = \operatorname{ctg} x$.

Область визначення	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$
Область значень	$\mathbb{R}$
Періодичність	Періодична з головним періодом, який дорівнює π
Нулі функції	Числа виду $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
Проміжки знакосталості	$\operatorname{ctg} x > 0$ на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{ctg} x < 0$ на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$
Парність	Непарна
Зростання/спадання	Спадає на кожному з проміжків виду $(\pi n,\ \pi + \pi n),\ n \in \mathbb{Z}$
Найбільше і найменше значення	Найбільшого і найменшого значень не набуває

ПРИКЛАД Побудуйте графік функції $y = |\operatorname{ctg} x| \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є всі дійсні числа, крім чисел виду $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, тобто

$$D(y) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Якщо $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\operatorname{ctg} x > 0$ і $y = 1$.

Якщо $\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\operatorname{ctg} x < 0$ і $y = -1$.

Шуканий графік складається з окремих відрізків з «виколотими» кінцями (рис. 192).

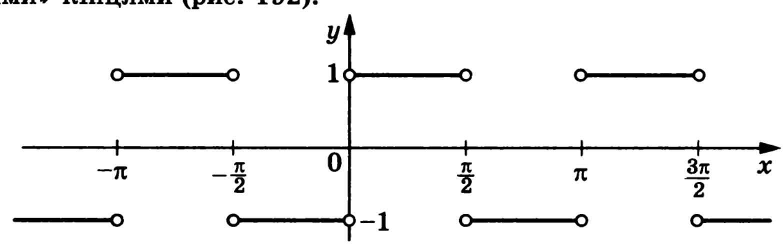


Рис. 192

Вправи

779. Чи проходить графік функції $y = \mathrm{tg}\, x$ через точку:

1) $A\left(-\frac{\pi}{4};1\right)$; 2) $B\left(-\frac{\pi}{3};-\sqrt{3}\right)$; 3) $C\left(\frac{\pi}{2};0\right)$; 4) $D\left(\frac{7\pi}{6};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$?

780.° Чи проходить графік функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ через точку:

1) $A\left(\frac{\pi}{4};1\right)$; 2) $B\left(\frac{3\pi}{2};0\right)$; 3) $C\,(\pi;\,1)$; 4) $D\left(\frac{4\pi}{3};\sqrt{3}\right)$?

781.° Які з чисел $\frac{\pi}{2}$, 0, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, 2π, $-\frac{5\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$:

1) є нулями функції $y = \mathrm{ctg}\, x$;
2) не належать області визначення функції $y = \mathrm{ctg}\, x$?

782.° Які з чисел $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, 3π:

1) є нулями функції $y = \mathrm{tg}\, x$;
2) не належать області визначення функції $y = \mathrm{tg}\, x$?

783.° Порівняйте:

1) $\mathrm{tg}\,(-38°)$ і $\mathrm{tg}\,(-42°)$; 4) $\mathrm{tg}\, 0{,}9\pi$ і $\mathrm{tg}\, 1{,}2\pi$; 7) $\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{7}$ і $\mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{7}$;

2) $\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{5}$ і $\mathrm{tg}\,\frac{7\pi}{15}$; 5) $\mathrm{tg}\, 1$ і $\mathrm{tg}\, 1{,}5$; 8) $\mathrm{ctg}\,(-40°)$ і $\mathrm{ctg}\,(-60°)$;

3) $\mathrm{tg}\, 130°$ і $\mathrm{tg}\, 150°$; 6) $\mathrm{ctg}\, 24°$ і $\mathrm{ctg}\, 28°$; 9) $\mathrm{ctg}\, 2$ і $\mathrm{ctg}\, 3$.

784.° Порівняйте:

1) $\mathrm{tg}\, 100°$ і $\mathrm{tg}\, 92°$; 3) $\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{9}$ і $\mathrm{tg}\,\frac{5\pi}{18}$; 5) $\mathrm{tg}\,(-1)$ і $\mathrm{tg}\,(-1{,}2)$;

2) $\mathrm{ctg}\, 100°$ і $\mathrm{ctg}\, 92°$; 4) $\mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{8}$ і $\mathrm{ctg}\,\frac{5\pi}{12}$; 6) $\mathrm{ctg}\,(-3)$ і $\mathrm{ctg}\,(-3{,}1)$.

785.° Розташуйте в порядку спадання:

1) $\mathrm{tg}\, 0{,}5$, $\mathrm{tg}\, 1{,}2$, $\mathrm{tg}\,(-0{,}4)$, $\mathrm{tg}\, 0{,}9$;
2) $\mathrm{ctg}\, 3{,}2$, $\mathrm{ctg}\, 4{,}6$, $\mathrm{ctg}\, 6$, $\mathrm{ctg}\, 5{,}3$.

786.° Розташуйте в порядку зростання:

1) $\mathrm{tg}\, 1{,}6$, $\mathrm{tg}\, 4{,}1$, $\mathrm{tg}\, 3{,}6$, $\mathrm{tg}\, 2{,}5$;
2) $\mathrm{ctg}\,(-0{,}7)$, $\mathrm{ctg}\,(-2{,}4)$, $\mathrm{ctg}\,(-2{,}8)$, $\mathrm{ctg}\,(-1{,}4)$.

787.° Побудуйте графік функції:

1) $y = -\mathrm{tg}\, x$; 2) $y = \mathrm{tg}\, x + 2$; 3) $y = \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y = \mathrm{tg}\, 3x$.

788.° Побудуйте графік функції:

1) $y = -\mathrm{ctg}\, x$; 2) $y = \mathrm{ctg}\, x - 1$; 3) $y = \mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $y = \mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}$.

789.° Чи можлива рівність:

1) $\sin\alpha = \frac{2}{3}\operatorname{tg} 80°$; 2) $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{18}$; 3) $\cos\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{9}$?

790.° Порівняйте:

1) $\sin 78°$ і $\operatorname{tg} 78°$; 2) $\sin 40°$ і $\operatorname{ctg} 20°$.

791.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$; 2) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

792.° Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$; 2) $y = \operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{12}\right)$.

793.°° Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt{\operatorname{ctg} x}\right)^2$; 4) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{|\operatorname{ctg} x|}$; 7) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x}$;

2) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}|x|$; 5) $y = \operatorname{ctg} x - \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x}$; 8) $y = |\operatorname{tg} x| \operatorname{ctg} x$.

3) $y = \sqrt{-\operatorname{tg}^2 x}$; 6) $y = |\operatorname{tg} x|$;

794.°° Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt{\operatorname{tg} x}\right)^2$; 5) $y = \operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x}$;

2) $y = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}|x|$; 6) $y = |\operatorname{ctg} x|$;

3) $y = \sqrt{-\operatorname{ctg}^2 x}$; 7) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

4) $y = \frac{|\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x}$;

39. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

У цьому пункті встановимо тотожності, які пов'язують значення тригонометричних функцій одного й того самого аргументу.

Координати будь-якої точки P $(x; y)$ одиничного кола задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$. Оскільки $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, де α — кут повороту, у результаті якого з точки P_0 $(1; 0)$ було отримано точку P, то

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \qquad (1)$$

Звернемо увагу на те, що точку P обрано довільно. Тому тотожність (1) справедлива для будь-якого α. Її називають **основною тригонометричною тотожністю**.

Використовуючи основну тригонометричну тотожність, знайдемо залежності між тангенсом і косинусом, а також між котангенсом і синусом.

Припустивши, що $\cos\alpha \neq 0$, поділимо обидві частини рівності (1) на $\cos^2\alpha$. Отримаємо:

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$\boxed{1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

Ця тотожність є правильною для всіх α, при яких $\cos\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Припустивши, що $\sin\alpha \neq 0$, поділимо обидві частини рівності (1) на $\sin^2\alpha$. Отримаємо:

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\boxed{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

Ця тотожність є правильною для всіх α, при яких $\sin\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Зв'язок між тангенсом і котангенсом можна встановити за допомогою означень цих функцій. Маємо: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Звідси

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 1} \qquad (2)$$

Ця тотожність є правильною для всіх α, при яких $\sin\alpha \neq 0$ і $\cos\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi k$ і $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Зазначимо, що

$$\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \pi k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Тому тотожність (2) є правильною для всіх α таких, що $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз:

1) $\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{tg}^2 x$; 2) $\frac{1}{\cos^2\varphi} - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi$; 3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Розв'язання. 1) $\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$;

2) $\frac{1}{\cos^2\varphi} - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = \cos^2\varphi$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1+\cos\alpha} = 1 - \cos\alpha$.

ПРИКЛАД 2 Доведіть тотожність:

1) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$;

2) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha \sin^2\beta + \sin^2\alpha \cos^2\beta = 1$;

3) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$.

Розв'язання. 1) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right) : \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}\beta\right) =$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 1}{\operatorname{tg}\beta} : \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta.$$

2) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha \sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha(\sin^2\beta +$
$+ \cos^2\beta) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

3) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha} =$

$$= \frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1}{\cos\alpha\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{2\sin\alpha \cdot \sin\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

ПРИКЛАД 3 Відомо, що $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Обчисліть $\sin\alpha$.

Розв'язання. Маємо:

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$. Звідси $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ або $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Рисунок 193 ілюструє цей приклад.

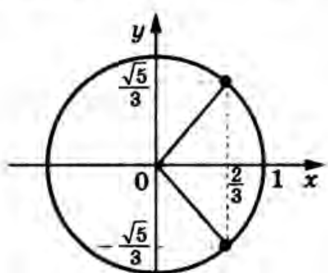


Рис. 193

ПРИКЛАД [illegible] Знайдіть cos α, tg α, ctg α, якщо $\sin\alpha = -\frac{7}{25}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}.$$

Оскільки $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, отже, $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{576}{625}} = -\frac{24}{25}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{7}{25} : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24};\ \ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{24}{7}.$$

ПРИКЛАД [illegible] Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{16}{63}$, $90° < \alpha < 270°$. Знайдіть $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

Розв'язання. Маємо: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{63}{16}$.

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 + \frac{256}{3969} = \frac{4229}{3969};\ \ \sin^2\alpha = \frac{3969}{4225} = \left(\frac{63}{65}\right)^2.$$

Оскільки $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ і $90° < \alpha < 270°$, то $180° < \alpha < 270°$. Отже, $\sin\alpha < 0$. Тоді $\sin\alpha = -\frac{63}{65}$.

Маємо: $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha = \frac{16}{63}\cdot\left(-\frac{63}{65}\right) = -\frac{16}{65}$.

ПРИКЛАД [illegible] Спростіть вираз $\sqrt{\sin^2\alpha(1-\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)}$, якщо $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Розв'язання. $\sqrt{\sin^2\alpha(1-\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)} =$

$$= \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cos\alpha\sin\alpha} =$$

$$= \sqrt{\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha} = \sqrt{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2} = |\sin\alpha - \cos\alpha|.$$

Оскільки $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, то $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$. Тому $\sin\alpha - \cos\alpha < 0$. Отже, $|\sin\alpha - \cos\alpha| = \cos\alpha - \sin\alpha$.

Відповідь: $\cos\alpha - \sin\alpha$.

Вправи

795.° Спростіть вираз:

1) $\sin^2\beta - 1$;
2) $1 - \sin^2 3\alpha - \cos^2 3\alpha$;
3) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$;
4) $\cos\alpha\ \mathrm{tg}\,\alpha$;
5) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1$;
6) $1 - \sin^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha \sin^2\alpha$;
7) $\cos^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;
8) $\dfrac{\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta}\cdot\mathrm{ctg}^2\beta$;
9) $\left(1+\sin\dfrac{x}{2}\right)\left(1-\sin\dfrac{x}{2}\right)$;
10) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

796.° Спростіть вираз:

1) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \mathrm{ctg}^2 5\alpha$;
2) $\sin\dfrac{\alpha}{3}\cdot\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{3}$;
3) $1-\dfrac{1}{\sin^2\gamma}$;
4) $\dfrac{\sin^2\alpha-1}{\cos^2\alpha-1}+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha$;
5) $(\mathrm{tg}\,\alpha\cos\alpha)^2 + (\mathrm{ctg}\,\alpha\sin\alpha)^2$;
6) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha\,(\cos^2\alpha-1)}$;
7) $\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+\mathrm{tg}\,\alpha\right)\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}-\mathrm{tg}\,\alpha\right)$;
8) $(\mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\beta)^2 - (\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{ctg}\,\beta)^2$.

797.° Чи можуть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ одночасно дорівнювати нулю?

798.° Чи можуть $\mathrm{tg}\,\alpha$ і $\mathrm{ctg}\,\alpha$ за модулем бути: 1) обидва більші за 1; 2) обидва менші від 1?

799.° Спростіть вираз:

1) $(1 + \mathrm{tg}\,\alpha)^2 + (1 - \mathrm{tg}\,\alpha)^2$;
2) $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;
3) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$;
4) $\mathrm{ctg}\,x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$;
5) $\dfrac{1-\sin x}{\cos x}-\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$;
6) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;
7) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta}$;
8) $\dfrac{\mathrm{tg}\,3\alpha}{\mathrm{tg}^2 3\alpha-1}\cdot\dfrac{1-\mathrm{ctg}^2 3\alpha}{\mathrm{ctg}\,3\alpha}$;
9) $\dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha}$;
10) $\dfrac{1-\mathrm{ctg}\,\gamma}{1-\mathrm{tg}\,\gamma}$;
11) $\cos^4\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$;
12) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$;
13) $\cos(-\alpha) + \cos\alpha\ \mathrm{tg}^2(-\alpha)$;
14) $\dfrac{1+\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)}-\mathrm{tg}(-\beta)$.

800.° Спростіть вираз:

1) $(1 + \mathrm{ctg}\,\beta)^2 + (1 - \mathrm{ctg}\,\beta)^2$;

2) $\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,(\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha + 2)$;

3) $\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta} + \dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}$;

4) $\mathrm{tg}\,x + \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$;

5) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta} + \dfrac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$;

6) $\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} \cdot \dfrac{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}{\mathrm{ctg}^2\alpha}$;

7) $\dfrac{1+\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{ctg}\,\alpha}$;

8) $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \cos^2\alpha - 1$;

9) $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;

10) $\mathrm{tg}\,(-\alpha)\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \sin^2(-\alpha)$.

801.° Знайдіть значення тригонометричних функцій аргументу α, якщо:

1) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$;

2) $\sin\alpha = 0{,}6$ і $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$ і $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

4) $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\dfrac{4}{3}$ і $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

802.° Знайдіть значення тригонометричних функцій аргументу α, якщо:

1) $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ і $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

2) $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ і $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

3) $\mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{1}{3}$ і $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

4) $\mathrm{ctg}\,\alpha = -7$ і $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

803.• Чи можуть одночасно виконуватися рівності:

1) $\sin\alpha = \dfrac{1}{4}$ і $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$;

2) $\mathrm{tg}\,\alpha = 2{,}5$ і $\mathrm{ctg}\,\alpha = 0{,}6$;

3) $\cos\alpha = \dfrac{5}{7}$ і $\mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$?

804.• Чи можуть одночасно виконуватися рівності:

1) $\sin\alpha = \dfrac{2}{5}$ і $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$;

2) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{4}{9}$ і $\mathrm{ctg}\,\alpha = 1\dfrac{1}{4}$;

3) $\sin\alpha = -\dfrac{1}{6}$ і $\mathrm{ctg}\,\alpha = \sqrt{37}$?

805.• Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$;

2) $\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

3) $\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$;

4) $\dfrac{\sqrt{3} - 2\sin\alpha}{2\cos\alpha - 1} = \dfrac{1+2\cos\alpha}{2\sin\alpha + \sqrt{3}}$;

5) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=-\operatorname{ctg}^6\alpha;$

6) $\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha;$

7) $1+(\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha;$

8) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha.$

806.˙ **Доведіть тотожність:**

1) $\sin^4\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^4\alpha=\sin^2\alpha\cos^2\alpha;$

2) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha;$

3) $(\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1.$

807.˙ **Доведіть тотожність:**

1) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha=\sin^2\alpha\cos^2\alpha;$

2) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1.$

808.˙ **Доведіть тотожність** $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)=-1.$

809.¨ **Знайдіть значення виразу:**

1) $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{3};$

2) $\dfrac{2\cos^2\alpha-7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha=-2;$

3) $\dfrac{8\sin\alpha-3\cos\alpha}{\sin^3\alpha+5\sin^2\alpha\cos\alpha-8\cos^3\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=-3.$

810.¨ **Знайдіть значення виразу:**

1) $\dfrac{5\cos\alpha+6\sin\alpha}{3\sin\alpha-7\cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2};$

2) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{3}{4};$

3) $\dfrac{2\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}{5\sin\alpha-\cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=-4.$

811.¨ **Спростіть вираз:**

1) $\sqrt{\cos^2\beta(1+\operatorname{tg}\beta)+\sin^2\beta(1+\operatorname{ctg}\beta)}$, якщо $\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2};$

2) $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\cos^2\beta}}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\alpha}$, якщо $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi;$

3) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, якщо $90^\circ<\alpha<180^\circ;$

4) $\sqrt{2-2\cos^2\beta}+\sqrt{2\sin^2\beta-2\sqrt{2}\sin\beta+1}$, якщо $\dfrac{3\pi}{4}\leqslant\beta\leqslant\pi.$

812.•• Спростіть вираз:

1) $\sin\alpha-\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}$, якщо $180° < \alpha < 360°$;

2) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$, якщо $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

3) $\sqrt{4\cos^2\alpha+4\cos\alpha+1}-\sqrt{4-4\sin^2\alpha}$, якщо $\dfrac{2\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\pi$.

813.•• Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha=b$. Знайдіть:

1) $\sin\alpha\cos\alpha$;
2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$;
3) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$;
4) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$;
5) $\dfrac{1}{\sin^4\alpha}+\dfrac{1}{\cos^4\alpha}$.

814.•• Дано: $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=b$. Знайдіть:

1) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$;
2) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$;
3) $\operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha$;
4) $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2$.

815.•• Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $2\cos^2\alpha-3\sin\alpha$;
2) $\operatorname{tg}^2\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}$;
3) $1-\sqrt{\cos^2\alpha}-2\sin^2\alpha$;
4) $3\cos^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

816.•• Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $3\sin^2\alpha+3\cos\alpha$;
2) $1+\sqrt{\sin^2\alpha}+2\cos^2\alpha$;
3) $2\sin^2\alpha+3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

10. Формули додавання

Формулами додавання називають формули, які виражають $\cos(\alpha\pm\beta)$, $\sin(\alpha\pm\beta)$ і $\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)$ через тригонометричні функції кутів α і β.

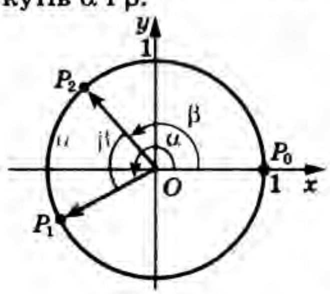


Рис. 194

Доведемо, що

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Нехай точки P_1 і P_2 отримано в результаті повороту точки P_0 (1; 0) на кути α і β відповідно.

Розглянемо випадок, коли

$$0\leqslant\alpha-\beta\leqslant\pi.$$

Тоді кут між векторами $\overline{OP_1}$ і $\overline{OP_2}$ дорівнює $\alpha-\beta$ (рис. 194). Координати точок P_1 і P_2 відповідно дорівнюють

$(\cos\alpha; \sin\alpha)$ і $(\cos\beta; \sin\beta)$. Тоді вектор $\overrightarrow{OP_1}$ має координати $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, а вектор $\overrightarrow{OP_2}$ — $(\cos\beta; \sin\beta)$.

Виразимо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{OP_1}$ і $\overrightarrow{OP_2}$ через їх координати:

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Водночас за означенням скалярного добутку векторів можна записати

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\left|\overrightarrow{OP_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OP_2}\right|\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta).$$

Звідси отримуємо формулу, яку називають **косинус різниці:**

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} \qquad (1)$$

Для доведення формули (1) скалярний добуток векторів $\overrightarrow{OP_1}$ і $\overrightarrow{OP_2}$ можна застосувати і тоді, коли $(\alpha-\beta)\notin[0;\pi]$. У цьому ви зможете переконатися на заняттях математичного гуртка.

Доведемо формулу **косинус суми:**

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

Маємо: $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=$
$=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$

Доведемо формули **синуса суми і синуса різниці:**

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

За допомогою формули (1) доведемо, що

$$\boxed{\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

Маємо: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=\sin\alpha.$

Тепер доведемо, що

$$\boxed{\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

Маємо: $\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$

Тоді $\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Формули тангенса суми і тангенса різниці мають вигляд:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad (3)$$

Доведемо формулу (2). Маємо:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Припустивши, що $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$, отриманий дріб можна переписати так:

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Формулу тангенса різниці (3) доведіть самостійно.

Тотожність (2) є правильною для всіх α і β, при яких $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$.

Тотожність (3) є правильною для всіх α і β, при яких $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos(60^\circ + \alpha)}{2\sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha}$.

Розв'язання. Маємо: $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos(60^\circ + \alpha)}{2\sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} =$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2(\cos 60^\circ\cos\alpha - \sin 60^\circ\sin\alpha)}{2(\sin 60^\circ\cos\alpha + \cos 60^\circ\sin\alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

ПРИКЛАД 2 Доведіть тотожність: 1) $\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;
2) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

Розв'язання. 1) $\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha - \frac{\cos\alpha \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} =$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

2) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta} = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть значення виразу $\frac{1 - \operatorname{tg}70^\circ \operatorname{tg}65^\circ}{\operatorname{tg}70^\circ + \operatorname{tg}65^\circ}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу тангенса суми кутів 70° і 65°, маємо: $\frac{1 - \operatorname{tg}70^\circ \operatorname{tg}65^\circ}{\operatorname{tg}70^\circ + \operatorname{tg}65^\circ} = \frac{1}{\operatorname{tg}(70^\circ + 65^\circ)} = \frac{1}{\operatorname{tg}135^\circ} = \operatorname{ctg}135^\circ =$
$= \operatorname{ctg}(180^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{ctg}45^\circ = -1.$

ПРИКЛАД 4 Знайдіть $\cos 15^\circ$.

Розв'язання. Маємо: $\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) =$
$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

ПРИКЛАД 5 Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$.

Розв'язання. Представимо даний вираз у вигляді синуса суми. Для цього помножимо і поділимо даний вираз на 2:

$$\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = 2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right).$$

Ураховуючи, що $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$, отримуємо:

$\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = 2(\sin 30^\circ \cos\alpha + \cos 30^\circ \sin\alpha) = 2\sin(30^\circ + \alpha)$.

Отже, найбільше значення даного виразу дорівнює 2 (його вираз набуває при $\sin(30^\circ + \alpha) = 1$), найменше значення дорівнює -2 (його вираз набуває при $\sin(30^\circ + \alpha) = -1$).

ПРИКЛАД 8 Дано: $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$. **Знайдіть $\alpha + \beta$.**

Розв'язання. **Оскільки $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$, то $0° < \alpha + \beta < 180°$. На проміжку $(0°; 180°)$ косинус набуває кожного свого значення з проміжку $(-1; 1)$ один раз. Отже, знайшовши $\cos(\alpha + \beta)$, можна визначити і значення $\alpha + \beta$. Маємо:**

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Тоді $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{5}{\sqrt{50}} = -\frac{5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Беручи до уваги, що $0° < \alpha + \beta < 180°$, отримуємо $\alpha + \beta = 135°$.

Вправи

817.° Спростіть вираз:

1) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$;
2) $\sin(30° + \alpha) - \cos(60° + \alpha)$;
3) $\sqrt{2}\sin(\alpha - 45°) - \sin\alpha + \cos\alpha$;
4) $2\cos(60° - \alpha) - \sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$.

818.° Спростіть вираз:

1) $\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)$;
2) $\sin(30° - \alpha) + \cos(60° - \alpha)$;
3) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\alpha - \sin\alpha$.

819.° Спростіть вираз:

1) $\sin\alpha\cos 4\alpha + \cos\alpha\sin 4\alpha$;
2) $\cos 17°\cos 43° - \sin 17°\sin 43°$;
3) $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$;
4) $\sin\alpha\sin(\alpha + \beta) + \cos\alpha\cos(\alpha + \beta)$;
5) $\sin 53°\cos 7° - \cos 53°\sin(-7°)$;
6) $\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta)$;
7) $(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2$;
8) $\frac{\sin 20°\cos 5° - \cos 20°\sin 5°}{\cos 10°\cos 5° - \sin 10°\sin 5°}$;
9) $\cos(\alpha + \beta) + 2\sin\alpha\sin\beta$.

820.° Спростіть вираз:

1) $\cos 6\alpha \cos 2\alpha - \sin 6\alpha \sin 2\alpha$;

2) $\sin 12° \cos 18° + \sin 18° \cos 12°$;

3) $\sin(-15°) \cos 75° + \cos 15° \sin 75°$;

4) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$;

5) $\dfrac{\cos 64° \cos 4° + \sin 64° \sin 4°}{\sin 19° \cos 41° + \sin 41° \cos 19°}$;

6) $\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta$.

821.° Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{4}$. Знайдіть значення виразу $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

822.° Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\operatorname{tg}\beta = 5$. Знайдіть значення виразу $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

823.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 13° + \operatorname{tg} 47°}{1 - \operatorname{tg} 13° \operatorname{tg} 47°}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg} 1° - \operatorname{tg} 46°}{1 + \operatorname{tg} 1° \operatorname{tg} 46°}$;

3) $\dfrac{1 - \operatorname{tg} 27° \operatorname{tg} 33°}{\operatorname{tg} 27° + \operatorname{tg} 33°}$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{9} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{36}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{9} \operatorname{tg}\frac{5\pi}{36}}$.

824.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 24° + \operatorname{tg} 36°}{1 - \operatorname{tg} 24° \operatorname{tg} 36°}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg} 5\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha}{1 + \operatorname{tg} 5\alpha \operatorname{tg} 3\alpha}$.

825.° Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta} = 1$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$;

3) $\dfrac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos(45° + \alpha)}{2 \sin(45° + \alpha) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

4) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg} 2\alpha$;

5) $\dfrac{\sin(45° + \alpha) - \cos(45° + \alpha)}{\sin(45° + \alpha) + \cos(45° + \alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$;

6) $\dfrac{\sin \alpha + 2 \sin(60° - \alpha)}{2 \cos(30° - \alpha) - \sqrt{3} \cos \alpha} = \sqrt{3} \operatorname{ctg}\alpha$.

826.° Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha}=1;$

2) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin(45^\circ-\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\sqrt{2};$

3) $\frac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta).$

827.° Дано: $\sin\alpha=\frac{9}{41}$, $90^\circ<\alpha<180^\circ$. Знайдіть $\sin(\alpha+45^\circ)$.

828.° Дано: $\cos\alpha=-0{,}6$, $180^\circ<\alpha<270^\circ$. Знайдіть $\cos(60^\circ-\alpha)$.

829.° Знайдіть $\cos(\alpha+\beta)$, якщо $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ і $\cos\beta=-\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

830.° Знайдіть $\sin(\alpha-\beta)$, якщо $\sin\alpha=-\frac{15}{17}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ і $\cos\beta=\frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$.

831.° Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\sin\beta=\frac{3}{5}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$. Знайдіть $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

832.• Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$. Знайдіть $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$.

833.• Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$ 2) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$

834.° Доведіть тотожність $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

835.° Спростіть вираз:

1) $\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{2};$ 3) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha};$

2) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha;$ 4) $\frac{\cos2\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin2\alpha}{\sin\alpha}.$

836.° Спростіть вираз:

1) $\cos2\alpha+\sin2\alpha\operatorname{tg}\alpha;$ 2) $\cos4\alpha-\sin4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha.$

837.• Користуючись формулами додавання, знайдіть:

1) $\sin15^\circ;$ 2) $\sin105^\circ;$ 3) $\operatorname{ctg}105^\circ.$

838.• Користуючись формулами додавання, знайдіть:

1) $\cos75^\circ;$ 2) $\sin75^\circ.$

839.$^{\bullet}$ **Доведіть тотожність:**

1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;
2) $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2-2=2\cos(\alpha+\beta)$;
3) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$;
4) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}+2\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$.

840.$^{\bullet}$ **Доведіть тотожність:**

1) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;
2) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=0$.

841.$^{\bullet\bullet}$ **Знайдіть найбільше значення виразу:**

1) $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$;
2) $4\sin\alpha+5\cos\alpha$;
3) $\sin\alpha+\cos\alpha$;
4) $2\sin\alpha-\cos\alpha$.

842.$^{\bullet\bullet}$ **Знайдіть найбільше значення виразу:**

1) $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha$; 2) $\sqrt{5}\cos\alpha-2\sqrt{5}\sin\alpha$; 3) $3\sin\alpha+\cos\alpha$.

843.$^{\bullet\bullet}$ **Дано:** $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=-\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{5\pi}{6}<\alpha<\dfrac{4\pi}{3}$. **Знайдіть** $\sin\alpha$.

844.$^{\bullet\bullet}$ **Дано:** $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$. **Знайдіть** $\sin\alpha$.

845.$^{\bullet\bullet}$ **Дано:** $\cos(5^\circ+\alpha)=0{,}6$, $0^\circ<\alpha<55^\circ$. **Знайдіть** $\operatorname{tg}(35^\circ+\alpha)$.

846.$^{\bullet\bullet}$ **Дано:** $\sin(40^\circ+\alpha)=b$, $0^\circ<\alpha<45^\circ$. **Знайдіть** $\cos(70^\circ+\alpha)$.

847.$^{\bullet\bullet}$ **Дано:** $\sin 10^\circ=b$. **Знайдіть** $\sin 35^\circ$.

848.$^{\bullet\bullet}$ **Дано:** $\operatorname{tg}(\alpha-45^\circ)=3$. **Знайдіть** $\operatorname{tg}\alpha$.

849.$^{\bullet\bullet}$ **Дано:** $\operatorname{tg}(5^\circ+\alpha)=\dfrac{1}{3}$, $0^\circ<\alpha<40^\circ$. **Знайдіть** $\cos(50^\circ+\alpha)$.

850.$^{\bullet\bullet}$ **Дано:** $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{5}{3}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$. **Знайдіть** $\alpha-\beta$.

851.$^{\bullet\bullet}$ **Дано:** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$. **Знайдіть** $\alpha+\beta$.

852.$^{\bullet\bullet}$ **Дано:** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin\beta=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$. **Знайдіть** $\alpha+\beta$.

853.$^{\bullet\bullet}$ **Дано:** $\operatorname{tg}\alpha=5$, $\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{2}{3}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$. **Доведіть, що** $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$.

854.$^{\bullet\bullet}$ **Дано:** $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{3}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$. **Знайдіть** $\alpha+\beta$.

855.** Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}x}$; 2) $y=\dfrac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}$.

856.** Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}x}$; 2) $y=\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{\operatorname{tg}x+1}$.

857.* Доведіть, що коли α, β, γ — кути гострокутного трикутника, то $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

858.* Доведіть, що коли α, β, γ — кути трикутника, то

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1.$$

859.* Обчисліть $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)$, якщо $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

860.* Обчисліть $(1+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\beta)$, якщо $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

861.* Доведіть нерівність $\sin(\alpha+\beta)<\cos\alpha+\cos\beta$, де $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

862.* Доведіть нерівність $\cos(\alpha-\beta)<\cos\alpha+\sin\beta$, де $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

41. Формули зведення

Періодичність тригонометричних функцій дозволяє зводити обчислення значень синуса і косинуса до випадку, коли значення аргументу належить проміжку $[0;\ 2\pi]$, а значень тангенса і котангенса — до випадку, коли значення аргументу належить $[0;\ \pi]$. У цьому пункті ми розглянемо формули, які дозволяють у таких обчисленнях обмежитись лише кутами від 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Кожний кут у межах від 0 до 2π можна подати у вигляді $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, або $\pi\pm\alpha$, або $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, де $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Наприклад, $\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$.

Обчислення синусів і косинусів кутів виду $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ можна звести до обчислення синуса або косинуса кута α. Наприклад:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = -\sin\alpha;$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = \sin\alpha.$$

Застосовуючи формули додавання, аналогічно можна отримати:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha$

Ці шість формул називають **формулами зведення для синуса.**

Наступні шість формул називають **формулами зведення для косинуса**:

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\sin\alpha$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha$

Ці тотожності теж легко отримати, застосувавши формули додавання.

Обчислення тангенсів і котангенсів кутів виду $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ можна звести до обчислення тангенса або котангенса кута α. Наприклад:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Аналогічно можна отримати:

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha$

Ці чотири формули називають **формулами зведення для тангенса і котангенса.**

Проаналізувавши записані 16 формул зведення, можна помітити закономірності, які роблять заучування цих формул не обов'язковим.

Для того щоб записати будь-яку з них, можна керуватися такими правилами.

1. ***У правій частині рівності ставлять той знак, який має ліва частина за умови, що $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.***

2. ***Якщо в лівій частині формули аргумент має вигляд $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ або $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, то синус міняють на косинус, тангенс — на котангенс, і навпаки. Якщо аргумент має вигляд $\pi\pm\alpha$, то зміни функції не відбувається.***

Покажемо, як працюють ці правила для виразу $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

Припустивши, що $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, доходимо висновку: $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ є кутом III чверті. Тоді $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)<0$. За першим правилом у правій частині рівності має стояти знак «−».

Оскільки аргумент має вигляд $\frac{3\pi}{2}-\alpha$, то за другим правилом слід замінити синус на косинус.

Отже, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

ПРИКЛАД 1 Зведіть до тригонометричної функції кута α: 1) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 2) $\operatorname{ctg}(\alpha-90°)$.

Розв'язання. 1) Маємо: $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2=$

$$=(-\sin\alpha)^2=\sin^2\alpha.$$

$$2)\ \operatorname{ctg}(\alpha-90°)=-\operatorname{ctg}(90°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha.$$

ПРИКЛАД 2 Замініть значення тригонометричної функції значенням функції гострого кута: 1) $\cos\frac{9\pi}{10}$; 2) $\cos\frac{8\pi}{7}$; 3) $\operatorname{tg}(-125°)$.

Розв'язання. 1) $\cos\frac{9\pi}{10}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{10}\right)=-\cos\frac{\pi}{10}$;

2) $\cos\frac{8\pi}{7}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)=-\cos\frac{\pi}{7}$;

3) $\operatorname{tg}(-125°)=-\operatorname{tg}125°=-\operatorname{tg}(90°+35°)=-(-\operatorname{ctg}35°)=\operatorname{ctg}35°$.

ПРИКЛАД 3 Обчисліть: 1) sin 930°; 2) cos (−480°).

Розв'язання. 1) $\sin 930° = \sin(360° \cdot 2 + 210°) = \sin 210° =$

$$= \sin(180° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2};$$

2) $\cos(-480°) = \cos 480° = \cos(360° + 120°) = \cos 120° =$

$$= \cos(90° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}.$$

ПРИКЛАД 4 Обчисліть $\operatorname{tg} 41° \operatorname{tg} 42° \operatorname{tg} 43° \operatorname{tg} 44° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 49°$.

Розв'язання. Маємо: $\operatorname{tg} 49° = \operatorname{ctg} 41°$, $\operatorname{tg} 48° = \operatorname{ctg} 42°$ і т. д. Тоді, об'єднавши попарно множники, які рівновіддалені від кінців добутку, отримаємо чотири добутки, кожний з яких дорівнює 1:

$$\operatorname{tg} 41° \operatorname{tg} 49° = \operatorname{tg} 42° \operatorname{tg} 48° = \operatorname{tg} 43° \operatorname{tg} 47° = \operatorname{tg} 44° \operatorname{tg} 46° = 1.$$

Ще один множник даного добутку $\operatorname{tg} 45° = 1$. Отже,

$$\operatorname{tg} 41° \operatorname{tg} 42° \operatorname{tg} 43° \operatorname{tg} 44° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 49° = 1.$$

ПРИКЛАД 5 Спростіть вираз:

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\alpha - \pi).$$

Розв'язання. Маємо: $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

Оскільки $\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\pi}{2}$, то $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$. Отже,

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\alpha - \pi) =$$

$$= \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} \cdot \left(-\operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) + \sin\alpha \cdot (-\sin\alpha) =$$

$$= -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot \left(-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha.$$

Вправи

863.° Зведіть до тригонометричної функції кута α:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 4) $\cos(-\alpha + 270°)$; 7) $\mathrm{ctg}^2(90° + \alpha)$;

2) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; 5) $\cos(\alpha - 180°)$; 8) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

3) $\sin(\pi - \alpha)$; 6) $\cos^2(3\pi - \alpha)$; 9) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

864.° Зведіть до тригонометричної функції кута α:

1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 3) $\cos(\pi - \alpha)$; 5) $\sin(180° + \alpha)$;

2) $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; 4) $\mathrm{ctg}(\alpha - 270°)$; 6) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$.

865.° Зведіть до тригонометричної функції найменшого додатного аргументу:

1) $\cos 123°$; 2) $\sin 216°$; 3) $\cos(-218°)$; 4) $\cos\frac{5\pi}{9}$.

866.° Зведіть до тригонометричної функції найменшого додатного аргументу:

1) $\mathrm{tg}\, 124°$; 2) $\sin(-305°)$; 3) $\mathrm{ctg}(-0{,}7\pi)$; 4) $\sin\frac{14\pi}{15}$.

867.° Обчисліть:

1) $\cos 225°$; 2) $\sin 240°$; 3) $\cos\frac{5\pi}{4}$; 4) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

868.° Обчисліть:

1) $\mathrm{tg}\, 210°$; 2) $\mathrm{ctg}\, 315°$; 3) $\cos(-150°)$; 4) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$.

869.° Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)$; 4) $\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$;

2) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; 5) $\cos^2(\pi+\alpha)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

3) $\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 6) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

870.° Спростіть вираз:

1) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)$;

2) $\sin(270° - \alpha) + \cos(270° + \alpha)$;

3) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)$;

4) $\sin^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

871.° **Обчисліть:**

1) $3\operatorname{tg}135^\circ-2\sin150^\circ+\operatorname{tg}300^\circ-2\sin240^\circ$;

2) $\dfrac{\sin^2 315^\circ\cos300^\circ+\operatorname{tg}(-315^\circ)}{\sin(-120^\circ)\cos150^\circ}$;

3) $\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{6}\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$;

4) $\dfrac{\sin20^\circ\cos10^\circ+\cos160^\circ\cos100^\circ}{\sin21^\circ\cos9^\circ+\cos159^\circ\cos99^\circ}$;

5) $\dfrac{\cos66^\circ\cos6^\circ+\cos84^\circ\cos24^\circ}{\cos65^\circ\cos5^\circ+\cos85^\circ\cos25^\circ}$.

872.° **Знайдіть значення виразу:**

1) $4\cos225^\circ-6\cos120^\circ+3\operatorname{ctg}300^\circ+\operatorname{tg}240^\circ$;

2) $\dfrac{6\cos^2(-240^\circ)\operatorname{ctg}210^\circ}{\sin(-300^\circ)\cos^2 180^\circ}$;

3) $\sin\frac{7\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}$;

4) $\dfrac{\cos64^\circ\cos4^\circ-\cos86^\circ\cos26^\circ}{\cos71^\circ\cos41^\circ-\cos49^\circ\cos19^\circ}$.

873.• **Спростіть вираз:**

1) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha)}$;

2) $\sin(\pi-\beta)\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos(\pi-\beta)$;

3) $\sin(90^\circ+\alpha)\sin(180^\circ-\alpha)(\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}(270^\circ-\alpha))$;

4) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\sin^2(\alpha-\pi)\sin^2(\alpha+\pi)-\cos^2(\alpha+\pi)\cos^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$;

5) $\sin^2(\pi-x)+\operatorname{tg}^2(\pi-x)\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos(x-2\pi)$;

6) $\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi-x)\right)^2+\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cos(2\pi-x)\right)^2$;

7) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-x)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}{\cos(\pi+x)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}$;

8) $\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)}{\text{ctg}^2(x-2\pi)}+\dfrac{\sin^2(-x)}{\text{ctg}^2\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)}$;

9) $\dfrac{\text{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\left(\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi+\alpha)\right)}{\text{ctg}(\pi+\alpha)(\cos(2\pi+\alpha)-\sin(2\pi-\alpha))}$;

10) $(\text{ctg}(6{,}5\pi-\alpha)\cos(-\alpha)+\cos(\pi-\alpha))^2+\dfrac{2\sin^2(\pi-\alpha)}{\text{tg}(\alpha-\pi)}$;

11) $\sqrt[3]{\dfrac{\sin^{-1}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos^{-1}\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}}$.

874.* **Доведіть тотожність:**

1) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\sin(\alpha+2\pi)}{\text{tg}(\pi+\alpha)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}=-\cos\alpha$;

2) $\sin(\pi+x)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\cos(2\pi+x)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=-1$;

3) $\dfrac{\text{tg}(180°-\alpha)\cos(180°-\alpha)\,\text{tg}(90°-\alpha)}{\sin(90°+\alpha)\,\text{ctg}(90°+\alpha)\,\text{tg}(90°+\alpha)}=1$;

4) $\sin(2\pi-\varphi)\,\text{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\varphi\right)-\cos(\varphi-\pi)-\sin(\varphi-\pi)=\sin\varphi$;

5) $\dfrac{\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos(2\pi-\alpha)}{\text{ctg}(\pi+\alpha)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\sin\alpha$;

6) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}-\dfrac{\text{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\text{ctg}(\pi-\alpha)}+\text{tg}(\pi-\alpha)=-1$;

7) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\,\text{tg}(\pi-\alpha)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\text{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}=-1$;

8) $\sqrt{\sin^{-2}\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)+\cos^{-2}\left(\alpha+\dfrac{5\pi}{2}\right)}=\dfrac{1}{|\sin\alpha\cos\alpha|}$.

875.** **Обчисліть:**

1) $\text{ctg}\,5°\,\text{ctg}\,15°\,\text{ctg}\,25°\cdot\ldots\cdot\text{ctg}\,75°\,\text{ctg}\,85°$;

2) $\text{tg}\,20°+\text{tg}\,40°+\text{tg}\,60°+\ldots+\text{tg}\,160°+\text{tg}\,180°$;

3) $\sin 0°+\sin 1°+\sin 2°+\ldots+\sin 359°+\sin 360°$.

876.'' **Обчисліть:**

1) $\sin 110^\circ + \sin 130^\circ + \sin 150^\circ + \ldots + \sin 230^\circ + \sin 250^\circ + \sin 270^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg}^\circ 30^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 80^\circ$;

3) $\operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ + \ldots + \operatorname{ctg} 165^\circ$.

877.'' **Доведіть тотожність:**

1) $\dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)} + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) = 1$;

2) $\dfrac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin^4\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)-1} = -\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha$;

3) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)(\operatorname{tg}^2\alpha-1)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)\sin^{-2}\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)=2$.

878.'' **Знайдіть значення виразу**

$$\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{11}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{22}.$$

879.'' **Спростіть вираз:**

1) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$;

2) $\dfrac{\cos^2(20^\circ-\alpha)}{\sin^2(70^\circ+\alpha)}+\operatorname{tg}(\alpha+10^\circ)\operatorname{ctg}(80^\circ-\alpha)$.

42. Формули подвійного, потрійного і половинного аргументів

Формули, які виражають тригонометричні функції аргументу 2α через тригонометричні функції аргументу α, називають формулами подвійного аргументу.

У формулах додавання

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

покладемо $\beta = \alpha$.

Отримаємо:

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

Ці формули відповідно називають **формулами косинуса, синуса і тангенса подвійного аргументу.**

Оскільки $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ і $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, то з формули $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ отримуємо ще дві формули:

$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

Інколи ці формули зручно використовувати в такому вигляді:

$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$
$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$

або в такому вигляді:

$\sin^2 \alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
$\cos^2 \alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

Дві останні формули називають **формулами пониження степеня.**

ПРИКЛАД 1 Виразіть дану тригонометричну функцію через функції вдвічі меншого аргументу: 1) $\cos \dfrac{\alpha}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)$.

Розв'язання. 1) Маємо: $\dfrac{\alpha}{2} = 2 \cdot \dfrac{\alpha}{4}$. Тоді $\cos \dfrac{\alpha}{2} = \cos^2 \dfrac{\alpha}{4} - \sin^2 \dfrac{\alpha}{4}$;

2) Маємо: $\dfrac{\pi}{3} + \alpha = 2 \cdot \left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\alpha}{2}\right)$. Тоді $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) = \dfrac{2 \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

ПРИКЛАД 2 Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}}$; 3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$; 5) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$;

2) $\dfrac{\sin\alpha}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$; 4) $1-8\sin^2\beta\cos^2\beta$; 6) $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи формулу косинуса подвійного аргументу $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ і формулу різниці квадратів, отримуємо:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}=-\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

2) Застосовуючи формулу синуса подвійного аргументу для кута $\dfrac{\alpha}{2}$, отримуємо:

$$\frac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos 2\alpha$.

4) $1-8\sin^2\beta\cos^2\beta=1-2\cdot 4\sin^2\beta\cos^2\beta=1-2\sin^2 2\beta=\cos 4\beta$.

5) $$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}=-\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=-\frac{2\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=-2\operatorname{ctg}2\alpha.$$

6) Оскільки сума аргументів $\dfrac{\pi}{4}-\alpha$ і $\dfrac{\pi}{4}+\alpha$ дорівнює $\dfrac{\pi}{2}$, то $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$. Тоді

$$\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha}{2\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}.$$

Застосувавши формулу синуса подвійного аргументу до кута $\dfrac{\pi}{4}-\alpha$, отримуємо:

$$\frac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}=1.$$

ПРИКЛАД 3 Обчисліть $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу тангенса подвійного аргументу, отримуємо: $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}=2\cdot\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}=\dfrac{2}{\operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}=\dfrac{2}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=2.$

ПРИКЛАД 4 Подайте у вигляді добутку вираз: 1) $1+\cos 4\alpha$; 2) $1-\cos 6\alpha$; 3) $1-\sin\alpha$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи формулу $1+\cos 2x=2\cos^2 x$, отримуємо: $1+\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha$.

2) Застосовуючи формулу $1-\cos 2x=2\sin^2 x$, отримуємо:

$$1-\cos 6\alpha=2\sin^2 3\alpha.$$

3) За допомогою формули зведення замінимо синус на косинус і застосуємо формулу $1-\cos 2x=2\sin^2 x$:

$$1-\sin\alpha=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

ПРИКЛАД 5 Спростіть вираз $2\sin^2(45^\circ-\alpha)+\sin 2\alpha$.

Розв'язання. Застосуємо формулу пониження степеня для синуса, а потім формулу зведення. Отримуємо:

$$2\sin^2(45^\circ-\alpha)+\sin 2\alpha=1-\cos(90^\circ-2\alpha)+\sin 2\alpha=$$
$$=1-\sin 2\alpha+\sin 2\alpha=1.$$

ПРИКЛАД 6 Доведіть тотожність $\dfrac{1+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=-\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{4}$.

Розв'язання. Маємо: $\dfrac{1+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\cos^2\frac{\alpha}{4}-2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}{2\sin^2\frac{\alpha}{4}-2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}=$

$$=\frac{2\cos\frac{\alpha}{4}\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{4}\left(\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\right)}=-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}.$$

ПРИКЛАД 7 Доведіть тотожність

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha=\frac{\sin 32\alpha}{32\sin\alpha}.$$

Розв'язання. Помножимо і поділимо ліву частину даної рівності на $\sin\alpha$ та багаторазово застосуємо формулу синуса подвійного аргументу:

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha=\frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{\sin 4\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{4\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 8\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{8\sin\alpha}=\frac{\sin 16\alpha\cos 16\alpha}{16\sin\alpha}=\frac{\sin 32\alpha}{32\sin\alpha}.$$

Формули, які виражають тригонометричні функції аргументу 3α через тригонометричні функції аргументу α, називають формулами потрійного аргументу.

Маємо: $\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=$
$=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha=$
$=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha=2\sin\alpha-2\sin^3\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha=$
$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$

Отже,

$$\boxed{\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}$$

Цю формулу називають **формулою синуса потрійного аргументу.**

Маємо: $\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha=$
$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha\sin\alpha=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha(1-$
$-\cos^2\alpha)=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$

Отже,

$$\boxed{\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}$$

Цю формулу називають **формулою косинуса потрійного аргументу.**

ЗАДАЧА Доведіть тотожність $4\cos\alpha\cos(60°-\alpha)\cos(60°+\alpha)=$
$=\cos 3\alpha.$

Розв'язання. Застосувавши формули косинуса різниці і косинуса суми, отримуємо:

$$4\cos\alpha\cos(60°-\alpha)\cos(60°+\alpha)=$$
$$=4\cos\alpha(\cos 60°\cos\alpha+\sin 60°\sin\alpha)(\cos 60°\cos\alpha-\sin 60°\sin\alpha)=$$

$$= 4\cos\alpha\,(\cos^2 60^\circ \cos^2\alpha - \sin^2 60^\circ \sin^2\alpha) = 4\cos\alpha\left(\frac{1}{4}\cos^2\alpha - \frac{3}{4}\sin^2\alpha\right) =$$

$$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,(1 - \cos^2\alpha) =$$

$$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha.$$

ПРИКЛАД [illegible] Доведіть рівність $16\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = 1$.

Розв'язання. Маємо: $16\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ =$

$$= 16\cdot\frac{1}{2}\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 8\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ.$$

Оскільки $40^\circ = 60^\circ - 20^\circ$, $80^\circ = 60^\circ + 20^\circ$, то можна застосувати тотожність, доведену в ключовій задачі цього пункту (при $\alpha = 20^\circ$):

$$8\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2\cos(3\cdot 20^\circ) = 1.$$

Інше доведення можна отримати, міркуючи так само, як при розв'язуванні приклада 7:

$$16\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{8\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{4\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = 1.$$

Формули, які виражають тригонометричні функції аргументу $\frac{\alpha}{2}$ через тригонометричні функції аргументу α, називають **формулами половинного аргументу**.

Замінивши у формулах пониження степеня α на $\frac{\alpha}{2}$, отримуємо:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}.$$

Почленне ділення першої рівності на другу призводить до формули

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}.$$

Тепер можна записати

$$\boxed{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}}$$

$\left\|\cos\frac{\alpha}{2}\right\|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
$\left\|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right\|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Ці формули називають відповідно **формулами синуса, косинуса і тангенса половинного аргументу.**

ПРИКЛАД 9 Дано: $\operatorname{tg}3\alpha=3\frac{3}{7}$, $60° < \alpha < 90°$. Знайдіть $\sin\frac{3\alpha}{2}$, $\cos\frac{3\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{1}{\cos^2 3\alpha}=1+\operatorname{tg}^2 3\alpha=1+\left(\frac{24}{7}\right)^2=\frac{625}{49}$; $\cos^2 3\alpha=\frac{49}{625}$.

Оскільки $60° < \alpha < 90°$, то $180° < 3\alpha < 270°$. Отже, $\cos 3\alpha < 0$. Тоді $\cos 3\alpha=-\frac{7}{25}$.

Оскільки $90°<\frac{3\alpha}{2}<135°$, то $\sin\frac{3\alpha}{2}>0$, а $\cos\frac{3\alpha}{2}<0$. Тоді:

$$\sin\frac{3\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 3\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{7}{25}\right)}=\frac{4}{5},$$

$$\cos\frac{3\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos 3\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{7}{25}\right)}=-\frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{\cos\frac{3\alpha}{2}}=-\frac{4}{3}.$$

ПРИКЛАД 10 Знайдіть $\sin 22°30'$ і $\cos 22°30'$.

Розв'язання. Використовуючи формули половинного аргументу, отримуємо:

$$\sin 22°30'=\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$

$$\cos 22°30'=\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

ПРИКЛАД [illegible] Спростіть вираз $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.

Розв'язання. Маємо: $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=$

$$=\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|+\left|\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right|=\frac{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}+\frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}=\frac{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|^2+\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|^2}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}=$$

$$=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|}=\frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|}=\frac{2}{\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|}=\frac{2}{|\sin\alpha|}.$$

За допомогою формул подвійного аргументу можна виразити $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Маємо: $\sin\alpha=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Припустивши, що $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$, поділимо чисельник і знаменник отриманого дробу на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Отже,

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}$$

Маємо: $\cos\alpha=\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Припустивши, що $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$, поділимо чисельник і знаменник отриманого дробу на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$:

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Отже,

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}}$$

ПРИКЛАД 12 Дано: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 3$. Знайдіть $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Розв'язання. Маємо: $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\cdot 3}{1+9} = 0{,}6;$

$\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{1-9}{1+9} = -0{,}8.$ Тоді $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}6 - 0{,}8 = -0{,}2$.

ПРИКЛАД 13 Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $2\operatorname{ctg}^2\alpha + 7\operatorname{ctg}\alpha + 3 = 0$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$.

Розв'язання. Розглянемо дану рівність як квадратне рівняння відносно $\operatorname{ctg}\alpha$. Знаходимо $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2}$ або $\operatorname{ctg}\alpha = -3$.

Оскільки $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$, то $\operatorname{ctg}\alpha > \operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4} = -1$ (нагадаємо, що коли α і β – кути IV чверті і $\alpha < \beta$, то $\operatorname{ctg}\alpha > \operatorname{ctg}\beta$). Отже, у даному випадку $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2$. Тоді $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1-4}{1+4} = -\dfrac{3}{5}$.

Вправи

880.° Виразіть дані тригонометричні функції через функції вдвічі меншого аргументу:

1) $\cos\alpha$; 2) $\sin 3\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\cos 8\alpha$; 5) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$; 6) $\operatorname{tg} 7\alpha$.

881.° Виразіть дані тригонометричні функції через функції вдвічі меншого аргументу:

1) $\sin 10\alpha$;
2) $\sin (\alpha - \beta)$;
3) $\cos \frac{\alpha}{4}$;
4) $\cos\left(\frac{x}{2} - 20^\circ\right)$;
5) $\operatorname{tg} 3$;
6) $\operatorname{tg} 12\alpha$.

882.° Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$;
2) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$;
3) $\cos 2\alpha + \sin^2 \alpha$;
4) $\frac{\sin 50^\circ}{2\cos 25^\circ}$;
5) $\frac{\cos 44^\circ + \sin^2 22^\circ}{\cos^2 22^\circ}$;
6) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$;
7) $1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{4}$;
8) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}$;
9) $\frac{\sin^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha}{\sin 2\alpha}$;
10) $(\sin \varphi - \cos \varphi)^2 + \sin 2\varphi$;
11) $\left(\sin\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{4} - \cos\frac{\alpha}{4}\right)$;
12) $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha}$;
13) $\cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin^4\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$;
14) $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 2\sin^2 \alpha}$;
15) $\frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha)}$;
16) $4 \sin \alpha \cos^3 \alpha - 4 \sin^3 \alpha \cos \alpha$.

883.° Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 80^\circ}{\cos 40^\circ}$;
2) $2\cos^2 \frac{11\alpha}{2} - 1$;
3) $\cos 4\beta + \sin^2 2\beta$;
4) $2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ$;
5) $\cos^2 10\varphi - \sin^2 10\varphi$;
6) $\cos 6\alpha + 2\sin^2 3\alpha$;
7) $\frac{\cos 70^\circ}{\cos 35^\circ + \sin 35^\circ}$;
8) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}$;
9) $\sin\alpha \cos\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$;
10) $\frac{\sin 4\alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}$;
11) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$;
12) $\sin^2(\beta - 45^\circ) - \cos^2(\beta - 45^\circ)$;
13) $4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \sin(270^\circ - \alpha)$;
14) $\frac{2 \operatorname{tg} 1,5\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 1,5\alpha}$.

884.° Обчисліть:

1) $2\sin 75° \cos 75°$; 3) $1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$; 5) $\frac{2\,\mathrm{tg}\,165°}{1-\mathrm{tg}^2 165°}$;

2) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$; 4) $\sin 22°30' \cos 22°30'$; 6) $\frac{1-\mathrm{tg}^2 15°}{\mathrm{tg}\,15°}$.

885.° Обчисліть:

1) $\cos^2 22°30' - \sin^2 22°30'$; 3) $2\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}$;

2) $\frac{2\,\mathrm{tg}\,75°}{1-\mathrm{tg}^2 75°}$; 4) $1-2\cos^2\frac{\pi}{12}$.

886.° Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\sin\alpha = -0{,}6$ і $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

887.° Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ і $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

888.° Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

889.° Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\sin\alpha=-\frac{1}{4}$.

890.° Знайдіть $\mathrm{tg}\,2\alpha$, якщо:

1) $\mathrm{tg}\,\alpha = 4$; 2) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$ і $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

891.° Знайдіть $\mathrm{tg}\,2\alpha$, якщо:

1) $\mathrm{ctg}\,\alpha = 2$; 2) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ і $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

892.° Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $1-\cos 4\alpha$; 2) $1+\cos\frac{\alpha}{3}$; 3) $1-\cos 50°$; 4) $1+\sin 2\alpha$.

893.° Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $1-\cos\frac{5\alpha}{6}$; 2) $1+\cos 12\alpha$; 3) $1+\cos 40°$; 4) $1-\sin\frac{\alpha}{2}$.

894.° Понизьте степінь виразу:

1) $\cos^2 8x$; 2) $\sin^2\frac{x}{2}$; 3) $\sin^2(2x-15°)$; 4) $\cos^2\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$.

895. Понизьте степінь виразу:

1) $\sin^2 5x$; 2) $\cos^2\frac{x}{6}$; 3) $\cos^2(4x+10°)$; 4) $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$.

896.° Доведіть тотожність:

1) $2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha = 1$; 3) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}=2$;

2) $\mathrm{ctg}\,3\alpha\,(1-\cos 6\alpha) = \sin 6\alpha$; 4) $\frac{1-\cos 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}=\mathrm{tg}^2 2\alpha$.

897.° **Спростіть вираз:**

1) $2\sin^2(135° - \alpha) - \sin 2\alpha$; 2) $\frac{1+\cos 8\alpha}{\sin 8\alpha}$.

898.° **Знайдіть $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 5$.**

899.° **Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -3$.**

900.° **Дано: $\cos 2\alpha = -0{,}6$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$.**

901.° **Дано: $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Знайдіть $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ і $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.**

902.° **Знайдіть:**

1) $\sin 15°$;
2) $\cos 15°$;
3) $\operatorname{tg} 75°$;
4) $\cos 75°$;
5) $\operatorname{tg} 112°30'$;
6) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

903.• **Спростіть вираз:**

1) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$;

2) $\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$;

3) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$;

4) $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$;

5) $\frac{4\operatorname{tg}\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2}$;

6) $\frac{\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$;

7) $\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$;

8) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

904.• **Спростіть вираз:**

1) $\frac{\cos 6\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha}$;

2) $\frac{2\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$;

3) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$;

4) $\left(\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)\sin 2\alpha$;

5) $(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}2\alpha)\sin 2\alpha$;

6) $\frac{\cos 2\alpha + 1 - \cos^2\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}$.

905.• **Доведіть тотожність:**

1) $\cos^2\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right) = \sin 4\alpha$;

2) $1 + 2\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 4\cos^2\alpha\cos 2\alpha$;

3) $\frac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2}2\alpha - 1} + \frac{1+\cos 4\alpha}{\sin^{-2}2\alpha - 1} = 2$;

4) $\frac{1+\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

5) $\dfrac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^2\alpha - 4}{1 - 8\sin^2\alpha - \cos 4\alpha} = \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^4\alpha;$

6) $\dfrac{\cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{2} + 2\alpha\right)}{(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha;$

7) $\dfrac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{2}\sin 4\alpha;$

8) $\dfrac{2\cos 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \alpha).$

906.$^\bullet$ **Доведіть тотожність:**

1) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{4} - 4\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + 4\alpha\right) = -\sin 8\alpha;$

2) $1 - 2\cos 3\alpha + \cos 6\alpha = -4\sin^2\frac{3\alpha}{2}\cos 3\alpha;$

3) $\dfrac{\sin^2\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right)} = -\dfrac{1}{4}\sin 8\alpha;$

4) $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}.$

907.$^\bullet$ **Доведіть, що $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 4$.**

908.$^\bullet$ **Доведіть, що $\operatorname{tg} 75^\circ - \operatorname{ctg} 75^\circ = 2\sqrt{3}$.**

909.$^\bullet$ **Доведіть тотожність:**

1) $\dfrac{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 3;$ 2) $\dfrac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$

910.$^\bullet$ **Доведіть тотожність** $\dfrac{\sin 3\alpha + 4\sin^3\alpha}{\cos 3\alpha - 4\cos^3\alpha} = \dfrac{\cos 3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin 3\alpha + \sin^3\alpha}.$

911.$^\bullet$ **Дано:** $\sin 2\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $135^\circ < \alpha < 180^\circ$. **Знайдіть** $\sin\alpha$.

912.$^\bullet$ **Дано:** $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $90^\circ < \dfrac{\alpha}{2} < 135^\circ$. **Знайдіть** $\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

913.$^\bullet$ **Дано:** $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 6$. **Знайдіть** $\sin\alpha - \cos\alpha$.

914.$^\bullet$ **Обчисліть** $2 - 13\cos 2\alpha + \dfrac{1}{\sin 2\alpha}$, **якщо** $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{1}{5}$.

915.$^\bullet$ **Обчисліть** $1 + 5\sin 2\alpha - \dfrac{3}{\cos 2\alpha}$, **якщо** $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

916.$^{\bullet\bullet}$ **Знайдіть** $\sin 2\alpha$, **якщо** $\cos\alpha + \sin\alpha = \dfrac{1}{3}$.

917.** Знайдіть $\sin\alpha$, якщо $\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}$.

918.** Спростіть вираз:

1) $\cos^4\alpha-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^4\alpha$;

2) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin 2\alpha}$;

3) $\dfrac{2\sin 4\alpha\,(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)}{1+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}$;

4) $\dfrac{\sin^2 2\alpha+4\sin^4\alpha-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4-\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}$;

5) $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$;

6) $\dfrac{2\sin^2 4\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)}$.

919.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha\,(\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin^2 3\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{\cos^2 3\alpha}{\cos^2\alpha}$;

3) $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}$;

4) $\dfrac{\sin^2(\alpha-\pi)-4\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)-4+4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}$;

5) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin 3\alpha\cos\alpha-\cos 3\alpha\sin\alpha}$;

6) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+4\alpha\right)}{1-2\cos^2 4\alpha}$.

920.** Доведіть, що:

1) $\sin 18^\circ\cos 36^\circ=\frac{1}{4}$;

2) $8\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=1$;

3) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{8}$;

4) $\sin 6^\circ\sin 42^\circ\cos 12^\circ\cos 24^\circ=\frac{1}{16}$;

5) $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha\cos 32\alpha=\dfrac{\sin 64\alpha}{64\sin\alpha}$.

921.** **Доведіть, що:**

1) $\sin 54° \cos 72° = \frac{1}{4}$;

2) $8 \cos\frac{\pi}{7} \cos\frac{2\pi}{7} \cos\frac{4\pi}{7} = -1$;

3) $\cos 3\alpha \cos 6\alpha \cos 12\alpha = \frac{\sin 24\alpha}{8 \sin 3\alpha}$;

4) $\cos\frac{\pi}{15} \cos\frac{2\pi}{15} \cos\frac{3\pi}{15} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{7\pi}{15} = \frac{1}{128}$.

922.** **Доведіть тотожність:**

1) $3 + 4 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha = 8 \cos^4 2\alpha$;

2) $\frac{\cos^2(4\alpha - 3\pi) - 4\cos^2(2\alpha - \pi) + 3}{\cos^2(4\alpha + 3\pi) + 4\cos^2(2\alpha + \pi) - 1} = \operatorname{tg}^4 2\alpha$;

3) $\frac{4\sin^4\left(2\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin^4\left(2\alpha - \frac{9\pi}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{5\pi}{2} - 2\alpha\right) - 1} = -2\operatorname{ctg}^2 2\alpha$.

923.** **Спростіть вираз:**

1) $\frac{3 + 4\cos\alpha + \cos 2\alpha}{3 - 4\cos\alpha + \cos 2\alpha}$;

2) $\frac{\cos^4(\alpha - \pi)}{\cos^4\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \sin^4\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) - 1}$;

3) $\frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha - \cos^2\alpha}{2(\cos\alpha - 1)}$.

924.** **Спростіть вираз:**

1) $\sqrt{(\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha)\cos 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) $\sqrt{\frac{\sin 4\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} + 1$, якщо $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$.

925.** **Спростіть вираз:**

1) $\sqrt{(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)\, 2\operatorname{ctg} 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + 2$, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$;

2) $\sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}}$, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.

926.** **Доведіть тотожність:**

1) $4\sin\alpha \sin(60° - \alpha)\sin(60° + \alpha) = \sin 3\alpha$;

2) $16 \sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = 3$;

3) $\frac{4\sin 20° \sin 50° \sin 70°}{\sin 80°} = 1$.

927.'' Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha$;

2) $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}$.

928.'' Доведіть тотожність $\sin 3\alpha \sin^3 \alpha + \cos 3\alpha \cos^3 \alpha = \cos^3 2\alpha$.

929.'' Доведіть тотожність $\sin^3 2\alpha \cos 6\alpha + \cos^3 2\alpha \sin 6\alpha = \frac{3}{4}\sin 8\alpha$.

930.'' Спростіть вираз:

1) $\sqrt{0{,}5+0{,}5\sqrt{0{,}5+0{,}5\cos\alpha}}$, якщо $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$;

2) $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos 2\alpha}} - \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos 2\alpha}}$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

3) $\frac{\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1-\sin\alpha}} - \frac{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1+\sin\alpha}}$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

931.'' Спростіть вираз:

1) $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\alpha}}$, якщо $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$;

2) $\sqrt{0{,}5+0{,}5\sqrt{0{,}5+0{,}5\sqrt{0{,}5+0{,}5\cos\alpha}}}$, якщо $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$;

3) $\sqrt{1+\sin\varphi} - \sqrt{1-\sin\varphi}$, якщо $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

932.'' Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $2\operatorname{tg}^2\alpha - 7\operatorname{tg}\alpha + 3 = 0$ і $\frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

933.'' Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{5}$. Знайдіть $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

934.* Обчисліть $\sin 18^\circ$.

43. Формули для перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток

У цьому пункті ми розглянемо формули, які дозволяють перетворити суму та різницю синусів (косинусів) у добуток.

Запишемо формули додавання для синуса:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad (1)$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y. \quad (2)$$

Додаючи почленно ліві і праві частини цих рівностей, отримаємо:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y. \quad (3)$$

Введемо позначення:

$$x + y = \alpha,$$
$$x - y = \beta.$$

Звідси $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Зазначимо, що α і β можуть набувати будь-яких значень.

Тоді рівність (3) можна переписати так:

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Цю тотожність називають **формулою суми синусів.**

Віднімемо почленно від рівності (1) рівність (2):

$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2\cos x \sin y.$$

Якщо скористатися раніше введеними позначеннями, то отримаємо рівність, яку називають **формулою різниці синусів**:

$$\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Запишемо формули додавання для косинуса:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Додаючи і віднімаючи почленно ці рівності, відповідно отримуємо:

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos x \cos y; \qquad (4)$$
$$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2\sin x \sin y. \qquad (5)$$

Звідси, ввівши позначення $x + y = \alpha$ і $x - y = \beta$, отримаємо відповідно **формули суми і різниці косинусів**:

$$\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\boxed{\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Перетворимо у добуток вираз $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$.

Маємо:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Рівність

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

називають **формулою суми тангенсів.**

Аналогічно можна довести такі три рівності:

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Їх називають формулами відповідно **різниці тангенсів, суми котангенсів, різниці котангенсів.**

ПРИКЛАД 1 Перетворіть у добуток: 1) $1+\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\sqrt{3}-2\sin\alpha$.

Розв'язання

1) $1+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\alpha}$;

2) $\sqrt{3}-2\sin\alpha=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\right)=$

$$=2\cdot2\sin\frac{\frac{\pi}{3}-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}+\alpha}{2}=4\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

ПРИКЛАД 2 Перетворіть у добуток вираз $\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha$.

Розв'язання. Перетворимо суму $\sin 3\alpha+\sin 7\alpha$ у добуток. Маємо:

$$\sin 3\alpha+\sin 7\alpha+\sin 5\alpha=2\sin 5\alpha\cos 2\alpha+\sin 5\alpha=2\sin 5\alpha\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right).$$

Подамо $\frac{1}{2}$ як $\cos\frac{\pi}{3}$. Маємо:

$$2\sin 5\alpha\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right)=2\sin 5\alpha\left(\cos 2\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=2\sin 5\alpha\cdot2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=4\sin 5\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

ПРИКЛАД 3 Доведіть тотожність $\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=$ $=\sin 2\alpha\sin 2\beta$.

Розв'язання. Застосуємо формули пониження степеня, потім перетворимо отриману різницю косинусів:

$$\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=\frac{1-\cos(2\alpha+2\beta)}{2}-\frac{1-\cos(2\alpha-2\beta)}{2}=$$

$$= \frac{1 - \cos(2\alpha + 2\beta) - 1 + \cos(2\alpha - 2\beta)}{2} = \frac{\cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\alpha + 2\beta)}{2} =$$

$$= -\sin\frac{2\alpha - 2\beta + 2\alpha + 2\beta}{2}\sin\frac{2\alpha - 2\beta - 2\alpha - 2\beta}{2} = \sin 2\alpha \sin 2\beta.$$

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що коли $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то:
$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Розв'язання. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} + \sin^2\gamma =$

$$= 1 - \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} + \sin^2\gamma = 1 - \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + 1 - \cos^2\gamma =$$

$$= 2 - \cos(\pi - \gamma)\cos(\alpha - \beta) - \cos^2\gamma = 2 + \cos\gamma\cos(\alpha - \beta) - \cos^2\gamma =$$

$$= 2 + \cos\gamma(\cos(\alpha - \beta) - \cos\gamma) = 2 + \cos\gamma(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\pi - (\alpha + \beta))) =$$

$$= 2 + \cos\gamma(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) = 2 + 2\cos\gamma\cos\alpha\cos\beta.$$

Вправи

935.° Перетворіть у добуток:

1) $\cos 2\alpha - \cos 4\alpha$;
2) $\sin\beta + \sin 4\beta$;
3) $\cos\frac{\pi}{18} + \cos\frac{\pi}{12}$;
4) $\text{ctg}\, 5\alpha - \text{ctg}\,\alpha$;
5) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$;
6) $\text{tg}\,\alpha - \text{tg}(\alpha - 30°)$;
7) $\text{ctg}(45° - \alpha) - \text{ctg}(45° + \alpha)$.

936.° Перетворіть у добуток:

1) $\cos 16° - \cos 36°$;
2) $\sin 28° + \sin 12°$;
3) $\cos 3\alpha + \cos 5\alpha$;
4) $\text{ctg}\, 55° - \text{ctg}\, 15°$;
5) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$;
6) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$;
7) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

937.° Перетворіть у добуток:

1) $\sin 20° + \cos 20°$;
2) $\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}$;
3) $\sin\alpha - \cos\alpha$;
4) $\sin\alpha - \cos(\alpha - 60°)$.

938.° Перетворіть у добуток:

1) $\sin 25° + \cos 55°$;
2) $\cos 22° - \sin 66°$;
3) $\sin\alpha + \cos\beta$.

939.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sin 8\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 2\alpha}$; 2) $\dfrac{\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\cos 5\alpha-\cos\alpha}$; 3) $\dfrac{\cos 74^\circ-\cos 14^\circ}{\sin 74^\circ+\sin 14^\circ}$.

940.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\cos 6\alpha+\cos 4\alpha}{\cos\alpha+\cos 9\alpha}$; 2) $\dfrac{\cos\alpha-\cos 11\alpha}{\sin 11\alpha-\sin\alpha}$; 3) $\dfrac{\cos 58^\circ+\cos 32^\circ}{\sin 58^\circ+\sin 32^\circ}$.

941.° Перетворіть у добуток:

1) $1-2\cos\alpha$;
2) $\sqrt{3}+2\cos\alpha$;
3) $1-\sqrt{2}\sin\alpha$;
4) $\sqrt{3}+\operatorname{ctg}\alpha$.

942.° Перетворіть у добуток:

1) $1-2\sin\alpha$;
2) $\sqrt{3}-2\cos\alpha$;
3) $\sqrt{2}+2\cos\alpha$;
4) $\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha$.

943.• Доведіть тотожність:

1) $\cos 3\alpha-\cos 4\alpha-\cos 5\alpha+\cos 6\alpha=-4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\dfrac{9\alpha}{2}$;

2) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)=4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha$;

3) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)$;

4) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}=\operatorname{tg}4\alpha$;

5) $\dfrac{2(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha}$;

6) $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=2\cos\alpha$;

7) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

8) $\dfrac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-1+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

9) $\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}\right)\cdot\dfrac{\cos\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha}=-4\sin 3\alpha$;

10) $\dfrac{(\cos\alpha-\cos 3\alpha)(\sin\alpha+\sin 3\alpha)}{1-\cos 4\alpha}=\sin 2\alpha$;

11) $\dfrac{\sin(2\alpha+2\pi)+2\sin(4\alpha-\pi)+\sin(6\alpha+4\pi)}{\cos(6\pi-2\alpha)+2\cos(4\alpha-\pi)+\cos(6\alpha-4\pi)}=\operatorname{tg}4\alpha$.

944.* **Доведіть тотожність:**

1) $\sin 5\alpha + \sin 6\alpha + \sin 7\alpha + \sin 8\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\,\sin\frac{13\alpha}{2}$;

2) $\sin\alpha + \sin 3\alpha - \sin 2\alpha = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\,\cos\frac{3\alpha}{2}$;

3) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha-\beta) = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

4) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;

5) $\frac{\cos\alpha - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha - \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 5\alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha$;

6) $\frac{\sin\alpha - \sin 3\alpha - \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = -\operatorname{tg} 2\alpha$;

7) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

8) $\frac{\sin 2\alpha\cos 4\alpha\,(1+\cos 2\alpha)}{(\sin 3\alpha + \sin\alpha)(\cos 3\alpha + \cos 5\alpha)} = \frac{1}{2}$;

9) $\left(\frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 4\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\sin 3\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}\right) = 4\operatorname{ctg}\alpha$.

945.* **Доведіть тотожність:**

1) $\operatorname{ctg} 6\alpha - \operatorname{ctg} 4\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha = -\operatorname{ctg} 6\alpha\operatorname{ctg} 4\alpha\operatorname{tg} 2\alpha$;

2) $\frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg} 3\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{ctg} 4\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}$.

946.* **Доведіть тотожність:**

1) $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg} 3\alpha$;

2) $\frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} 5\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \sin 2\alpha$.

947.* **Доведіть тотожність:**

1) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha = 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\frac{1 + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{1 + \cos(4\alpha + \pi) + \cos\left(4\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)} = \operatorname{ctg} 2\alpha$;

3) $\sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha\right) = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}$;

4) $\cos^2\left(\frac{5\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{15\pi}{8} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha$.

948.• **Доведіть тотожність:**

1) $1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha=-4\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

2) $1-\sin\alpha-\cos\alpha=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-45^\circ\right)$;

3) $\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{17\pi}{8}-\alpha\right)=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$.

949.•• **Доведіть рівність** $\operatorname{tg} 30^\circ+\operatorname{tg} 40^\circ+\operatorname{tg} 50^\circ+\operatorname{tg} 60^\circ=\frac{8\cos 20^\circ}{\sqrt{3}}$.

950.•• **Доведіть, що коли** $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, **то має місце тотожність:**

1) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

2) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

3) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$;

4) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

5) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma=2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

951.•• **Доведіть, що коли** $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, **то має місце тотожність:**

1) $\sin 4\alpha+\sin 4\beta+\sin 4\gamma=-4\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$;

2) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$;

3) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

952.•• **Доведіть, що коли** $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, **то має місце тотожність:**

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

44. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

У п. 43 при доведенні формул суми та різниці синусів (косинусів) було отримано тотожності:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y;$$
$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y;$$
$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y.$$

Перепишемо їх так:

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

Ці тотожності називають **формулами перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.**

ПРИКЛАД 1 **Перетворіть добуток у суму:**

1) $\sin 15° \cos 10°$; **3)** $\cos \alpha \cos 3\alpha$; **5)** $2 \sin 2\alpha \cos 5\alpha$.

2) $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{8}$; **4)** $2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$;

Розв'язання

1) $\sin 15° \cos 10° = \frac{1}{2}(\sin(15° - 10°) + \sin(15° + 10°)) = \frac{1}{2}(\sin 5° + \sin 25°)$;

2) $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{8}\right)\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}\right) - \cos\frac{5\pi}{24}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} - \cos\frac{5\pi}{24}\right);$$

3) $\cos \alpha \cos 3\alpha = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - 3\alpha) + \cos(\alpha + 3\alpha)) = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$;

4) $2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 2 \cdot \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta - \alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta + \alpha - \beta)) =$

$= \sin 2\beta + \sin 2\alpha$;

5) $2 \sin 2\alpha \cos 5\alpha = 2 \cdot \frac{1}{2}(\sin(2\alpha - 5\alpha) + \sin(2\alpha + 5\alpha)) =$

$$= \sin(-3\alpha) + \sin 7\alpha = \sin 7\alpha - \sin 3\alpha.$$

ПРИКЛАД 2 **Доведіть тотожність**[1]**:**

$$4 \cos \alpha \cos(60° - \alpha) \cos(60° + \alpha) = \cos 3\alpha.$$

Розв'язання. Двічі застосовуючи формулу перетворення добутку косинусів у суму, отримуємо: $4 \cos \alpha \cos(60° - \alpha) \cos(60° + \alpha) =$

$$= 2 \cos \alpha (\cos(60° - \alpha - 60° - \alpha) + \cos(60° - \alpha + 60° + \alpha)) =$$
$$= 2 \cos \alpha (\cos 2\alpha + \cos 120°) = 2 \cos \alpha \left(\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= 2 \cos \alpha \cos 2\alpha - \cos \alpha = \cos \alpha + \cos 3\alpha - \cos \alpha = \cos 3\alpha.$$

[1] Іншим способом ця тотожність була доведена в п. 42.

ПРИКЛАД 3 Доведіть тотожність $\sin^2 2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right)\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$.

Розв'язання. Застосуємо формули пониження степеня і перетворення добутку в суму:

$$\sin^2 2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right)\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} - \frac{1}{2}\left(\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2\alpha\right) + \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - 2\alpha\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \cos 4\alpha - \sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 4\alpha + \cos 4\alpha - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

ПРИКЛАД 4 Доведіть рівність

$$\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}.$$

Розв'язання. Помножимо і поділимо ліву частину даної рівності на $2\sin\frac{\pi}{11}$. Отримуємо:

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{7\pi}{11} + 2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{9\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}.$$

Застосуємо формулу $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$:

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{11} - \sin\frac{2\pi}{11} + \sin\frac{4\pi}{11} - \sin\frac{4\pi}{11} + \sin\frac{6\pi}{11} - \sin\frac{6\pi}{11} + \sin\frac{8\pi}{11} - \sin\frac{8\pi}{11} + \sin\frac{10\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{10\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}} = \frac{\sin\frac{\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}} = \frac{1}{2}.$$

ПРИКЛАД 5 Доведіть нерівність $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}$, де $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Розв'язання. За умовою $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$. Тоді

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha - \beta}{2} - \cos\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha + \beta}{2}\right) =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

Отже, $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}$.

Вправи

953.° Перетворіть добуток у суму:

1) $\cos 15° \cos 5°$;
2) $2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;
3) $\sin 6\alpha \cos 4\alpha$;
4) $\sin 48° \sin 74°$;
5) $\sin(60°+\alpha)\sin(60°-\alpha)$.

954.° Перетворіть добуток у суму:

1) $2\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{5}$;
2) $\sin 28° \sin 24°$;
3) $\sin 5\alpha \cos 3\alpha$;
4) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

955.° Спростіть вираз:

1) $2\cos 20° \cos 40° - \cos 20°$;
2) $\sin\alpha(1+2\cos 2\alpha)$;
3) $2\cos\alpha\cos 2\alpha - \cos 3\alpha$;
4) $\cos 2\alpha + 2\sin(\alpha+30°)\sin(\alpha-30°)$.

956.° Спростіть вираз:

1) $2\sin 2\alpha \sin\alpha + \cos 3\alpha$;
2) $\sin\alpha - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$.

957.• Доведіть тотожність:

1) $\sin\alpha\sin 3\alpha + \sin 4\alpha \sin 8\alpha = \sin 7\alpha \sin 5\alpha$;
2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+5\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-6\alpha\right)=\sin 4\alpha\cos\alpha$.

958.• Доведіть тотожність:

1) $\cos 3\alpha \cos 6\alpha - \cos 4\alpha \cos 7\alpha = \sin 10\alpha \sin\alpha$;
2) $2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{4}+15°\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}-15°\right)=\sin\left(45°+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(45°-\frac{3\alpha}{4}\right)$.

959.• Спростіть вираз:

1) $\sin^2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;
2) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;
3) $\cos^2(45°+\alpha) - \cos^2(30°-\alpha) + \sin 15° \sin(75°-2\alpha)$.

960.** Спростіть вираз:

1) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$;
2) $\cos^2(45° - \alpha) - \cos^2(60° + \alpha) - \sin(75° - 2\alpha)\cos 75°$.

961.** Доведіть рівність:

1) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$;
2) $\sin 10° + \sin 20° + \ldots + \sin 50° = \frac{\sin 25°}{2\sin 5°}$.

962.** Доведіть рівність $\cos\frac{\pi}{19} + \cos\frac{3\pi}{19} + \ldots + \cos\frac{17\pi}{19} = \frac{1}{2}$.

41. Гармонічні коливання

У попередніх пунктах ви ознайомилися з тригонометричними функціями $y = \sin x$, $y = \cos x$ та їх властивостями. Розглядаючи графіки цих функцій, можна згадати, що в повсякденному житті ви бачили схожі криві та поверхні. Наприклад, хвилі на морі мають форму, що нагадує синусоїду. І це не випадково. Багато фізичних величин періодично змінюються і можуть бути описані за допомогою тригонометричних функцій $y = A\sin(kx + \alpha)$ або $y = A\cos(kx + \alpha)$, де A, k, α — задані числа, $A \neq 0$, $k \neq 0$. У такому випадку говорять, що фізична величина здійснює **гармонічне коливання**, а відповідну тригонометричну функцію називають **функцією гармонічного коливання**.

Розглянемо рух точки зі сталою ненульовою швидкістю v по одиничному колу (рис. 195). Нехай початкове положення точки задається кутом α, тобто в початковий момент часу точка має координати $M_0(\cos\alpha; \sin\alpha)$. За час t точка пройде по дузі кола відстань vt. З означення радіанної міри кута випливає, що довжина дуги одиничного кола, по якій перемістилася точка, дорівнює куту повороту початкової точки M_0. Тому через час t положення точки визначатиметься кутом $vt + \alpha$, а отже, точка матиме координати $M(\cos(vt + \alpha); \sin(vt + \alpha))$. Бачимо, що кожна координата точки, яка рухається колом, визначає функцію гармонічного коливання:

$$x = \cos(vt + \alpha),\ y = \sin(vt + \alpha).$$

У 8 класі на уроках фізики ви вивчали коливальний рух, зокрема рух математичного маятника (рис. 196). Можна встановити, що відхилення маятника від положення рівноваги визна-

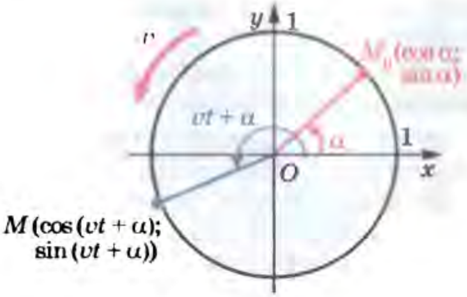


Рис. 195

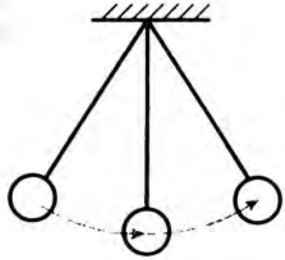


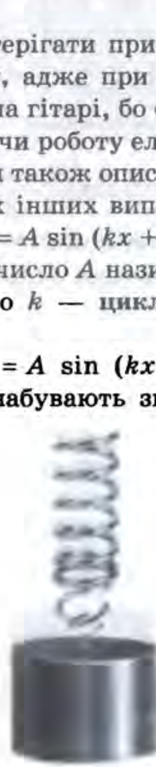
Рис. 196

чається функцією $y = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$, де A — величина відхилення маятника від вертикалі у початковий момент часу, g — стала прискорення вільного падіння, l — довжина нитки маятника, t — час. Таким чином, коливання математичного маятника — приклад гармонічного коливання.

Гармонічні коливання також можна спостерігати при коливанні гирьки з пружиною; слухаючи музику, адже при цьому в повітрі утворюються звукові хвилі; граючи на гітарі, бо струна набуває форми, близької до синусоїди; вивчаючи роботу електроприладів, оскільки змінний електричний струм також описується тригонометричними функціями, та в багатьох інших випадках.

Якщо у функції гармонічного коливання $y = A\sin(kx + \alpha)$ або $y = A\cos(kx + \alpha)$ числа A і k є додатними, то число A називають **амплітудою гармонічного коливання, а число k — циклічною частотою гармонічного коливання.**

Оскільки тригонометричні функції $y = A\sin(kx + \alpha)$, $y = A\cos(kx + \alpha)$, де A — додатне число, набувають значень з проміжку $[-A; A]$, то амплітуда гармонічного коливання показує найбільше значення функції гармонічного коливання.



Оскільки головний період функцій $y = A\sin(kx + \alpha)$, $y = A\cos(kx + \alpha)$, де k — додатне число, дорівнює $\frac{2\pi}{k}$, що в k разів відрізняється від головного періоду функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$, то циклічна частота k показує кіль-

кість головних періодів функції гармонічного коливання в одному періоді функції $y = \sin x$ або $y = \cos x$.

Гармонічні коливання грають значну роль при вивченні багатьох процесів. При цьому намагаються подати функцію складного періодичного процесу як суму кількох функцій гармонічних коливань, які вважаються простішими. Наприклад, функцію, що описує складний музичний акорд, можна подати як суму функцій гармонічних коливань окремих нот, що складають цей акорд. На цьому принципі працюють багато технічних пристроїв. Так, деякі типи радіопередавачів кодують інформацію у вигляді окремих гармонічних коливань, випромінюючи у простір хвилю, що є їх сумою. В іншому місці радіоприймач виконує зворотний процес — подає отриманий сигнал як суму окремих гармонічних коливань, що дозволяє відтворити передану інформацію.

Розділ математики, який вивчає гармонічні коливання, називають «Гармонічний аналіз». Якщо ви пов'яжете своє майбутнє з математикою, фізикою, технікою, то зможете ознайомитися з цим розділом у вищому навчальному закладі.

ПРИКЛАД Укажіть амплітуду A і циклічну частоту k гармонічного коливання, яке задається функцією: 1) $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right)$; 2) $y = -6\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right)$.

Розв'язання

1) Можна записати:

$$y = -3\sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) = 3\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Отже, $A = 3$, $k = 4$.

2) Маємо:

$$-6\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right) = 6\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2} + \pi\right) = 6\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{9\pi}{8}\right).$$

Отже, $A = 6$, $k = \frac{1}{2}$.

ПРИКЛАД Доведіть, що функція $y = 3\sin 2x + 4\cos 2x$ є функцією гармонічного коливання.

Розв'язання. Запишемо вираз $3\sin 2x + 4\cos 2x$ у вигляді

$$\sqrt{3^2+4^2}\left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin 2x + \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos 2x\right) = 5\left(\frac{3}{5}\sin 2x + \frac{4}{5}\cos 2x\right).$$

Оскільки $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$, то існує такий кут α, що $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ (рис. 197). Тоді маємо:

$$y = 5\,(\sin 2x \cos \alpha + \cos 2x \sin \alpha) =$$
$$= 5 \sin (2x + \alpha).$$

Отже, дана функція є функцією гармонічного коливання, амплітуда якого дорівнює 5, а циклічна частота коливання — 2.

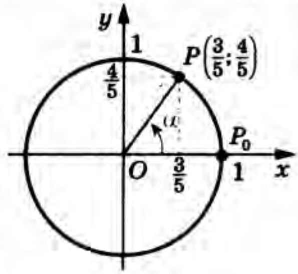


Рис. 197

Вправи

963.° Укажіть амплітуду A і циклічну частоту k гармонічного коливання:

1) $y = 2{,}6 \sin 3\pi x$; 2) $y=4\cos\left(\frac{x}{3}-1\right)$.

964.° Укажіть амплітуду A і циклічну частоту k гармонічного коливання:

1) $y = 0{,}6 \cos (2\pi x - 3)$; 2) $y=8\sin\left(7x+\frac{\pi}{12}\right)$.

965.° Укажіть амплітуду A і циклічну частоту k гармонічного коливання:

1) $y=-2\sin\left(6-\frac{\pi x}{2}\right)$; 2) $y=-1{,}5\cos\left(-5x-\frac{\pi}{6}\right)$.

966.° Укажіть амплітуду A і циклічну частоту k гармонічного коливання:

1) $y=-3\sin\left(-\pi x-\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y=-\frac{1}{3}\cos\left(-7x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

967.** Доведіть, що функція $y = 2 \sin 3x - \cos 3x$ є функцією гармонічного коливання. Укажіть амплітуду і циклічну частоту цього коливання.

968.** Доведіть, що функція $y=5\sin\frac{x}{4}+12\cos\frac{x}{4}$ є функцією гармонічного коливання. Укажіть амплітуду і циклічну частоту цього коливання.

Ставай Остроградським!

Видатний український математик Михайло Васильович Остроградський народився в селі Пашенівка на Полтавщині. У 1816–1820 рр. він навчався в Харківському університеті, а потім удосконалював математичну освіту, навчаючись у таких великих учених, як П'єр Симон Лаплас (1749–1827), Симеон Дені Пуассон (1781–1840), Огюстен Луї Коші (1789–1857), Жан Батіст Жозеф Фур'є (1768–1830).

Михайло Васильович Остроградський
(1801–1862)

Серед величезної наукової спадщини, яку залишив нам Михайло Остроградський, значну роль відіграють роботи, пов'язані з дослідженням тригонометричних рядів і коливань. Багато важливих математичних теорем сьогодні носять ім'я Остроградського.

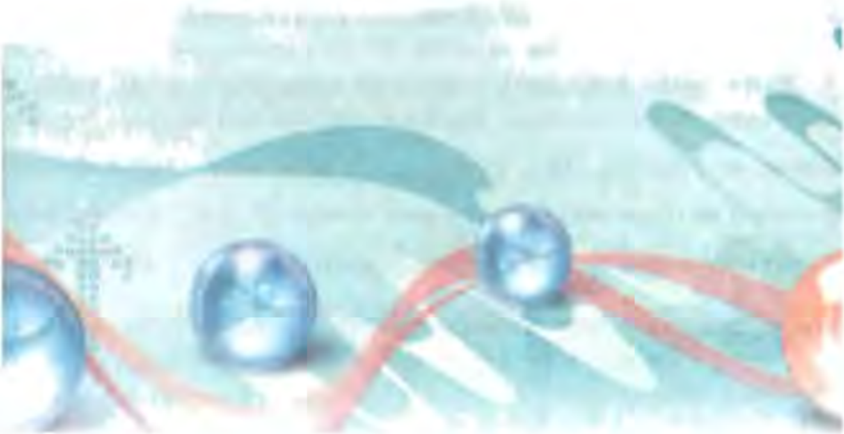
Крім наукових досліджень, Остроградський написав низку чудових підручників для молоді, зокрема «Програму і конспект тригонометрії». Сам Остроградський надавав питанню викладання тригонометрії такого значення, що це стало предметом доповіді в Академії наук.

Науковий авторитет Остроградського був настільки високим, що в ті часи, відправляючи молодь на навчання, казали: «Ставай Остроградським!» Це побажання актуальне і сьогодні, тому:

«Ставай Остроградським!»

§ 5

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ



ти рівняння до найпростішого; однієї

96. Рівняння $\cos x = b$

функції і одного аргументу

Оскільки областю значень функції $y = \cos x$ є проміжок $[-1; 1]$, то при $|b| > 1$ рівняння $\cos x = b$ не має розв'язків. Разом з тим при будь-якому b такому, що $|b| \leqslant 1$, це рівняння має корені, більш того, їх безліч.

Сказане легко зрозуміти, звернувшись до графічної інтерпретації: графіки функцій $y = \cos x$ і $y = b$, де $|b| \leqslant 1$, мають безліч спільних точок (рис. 198).

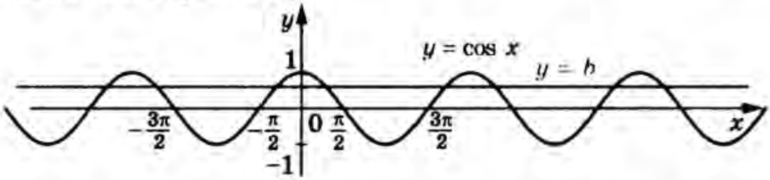


Рис. 198

Зрозуміти, як розв'язувати рівняння $\cos x = b$ у загальному випадку, допоможе розгляд окремого випадку. Наприклад, розв'яжемо рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$.

На рисунку 199 зображено графіки функцій $y = \cos x$ і $y = \frac{1}{2}$.

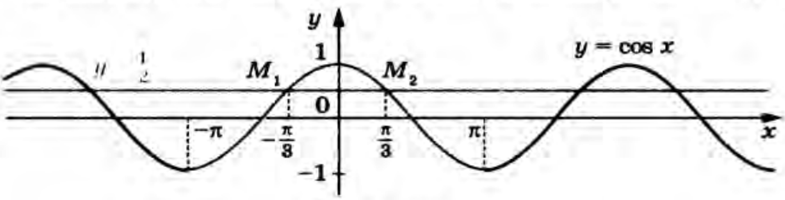


Рис. 199

Розглянемо функцію $y = \cos x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції (червона крива на рисунку 199). Пряма $y = \frac{1}{2}$ перетинає графік функції $y = \cos x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ у двох точках M_1 і M_2, абсциси яких є протилежними числами. Отже, рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ має два корені. Оскільки $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, то цими коренями є числа $-\frac{\pi}{3}$ і $\frac{\pi}{3}$.

Функція $y = \cos x$ є періодичною з періодом 2π. Тоді кожен з інших коренів рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$ відрізняється від одного з знайдених коренів $-\frac{\pi}{3}$ або $\frac{\pi}{3}$ на число виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отже, корені розглядуваного рівняння задаються формулами $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ і $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Як правило, ці дві формули замінюють одним записом:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Повернемося до рівняння $\cos x = b$, де $|b| \leqslant 1$ (рис. 200). На проміжку $[-\pi; \pi]$ це рівняння має два корені α і $-\alpha$, де $\alpha \in [0; \pi]$ (при $b = 1$ ці корені збігаються).

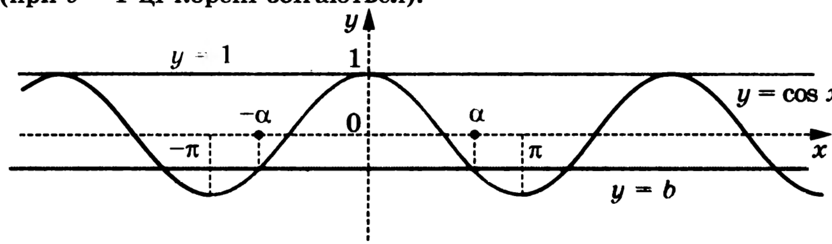


Рис. 200

Зрозуміло, що всі корені рівняння $\cos x = b$ мають вигляд

$$x = \pm\alpha + 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Ця формула показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння $\cos x = b$. Корінь α має спеціальну назву — арккосинус.

Означення. **Арккосинусом числа b, де $|b| \leqslant 1$, називають таке число α з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює b.**

Для арккосинуса числа b використовують позначення $\arccos b$. Наприклад,

$$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{3} \in [0; \pi] \text{ і } \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}, \text{ оскільки } \frac{3\pi}{4} \in [0; \pi] \text{ і } \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{2} \in [0; \pi] \text{ і } \cos\frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\arccos(-1) = \pi, \text{ оскільки } \pi \in [0; \pi] \text{ і } \cos\pi = -1.$$

Узагалі, **$\arccos b = \alpha$, *якщо* $\alpha \in [0; \pi]$ *і* $\cos\alpha = b$.**

Зазначимо, що, наприклад, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$. Проте $\arccos\frac{1}{2}\neq-\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3}\notin[0;\pi]$.

Тепер формулу коренів рівняння $\cos x = b$, $|b| \leqslant 1$, можна записати так:

$$\boxed{x = \pm\arccos b + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}} \qquad (1)$$

Зазначимо, що окремі випадки рівняння $\cos x = b$ (для $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) було розглянуто раніше (див. п. 34). Нагадаємо отримані результати:

$\cos x = 1$	$\cos x = 0$	$\cos x = -1$
$x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Такі самі відповіді можна отримати, використовуючи формулу (1). Ці три рівняння зустрічатимуться часто. Тому радимо запам'ятати отримані результати.

ПРИКЛАД Розв'яжіть рівняння: 1) $\cos 4x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{5}-7x\right)=0$; 4) $\cos \pi x^2 = 1$.

Розв'язання. 1) Використовуючи формулу (1), можемо записати:

$$4x=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Далі отримуємо:

$$4x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\quad x=\pm\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}.$$

Відповідь: $\pm\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

2) Маємо:

$$\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\qquad \frac{x}{3}=\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2\pi n;$$

$$x=\pm\pi-\frac{3\pi}{4}+6\pi n.$$

Відповідь: $\pm\pi-\frac{3\pi}{4}+6\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

3) Перепишемо дане рівняння у вигляді $\cos\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$. Маємо:

$$7x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді $7x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \pi n$; $7x = \frac{7\pi}{10} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}$.

***Відповідь*: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$.**

4) Маємо: $\pi x^2 = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$x^2 = 2n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки $x^2 \geqslant 0$, то $2n \geqslant 0$, тобто $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Тепер можна записати $x = \sqrt{2n}$ або $x = -\sqrt{2n}$, де $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

***Відповідь*: $\sqrt{2n}$, $-\sqrt{2n}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.**

ПРИКЛАД 2 **Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = b$ на проміжку $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right)$ залежно від значень параметра b.**

***Розв'язання.* Зобразимо графік функції $y = \cos x$ на проміжку $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right)$ (рис. 201). Кількість коренів визначається кількістю точок перетину прямої $y = b$ з виділеною червоною частиною графіка функції $y = \cos x$.**

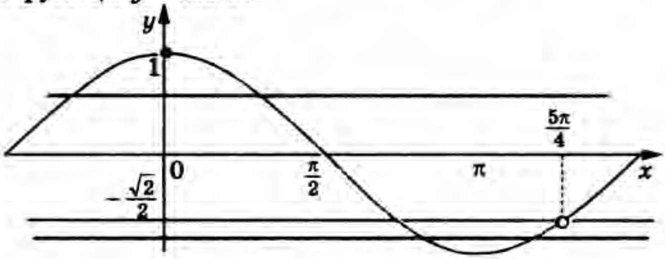


Рис. 201

Звернемо увагу на те, що точка $(0; 1)$ належить виділеній кривій, а точка $\left(\frac{5\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — не належить.

Розглядаючи різні положення прямої $y = b$, отримуємо такі результати:

якщо $b < -1$, то коренів немає;

якщо $b = -1$, то один корінь;

якщо $-1 < b < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то 2 корені;

якщо $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant b \leqslant 1$, то один корінь;

якщо $b > 1$, то коренів немає.

Відповідь: якщо $b < -1$ або $b > 1$, то коренів немає; якщо $b = -1$ або $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant b \leqslant 1$, то один корінь; якщо $-1 < b < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то 2 корені.

Вправи

969.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$;
2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
4) $\cos x = \frac{1}{3}$;
5) $\cos x = \frac{\pi}{3}$;
6) $\cos x = \frac{\pi}{4}$.

970.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
2) $\cos x = -\frac{1}{2}$;
3) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$;
5) $\cos x = \frac{4}{7}$.

971.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$;
2) $\cos \frac{5}{6}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\cos 6x = 1$;
4) $\cos \frac{2\pi x}{3} = 0$;
5) $\cos 9x = -\frac{1}{5}$;
6) $\cos\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

972.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$;
2) $\cos \frac{x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\cos \frac{3x}{4} = -1$.

973.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\cos\left(\frac{x}{6} - 2\right) = -1$;
4) $2\cos\left(\frac{\pi}{8} - 3x\right) + 1 = 0$.

974.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{9} - 4x\right) = 1$;
2) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2} + 3\right) + 1 = 0$.

975.° Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

976.° Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\cos \frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

977.° Скільки коренів рівняння $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$?

978.° Знайдіть усі корені рівняння $\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{1}{2}$, які задовольняють нерівність $-\frac{\pi}{6}<x<4\pi$.

979.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\frac{2\pi}{x}=1$; 2) $\cos\pi\sqrt{x}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos(\cos x)=\frac{1}{2}$.

980.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\frac{2\pi}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos(\cos x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

981.•• При яких значеннях параметра a рівняння $\cos 2x = -4a^2 + 4a - 2$ має розв'язки?

982.•• При яких значеннях параметра a рівняння $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-a^2-1$ має розв'язки?

983.•• При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $(a^2 - 4)\cos x = a + 2$?

984.•• При яких значеннях параметра a рівняння $3a\cos x = 2a + 2$ має розв'язки?

985.•• При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{\cos x - a}{\sqrt{\cos x - 3a + 1}}=0$ має розв'язки?

986.•• При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{\cos x - a}{\cos x + \frac{1}{3}}=0$ має розв'язки?

987.•• При яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить не менше ніж 3 корені рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$?

988.•• При яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить не менше ніж 3 корені рівняння $\cos x = -\frac{1}{2}$?

989.•• Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = a$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{11\pi}{6}\right]$ залежно від значень параметра a.

990.** Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $\cos x = a$ на проміжку $\left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right]$?

991.** Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$ залежно від значень параметра a.

992.* При яких значеннях параметра a рівняння $(x - a)\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ має єдиний корінь на проміжку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$?

993.* При яких значеннях параметра a рівняння $(x + a)\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ має єдиний корінь на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$?

47. Рівняння $\sin x = b$

Оскільки областю значень функції $y = \sin x$ є проміжок $[-1; 1]$, то при $|b| > 1$ рівняння $\sin x = b$ не має розв'язків. Разом з тим при будь-якому b такому, що $|b| \leqslant 1$, це рівняння має корені, більш того, їх безліч.

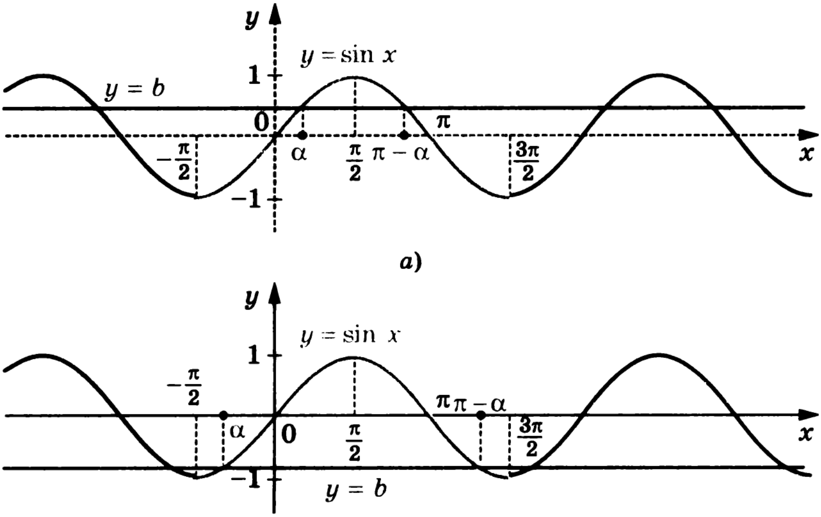
Зазначимо, що окремі випадки рівняння $\sin x = b$ (для $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) було розглянуто раніше (див. п. 34). Нагадаємо отримані результати:

$\sin x = 1$	$\sin x = 0$	$\sin x = -1$
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Для того щоб отримати загальну формулу коренів рівняння $\sin x = b$, де $|b| \leqslant 1$, звернемося до графічної інтерпретації.

На рисунку 202 зображено графіки функцій $y = \sin x$ і $y = b$, $|b| \leqslant 1$.

Розглянемо функцію $y = \sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції (червона лінія на рисунку 202). На цьому проміжку рівняння $\sin x = b$ має два корені. Позначимо корінь, який належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, через α. Оскільки $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, то другий корінь дорівнює $\pi - \alpha$. Зауважимо, що при $b = 1$ корені α і $\pi - \alpha$ збігаються.



б)

Рис. 202

Оскільки функція $y = \sin x$ є періодичною з періодом 2π, то кожен з інших коренів рівняння $\sin x = b$ відрізняється від одного із знайдених коренів на число виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тоді корені розглядуваного рівняння задаються формулами

$$x = \alpha + 2\pi n \quad \text{і} \quad x = \pi - \alpha + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ці дві формули можна замінити одним записом:

$$x = (-1)^k \alpha + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Справді, якщо k — парне число, тобто $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, то отримуємо $x = \alpha + 2\pi n$; якщо k — непарне число, тобто $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, то отримуємо $x = -\alpha + \pi + 2\pi n = \pi - \alpha + 2\pi n$.

Формула (1) показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння $\sin x = b$. Корінь α має спеціальну назву — арксинус.

Означення. **Арксинусом числа b, де $|b| \leqslant 1$, називають таке число α з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює b.**

Для арксинуса числа b використовують позначення: $\arcsin b$.

Наприклад,

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ і } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\arcsin 0 = 0$, оскільки $0\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin 0 = 0$;

$\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$, оскільки $-\frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

Узагалі, $\arcsin b = \alpha$, *якщо* $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *і* $\sin\alpha = b$.

Зазначимо, що, наприклад, $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$. Проте $\arcsin\frac{1}{2}\neq\frac{5\pi}{6}$, оскільки $\frac{5\pi}{6}\notin\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Тепер формулу коренів рівняння $\sin x = b$, $|b| \leqslant 1$, можна записати або у вигляді сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} x=\arcsin b+2\pi n, \\ x=\pi-\arcsin b+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \end{array}\right.$$

або одним записом:

$$\boxed{x = (-1)^k \arcsin b + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}} \qquad (2)$$

Узагалі, при розв'язуванні тригонометричних рівнянь одна й та сама правильна відповідь може бути подана в різних формах запису.

Зрозуміло, що формула (2) застосовна і для окремих випадків: $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$. Проте рівняння $\sin x = 1$, $\sin x = 0$, $\sin x = -1$ зустрічатимуться часто. Тому радимо запам'ятати формули їх коренів, які записано на початку пункту.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння: 1) $\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin\left(t+\frac{\pi}{10}\right)=-1$.

Розв'язання. 1) Використовуючи формулу (2), можемо записати:

$$\frac{x}{2}=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Далі отримуємо:

$$\frac{x}{2}=(-1)^n\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n;$$

$$\frac{x}{2}=-(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n;$$

$$\frac{x}{2}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n;$$

$$x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+2\pi n.$$

Відповідь: $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

2) Перепишемо дане рівняння у вигляді $-\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Тоді $\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2};$

$$3x-\frac{\pi}{3}=(-1)^n\cdot\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$$

$$3x-\frac{\pi}{3}=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \ 3x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\pi n;$$

$$x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}.$$

Відповідь: $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}.$

3) За формулою коренів рівняння $\sin x=-1$ можемо записати:

$$t+\frac{\pi}{10}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Далі маємо: $t=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}+2\pi n;\ \ t=-\frac{3\pi}{5}+2\pi n.$

Відповідь: $-\frac{3\pi}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2.$

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=1.$$

Оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$, а $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$, то можна записати:

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\sin x=1.$$

Використовуючи формулу синуса суми $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=$ $=\sin(\alpha+\beta)$, отримаємо:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=1.$$

Звідси $\frac{\pi}{3}+x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Відповідь: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Зауважимо, що при розв'язуванні рівняння прикладу 2 можна було скористатися і формулою косинуса різниці $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$. Справді, оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$, а $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, то

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x=1;$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1.$$

Звідси отримуємо таку саму відповідь: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

ПРИКЛАД 3 Скільки коренів залежно від значень параметра b має рівняння $(\sin x-b)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0$ на проміжку $[0;\ 2\pi)$?

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=b,\\ \cos x=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Друге рівняння цієї сукупності на проміжку $[0;\ 2\pi)$ має 2 корені: $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{5\pi}{3}$.

При $|b|>1$ рівняння $\sin x=b$ коренів не має. Тоді дане в умові рівняння має 2 корені.

Якщо $b=1$ або $b=-1$, то рівняння $\sin x=b$ на проміжку $[0;\ 2\pi)$ має один корінь. Це відповідно числа $\frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{2}$. Тому при $|b|=1$ дане в умові рівняння має 3 корені.

Якщо $|b|<1$, то рівняння $\sin x=b$ на проміжку $[0;\ 2\pi)$ має 2 корені. Тому може здатися, що задане в умові рівняння в цьому випадку матиме 4 корені. Насправді один з коренів рівняння $\sin x=b$ може збігатися з числом $\frac{\pi}{3}$ або з числом $\frac{5\pi}{3}$.

Знайдемо значення параметра b, при яких числа $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{5\pi}{3}$ є коренями рівняння $\sin x=b$. Маємо:

1) $\sin\frac{\pi}{3}=b;\ \ b=\frac{\sqrt{3}}{2};$

2) $\sin\frac{5\pi}{3}=b;\ \ b=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

При $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ рівняння $\sin x=b$ на проміжку $[0;\ 2\pi)$ має корені $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{2\pi}{3}$, а дане в умові рівняння має 3 корені: $\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}.$

При $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ аналогічно отримуємо, що дане в умові рівняння має 3 корені: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

Відповідь: Якщо $b < -1$ або $b > 1$, то 2 корені; якщо $b = -1$, або $b = 1$, або $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, то 3 корені; якщо $-1<b<-\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $-\frac{\sqrt{3}}{2}<b<\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $\frac{\sqrt{3}}{2}<b<1$, то 4 корені.

Вправи

994.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x=\frac{1}{4}$; 4) $\sin x=\sqrt{2}$.

995.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x=\frac{1}{2}$; 2) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{3}$; 4) $\sin x = 1{,}5$.

996.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\frac{x}{6}=-\frac{1}{2}$; 2) $\sin\frac{4x}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin 5x = 1$; 4) $\sin(-8x)=\frac{2}{9}$.

997.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin\frac{x}{7}=0$; 3) $\sin\frac{2x}{5}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

998.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{8}-x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\sin\left(\frac{x}{3}+1\right)=-1$;

4) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}-3x\right)-1=0$.

999.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{18}-8x\right)=1$; 2) $2\sin\left(\frac{x}{5}-4\right)+1=0$.

1000.° Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1001.° Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння $\sin\left(3x-\frac{\pi}{15}\right)=-1$.

1002.° Знайдіть усі корені рівняння $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, які належать проміжку $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$.

1003.° Скільки коренів рівняння $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ належать проміжку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?

1004.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$;

2) $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 1$;

3) $3\sin\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 3$.

1005.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$;

2) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

1006.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\frac{2}{x} = 0$;

2) $\sin \pi\sqrt{x} = -1$;

3) $\sin(\cos x) = 0{,}5$.

1007.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\frac{3\pi}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos(\pi \sin x) = 0$.

1008.•• При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $(a^2 - 1)\sin x = a + 1$?

1009.•• При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $(a + 4)\sin^2 2x = a^2 - 16$?

1010.•• При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{\sin x - a}{\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}} = 0$ має розв'язки?

1011.•• При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{\sin x + a}{\sin x - 2a + 1} = 0$ має розв'язки?

1012.•• При яких додатних значеннях параметра a проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$ містить не менше ніж 4 корені рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$?

1013.•• При яких від'ємних значеннях параметра a проміжок $[a; 0]$ містить не менше ніж 3 корені рівняння $\sin x = -\frac{1}{2}$?

1014.•• Визначте кількість коренів рівняння на даному проміжку залежно від значень параметра a:

1) $\sin x = a$, $\left[0; \frac{11\pi}{6}\right]$;

2) $\sin x = a$, $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

1015.•• Визначте кількість коренів рівняння $\sin x = a$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$ залежно від значень параметра a.

1016.•• Визначте кількість коренів рівняння $\sin x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$ залежно від значень параметра a.

1017.•• Визначте кількість коренів рівняння $\sin x = a$ на проміжку $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$ залежно від значень параметра a.

1018.* Скільки коренів залежно від значень параметра a має рівняння $\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sin x - a) = 0$ на проміжку $[0; 2\pi)$?

1019.* Скільки коренів залежно від значень параметра a має рівняння $(\cos x - a)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0$ на проміжку $(0; 2\pi]$?

48. Рівняння $\text{tg}\, x = b$ і $\text{ctg}\, x = b$

Оскільки областю значень функції $y = \text{tg}\, x$ є множина $\mathbb{R}$, то рівняння $\text{tg}\, x = b$ має розв'язки при будь-якому значенні b.

Для того щоб отримати формулу коренів рівняння $\text{tg}\, x = b$, звернемося до графічної інтерпретації.

На рисунку 203 зображено графіки функцій $y = \text{tg}\, x$ і $y = b$.

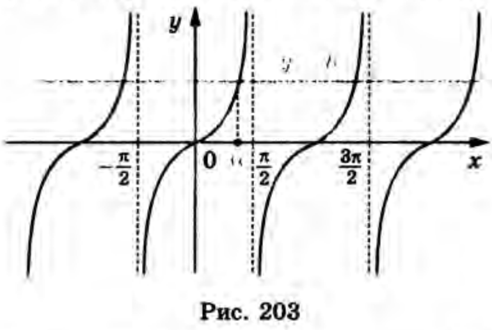


Рис. 203

Розглянемо функцію $y = \text{tg}\, x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції (червона крива на рис. 203). На цьому проміжку рівняння $\text{tg}\, x = b$ при будь-якому b має один корінь α.

Оскільки функція $y = \operatorname{tg} x$ є періодичною з періодом π, то кожен з інших коренів рівняння $\operatorname{tg} x = b$ відрізняється від знайденого кореня на число виду πn, $n \in \mathbb{Z}$.

Тоді множина коренів рівняння $\operatorname{tg} x = b$ задається формулою

$$x = \alpha + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Отримана формула показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння $\operatorname{tg} x = b$. Корінь α має спеціальну назву — арктангенс.

Означення. Арктангенсом числа b називають таке число α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює b.

Для арктангенса числа b використовують позначення $\operatorname{arctg} b$.
Наприклад,

$$\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ і } \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}, \text{ оскільки } -\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ і } \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1;$$

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \text{ оскільки } 0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ і } \operatorname{tg} 0 = 0.$$

Узагалі, $\operatorname{arctg} b = \alpha$, *якщо* $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ *і* $\operatorname{tg} \alpha = b$.

Зазначимо, що, наприклад, $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$. Проте $\operatorname{arctg} 1 \neq -\frac{3\pi}{4}$, оскільки $-\frac{3\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Тепер формулу коренів рівняння $\operatorname{tg} x = b$ можна записати так:

$$\boxed{x = \operatorname{arctg} b + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$$

Оскільки областю значень функції $y = \operatorname{ctg} x$ є множина $\mathbb{R}$, то рівняння $\operatorname{ctg} x = b$ має розв'язки при будь-якому значенні b. На рисунку 204 зображено графіки функцій $y = \operatorname{ctg} x$ і $y = b$.

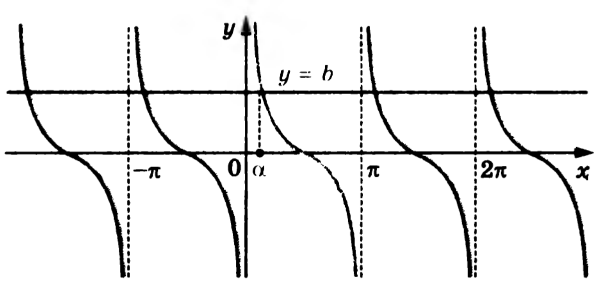


Рис. 204

Розглянемо функцію $y = \text{ctg}\, x$ на проміжку $(0; \pi)$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції (червона крива на рис. 204). На цьому проміжку рівняння $\text{ctg}\, x = b$ при будь-якому b має один корінь α.

Оскільки функція $y = \text{ctg}\, x$ є періодичною з періодом π, то кожен з інших коренів рівняння $\text{ctg}\, x = b$ відрізняється від знайденого кореня на число виду πn, $n \in \mathbb{Z}$.

Тоді множина коренів рівняння $\text{ctg}\, x = b$ задається формулою

$$x = \alpha + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Корінь α має спеціальну назву — арккотангенс.

Означення. **Арккотангенсом числа b називають таке число α з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює b.**

Для арккотангенса числа b використовують позначення $\text{arcctg}\, b$. Наприклад,

$$\text{arcctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3},\ \text{оскільки}\ \frac{\pi}{3}\in(0;\pi)\ \text{і}\ \text{ctg}\,\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{5\pi}{6},\ \text{оскільки}\ \frac{5\pi}{6}\in(0;\pi)\ \text{і}\ \text{ctg}\,\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3};$$

$$\text{arcctg}\,0=\frac{\pi}{2},\ \text{оскільки}\ \frac{\pi}{2}\in(0;\pi)\ \text{і}\ \text{ctg}\,\frac{\pi}{2}=0.$$

Узагалі, $\text{arcctg}\, b = \alpha$, *якщо* $\alpha \in (0; \pi)$ *і* $\text{ctg}\, \alpha = b$.

Зазначимо, що, наприклад, $\text{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$. Проте $\text{arcctg}\,(-1)\neq-\frac{\pi}{4}$, оскільки $-\frac{\pi}{4}\notin(0;\pi)$.

Тепер формулу коренів рівняння $\text{ctg}\, x = b$ можна записати так:

$$\boxed{x = \text{arcctg}\, b + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$$

ПРИКЛАД 1 **Розв'яжіть рівняння:**

$$1)\ \text{tg}\,\frac{2x}{3}=-\sqrt{3};\quad 2)\ \text{ctg}\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=-1.$$

Розв'язання. **1) Маємо: $\frac{2x}{3}=\text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$**

$$\frac{2}{3}x=-\frac{\pi}{3}+\pi k;\quad x=-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi k.$$

***Відповідь*: $-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$**

2) Маємо: $\text{ctg}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=1,$

$$x-\frac{2\pi}{3}=\text{arcctg}\,1+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$$

$$x-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+\pi k;\quad x=\frac{11}{12}\pi+\pi k.$$

Відповідь: $x=\frac{11}{12}\pi+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

ПРИКЛАД 2 Визначте, при яких значеннях параметра b рівняння $(x-b)\operatorname{tg}x=0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ має єдиний корінь.

Розв'язання. Множина коренів рівняння $\operatorname{tg}x=0$ визначається формулою $x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. Розглядуваному проміжку $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ належить лише один корінь $x=0$.

Рівняння $x-b=0$ має єдиний корінь $x=b$.

Якщо $b=0$, то початкове рівняння має єдиний корінь $x=0$.

Якщо $b\in\left[-\frac{\pi}{6};0\right)\cup\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то початкове рівняння на заданому проміжку має два корені $x=0$ і $x=b$.

Зрозуміло, що умова $b\notin\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ забезпечить існування у початкового рівняння тільки одного кореня.

Відповідь: $b=0$, або $b<-\frac{\pi}{6}$, або $b\geqslant\frac{\pi}{2}$.

Вправи

1020.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$;
2) $\operatorname{tg}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$;
3) $\operatorname{tg}x=-1$;
4) $\operatorname{tg}x=5$;
5) $\operatorname{ctg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$;
6) $\operatorname{ctg}x=-1$;
7) $\operatorname{ctg}x=-\sqrt{3}$;
8) $\operatorname{ctg}x=\sqrt{7}$;
9) $\operatorname{ctg}x=0$.

1021.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}x=1$;
2) $\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$;
3) $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$;
4) $\operatorname{tg}x=-2$;
5) $\operatorname{ctg}x=\sqrt{3}$;
6) $\operatorname{ctg}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$;
7) $\operatorname{tg}x=0$.

1022.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}2x=1$;
2) $\operatorname{tg}\frac{x}{3}=\frac{1}{3}$;
3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7x}{4}\right)=\sqrt{3}$;
4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=0$;
5) $\operatorname{ctg}6x=\frac{6}{11}$;
6) $\operatorname{ctg}(-9x)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1023.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\frac{3}{5}x=0$;
2) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=-\sqrt{3}$;
3) $\operatorname{ctg}\frac{3}{2}x=5$.

1024.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)+3=0$;

2) $\operatorname{tg}(3-2x)=2$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1025.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$; 2) $\operatorname{ctg}(4-3x)=2$; 3) $3\operatorname{tg}(3x+1)-\sqrt{3}=0$.

1026.° Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg} 4x = 1$ належать проміжку $[0; \pi]$?

1027.° Скільки коренів рівняння $\operatorname{ctg}\frac{x}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$?

1028.° Знайдіть суму коренів рівняння $\operatorname{ctg} 2x=-\sqrt{3}$, які належать проміжку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

1029.° Знайдіть суму коренів рівняння $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{3}$, які належать проміжку $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

1030.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}=0$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\sqrt{x}}=1$; 3) $\operatorname{tg}(\pi\sin x)=\sqrt{3}$.

1031.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5x}=1$; 2) $\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{x}}=-1$; 3) $\operatorname{ctg}(\pi\cos x)=1$.

1032.•• При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння:

1) $\frac{\operatorname{tg} x-a}{\operatorname{ctg} x+3}=0$; 2) $\frac{\sin x-a}{3\operatorname{tg}^2 x-1}=0$?

1033.•• При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння:

1) $\frac{\operatorname{ctg} x+a}{\operatorname{tg} x-2}=0$; 2) $\frac{\cos x-a}{\operatorname{ctg}^2 x-3}=0$?

1034.* При яких значеннях параметра a рівняння $(x+a)\left(\operatorname{tg} x-\sqrt{3}\right)=0$ на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ має єдиний корінь?

1035.* При яких значеннях параметра a рівняння $(x-a)(\operatorname{tg} x+1)=0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ має єдиний корінь?

49. Функції $y = \arccos x$ і $y = \arcsin x$

Для будь-якого $a \in [-1; 1]$ рівняння $\cos x = a$ на проміжку $[0; \pi]$ має єдиний корінь, який дорівнює $\arccos a$ (рис. 205). Тому кожному числу x з проміжку $[-1; 1]$ можна поставити у відповідність єдине число y з проміжку $[0; \pi]$ таке, що $y = \arccos x$.

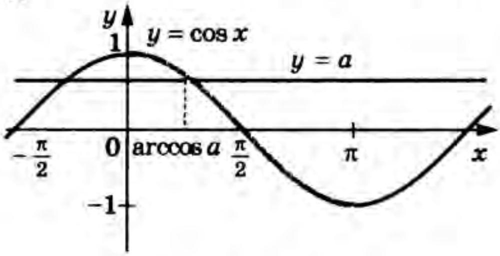


Рис. 205

Тим самим задано функцію $f(x) = \arccos x$ з областю визначення $D(f) = [-1; 1]$ і областю значень $E(f) = [0; \pi]$.

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \cos x$ з областю визначення $D(g) = [0; \pi]$.

Дійсно, $D(f) = E(g) = [-1; 1]$;
$E(f) = D(g) = [0; \pi]$.

З означення арккосинуса випливає, що для всіх x з проміжку $[-1; 1]$ виконується рівність

$$\boxed{\cos(\arccos x) = x}$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Властивості взаємно обернених функцій, розглянуті в п. 10, дозволяють визначити деякі властивості функції $f(x) = \arccos x$.

Оскільки функція $g(x) = \cos x$, $D(g) = [0; \pi]$, є спадною, то з теореми 10.3 випливає, що функція $f(x) = \arccos x$ також є спадною.

Для будь-якого $x \in D(g)$ маємо $f(g(x)) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in [0; \pi]$ виконується рівність

$$\boxed{\arccos(\cos x) = x}$$

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Це дозволяє побудувати графік функції $f(x) = \arccos x$ (рис. 206).

Відзначимо ще одну властивість функції $y = \arccos x$: для будь-якого $x \in [-1; 1]$ виконується рівність

$$\boxed{\arccos(-x) = \pi - \arccos x} \qquad (1)$$

Наприклад, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

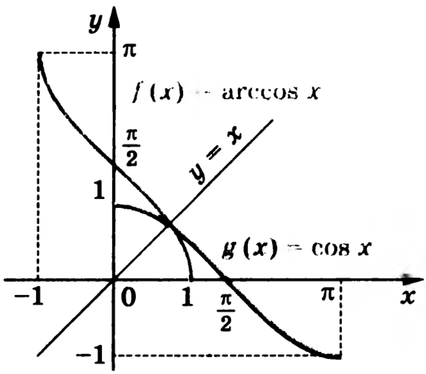


Рис. 206

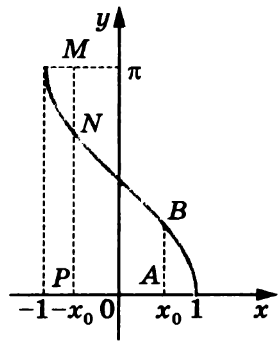


Рис. 207

Ця властивість має просту графічну ілюстрацію. На рисунку 207 $AB = MN = \arccos x_0$, $NP = \arccos(-x_0)$, а $MN + NP = \pi$.

Доведемо рівність (1). Нехай $\arccos(-x) = \alpha_1$, $\pi - \arccos x = \alpha_2$. Зауважимо, що $\alpha_1 \in [0; \pi]$, $\alpha_2 \in [0; \pi]$. Функція $y = \cos x$ є спадною на проміжку $[0; \pi]$, отже, на цьому проміжку кожного свого значення вона набуває тільки один раз. Тому, показавши, що $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$, тим самим доведемо рівність $\alpha_1 = \alpha_2$.

Маємо: $\cos\alpha_1 = \cos(\arccos(-x)) = -x$;
$\cos\alpha_2 = \cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$.

Для будь-якого $a \in [-1; 1]$ рівняння $\sin x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ має єдиний корінь, який дорівнює $\arcsin a$ (рис. 208).

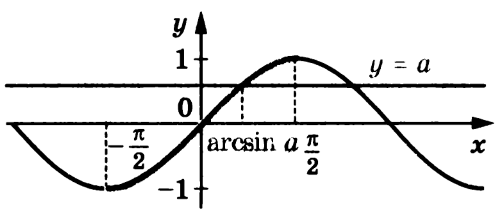


Рис. 208

Тому кожному числу x з проміжку $[-1;\ 1]$ можна поставити у відповідність єдине число y з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ таке, що $y = \arcsin x$.

Тим самим задано функцію $f(x) = \arcsin x$ з областю визначення $D(f) = [-1;\ 1]$ і областю значень $E(f)=\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \sin x$ з областю визначення $D(g)=\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Справді, $D(f) = E(g) = [-1;\ 1]$;

$$E(f)=D(g)=\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

З означення арксинуса випливає, що для всіх $x \in [-1;\ 1]$ виконується рівність

$$\sin(\arcsin x) = x$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Визначимо деякі властивості функції $f(x) = \arcsin x$.

Оскільки функція $g(x) = \sin x$, $D(g)=\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, є непарною, то функція $f(x) = \arcsin x$ також є непарною (див. ключову задачу № 234). Іншими словами, для будь-якого $x \in [-1;\ 1]$ виконується рівність

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

Наприклад, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

Функція $g(x) = \sin x$, $D(g)=\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, є зростаючою. Отже, функція $f(x) = \arcsin x$ також є зростаючою (див. теорему 10.3).

Для будь-якого $x \in D(g)$ маємо $f(g(x)) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ виконується рівність

$$\arcsin(\sin x) = x$$

Знову скористаємося тим, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

На рисунку 209 показано, як за допомогою графіка функції $g(x) = \sin x$, $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, побудувати графік функції $f(x) = \arcsin x$.

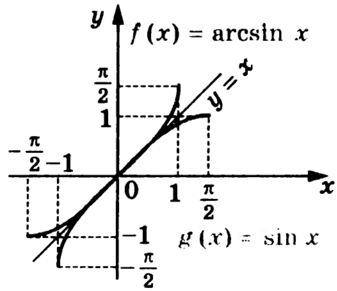


Рис. 209

Доведемо, що для будь-якого $x \in [-1; 1]$ виконується рівність

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Для цього покажемо, що

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

Маємо: $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Крім того, $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$. Тому

$$-\pi \leqslant -\arccos x \leqslant 0; \ -\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \arccos x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Отже, значення виразів $\arcsin x$ і $\frac{\pi}{2} - \arccos x$ належать проміжку зростання функції $y = \sin x$. Тому достатньо показати, що $\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right)$. Маємо: $\sin(\arcsin x) = x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$.

У таблиці наведено властивості функцій $y = \arccos x$ і $y = \arcsin x$.

	$y = \arccos x$	$y = \arcsin x$
Область визначення	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Область значень	$[0; \pi]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
Нулі функції	$x = 1$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in [-1; 1)$, то $\arccos x > 0$	Якщо $x \in [-1; 0)$, то $\arcsin x < 0$; якщо $x \in (0; 1]$, то $\arcsin x > 0$
Парність	Не є ні парною, ні непарною	Непарна
Зростання / спадання	Спадна	Зростаюча

ПРИКЛАД 1 Знайдіть область визначення функції

$$y = \arccos(x^2 - 3).$$

Розв'язання. Областю визначення $D(y)$ даної функції є множина розв'язків нерівності $-1 \leqslant x^2 - 3 \leqslant 1$.

Маємо: $\begin{cases} x^2 \leqslant 4, \\ x^2 \geqslant 2; \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -\sqrt{2}, \\ x \geqslant \sqrt{2}; \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} -2 \leqslant x \leqslant -\sqrt{2}, \\ \sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2. \end{array}\right.$

Отже, $D(y) = \left[-2; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; 2\right]$.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 4 - \arccos 3x$.

Розв'язання. Оскільки $0 \leqslant \arccos 3x \leqslant \pi$, то $-\pi \leqslant -\arccos 3x \leqslant 0$ і $4 - \pi \leqslant 4 - \arccos 3x \leqslant 4$.

Зазначимо, що $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 4 - \pi$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 4$.

Відповідь: найменше значення дорівнює $4 - \pi$, найбільше значення дорівнює 4.

ПРИКЛАД 3 Обчисліть $\arccos\left(\cos\frac{1}{3}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи формулу $\arccos(\cos x) = x$, де $x \in [0; \pi]$, маємо $\arccos\left(\cos\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

ПРИКЛАД 4 Обчисліть $\arcsin(\sin 6)$.

Розв'язання. Здавалося б, відповідь можна отримати одразу, зважаючи на рівність $\arcsin(\sin x) = x$. Проте число $x = 6$ не належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а отже, не може дорівнювати значенню арксинуса.

Правильне міркування має бути таким:

$\arcsin(\sin 6) = \arcsin(\sin(6 - 2\pi))$. Оскільки $6 - 2\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin(\sin 6) = 6 - 2\pi$.

Відповідь: $6 - 2\pi$.

ПРИКЛАД 5 Обчисліть $\arccos(\sin 10)$.

Розв'язання. Маємо: $\arccos(\sin 10) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - 10\right)\right)$.

Зауважимо, що число $\frac{\pi}{2}-10$ не належить проміжку $[0; \pi]$. Тому слід виконати такі перетворення:

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-10\right)\right)=\arccos\left(\cos\left(10-\frac{\pi}{2}-2\pi\right)\right)=10-\frac{5\pi}{2}.$$

Відповідь: $10-\frac{5\pi}{2}$.

ПРИКЛАД 6 Обчисліть $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$;

Розв'язання. Нехай $\arccos\frac{3}{5}=\alpha$, тоді $\alpha \in [0; \pi]$ і $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. Задача звелася до пошуку значення $\sin \alpha$.

Урахуємо, що коли $\alpha \in [0; \pi]$, то $\sin \alpha \geqslant 0$. Тоді отримуємо:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}.$$

Відповідь: $\frac{4}{5}$.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $\arcsin\frac{x-1}{2}=\frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$\arcsin\frac{x-1}{2}=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Оскільки функція $y = \arcsin x$ є зростаючою, отже, кожного свого значення набуває один раз, то рівність $\arcsin x_1 = \arcsin x_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$, $x_1 \in [-1; 1]$ і $x_2 \in [-1; 1]$. Тому дане рівняння рівносильне такому: $\frac{x-1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь: $\sqrt{3}+1$.

ПРИКЛАД 8. Розв'яжіть нерівність $\arccos(2x-1)>\frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність у такому вигляді:

$$\arccos(2x-1)>\arccos\frac{1}{2}.$$

Оскільки функція арккосинус є спадною, то дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases}2x-1<\frac{1}{2},\\2x-1\geqslant-1.\end{cases}$ Звідси $\begin{cases}x<\frac{3}{4},\\x\geqslant 0.\end{cases}$

Відповідь: $\left[0;\frac{3}{4}\right)$.

ПРИКЛАД 9 Побудуйте графік функції $y = \arcsin(\sin x)$.

Розв'язання. Нагадаємо, що $\arcsin(\sin x) = x$ лише за умови $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тому думка, що шуканим графіком є пряма $y = x$, — помилкова.

Дана функція є періодичною з періодом $T = 2\pi$. Тому достатньо побудувати її графік **на проміжку** $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ довжиною **в період.**

Якщо $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, **то** $\arcsin(\sin x) = x$. **Тому на проміжку** $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ шуканий графік — це відрізок прямої $y = x$.

Якщо $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}$, **отже,** $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$. Тому на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ шуканий графік — це відрізок прямої $y = \pi - x$.

Графік функції $y = \arcsin(\sin x)$ зображено на рисунку 210.

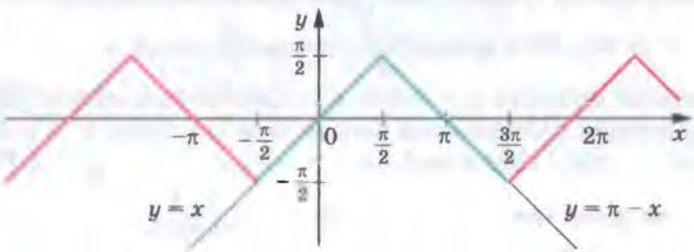


Рис. 210

Вправи

1036.° Чи є правильною рівність:

1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi$;

2) $\arccos^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{25\pi^2}{36}$;

3) $\arcsin 1 + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$;

4) $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2}$;

5) $\arcsin 1 \cdot \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{12}$;

6) $\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}$?

1037.° Чи є правильною рівність:

1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$; 4) $\arcsin 0+\arcsin\frac{1}{2}=\frac{7\pi}{6}$;

2) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{12}$; 5) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{36}$?

3) $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=0$;

1038.° Обчисліть:

1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; 3) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

2) $\cos\left(2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\cos\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

1039.° Обчисліть:

1) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $\sin\left(3\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$;

2) $\operatorname{tg}(2\arccos(-1))$; 4) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1040.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\arcsin(x-1)$; 2) $y=\arccos\sqrt{x}$; 3) $y=\arccos\frac{\pi}{x+4}$.

1041.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\arcsin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $y=\arccos\sqrt{3-x}$; 3) $y=\arccos\frac{2}{3x}$.

1042.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y=\arcsin x+\frac{\pi}{2}$; 2) $y=\arccos x+2$.

1043.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y=\arccos x+\pi$; 2) $y=\arcsin x+1$.

1044.° Обчисліть: 1) $\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin\frac{\pi}{6}\right)$.

1045.° Обчисліть: 1) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos\frac{\pi}{4}\right)$.

1046.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin x=-\frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos x=\frac{1}{2}$; 3) $\arcsin x=\frac{5\pi}{6}$.

1047.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos x=\frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos x=-\frac{\pi}{6}$; 3) $\arccos(2x-3)=\frac{\pi}{2}$.

1048.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $\arcsin x > -\frac{\pi}{2}$;
2) $\arcsin x \leqslant -\frac{\pi}{2}$;
3) $\arcsin x \geqslant -\frac{\pi}{2}$;
4) $\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$;
5) $\arcsin x > \frac{\pi}{2}$;
6) $\arccos x \leqslant 0$;
7) $\arccos x > 0$;
8) $\arccos x < \pi$.

1049.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $\arccos x \geqslant \pi$;
2) $\arcsin x < \frac{\pi}{2}$;
3) $\arccos x \geqslant 0$;
4) $\arccos x \leqslant \pi$;
5) $\arccos x > \pi$.

1050.$^{\bullet}$ Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\pi - \arccos x}$;
2) $y = \sqrt{\arccos x - \pi}$;
3) $y = \sqrt{-\arccos x}$;
4) $y = \arcsin\left(\sqrt{x} + 1\right)$;
5) $y = \arccos(-1 - x^2)$.

1051.$^{\bullet}$ Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}$;
2) $y = \sqrt{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}$;
3) $y = \sqrt{\arccos x}$;
4) $y = \arccos(x^2 - 2x + 2)$;
5) $y = \arccos \frac{x^2 + 1}{2x}$.

1052.$^{\bullet}$ Знайдіть область значень функції:

1) $y = \arcsin \sqrt{x} + 4$;
2) $y = \sqrt{-\arccos x}$;
3) $y = \frac{1}{\arcsin x}$;
4) $y = \frac{1}{\sqrt{\arccos x}}$.

1053.$^{\bullet}$ Знайдіть область значень функції:

1) $y = \arccos \sqrt{x} + 2$;
2) $y = \sqrt{\arcsin x}$;
3) $y = \frac{1}{\arccos x}$;
4) $y = \frac{1}{\sqrt{\arcsin x}}$.

1054.$^{\bullet}$ Доведіть, що при $|x| \leqslant 1$ виконується рівність

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

1055.$^{\bullet}$ Доведіть, що при $|x| \leqslant 1$ виконується рівність

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

1056.$^{\bullet}$ Обчисліть:

1) $\cos\left(\arcsin \frac{4}{5}\right)$;
2) $\sin\left(2 \arcsin \frac{3}{5}\right)$;
3) $\cos\left(\arcsin \frac{3}{5} - \arccos \frac{5}{13}\right)$;
4) $\cos\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8}\right)$.

1057.$^{\bullet}$ Обчисліть:

1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$;
3) $\cos\left(2\arccos\frac{4}{5}\right)$;
2) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}+\arccos\frac{2}{3}\right)$;
4) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right)$.

1058.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:
1) $\cos(\arccos(4x-9)) = x^2 - 5x + 5$;
2) $\sin(\arcsin(x+2)) = x + 2$.

1059.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:
1) $\cos(\arccos(4x-1)) = 3x^2$; 2) $\cos(\arccos(x-1)) = x - 1$.

1060.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:
1) $\arcsin(3x-2) = \arcsin(-x+2)$;
2) $\arccos(3x-16) = \arccos(x^2-26)$.

1061.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:
1) $\arccos(3x+2) = \arccos(5x+3)$;
2) $\arcsin(x^2-4) = \arcsin(2x+4)$.

1062.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:
1) $\arccos(2x-1) > \frac{\pi}{3}$; 2) $\arcsin 2x > \frac{\pi}{6}$; 3) $\arcsin(5-3x) < -\frac{\pi}{3}$.

1063.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:
1) $\arccos(4x-1) > \frac{3\pi}{4}$;
3) $\arccos(4-7x) < \frac{5\pi}{6}$.
2) $\arcsin(2-3x) < \frac{\pi}{4}$;

1064.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:
1) $\arcsin(3x-2) > \arcsin(5x-3)$; 2) $\arccos(2x-1) < \arccos\frac{1}{x}$.

1065.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:
1) $\arcsin(x^2-x) > \arcsin(3x-4)$; 2) $\arccos(1-2x) < \arccos\frac{1}{x-1}$.

1066.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:
1) $y = \arcsin|x-1|$; 2) $y = \arccos|2x+1|$.

1067.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:
1) $y = \arccos(|x|+1)$; 2) $y = \arcsin\left(\frac{1}{2}|x|-1\right)$.

1068.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції $y = \frac{|\arcsin x|}{\arcsin|x|}$.

1069.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:
1) $y = \sin(\arcsin x)$;
3) $y = \cos(2\arcsin x)$;
2) $y = \cos(\arcsin x)$;
4) $y = \sin(\arcsin x + \arccos x)$.

1070.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \cos(\arccos x)$;
2) $y = \sin(\arccos x)$;
3) $y = \cos(2\arccos x)$;
4) $y = \cos(\arcsin x + \arccos x)$.

1071.•• Побудуйте графік функції $y = \arccos(\cos x)$.

1072.•• Обчисліть:

1) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$;
2) $\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{7}\right)$;
3) $\arcsin(\sin 3)$;
4) $\arcsin(\cos 8)$.

1073.•• Обчисліть:

1) $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{9}\right)$;
2) $\arccos\left(\cos\frac{11\pi}{9}\right)$;
3) $\arccos(\cos 6{,}28)$;
4) $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)$;
5) $\arccos(\sin 12)$.

50. Функції $y = \mathrm{arctg}\, x$ і $y = \mathrm{arcctg}\, x$

Для будь-якого a рівняння $\mathrm{tg}\, x = a$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ має єдиний корінь, який дорівнює $\mathrm{arctg}\, a$ (рис. 211). Тому будь-якому числу x можна поставити у відповідність єдине число y з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ таке, що $y = \mathrm{arctg}\, x$.

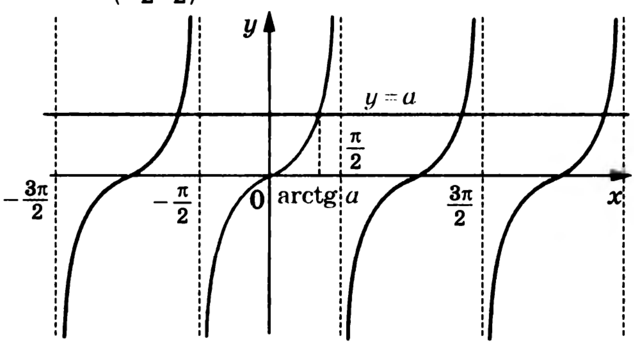


Рис. 211

Тим самим задано функцію $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$ з областю визначення $D(f) = \mathbb{R}$ і областю значень $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \text{tg}\ x$ з областю визначення $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Дійсно, $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$;

$$E(f) = D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

З означення арктангенса випливає, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\boxed{\text{tg}\,(\text{arctg}\ x) = x}$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Властивості взаємно обернених функцій, розглянуті в п. 10, дозволяють визначити деякі властивості функції $f(x) = \text{arctg}\ x$.

Оскільки функція $g(x) = \text{tg}\ x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, є зростаючою, то з теореми 10.3 випливає, що функція $f(x) = \text{arctg}\ x$ також є зростаючою.

Оскільки функція $g(x) = \text{tg}\ x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, є непарною, то функція $f(x) = \text{arctg}\ x$ також є непарною (див. ключову задачу № 234). Іншими словами, для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\boxed{\text{arctg}\,(-x) = -\text{arctg}\ x}$$

Наприклад, $\text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\text{arctg}\ \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Для будь-якого $x \in D(g)$ маємо $f(g(x)) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується рівність

$$\boxed{\text{arctg}\,(\text{tg}\ x) = x}$$

Нагадаємо, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. На рисунку 212 показано, як за допомогою графіка функції $g(x) = \text{tg}\ x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, побудувати графік функції $f(x) = \text{arctg}\ x$.

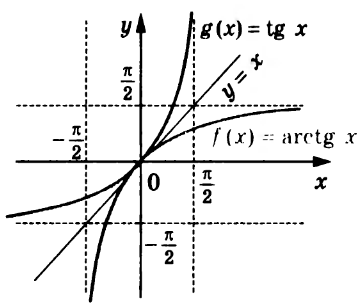


Рис. 212

Для будь-якого a рівняння $\text{ctg } x = a$ на проміжку $(0; \pi)$ має єдиний корінь, який дорівнює $\text{arcctg } a$ (рис. 213). Тому будь-якому числу x можна поставити у відповідність єдине число y з проміжку $(0; \pi)$ таке, що $y = \text{arcctg } x$.

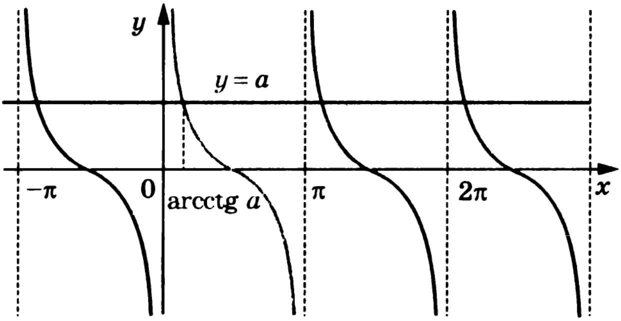


Рис. 213

Тим самим задано функцію $f(x) = \text{arcctg } x$ з областю визначення $D(f) = \mathbb{R}$ і областю значень $E(f) = (0; \pi)$.

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \text{ctg } x$ з областю визначення $D(g) = (0; \pi)$.

Справді, $E(g) = \mathbb{R}$. Таким чином,

$$D(f) = E(g) = \mathbb{R};$$
$$E(f) = D(g) = (0; \pi).$$

З означення арккотангенса випливає, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\boxed{\text{ctg}(\text{arcctg } x) = x}$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Визначимо деякі властивості функції $f(x) = \text{arcctg } x$.

Оскільки функція $g(x) = \text{ctg } x$, $D(g) = (0; \pi)$, є спадною, то функція $f(x) = \text{arcctg } x$ також є спадною.

Для будь-якого $x \in D(g)$ маємо $f(g(x)) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in (0; \pi)$ виконується рівність

$$\boxed{\text{arcctg}(\text{ctg } x) = x}$$

На рисунку 214 показано, як за допомогою графіка функції $g(x) = \text{ctg } x$, $x \in (0; \pi)$, побудувати графік функції $f(x) = \text{arcctg } x$.

Відзначимо ще одну властивість функції арккотангенс: для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\boxed{\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg } x}$$

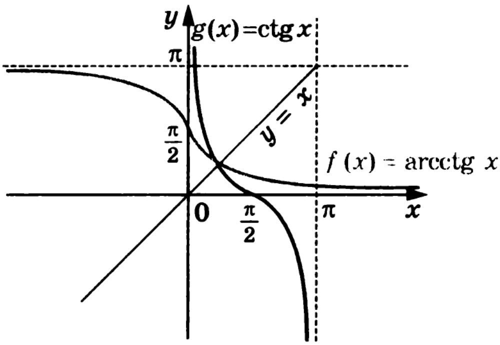


Рис. 214

Наприклад, $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)=\pi-\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

Доведемо цю властивість.

Нехай arcctg $(-x) = \alpha_1$ і π – arcctg $x = \alpha_2$. Зауважимо, що $\alpha_1 \in (0; \pi)$, $\alpha_2 \in (0; \pi)$.

Функція y = ctg x спадає на проміжку $(0; \pi)$, отже, на цьому проміжку кожного свого значення вона набуває тільки один раз. Тому, показавши, що ctg α_1 = ctg α_2, тим самим доведемо рівність $\alpha_1 = \alpha_2$.

Маємо: $\operatorname{ctg}\alpha_1 = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(-x)) = -x$;

$\operatorname{ctg}\alpha_2 = \operatorname{ctg}(\pi - \operatorname{arcctg} x) = -\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = -x$.

Отже, ctg α_1 = ctg α_2.

Покажемо, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\boxed{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}}$$

Достатньо показати, що $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$.

Маємо: $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$;

$$-\pi < -\operatorname{arcctg} x < 0;\ -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x < \frac{\pi}{2}.$$

Отже, значення виразів $\operatorname{arctg} x$ і $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$ належать проміжку зростання функції $y = \operatorname{tg} x$. Тому достатньо показати, що $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right)$.

Маємо: $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$.

У таблиці наведено властивості функцій $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$.

	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
Область визначення	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значень	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$(0; \pi)$
Нулі функції	$x = 0$	–
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in (-\infty; 0)$, то $\operatorname{arctg} x < 0$; якщо $x \in (0; +\infty)$, то $\operatorname{arctg} x > 0$	$\operatorname{arcctg} x > 0$ при всіх x
Парність	Непарна	Не є ні парною, ні непарною
Зростання / спадання	Зростаюча	Спадна

ПРИКЛАД 1 Обчисліть $\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Розв'язання. Нехай $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)=\alpha$, тоді $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{3}$. **Запишемо:**

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};\ \ \cos^2\alpha=\frac{9}{10}.$$

Звідси $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{9}{10}-1=\frac{4}{5}$.

Відповідь: $\frac{4}{5}$.

ПРИКЛАД 2 **Доведіть, що** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. **Оскільки функція $y = \operatorname{arctg} x$ є зростаючою, то можна записати:**

$$0<\operatorname{arctg}\frac{1}{2}<\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4},$$

$$0<\operatorname{arctg}\frac{1}{3}<\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

Звідси $0<\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}<\frac{\pi}{2}$.

Отже, значення виразів, записаних у лівій і правій частинах рівності, яка доводиться, належать проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. **На цьому проміжку функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає.**

Тоді для доведення достатньо показати, що

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

Маємо: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1;$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

Вправи

1074.° Обчисліть:

1) $\cos(2\operatorname{arctg} 1)$;

2) $\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6}\right)$;

4) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+2\operatorname{arctg} 1\right)$.

1075.° Знайдіть значення виразу:

1) $\arcsin 1+\arccos(-1)+\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

2) $\arccos 0+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arctg}(-1)+\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

3) $4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-3\arccos 1+2\arcsin\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1076.° Знайдіть значення виразу:

1) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg} 0+\operatorname{arcctg} 1+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-5\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+4\arcsin(-1)$.

1077.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{\operatorname{arcctg} x}$;

2) $y=\sqrt{\operatorname{arctg}(x-1)}$.

1078.° Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt{\pi-\operatorname{arcctg} x}$.

1079.° Знайдіть область значень функції:

1) $y = \operatorname{arctg} x + 2$;

2) $y=\sqrt{\operatorname{arctg} x}$.

1080.° Знайдіть область значень функції:

1) $y = \operatorname{arcctg} x + 4$;

2) $y=\sqrt{-\operatorname{arctg} x}$.

1081.° Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 4)$;
2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 5)$;
3) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}\right)$;
4) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} \pi)$.

1082.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2x) = 5$;
2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(4 - 3x)) = 2$.

1083.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$;
2) $\operatorname{arctg} x = 1$;
3) $\operatorname{arctg} x = \frac{3\pi}{4}$;
4) $\operatorname{arctg}(4x+9) = -\frac{\pi}{6}$.

1084.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{arcctg} x = \frac{3\pi}{4}$;
2) $\operatorname{arcctg} x = -1$;
3) $\operatorname{arcctg} x = -\frac{\pi}{4}$;
4) $\operatorname{arcctg}(5-8x) = \frac{2\pi}{3}$.

1085.• Знайдіть область значень функції $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

1086.• Знайдіть область значень функції $y = \frac{1}{\operatorname{arcctg} x}$.

1087.• Обчисліть:

1) $\sin(\operatorname{arctg} 2)$;
2) $\cos(\operatorname{arctg} 2)$;
3) $\cos\left(-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{7}{8}\right)\right)$;
4) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \operatorname{arcctg} 3\right)$.

1088.• Обчисліть:

1) $\sin(\operatorname{arcctg}(-2))$;
2) $\sin(\operatorname{arctg}(-3))$;
3) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \arccos\frac{3}{5}\right)$.

1089.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{arctg}(5x+3) > -\frac{\pi}{3}$;
2) $\operatorname{arcctg}(x-2) < \frac{5\pi}{6}$.

1090.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{arcctg}(3x-7) > \frac{2\pi}{3}$;
2) $\operatorname{arctg}(x+11) < \frac{\pi}{6}$.

1091.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$;
2) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$.

1092.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$;
2) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)$.

1093.•• Побудуйте графік функції $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

1094.•• Побудуйте графік функції $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$.

1095.•• Обчисліть:

1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{13}\right)$; 3) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)$; 5) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 17)$.

2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{10\pi}{13}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{21}\right)$;

1096.•• Обчисліть:

1) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{11}\right)$; 3) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 15)$; 5) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 10)$.

2) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{15\pi}{11}\right)$; 4) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{15\pi}{19}\right)$;

51. Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних

У пунктах 46–48 було отримано формули для розв'язування рівнянь виду $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Ці рівняння називають **найпростішими тригонометричними рівняннями**. За допомогою різних прийомів і методів багато тригонометричних рівнянь можна звести до найпростіших.

Спочатку розглянемо тригонометричні рівняння, які зводяться до найпростіших за допомогою введення нової змінної.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\sin x - 3\cos 2x = 2$.

Розв'язання. Використовуючи формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, перетворимо дане рівняння:

$$\sin x - 3(1 - 2\sin^2 x) - 2 = 0;$$
$$6\sin^2 x + \sin x - 5 = 0.$$

Нехай $\sin x = t$. Отримуємо квадратне рівняння $6t^2 + t - 5 = 0$. Звідси $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{5}{6}$.

Отже, дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = -1,\\ \sin x = \frac{5}{6}.\end{array}\right.$$

Маємо: $\left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\\ x = (-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $(-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x+\frac{1}{\cos^2 x}=3.$

Розв'язання. Оскільки $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x,$ то дане рівняння можна записати так:

$$\operatorname{tg} x + (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 3.$$

Звідси $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$. Нехай $\operatorname{tg} x = t$. Тоді $t^2 + t - 2 = 0$. Звідси $t_1 = 1$, $t_2 = -2$.

Отримуємо, що дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=1,\\ \operatorname{tg} x=-2.\end{array}\right. \text{ Звідси } \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\\ x=-\operatorname{arctg} 2+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $2 \sin^3 x + \cos 4x - 2 = 0$.

Розв'язання. Можна записати: $1 - \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 - 2 = 0$. Звідси $2 \cos^2 2x - \cos 2x - 2 = 0$. Зробимо заміну $\cos 2x = t$. Тоді останнє рівняння набуває вигляду $2t^2 - t - 2 = 0$. Розв'язавши його, отримуємо $t_1=\frac{1-\sqrt{17}}{4}$, $t_2=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$.

Оскільки $\frac{1+\sqrt{17}}{4}>1$, а $\frac{1-\sqrt{17}}{4}\in[-1;1]$, то дане рівняння рівносильне рівнянню $\cos 2x=\frac{1-\sqrt{17}}{4}$, звідси

$$x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{17}}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Відповідь: $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{17}}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $12\cos^2\frac{x}{2}=9-4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}.$

Розв'язання. Скориставшись формулами пониження степеня і перетворення добутку в суму, отримуємо:

$$6\,(1 + \cos x) = 9 - 2\,(\cos 2x + \cos x).$$

Звідси $2 \cos 2x + 8 \cos x - 3 = 0$; $2\,(2 \cos^2 x - 1) + 8 \cos x - 3 = 0$; $4 \cos^2 x + 8 \cos x - 5 = 0$.

Використовуючи заміну $\cos x = t$, отримаємо рівняння $4t^2 + 8t - 5 = 0$. Звідси $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=-\frac{5}{2}$. Далі маємо: $\cos x=\frac{1}{2}$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Відповідь: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД Розв'яжіть рівняння

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x + 4 = 0.$$

Розв'язання. Маємо: $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 3 (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + 4 = 0$.

Нехай $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = y$. Підносячи обидві частини записаної рівності до квадрата, отримуємо: $\operatorname{tg}^2 x + 2 + \operatorname{ctg}^2 x = y^2$, або $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = y^2 - 2$. Дане в умові рівняння набуває вигляду $y^2 - 2 + 3y + 4 = 0$, тоді $y^2 + 3y + 2 = 0$; $y_1 = -1$; $y_2 = -2$.

Маємо сукупність $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=-1, \\ \operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=-2.\end{array}\right.$ Розв'язуючи рівняння сукупності, знаходимо $\operatorname{tg} x = -1$. Звідси $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Означення. **Рівняння виду**
$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \ldots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0,$$
де a_0, a_1, ..., a_n — дійсні числа, які одночасно не дорівнюють нулю, $n \in \mathbb{N}$, називають однорідним тригонометричним рівнянням n-го степеня відносно $\sin x$ і $\cos x$.

З означення випливає, що суми показників степенів при $\sin x$ і $\cos x$ усіх доданків однорідного тригонометричного рівняння рівні.

Наприклад, рівняння $2 \sin x - 3 \cos x = 0$ — однорідне тригонометричне рівняння першого степеня, а рівняння $\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$ і $2 \sin^2 x - \cos^2 x = 0$ — однорідні тригонометричні рівняння другого степеня.

Для однорідних рівнянь існує ефективний метод розв'язування. Ознайомимося з ним на прикладах.

ПРИКЛАД Розв'яжіть рівняння

$$7 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x - 15 \cos^2 x = 0.$$

Розв'язання. Якщо $\cos x = 0$, то з даного рівняння випливає, що $\sin x = 0$. Але $\sin x$ і $\cos x$ не можуть одночасно бути рівними нулю, оскільки має місце рівність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Отже, множина коренів даного рівняння складається з таких чисел x, при яких $\cos x \neq 0$.

Поділивши обидві частини даного рівняння на $\cos^2 x$, отримаємо рівносильне рівняння:

$$\frac{7 \sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{8 \sin x \cos x}{\cos^2 x}-\frac{15 \cos^2 x}{\cos^2 x}=0;$$

$$7 \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x - 15 = 0.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=-1, \\ \operatorname{tg} x=\frac{15}{7};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, \\ x=\operatorname{arctg} \frac{15}{7}+\pi n, n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Відповідь: $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{15}{7}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 7 **Розв'яжіть рівняння $3 \sin^2 x + \sin 2x = 2$.**

Розв'язання. Це рівняння не є однорідним. Проте його можна легко звести до однорідного:

$$3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 2 (\sin^2 x + \cos^2 x);$$
$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0.$$

Отримали однорідне рівняння. Далі, діючи, як у попередньому прикладі, отримуємо рівняння, рівносильне початковому:

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Завершіть розв'язування самостійно.

Відповідь: $\operatorname{arctg}\left(-1 \pm \sqrt{3}\right)+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 8 **Розв'яжіть рівняння $\sin x - \cos x = 4 \sin^3 x$.**

Розв'язання. Це рівняння не є однорідним. Перепишемо його інакше: $(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin x - \cos x) = 4 \sin^3 x$. Після розкриття дужок і зведення подібних доданків маємо:

$$3 \sin^3 x + \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x + \cos^3 x = 0.$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на $\cos^3 x$ і позначивши $\operatorname{tg} x = t$, маємо: $3t^3 + t^2 - t + 1 = 0$. Це рівняння очевидно має корінь $t = -1$. Тому варто зробити такі перетворення: $3t^3 + t^2 - t + 1 = 3t^3 + 3t^2 - 2t^2 - 2t + t + 1 = 3t^2 (t + 1) - 2t (t + 1) + (t + 1) = (t + 1)(3t^2 - 2t + 1)$. Оскільки рівняння $3t^2 - 2t + 1 = 0$ не має коренів, то $\operatorname{tg} x = -1$; $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 9 **Розв'яжіть рівняння $2 \sin x - 3 \cos x = 2$.**

Розв'язання. Скористаємося формулами подвійного аргументу та основною тригонометричною тотожністю:

$$4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}-3\left(\cos^2 \frac{x}{2}-\sin^2 \frac{x}{2}\right)=2\left(\cos^2 \frac{x}{2}+\sin^2 \frac{x}{2}\right);$$
$$\sin^2 \frac{x}{2}+4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}-5 \cos^2 \frac{x}{2}=0.$$

Поділимо обидві частини останнього рівняння на $\cos^2 \frac{x}{2}$ і зробимо заміну $\operatorname{tg} \frac{x}{2}=t$. Отримуємо: $t^2 + 4t - 5 = 0$, звідси $t_1 = 1$, $t_2 = -5$,

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, \\ x=-2\operatorname{arctg}5+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-2\operatorname{arctg}5+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Зауваження. Рівняння прикладу 9 є окремим випадком рівняння виду

$$a\sin x+b\cos x=c, \qquad (1)$$

де a, b, c — деякі числа, відмінні від нуля.

При розв'язуванні таких рівнянь крім методу, розглянутого в прикладі 9, можна використовувати такий прийом. Перепишемо рівняння (1) у вигляді:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Оскільки $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, то точка $P\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ належить одиничному колу. Тому існує такий кут φ, що $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Тепер рівняння набуває вигляду

$$\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Звідси $\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Таким чином, отримали найпростіше тригонометричне рівняння.

ПРИКЛАД 10 При яких значеннях параметра a рівняння $\sin^2 3x-\left(a+\frac{1}{2}\right)\sin 3x+\frac{a}{2}=0$ має на проміжку $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$ рівно: 1) два корені; 2) три корені?

Розв'язання. Розглянемо дане рівняння як квадратне відносно $\sin 3x$. Тоді отримаємо рівносильну сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} \sin 3x=\frac{1}{2}, \\ \sin 3x=a. \end{array}\right.$$

Перше рівняння сукупності має на проміжку $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$ рівно два корені. У цьому можна переконатися безпосередньо, знайшовши

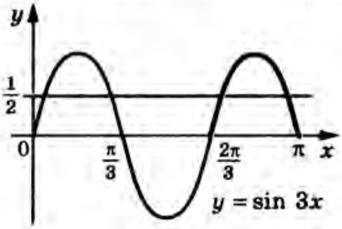


Рис. 215

ці корені, або графічно (рис. 215). Тому для задачі 1) треба, щоб друге рівняння сукупності не давало нових коренів на проміжку $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$.

При $a = \frac{1}{2}$ очевидно, що корені рівнянь сукупності збігаються. При $a > 1$ або $a < 0$ рівняння $\sin 3x = a$ не має коренів на проміжку $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$. У цьому знов-таки можна переконатися, наприклад, графічно (рис. 215).

Для задачі 2) друге рівняння сукупності на проміжку, що розглядається, повинно додавати до множини всіх коренів тільки один корінь. Зрозуміло, що це буде виконуватися тільки при $a = 1$.

Відповідь: 1) $a > 1$, або $a < 0$, або $a = \frac{1}{2}$; 2) $a = 1$.

Вправи

1097.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;
2) $2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0$;
3) $\sin^2 3x + 2 \sin 3x - 3 = 0$;
4) $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$;
5) $3 \operatorname{ctg}^2 2x + \operatorname{ctg} 2x - 4 = 0$;
6) $3 \cos^2 \frac{x}{4} + 5 \cos \frac{x}{4} - 2 = 0$.

1098.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$;
2) $2 \cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$;
3) $4 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$;
4) $3 \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{3} - \operatorname{ctg} \frac{x}{3} - 2 = 0$.

1099.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x - \cos x = 0$;
2) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$;
3) $3 \sin x = 2 \cos x$;
4) $4 \cos 2x - \sin 2x = 0$;
5) $\sin \frac{x}{3} + 5 \cos \frac{x}{3} = 0$;
6) $\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 0$;
7) $\sin^2 \frac{x}{2} - 3 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0$;
8) $3 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

1100.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x + \cos x = 0$;
2) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$;
3) $2 \sin x + \cos x = 0$;
4) $\cos 4x - 3 \sin 4x = 0$;
5) $\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 0$;
6) $4 \sin^2 x = 3 \sin x \cos x + \cos^2 x$.

1101.° **Розв'яжіть рівняння:**

1) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$;
2) $2\sin^2 x + 7\cos x + 2 = 0$;
3) $\cos 2x = 1 + 4\cos x$;
4) $2\cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0$;
5) $\cos 2x + \sin x = 0$;
6) $\cos\frac{2x}{3} - 5\cos\frac{x}{3} - 2 = 0$;
7) $\cos 2x - \cos^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0$;
8) $\cos\frac{x}{2} + \cos x = 0$;
9) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$;
10) $8\sin^2 3x + 4\sin^2 6x = 5$;
11) $4\operatorname{tg} 5x + 3\operatorname{ctg} 5x = 7$;
12) $\frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + 3$;
13) $2\operatorname{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$;
14) $\cos 2x - 4\sqrt{2}\cos x + 4 = 0$.

1102.° **Розв'яжіть рівняння:**

1) $4\sin^2 x + 8\cos x + 1 = 0$;
2) $2\cos^2 x = 1 + \sin x$;
3) $\cos 2x + 8\sin x = 3$;
4) $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$;
5) $5\sin\frac{x}{6} - \cos\frac{x}{3} + 3 = 0$;
6) $\cos x + \sin\frac{x}{2} = 0$;
7) $2\cos^2 4x - 6\cos^2 2x + 1 = 0$;
8) $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 3$;
9) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = \frac{3}{\cos^2 x}$;
10) $4\sin^2 x + 9\operatorname{ctg}^2 x = 6$.

1103.• **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\sin^2 x + 0{,}5\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$;
2) $\cos^2 5x + 7\sin^2 5x = 4\sin 10x$;
3) $(\cos x + \sin x)^2 = 1 - \cos 2x$;
4) $3\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 14\cos^2 x - 2 = 0$;
5) $5\cos^2 x - 3\sin^2 x - \sin 2x = 2$;
6) $3\sin^2 x + \sin x\cos x + 4\cos^2 x = 3$;
7) $3\sin x\cos x + \cos^2 x = 1$;
8) $\frac{2\cos x + \sin x}{7\sin x - \cos x} = \frac{1}{2}$.

1104.• **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\sin^2 x + 3\cos^2 x - 2\sin 2x = 0$;
2) $5\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 1$;
3) $6\sin^2 x + 2\sin 2x + 4\cos^2 x = 3$;
4) $2\cos^2 x + \sin 2x - 2 = 0$;
5) $3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$;
6) $\frac{2\sin x - \cos x}{5\sin x - 4\cos x} = \frac{1}{3}$.

1105.• **Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння**

$$\sin^2 x + \cos x + 1 = 0.$$

1106.° Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння
$$\sin^2 x + 0{,}5 \sin 2x = 1.$$

1107.° Знайдіть найменший додатний корінь рівняння
$$6 \sin^2 x + 2 \sin^2 2x = 5.$$

1108.° Знайдіть найменший додатний корінь рівняння
$$\sin x \cos x + \cos^2 x = 0.$$

1109.° Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \cos x \sin x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
2) $3 \cos x + 2 \operatorname{tg} x = 0$;
3) $8 \sin^2 x + 4 \sin^2 2x + 8 \cos 2x = 5$;
4) $3 + 5 \cos x = \sin^4 x - \cos^4 x$;
5) $\cos 2x - 9 \cos x + 6 = 4 \sin^2 \frac{x}{2}$.

1110.° Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \operatorname{ctg} x - 5 \sin x = 0$;
2) $4 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 2 \sin^2 x = 6$;
3) $7 + 2 \sin 2x + 1{,}5 (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0$;
4) $\sin^2 x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$;
5) $2 \cos 4x - 2 \cos^2 x = 3 \cos 2x$.

1111.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 2x - \frac{1}{4} = \cos 2x \cos 6x$;
2) $\sin 2x \sin x + \cos^2 x = \sin 5x \sin 4x + \cos^2 4x$.

1112.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin \frac{x}{2} \sin \frac{3}{2} x + \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$; 2) $2 \sin x \cos 3x = \cos^2 4x - \sin 2x + 1$.

1113.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \sin x - 8 \cos x = 3$; 2) $2 \sin x - 5 \cos x = 3$.

1114.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \sin x + 5 \cos x = -3$; 2) $3\sqrt{3} \sin x - 5 \cos x = 7$.

1115.° Скільки коренів рівняння $\cos 2x + \sin x = \cos^2 x$ належать проміжку $[-\pi; \pi]$?

1116.° Знайдіть суму коренів рівняння $2 \sin^2 x + 7 \cos x + 2 = 0$, які належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

1117.° Знайдіть усі корені рівняння $2 \cos^2 x = \sin x$, які задовольняють нерівність $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

1118.˙ **Знайдіть усі корені рівняння $\sin x + \cos x = 1$, які задовольняють нерівність $0 < x < \pi$.**

1119.˙˙ **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$;

2) $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5$.

1120.˙˙ **Розв'яжіть рівняння:**

1) $4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x$; 2) $\cos^4 3x + \cos^4\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

1121.˙˙ **При яких значеннях параметра a має корені рівняння:**

1) $\sin^2 x - (3a - 3)\sin x + a(2a - 3) = 0$;

2) $\cos^2 x + 2\cos x + a^2 - 6a + 10 = 0$?

1122.˙˙ **При яких значеннях параметра a має корені рівняння:**

1) $\cos^2 x - \cos x + a - a^2 = 0$;

2) $\sin^2 x - 2a\sin x + 2a^2 - 4a + 4 = 0$?

1123.˙˙ **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{ctg}^4 x + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = 4$;

2) $18\cos^2 x + 5(3\cos x + \cos^{-1} x) + 2\cos^{-2} x + 5 = 0$.

1124.˙˙ **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + \mathrm{ctg}^3 x = 4$;

2) $4\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + 4\sin x + \frac{2}{\sin x} = 11$.

1125.˙˙ **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\cos^3 x \sin x + \cos^2 x \sin^2 x - 3\cos x \sin^3 x - 3\sin^4 x = 0$;

2) $2\cos^2 x + \frac{5}{4}\sin^2 2x + \sin^4 x + \cos 2x = 0$;

3) $\sin^3 x = \sin x + \cos x$.

1126.˙˙ **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\sqrt{3}\sin^2 x\cos x - 4\sin x\cos^2 x + \sqrt{3}\cos^3 x = 0$;

2) $\sin^3 2x + \cos^3 2x - \sin 2x = 0$.

1127.˙˙ **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\cos 3x + 2\cos x = 0$; 2) $\sin 6x + 2 = 2\cos 4x$.

1128.˙˙ **Розв'яжіть рівняння:**

1) $3\sin\frac{x}{3} = \sin x$; 2) $\cos 3x - 1 = \cos 2x$.

1129.˙˙ **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\sqrt{5 - 2\sin x} = 6\sin x - 1$; 3) $\sqrt{2 - 3\cos 2x} = \sqrt{\sin x}$.

2) $\sqrt{-\cos 2x} = -\sqrt{2}\cos x$;

1130.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{10-18\cos x}=6\cos x-2$; 3) $\sqrt{3+4\cos 2x}=\sqrt{2\cos x}$.

2) $\sqrt{3\cos 2x-1}=\sqrt{2}\sin x$;

1131.** При яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить рівно 3 корені рівняння:

1) $2\sin^2 x-\sin x=0$; 2) $2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x=0$?

1132.** Визначте, при яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить рівно n коренів рівняння:

1) $2\sin^2 x+\sin x=0$, $n=4$; 2) $2\cos^2 x+\cos x=0$, $n=3$.

1133.* Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння $\cos^2 x-\left(\frac{7}{10}+a\right)\cos x+\frac{7a}{10}=0$ має на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}\right]$: 1) один корінь; 2) два корені?

1134.* Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння $\sin^2 x-\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x+\frac{a\sqrt{2}}{2}=0$ має на проміжку $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$: 1) два корені; 2) три корені; 3) не менше ніж три корені?

1135.* Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння $\cos^2 x-\left(a-\frac{1}{3}\right)\cos x-\frac{a}{3}=0$ має на проміжку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{3}\right)$: 1) два корені; 2) три корені; 3) не менше ніж три корені?

52. Розв'язування тригонометричних рівнянь методом розкладання на множники

Якщо права частина рівняння дорівнює нулю, а ліву частину вдалося розкласти на множники, то розв'язування цього рівняння можна звести до розв'язування кількох більш простих рівнянь.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\sin 2x+\cos x=0$.

Розв'язання. Маємо: $2\sin x\cos x+\cos x=0$;

$$\cos x\,(2\sin x+1)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ 2\sin x+1=0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=-\frac{1}{2};\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$.

Розв'язання. Маємо: $\sin 3x + \sin x - \sin 2x = 0$;

$2 \sin 2x \cos x - \sin 2x = 0$; $\sin 2x\,(2 \cos x - 1) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ \cos x = \frac{1}{2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi n}{2},\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1,5$.

Розв'язання. Скориставшись формулами пониження степеня, запишемо:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{3}{2}.$$

Далі маємо: $\cos 4x + (\cos 2x + \cos 6x) = 0$;

$\cos 4x + 2 \cos 4x \cos 2x = 0$; $2\cos 4x\left(\frac{1}{2} + \cos 2x\right) = 0.$

Отримуємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0,\\ \cos 2x = -\frac{1}{2}.\end{array}\right. \quad \text{Звідси} \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\sin 6x \cos 2x = \sin 5x \cos 3x - \sin 2x$.

Розв'язання. Перетворивши добуток тригонометричних функцій у суму, отримуємо:

$$\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 4x) = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) - \sin 2x;$$

$$\sin 4x + \sin 2x = 0;$$

$$2 \sin 3x \cos x = 0.$$

Перейдемо до сукупності

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0,\\ \cos x = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi n}{3},\\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $\sin 3x + 3 \sin 2x = 3 \sin x$.

Розв'язання. Застосувавши формули синуса подвійного та потрійного аргументів, отримуємо:

$$3\sin x - 4\sin^3 x + 6\sin x\cos x = 3\sin x.$$

Звідси $2\sin x\,(3\cos x - 2\sin^2 x) = 0$;

$$2\sin x\,(3\cos x - 2\,(1 - \cos^2 x)) = 0;$$

$$2\sin x\,(2\cos^2 x + 3\cos x - 2) = 0.$$

Переходимо до сукупності $\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0.\end{array}\right.$

Звідси $\left[\begin{array}{l}x = \pi n,\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Відповідь: $\pi n,\ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$(1 + \cos 2x) + \sin 2x + (\sin x + \cos x) = 0.$$

Тепер можна записати: $2\cos^2 x + 2\sin x\cos x + (\sin x + \cos x) = 0$;

$$2\cos x\,(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x) = 0;$$

$$(2\cos x + 1)(\sin x + \cos x) = 0.$$

Отримуємо сукупність $\left[\begin{array}{l}\cos x = -\dfrac{1}{2},\\ \sin x + \cos x = 0.\end{array}\right.$ Звідси $\left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Відповідь: $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Вправи

1136.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x + \cos 3x = 0$; 3) $2\sin x\cos 2x - \sin x + 2\cos 2x - 1 = 0$;

2) $\sin 5x - \sin x = 0$; 4) $2\sin x\,\mathrm{tg}\,x + 2\sqrt{3}\sin x - \mathrm{tg}\,x - \sqrt{3} = 0$.

1137.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 7x + \sin x = 0$; 3) $\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\,x - 2 = 0$;

2) $\cos 9x - \cos x = 0$; 4) $\sqrt{2}\cos x\,\mathrm{ctg}\,x - 3\sqrt{2}\cos x + \mathrm{ctg}\,x - 3 = 0$.

1138.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 1$; 3) $\sin 5x = \cos 4x$;

2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = 1$; 4) $\sin 10x - \cos 2x = 0$.

1139.° **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\sin\left(\frac{\pi}{12}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1;$ 2) $\cos 5x + \sin 3x = 0.$

1140.° **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\sin 2x + 2\sin x = \cos x + 1;$
2) $1 + \cos 8x = \cos 4x;$
3) $\cos x + \cos 3x + \cos 2x = 0;$
4) $2\sin 2x + \cos 3x - \cos x = 0;$
5) $\cos x - \cos 3x + \sin x = 0;$
6) $\sin 4x + 2\cos^2 x = 1;$
7) $\cos x - \cos 3x = 3\sin^2 x;$
8) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0;$
9) $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x;$
10) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0.$

1141.° **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\sin 2x + 2\sin x = 0;$
2) $\sin 2x - \cos x = 2\sin x - 1;$
3) $1 - \cos 8x = \sin 4x;$
4) $\sin 2x + \sin 4x + \cos x = 0;$
5) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0;$
6) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0;$
7) $\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0;$
8) $\sqrt{2}\cos 5x + \sin 3x - \sin 7x = 0.$

1142.• **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{3x}{2}=1;$
2) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1{,}5;$
3) $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1;$
4) $1 - \cos x = \mathrm{tg}\, x - \sin x;$
5) $\sin x + \sin 3x = 4\cos^2 x;$
6) $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x);$
7) $\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 5x;$
8) $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x - \sin^2 4x = 0;$
9) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2;$
10) $\cos 9x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right).$

1143.• **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\cos^2 6x + \cos^2 5x = 1;$
2) $\cos^2 x - \sin^2 2x + \cos^2 3x = \frac{1}{2};$
3) $\cos 2x - \cos 4x = \sin 6x;$
4) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin x;$
5) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x;$
6) $\sin 6x = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right).$

1144.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0$;
2) $\sin 3x \cos 2x = \sin 5x$;
3) $2\cos(x + 20^\circ)\cos x = \cos 40^\circ$;
4) $\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x$.

1145.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sin x \sin 2x + \cos 3x = 0$;
2) $\sin(x + 45^\circ)\sin(x - 15^\circ) = 0{,}5$;
3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0{,}5$;
4) $\sin 5x \cos 3x = \sin 9x \cos 7x$.

1146.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 7x-\sqrt{2}\cos 5x+\sqrt{3}\cos 7x-\sqrt{2}\sin 5x=0$;
2) $2\sin 3x+\sin x-\cos 2x=\sqrt{3}(\sin 2x-\cos x)$;
3) $\sqrt{3}(2-\cos x)+4\sin 2x=\sin x$.

1147.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 3x-\sin x=-\sqrt{3}(\sin 3x-\cos x)$;
2) $(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x)^2-5=\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$.

1148.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 3x + \sin x - \sin 2x = 2\cos^2 x - 2\cos x$;
2) $(\cos x - \sin x)^2 - 0{,}5\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x$.

1149.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^3 4x + \cos^3 4x = 1 - 0{,}5\sin 8x$;
2) $\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{2}(\cos^4 2x-\sin^4 2x)$.

53. Приклади розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\cos x + \sin x + \sin x\cos x = 1$.

Розв'язання. Нехай $\cos x + \sin x = t$. Тоді $\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = t^2$; $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$. Дане в умові рівняння набуває вигляду $t+\frac{t^2-1}{2}=1$, або $t^2 + 2t - 3 = 0$. Звідси $t_1 = -3$, $t_2 = 1$.

З урахуванням заміни отримуємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=-3,\\ \cos x+\sin x=1.\end{array}\right.$$

Оскільки $|\sin x| \leqslant 1$ і $|\cos x| \leqslant 1$, то перше рівняння сукупності коренів не має.

Залишається розв'язати рівняння $\cos x + \sin x = 1$. Маємо:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{array}\right.$$

Відповідь: $2\pi n,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

ПРИКЛАД [illegible] **Розв'яжіть рівняння**

$$\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Розв'язання. **З формул для синуса і косинуса потрійного аргументу знайдемо $\sin^3 x$ і $\cos^3 x$:**

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4},\ \ \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}.$$

Тоді дане рівняння набуде вигляду:

$$\frac{3\cos x + \cos 3x}{4}\cdot\cos 3x + \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\cdot\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$(\cos^2 3x - \sin^2 3x) + 3(\cos x\cos 3x + \sin x\sin 3x) = \sqrt{2};$$

$$\cos 6x + 3\cos 2x = \sqrt{2};$$

$$4\cos^3 2x - 3\cos 2x + 3\cos 2x = \sqrt{2};$$

$$\cos^3 2x = \frac{1}{2\sqrt{2}};\ \ \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \ x = \pm\frac{\pi}{8} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $\pm\frac{\pi}{8} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

ПРИКЛАД [illegible] **Розв'яжіть рівняння $4\cos x\cos 2x\cos 4x = \cos 7x$.**

Розв'язання. **Помножимо обидві частини рівняння на $\sin x$. Отримаємо рівняння-наслідок:**

$$4\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x = \cos 7x\sin x.$$

Звідси $\sin 8x = 2\cos 7x \sin x$; $\sin 8x = \sin 8x - \sin 6x$;

$$\sin 6x = 0;\ x = \frac{\pi k}{6},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки корені рівняння $\sin x = 0$ не є коренями заданого в умові рівняння, то з отриманих розв'язків необхідно виключити всі числа виду $x = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Маємо

$$\frac{\pi k}{6} \neq \pi m, \text{ звідси } k \neq 6m.$$

Відповідь: $\frac{\pi k}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 6m$, $m \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\cos\frac{x^2-8x}{5} = x^2+1$.

Розв'язання. Оскільки при будь-якому значенні x виконуються нерівності $\cos\frac{x^2-8x}{5} \leqslant 1$ і $x^2+1 \geqslant 1$, то коренями даного рівняння є ті значення змінної, при яких значення його лівої і правої частин одночасно дорівнюють 1. Отже, дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\cos\frac{x^2-8x}{5} = 1,\\ x^2+1 = 1.\end{cases}$

Друге рівняння системи має єдиний корінь $x = 0$. Він також задовольняє перше рівняння системи.

Відповідь: 0.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $x^2 - 2x\sin\frac{\pi x}{2} + 1 = 0$.

Розв'язання. Розглянемо дане рівняння як квадратне відносно x. Оскільки дискримінант $D = 4\sin^2\frac{\pi x}{2} - 4$ має бути невід'ємним, то отримуємо $\sin^2\frac{\pi x}{2} \geqslant 1$. Звідси $\sin\frac{\pi x}{2} = 1$ або $\sin\frac{\pi x}{2} = -1$. Тепер зрозуміло, що задане в умові рівняння рівносильне сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{2} = 1,\\ x^2 - 2x + 1 = 0,\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\frac{\pi x}{2} = -1,\\ x^2 + 2x + 1 = 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: 1; −1.

Вправи

1150.$^\bullet$ Розв'яжіть рівняння $2\sin 2x = 3(\sin x + \cos x)$.

1151.$^\bullet$ Розв'яжіть рівняння $\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) = 0$.

1152.$^\bullet$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$; 2) $\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x} + 2\cdot\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = 3$.

1153.$^\bullet$ Розв'яжіть рівняння $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$.

1154.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $3\cos x + 3\sin x + \sin 3x - \cos 3x = 0$;
2) $\cos 4x = \cos^2 3x$;
3) $\sin^3 x \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x = \cos^3 4x$.

1155.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^3 x + \sin 3x = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2x$;
2) $\cos 6x + 8\cos 2x - 4\cos 4x - 5 = 0$.

1156.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}$;
2) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = -0{,}5$;
3) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 1\frac{3}{4}$.

1157.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{8}\cos 15x$;
2) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$;
3) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = -0{,}5$.

1158.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $2\cos\frac{x^2+2x}{6} = x^2 + 4x + 6$; 2) $3\cos x + 4\sin x = x^2 - 6x + 14$.

1159.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\frac{\pi x}{4} = x^2 - 4x + 5$; 2) $\frac{2}{\sin x + \cos x} = \sqrt{2 - x^2}$.

1160.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння $\sin x = x^2 + x + 1$.

1161.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння $3x^2 = 1 - 2\cos x$.

1162.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $4y^2 - 4y\cos x + 1 = 0$;
2) $(x+y)^2 + 10(x+y)\cos(\pi xy) + 25 = 0$.

1163.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 8x\sin(xy) + 16 = 0$; 2) $y^2 - 3\sqrt{2}(\cos x - \sin x)\,y + 9 = 0$.

54. Про рівносильні переходи при розв'язуванні тригонометричних рівнянь

У попередніх пунктах ви ознайомилися з основними прийомами розв'язування тригонометричних рівнянь. Проте при застосуванні кожного методу є свої тонкощі, нюанси, «підводні рифи».

Рис. 216

Очевидно, що поза областю визначення рівняння коренів бути не може (рис. 216). Якщо під час перетворень рівняння відбувається розширення області його визначення, то зрозуміло, що це може привести до появи сторонніх коренів. Цю небезпеку слід брати до уваги при розв'язуванні тригонометричних рівнянь.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння

$$\frac{2-2\sin^2 x-\cos x}{6x^2+5\pi x+\pi^2}=0.$$

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 2-2\sin^2 x-\cos x=0, \\ 6x^2+5\pi x+\pi^2\neq 0. \end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases} 2\cos^2 x-\cos x=0, \\ x\neq -\dfrac{\pi}{2}, \\ x\neq -\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}, \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \end{array}\right. \\ x\neq -\dfrac{\pi}{2}, \\ x\neq -\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

Зауважимо, що при $k=-1$ корінь першого рівняння, а при $n=0$ один із коренів другого рівняння сукупності не задовольняють систему.

Відповідь: $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $-\frac{\pi}{3}+2\pi m$, $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $n\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$, $m\neq 0$, $k\neq -1$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\dfrac{\cos^2 x - \cos x}{1 - \sin x} = 0.$

Розв'язання. Перейдемо до рівносильної системи

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = 1, \end{array}\right. \\ \sin x \neq 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi n, \ \ n \in \mathbb{Z}, \end{array}\right. \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, \ \ l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Очевидно, що при парних значеннях k розв'язки першого рівняння сукупності не задовольняють систему. При $k = 2m - 1$, $m \in \mathbb{Z}$, отримуємо $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi(2m - 1) = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$

Відповідь: $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z},\ 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\dfrac{\sin 3x - 2\sin x}{\cos 3x} = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\, x.$

Розв'язання. Застосуємо формули синуса і косинуса потрійного аргументу. Отримаємо: $\dfrac{3\sin x - 4\sin^3 x - 2\sin x}{4\cos^3 x - 3\cos x} = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\, x.$

Звідси $\dfrac{\sin x\,(1 - 4\sin^2 x)}{\cos x\,(1 - 4\sin^2 x)} = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\, x.$ Останнє рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\, x, \\ \sin x \neq \pm\dfrac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{звідси} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = 0, \\ \mathrm{tg}\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \end{array}\right. \\ \sin x \neq \pm\dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \end{array}\right. \\ \sin x \neq \pm\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Відповідь: $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{9 - x^2}\,(2\sin 2\pi x + 5\cos \pi x) = 0.$$

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 9 - x^2 = 0, \\ 2\sin 2\pi x + 5\cos \pi x = 0, \end{array}\right. \\ 9 - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 - 9 = 0, \\ 4\sin \pi x \cos \pi x + 5\cos \pi x = 0, \end{array}\right. \\ x^2 \leqslant 9; \end{cases}$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2=9,\\ \cos\pi x\,(4\sin\pi x+5)=0,\end{array}\right.\\ x^2\leqslant 9;\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2=9,\\ \cos\pi x=0,\\ \sin\pi x=-\dfrac{5}{4},\end{array}\right.\\ x^2\leqslant 9;\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2=9,\\ \pi x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\end{array}\right.\\ -3\leqslant x\leqslant 3;\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=-3,\\ x=\dfrac{1}{2}+k,\ k\in\mathbb{Z},\end{array}\right.\\ -3\leqslant x\leqslant 3.\end{array}\right.$$

Розв'язавши відносно k систему $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}+k\leqslant 3,\\ \dfrac{1}{2}+k\geqslant -3,\ k\in\mathbb{Z},\end{array}\right.$ отримаємо

Відповідь: $x = 3$, або $x = -3$, або $x=\dfrac{1}{2}+k$,

де $k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\cos 2x}\cos x=0$.

Розв'язання. Перейдемо до рівносильної системи:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos 2x=0,\end{array}\right.\\ \cos 2x\geqslant 0;\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z},\end{array}\right.\\ \cos 2x\geqslant 0.\end{array}\right.$$

При $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$ маємо: $\cos 2x = \cos(\pi + 2\pi k) = -1 < 0$ і при $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$ маємо: $\cos 2x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)=0\geqslant 0$.

Відповідь: $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

У деяких тригонометричних тотожностях вирази, які записано в лівих і правих частинах, мають різну область визначення. Наведемо кілька прикладів.

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}\qquad (1)$$

Областю визначення лівої частини цієї тотожності є множина $\mathbb{R}$, а правої — множина $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \qquad (2)$$

Областю визначення лівої частини тотожності (2) є множина $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$; область визначення правої частини — множина $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z},\ \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}\}$.

Застосування цих формул справа наліво призводить до розширення області визначення рівняння, а отже, з'являється загроза появи сторонніх коренів.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння $(1 + \operatorname{tg}^2 x)\sin x + \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x)\sin x = 1 - \operatorname{tg}^2 x.$$

Поділимо обидві частини останнього рівняння на $1 + \operatorname{tg}^2 x$. Зрозуміло, що таке перетворення не порушує рівносильності. Маємо $\sin x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$. Оскільки має місце формула $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, то виникає бажання замінити праву частину останнього рівняння на $\cos 2x$. Проте така заміна розширить його область визначення на множину чисел виду $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Отже, дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \sin x = \cos 2x, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases}$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \cos x \neq 0. \end{array}\right.$

Маємо $\sin x = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Очевидно, що звуження області визначення рівняння — це загроза втрати коренів. Наприклад, застосування формул (1) і (2) зліва направо може призвести до втрати коренів.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} 2x + \sin 2x = \frac{16}{15} \operatorname{ctg} x$.

Розв'язання. Застосувавши формули

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \text{і} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

дане рівняння зручно звести до алгебраїчного рівняння відносно $\operatorname{tg} x$. Проте такі перетворення звужують область визначення рівняння і призводять (у цьому нескладно переконатися) до втрати коренів виду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Цей факт треба врахувати при записі відповіді.

Розв'язавши рівняння $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{16}{15 \operatorname{tg} x}$, отримаємо $x = \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\pm \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) = -1 - 5 \operatorname{ctg} x$.

Розв'язання. Очевидно, що вигідно застосувати тотожність $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} \operatorname{tg} x}$. Але при цьому область визначення рівняння звузиться на множину $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Легко переконатися, що числа виду $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, є коренями даного рівняння. Тому запишемо сукупність, рівносильну даному рівнянню:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} \operatorname{tg} x} = -1 - \frac{5}{\operatorname{tg} x}. \end{array}\right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = -1 - \frac{5}{\operatorname{tg} x}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{tg} x = \frac{5}{3}. \end{array}\right.$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $\operatorname{arctg} \frac{5}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Вправи

1164.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\sin x}{x+2\pi}=0$; 2) $\frac{2-3\sin x-\cos 2x}{6x^2-\pi x-\pi^2}=0$; 3) $\frac{1-5\sin \pi x+2\cos^2 \pi x}{6x^2+x-5}=0$.

1165.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\sin x-\cos x}{4x-\pi}=0$;

2) $\frac{\cos 2x-2\cos x+1}{12x^2-8\pi x+\pi^2}=0$;

3) $\frac{3\sin^2 2\pi x+7\cos 2\pi x-3}{4x^2-7x+3}=0$.

1166.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=0$;

2) $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}=0$;

3) $\frac{\sin^2 x+\sin x}{1+\cos x}=0$;

4) $\frac{\sin 2x\cos 3x-\cos 2x\sin 3x}{1+\cos x}=0$;

5) $\frac{8\sin x\cos x\sin 2x-1}{\sqrt{3}+2\sin 4x}=0$;

6) $\frac{\sin 2x}{1+\sin x}=-2\cos x$.

1167.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}=0$;

2) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=0$;

3) $\frac{2\sin^2 x+3\sin x}{1-\cos x}=0$;

4) $\frac{\sin x}{1+\cos x}=1-\cos x$;

5) $\frac{\sin 2x}{1-\cos x}=2\sin x$.

1168.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-2}\sin \pi x=0$;

2) $\sqrt{25-4x^2}\,(3\sin 2\pi x+8\sin \pi x)=0$.

1169.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3-x}\cos \pi x=0$;

2) $\sqrt{49-4x^2}\left(\sin \pi x+3\cos\frac{\pi x}{2}\right)=0$.

1170.°° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\cos x-4\sin^2 x\cos x}{\sin 3x+1}=0$;

2) $\frac{1-\cos x-\sin x}{\cos x}=0$;

3) $\frac{\sin x+\cos 4x-2}{2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}}=0$.

1171.°° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\cos^2 2x-\sin^2 x}{\sin 3x-1}=0$;

2) $\frac{\cos x+\cos 3x+2}{\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}=0$.

1172.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{\sin x}\cos x=0;$

2) $\sqrt{\operatorname{ctg} x-\sqrt{3}}\cos x=0;$

3) $\sqrt{\cos x}\,(8\sin x+5-2\cos 2x)=0.$

1173.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{\cos x}\sin x=0;$

2) $\sqrt{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin x=0;$

3) $\sqrt{\sin x}\,(4-5\cos x-2\sin^2 x)=0.$

1174.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{5\pi}{3}\right)=2\operatorname{ctg}2x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{6};$

2) $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}=\dfrac{2\operatorname{ctg}x+3}{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}.$

1175.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}2x+\sin 2x=\frac{8}{3}\operatorname{ctg}x;$

2) $\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}+3\operatorname{ctg}2x;$

3) $2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+5\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=-7.$

35 Приклади розв'язування систем тригонометричних рівнянь

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{3},\\ \sin x+\sin y=1.\end{cases}$

Розв'язання. Перепишемо дану систему у вигляді

$$\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{3},\\ 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1.\end{cases}$$

Підставимо в друге рівняння системи $\frac{\pi}{3}$ замість $x+y$. Маємо:

$$\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{3},\\ 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{x-y}{2}=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x+y=\frac{\pi}{3},\\ \cos\frac{x-y}{2}=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x+y=\frac{\pi}{3},\\ x-y=4\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Далі отримуємо:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ y = \frac{\pi}{6} - 2\pi k. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} - 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \cos x \sin y = \frac{1}{4}. \end{cases}$

Розв'язання. Ураховуючи, що $x - y = \frac{\pi}{6}$, перетворимо друге рівняння системи:

$$\frac{1}{2}(\sin(y - x) + \sin(y + x)) = \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{2}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin(x + y)\right) = \frac{1}{4};$$

$$\sin(x + y) = 1; \; x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Тепер система набуває вигляду $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \end{cases}$

Звідси отримуємо:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \\ y = \frac{\pi}{6} + \pi k. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$

Розв'язання. Перетворимо друге рівняння системи:

$\frac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y} = 1$. Оскільки $x + y = \frac{\pi}{4}$, то маємо: $\cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y)) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \cos(x - y)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(x-y) = \sqrt{2};$$

$$\cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x - y = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Тепер отримуємо:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x+y=\dfrac{\pi}{4}, \\ x-y=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x+y=\dfrac{\pi}{4}, \\ x-y=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k. \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \text{Звідси} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k, \\ y=-\pi k, \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pi k, \\ y=\dfrac{\pi}{4}-\pi k. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ -\pi k\right),\ \left(\pi k;\ \frac{\pi}{4}-\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}.$

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}25, \\ \cos x \sin y = 0{,}75. \end{cases}$

Розв'язання. Запишемо систему, рівносильну даній:

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = 1, \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = -0{,}5. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \sin(x-y) = -0{,}5; \end{cases}$ (1)

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x-y=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \qquad (2)$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \\ x-y=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \\ x-y=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+\pi(k+n), \\ y=\dfrac{\pi}{3}+\pi(k-n), \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi(k+n), \\ y=\dfrac{2\pi}{3}+\pi(k-n). \end{cases} \end{array}\right.$$

Зауважимо, що, переходячи від системи (1) до системи (2), при записі розв'язків першого рівняння системи ми використовували параметр k, а при записі розв'язків другого рівняння — параметр n. Вживання тільки одного параметра призвело б до втрати розв'язків. Справді, якщо записати систему (2), використовуючи лише параметр k, отримаємо сукупність:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x-y=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x-y=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{звідси} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\\ y=\dfrac{\pi}{3},\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\\ y=\dfrac{2\pi}{3}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Тепер бачимо, що розв'язки отриманої сукупності є підмножиною множини розв'язків вихідної системи. Так, наприклад, пара $\left(\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{4\pi}{3}\right)$ є розв'язком системи рівнянь, проте не є розв'язком отриманої сукупності.

Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{6}+\pi(k+n); \dfrac{\pi}{3}+\pi(k-n)\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{6}+\pi(k+n); \dfrac{2\pi}{3}+\pi(k-n)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=2,\\ 2\cos x\cos y=1.\end{cases}$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{cases}\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=2,\\ \cos x\cos y=0{,}5;\end{cases} \quad \begin{cases}\sin(x+y)=1,\\ \cos x\cos y=0{,}5;\end{cases} \quad \begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ \cos x\cos y=0{,}5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k-x,\\ \cos x\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k-x\right)=0{,}5;\end{cases} \quad \begin{cases}y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k-x,\\ \cos x\sin x=0{,}5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k-x,\\ \sin 2x=1;\end{cases} \quad \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\\ y=\dfrac{\pi}{4}+\pi(2k-n),\ k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n; \dfrac{\pi}{4}+\pi(2k-n)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вправи

1176.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3}, \\ \cos x+\cos y=\dfrac{3}{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3}, \\ \cos^2 x-\cos^2 y=-\dfrac{3}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=\dfrac{5}{6}\pi, \\ \cos^2 x+\cos^2 y=\dfrac{1}{4}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3}, \\ \cos x\cos y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

1177.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y-x=60°, \\ \cos x+\cos y=1{,}5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{3}, \\ \sin \pi x+\sin \pi y=1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4}, \\ \sin^2 x+\sin^2 y=1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3}, \\ \sin x\sin y=0{,}25. \end{cases}$

1178.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y=\dfrac{2\pi}{3}, \\ \sin x-2\sin y=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=\dfrac{5}{2}\pi, \\ \cos 2x+\sin y=2. \end{cases}$

1179.° Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x-y=\dfrac{5}{3}\pi, \\ \sin x=2\sin y. \end{cases}$

1180.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

1181.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x-y=\dfrac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=-2\sqrt{3}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{6}, \\ \operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y=1. \end{cases}$

1182.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin \pi x \cos \pi y = -\dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} \pi x \operatorname{ctg} \pi y = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2} = 0{,}25, \\ \cos x \cos y = -0{,}5. \end{cases}$

1183.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x \cos y = -0{,}5, \\ \cos x \sin y = 0{,}5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \cos x \cos y = 0{,}25, \\ \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2} = 0{,}5. \end{cases}$

56. Найпростіші тригонометричні нерівності

Нерівності виду $f(x) > a$, $f(x) < a$, де f — одна з чотирьох тригонометричних функцій, називають **найпростішими тригонометричними нерівностями.**

Підґрунтям для розв'язування цих нерівностей є таке наочне міркування: множиною розв'язків нерівності $f(x) > g(x)$ є множина тих значень змінної x, при яких точки графіка функції f розміщені вище за відповідні точки графіка функції g (рис. 217). На цьому рисунку проміжок $(a; b)$ — множина розв'язків нерівності $f(x) > g(x)$.

Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей проводитимемо за такою схемою: знайдемо розв'язки на проміжку, довжина якого дорівнює періоду даної функції; усі інші розв'язки відрізняються від знайдених на Tn, де T — період даної функції, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

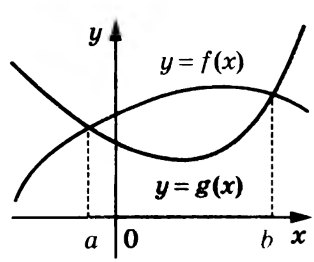


Рис. 217

Розглянемо приклади.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$.

Розв'язання. На рисунку 218 зображено графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$. Оскільки $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, то графіки перетинаються в точках з абсцисами $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Розв'яжемо цю нерівність на проміжку $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + 2\pi\right]$ завдовжки в період функції $y = \sin x$.

На цьому проміжку графік функції $y = \sin x$ знаходиться вище за графік функції $y = \frac{1}{2}$ при $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ (рис. 218).

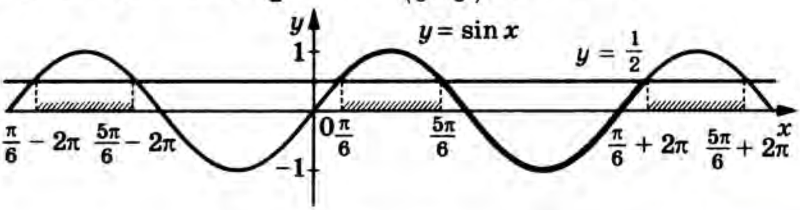


Рис. 218

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. Таке об'єднання прийнято позначати так: $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$.

Відповідь записують в один з трьох способів:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{або } \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right), \ n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{або } \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right).$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, то розв'яжемо цю нерівність на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} + 2\pi\right]$, тобто на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$.

На проміжку, що розглядається, графік функції $y = \sin x$ розміщений нижче від графіка функції $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ при $x \in \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right)$ (рис. 219).

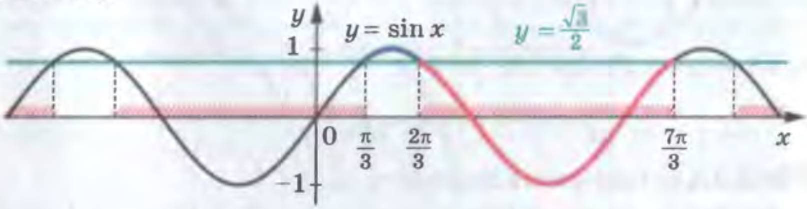


Рис. 219

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{7\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

У прикладах 1 і 2, розв'язуючи нерівності виду $\sin x > a$ і $\sin x < a$, ми розглядали проміжок виду $[\arcsin a; \arcsin a + 2\pi]$. Зрозуміло, що розв'язування можна провести, розглядаючи будь-який інший проміжок, довжина якого дорівнює 2π, наприклад проміжок $[-2\pi + \arcsin a; \arcsin a]$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. Маємо: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$. Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $\left[-2\pi + \frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, тобто на проміжку $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

На цьому проміжку графік функції $y = \cos x$ розміщений вище за графік функції $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x \in \left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$ (рис. 220).

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

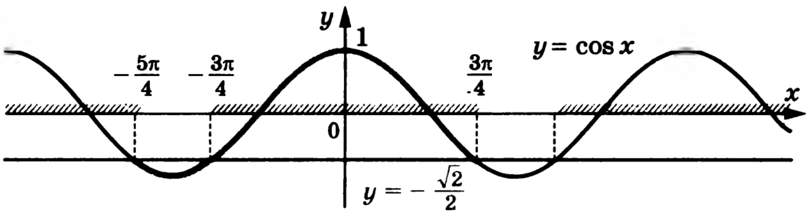


Рис. 220

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg} x < 1$.

Розв'язання. Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Оскільки $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, то на проміжку, що розглядається, графік функції $y = \operatorname{tg} x$ розміщений нижче від графіка функції $y = 1$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ (рис. 221).

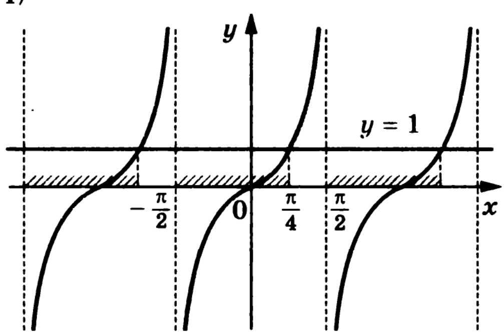


Рис. 221

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\operatorname{ctg} x \geqslant -\sqrt{3}$.

Розв'язання. Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $(0; \pi)$.

Оскільки $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$, то на проміжку, що розглядається, графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ розміщений не нижче від графіка функції $y = -\sqrt{3}$ при $x \in \left(0; \frac{5\pi}{6}\right]$ (рис. 222).

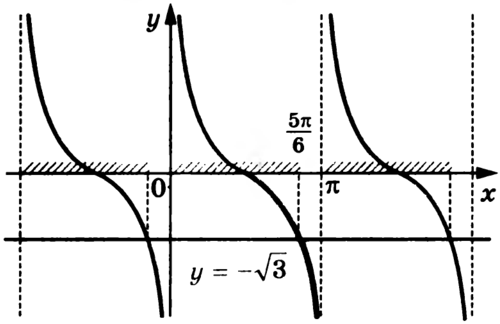


Рис. 222

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(\pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\pi n < x \leqslant \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $\sin x - \cos x > -1$.

Розв'язання. Маємо:

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > -1;$$

$$2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > -1;$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > -1;$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Нехай $x - \frac{\pi}{4} = t$. Тоді $\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

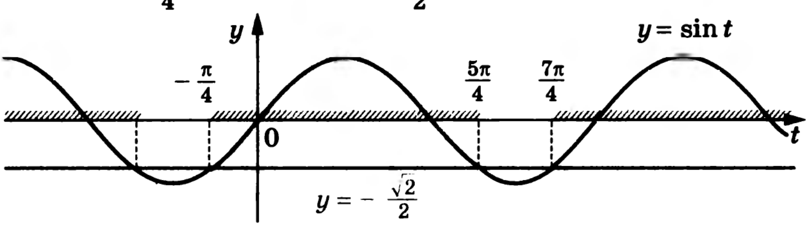


Рис. 223

Скориставшись рисунком 223, отримуємо:

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Звідси $-\frac{\pi}{4}+2\pi n<x-\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}+2\pi n;$

$$2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n.$$

Відповідь: $2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей можна інтерпретувати за допомогою одиничного кола.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть нерівність $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\cos x<\frac{1}{2}.$

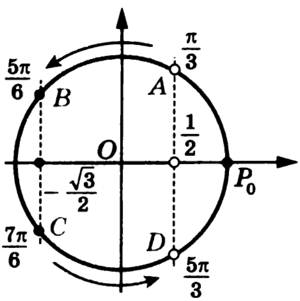


Рис. 224

Розв'язання. Виділимо на одиничному колі множину точок, абсциси яких не менші від $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ і менші від $\frac{1}{2}$ (рис. 224).

Множина розв'язків даної нерівності — це множина таких чисел x, що точки $P_x=R_O^x(P_0)$ належать дузі AB або дузі CD.

Маємо:

$$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}\quad\text{і}\quad\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}.$$

Уявімо собі, що ми рухаємося по дугах AB і CD проти годинникової стрілки. Тоді можна записати: $A=R_O^{\frac{\pi}{3}}(P_0)$, $B=R_O^{\frac{5\pi}{6}}(P_0)$, $C=R_O^{\frac{7\pi}{6}}(P_0)$, $D=R_O^{\frac{5\pi}{3}}(P_0)$.

З урахуванням періодичності функції $y=\cos x$ переходимо до сукупності, яка рівносильна даній нерівності:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{3}+2\pi k<x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\\ \frac{7\pi}{6}+2\pi k\leqslant x<\frac{5\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{3}+2\pi k<x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2\pi k$

або $\frac{7\pi}{6}+2\pi k\leqslant x<\frac{5\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Вправи

1184.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x<\frac{1}{2}$; 4) $\cos x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $\operatorname{ctg} x\leqslant\sqrt{3}$; 9) $\sin x<\frac{1}{6}$;

2) $\sin x\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\operatorname{tg} x<-1$; 8) $\operatorname{ctg} x>-1$; 10) $\operatorname{tg} x>3$.

3) $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\operatorname{tg} x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$;

1185.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $\operatorname{ctg} x>\frac{\sqrt{3}}{3}$; 9) $\cos x>\frac{3}{5}$;

2) $\sin x>-\frac{1}{2}$; 5) $\operatorname{tg} x\geqslant-1$; 8) $\operatorname{ctg} x\leqslant 1$; 10) $\operatorname{ctg} x<2$.

3) $\cos x\leqslant\frac{1}{2}$; 6) $\operatorname{tg} x<-\sqrt{3}$;

1186.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin 2x>\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{4}\right)<\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{ctg} 5x>1$; 4) $\cos(-3x)>\frac{1}{3}$.

1187.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin\frac{x}{3}<\frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right)>\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} 2x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\cos 4x<\frac{1}{4}$.

1188.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)>\frac{1}{\sqrt{3}}$; 5) $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)>-\frac{1}{2}$; 4) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)\leqslant\sqrt{3}$; 6) $\sin(1-2x)<-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1189.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\geqslant\sqrt{3}$; 3) $2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)<1$; 5) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\geqslant\frac{1}{2}$;

2) $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\sin\left(4x+\frac{\pi}{5}\right)\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1190.• Розв'яжіть нерівність:

1) $-\frac{1}{2}\leqslant\sin x<\frac{1}{4}$; 3) $-2<\operatorname{tg} x<3$;

2) $-\frac{1}{2}<\cos x\leqslant\frac{1}{4}$; 4) $-1\leqslant\operatorname{ctg} x\leqslant\sqrt{3}$.

1191.* Розв'яжіть нерівність:

1) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x \leqslant -\frac{1}{2}$;

2) $\frac{1}{3} \leqslant \sin x < \frac{1}{2}$;

3) $-4 < \operatorname{ctg} x < 1{,}5$;

4) $-\frac{\sqrt{3}}{3} < \operatorname{tg} x < 1$.

57. Приклади розв'язування більш складних тригонометричних нерівностей

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg}^2 x < 3$.

Розв'язання. Маємо: $-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.

На рисунку 225 зображено графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}$.

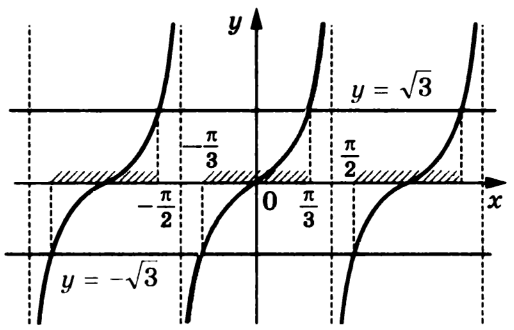


Рис. 225

Оскільки $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, то на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ графік функції $y = \operatorname{tg} x$ розміщений нижче від графіка функції $y = \sqrt{3}$ і вище за графік функції $y = -\sqrt{3}$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$.

Звідси отримуємо відповідь.

Відповідь: $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\sin^4 x + \cos^4 x < \frac{5}{8}$.

Розв'язання. Маємо: $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x < \frac{5}{8}$;

$$1-\frac{1}{2}\cdot 4\sin^2 x\cos^2 x<\frac{5}{8};\quad \frac{1}{2}\sin^2 2x>\frac{3}{8};\quad \sin^2 2x>\frac{3}{4};$$

$$\frac{1-\cos 4x}{2}>\frac{3}{4};\quad \cos 4x<-\frac{1}{2}.$$

Нехай $4x = t$. Отримуємо $\cos t<-\frac{1}{2}$.

Звідси $\frac{2\pi}{3}+2\pi n<t<\frac{4\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ (рис. 226).

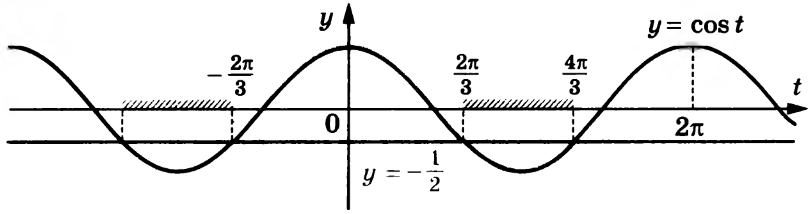


Рис. 226

Тоді $\frac{2\pi}{3}+2\pi n<4x<\frac{4\pi}{3}+2\pi n;$

$$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$

ПРИКЛАД 3 **Розв'яжіть нерівність $-5\sin x+\cos 2x<3$.**

Розв'язання. **Маємо: $-5\sin x+1-2\sin^2 x<3;$**

$$2\sin^2 x+5\sin x+2>0.$$

Зробимо заміну $\sin x = t$. Маємо:

$$2t^2+5t+2>0;\ t<-2 \text{ або } t>-\frac{1}{2}.$$

Оскільки $|t|\leqslant 1$, то $\sin x>-\frac{1}{2}$. Звідси

$$-\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{7\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{7\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

У пункті 12 ви ознайомились із методом інтервалів для розв'язування раціональних нерівностей. Цей метод можна використовувати і при розв'язуванні тригонометричних нерівностей.

Для розв'язування нерівності виду $f(x)>0$ (або $f(x)<0$), де f — періодична функція, достатньо, користуючись методом інтервалів, знайти розв'язки на проміжку, довжина якого дорівнює періоду функції f. Потім записати відповідь з урахуванням

періодичності. В аналогічний спосіб розв'язуються нестрогі нерівності $f(x) \geqslant 0$ і $f(x) \leqslant 0$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\sin 2x + \sin x > 0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sin 2x + \sin x$, $D(f) = \mathbb{R}$, яка є періодичною з періодом 2π.

Знайдемо нулі функції f на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Маємо: $\sin 2x + \sin x = 0$;

$$2 \sin x \cos x + \sin x = 0;\ 2 \sin x \left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

На проміжку $[-\pi; \pi]$ функція f має п'ять нулів: $-\pi$, $-\frac{2\pi}{3}$, 0, $\frac{2\pi}{3}$, π. Ці числа розбивають указаний проміжок на проміжки знакосталості (рис. 227).

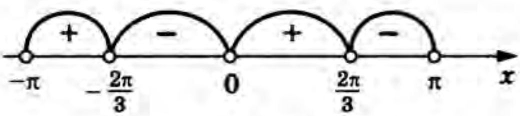


Рис. 227

Функція f набуває додатних значень на проміжках $\left(-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right)$ і $\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

З урахуванням періодичності функції f запишемо відповідь.

Відповідь: $-\pi + 2\pi n < x < -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ або $2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) \operatorname{tg} x \geqslant 0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) \operatorname{tg} x$. Вона є періодичною з періодом 2π (доведіть це самостійно).

Знайдемо нулі функції f на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Маємо: $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) \operatorname{tg} x = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2},\\ \operatorname{tg} x=0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\\ x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

На проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ функція f має чотири нулі: 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, π.

Функція f на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ не визначена в точках $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{2}$. Ці числа і нулі функції f розбивають проміжок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ на проміжки знакосталості (рис. 228).

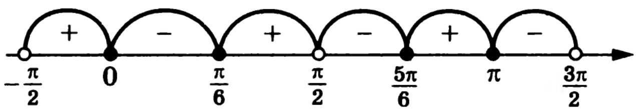


Рис. 228

З урахуванням періодичності функції f запишемо відповідь.

Відповідь: $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x\leqslant 2\pi n$, або $\frac{\pi}{6}+2\pi n\leqslant x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$, або $\frac{5\pi}{6}+2\pi n\leqslant x\leqslant \pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Вправи

1192.° Розв'яжіть нерівність:

1) $|\cos x|\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $|\cos 3x|<\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $|\operatorname{tg} x|<\sqrt{3}$;

4) $|\operatorname{tg} x|>2$.

1193.° Розв'яжіть нерівність:

1) $|\cos 2x|\geqslant\frac{1}{2}$;

2) $|\sin 2x|<\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $|\operatorname{ctg} x|<\sqrt{3}$;

4) $|\operatorname{ctg} x|>5$.

1194.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}>\frac{1}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\geqslant\sqrt{3}$;

3) $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}>\sqrt{3}$.

1195.˙ **Розв'яжіть нерівність:**

1) $\sin^6 x + \cos^6 x \geqslant \frac{5}{8}$;

2) $\sin x \geqslant \cos x$;

3) $\cos \pi x + \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

1196.˙ **Розв'яжіть нерівність:**

1) $4\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}$;

2) $3 + 2\sin 3x \sin x > 3\cos 2x$.

1197.˙ **Розв'яжіть нерівність:**

1) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos x < \sqrt{3}$;

2) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

1198.˙˙ **Розв'яжіть нерівність:**

1) $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 \leq 0$;

2) $\operatorname{tg}^2 x + (2 - \sqrt{3})\operatorname{tg} x - 2\sqrt{3} < 0$;

3) $2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) > -1$;

4) $\operatorname{tg} x \geqslant 2\operatorname{ctg} x$.

1199.˙˙ **Розв'яжіть нерівність:**

1) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3 \geqslant 0$;

2) $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x \geqslant 0$;

3) $4\sin^4 x + 12\cos^2 x - 7 < 0$;

4) $\frac{2}{\operatorname{tg} x + 1} < 2 - \operatorname{tg} x$.

1200.˙˙ **Розв'яжіть нерівність:**

1) $\sin 2x - \sin 3x > 0$;

2) $\cos 2x \operatorname{tg} x > 0$;

3) $1 - \sin 3x \leqslant \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$;

4) $1 - \sin 2x \geqslant \cos x - \sin x$;

5) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x > 0$.

1201.˙˙ **Розв'яжіть нерівність:**

1) $\sin 2x + 2\sin x > 0$;

2) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x < 0$;

3) $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x > 0$;

4) $\cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x$.

8. 2) $\{-2, 2\}$; 4) $\varnothing$. **9.** 4) $\{5\}$. **23.** 2) $\{4, 0, 7\}$. **33.** $\{7, 11, 19\}$. **36.** 3) Достатньо; 4) необхідно. **39.** 2) $\varnothing$; 4) $\{2, 3, 5, 7\}$. **40.** 2) $\{x \mid x = 12n, n \in \mathbb{N}\}$. **45.** 2) Множина всіх натуральних чисел, крім 1; 3) множина, яка складається з усіх непарних чисел і числа 2. **46.** 2) $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

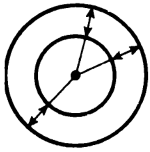


Рис. 229

50. $\{\varnothing\}$. **54.** 6 днів. **67.** Показнику степеня числа 2^n можна поставити у відповідність кількість нулів, які використано в запису десяткового дробу. **69.** Рис. 229. **70.** Рис. 230. **71.** 1) Кожній точці $M(x_0)$ відрізка OA можна поставити у відповідність точку $N(5x_0)$ відрізка OB; 2) кожній точці $M(x_0)$ відрізка OA (крім точки O) можна поставити у відповідність точку $N\left(\frac{1}{x_0}\right)$ променя AB. **82.** 2) $(-\infty; -7) \cup (-7; 7) \cup (7; +\infty)$; 4) $[4; 6) \cup (6; +\infty)$. **84.** 3) $\{-7\}$; 4) $[2; +\infty)$. **85.** 2) $(-\infty; 6]$. **86.** 4) $y = 9x^2 - 6x$; 5) $y = 9x - 2$. **87.** 3) $y = |x - 1|$. **93.** 3) $\{1\} \cup [2; +\infty)$; 4) $\{-1\} \cup [3; +\infty)$; 5) $(-2; 0) \cup (0; +\infty)$; 6) $[0; +\infty)$. **94.** 3) $(-3; -1) \cup (-1; +\infty)$; 4) $\{-4\} \cup [3; +\infty)$; 5) $\{-5\} \cup [-2; +\infty)$; 6) $(0; +\infty)$. **95.** 1) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{23}{8}\right]$; 3) $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$; 4) $(-\infty; +\infty)$; 5) $(-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$. **96.** 1) $\left[\frac{19}{20}; +\infty\right)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{23}{12}\right]$; 3) $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$; 4) $(-\infty; +\infty)$; 5) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$. **97.** Рис. 231. **98.** Рис. 232. *Вказівка.* $D(y) = \{0\} \cup [1; +\infty)$. **99.** 1) $\mathbb{Q}$; 2) $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$; 3) усі дійсні числа, крім цілих; 4) усі ірраціональні числа; 5) $\mathbb{Q}$. **102.** 5) -1; 1; 7) найменшого і найбільшого значень не існує. **103.** 6) -2; найбільшого значення не існує. **108.** 5) 1; 6) 1; 7) $[0; +\infty)$. **109.** 4) $(-\infty; 0]$; 5) 3. **110.** 4) $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$. **111.** 4) $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$. **120.** *Вказівка.* Скористайтеся теоремою 6.2. **122.** $m = 3$. **123.** $k < -6$. **124.** $b \leqslant 18$. **125.** $b \leqslant -8$. **128.** Ні.

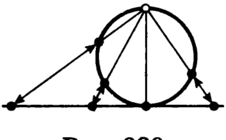


Рис. 230

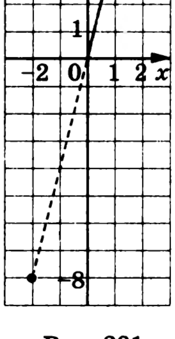


Рис. 231

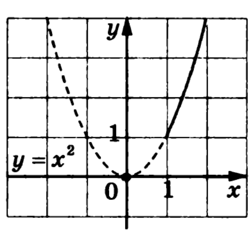


Рис. 232

131. 1) $\min\limits_{R} f(x) = 1$, найбільшого значення не існує; 2) $\min\limits_{[-4;\,4]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[-4;\,4]} f(x) = 4$. **132.** 1) Найменшого значення не існує, $\max\limits_{R} f(x) = 13$; 2) $\min\limits_{(0;\,+\infty)} f(x) = 2$, найбільшого значення не існує. **133.** $c = -133$. **134.** $c = 15$.
135. 1) 16; 2) 32. **136.** 2500 м^2. **137.** 1) −1. *Вказівка*. Доведіть, що ліва частина рівняння задає зростаючу функцію; 2) 3. **138.** 1) 1; 2) 9. **139.** 9. *Вказівка*. Доведіть, що ліва і права частини рівняння задають функції, одна з яких є зростаючою, а друга — спадною. **140.** 4. **142.** Необов'язково. **146.** 4) Парна; 5) не є ні парною, ні непарною. **158.** 0. **160.** 0. **161.** 0. **162.** Парна. **163.** Непарна. **164.** Спадна. **165.** Зростаюча. **166.** 2; 5. **167.** −3; −1. **180.** 1) *Вказівка*. $x^2 - 4x + 6 = x^2 - 4x + 4 + 2 = (x-2)^2 + 2$. **181.** 3) *Вказівка*. $y = \dfrac{-2x+2-2}{x-1} = -2 - \dfrac{2}{x-1}$. **191.** 1) 2; 2) 1; 3) 1; 4. **192.** 1) 2; 2) 4. **202.** 1) $[-7;\ 7]$; 2) $[-3;\ 7]$, $[0;\ 6]$. **203.** 1) −2; 2; $y > 0$ при $x \in (-\infty;\ -2)$, $x \in (2;\ +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (-2;\ 2)$; 2) −3; 2; $y > 0$ при $x \in (-\infty;\ -3)$, $x \in (-3;\ 2)$, $x \in (2;\ +\infty)$. **205.** *Вказівка*. 1) Скористайтеся схемою: $y = f(x) \to y = f(x-1) \to y = f(|x|-1)$; 2) скористайтеся схемою: $y = f(x) \to y = f(|x|) \to y = f(|x-1|)$. **207.** 4) Рис. 233. *Вказівка*. Скористайтеся схемою: $y = \sqrt{x} \to y = \sqrt{1+x} \to y = \sqrt{1-x} \to y = \sqrt{1-|x|}$. **209.** 3) Рис. 234. *Вказівка*. Скористайтеся схемою: $y = \sqrt{x} \to y = \sqrt{x+2} \to y = \sqrt{|x|+2} \to y = \sqrt{|x-1|+2}$. **215.** 1) Рис. 235. *Вказівка*. Скористайтеся схемою: $y = \sqrt{x} \to y = \sqrt{x-1} \to y = \sqrt{|x|-1} \to y = \sqrt{|x|-1} - 1 \to y = \left|\sqrt{|x|-1} - 1\right|$. **222.** 3) $y = \dfrac{1-x}{2x}$. **223.** 1) $y = 5(x-3)$.
224. 2) $y = \dfrac{x^2+1}{2}$, $D(y) = [0;\ +\infty)$. **225.** 4) $y = \begin{cases} \sqrt{2-x}, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ 2-x, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

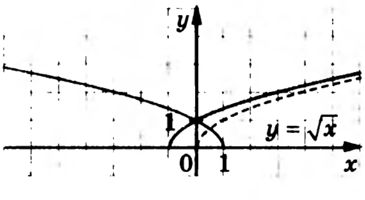


Рис. 233

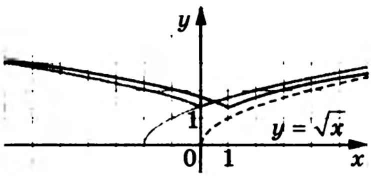


Рис. 234

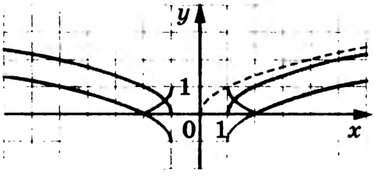


Рис. 235

232. 1) 1; 2) −7; 3) один корінь. **233.** 2) Коренів немає. **234.** *Вказівка.* Нехай функція f — непарна, функція g — до неї обернена. Маємо: $f(x_0) = y_0$, $g(y_0) = x_0$. Тоді $g(-y_0) = g(-f(x_0)) = g(f(-x_0)) = -x_0 = -g(y_0)$. **235.** $k = 1$, $b = 0$ або $k = -1$, b — будь-яке число. *Вказівка.* Обернена функція задається формулою $y = \frac{x-b}{k}$ або $y = \frac{1}{k}x - \frac{b}{k}$. Звідси $\frac{1}{k} = k$ і $b = -\frac{b}{k}$. **236.** При довільному a, відмінному від 0, і $b = 0$. *Вказівка.* Обернена функція задається формулою $y = \frac{1-bx}{ax}$. Тоді для всіх x таких, що $x \neq 0$ і $x \neq -\frac{b}{a}$, має виконуватися рівність $\frac{1}{ax+b} = \frac{1-bx}{ax}$, яку можна переписати так: $b(ax^2 + bx - 1) = 0$. Тепер зрозуміло, що підходить тільки $b = 0$. **247.** 3) Може звузитися на число −1, тобто може бути загублено корінь $x = -1$; 4) може розширитися на число −1. **250.** 4) $\left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$. **251.** 4) $(-\infty; -5) \cup \left(-\frac{3}{5}; 0\right) \cup \left(\frac{3}{4}; 2\right)$. **252.** 2) $(-\infty; -1) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$; 3) $(-\infty; -6) \cup \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; 2\right)$; 4) $(-\infty; -4) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right)$. **253.** 2) $(1; 2{,}5) \cup (3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -4) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; 3)$. **254.** 2) $\left(-\frac{5}{3}; 2\right)$; 3) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \cup (3; +\infty)$; 6) $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; 1\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$; 8) $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$. **255.** 2) $\left(-\frac{2}{3}; 3\right) \cup (3; +\infty)$. **258.** 1) $(-5; 0) \cup \left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; 8)$; 4) $(-\infty; -7) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$; 5) $\left(-1; \frac{1}{3}\right) \cup (2; 3) \cup (7; +\infty)$. **260.** 5) $(-\infty; -1) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$; 7) $(-5; 1) \cup (2; 3)$. **261.** 4) $(-\infty; 0) \cup (1; 6)$; 5) $(-\infty; -4) \cup (-3; 3) \cup (6; +\infty)$; 8) $(-\sqrt{2}; 0) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (2; +\infty)$. **262.** 1) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -4] \cup [5; +\infty) \cup \{-3\}$; 5) $(-\infty; -3] \cup [0; 2)$. **263.** 1) $(-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$; 2) $[1; 2] \cup \{-2\}$; 4) $(-\infty; -6] \cup [-4; 6]$. **264.** 2) $(-\infty; -2] \cup \{1\} \cup (6; +\infty)$; 3) $(-3; -1] \cup \{0\}$. **265.** 1) $(-\infty; -5] \cup [-4; 0] \cup \{2\}$; 2) $(-3; -2) \cup (-2; -1] \cup (2; 3] \cup \{7\}$. **266.** $[-1; 0) \cup (0; 5] \cup \{-2\}$. **267.** $[-3; 0) \cup (0; 4] \cup \{5\}$. **268.** 1) $(-4; -3) \cup (5; +\infty)$; 2) $[-4; -3] \cup [5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -4)$; 4) $(-\infty; -4] \cup \{-3; 5\}$; 5) $\varnothing$; 6) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; 7) $\{-2; 2\}$; 8) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; 9) $(1; 2)$; 10) $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$; 11) $[1; 2] \cup \{5\}$; 12) $(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [5; +\infty)$. **269.** 1) $(3; 7)$; 2) $[3; 7] \cup \{-2\}$; 3) $(-2; 3)$; 4) $[-2; 3] \cup \{7\}$; 5) $(-4; 4)$; 6) $\varnothing$; 7) $[-4; 4]$; 8) $\{-4; 4\}$; 9) $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$; 10) $(-1; 2) \cup (3; 5)$; 11) $[-1; 2] \cup [3; 5]$; 12) $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty) \cup \{2; 3\}$. **270.** 2) Якщо $a = 0$, то x — будь-яке число, крім 3; якщо $a = 3$, то коренів немає; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 3$, то $x = a$; 4) якщо $a = 0$, то x — будь-яке число, крім 0; якщо $a = 4$, то розв'язків немає; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 4$, то $x = 4$. **271.** 3) Якщо $b = -\frac{1}{2}$, то коренів немає; якщо $b \neq -\frac{1}{2}$, то $x = 3b$. **272.** 1) Якщо $a = 1$, то $x = -1$; якщо $a = -1$, то $x = 1$; якщо $a \neq 1$ і $a \neq -1$, то $x = 1$ або $x = -1$; 2) якщо $a \neq -2$, то $x = a$ або $x = 0$; якщо $a = -2$, то $x = 0$; 3) якщо $a \neq 7$, то $x = a$ або $x = 6$; якщо $a = 7$, то $x = 6$;

4) якщо $a \neq 4$ і $a \neq -2$, то $x = 4$ або $x = -2$; якщо $a = 4$, то $x = -2$; якщо $a = -2$, то $x = 4$; 6) якщо $a = 0$, то $x = 2$; якщо $a = 1$, то $x = 1$; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 1$, то $x = a$ або $x = 2$. **273.** 2) Якщо $b = -4$ або $b = 1$, то коренів немає; якщо $b \neq -4$ і $b \neq 1$, то $x = -b$; 4) якщо $b = 0$, то $x = 3$; якщо $b = 3$, то $x = -6$; якщо $b \neq 0$ і $b \neq 3$, то $x = 3$ або $x = -2b$. **274.** 1) Якщо $a > 0$, то $x > 0$; якщо $a < 0$, то $x < 0$; якщо $a = 0$, то розв'язків немає; 2) якщо $a > 0$, то $x < \frac{1}{a}$; якщо $a < 0$, то $x > \frac{1}{a}$; якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; 3) якщо $a > 0$, то $x \geqslant 1$; якщо $a < 0$, то $x \leqslant 1$; якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; 4) якщо $a > 2$, то $x > a + 2$; якщо $a < 2$, то $x < a + 2$; якщо $a = 2$, то розв'язків немає; 5) якщо $a > -3$, то $x \leqslant a - 3$; якщо $a < -3$, то $x \geqslant a - 3$; якщо $a = -3$, то x — будь-яке число; 6) якщо $a < 2$, то $x < -2$; якщо $a > 2$, то $x > -2$; якщо $a = 2$, то розв'язків немає. **275.** 1) Якщо $a \neq 0$, то $x \leqslant 0$; якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; 2) якщо $a > -4$, то $x > \frac{1}{a+4}$; якщо $a < -4$, то $x < \frac{1}{a+4}$; якщо $a = -4$, то розв'язків немає; 3) якщо $a > -1$, то $x < \frac{2-a}{a+1}$; якщо $a < -1$, то $x > \frac{2-a}{a+1}$; якщо $a = -1$, то x — будь-яке число. **276.** $10 < a \leqslant 11$. **277.** $1 < b \leqslant 2$. **278.** $a = 1$. **279.** $a = 6$. **280.** 1) Якщо $a = 2$, то коренем є будь-яке число, крім $x = 2$; якщо $a \neq 2$, то $x = a + 1$; 2) якщо $a = 2$ або $a = 3$, то коренів немає; якщо $a \neq 2$ і $a \neq 3$, то $x = \frac{1}{3-a}$; 3) якщо $a = 3$ або $a = 7$, то коренів немає; якщо $a \neq 3$ і $a \neq 7$, то $x = \frac{a-5}{2}$; 4) якщо $a = \frac{1}{3}$ або $a = 0$, то коренів немає; якщо $a \neq \frac{1}{3}$ і $a \neq 0$, то $x = 3a$; 5) якщо $a = 0$ або $a = 1$, то коренів немає; якщо $a = -3$, то коренем є будь-яке число, крім чисел -2 і -3; якщо $a \neq 0$, $a \neq 1$ і $a \neq -3$, то $x = a - 3$; 6) якщо $a \neq 1$ і $a \neq 0$, то $x = 2a$ або $x = a + 2$; якщо $a = 1$, то $x = 3$; якщо $a = 0$, то коренів немає; 7) якщо $a \neq 1$, то $x = a - 2$; якщо $a = 1$, то коренів немає. **281.** 2) Якщо $b = \frac{1}{2}$ або $b = -\frac{5}{2}$, то коренів немає; якщо $b \neq \frac{1}{2}$ і $b \neq -\frac{5}{2}$, то $x = \frac{4(b+1)}{3}$; 3) якщо $b = 0$, або $b = -3$, або $b = -1$, то коренів немає; якщо $b \neq 0$, $b \neq -3$ і $b \neq -1$, то $x = \frac{b^2-b}{b+1}$; 4) якщо $a \neq 0$, то $x = 3a$ або $x = -2a$; якщо $a = 0$, то коренів немає. **282.** 3) $a = 0$, або $a = 3$, або $a = -1$; 4) $a = 1$, або $a = 0$, або $a = 2$; 5) $a = -3$ або $a = -\frac{1}{3}$; 6) $a = 2\sqrt{5}$, або $a = -2\sqrt{5}$, або $a = 6$; 7) $a = 1$ або $a = -1$; 8) $a = 2$ або $a \leqslant 1$. **283.** 1) $b = -8$ або $b = 3$; 2) $b = 0$, або $b = -1$, або $b = \frac{1}{2}$; 3) $b = -\frac{1}{2}$ або $b = -2$; 4) $b = 2$, або $b = -2$, або $b = -\frac{10}{3}$; 5) $b = 3$, або $b = 4$, або $b = \frac{7}{2}$; 6) $b \leqslant 0$ або $b = 2$. **284.** 2) $a = 0$ або $a = 2$; 4) $a = -1$; 5) $a = 0$ або $a = 1$. **285.** 1) $\{b \mid b \neq -4\}$; 2) $b = -1$ або $b = -3$; 3) $b = 0$; 4) таких значень b не існує. **286.** 1) $a \leqslant \frac{6}{5}$; 2) $a \leqslant 0$; 3) $a \geqslant 0$.

287. 1) $a=\frac{6}{5}$; 2) $a=3$; 3) $a=0$. **288.** 1) $a>4$; 2) $-1\leqslant a\leqslant\frac{3}{5}$; 3) $a>6$. **289.** 1) $a\geqslant 9$; 2) $3\leqslant a\leqslant 7$; 3) $a\geqslant 1$. **290.** 1) Якщо $a\leqslant-\frac{3}{5}$ або $a\geqslant 1$, то $x\in\left(-\frac{3}{5};1\right)$; якщо $-\frac{3}{5}<a<1$, то $x\in\left(-\frac{3}{5};a\right)\cup(a;1)$; 2) якщо $a<-\frac{3}{5}$ або $a>1$, то $x\in\left[-\frac{3}{5};1\right]\cup\{a\}$; якщо $-\frac{3}{5}\leqslant a\leqslant 1$, то $x\in\left[-\frac{3}{5};1\right]$. **291.** 1) Якщо $a\leqslant-\frac{3}{7}$ або $a\geqslant 1$, то $x\in\left(-\frac{3}{7};1\right)$; якщо $-\frac{3}{7}<a<1$, то $x\in\left(-\frac{3}{7};a\right)\cup(a;1)$; 2) якщо $a<-\frac{3}{7}$ або $a>1$, то $x\in\left[-\frac{3}{7};1\right]\cup\{a\}$; якщо $-\frac{3}{7}\leqslant a\leqslant 1$, то $x\in\left[-\frac{3}{7};1\right]$. **298.** 3) $-\frac{2}{3}$; -1. **299.** 2) -2; $\frac{8}{3}$. **301.** 2) $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$; 3) $\left[-1;-\frac{1}{3}\right]$. **302.** 1) $[-3;9]$; 4) $\left(-\infty;-\frac{8}{5}\right)\cup\left(\frac{4}{5};+\infty\right)$. **304.** 1) -4; 0; 4; 2) розв'язків немає. **305.** 1) -4; -2; 2; 4; 2) 0. **306.** 1) -3; $-\frac{1}{5}$; 2) 2; $\frac{1}{3}$. **307.** 1) 1; 2) розв'язків немає; 3) $-\frac{2}{5}$; 4) -2; $-2\sqrt{2}$; 5) $\frac{-3\pm\sqrt{33}}{4}$. **308.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) 0; 1; 3) 1; $-\sqrt{3}$; 4) -3; 3. **309.** 1) $(2;+\infty)$; 2) $[0;2]$; 3) $(-\infty;+\infty)$; 4) $(-\infty;3]\cup[5;+\infty)$; 5) $\left(-\infty;-5-\sqrt{17}\right]\cup\left[-5+\sqrt{17};+\infty\right)$; 6) $(-\infty;-3)\cup\left(1-\sqrt{6};+\infty\right)$. **310.** 1) $(3;+\infty)$; 2) $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$; 3) $\left(-\infty;\frac{1}{5}\right]\cup[3;+\infty)$; 4) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$; 5) $(1;4)$; 6) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **311.** 1) $\left[\frac{3}{4};1\right)\cup(1;+\infty)$; 2) $(-\infty;-4]\cup[-1;1]\cup[4;+\infty)$; 3) $\left[0;\frac{8}{5}\right]\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$. **312.** 1) $[4;5)\cup(5;+\infty)$; 2) $(-\infty;-3]$; 3) $(0;+\infty)$. **313.** 1) $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$; 2) $(-\infty;3)$. **314.** 1) $(-5;-2)\cup(-1;+\infty)$; 2) $(-5;-2)\cup(2;3)\cup(3;5)$; 3) $[-1;0)$. **315.** 1) $\frac{3}{2}$; $\frac{9}{2}$; 2) $\frac{11}{5}$; 7; 3) 1; 4) розв'язків немає; 5) $[0;6]$; 6) $[3;+\infty)$; 7) $(2;+\infty)$. **316.** 1) -8; 12; 2) $\frac{2}{3}$; 3) -1; 4) $[-5;8]$; 5) $[2;+\infty)$; 6) $\left(-\infty;\frac{11}{7}\right]$; 7) $[3;6)$. **317.** *Вказівка*. Скористайтеся геометричною інтерпретацією. **318.** 1) 4; 2) 5. **319.** 1) $(-\infty;-1)$; 2) $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$; 3) $[-1;1]$. **320.** 1) $(-\infty;-6)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$; 2) $\varnothing$; 3) $[-3;1]$. **321.** 1) $(4;-2)$; 2) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **322.** 1) $(3;-2)$; 2) $\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

331. 11) Рис. 236. *Вказівка*. $x=\sqrt{y}\rightarrow x-1=\sqrt{y}\rightarrow x-1=\sqrt{|y|}\rightarrow x-1=\sqrt{|y+1|}\rightarrow |x|-1=\sqrt{|y+1|}$; 12) Рис. 237. *Вказівка*. $x=\sqrt{y}\rightarrow x-1=\sqrt{y+1}\rightarrow |x|-1=\sqrt{y+1}\rightarrow |x|-1=\sqrt{|y|+1}$. **335.** 4) *Вказівка*. Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}(|x|-1)^2+y^2=1,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$ **336.** 4) *Вказівка*. Дане

рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^2+(|y|-2)^2=4, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$ **342.** $2x + 3y \geqslant -1$.
343. $3x - y > 2$. **352.** 6) Рис. 238; 8) рис. 239. **363.** 2) Графіком нерівності є множина точок, позначених на рисунку 240 жовтим і червоним кольорами. **377.** 1) $a = 6$. **378.** $b = -5$. **379.** 1) $a = -2$, $b = 1$; 2) $a = -25$, $b = 4$. **380.** $a = -9$, $b = -9$. **382.** $a = -3$, $b = -6$, $c = 8$. **383.** $a = 1$, $b = 1$ або $a = 3$, $b = -1$. **384.** $x + 3$. **386.** 1) -1; -3; -5; 2) -1; 2; $-\frac{1}{2}$; 4) 1; -2; 5) 2; -1; $\frac{1-\sqrt{33}}{4}$; $\frac{1+\sqrt{33}}{4}$. **387.** 1) 1; $-\sqrt{3}-1$; $\sqrt{3}-1$; 4) 1; -1; $-\sqrt{5}-2$; $\sqrt{5}-2$; 5) 1; 2; $\frac{-\sqrt{17}-5}{2}$; $\frac{\sqrt{17}-5}{2}$. **396.** $\frac{n}{2n+1}$. **397.** $\frac{n}{n+1}$. **400.** $n \geqslant 2$.
402. 1) *Вказівка.* $3^{2k+3} + 2^{k+3} = (3^{2k+1} + 2^{k+2}) \cdot 2 + 7 \cdot 3^{2k+1}$; 2) *Вказівка.* Досить показати, що різниця $(6^{2k+2} + 19^{k+1} - 2^{k+2}) - 19\,(6^{2k} + 19^{k} - 2^{k+1})$ кратна 17. **403.** 1) *Вказівка.* $7^{k+2} + 8^{2k+1} = 7\,(7^{k+1} + 8^{2k-1}) + 57 \cdot 8^{2k-1}$. **404.** 1) $a = -\frac{3}{4}$; 2) $a = -\frac{1}{27}$. **405.** 1) $a = -\frac{2}{3}$; 2) $a = -8$.
414. 1) (0; 0), $(\sqrt{2}; 8)$, $(-\sqrt{2}; 8)$; 2) (0; 0), (−3; 81). **415.** (0; 0), (1; 1), (−1; −1). **416.** 4) 1. **417.** 2) 1. **421.** 1) Якщо $a = 6$, то один корінь; якщо $a > 6$, то 2 корені; якщо $a < 6$, то коренів немає; 2) якщо $a = 1$ або $a = -8$, то один корінь; якщо $a < -8$ або $a > 1$, то 2 корені; якщо $-8 < a < 1$, то коренів немає. **422.** Якщо $a = 0$, або $a = 3$, або $a = -3$, то один корінь; якщо $a < -3$ або $0 < a < 3$, то 2 корені; якщо $-3 < a < 0$ або $a > 3$, то коренів немає. **429.** 4) $\min\limits_{(-\infty;\,-2]} f(x) = 256$, найбільшого значення не існує; 5) $\min\limits_{(-2;\,1)} f(x) = 0$, найбільшого значення не існує.

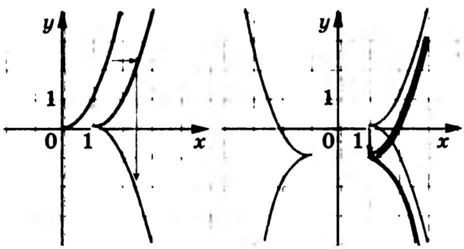


Рис. 236

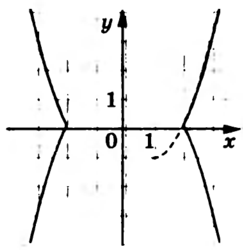


Рис. 237

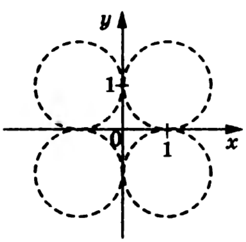


Рис. 238

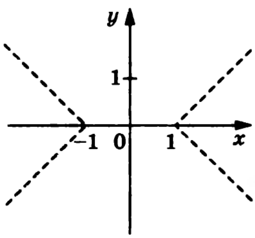


Рис. 239

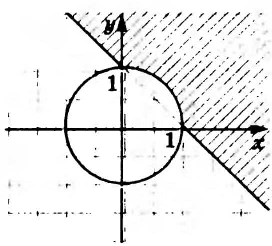


Рис. 240

431. 1) Парним; 2) непарним; 3) непарним; 4) установити неможливо; 5) парним; 6) установити неможливо. **432.** 1) 1; 2) −1; 1. *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(x) = 2x^4 + x^{10}$. Вона є парною. Тому досить знайти невід'ємні корені цього рівняння. На $[0; +\infty)$ функція f є зростаючою, отже, рівняння $f(x) = 3$ на цьому проміжку має не більше одного кореня. **433.** 1) −1; 2) −1; 1. **436.** 1) $a = -2500$; 2) $a = \frac{1}{3}$. **437.** 1) $a = -243$; 2) $a = 8$. **444.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. **447.** 1) (1; 1), (−1; −1); 2) $\left(2; \frac{1}{4}\right)$. **448.** (1; 1). **451.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} f(x) = 64$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} f(x) = 1$; 2) $\max\limits_{\left[-1; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = 64$, $\min\limits_{\left[-1; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = 1$; 3) $\max\limits_{[1; +\infty)} f(x) = 1$, найменшого значення не існує; 4) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{[-1; 0)} f(x) = 1$. **452.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{3}; 2\right]} f(x) = 27$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{3}; 2\right]} f(x) = \frac{1}{8}$; 2) $\max\limits_{[-2; -1]} f(x) = -\frac{1}{8}$, $\min\limits_{[-2; -1]} f(x) = -1$; 3) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{(-\infty; -3]} f(x) = -\frac{1}{27}$; 4) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{(0; 2]} f(x) = \frac{1}{8}$. **453.** 1) 4 розв'язки; 2) 2 розв'язки. **454.** 1) 3 розв'язки; 2) 2 розв'язки. **457.** 1) Непарним; 2) установити неможливо; 3) парним; 4) установити неможливо. **461.** 9) 3; 10) 2. **462.** 5) 3; 6) 7. **465.** 1) 29; 2) 56; 3) $-\frac{3}{8}$. **466.** 1) −11,8; 2) $58\frac{1}{3}$. **467.** 3) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$; 5) $\{0\}$. **474.** 1) −1; 1; −3; 3; 2) −2; $\sqrt[3]{7}$; 3) $-\sqrt[6]{3}$; $\sqrt[6]{3}$. **475.** 1) $-\sqrt[3]{2}$; 3; 2) $-\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[4]{3}$. **476.** 1) $(-\infty; -3) \cup [-1; 1] \cup (3; +\infty)$; 2) $[-6; 3)$. **477.** 1) $(-\infty; -6) \cup [-4; 4] \cup (6; +\infty)$; 2) $(-4; -3] \cup [3; +\infty)$. **478.** 1) −1; 2; 2) −1; 3. **479.** 1) −3; 2; 2) −3; 1. **482.** 1) Якщо $a \leqslant -1$, то один корінь; якщо $a > -1$, то 2 корені; 2) якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a \geqslant 0$, то один корінь; 3) якщо $a < 0$ або $a = 1$, то один корінь; якщо $0 \leqslant a < 1$ або $a > 1$, то 2 корені. **483.** 1) Якщо $a \geqslant -1$, то один корінь; якщо $a < -1$, то 2 корені; 2) якщо $a < 0$ або $a = 1$, то один корінь; якщо $a \geqslant 0$ і $a \neq 1$, то 2 корені. **497.** 1) $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$; 2) $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$; 3) $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$; 4) a і b — довільні числа; 5) a і b — довільні числа. **498.** 2) [3; 7]; 3) $\mathbb{R}$. **499.** 4) $|a^3|$; 5) m^2. **501.** 2) $-n$; 5) c^4; 8) $-0{,}1a^3b^5$. **502.** 3) $10x$; 7) $-a^{13}b^{11}c^{11}$. **505.** 1) $x \geqslant -4$; 2) $\mathbb{R}$; 3) $-1 \leqslant x \leqslant 3$. **506.** 2) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$. **510.** 1) Коренів немає; 2) 3; 3) −1; 3. **511.** 1) −4; 2) 2. **512.** [3; 5]. **519.** 1) 0; 2) $3\sqrt[3]{7m}$. **520.** 1) $27\sqrt[3]{2}$; 2) $29\sqrt[4]{a}$. **521.** 4) $\sqrt[30]{b^7}$; 5) $\sqrt[8]{x^2}$; 6) $\sqrt[12]{128}$. **522.** 5) $\sqrt[6]{x^5}$; 6) $\sqrt[3]{a}$. **525.** 5) $\sqrt[12]{24}$; 6) $\sqrt[5]{a^3}$; 7) $\sqrt[7]{3}$; 8) $\sqrt[3]{a^4b^2}$; 9) $\sqrt[18]{\frac{a}{b}}$. **526.** 5) $\sqrt[6]{\frac{2}{3}}$; 6) $\sqrt[6]{a^4b^3}$. **527.** 1) 3; 2) 1; 3) 14; 4) −1; 5) 1. **528.** 1) 25; 2) 7; 3) −1. **535.** 1) $ab \geqslant 0$; 2) $b = 0$, a — будь-яке число або $b > 0$, $a \geqslant 0$; 3) $b = 0$, a — будь-яке число або $b > 0$, $a \leqslant 0$. **536.** 1) $m^2\sqrt[4]{-m}$; 2) $a^2b^8\sqrt[4]{b}$; 3) $|x| \cdot y\sqrt[6]{y}$; 4) $2m^4n^4\sqrt[4]{2m^2n}$; 5) $-3ab^2c^3\sqrt[4]{2}$; 6) $a^3b^3\sqrt[4]{a^3b^3}$; 7) $-a^3b^6\sqrt[8]{-ab^2}$.

537. 1) $-2a\sqrt[4]{2a^2}$; 2) $-5a\sqrt[4]{-a}$; 3) $ab\sqrt[6]{ab}$; 4) $a^3b^3\sqrt[6]{a^2b}$. **538.** 1) $\sqrt[4]{2a^4}$; 2) $-\sqrt[6]{6a^3b^4}$; 3) $\sqrt[4]{mn}$; 4) $\sqrt[6]{6b^6}$, якщо $b \geqslant 0$, $-\sqrt[6]{6b^6}$, якщо $b < 0$; 5) $-\sqrt[6]{-a^7}$; 6) $-\sqrt[4]{a^5b^6}$. **539.** 1) $-\sqrt[8]{3c^8}$; 2) $\sqrt[6]{a^7}$; 3) $\sqrt[4]{6a^4b^4}$; 4) $-\sqrt[8]{3a^4b^3}$; 5) $-\sqrt[4]{-a^7}$. **540.** 1) 1; 2) 4; 3) 1; 4) 2; 5) $-\sqrt[3]{3}$. **541.** 1) 1; 2) $\sqrt{23}$. **542.** 1) $\dfrac{\sqrt[4]{a}-1}{a}$; 2) $\sqrt[6]{x}$; 3) $-\sqrt[4]{a}$; 4) $\sqrt[6]{a}$; 5) $\sqrt[6]{b}-\sqrt[6]{c}$; 6) $\sqrt[4]{ab}$; 7) $\sqrt[6]{a^2-1}$. **548.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $[-1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$; 5) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; 6) $[3; +\infty) \cup \{0\}$. **549.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $[2; +\infty)$; 3) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$; 5) $[-3; 3]$; 6) $[6; +\infty) \cup \{0\}$. **550.** 1) $[1; +\infty)$; 2) $[-2; +\infty)$; 3) $\mathbb{R}$; 4) $[0; +\infty)$; 5) $[0; +\infty)$. **551.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $[-4; +\infty)$; 3) $\mathbb{R}$; 4) $[0; +\infty)$; 5) $[0; +\infty)$. **552.** 1) $[-3; 2]$; 2) $\left[\frac{1}{2}; 10\right]$; 3) $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$. **555.** 4) $\sqrt[3]{5} < \sqrt[6]{28}$; 8) $6\sqrt[3]{\frac{1}{9}} = 4\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$. **557.** 4) 4 і 5; 6) -5 і -4. **561.** 2) $\sqrt[9]{12} > \sqrt[6]{5}$; 5) $\sqrt{3} < \sqrt[3]{\sqrt{28}}$. **562.** 3) $\sqrt[10]{7} < \sqrt[5]{2\sqrt{2}}$. **567.** 1) $\max\limits_{[1;2]} f(x) = \sqrt[4]{2}$, $\min\limits_{[1;2]} f(x) = 1$; 2) $\max\limits_{[-3;-1]} f(x) = \sqrt[4]{3}$, $\min\limits_{[-3;-1]} f(x) = 1$; 3) $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = 1$, $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = 0$; 4) $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = \sqrt[4]{2}$, $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = 0$; 5) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{[-3;+\infty)} f(x) = 0$; 6) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{(-\infty;-1]} f(x) = 1$. **568.** 3) $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = \sqrt[3]{2}$, $\min\limits_{[-2;2]} f(x) = 0$; 5) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{[-1;+\infty)} f(x) = 0$; 6) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{(-\infty;2)} f(x) = 0$. **569.** 1) $(65; +\infty)$; 2) $(-\infty; 21)$; 3) $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$; 4) $(4; +\infty)$; 5) $[3; +\infty) \cup \{-2\}$. **570.** 1) $(-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 10)$; 3) $\left[-\frac{1}{5}; 16\right]$; 4) $[-5; -2) \cup (2; 5]$. **571.** 1) Один корінь при будь-якому значенні a; 2) якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a \geqslant 0$, то один корінь. **572.** Якщо $a > 1$ або $a = 0$, то один корінь; якщо $0 < a \leqslant 1$, то 2 корені; якщо $a < 0$, то коренів немає. **573.** 27. *Вказівка*. Функція $y = \sqrt[4]{x-26} + \sqrt[3]{x}$ є зростаючою. **574.** 10. **579.** 3) $\frac{3}{4}$; 5) $\frac{5}{3}$; 8) $\frac{1}{2}$. **580.** 3) $\frac{10}{3}$; 5) 4; 6) $7\frac{19}{32}$. **581.** 3) $[3; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$. **583.** 3) $a^{\frac{1}{6}}$; 7) $a^{\frac{4}{15}}$; 11) $a^{\frac{1}{2}}$; 15) $a^{\frac{7}{4}}b^{-\frac{1}{4}}$. **584.** 4) $b^{\frac{5}{4}}$; 8) b; 12) $a^{\frac{3}{5}}b^{-\frac{1}{8}}$; 16) $b^{-6,8}$. **585.** 3) 125; 6) 10; 9) 4. **586.** 2) 49; 5) 32; 8) 1. **587.** 4) $\left(\sqrt[8]{a}\right)^8$. **588.** 7) $(m^{-0,6})^2$; 8) $\left(\sqrt[7]{m}\right)^2$. **590.** 1) $a \geqslant 2$; 2) $a > 2$. **592.** 1) 6; 2) 100; 3) 19,5; 4) $12\frac{4}{9}$; 5) 2; 6) 10; 7) $\frac{2}{15}$; 8) 3; 9) 571; 10) $\frac{25}{21}$; 11) 12. **593.** 1) 7; 2) 10; 3) $122\frac{7}{9}$; 4) 1; 5) $\frac{1}{4}$; 6) 21; 7) $\frac{225}{256}$; 8) $\frac{8}{729}$. **594.** 1) 125; 2) 6; 3) $\varnothing$. **595.** 1) $\frac{1}{9}$; 3) 5. **604.** 4) $a^{0,5} - 2b^{0,5}$; 8) $a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$; 12) $3^{\frac{1}{5}}$. **605.** 3) $1 + \dfrac{b}{a^{\frac{1}{2}}}$; 6) $x^{2,5}y^{2,5}\dfrac{(x^{0,5} - y^{0,5})}{(x^{0,5} + y^{0,5})}$;

9) $2^{\frac{1}{2}}$. 606. 1) $\frac{1}{4}$; 2) 441. 607. 1) $\frac{a^{0,5}b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}$; 2) $\frac{2(a+b)}{a-b}$; 3) 2; 4) $\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{13}{12}}}$; 5) a^2+ab+b^2. 608. 1) $2m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$; 2) 3; 3) $-\frac{a}{b}$; 4) $m^{-\frac{1}{2}}$. 610. 1) $\frac{1}{x-y}$; 2) $\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}$. 611. 1) $\left|z^{\frac{1}{p}}-z^{\frac{1}{q}}\right|$; 2) $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$; 3) -1. 612. 1) $\frac{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}}$; 2) 0; 3) $3-2\sqrt{x}$, якщо $x \in [0; 9)$; -3, якщо $x \in (9; +\infty)$. 614. 5) -1; 1; 6) 1; 7. 615. 3) -1; 1. 616. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) коренів немає; 4) 3. 617. 2) Коренів немає; 3) -5; 7; 4) 7. 618. 1) 1; 2) 3; 3) 1; 2; 4) 5; 5) 4; 6) 2; 7) 3; 8) -4. 619. 1) -5; 2) 4; 3) 0; 4) -1; 5) 5. 620. 1) 4; 2) 2; 3; 3) -7; 8; 4) -1; 1; 4. 621. 1) $\frac{1}{3}$; 2) 7; -4. 622. 1) 0; 5; 2) 7. 623. 1) 6; 2) 2; 3) -1; 3; 4) -2. 624. 1) 2; 2) 8. 625. 1) 6; 9; 2) $\frac{137}{16}$; 3) коренів немає; 4) 1; -3. 626. 1) -5; 4; 2) 3; 7; 3) -1. 627. 1) 4; 2) 2; 3) коренів немає. 628. 1) -1; 2) 6. 629. 1) 27; 2) $5 \leqslant x \leqslant 10$; 3) коренів немає. 630. 1) 10; 2) $x \geqslant -4$. 631. 3) $\frac{-3+\sqrt{65}}{2}$; 4) 0; $\frac{1}{2}$; 5) 8; 6) 25; 7) -5; $6\frac{3}{7}$. 632. 3) 5; 4) -1. 633. 3) 1; 4) 1; 5) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; 6) $\frac{6-\sqrt{6}}{3}$. 634. 1) 2; 6; 2) -1; 3) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$. 635. 3) $\frac{14+\sqrt{7}}{2}$; 4) 10; 5) 4; -4; 6) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; 7) 5. 636. 1) 20; 2) $22-\sqrt{464}$; 3) 0; 5. 637. 2) 7; 8. 638. 2) 1. 639. 1) 2; $\frac{-2-4\sqrt{13}}{3}$; 2) -2; 1; 13. 640. 1) 0; 2; 2) -2; $\frac{-2+2\sqrt{91}}{3}$. 641. 1) 1; $-\frac{27}{8}$; 2) 16; 3) 25; 4) 1; 5) 8; 6) 0; 1; 7) 1; 29; 8) 0; 16; 9) $\frac{9}{8}$; 10) 8. 642. 1) 16; 2) 1; 512; 3) 4; 4) -4; 11; 5) -8; 1; 6) -61; 7) 0; 1; 8) 2,8; $-1,1$ 643. 1) 1; 4; 2) $-\sqrt{11}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{11}$; 3) -1; 4; 4) -2; 5; 5) -4; 1; $\frac{-3+\sqrt{22}}{2}$; $\frac{-3-\sqrt{22}}{2}$; 6) 1024. 644. 1) -1; 5; 2) 1; 2; 3) 1; 2; 4) -6; 4. 645. 1) (9; 4), (4; 9); 2) (64; 1); 3) (8; 1), (1; 8); 4) (41; 40); 5) (6; 3), (3; 1,5); 6) (-2; 3), (12; 24). 646. 1) (27; 1), (-1; -27); 2) (4; 1), (1; 4). 647. 1. *Вказівка*. Скористайтеся заміною $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=t$ або властивостями зростаючих і спадних функцій. 648. 3. *Вказівка*. Заміна $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}=y$. 649. 3. 650. $1+\sqrt{6}$. *Вказівка*. Заміна $\frac{x}{\sqrt{2x+5}}=t$. 651. 3; $\frac{81-9\sqrt{97}}{8}$. *Вказівка*. Поділіть обидві частини рівняння на x^2. 652. 1; $\frac{1+\sqrt{109}}{18}$. 653. -2; 5. *Вказівка*. Нехай $\sqrt[3]{x+3}=a$, $\sqrt[3]{6-x}=b$. Тоді $a^3+b^3=9$. 654. -3; 4.

656. 1) $[3; 5]$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1] \cup [0; 1)$; 4) $(4; +\infty)$; 5) $[-8; -4]$; 6) $(-\infty; -1) \cup [2; +\infty)$. **657.** 1) $\left[\frac{2}{3}; 4\right)$; 2) $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$; 3) $\varnothing$. **658.** 1) $\left(3; \frac{24}{5}\right]$; 2) $[1; +\infty)$; 3) $[0; 3]$; 4) $[-1; 0) \cup (0,6; 1]$; 5) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 6) $[1; 6]$. **659.** 1) $\left[2\frac{2}{9}; 4\right) \cup (5; +\infty)$; 2) $(3; +\infty)$; 3) $[-2; -1,6] \cup [0; 2]$; 4) $\varnothing$. **660.** 1) $(-\infty; 1)$; 2) $[-7; 2]$; 3) $(-\infty; -1]$; 4) $\left[\frac{8}{3}; +\infty\right)$; 5) $(-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$; 6) $(3; 5]$. **661.** 1) $[-2; 2)$; 2) $[-7; 1)$; 3) $(-\infty; -3]$; 4) $(-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$. **662.** 1) 4; 2) $[-2; 4] \cup [5; +\infty)$; 3) -2; 2. **663.** 1) $[3; 12]$; 2) $\{-2, 1\} \cup [3; +\infty)$; 3) $[-4; -3] \cup [3; 4]$. **664.** 1) $\left[\frac{1}{2}; 2\right) \cup (5; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$; 3) $[-4; 1] \cup \{2\}$. **665.** 1) $(-1; +\infty)$; 2) $[-20; 0) \cup (5; +\infty)$; 3) $\{-4\} \cup [2; 3]$. **666.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $\left[-1; -\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{15}}{4}; 1\right]$; 3) $\left(\frac{2\sqrt{21}}{3}; +\infty\right)$. **667.** 1) $[6; +\infty)$; 2) $\left(\frac{16}{5}; 4\right)$.

671. 3) 10π. **672.** 2) $\frac{9\pi}{2}$. **677.** 5) У II чверті; 10) у I чверті; 15) у II чверті. **678.** 4) У III чверті; 8) у II чверті; 15) у IV чверті. **679.** 3) $(0; -1)$; 5) $(0; 1)$; 8) $(1; 0)$. **680.** 2) $(-1; 0)$; 6) $(-1; 0)$. **681.** $\frac{\pi}{5}$; $\frac{3\pi}{10}$; $\frac{\pi}{2}$. **682.** $\frac{2\pi}{15}$; $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{8\pi}{15}$; $\frac{14\pi}{15}$. **683.** 15 сторін. **685.** 3) $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; 4) 2π; -2π. **686.** *б*) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **687.** *б*) $\frac{7\pi}{15} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **690.** 1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 2) $(0; -1)$; 3) $(0; 1)$, $(0; -1)$; 4) $(1; 0)$, $(-1; 0)$; 5) $(1; 0)$; 6) $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$. **692.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **693.** 1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

695. 1) 5; 3) $\sqrt{2}$; 5) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; 7) -3; 9) $\frac{7}{4}$. **696.** 2) 1; 4) 0; 6) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; 8) 9. **699.** 2) Так; 4) ні; 6) ні; 8) так. **700.** 1) Ні; 3) так. **701.** 3) $\sqrt{2}$. **702.** 2) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$. **703.** 1) 3; -3; 3) 3; 1; 5) 1; 0. **704.** 2) -1; -3; 4) 10; 4. **708.** 1) $-4 \leqslant a \leqslant -2$; 2) $a = 0$; 3) $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$; 4) $-1 \leqslant a \leqslant 0$ або $1 \leqslant a \leqslant 2$; 5) $1 \leqslant a \leqslant 2$ або $3 \leqslant a \leqslant 4$; 6) $a \neq 2$. **709.** 1) $1 \leqslant a \leqslant 3$; 2) таких значень a не існує; 3) $-2 \leqslant a \leqslant -\sqrt{2}$ або $\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 2$; 4) $a = 1$. **712.** 1) Найбільшого значення не існує; $\frac{1}{2}$ — найменше; 2) найбільше значення 1; найменшого не існує; 3) найбільшого і найменшого значень не існує; 4) найбільшого і найменшого значень не існує. **713.** 1) $-\frac{1}{3}$; -1; 2) найбільшого і найменшого значень не існує; 3) 1; -1. **714.** 1) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; 2) $[0,5; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; -\frac{2}{7}\right] \cup [2; +\infty)$. **715.** 1) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; 2) $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

3) $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **721.** 1) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **722.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **723.** 1) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$; 2) 2; 3) 4; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **724.** 1) $2-\sqrt{2}$; 2) 1,5; 3) $4\sqrt{3}-3$. **731.** 1) $2 \sin \alpha$; 2) $-2 \cos \alpha$; 3) 0. **732.** 1) 0; 2) 0; 3) $-2 \operatorname{ctg} \beta$. **733.** 1) II; 3) I або II. **734.** 2) IV; 4) I або III. **735.** 2) Парна; 5) не є ні парною, ні непарною; 8) непарна. **736.** 2) Парна; 4) не є ні парною, ні непарною; 6) непарна. **737.** 3) $\sqrt{3}$; 6) $-\frac{1}{2}$; 9) $\frac{1}{2}$; 12) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 15) $-\sqrt{3}$. **738.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) 1; 6) $\frac{1}{2}$; 8) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **743.** 4) 1; 5) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; 6) $\frac{1}{4}$; 7) $\frac{1}{6}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 9) $\frac{1}{\pi}$. **744.** 2) 4π; 3) π; 6) 4. **747.** π. **748.** π. **755.** 1) $\cos 1{,}6\pi < \cos 1{,}68\pi$; 3) $\cos 20° > \cos 21°$; 5) $\cos\frac{10\pi}{9} < \cos\frac{25\pi}{18}$; 7) $\sin 2 > \sin 2{,}1$. **756.** 2) $\sin\frac{5\pi}{9} > \sin\frac{17\pi}{18}$; 4) $\cos\frac{10\pi}{7} > \cos\frac{11\pi}{9}$. **759.** 1) $\sin 58° > \cos 58°$; 2) $\sin 18° < \cos 18°$; 3) $\cos 80° < \sin 70°$. **760.** 1) Так; 2) ні. **777.** 1) Рис. 241. *Вказівка.* $\pi(x^2 + y^2) = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x^2 + y^2 = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. **783.** 2) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5} < \operatorname{tg}\frac{7\pi}{15}$; 5) $\operatorname{tg} 1 < \operatorname{tg} 1{,}5$; 8) $\operatorname{ctg}(-40°) < \operatorname{ctg}(-60°)$. **784.** 1) $\operatorname{tg} 100° > \operatorname{tg} 92°$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8} > \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$; 6) $\operatorname{ctg}(-3) < \operatorname{ctg}(-3{,}1)$. **789.** 1) Ні. *Вказівка.* $\operatorname{tg} 80° > \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$; 2) ні; 3) так. **790.** 2) $\sin 40° < \operatorname{ctg} 20°$. **795.** 6) $2\cos^2\alpha$; 7) $-\sin^2\alpha$; 8) 1; 9) $\cos^2\frac{x}{2}$; 10) 2.

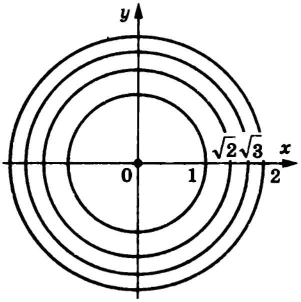


Рис. 241

796. 4) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 5) 1; 6) 1; 7) 1; 8) 4. **799.** 1) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$; 2) 1; 3) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 4) $\frac{1}{\sin x}$; 5) 0; 6) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 7) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$; 8) 1; 9) $\cos^2\alpha$; 10) $-\operatorname{ctg}\gamma$; 11) $\sin^4\alpha$; 12) 1; 13) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 14) $\frac{1}{\cos\beta}$. **800.** 1) $\frac{2}{\sin^2\beta}$; 2) 1; 3) $\frac{2}{\cos\beta}$; 4) $\frac{1}{\cos x}$; 5) $\frac{2}{\cos\beta}$; 6) $\operatorname{tg}^2\alpha$; 7) $\operatorname{tg}\alpha$; 8) -1; 9) 1; 10) $-\cos^2\alpha$. **801.** 2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$; 3) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$. **802.** 1) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$; 4) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{50}}$, $\cos\alpha = -\frac{7}{\sqrt{50}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{7}$. **805.** 2) *Вказівка.* Подайте доданок $2\sin^2\alpha$ у вигляді суми $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha$; 4) *Вказівка.* Розгляньте різницю лівої і правої частин даної рівності і доведіть, що вона дорівнює нулю. **809.** 1) $-\frac{1}{2}$. *Вказівка.* Поділіть чисельник і знаменник даного дробу на $\cos\alpha$; 2) $\frac{1}{4}$;

3) -27. *Вказівка.* Помножте чисельник даного дробу на $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.
810. 1) $-\frac{16}{11}$; 2) $\frac{12}{7}$; 3) $\frac{125}{357}$. **811.** 1) $-\sin\beta - \cos\beta$; 2) $-\sin\alpha\cos\beta$; 3) $-2\operatorname{tg}\alpha$; 4) 1. **812.** 1) $\frac{1}{\sin\alpha}$; 2) $2\operatorname{ctg}\alpha$; 3) -1. *Вказівка.* Оскільки $\frac{2\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \pi$, то $\cos\frac{2\pi}{3} \geqslant \cos\alpha$. **813.** 1) $\frac{b^2-1}{2}$. *Вказівка.* $b^2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\frac{b(3-b^2)}{2}$; 3) $\frac{1+2b^2-b^4}{2}$; 4) $\frac{1+6b^2-3b^4}{4}$; 5) $\frac{8(1+2b^2-b^4)}{(b^2-1)^4}$. **814.** 1) b^2-2; 2) $b(b^2-3)$; 3) b^4-4b^2+2; 4) $\frac{b+2}{b}$. *Вказівка.* З умови випливає, що $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = b$. Звідси $2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{b}$.
815. 1) $3\frac{1}{8}$, -3. *Вказівка.* $2\cos^2\alpha - 3\sin\alpha = 2(1-\sin^2\alpha) - 3\sin\alpha = -2\sin^2\alpha - 3\sin\alpha + 2$. Позначимо $\sin\alpha = t$ і розглянемо функцію $f(t) = -2t^2 - 3t + 2$, визначену на проміжку $[-1; 1]$. Це квадратична функція зі старшим від'ємним коефіцієнтом $a = -2$. Вона набуває найбільшого значення в точці $t_0 = -\frac{-3}{2\cdot(-2)} = -\frac{3}{4}$, яка належить проміжку $[-1; 1]$. Отже, $\max\limits_{[-1;1]} f(t) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = -2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) + 2 = 3\frac{1}{8}$. Для знаходження найменшого значення обчислимо значення функції $f(t)$ на кінцях проміжку $[-1; 1]$: $f(-1) = -2 + 3 + 2 = 3$, $f(1) = -2 - 3 + 2 = -3$. Отже, $\min\limits_{[-1;1]} f(t) = -3$; 2) найбільшого значення не існує, найменше дорівнює -1; 3) 0; $-1\frac{1}{8}$; 4) найбільшого і найменшого значень не існує. **816.** 1) $3\frac{1}{3}$; -2; 2) $3\frac{1}{8}$; 2; 3) найбільшого і найменшого значень не існує. **817.** 3) 0; 4) 0. **818.** 3) 0. **819.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\cos\beta$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\sin 2\beta$; 7) 1; 8) $\operatorname{tg} 15°$; 9) $\cos(\alpha - \beta)$. **820.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos 2\beta$; 6) $\cos(\alpha + \beta)$. **821.** $\frac{6}{7}$. **823.** 2) -1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **824.** 1) $\sqrt{3}$. **827.** $-\frac{31\sqrt{2}}{82}$.
828. $-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$. **829.** $-\frac{24}{25}$. **830.** $-\frac{297}{425}$. **831.** 2. **832.** 5. **835.** 1) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$; 2) $\frac{1}{\sin 2\alpha}$; 3) $\cos 2\alpha$; 4) $-\frac{1}{\cos\alpha}$. **836.** 1) 1; 2) -1. **837.** 1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 3) $\sqrt{3}-2$. **838.** 1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **841.** 1) 2; 2) $\sqrt{41}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{5}$. **842.** 1) 2; 2) 5; 3) $\sqrt{10}$. **843.** $\frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{10}$. *Вказівка.* $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\right)$. **844.** $-0{,}6$. **845.** $\frac{48+25\sqrt{3}}{11}$. **846.** $\frac{\sqrt{3(1-b^2)}-b}{2}$.
847. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{1-b^2}-b\right)$. **848.** -2. **849.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **850.** $-\frac{\pi}{4}$. **851.** $60°$. **852.** $120°$.

854. 45°. **855.** 1) *Вказівка.* З графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ вилучіть точки, абсциси яких дорівнюють $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **857.** *Вказівка.* З рівності $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ випливає, що $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta)$. Тоді $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\pi - \gamma) \times$ $\times (1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\gamma(1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma +$ $+ \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$. **859.** 2. *Вказівка.* З рівності $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ випливає, що $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta)$. Тоді $(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\beta) =$ $= 1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1 + \operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(1 -$ $- \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1 + 1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 2$. **860.** 2. **865.** 3) $-\cos 38°$; 4) $-\sin\frac{\pi}{18}$. **866.** 3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$; 4) $\sin\frac{\pi}{15}$. **869.** 2) -1; 6) $2\cos\alpha$. **870.** 3) 0; 4) 1. **871.** 1) -4; 2) $\frac{5}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; 4) 1. *Вказівка.* Зведіть кожну функцію до найменшого додатного аргументу; 5) 1. **872.** 1) $3 - 2\sqrt{2}$; 2) 3; 3) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; 4) -1. **873.** 1) $-\cos\alpha$; 2) 1; 3) 1; 4) -1; 5) 2; 6) 2; 7) 1; 8) 1; 9) $-\operatorname{tg}^2\alpha$; 10) 1; 11) $\operatorname{tg}\alpha$. **875.** 1) 1; 2) 0; 3) 0. **876.** 1) -1; 2) 1; 3) 0. **878.** 2. *Вказівка.* Оскільки $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{11} + \frac{5\pi}{22} = \frac{\pi}{2}$, то $\cos^2\frac{3\pi}{8} = \sin^2\frac{\pi}{8}$ і $\cos^2\frac{5\pi}{22} =$ $= \sin^2\frac{3\pi}{11}$. **879.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\frac{1}{\cos^2(\alpha + 10°)}$. **882.** 1) $2\cos\alpha$; 2) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 3) $\cos^2\alpha$; 4) $\sin 25°$; 5) 1; 6) $\cos\alpha + \sin\alpha$; 7) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 8) 2; 9) $\frac{1}{2}$; 10) 1; 11) $-\cos\frac{\alpha}{2}$; 12) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$; 13) $\sin 2\alpha$; 14) 1; 15) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2\alpha$; 16) $\sin 4\alpha$. **883.** 1) $2\sin 40°$; 2) $\cos 11\alpha$; 3) $\cos^2 2\beta$; 4) $\sin 40°$; 5) $\cos 20\varphi$; 6) 1; 7) $\cos 35° - \sin 35°$; 8) 1; 9) $\frac{1}{4}\sin 4\alpha$; 10) $2\sin 2\alpha$; 11) $\frac{1}{2}\cos 2\alpha$; 12) $-\sin 2\beta$; 13) $-\sin 2\alpha$; 14) $\sin 3\alpha$. **884.** 1) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; 5) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $2\sqrt{3}$. **890.** 2) $-4\sqrt{5}$. **891.** 2) $-\frac{24}{7}$. **897.** 1) 1; 2) $\operatorname{ctg} 4\alpha$. **898.** $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$. **899.** $-0{,}8$. **900.** $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. **901.** $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{14}}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{7}}{7}$. **902.** 1) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; 3) $2+\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; 5) $-(1+\sqrt{2})$; 6) $\sqrt{2}-1$. **903.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; 3) 2; 4) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 5) $\sin 4\alpha$; 6) $\sin 2\alpha$; 7) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 8) $\cos\alpha$. **904.** 1) $2\operatorname{ctg} 4\alpha$; 2) $\sin 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $4\sin\alpha$; 5) 1; 6) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. **911.** $\frac{1}{2}$. **912.** $-\frac{1}{2}$. **913.** $\frac{47}{37}$. **914.** $\frac{57}{5}$. **915.** 2. **916.** $-\frac{8}{9}$. **917.** $\frac{3}{4}$. **918.** 1) $\cos 4\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha$; 3) $\sin 8\alpha$; 4) $\operatorname{tg}^4\alpha$; 5) 1; 6) -1. **919.** 1) $\frac{1}{4}$;

2) $8\cos 2\alpha$; 3) $-\frac{1}{4}\sin^2\alpha$; 4) $\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}$; 5) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2\alpha$; 6) $-\frac{1}{2}$. **923.** 1) $\operatorname{ctg}^4\frac{\alpha}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha$; 3) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **924.** 1) -2; 2) 0. **925.** 1) 4; 2) $-\frac{1}{2}\sin 2\alpha$. **930.** 1) $\cos\frac{\alpha}{4}$; 2) $\sqrt{2}\operatorname{ctg} 2\alpha$; 3) $\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$. **931.** 1) Якщо $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$, то $2\cos\alpha$; якщо $\frac{\pi}{4} < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $2\sin\alpha$; 2) $\cos\frac{\alpha}{8}$; 3) $2\cos\frac{\varphi}{2}$. **932.** $\frac{3}{5}$. **933.** 2 або $-\frac{1}{3}$. **934.** $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. *Вказівка.* Маємо: $\sin 36° = \cos 54°$. Тоді: $\sin(2\cdot 18°) = \cos(3\cdot 18°)$; $2\sin 18°\cos 18° = 4\cos^3 18° - 3\cos 18°$; $2\sin 18°\cos 18° = \cos 18° \times$ $\times(4\cos^2 18° - 3)$; $2\sin 18° = 4\cos^2 18° - 3$; $2\sin 18° = 4(1-\sin^2 18°) - 3$; $2\sin 18° = 4 - 4\sin^2 18° - 3$; $4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0$. Розгляньте останню рівність як квадратне рівняння відносно $\sin 18°$ і врахуйте, що $\sin 18° > 0$. **939.** 1) $\operatorname{tg} 5\alpha$; 2) $-\operatorname{ctg} 3\alpha$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **940.** 1) $\frac{\cos\alpha}{\cos 4\alpha}$; 2) $\operatorname{tg} 6\alpha$; 3) 1. **941.** 1) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $4\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 3) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}{\sin\alpha}$. **942.** 1) $4\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$; 3) $4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\alpha}$. **953.** 1) $\frac{1}{2}(\cos 20° + \cos 10°)$; 2) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta$; 3) $\frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 10\alpha)$; 4) $\frac{1}{2}(\cos 26° - \cos 122°)$; 5) $\frac{2\cos 2\alpha + 1}{4}$. **954.** 1) $\cos\frac{3\pi}{40} + \cos\frac{13\pi}{40}$; 2) $\frac{1}{2}(\cos 4° - \cos 52°)$; 3) $\frac{1}{2}(\sin 8\alpha + \sin 2\alpha)$; 4) $\frac{2\cos 2\alpha - 1}{4}$. **955.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\sin 3\alpha$; 3) $\cos\alpha$; 4) 0,5. **956.** 1) $\cos\alpha$; 2) $\frac{1}{2}$. **959.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 1; 3) $-\sin 2\alpha$. **960.** 1) 1; 2) $\sin 2\alpha$. **961.** 1) *Вказівка.* Помножте і поділіть ліву частину рівності на $2\sin\frac{\pi}{7}$. **965.** 2) 1,5; 5. **966.** 2) $\frac{1}{3}$; 7. **967.** $\sqrt{5}$; 3. **968.** 13; $\frac{1}{4}$. **971.** 2) $\pm\frac{\pi}{5} + \frac{12\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\pm 3\arccos\frac{\sqrt{3}}{3} + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **972.** 2) $\pm\frac{25\pi}{6} + 10\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{4\pi}{3} + \frac{8\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. **973.** 3) $12 + 6\pi + 12\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{24} \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. **974.** 2) $\pm\frac{3\pi}{2} - 6 + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **975.** $-\frac{\pi}{6}$. **976.** 3π. **977.** 4 корені. **978.** $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{31\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$. **979.** 2) $\left(\frac{5}{6}+2k\right)^2$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\left(-\frac{5}{6}+2n\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$; 3) розв'язків немає. **980.** 1) $\frac{64}{(8k+1)^2}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\frac{64}{(8n-1)^2}$, $n \in \mathbb{N}$; 2) $\pm\arccos\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $\pm\arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\pi k$,

$k \in \mathbb{Z}$. **981.** $a=\frac{1}{2}$. **982.** $a = 0$. **983.** $a \leqslant 1$ або $a \geqslant 3$. **984.** $a \leqslant -\frac{2}{5}$ або $a \geqslant 2$. **985.** $-1 \leqslant a < \frac{1}{2}$. *Вказівка.* Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\cos x = a, \\ \cos x > 3a-1,\end{cases}$ яка має розв'язок тоді, коли $\begin{cases}-1 \leqslant a \leqslant 1, \\ a > 3a-1.\end{cases}$ **986.** $-1 \leqslant a < -\frac{1}{3}$ або $-\frac{1}{3} < a \leqslant 1$. **987.** $a \in \left[\frac{7\pi}{3}; +\infty\right)$. **988.** $a \in \left[\frac{8\pi}{3}; +\infty\right)$. **989.** Якщо $a < -1$ або $a > 1$, то коренів немає; якщо $a = -1$ або $a = 1$, то один корінь; якщо $-1 < a \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ або $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$, то 2 корені; якщо $\frac{\sqrt{2}}{2} < a \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, то 3 корені. **990.** Якщо $\frac{1}{2} \leqslant a < 1$, то 2 корені; якщо $-1 \leqslant a < \frac{1}{2}$ або $a = 1$, то один корінь; якщо $a < -1$ або $a > 1$, то коренів немає. **991.** Якщо $a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $a > 1$, то коренів немає; якщо $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant a < 0$ або $a = 1$, то один корінь; якщо $0 \leqslant a < 1$, то 2 корені. **992.** $a < \pi$, або $a > \frac{3\pi}{2}$, або $a = \frac{7\pi}{6}$. **993.** $a < 0$, або $a > \frac{\pi}{2}$, або $a = \frac{\pi}{4}$. **996.** 3) $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{(-1)^{n+1}}{8}\arcsin\frac{2}{9} + \frac{\pi n}{8}$, $n \in \mathbb{Z}$. **997.** 3) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **998.** 2) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **999.** 2) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{5\pi}{6} + 20 + 5\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1000.** $\frac{13\pi}{12}$. **1001.** $-\frac{13\pi}{90}$. **1002.** $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$. **1003.** 6 коренів. **1004.** 1) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pi + 4\pi n$, $\frac{\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1005.** 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1006.** 2) $\left(2k - \frac{1}{2}\right)^2$, $k \in \mathbb{N}$; 3) $\pm\arccos\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **1007.** 1) $\frac{81}{(3k + (-1)^{k+1})^2}$, $k \in \mathbb{N}$; 2) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **1008.** $a \leqslant 0$ або $a \geqslant 2$. **1009.** $a = -4$ або $4 \leqslant a \leqslant 5$. **1010.** $\frac{1}{2} < a \leqslant 1$. **1011.** $-1 \leqslant a < \frac{1}{3}$ або $\frac{1}{3} < a \leqslant 1$. **1012.** $a \geqslant \frac{17\pi}{6}$. **1013.** $a \leqslant -\frac{13\pi}{6}$. **1014.** 1) Якщо $a < -1$ або $a > 1$, то коренів немає; якщо $a = -1$, або $-\frac{1}{2} < a < 0$, або $a = 1$, то 1 корінь; якщо $-1 < a \leqslant -\frac{1}{2}$ або $0 \leqslant a < 1$, то 2 корені; 2) якщо $a < -1$ або $a > 1$, то коренів немає; якщо $a = 1$, або $a = -1$, або $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$, то 1 корінь; якщо $-1 < a \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$, то 2 корені. **1015.** Якщо $a \leqslant -\frac{1}{2}$ або $a > 1$, то коренів немає; якщо $-\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$ або $a = 1$, то 1 корінь; якщо $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant a < 1$, то 2 корені. **1016.** Якщо $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant a \leqslant 0$, то 3 корені; якщо

$0 < a < 1$ або $-1 < a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то 2 корені; якщо $a = -1$ або $a = 1$, то 1 корінь; якщо $a < -1$ або $a > 1$, то коренів немає. **1017.** Якщо $-1 < a \leqslant -\frac{1}{2}$, то 3 корені; якщо $-\frac{1}{2} < a < 1$ або $a = -1$, то 2 корені; якщо $a = 1$, то 1 корінь; якщо $a < -1$ або $a > 1$, то коренів немає. **1018.** Якщо $-1 < a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, або $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$, або $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$, то 4 корені; якщо $a = -1$, або $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, або $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, або $a = 1$, то 3 корені; якщо $a < -1$ або $a > 1$, то 2 корені. **1019.** Якщо $-1 < a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $-\frac{\sqrt{3}}{2} < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, або $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$, то 4 корені; якщо $a = -1$, або $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, або $a = 1$, то 3 корені; якщо $a < -1$ або $a > 1$, то 2 корені. **1022.** 3) $-\frac{4\pi}{21} + \frac{4\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{1}{6}\operatorname{arcctg}\frac{6}{11} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$. **1023.** 2) $\frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1024.** 2) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **1025.** 3) $-\frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. **1026.** 4 корені. **1027.** 1 корінь. **1028.** $-\frac{\pi}{4}$. **1029.** $-\frac{2\pi}{3}$. **1030.** 2) $\frac{16}{(4k+1)^2}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; 3) $(-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k$, $(-1)^k \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **1031.** 1) $\frac{8}{20k+5}$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{16}{(4\pi k - \pi)^2}$, $k \in \mathbb{N}$; 3) $\pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi k$, $\pm\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **1032.** 1) $a < -\frac{1}{3}$, або $-\frac{1}{3} < a < 0$, або $a > 0$; 2) $-1 < a < -\frac{1}{2}$, або $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$, або $\frac{1}{2} < a < 1$. **1033.** 1) $a < -\frac{1}{2}$, або $-\frac{1}{2} < a < 0$, або $a > 0$; 2) $-1 < a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $-\frac{\sqrt{3}}{2} < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, або $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$. **1034.** $a = -\frac{\pi}{3}$, або $a \leqslant -\frac{\pi}{2}$, або $a \geqslant 0$. **1035.** $a = -\frac{\pi}{4}$, або $a \leqslant -\frac{\pi}{2}$, або $a \geqslant 0$. **1040.** 1) $[0; 2]$; 2) $[0; 1]$; 3) $(-\infty; -\pi - 4] \cup [\pi - 4; +\infty)$. **1041.** 1) $\left[-\frac{\pi}{2} - 1; 1 - \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $[2; 3]$; 3) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **1042.** 1) π; 0; 2) $2 + \pi$; 2. **1043.** 1) 2π; π; 2) $\frac{\pi}{2} + 1$; $-\frac{\pi}{2} + 1$. **1044.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{\pi}{6}$. **1045.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{\pi}{4}$. **1046.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\cos\frac{1}{2}$; 3) коренів немає. **1047.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) коренів немає; 3) $\frac{3}{2}$. **1048.** 1) $(-1; 1]$; 2) $\{-1\}$; 3) $[-1; 1]$; 4) $[-1; 1]$; 5) розв'язків немає; 6) $\{1\}$; 7) $[-1; 1)$; 8) $(-1; 1]$. **1049.** 1) $\{-1\}$; 2) $[-1; 1)$; 3) $[-1; 1]$; 4) $[-1; 1]$; 5) розв'язків немає. **1050.** 1) $[-1; 1]$; 2) $\{-1\}$; 3) $\{1\}$; 4) $\{0\}$; 5) $\{0\}$. **1051.** 1) $[-1; 1]$; 2) $\{1\}$; 3) $[-1; 1]$; 4) $\{1\}$; 5) $\{-1; 1\}$. *Вказівка*. Якщо $x > 0$, то $\frac{x^2+1}{2x} \geqslant 1$, причому рівність досягається тільки при $x = 1$; якщо $x < 0$, то $\frac{x^2+1}{2x} \leqslant -1$, причому рівність досягається тільки при $x = -1$. **1052.** 1) $\left[4; \frac{\pi}{2}+4\right]$; 2) $\{0\}$. *Вказівка.* Оскільки $-\arccos x \leqslant 0$, то область визначення даної функції складається з однієї точки $x = 1$; 3) $\left(-\infty; -\frac{2}{\pi}\right] \cup \left[\frac{2}{\pi}; +\infty\right)$; 4) $\left[\sqrt{\frac{1}{\pi}}; +\infty\right)$. **1053.** 1) $\left[2; \frac{\pi}{2}+2\right]$; 2) $\left[0; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$; 3) $\left[\frac{1}{\pi}; +\infty\right)$; 4) $\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}; +\infty\right)$. **1056.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{24}{25}$. *Вказівка.* $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right) = 2\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; 3) $\frac{56}{65}$; 4) $\frac{3}{4}$. **1057.** 1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$; 3) $\frac{7}{25}$; 4) $\frac{5}{\sqrt{26}}$. **1058.** 1) $x = 2$. *Вказівка.* $\cos(\arccos(4x - 9)) = 4x - 9$ тільки за умови $|4x - 9| \leqslant 1$; 2) $[-3; -1]$. *Вказівка.* Множиною коренів цього рівняння є його область визначення. **1059.** 1) $\frac{1}{3}$. *Вказівка.* Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} |4x-1| \leqslant 1, \\ 4x-1 = 3x^2; \end{cases}$ 2) $[0; 2]$. **1060.** 1) 1; 2) 5. **1061.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) -2. **1062.** 1) $\left[0; \frac{3}{4}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$; 3) $\left(\frac{\sqrt{3}+10}{6}; 2\right]$. **1063.** 1) $\left[0; \frac{2-\sqrt{2}}{8}\right)$; 2) $\left(\frac{4-\sqrt{2}}{6}; 1\right]$; 3) $\left[\frac{3}{7}; \frac{8+\sqrt{3}}{14}\right)$. **1064.** 1) $\left[\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right)$; 2) розв'язків немає. **1065.** 1) $\left[1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$; 2) $\{0\}$. **1068.** Рис. 242. *Вказівка.* Якщо $-1 \leqslant x < 0$, то $\arcsin x < 0$ і $|\arcsin x| = -\arcsin x$, $\arcsin|x| = \arcsin(-x) = -\arcsin x$. Тоді $y = 1$. Якщо $0 < x \leqslant 1$, то $\arcsin x > 0$ і $|\arcsin x| = \arcsin x$, $\arcsin|x| = \arcsin x$. Тоді $y = 1$. **1069.** 3) Рис. 243. *Вказівка.* Зауважимо, що $D(y) = [-1; 1]$. Запишемо: $\cos(2\arcsin x) = 1 - 2\sin^2(\arcsin x) = 1 - 2x^2$. Отже, шуканим графіком є частина параболи $y = -2x^2 + 1$; 4) *Вказівка.* Оскільки $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, то $y = 1$. Проте шуканий графік — це не пряма $y = 1$, а лише її відрізок, оскільки $D(y) = [-1; 1]$. **1070.** 2) *Вказівка.* $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$;

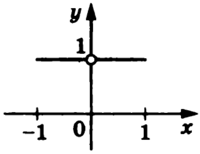


Рис. 242

3) *Вказівка.* $\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$ за умови $|x| \leqslant 1$. **1071.** Рис. 244. **1072.** 1) $\frac{\pi}{7}$; 2) $\frac{3\pi}{7}$; 3) $\pi - 3$; 4) $\frac{5\pi}{2} - 8$. **1073.** 1) $\frac{2\pi}{9}$; 2) $\frac{7\pi}{9}$. *Вказівка.* $\cos\frac{11\pi}{9} = \cos\left(2\pi - \frac{7\pi}{9}\right)$; 3) $2\pi - 6{,}28$; 4) $\frac{3\pi}{8}$; 5) $\frac{9\pi}{2} - 12$. **1074.** 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1075.** 1) $\frac{8\pi}{3}$; 3) $\frac{19\pi}{6}$. **1076.** 2) -2π. **1077.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $[1; +\infty)$. **1078.** $\mathbb{R}$.

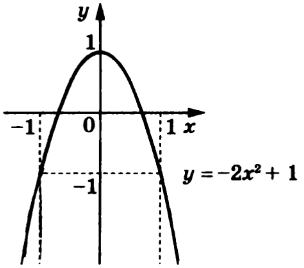


Рис. 243

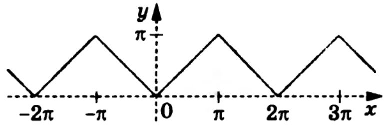


Рис. 244

1079. 1) $\left(2-\frac{\pi}{2};2+\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\left[0;\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$. **1080.** 1) $(4;\ \pi+4)$; 2) $\left[0;\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$. **1081.** 1) 4; 2) 5; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) π. **1082.** 1) $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$. **1083.** 1) 1; 2) tg 1; 3) коренів немає; 4) $-\frac{27+\sqrt{3}}{12}$. **1084.** 1) −1; 2) коренів немає; 3) коренів немає; 4) $\frac{15+\sqrt{3}}{24}$. **1085.** $\left(-\infty;-\frac{2}{\pi}\right)\cup\left(\frac{2}{\pi};+\infty\right)$. **1086.** $\left(\frac{1}{\pi};+\infty\right)$. **1087.** 1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 3) $-\frac{7}{\sqrt{118}}$; 4) $\frac{7}{\sqrt{50}}$. **1088.** 1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$; 3) $\frac{13}{85}$. **1089.** 1) $\left(-\frac{8+\sqrt{3}}{5};+\infty\right)$; 2) $\left(2-\sqrt{3};+\infty\right)$. **1090.** 1) $\left(-\infty;\frac{21-\sqrt{3}}{9}\right)$; 2) $\left(-\infty;\frac{\sqrt{3}}{3}-11\right)$. **1091.** 1) *Вказівка.* $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)=x$ при будь-якому x; 2) *Вказівка.* $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}x)=\frac{1}{x}$ при будь-якому $x\neq 0$. **1095.** 1) $\frac{5\pi}{13}$; 2) $-\frac{3\pi}{13}$; 3) $5-2\pi$; 4) $-\frac{5\pi}{42}$; 5) $\frac{11\pi}{2}-17$. **1096.** 1) $\frac{4\pi}{11}$; 2) $\frac{4\pi}{11}$; 3) $15-4\pi$; 4) $\frac{27\pi}{38}$; 5) $\frac{7\pi}{2}-10$. **1097.** 1) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$; 6) $\pm4\arccos\frac{1}{3}+8\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **1098.** 1) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{4}+3\pi n,\ 3\operatorname{arcctg}\left(-\frac{2}{3}\right)+3\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **1099.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}4+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$; 5) $-3\operatorname{arctg}5+3\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}4+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 7) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ 2\operatorname{arctg}2+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **1100.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{4},\ n\in\mathbb{Z}$; 5) $\operatorname{arctg}2+\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

6) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1101.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $(-1)^n \arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pm\arccos\left(1-\sqrt{2}\right)+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $2\pi n$, $\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\pm 2\pi + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 7) πn, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $2\pi + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 9) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 10) $\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 11) $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}$, $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; 12) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arcctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 13) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 14) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1102.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $(-1)^n\cdot\arcsin\left(2-\sqrt{3}\right)+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $(-1)^{n+1}\pi + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\pi + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 7) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 9) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, πn, $n \in \mathbb{Z}$; 10) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1103.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}$, $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $\operatorname{arctg} 4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 7) πn, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1104.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* $\sin 2x = 2\sin x\cos x$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) πn, $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1105.** $-\pi$. **1106.** $-\frac{\pi}{2}$. **1107.** $\frac{\pi}{4}$. **1108.** $\frac{\pi}{2}$. **1109.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n\cdot\arcsin\frac{1-\sqrt{10}}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1110.** 1) $\pm\arccos\frac{\sqrt{29}-2}{5}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1111.** 1) $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{11}+\frac{2\pi n}{11}$, $n \in \mathbb{Z}$. **1112.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **1113.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-2\operatorname{arctg}\frac{11}{5}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $2\operatorname{arctg}\left(-1\pm\sqrt{5}\right)+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1114.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $2\operatorname{arctg} 4 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $2\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1115.** 4 корені. **1116.** 2π. **1117.** $\pi-\arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4}$. **1118.** $\frac{\pi}{2}$. **1119.** 1) πn,

$-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **1120.** 1) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}$. **1121.** 1) $-1\leqslant a\leqslant 2$; 2) $a=3$. **1122.** 1) $-1\leqslant a\leqslant 2$; 2) таких значень a не існує. **1123.** 1) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $\pm\left(\pi-\arccos\frac{2}{3}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка.* $5\left(3\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)+2\left(9\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)+5=0$. Зробіть заміну $3\cos x+\frac{1}{\cos x}=y$, тоді $9\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}=y^2-6$. **1124.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка.* $(\mathrm{tg}^3\, x+\mathrm{ctg}^3\, x)+(\mathrm{tg}^2\, x+\mathrm{ctg}^2\, x)-4=0$. Зробіть заміну $\mathrm{tg}\, x+\mathrm{ctg}\, x=y$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$, $(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{17}-5}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **1125.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, πn, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. *Вказівка.* $2\cos^2 x+5\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x+\cos^2 x-\sin^2 x=0$; $\sin^2 x-3\cos^2 x=5\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x$. Помножте ліву частину на вираз $\sin^2 x+\cos^2 x$; 3) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **1126.** 1) $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. **1127.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. **1128.** 1) $3\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\arccos\frac{1-\sqrt{13}}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **1129.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **1130.** 1) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **1131.** 1) $\frac{5\pi}{6}\leqslant a<\pi$; 2) $\frac{3\pi}{2}\leqslant a<\frac{11\pi}{6}$. **1132.** 1) $\frac{11\pi}{6}\leqslant a<2\pi$; 2) $\frac{4\pi}{3}\leqslant a<\frac{3\pi}{2}$. **1133.** 1) $a<-1$, або $a=\frac{7}{10}$, або $a>\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{7}{10}<a\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $\frac{1}{2}<a<\frac{7}{10}$, або $a=-1$. **1134.** 1) $a<-\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, або $a>1$; 2) $a=1$ або $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant a<0$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant 1$ або $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant a<\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1135.** 1) $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$, або $a=-\frac{1}{3}$, або $a<-1$; 2) $\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $a=-1$; 3) $-\frac{1}{3}<a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $-1\leqslant a<-\frac{1}{3}$. **1136.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **1137.** 1) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\pm\mathrm{arctg}\,\sqrt{2}+\pi n$, $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $\mathrm{arcctg}\,3+\pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$. **1138.** 1) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{6}$, $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{Z}$. **1139.** 1) $\frac{\pi}{12}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{Z}$.
1140. 1) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \pi+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ \pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$; 5) $\pi n,\ (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$; 7) $\pi n,\ \pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{2\pi n}{5},\ \pi+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 9) $\frac{\pi n}{5},\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5},\ n \in \mathbb{Z}$; 10) $\frac{\pi n}{2},\ (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{21}+\frac{\pi n}{7},\ n \in \mathbb{Z}$. **1141.** 1) $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $2\pi n,\ (-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{4},\ (-1)^n\cdot\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi n}{2},\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ \frac{\pi n}{5},\ n \in \mathbb{Z}$; 7) $\frac{\pi n}{3},\ \frac{\pi}{7}+\frac{2\pi n}{7},\ n \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ (-1)^n\cdot\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$. **1142.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{3},\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{Z}$; 4) $2\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 7) $\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{4},\ -\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* $\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}-\frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1-\cos 8x}{2}=0$; 9) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$; 10) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ \pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$. **1143.** 1) $\frac{\pi}{22}+\frac{\pi n}{11}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{3},\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ \frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi n}{5},\ \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi n}{2},\ \pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.
1144. 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$; 3) $-60^\circ+180^\circ n,\ 40^\circ+180^\circ n,\ n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{10},\ n \in \mathbb{Z}$. **1145.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $45^\circ+180^\circ n,\ -75^\circ+180^\circ n,\ n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{4}$, $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{12},\ n \in \mathbb{Z}$. **1146.** 1) $-\frac{\pi}{24}+\pi n,\ \frac{5\pi}{144}+\frac{\pi n}{6},\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{2\pi}{3}+\pi n,\ (-1)^n \arcsin\frac{1}{4}-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* $4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 2x\right)-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=0$; $2\left(\sin\frac{\pi}{3}+\sin 2x\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$; $4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$; $4\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}\right)=0$.
1147. 1) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{12}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{5\pi}{12}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* $4\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)^2-5=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)\right)$; $4\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-$

$-5=0$. **1148.** 1) $2\pi n$, $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка*. $2 \sin 2x \cos x - 2 \sin x \cos x - 2 \cos x (\cos x - 1) = 0$; $2 \cos x (\sin 2x - \sin x - \cos x + 1) = 0$; $2 \cos x ((1 + \sin 2x) - (\sin x + \cos x)) = 0$; $2 \cos x ((\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)) = 0$; $2 \cos x (\sin x + \cos x) (\sin x + \cos x - 1) = 0$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1149.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка*. $(\sin 4x + \cos 4x) (\sin^2 4x + \cos^2 4x - \sin 4x \cos 4x) - (1 - \sin 4x \cos 4x) = 0$; $(\sin 4x + \cos 4x - 1) (1 - \sin 4x \cos 4x) = 0$; 2) $-\frac{\pi}{8}+\pi n$, $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. **1150.** $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1151.** $(-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{29}-5}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1152.** 1) $2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) πn, $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка*. Зробіть заміну $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}=t$. **1153.** $2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1154.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) πn, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка*. $\cos 4x=\frac{1+\cos 6x}{2}$; $4 \cos^2 2x - 2 = 1 + 4 \cos^3 2x - 3 \cos 2x$; $4 \cos^3 2x - 4 \cos^2 2x - 3 \cos 2x + 3 = 0$; $4 \cos^2 2x (\cos 2x - 1) - 3 (\cos 2x - 1) = 0$; $(4 \cos^2 2x - 3) (\cos 2x - 1) = 0$; 3) $\frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. **1155.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) πn, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1156.** 1) $\frac{2\pi k}{15}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 15p$, $p \in \mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{17}+\frac{2\pi n}{17}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 17m + 8$, $m \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{2\pi k}{9}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 9p$, $p \in \mathbb{Z}$. *Вказівка*. Помножте обидві частини рівності на $2\sin\frac{x}{2}$; 3) $\frac{\pi k}{9}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 9p$, $p \in \mathbb{Z}$. *Вказівка*. Скористайтеся формулою пониження степеня. **1157.** 1) $\frac{\pi k}{14}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 14p$, $p \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 3p$, $p \in \mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi k}{9}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 9p$, $p \in \mathbb{Z}$. **1158.** 1) -2; 2) коренів немає. **1159.** 1) 2; 2) коренів немає. **1160.** Коренів немає. *Вказівка*. Якщо $x > 0$ або $x < -1$, то $x^2 + x + 1 > 1$. При $x \in [-1; 0]$ $\sin x \leqslant 0$, а $x^2 + x + 1 > 0$. **1161.** Коренів немає. **1162.** 1) $x = 2\pi k$, $y=\frac{1}{2}$ або $x = \pi + 2\pi k$, $y=-\frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $x=\frac{-5+\sqrt{25-8k}}{2}$, $y=\frac{-5-\sqrt{25-8k}}{2}$, або $x=\frac{-5-\sqrt{25-8k}}{2}$, $y=\frac{-5+\sqrt{25-8k}}{2}$, або $x=\frac{5+\sqrt{21-8n}}{2}$, $y=\frac{5-\sqrt{21-8n}}{2}$, або $x=\frac{5-\sqrt{21-8n}}{2}$, $y=\frac{5+\sqrt{21-8n}}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \leqslant 3$, $n \leqslant 2$. **1163.** 1) $x = -4$, $y=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$ або $x = 4$, $y=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $y = -3$ або $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $y = 3$, $n \in \mathbb{Z}$. **1164.** 1) πk, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq -2$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $(-1)^k\frac{1}{6}+k$, $k \in \mathbb{Z}$,

$k \neq 1$. **1165.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$; 2) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$; 3) $\frac{1}{4}+\frac{k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 1$. **1166.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 6) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **1167.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) πk, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $2\pi k$, $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 5) $\pi + 2\pi k$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **1168.** 1) $x = k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$; 2) $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$, $x=\pm\frac{5}{2}$. **1169.** 1) $x = 3$, $x=\frac{1}{2}+k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \leqslant 2$; 2) $x=\pm\frac{7}{2}$, $x = \pm 3$, $x = \pm 1$.
1170. 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{2}+4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\sin x = 1,\\ \cos 4x = 1,\\ \cos\frac{x}{2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$
1171. 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
1172. 1) πk, $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
1173. 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3}+2\pi k$, πk, $k \in \mathbb{Z}$. **1174.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $-\operatorname{arctg}\frac{6+\sqrt{3}}{11}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **1175.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{13}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{3(5-\sqrt{3})}{11}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **1176.** 1) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k; 2\pi k\right)$, $\left(2\pi k; -\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{3}-\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k; \frac{\pi}{2}-\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\left((-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}; (-1)^k\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k; \pi k\right)$, $\left(\pi k; -\frac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1177.** 1) $(360°k; 60° + 360°k)$, $(-60° + 360°k; 360°k)$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{8}-\frac{\pi k}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\left(\frac{1}{6}+2k; \frac{1}{6}-2k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k; \frac{\pi}{6}-\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1178.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{6}-\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(2\pi k; \frac{5\pi}{2}-2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1179.** 1) $\left(\frac{3\pi}{2}+\pi k; -\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1180.** 1) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{4}-\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k; \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\pi k\right)$, $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k; \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1181.** 1) $\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\right.$

$-\frac{\pi}{3}+\pi n\Big)$, $n \in \mathbb{Z}$. **1182.** 1) $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(n+2k); \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(n-2k)\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(n+2k);\right.$ $\left.\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(n-2k)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(-\frac{1}{4}+\frac{n}{2}-k; \frac{1}{4}+\frac{n}{2}+k\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\left(2\pi k; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(2\pi k; -\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k; 2\pi n\right)$, $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k; 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$. **1183.** 1) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\left(\frac{n}{2}-k\right); \frac{\pi}{4}+\pi\left(\frac{n}{2}+k\right)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{8}+\right.$ $+\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n+k);$ $\left.-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n-k)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\right.$ $+\pi(n+k); \left.\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n-k)\right)$, $\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n+k); -\frac{\pi}{8}-\right.$ $\left.-\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n-k)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n+k);\right.$ $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+$ $\left.+\pi(n-k)\right)$, $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi(k+n); \pi(k-n)\right)$, $\left(\pi(k+n); -\frac{\pi}{4}+\pi(k-n)\right)$, $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k; -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k; -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. **1184.** 2) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n < x < \frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{6}+\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\pi n < x < \frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 9) $\pi-\arcsin\frac{1}{6}+2\pi n < x < 2\pi+\arcsin\frac{1}{6}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1185.** 2) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n < x < \frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < -\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{4}+\pi n \leqslant x < \pi+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 10) $\operatorname{arcctg} 2 + \pi n < x < \pi + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1186.** 1) $\frac{\pi}{6}+\pi n < x < \frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{5} < x < \frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$. **1187.** 3) $-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2} < x < -\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{4}+\frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **1188.** 1) $-\frac{\pi}{6}+\pi n < x \leqslant \frac{2\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi n < x < \frac{5\pi}{12}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{11\pi}{12}+\pi n < x < \frac{5\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\pi + 4\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}+\pi n < x < \frac{3\pi}{8}+\frac{1}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1189.** 1) $-\frac{\pi}{6}+\pi n < x \leqslant \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{5\pi}{6}+4\pi n < x < \frac{11\pi}{6}+4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n < x < \frac{11\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{9\pi}{4}+3\pi n < x < -\frac{\pi}{4}+3\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{17\pi}{60}+\frac{\pi n}{2} \leqslant x \leqslant \frac{22\pi}{60}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **1190.** 1) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k \leqslant x < \arcsin\frac{1}{4}+2\pi k$, $\pi-\arcsin\frac{1}{4}+2\pi k < x \leqslant \frac{7\pi}{6}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n < x \leqslant -\arccos\frac{1}{4}+2\pi n$,

$\arccos\frac{1}{4}+2\pi n \leqslant x < \frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k < x < \operatorname{arctg} 3 + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **1191.** 1) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k < x \leqslant -\frac{2\pi}{3}+2\pi k,$ $\frac{2\pi}{3}+2\pi k \leqslant x < \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k \leqslant x < \frac{\pi}{6}+2\pi k,$ $\frac{5\pi}{6}+2\pi k < x \leqslant \pi - \arcsin\frac{1}{3}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $\operatorname{arcctg} 1{,}5 + \pi k < x < \pi - \operatorname{arcctg} 4 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{6}+\pi n < x < \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **1192.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}+\pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3} < x < \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{3}+\pi k < x < \frac{\pi}{3}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{2}+\pi k < x < -\operatorname{arctg} 2+\pi k,$ $\operatorname{arctg} 2+\pi k < x < \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **1193.** 1) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2} < x < \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+\pi k < x < \frac{5\pi}{6}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 4) $\pi k < x < \operatorname{arcctg} 5 + \pi k,$ $\pi - \operatorname{arcctg} 5 + \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **1194.** 1) $x \neq \frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi k < x < \frac{5\pi}{12}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **1195.** 1) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{3}{8}+2k < x < \frac{5}{8}+2k,\ k \in \mathbb{Z}$. **1196.** 1) $-\frac{\pi}{3}+\pi k < x < \frac{\pi}{6}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **1197.** 1) $-\frac{5\pi}{6}+\pi k < x < \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{5\pi}{12}+\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{12}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **1198.** 1) $\frac{\pi}{3}+2\pi k < x < \frac{5\pi}{3}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\operatorname{arctg} 2+\pi k < x < \frac{\pi}{3}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+2\pi k < x < \frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 4) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2}+\pi k,$ $-\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi k \leqslant x < \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$. **1199.** 1) $\frac{\pi}{3}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi k < x \leqslant \frac{\pi}{2}+\pi k,$ $\frac{3\pi}{4}+\pi k \leqslant x < \pi+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi k < x < \frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{2}+\pi k < x < -\frac{\pi}{4}+\pi k,$ $\pi k < x < \frac{\pi}{4}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **1200.** 1) $\frac{\pi}{5}+2\pi k < x < \frac{3\pi}{5}+2\pi k,$ $\pi+2\pi k < x < \frac{7\pi}{5}+2\pi k,$ $\frac{9\pi}{5}+2\pi k < x < 2\pi+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi k}{2} < x < \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}+2\pi k,$ $\frac{3\pi}{4}+2\pi k \leqslant x \leqslant \pi+2\pi k,$ $\frac{5\pi}{4}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k \leqslant x \leqslant 2\pi k,$ $\frac{\pi}{4}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 5) $2\pi k < x < \frac{\pi}{2}+2\pi k,$ $\frac{2\pi}{3}+2\pi k < x < \pi+2\pi k,$ $\frac{4\pi}{3}+2\pi k < x < \frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **1201.** 1) $2\pi k < x < \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{2\pi}{5}+2\pi k < x < 2\pi k,$ $\frac{2\pi}{5}+2\pi k < x < \frac{\pi}{2}+2\pi k,$ $\frac{4\pi}{5}+2\pi k < x < \pi+2\pi k,$ $\frac{6\pi}{5}+2\pi k < x < \frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+\pi k < x < \frac{\pi}{2}+\pi k,$ $\frac{\pi}{2}+\pi k < x < \frac{5\pi}{6}+\pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2} < x < \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},$ $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2} < x < \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Видано за рахунок державних коштів
Продаж заборонено

Навчальне видання

Мерзляк Аркадій Григорович
Номіровський Дмитро Анатолійович
Полонський Віталій Борисович
Якір Михайло Семенович

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

10 клас

Профільний рівень

Редактор *Г. Ф. Висоцька*
Художник *С. Е. Кулинич*
Коректор *Т. Є. Цента*
Комп'ютерне верстання *О. О. Удалова*

Формат 60×90/16. Гарнітура шкільна. Ум. друк. арк. 26,00.
Тираж 62 150 прим. Замовлення № 748.

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

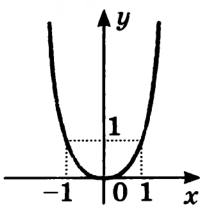
Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003

«Моя любов — Україна і математика». Ці слова Михайла Пилиповича Кравчука (1892–1942) викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника науковцеві.

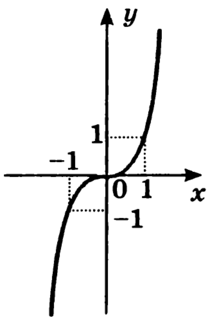
Ми сподіваємося, що це патріотичне висловлювання видатного українського математика стане для вас надійним дороговказом на шляху до професіоналізму.

Графік степеневої функції

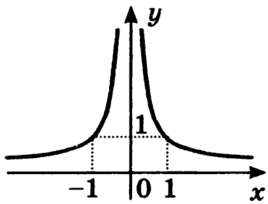
$y = x^n$, n — парне натуральне число



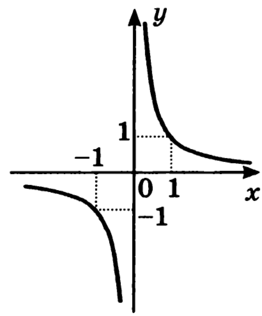
$y = x^n$, n — непарне натуральне число, $n > 1$



$y = x^{-n}$, n — парне натуральне число



$y = x^{-n}$, n — непарне натуральне число



Властивості кореня n-го степеня

Для будь-якого дійсного a виконуються рівності

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a, \quad \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|.$$

Якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

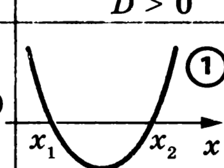
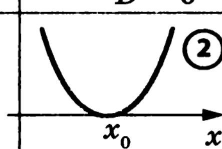
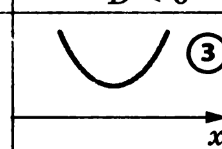
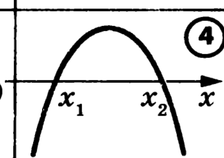
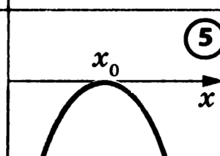
якщо $a \geqslant 0$ і $b > 0$, то $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

якщо $a \geqslant 0$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$;

якщо $a \geqslant 0$, то $\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$;

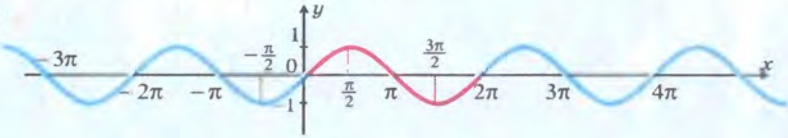
якщо $a \geqslant 0$, то $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$

Розміщення графіка квадратичної функції відносно осі абсцис

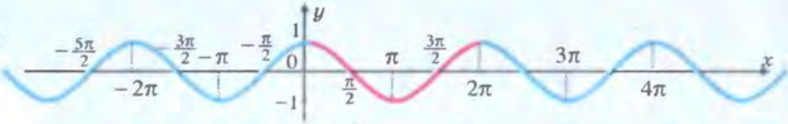
	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Графіки тригонометричних функцій

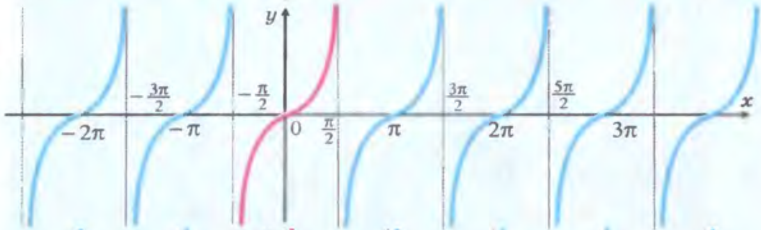
$y = \sin x$



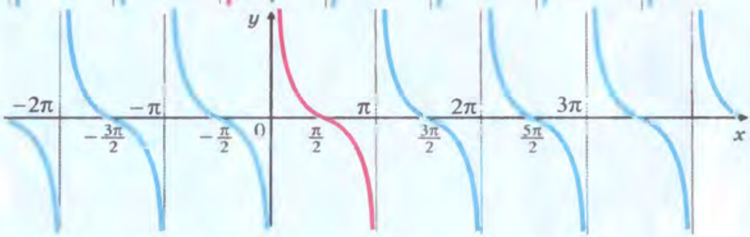
$y = \cos x$



$y = \mathrm{tg}\, x$



$y = \mathrm{ctg}\, x$



Значення тригонометричних функцій деяких кутів

30° 45° 60° 90° 120° 135° 150° 180° 270°

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	**−1**	$\boldsymbol{-\sqrt{3}}$	–	0

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}; \quad \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$$

Формули додавання

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta; \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}; \quad \mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

Формули пониження степеня

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Формули суми і різниці синусів (косинусів)

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

Формули перетворення добутку в суму

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta));$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

Формули синуса і косинуса потрійного аргументу

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

АЛГЕБРА і початки аналізу

10 клас

Навчально-методичний комплект

Підручник

Книга для вчителя

Збірник задач і контрольних робіт

ДЛЯ ТИХ, ХТО ПРАГНЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

ПІДРУЧНИК ДЛЯ КЛАСІВ З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ

9 789664 740934

ТОВ ТО «Гімназія»
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, 758-83-93, 719-46-80
факс: (057) 758-83-93
e-mail: contact@gymnasia.com.ua