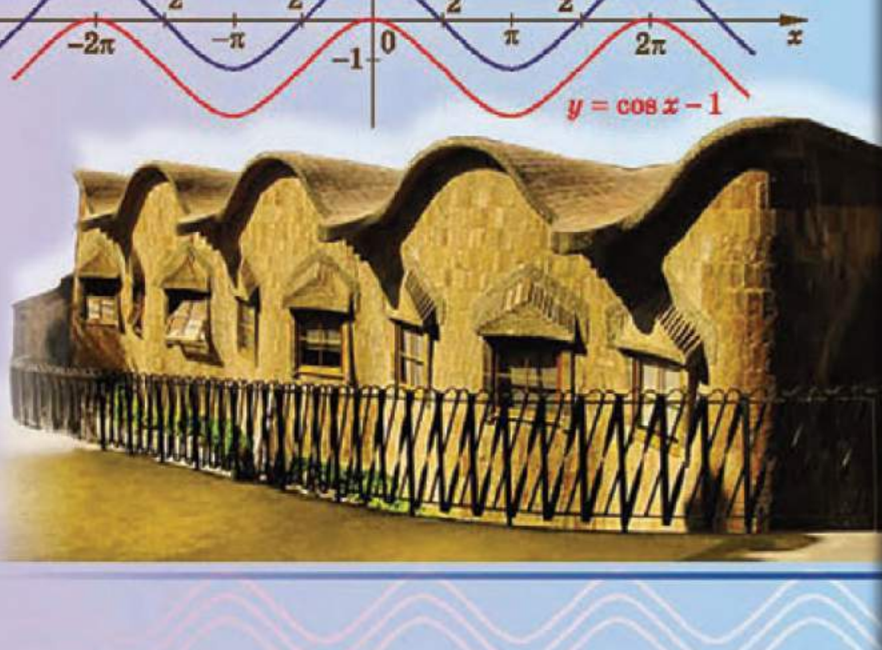
видавництво Генеза

О.С. Істер, О.В. Єргіна

АЛГЕБРА
І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

10



УДК 512(075.3)
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(Наказ МОН України від 31.05.2018 № 551)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Увага!
Додаткові дидактичні матеріали для самопідготовки і самоконтролю, повторення, систематизації та узагальнення знань, а також повну версію відповідей до задач і вправ підручника розміщено на сайті видавництва «Генеза» www.geneza.ua

Істер О.С.
І-89 Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. — Київ : Генеза, 2018. — 448 с. : іл.
ISBN 978-966-11-0918-5.
УДК 512(075.3)

ISBN 978-966-11-0918-5

Шановні десятикласники та десятикласниці!

Протягом навчання в 10–11 класах ви будете опановувати курс «Алгебра і початки аналізу», у якому об’єднано матеріал кількох галузей математичної науки. Цей курс дасть вам змогу оволодіти такою системою знань з алгебри і початків аналізу та набути таких компетентностей, які будуть потрібні не тільки в повсякденному житті, а й у майбутній трудовій діяльності і яких буде достатньо для продовження навчання у вищих навчальних закладах.

У 10 класі велику увагу приділено перетворенню виразів, розв’язуванню рівнянь, нерівностей, ви також дізнаєтеся про нові важливі властивості функцій, значно розширите відомості з тригонометрії, почнете вивчати новий курс – *початки аналізу*.

Вивчення алгебри і початків аналізу потребуватиме від вас наполегливості та логіки мислення.

Розглянемо особливості підручника та роботи з ним. Для зручності матеріал підручника структуровано за допомогою розділів, параграфів, пунктів, рубрик. Кожен параграф містить теоретичний матеріал, зразки розв’язування задач і вправ, запитання до теоретичного матеріалу, завдання для класної і домашньої роботи, проектної діяльності тощо. Теоретичний матеріал підручника викладено простою, доступною мовою, проілюстровано малюнками та великою кількістю прикладів розв’язування задача.

Для зручності в підручнику використано такі умовні позначення:

! – важливий матеріал (означення, математичні твердження, властивості, алгоритми), який треба запам’ятати;

? – запитання і завдання до вивченого теоретичного матеріалу;

Т – теорема; Н – наслідки; ■ – закінчення доведення;

– «ключова» задача (задача, висновок якої використовують під час розв’язування інших задач);

1.2 – вправа для виконання у класі;

1.3 – вправа для виконання вдома.

Усі задачі і вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки **1** починаються вправи початкового рівня;

з позначки **2** починаються вправи середнього рівня;

з позначки **3** починаються вправи достатнього рівня;

з позначки **4** починаються вправи високого рівня.

Рубрика **«Розв’яжіть задачі та виконайте вправи»** містить значну кількість завдань для класної і домашньої роботи, усних вправ, практичних завдань, що відповідають темі параграфа та допоможуть добре її опрацювати. **«Вправи підвищеної складності»** допоможуть поглибити знання з алгебри і початків аналізу та сприятимуть підготовці до різноманітних математичних змагань. У рубриці **«Життєва математика»** зібрано задачі, пов’язані з економічною грамотністю і підприємливістю, екологічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, – усім тим, що знадобиться кожному в повсякденному житті. У рубриці **«Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»** пропонується виконати вправи, які допоможуть актуалізувати знання, потрібні для вивчення наступної теми. Рубрика **«Цікаві задачі для учнів неледачих»** містить нестандартні задачі, задачі математичних олімпіад різних країн світу, а також задачі, авторами яких є видатні математики.

Завітавши на сайт видавництва «Генеза» *www.geneza.ua*, ви зможете перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання, якщо виконаєте завдання **«Домашньої самостійної роботи»** та **«Завдання для перевірки знань»**. На сайті ви також знайдете повну версію відповідей до завдань підручника та тестові завдання з алгебри і початків аналізу, які не увійшли в цей підручник, але допоможуть систематизувати і узагальнити знання з предмета та готуватися до зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

У підручнику також подано багато цікавих фактів з історії становлення і розвитку математичної науки.

Бажаємо вам успіхів у навчанні!

Шановні вчительки та вчителі!

Сподіваємося, що підручник суттєво допоможе вам в організації процесу навчання учнів алгебри і початків аналізу. Авторський колектив намагався створити його таким, щоб він повною мірою реалізував мету державної програми з математики; сприяв формуванню в учнів наукового світогляду, усвідомленню математичних знань як невід'ємної складової загальної культури людини і необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві; допоміг оволодіти системою математичних знань, навичками та вміннями, потрібними в повсякденному житті та в майбутній професійній діяльності; забезпечив розвиток логічного мислення, інтуїції, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури; формував життєві компетентності, загальнолюдські цінності особистості, виховував національну самосвідомість.

Окрім традиційної структури (розділи, параграфи, пункти, рубрики) та поділу навчального матеріалу на теоретичну і практичну складові, підручник містить рубрику **«Життєва математика»**, що сприятиме реалізації наскрізних ліній програми з математики та допоможе формуванню в учнів предметних і ключових компетентностей. Диференційованість задач і вправ за чотирма рівнями складності, зміст рубрик **«Цікаві задачі для учнів неледачих»** і **«Вправи підвищеної складності»** допоможуть забезпечити особистісно орієнтований підхід до організації процесу навчання та сприятимуть формуванню позитивної мотивації учнів до вивчення алгебри і початків аналізу.

У підручник включено велику кількість задач і вправ. Крім того, на сайті видавництва «Генеза» *www.geneza.ua* розміщено додаткові завдання для повторення, систематизації та узагальнення навчального матеріалу до кожного розділу та повну версію відповідей до задач і вправ цього підручника.

Щасти вам у вашій нелегкій праці!

РОЗДІЛ 1 ФУНКЦІЇ, МНОГОЧЛЕНИ, РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ МИ...

- ***пригадаємо*** *деякі основні властивості функцій; графіки і властивості основних видів функцій; перетворення графіків функцій; відомості про рівняння та нерівності; поняття множини;*
- ***ознайомимося*** *з поняттями оборотної і оберненої функцій; теоремою Безу; методом математичної індукції;*
- ***навчимося*** *знаходити об'єднання та переріз множин; функцію, обернену до даної; розв'язувати рівняння за допомогою властивостей функцій; розв'язувати рівняння та нерівності з параметрами; застосовувати метод інтервалів; ділити многочлени.*

§ 1. МНОЖИНА. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

У цьому параграфі згадаємо відомі вам *числові множини* та розширимо саме поняття *множини*.

1. Числові множини. Множина дійсних чисел

Поняття числа є одним з основних у курсі математики. Уявлення про числа (натуральні, цілі, раціональні, ірраціональні) у людства складалися поступово, у процесі практичної діяльності. Усі вищезгадані види чисел вам траплялися у шкільному курсі математики. Нагадаємо основні види числових множин.

Через потребу в лічбі предметів з'явилися *натуральні числа*.

Числа 1, 2, 3, 4, 5, ... , які використовують для лічби предметів, називають *натуральними числами*.

Множину натуральних чисел позначають літерою N. Нагадаємо, що запис $2 \in N$ означає, що число 2 належить множині натуральних чисел, а запис $\frac{2}{3} \notin N$ означає, що число $\frac{2}{3}$ не належить множині натуральних чисел.

Уперше *від'ємні числа* з'явилися у Стародавньому Китаї приблизно 2100 років тому, там їх тлумачили як борг.

Числа n і $-n$ називають *протилежними*. Наприклад, протилежними є числа 5 і –5, –0,8 і 0,8.

Натуральні числа, протилежні їм числа та число 0 утворюють множину *цілих чисел*.

Множину цілих чисел позначають літерою Z.

Потреба у вимірюванні величин призвела до появи дробових чисел. Так, наприклад, довжина мотузки може становити 37 см, або $\frac{37}{100}$ м, або 0,37 м, а середня маса ящика з фруктами – 12,7 кг.

Цілі та дробові числа складають множину *раціональних чисел*.

Множину раціональних чисел позначають літерою Q. Нагадаємо, що *будь-яке раціональне число можна записати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m – ціле число, а n – натуральне.*

Наприклад, $10 = \frac{10}{1}$; $-2\frac{1}{3} = \frac{-7}{3}$; $0,8 = \frac{4}{5}$; $-3,17 = \frac{-317}{100}$.

Раціональне число можна також подати у вигляді десяткового дробу, для цього чисельник дробу треба поділити на його знаменник.

Наприклад, $\frac{5}{8} = 0,625$; $-\frac{7}{4} = -1,75$; $\frac{10}{33} = 0,303030... = 0,(30)$.

В останньому випадку отримали нескінченний періодичний дріб.

У практичній діяльності людини трапляються числа, які не є раціональними. Наприклад, гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника з катетом завдовжки 1 м дорівнює $\sqrt{2}$ м. Число $\sqrt{2}$ не можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$.

Числа, які не можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m – ціле число, а n – натуральне число, називають *ірраціональними числами*.

Нагадаємо, що *кожне ірраціональне число можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.*

Раціональні числа разом з ірраціональними утворюють множину *дійсних чисел*. Цю множину позначають літерою R.

Прикладами ірраціональних чисел є також числа $\sqrt{3}$, π, $-\sqrt{11}$ тощо. Наближені значення цих чисел (тобто округлені до деякого розряду) можна знаходити з певною точністю за допомогою калькулятора або комп'ютера:

$$\sqrt{3} \approx 1,7320508; \quad \pi \approx 3,1415926; \quad -\sqrt{11} \approx -3,3166248.$$

2. Поняття множини. Підмножина

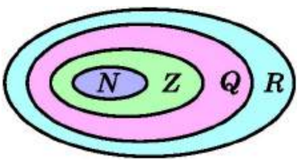
Крім множин, які ми розглянули вище, розглядають й інші множини. Поняття множини в більш широкому розумінні є одним з основних у математиці і тому не має означення. Під поняттям множини будемо розуміти певну сукупність об'єктів будь-якої природи, самі об'єкти при цьому називатимемо *елементами множини*.

Зазвичай множини позначають великими латинськими літерами. Якщо, наприклад, множина A складається із чисел 1, 2, 3, а множина B зі знаків * і !, то це записують так: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{*, !\}$. Числа 1, 2, 3 – елементи множини A, а знаки *, ! – елементи множини B. Той факт, що число 1 належить множині A, записують за допомогою відомого вам символа належності: $1 \in A$, а те, що число 1 не належить множині B, записують так: $1 \notin B$.

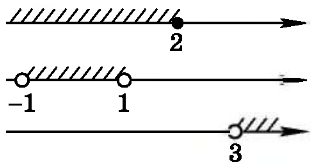
Множини, кількість елементів яких можна записати натуральним числом, називають *скінченними*. Множину, яка не містить жодного елемента, називають *порожньою множиною*. Її позначають символом $\varnothing$. Так, наприклад, порожньою є множина розв'язків рівняння $x^2 + 1 = 0$.

Множини, кількість елементів яких не можна записати натуральним числом і які не є порожніми, називають *нескінченними*. Нескінченними множинами є, наприклад, множини N, Z, Q, R. Також до нескінченних множин належать відомі вам *числові проміжки*. Наприклад, проміжки $(-\infty; 2]$, $(-1; 1)$, $(3; +\infty)$ є нескінченними множинами. Якщо кінці проміжка йому не належать, такий проміжок ще називають *інтервалом*.

Множини зручно зображувати за допомогою *діаграм* (*кругів*) *Ейлера–Венна* (мал. 1.1). Множини, що є числовими проміжками, зручно зображувати на числовій прямій штрихуванням (мал. 1.2).



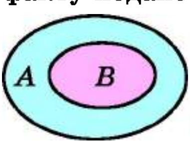
Мал. 1.1



Мал. 1.2

Якщо кожен елемент множини B є елементом множини A, то кажуть, що множина B є підмножиною множини A.

Записують це так: $B \subset A$. Схематичну ілюстрацію цього факту подано на малюнку 1.3.



Мал. 1.3

Приклад 1. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{4, 5\}$. Тоді множина B є підмножиною множини A: $B \subset A$.
Множина C не є підмножиною множини A, оскільки множина C містить елемент 5, якого не містить множина A.

Для вищезгаданих числових множин можна записати: $N \subset Z$, $Z \subset Q$, $N \subset Q$, $Z \subset R$ тощо.

Уважають, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

3. Операції над множинами

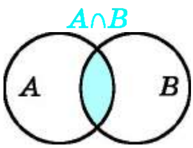
Розглянемо деякі операції (дії), які можна виконувати над множинами.

***Перерізом множин** A* **і** B **називають множину, що складається з усіх елементів, які належать як множині** A**, так і множині** B**.**

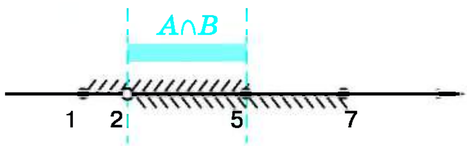
Переріз множин, як і переріз проміжків, записують за допомогою знака $\cap$.

Приклад 2. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{4, 5\}$. Тоді $A \cap B = \{2, 3\}$, $A \cap C = \varnothing$.

Переріз множин зручно зображувати на діаграмах (мал. 1.4), а для числових проміжків – на числовій прямій, наприклад, $[1; 5] \cap (2; 7] = (2; 5]$ (мал. 1.5).



Мал. 1.4



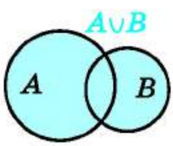
Мал. 1.5

***Об'єднанням множин** A* **і** B **називають множину, що складається з усіх елементів, які належать хоча б одній із множин** A **або** B**.**

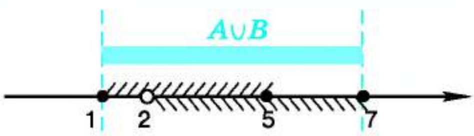
Об'єднання множин, як і об'єднання проміжків, записують за допомогою знака $\cup$.

Приклад 3. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{4, 5\}$. Тоді $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Об'єднання множин також зручно зображувати на діаграмах (мал. 1.6), а для числових проміжків – на числовій прямій, наприклад, $[1; 5] \cup (2; 7] = [1; 7]$ (мал. 1.7).



Мал. 1.6



Мал. 1.7

- Які числа утворюють множину натуральних чисел; цілих чисел; раціональних чисел; ірраціональних чисел? ● Які числа утворюють множину дійсних чисел? ● Як позначають множини натуральних, цілих, раціональних, дійсних чисел? ○ Що розуміють під поняттям множини? ○ Що називають елементами множини? ○ Коли множину *B* називають підмножиною множини *A*? ○ Які множини називають скінченними; нескінченними? ○ Що таке порожня множина? ○ Що називають перерізом множин? ○ Що називають об'єднанням множин?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

1.1. (*Усно*). Чи правильно, що:
1) 7 – натуральне число; 2) 3,2 – ціле число;
3) $\sqrt{8}$ – раціональне число; 4) $-\frac{8}{9}$ – дійсне число?

1.2. Із чисел $\sqrt{2}$; $-3\frac{1}{8}$; 49; –4,(2); π; –17; –8,9; 0; $-\sqrt{7}$; 0,444... випишіть:
1) натуральні числа; 2) цілі невід'ємні числа;
3) раціональні від'ємні числа; 4) ірраціональні числа.

1.3. Із чисел 5; $-\sqrt{3}$; –8; $\frac{7}{9}$; $\sqrt{19}$; 2,(8); $-\sqrt{15}$; $-2\frac{7}{11}$; 0; 3,148 випишіть:
1) натуральні числа; 2) цілі недодатні числа;
3) раціональні додатні числа; 4) ірраціональні числа.

1.4. (*Усно*). Наведіть приклади скінченних і нескінченних множин.

1.5. (*Усно*). Назвіть елементи множини:
1) $A = \{4, 7, 11, 18\}$; 2) $B = \{\triangle, \square, \bigcirc\}$.

Яким числовим множинам (N, Z, Q, R) належить число (1.6–1.7):

1.6. 1) 7,3; 2) $-5\frac{2}{9}$; 3) π; 4) 0;
5) $\sqrt{13}$; 6) –7; 7) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 8) 15?

1.7. 1) –9,3; 2) $5\frac{8}{9}$; 3) 7; 4) $\sqrt{18}$; 5) $\frac{\pi}{8}$; 6) 113,7?

Зобразіть на числовій прямій проміжок (1.8–1.9):

1.8. 1) $(-4; 2]$; 2) $[-1; +\infty)$; 3) $(-\infty; 4)$; 4) $[-2; 1]$.

1.9. 1) $[4; 6]$; 2) $(-\infty; 3]$; 3) $(2; +\infty)$; 4) $(3; 4)$.

1.10. З множини $\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{6}{5}, \frac{7}{3}, \frac{1}{8}\right\}$ виділіть підмножину:
1) правильних дробів; 2) неправильних дробів.

1.11. З множини {26, 37, 41, 38, 46} виділіть підмножину:
1) парних чисел; 2) непарних чисел.

1.12. (*Усно*). Чи правильно, що:

1) $8 \notin N$; 2) $-13 \in Z$; 3) $4 \notin Q$; 4) $48 \in R$;
5) $-4{,}2 \notin N$; 6) $-8{,}3 \in Q$; 7) $-4{,}8 \notin R$; 8) $\sqrt{7} \in Q$;
9) $\sqrt{1} \in N$; 10) $-\sqrt{15} \notin R$; 11) $\sqrt{\frac{9}{16}} \notin Z$; 12) $\sqrt{1\frac{7}{9}} \in Q$?

1.13. Множина C складається з усіх дійсних коренів рівняння $x^2 = -9$. Що це за множина?

1.14. Множина D складається з усіх дійсних коренів рівняння $|x| = -5$. Що це за множина?

1.15. (*Усно*). Наведіть приклади порожніх множин.

2 Чи правильне твердження (1.16–1.17):

1.16. 1) $N \subset Z$; 2) $Q \subset Z$; 3) $N \subset R$; 4) $R \subset Q$?

1.17. 1) $Q \subset N$; 2) $N \subset Q$; 3) $Z \subset R$; 4) $R \subset N$?

1.18. Чи правильне твердження, що $A \subset B$, якщо:
1) $A = \{2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$; 2) $A = \{\triangle, \square\}$, $B = \{\triangle, ?, !\}$;
3) $A = \varnothing$, $B = \{1, 2, 3\}$; 4) $A = \{a, v, b\}$, $B = \{a\}$;
5) A – множина простих чисел, B – множина цілих чисел;
6) A – множина натуральних чисел, B – множина натуральних чисел, кратних числу 10?

1.19. Чи правильне твердження, що $C \subset D$, якщо:
1) $C = \{1, 3\}$, $D = \{1, 5, 9\}$; 2) $C = \{\triangle, !\}$, $D = \{\triangle, \square, \bigcirc, !\}$;
3) $C = \{a, c, d\}$, $D = \varnothing$; 4) $C = \{\triangle, \bigcirc\}$, $D = \{\triangle, \bigcirc\}$?

1.20. Знайдіть об'єднання та переріз множин C і D, якщо:
1) $C = \{1, 2, 3\}$, $D = \{1, 2, 5\}$; 2) $C = \{*\}$, $D = \{*, \triangle\}$;
3) C – множина дільників числа 6, D – множина дільників числа 8;
4) C – множина коренів рівняння $x^2 = 4$, D – множина коренів рівняння $|x| = -1$.

1.21. Знайдіть об'єднання та переріз множин A і B, якщо:
1) $A = \{1, 3\}$, $B = \{3, 5\}$;
2) $A = \varnothing$, $B = \{\triangle, \square\}$;
3) A – множина простих чисел, менших за 10, B – множина непарних натуральних чисел, менших за 10;
4) A – множина коренів рівняння $|x| = 3$, B – множина коренів рівняння $2x + 6 = 0$.

1.22. Знайдіть найменше ціле число, що належить проміжку:
1) $(0; 5)$; 2) $\left(-\frac{1}{2}; 1\frac{3}{7}\right)$; 3) $[5; 11)$; 4) $(0{,}88; +\infty)$.

1.23. Знайдіть найбільше ціле число, що належить проміжку:
1) $(-3; 8)$; 2) $(-\infty; 3{,}7)$; 3) $[0; 16{,}3)$; 4) $(-5; 0{,}98)$.

1.24. Множина K складається з розв'язків рівняння $|x| - 4 = 0$, а множина L – з розв'язків рівняння $x^2 = 16$. Чи правильно, що множина K є підмножиною множини L? А навпаки?

1.25. Множина C складається з розв'язків рівняння $(x+1)(x-2)=0$, а множина D – з розв'язків рівняння $x^2-x-2=0$. Чи правильно, що множина C є підмножиною множини D? А навпаки?

3 **1.26.** Запишіть усі підмножини множини $A = \{0, 1, 2\}$, які містять:

1) один елемент; 2) два елементи; 3) три елементи.

1.27. Запишіть усі підмножини множини $B = \{\triangle, *, !\}$, які містять:

1) один елемент; 2) два елементи; 3) три елементи.

Зобразіть на числовій прямій дані проміжки та знайдіть їх переріз і об'єднання (**1.28–1.29**):

1.28. 1) $[-1; 4]$ і $(0; 7)$; 2) $[1; 2]$ і $(-1; 7)$;
3) $(-\infty; 3)$ і $(2; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0)$ і $(7; +\infty)$.

1.29. 1) $[4; 7]$ і $(5; 9]$; 2) $[0; 1)$ і $(-2; 3)$;
3) $[-2; 3)$ і $[4; 7)$; 4) $(-\infty; 0)$ і $[-1; +\infty)$.

1.30. Знайдіть переріз і об'єднання множин A і B, якщо:
1) $A \subset B$;
2) A – порожня множина, B – не є порожньою множиною.

1.31. Чи належить проміжку $(1{,}5; 3{,}4]$ число:
1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{11}$; 4) $\sqrt{13}$?

1.32. Чи належить проміжку $[1{,}8; 3{,}9)$ число:
1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{15}$; 4) $\sqrt{17}$?

4 **1.33.** Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера–Венна множини A, B і C, якщо $A \subset C$, $B \subset C$ і $C = A \cup B$.

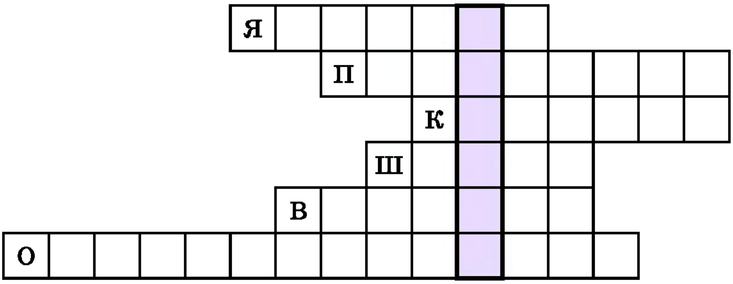
1.34. Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера–Венна множини A, B і C, якщо $B \subset A$, $C \subset A$ і $B \cap C \neq \varnothing$.

1.35. Нехай A – множина парних натуральних чисел, B – множина непарних натуральних чисел, C – множина натуральних чисел, кратних числу 3. Запишіть за допомогою даних множин та знаків операцій над множинами:
1) множину натуральних чисел;
2) множину натуральних чисел, кратних 6;
3) множину непарних натуральних чисел, кратних 3.

1.36. Нехай A – множина парних натуральних чисел, B – множина непарних натуральних чисел, C – множина натуральних чисел, кратних числу 5. Запишіть за допомогою даних множин та знаків операцій над множинами:
1) множину натуральних чисел, кратних 2 або 5;
2) множину натуральних чисел, кратних 10;
3) множину непарних натуральних чисел, кратних 5.

1.37. Система навігації, що вбудована у спинку крісла літака, інформує пасажира про те, що політ проходить на висоті 40 000 футів. Запишіть висоту польоту в кілометрах.

1.38. (*Видатні українські математики*). Запишіть по горизонталях прізвища видатних українських математиків, перші літери яких уже зазначено, та про більшість з яких вам відомо з підручників попередніх класів. Також, за потреби, можна використати додаткову літературу та Інтернет. Якщо прізвища запишете правильно, то у виділеному стовпчику отримаєте алгебраїчний термін, більше відомостей про який знайдете в наступних параграфах.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

1.39. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = 2x + 1$; 2) $y = \frac{x}{3}$; 3) $y = \frac{3}{x}$;

4) $y = \sqrt{x}$; 5) $y = \sqrt{x-2}$; 6) $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$.

1.40. Дано функцію $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Знайдіть:

1) $g(-2)$; 2) $g(1)$; 3) $g(0)$; 4) $g(3)$.

1.41. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \text{ якщо } x < 1, \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$ Знайдіть:

1) $f(-5)$; 2) $f(0)$; 3) $f(1)$; 4) $f(100)$.

1.42. Що є графіком функції:

1) $y = -4x + 5$; 2) $y = \frac{8}{x}$; 3) $y = 7$;

4) $y = 2x - x^2$; 5) $y = \sqrt{x}$; 6) $y = x^2 + 3x - 4$?

1.43. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2x - 1$; 2) $y = -\frac{6}{x}$;

3) $y = -3$; 4) $y = x^2 + 4x - 5$.

§ 2. ЧИСЛОВІ ФУНКЦІЇ. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ І МНОЖИНА ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ. СПОСОБИ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЙ

1. Поняття функції. Області визначення і множини значень

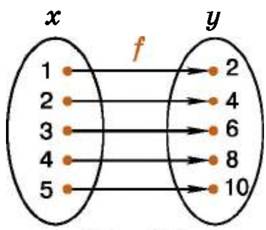
З поняттям *функції*, одним з найважливіших у сучасній математиці, ви ознайомилися в курсі алгебри.

У курсі алгебри і початків аналізу будемо використовувати таке означення числової функції:

! ***Числовою функцією*** **(або *функціональною залежністю*) називають таку залежність між двома змінними, при якій кожному значенню незалежної змінної з деякої множини відповідає за певним правилом єдине значення залежної змінної.**

Функції зазвичай позначають латинськими (іноді грецькими) літерами.

Приклад 1. Розглянемо функцію f, у якій кожному натуральному значенню x від 1 до 5 відповідає число y, що вдвічі більше за x. Цю відповідність зображено на малюнку 2.1. Стрілка вказує на число y, що відповідає числу x. Число y називають *значенням функції f у точці x* і позначають через $f(x)$ (на мал. 2.1 $f(3) = 6$).



Мал. 2.1

Нагадаємо, що незалежну змінну x ще називають *аргументом функції*, а залежну змінну y – *значенням функції* або *функцією* від цього аргументу.

! ***Областю визначення функції*** $y = f(x)$ **називають множину всіх значень, яких може набувати аргумент** x**.**

Позначають цю множину через $D(f)$. Якщо функцію задано у вигляді $y = f(x)$, наприклад $y = x^2 - 2x + 3$, то область визначення функції позначають через $D(y)$.

Наприклад, областю визначення функції, з прикладу 1, є множина, що складається із чисел 1, 2, 3, 4, 5, тобто $D(f) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а областю визначення функції $y = x^2 - 2x + 3$ є множина всіх дійсних чисел, що записують так: $D(y) = R$.

Приклад 2. Знайти область визначення функції:

1) $y = \dfrac{x-2}{x+1}$; 2) $y = \dfrac{5}{\sqrt{x-2}}$; 3) $y = \sqrt{x^2(-x-1)}$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Областю визначення функції є множина всіх значень x, для яких $x + 1 \neq 0$, тобто $x \neq -1$, оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю. Отже, $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. Це запис області визначення за допомогою об'єднання проміжків.

2) Областю визначення функції є множина всіх значень x, для яких $x - 2 > 0$, тобто $x > 2$, оскільки підкореневий вираз має бути невід'ємним і до того ж відмінним від нуля, бо корінь міститься у знаменнику дробу. Отже, $D(y) = (2; +\infty)$.
3) Областю визначення функції є множина всіх значень x, для яких $x^2(-x - 1) \geqslant 0$. Оскільки $x^2 \geqslant 0$ для всіх значень x і до того ж $x^2 = 0$. Якщо $x = 0$, то матимемо, що область визначення складається із числа 0 та розв'язків нерівності $-x - 1 \geqslant 0$, тобто $x \leqslant -1$. Отже, $D(y) = (-\infty; -1] \cup \{0\}$.

Відповідь. 1) $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$;
2) $D(y) = (2; +\infty)$; 3) $D(y) = (-\infty; -1] \cup \{0\}$.

! ***Множиною*** (або ***областю***) ***значень функції*** $y = f(x)$ **називають множину, що складається з усіх чисел** $f(x)$, **де** $x \in D(f)$.

Позначають цю множину через $E(f)$ або $E(y)$. Для прикладу 1 маємо: $E(f) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Приклад 3. Знайти множину значень функції:
1) $y = 3 - \sqrt{x}$; 2) $y = x^2 - 2x + 3$.

Розв'язання. 1) Вираз $\sqrt{x}$ може набувати будь-якого невід'ємного значення: $\sqrt{x} \geqslant 0$. Помножимо обидві частини цієї нерівності на -1 і змінимо при цьому знак нерівності на протилежний: $-\sqrt{x} \leqslant 0$. Додамо до обох частин нерівності число 3. Тоді $3 - \sqrt{x} \leqslant 3$, тобто $y \leqslant 3$. Отже, множиною значень функції $y = 3 - \sqrt{x}$ є проміжок $(-\infty; 3]$. Маємо: $E(y) = (-\infty; 3]$.
2) Виділивши квадрат двочлена, маємо $x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2$. Отже, $y = (x - 1)^2 + 2$. Оскільки $(x - 1)^2 \geqslant 0$, то $(x - 1)^2 + 2 \geqslant 2$. Маємо: $E(y) = [2; +\infty)$.

Відповідь. 1) $E(y) = (-\infty; 3]$; 2) $E(y) = [2; +\infty)$.

Як відомо, функції є математичними моделями реальних процесів і явищ навколишнього світу. Тому їх часто застосовують для розв'язування різноманітних прикладних задач у фізиці, економіці, біології тощо.

Приклад 4. Записати формулу для обчислення кінетичної енергії кульки масою 50 г. Чи задає ця формула функцію? Якщо так, указати її аргумент.

Розв'язання. З курсу фізики ви знаєте, що кінетичну енергію $E_к$ обчислюють за формулою $E_к = \frac{mv^2}{2}$. Маємо: $E_к = \frac{50v^2}{2}$; $E_к = 25v^2$. Отже, $E_к$ є функцією від аргументу v, де $v \geqslant 0$.

Приклад 5. Початкова вартість деякого обладнання складає 200 000 грн. Щороку вона зменшується на 5 %. 1) Записати функцію залежності вартості обладнання P від кількості років експлуатації t. 2) Використовуючи отриману функцію, знайти вартість обладнання через 4 роки.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Через рік вартість обладнання становитиме 100 % – 5 % = 95 % від початкової вартості, тобто 200 000 · 0,95. Через 2 роки – 200 000 · 0,95 · 0,95 = = 200 000 · $0{,}95^2$; відповідно через t років експлуатації – 200 000 · $0{,}95^t$. Маємо функцію $P(t) = 200\,000 \cdot 0{,}95^t$, де $t \in N$.

2) $P(4) = 200\,000 \cdot 0{,}95^4 = 162\,901{,}25$ (грн).

В і д п о в і д ь. 1) $P = 200\,000 \cdot 0{,}95^t$; 2) 162 901,25 грн.

Зауважимо, що функцію залежності вартості обладнання P від терміну експлуатації t можна було знайти і за формулою складних відсотків[1]:

$$P(t) = 200\,000 \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right)^t, \text{ тобто } P(t) = 200\,000 \cdot 0{,}95^t.$$

2. Способи задання функцій

Функцію можна задавати різними способами: формулою, таблицею, графіком, словесно.

Розглянемо ці способи.

У вищезгаданих прикладах: $y = x^2 - 2x + 3$, $y = \dfrac{x-2}{x+1}$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = 3 - \sqrt{x}$, $E_к = 25v^2$, $P = 200\,000 \cdot 0{,}95^t$ *функцію задано формулою*. Такий спосіб задання функції є досить зручним, адже дає змогу для довільного значення аргументу з області визначення функції обчислити відповідне значення функції та в багатьох випадках виконати обернену задачу.

Приклад 6. Функцію задано формулою $y = \dfrac{x+3}{x-5}$.

1) Знайти значення функції, якщо $x = 4$.
2) Порівняти $y(0)$ і $y(1)$.
3) Для якого значення аргументу значення функції дорівнює 0?

Р о з в ' я з а н н я. 1) $y(4) = \dfrac{4+3}{4-5} = \dfrac{7}{-1} = -7$.

2) $y(0) = \dfrac{0+3}{0-5} = -0{,}6$; $y(1) = \dfrac{1+3}{1-5} = -1$. Отже, $y(0) > y(1)$.

3) Оскільки $y = 0$, то $\dfrac{x+3}{x-5} = 0$, звідки $x = -3$.

В і д п о в і д ь. 1) $y(4) = -7$; 2) $y(0) > y(1)$; 3) $x = -3$.

Приклад 7. За допомогою функції

$$p(t) = \begin{cases} 2t + 20, \text{ якщо } 0 \leqslant t < 40, \\ 100, \text{ якщо } 40 \leqslant t < 50, \\ -\dfrac{4}{5}t + 140, \text{ якщо } 50 \leqslant t \leqslant 120 \end{cases}$$

[1] Формулу складних відсотків можна знайти в підручнику «Алгебра. 9 клас» («Генеза», 2017, автор Істер О.С., с. 178–179) або в інших математичних джерелах.

описано зміну температури води в баку (у °С) залежно від часу t (у хв). Знайти: 1) $p(10)$; 2) $p(45)$; 3) $p(80)$.

Розв'язання. 1) Оскільки $0 < 10 < 40$, то $p(10)$ обчислимо за формулою $p(t) = 2t + 20$, отже, $p(10) = 2 \cdot 10 + 20 = 40$.
2) Оскільки $40 < 45 < 50$, то $p(45) = 100$.
3) Оскільки $50 < 80 < 120$, обчислюємо $p(80)$ за формулою

$$p(t) = -\frac{4}{5}t + 140, \text{ отже, } p(80) = -\frac{4}{5} \cdot 80 + 140 = 76.$$

Відповідь. 1) 40; 2) 100; 3) 76.

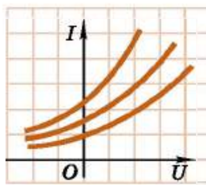
Інший важливий *спосіб задання функції – табличний*. Із таблиці можна безпосередньо знайти значення функції, але лише для скінченного набору значень аргументу.

Приклад 8. Щогодини, з дев'ятої до п'ятнадцятої, вимірювали атмосферний тиск і дані заносили в таблицю:

Час t, год	9	10	11	12	13	14	15
Атмосферний тиск p, мм. рт. ст.	754	755	757	755	754	753	754

Область визначення функції утворюють числа 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 (числа першого рядка таблиці), а множину значень – 753, 754, 755, 757 (числа другого рядка таблиці).

Часто функцію задають за допомогою графіка. *Графічний спосіб задання* досить зручний: він дає можливість унаочнити властивості функції. На малюнку 2.2 зображено вольт-амперні характеристики деяких електричних елементів, тобто залежність сили струму від напруги задано графічно. Цю залежність отримано не за допомогою формули, а експериментальним шляхом.

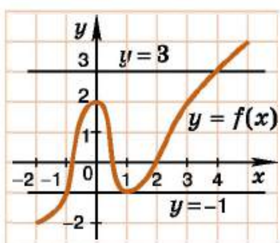


Мал. 2.2

На малюнку 2.3 зображено кардіограму людини. Кардіограму можна вважати графіком зміни електричного потенціалу на волокнах серцевого м'язу під час його скорочень.


Мал. 2.3

Приклад 9. За графіком функції $y = f(x)$ (мал. 2.4) знайти:
1) область визначення функції;
2) множину значень функції;
3) значення функції, якщо $x = -1$; 2;
4) значення аргументу, при яких значення функції дорівнює -1; 3.



Мал. 2.4

Розв'язання. 1) Спроектуємо всі точки графіка на вісь x. Отримаємо проміжок $[-2; 5]$, який є областю визначення функції: $D(y) = [-2; 5]$.

2) Спроектуємо всі точки графіка на вісь y. Отримаємо проміжок $[-2; 4]$, який є множиною значень функції: $E(y) = [-2; 4]$.
3) Знаходимо за графіком: $y(-1) = -1$; $y(2) = 0$.
4) Абсциси точок перетину прямої $y = -1$ з графіком функції $y = f(x)$ такі: $x = -1$ і $x = 1$, тому $f(x) = -1$, якщо $x = -1$ або $x = 1$.
Пряма $y = 3$ перетинає графік функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою 4. Отже, $f(x) = 3$, якщо $x = 4$.

Відповідь. 1) $D(y) = [-2; 5]$;
2) $E(y) = [-2; 4]$;
3) $y(-1) = -1$; $y(2) = 0$;
4) $f(x) = -1$, якщо $x = -1$ або $x = 1$;
$f(x) = 3$, якщо $x = 4$.

Словесне задання функції полягає в тому, що функціональну залежність задають словами. Наприклад: «кожному числу x ставимо у відповідність квадрат цього числа, зменшений на 10». Якщо сказане задати формулою, то вона матиме такий вигляд: $y = x^2 - 10$. Словесний спосіб задання функції використовують дуже рідко.

А ще раніше...

Функція – одне з найважливіших понять сучасної математики. Його появу у XVII ст. пов'язують із розвитком механіки та втіленням у життя ідей використання поняття змінної.

Так, французькі математики Рене Декарт (1596–1650) і П'єр Ферма (1601–1665) розглядали функцію як залежність ординати точки кривої від її абсциси.

Термін «функція» (від лат. functio – виконання, звершення) для назви залежностей уперше ввів Готфрід Лейбніц (1646–1716). Він пов'язував функцію з графіками.

Швейцарські математики Йоганн Бернуллі (1667–1748) та його видатний учень Леонард Ейлер (1707–1783) розглядали функцію як аналітичний вираз, тобто вираз, утворений із змінних чисел за допомогою тих чи інших аналітичних операцій (математичних дій). Функцію як залежність однієї змінної величини від іншої увів чеський математик Бернард Больцано (1781–1848).

Найзагальніше сучасне означення поняття функції запропонувала в середині XX ст. група математиків, яка виступила під псевдонімом Нікола Бурбакі.[1]

• Що називають числовою функцією? • Що називають областю визначення функції і що – множиною значень функції? • Назвіть способи задання функції, до кожного наведіть приклади.

---

[1] Детальніше про виникнення і розвиток учення про функції можна знайти в підручнику «Алгебра. 9 клас» («Генеза», автор О.С. Істер, с. 71–72) та в інших джерелах інформації з історії математики.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **2.1.** (*Усно*). Чи є функцією залежність:

1) $p = m^2 + p^2$; 2) $x - 2x^2 = y$; 3) $t = z + \sqrt{z^2 + 1}$;

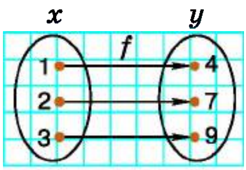
4) $x = \dfrac{a}{x + a}$; 5) $ab = a + b$; 6) $(p^2 - p^3) : 7 = c$?

Для кожної з функцій назвіть незалежну змінну (аргумент) та залежну (значення функції).

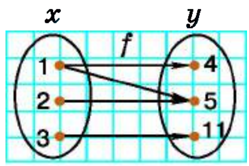
2.2. Для функції $f(x) = (x - 2)^3$ знайдіть $f(2)$; $f(1)$.

2.3. Для функції $g(x) = (x + 1)^2$ знайдіть $g(0)$; $g(-1)$.

2.4. (*Усно*). На малюнках 2.5 і 2.6 зображено відповідність між числами. Яка з них є функцією? Чому?



Мал. 2.5



Мал. 2.6

Знайдіть значення функції (2.5–2.6):

2.5. 1) $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x}$ у точках -1; 2; 0,1;

2) $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$ у точках 0; 2; -2.

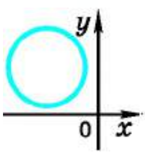
2.6. 1) $f(x) = \dfrac{2}{x - 1} + x$ у точках 0; -1; 0,8;

2) $g(x) = \sqrt{3x - x^2}$ у точках 0; 1; 3.

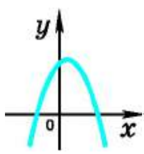
2.7. Дано функцію $f(x) = x^2 - 2x$. Порівняйте $f(0)$ і $f(2)$.

2.8. Дано функцію $g(x) = 2x - 7$. Порівняйте $g(3)$ і $g(0)$.

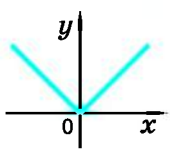
2 **2.9.** (*Усно*). Чи є графіками функцій $y = f(x)$ фігури, зображені на малюнках 2.7–2.10?



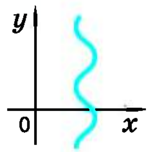
Мал. 2.7



Мал. 2.8



Мал. 2.9



Мал. 2.10

2.10. Функцію задано формулою $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$. Знайдіть:

1) $f(5)$; 2) значення x, при якому $f(x) = 3$.

2.11. Функцію задано формулою $g(x) = \dfrac{2-x}{2+x}$. Знайдіть:

1) $g(-1)$; 2) значення x, при якому $g(x) = -5$.

Знайдіть область визначення функції (2.12–2.13):

2.12. 1) $f(x) = x - 2$; 2) $f(x) = \dfrac{2-x}{3}$; 3) $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$; 5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x-3}$; 6) $f(x) = \sqrt{x+3}$.

2.13. 1) $f(x) = 2x - 1$; 2) $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$; 3) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$; 5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x-6}$; 6) $f(x) = \sqrt{x-2}$.

2.14. Функцію задано таблицею:

x	1	2	3	4	5	6
y	5	−1	0	5	0	4

Знайдіть: 1) значення функції, якщо x дорівнює 2; 5;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 4; 5;
3) область визначення функції;
4) множину значень функції.

2.15. Функцію задано таблицею:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	4	−1	0	5	3	4	0

Знайдіть: 1) значення функції, якщо x дорівнює −2; 3;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0; 4;
3) область визначення функції;
4) множину значень функції.

Запишіть формулу функції, яку задано словами (2.16–2.17):

2.16. 1) кожному числу x ставимо у відповідність його квадрат, збільшений на 5;

2) кожному невід'ємному числу x ставимо у відповідність його арифметичний квадратний корінь, зменшений у 2 рази.

2.17. 1) кожному числу x ставимо у відповідність його куб, зменшений на 3;

2) кожному числу x ставимо у відповідність його модуль, збільшений у 10 раз.

2.18. Під час вільного падіння тіло долає шлях, який обчислюється за формулою $s = \dfrac{1}{2}gt^2$, де t – час у секундах, $g \approx 10$ м/с^2. Побудуйте схематично графік цієї функції. Який шлях подолає тіло за 1 с? За який час тіло подолає 20 м?

3 Знайдіть область визначення функції (2.19–2.20):

2.19. 1) $f(x) = \frac{4}{|x| - 5}$; 2) $f(x) = \frac{5}{3 + |x|}$;

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$; 4) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 3x} + \frac{1}{x - 1}$;

5) $f(x) = \frac{\sqrt{x + 1}}{x^2 + x - 2}$; 6) $f(x) = \frac{3}{1 - \sqrt{x}}$;

7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x - 5}$; 8) $f(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{-x}$;

9) $f(x) = \sqrt{x - 2} + \frac{1}{x^2 - 3x}$.

2.20. 1) $f(x) = \frac{3}{7 - |x|}$; 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$;

3) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{5x}{x^2 - x - 2}$; 4) $f(x) = \frac{\sqrt{x + 3}}{x^2 + 2x - 8}$;

5) $f(x) = \frac{1}{2 - x} + \sqrt{x}$; 6) $f(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x}$.

2.21. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, \text{ якщо } x < 1, \\ x - 3, \text{ якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$ Знайдіть $f(-2)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(-3)$.

2.22. Дано функцію $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ x + 5, \text{ якщо } x > -1. \end{cases}$ Знайдіть $g(-3)$; $g(-1)$; $g(0)$; $g(2)$.

2.23. На малюнках 2.11–2.14 функції задано графіком. Для кожної функції вкажіть:

1) область визначення; 2) множину значень;
3) координати точок перетину з осями координат.

2.24. На малюнках 2.15–2.18 функції задано графіком. Для кожної функції вкажіть:

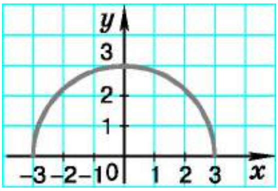
1) область визначення; 2) множину значень;
3) координати точок перетину з осями координат.

2.25. Побудуйте графік деякої функції $y = g(x)$, область визначення і множина значень якої відповідно проміжки $[-2; 3]$ та $[-4; 2]$.

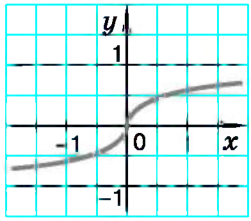
2.26. Побудуйте графік деякої функції $y = f(x)$, область визначення якої – проміжок $[0; 5]$, а множина значень – проміжок $[-3; 3]$.

2.27. Наведіть приклад функції, областю визначення якої є:

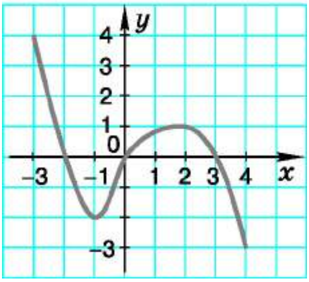
1) множина всіх дійсних чисел;
2) множина всіх дійсних чисел, крім числа 2;
3) множина всіх дійсних чисел, крім чисел 1 і –3;
4) множина всіх дійсних чисел, які більші за 4 або рівні йому.



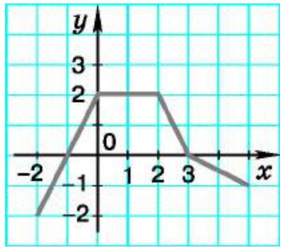
Мал. 2.11



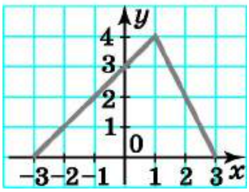
Мал. 2.12



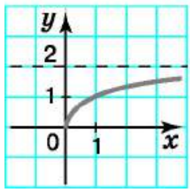
Мал. 2.13



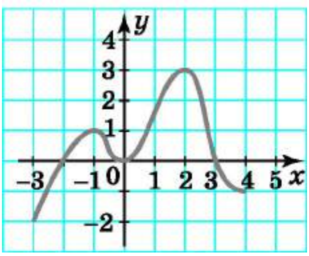
Мал. 2.14



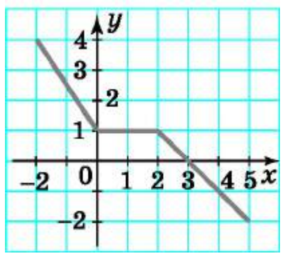
Мал. 2.15



Мал. 2.16



Мал. 2.17



Мал. 2.18

Знайдіть множину значень функції (2.28–2.29):

2.28. 1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = x^2 - 3$; 3) $f(x) = x^2 + 4$;

4) $f(x) = \sqrt{x}$; 5) $f(x) = \sqrt{x} - 2$; 6) $f(x) = \sqrt{x} + 3$.

2.29. 1) $f(x) = |x|$; 2) $f(x) = |x| + 5$; 3) $f(x) = |x| - 3$.

4 **2.30.** Наведіть приклад функції, множиною значень якої є проміжок:

1) $[2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 3]$.

Знайдіть область визначення функції (2.31–2.32):

2.31. 1) $y = \dfrac{\sqrt{x + 2 - x^2}}{x^2 - 1}$; 2) $y = \dfrac{10}{\sqrt{16 - x^2}} + \dfrac{1}{x^2 - 4}$;

3) $y = \sqrt{(x-1)^2(x-2)}$; 4) $y = \sqrt{|2 - x|(-x - 1)}$.

2.32. 1) $y = \dfrac{\sqrt{x - x^2 + 6}}{4 - x^2}$; 2) $y = \dfrac{17}{\sqrt{x^2 - 4}} + \dfrac{1}{9 - x^2}$;

3) $y = \sqrt{x^2(x - 7)}$; 4) $y = \sqrt{|x + 3|\,x}$.

Знайдіть множину значень функції (2.33–2.34):

2.33. 1) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$; 2) $f(x) = \sqrt{-(x-1)^2}$;

3) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; 4) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$;

5) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} - 2$; 6) $f(x) = x^2 - 6x$;

7) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + 4$; 8) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$.

2.34. 1) $f(x) = \sqrt{-x^2}$; 2) $f(x) = \dfrac{6}{x^2 + 1}$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 1$; 4) $f(x) = x^2 + 8x - 11$.

2.35. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = \dfrac{x^4 - 4x^3 + 8x - 32}{x^2 - 2x - 8}$; 2) $y = 1 - \sqrt{9 - \sqrt{2x^2 + 6\sqrt{2}x + 9}}$.

2.36. Пляшечка шампуню коштує 40 грн. Яку найбільшу кількість таких пляшечок можна придбати на 170 грн під час акції, коли на цей шампунь діє знижка 25 %?

2.37. (*І. Ньютон, «Універсальна арифметика», 1707 р.*) Скоротіть дріб:

$$\frac{6a^5 + 15a^4b - 4a^3c^2 - 10a^2bc^2}{9a^3b + 27a^2bc - 6abc^2 - 18bc^3}.$$

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

2.38. Побудуйте схематично графік функції та знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання функції:

1) $y = x + 3$; 2) $y = 5 - 3x$; 3) $y = x^2$;

4) $y = \sqrt{x}$; 5) $y = \dfrac{8}{x}$; 6) $y = -\dfrac{10}{x}$.

2.39. Дано $f(x) = x^4$. Порівняйте:

1) $f(-2)$ і $f(2)$; 2) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ і $f\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Чи можна дійти висновку, що для будь-якого значення x справджується рівність $f(-x) = f(x)$?

2.40. Дано $g(x) = x^3$. Порівняйте:

1) $g(3)$ і $-g(-3)$; 2) $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ і $-g\left(\frac{1}{2}\right)$.

Чи можна дійти висновку, що для будь-якого значення x справджується рівність $g(-x) = -g(x)$?

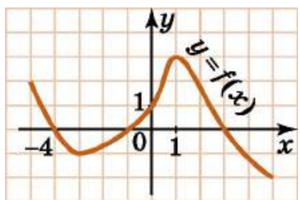
§ 3. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ

У цьому параграфі розглянемо основні властивості функцій.

1. Нулі та проміжки знакосталості функції

На малюнку 3.1 зображено графік функції $y = f(x)$, яка визначена на проміжку $[-5; 5]$. Якщо $x = -4$, або $x = -1$, або $x = 3$, то значення функції дорівнює нулю, тобто $f(-4) = f(-1) = f(3) = 0$. Нагадаємо, що такі значення аргументу називають *нулями функції*.

Значення аргументу x, при яких значення функції $y = f(x)$ дорівнюють нулю, називають *нулями функції*.



Мал. 3.1

Щоб знайти нулі функції $y = f(x)$, треба розв'язати рівняння $f(x) = 0$.

Приклад 1. Знайти нулі функції $y = x^2 + 2x - 8$.

Розв'язання. Маємо рівняння: $x^2 + 2x - 8 = 0$, корені якого $x_1 = 2$, $x_2 = -4$ – нулі функції.

Відповідь. 2; –4.

Нулі функції $y = f(x)$ (мал. 3.1) розбивають її область визначення $[-5; 5]$ на проміжки $[-5; -4)$, $(-4; -1)$, $(-1; 3)$, $(3; 5]$. Для значень x із проміжків $[-5; -4)$ і $(-1; 3)$ точки графіка лежать вище від осі абсцис, а для значень x із проміжків $(-4; -1)$ і $(3; 5]$ – нижче від осі абсцис. Отже, на проміжках $[-5; -4)$ і $(-1; 3)$ функція набуває додатних значень ($f(x) > 0$), а на проміжках $(-4; -1)$ і $(3; 5]$ – від'ємних значень ($f(x) < 0$).

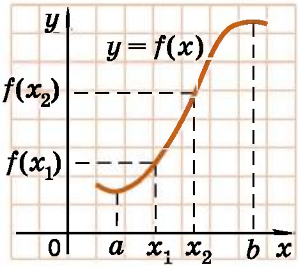
Проміжок, на якому функція зберігає знак, називають *проміжком знакосталості функції*.

Проміжки $[-5; -4)$, $(-4; -1)$, $(-1; 3)$, $(3; 5]$ є проміжками знакосталості функції $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 3.1.

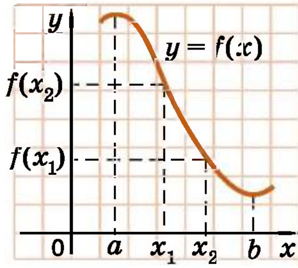
2. *Проміжки зростання, спадання, сталості функції*

Функцію $y = f(x)$ називають *зростаючою* на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає більше значення функції.

Інакше кажучи, функцію $y = f(x)$ називають зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких x_1 і x_2 із цього проміжку, таких, що $x_2 > x_1$, справджується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$. На малюнку 3.2 зображено графік функції $y = f(x)$, яка зростає на проміжку $[a; b]$, при цьому проміжок $[a; b]$ називають *проміжком зростання функції.*



Мал. 3.2



Мал. 3.3

Функцію $y = f(x)$ називають *спадною* на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає менше значення функції.

Тобто функцію $y = f(x)$ називають спадною на деякому проміжку, якщо для будь-яких x_1 і x_2 із цього проміжку, таких, що $x_2 > x_1$, справджується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$. На малюнку 3.3 зображено графік функції $y = f(x)$, яка спадає на проміжку $[a; b]$, при цьому проміжок $[a; b]$ називають *проміжком спадання функції.*

Легко побачити, що графік зростаючої на деякому проміжку функції під час руху вздовж графіка зліва направо (тобто в напрямі зростання аргументу x) «прямує вгору» («зростає»), а графік спадної функції – «прямує вниз» («спадає»).

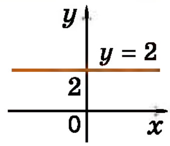
Функцію $y = f(x)$ називають *монотонною* на деякому проміжку, якщо вона на цьому проміжку або зростає, або спадає.

На кожному з малюнків 3.2 і 3.3 функція $y = f(x)$ є монотонною на проміжку $[a; b]$, при цьому проміжок $[a; b]$ називають *проміжком монотонності функції.*

Приклад 2. Розглянемо функцію $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 3.1. На проміжку $[-3; 1]$ функція $f(x)$ зростає, а на проміжках $[-5; -3]$ і $[1; 5]$ – спадає.

Функцію $y = f(x)$ називають *сталою* на деякому проміжку, якщо для будь-яких значень аргументу x_1 і x_2 із цього проміжку $f(x_1) = f(x_2)$.

Наприклад, функція $y = 2$ стала на проміжку $(-\infty;\ +\infty)$. Її графік – пряма, паралельна осі абсцис (мал. 3.4).



Мал. 3.4

Приклад 3. На проміжку $[-2;\ 1]$ розглянемо функцію $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$. На даному проміжку $x + 2 \geqslant 0$, а $x - 1 \leqslant 0$, тому $|x + 2| = x + 2$, $|x - 1| = -(x - 1)$. Тоді $f(x) = x + 2 - (x - 1) = 3$. Отже, на проміжку $[-2;\ 1]$ функція $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$ є сталою.

2. Парність і непарність функцій

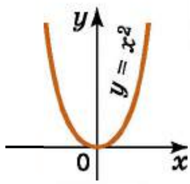
Область визначення функції $y = f(x)$ будемо називати *симетричною відносно нуля*, якщо разом з кожним числом x область визначення функції містить також і число $(-x)$. Серед функцій, область визначення яких симетрична відносно нуля, розрізняють парні та непарні функції.

Функцію $y = f(x)$ називають *парною*, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного x з області визначення справджується рівність: $f(-x) = f(x)$.

Приклад 4. Дослідити на парність функцію $f(x) = x^2$.

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; +\infty)$, тобто область визначення функції симетрична відносно нуля. Крім того, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Отже, функція $f(x) = x^2$ – парна.

Відповідь. Парна.



Мал. 3.5

На малюнку 3.5 схематично зображено графік функції $y = x^2$. Він є симетричним відносно осі y. Узагалі,

графік будь-якої парної функції симетричний відносно осі ординат.

Справді, коли функція $y = f(x)$ – парна, то будь-яким протилежним значенням аргументу x і $-x$ відповідає одне й те саме значення функції y, а точки $(x;\ y)$ і $(-x;\ y)$, як відомо, симетричні відносно осі ординат.

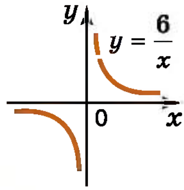
Функцію $y = f(x)$ називають *непарною*, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного x з області визначення справджується рівність: $f(-x) = -f(x)$.

Приклад 5. Дослідити на парність функцію $f(x) = \dfrac{6}{x}$.

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Область визначення симетрична відносно нуля. Крім того, $f(-x) = \dfrac{6}{-x} = -\dfrac{6}{x} = -f(x)$.

Отже, функція $f(x) = \frac{6}{x}$ – непарна.

Відповідь. Непарна.



Мал. 3.6

На малюнку 3.6 схематично зображено графік функції $y = \frac{6}{x}$. Він є симетричним відносно початку координат. Узагалі,

графік будь-якої непарної функції симетричний відносно початку координат.

Справді, коли функція $y = f(x)$ – непарна, то будь-яким протилежним значенням аргументу x і $-x$ відповідають протилежні значення функції y і $-y$, а точки $(x; y)$ і $(-x; -y)$, як відомо, – симетричні відносно початку координат.

Якщо область визначення функції $y = f(x)$ не є симетричною відносно нуля або не виконується жодна з рівностей $f(-x) = f(x)$ і $f(-x) = -f(x)$, то кажуть, що функція $y = f(x)$ є *ні парною, ні непарною*.

Приклад 6. Дослідити на парність функцію:

$$1)\ f(x) = \frac{1}{x-1}; \qquad 2)\ f(x) = x^2 + x.$$

Розв'язання. 1) $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Область визначення функції не є симетричною відносно нуля, оскільки $-1 \in D(f)$, а $1 \notin D(f)$. Тому функція є ні парною, ні непарною.

2) $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Область визначення симетрична відносно нуля. Знайдемо $f(-x)$. Маємо:

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x = -(-x^2 + x).$$

Оскільки $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$, то функція – ні парна, ні непарна.

Відповідь. 1) Ні парна, ні непарна; 2) ні парна, ні непарна.

Приклад 7. Функція $f(x) = (\sqrt{2}+1)^x + (\sqrt{2}-1)^x$ визначена на множині цілих чисел. Дослідити цю функцію на парність.

Розв'язання. $D(f) = Z$ (за умовою). Область визначення функції є симетричною відносно нуля. Зауважимо, що

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$, а тому

$$\sqrt{2}+1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}-1)^{-1} \text{ і } \sqrt{2}-1 = (\sqrt{2}+1)^{-1}.$$

Знайдемо $f(-x)$. Маємо:

$$f(-x) = (\sqrt{2}+1)^{-x} + (\sqrt{2}-1)^{-x} = (\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x = f(x).$$

Отже, функція – парна.

Відповідь. Парна.

3. Найбільше та найменше значення функції

Якщо графік функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$ є неперервною лінією, то у множині значень функції є найбільше число і найменше число. Ці числа називають ***найбільшим і найменшим значеннями функції*** на проміжку $[a; b]$.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 3.1. Ця функція визначена на проміжку $[-5; 5]$.

Найбільшим значенням цієї функції на даному проміжку є число 3, якого фунція досягає при $x = 1$.

Найменшим значенням функції $y = f(x)$ на проміжку $[-5; 5]$ є число -2, якого фунція досягає при $x = 5$.

Записують це так: $\max\limits_{[-5;\,5]} f(x) = f(1) = 3;$ $\min\limits_{[-5;\,5]} f(x) = f(5) = -2.$

Найбільше і найменше значення функції пов'язані з її множиною значень. Якщо найбільшим значенням деякої неперервної функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$ є число M, а найменшим – число m, то множиною значень функції на проміжку $[a; b]$ буде проміжок $[m; M]$.

Так, множиною значень функції $y = f(x)$, зображеної на малюнку 3.1 і визначеної на проміжку $[-5; 5]$, є проміжок $[-2; 3]$.

Приклад 8. При якому значенні c найменше значення функції $f(x) = x^2 - 4x + c$ дорівнює 19?

Р о з в ' я з а н н я. Перетворимо даний у формулі функції квадратний тричлен:

$$x^2 - 4x + c = x^2 - 4x + 4 - 4 + c = (x-2)^2 + c - 4.$$

Отже, $f(x) = (x-2)^2 + c - 4$. Оскільки $(x-2)^2 \geqslant 0$, то найменшим значенням функції $f(x)$ буде число $c - 4$. За умовою $c - 4 = 19$. Отже, $c = 23$.

В і д п о в і д ь. $c = 23$.

- Що називають нулями функції? - Що називають проміжками знакосталості функції? - Яку функцію називають зростаючою на деякому проміжку, а яку – спадною? - Яку функцію називають монотонною на деякому проміжку? - Яку функцію називають сталою на деякому проміжку? - Яку область визначення функції називають симетричною відносно нуля? - Яку функцію називають парною, а яку – непарною? - Яку властивість має графік парної функції, а яку – графік непарної? - Що розуміють під найбільшим і найменшим значенням функції на проміжку $[a; b]$? - Як найбільше і найменше значення функції пов'язані з множиною значень функції?

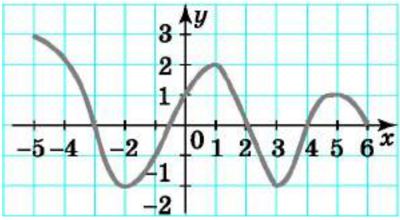
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

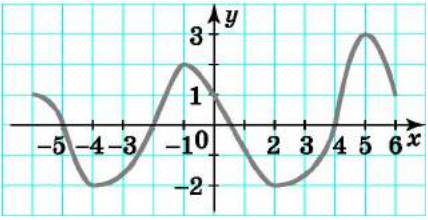
3.1. На малюнку 3.7 зображено графік функції, визначеної на проміжку $[-5; 6]$. Знайдіть нулі функції та проміжки знакосталості.

3.2. На малюнку 3.8 зображено графік функції, визначеної на проміжку [−6; 6]. Знайдіть нулі функції та проміжки знакосталості.

3.3. На малюнку 3.7 зображено графік функції, визначеної на проміжку [−5; 6]. Знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання функції, найбільше і найменше значення функції, множину значень функції.



Мал. 3.7



Мал. 3.8

3.4. На малюнку 3.8 зображено графік функції, визначеної на проміжку [−6; 6]. Знайдіть проміжки зростання та проміжки спадання функції, найбільше та найменше значення функції, множину значень функції.

3.5. Відомо, що $f(-1) = 7$. Знайдіть $f(1)$, якщо функція $f(x)$:
1) парна; 2) непарна.

3.6. Відомо, що $g(2) = 9$. Знайдіть $g(-2)$, якщо функція $g(x)$:
1) парна; 2) непарна.

3.7. (*Усно*). Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = f(x)$, якщо множиною її значень є проміжок [−2; 7].

2

3.8. Функція f зростає на проміжку [−3; 3]. Порівняйте:
1) $f(1{,}2)$ і $f(1)$; 2) $f\left(-\frac{1}{5}\right)$ і $f\left(-\frac{1}{4}\right)$.

3.9. Функція g спадає на проміжку [0; 4]. Порівняйте:
1) $g(2)$ і $g(2{,}1)$; 2) $g\left(\frac{1}{7}\right)$ і $g\left(\frac{1}{8}\right)$.

3.10. Функцію $f(x)$ задано на проміжку [−4; 4], причому на проміжку [−4; 0] вона зростає, а на проміжку [0; 4] – спадає. Порівняйте: 1) $f(-3)$ і $f(-1)$; 2) $f(1)$ і $f(3{,}2)$.

3.11. Побудуйте схематично графік функції $f(x)$, якщо:
1) $f(x)$ зростає на проміжку [−5; 1] і спадає на проміжку [1; 4];
2) $f(x)$ спадає на проміжках [−6; −2] та [2; 6] і зростає на проміжку [−2; 2].

3.12. Побудуйте схематично графік функції $g(x)$, якщо:
1) $g(x)$ спадає на проміжку [0; 3] і зростає на проміжку [3; 7];
2) $g(x)$ зростає на проміжках [−5; −1] та [2; 5] і спадає на проміжку [−1; 2].

Знайдіть нулі функції (якщо вони існують) (3.13–3.14):

3.13. 1) $y = 3(x^2 + 4)$; 2) $y = \sqrt{x-3}$;

3) $y = \sqrt{1 - x^2}$; 4) $y = \sqrt{2 + x^2}$.

3.14. 1) $y = 4(1 + x^2)$; 2) $y = \sqrt{2 - x}$;

3) $y = \sqrt{x^2 - 9}$; 4) $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

Доведіть, що парною є функція (3.15–3.16):

3.15. 1) $f(x) = x^6$; 2) $f(x) = x^2 - 2$;

3) $f(x) = 3|x|$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

3.16. 1) $f(x) = x^4$; 2) $f(x) = |x| - 3$;

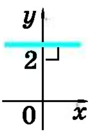
3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Доведіть, що непарною є функція (3.17–3.18):

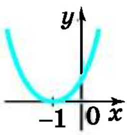
3.17. 1) $f(x) = x^5$; 2) $f(x) = \dfrac{4}{x}$; 3) $f(x) = x^3 + x$; 4) $f(x) = -\dfrac{1}{x^7}$.

3.18. 1) $f(x) = x$; 2) $f(x) = -\dfrac{5}{x}$; 3) $f(x) = x - x^5$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

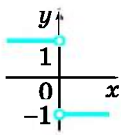
3.19. (*Усно*). На малюнках 3.9–3.14 зображено графіки функцій. Які із цих функцій є парними, які – непарними, а які – ні парними, ні непарними?



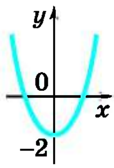
Мал. 3.9



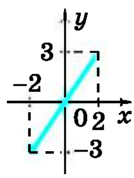
Мал. 3.10



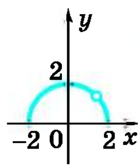
Мал. 3.11



Мал. 3.12



Мал. 3.13



Мал. 3.14

Знайдіть нулі функції (3.20–3.21):

3.20. 1) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$; 2) $y = \dfrac{|x| - 1}{x - 1}$.

3.21. 1) $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$; 2) $y = \dfrac{2 - |x|}{2 + x}$.

Знайдіть проміжки знакосталості функції (3.22–3.23):

3.22. 1) $y = 2x - 6$; 2) $y = 7 - 5x$.

3.23. 1) $y = 3x - 12$; 2) $y = 8 - 10x$.

3 **3.24.** Доведіть, що функція $y = |x + 2| - |x - 2|$ є сталою на проміжках $(-\infty; -2]$ і $[2; +\infty)$.

Дослідіть функцію на парність (**3.25–3.26**):

3.25. 1) $f(x) = 5 + x$; 2) $f(x) = x^2 - 5$;

3) $f(x) = 7x^5$; 4) $f(x) = x^4 - x$;

5) $f(x) = 6x^6 + 8x^8$; 6) $f(x) = x^3 + x$;

7) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$; 8) $f(x) = \dfrac{x^2-5}{x^4+3}$;

9) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$; 10) $f(x) = x^2 + 2x - 3$;

11) $f(x) = (x+2)(x-3) + x$; 12) $f(x) = (x-2)^2 - (x+2)^2$.

3.26. 1) $f(x) = -7x$; 2) $f(x) = 3x^2 + 2x$;

3) $f(x) = 2x^8 - x^2$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$;

5) $f(x) = \dfrac{x}{x^4+1}$; 6) $f(x) = \dfrac{2+x}{x}$;

7) $f(x) = \sqrt{x^2+3}$; 8) $f(x) = x^2 - 4x$;

9) $f(x) = (x-3)(x+5) - 2x$.

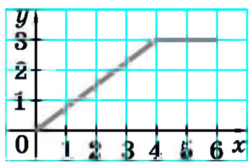
3.27. Чи є функція $f(x) = x^4$ парною, якщо її областю визначення є множина:

1) $[-2; 1]$; 2) $[-4; 4]$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$?

3.28. Чи є функція $g(x) = x^3$ непарною, якщо її областю визначення є множина:

1) $[-1; 1]$; 2) $[-1; 2]$;

3) $(-\infty; -1]$; 4) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$?



Мал. 3.15

3.29. Функцію $y = f(x)$ задано на проміжку $[-6; 6]$. Частину її графіка зображено на малюнку 3.15. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона:

1) парна; 2) непарна.

3.30. Для функції $y = f(x)$, визначеної на R, знайдіть найбільше та найменше значення (якщо вони існують):

1) $f(x) = |x| + 2$; 2) $f(x) = 3 - x^4$.

3.31. Для функції $y = g(x)$, визначеної на R, знайдіть найбільше та найменше значення (якщо вони існують):

1) $f(x) = \sqrt{x} + 1$; 2) $f(x) = 2 - x^2$.

Скільки нулів має функція (**3.32–3.33**):

3.32. 1) $f(x) = x(x^2-2)\sqrt{|x|+1}$; 2) $f(x) = (x^2-1)\sqrt{|x|-2}$?

3.33. 1) $f(x) = x(x^2-4)\sqrt{|x|-1}$; 2) $f(x) = (x^2-4)\sqrt{|x|+3}$?

3.34. При якому значенні c найбільше значення функції $y = -2x^2 + 8x + c$ дорівнює 3?

3.35. При якому значенні c найменше значення функції $y = 4x^2 + 16x + c$ дорівнює 1?

4 Дослідіть функцію на парність (3.36–3.37):

3.36. 1) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + 4x}$; 2) $f(x) = \dfrac{x^4 - x}{x}$;

3) $f(x) = |x - 2| + |x + 2|$; 4) $f(x) = |x - 1| - |x + 1|$.

3.37. 1) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + x^4}$; 2) $f(x) = \dfrac{x + x^6}{x}$;

3) $f(x) = |x + 7| - |x - 7|$; 4) $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$.

3.38. Функції $f(x)$ і $g(x)$ визначено на множині всіх дійсних чисел. Чи є функція $u(x)$ парною або непарною, якщо:

1) $u(x) = f^5(x) \cdot g(x)$, $f(x)$ – парна, $g(x)$ – непарна;

2) $u(x) = 4f(x) - 2g(x)$, $f(x)$ і $g(x)$ – парні;

3) $u(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)$ – непарна, $g(x)$ – парна;

4) $u(x) = f(x) \cdot g^2(x)$, $f(x)$ і $g(x)$ – непарні?

3.39. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x) = 2 - x^2$, якщо $x \in [-1; 3]$.

3.40. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x) = |x| - 1$, якщо $x \in [-2; 1]$.

3.41. Функцію $f(x) = (3 - 2\sqrt{2})^x - (3 + 2\sqrt{2})^x$ визначено на множині цілих чисел. Дослідіть цю функцію на парність.

3.42. Функцію $g(x) = (5 + 2\sqrt{6})^x + (5 - 2\sqrt{6})^x$ визначено на множині цілих чисел. Дослідіть цю функцію на парність.

3.43. Нехай $y = f(x)$ визначена на R. Доведіть, що функція $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ є парною, а $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ – непарною.

3.44. Доведіть, що будь-яку функцію, визначену для всіх x, можна подати у вигляді суми парної та непарної функцій.

3.45. Дослідіть функцію на парність:

1) $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x + 1} + \dfrac{|x + 2|}{x - 1}$;

2) $\varphi(x) = (x - 1)^{11}(x + 2)^7 + (x + 1)^{11}(x - 2)^7$.

3.46. Автівка таксі за місяць подолала 6000 км. Вартість 1 літра бензину – 22 грн. Середні витрати бензину складають 9 літрів на 100 км. Скільки коштів було витрачено на бензин для цієї автівки?

3.47. (*Київська міська олімпіада, 1985 р.*). Розв'яжіть рівняння:

$$x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots + x^{1998} + x^{2000} = 1000x.$$

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

3.48. Побудуйте графік функції:

1) $y = x^2$; 2) $y = x^2 + 2$; 3) $y = x^2 - 3$;

4) $y = \sqrt{x}$; 5) $y = \sqrt{x-2}$; 6) $y = \sqrt{x+1}$;

7) $y = |x|$; 8) $y = 2|x|$; 9) $y = \frac{1}{2}|x|$.

3.49. Побудуйте графіки функцій $f(x) = x^2$, якщо $x \geqslant 0$, та $g(x) = \sqrt{x}$. Чи симетричні ці графіки відносно прямої $y = x$?

§ 4. ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ ОСНОВНИХ ВИДІВ ФУНКЦІЙ. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ. ОБЕРНЕНА ФУНКЦІЯ

У цьому параграфі пригадаємо матеріал, відомий вам з попередніх класів: графіки та властивості основних видів функцій; побудову графіків за допомогою геометричних перетворень. Також ознайомимося з поняттям *оберненої функції*.

1. Графіки основних видів функцій

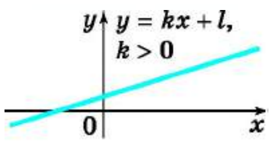
Графіком функції $y = f(x)$ **називають множину всіх точок** $(x; y)$ **координатної площини, у яких абсциси належать області визначення функції, а ординати обчислюють за формулою** $y = f(x)$.

З попередніх класів ми вже знаємо вигляд графіків функцій $y = kx + l$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$.

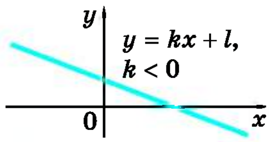
Функція $y = kx + l$

Функцію вигляду $y = kx + l$, де k і l – деякі числа, називають лінійною.

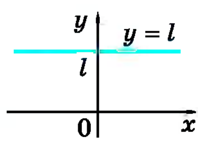
Графіком функції $y = kx + l$ є пряма (мал. 4.1–4.3).



Мал. 4.1



Мал. 4.2



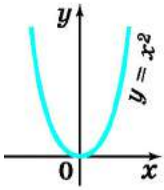
Мал. 4.3

Функція $y = x^2$

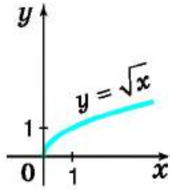
Графіком функції $y = x^2$ є парабола, гілки якої напрямлені вгору, а вершиною є точка (0; 0) (мал. 4.4).

Функція $y = \sqrt{x}$

Графіком функції $y = \sqrt{x}$ є гілка параболи, що лежить у I чверті координатної площини (мал. 4.5).



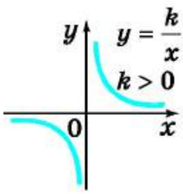
Мал. 4.4



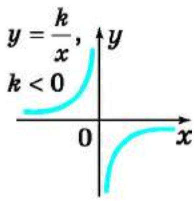
Мал. 4.5

Функція $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$

Графіком функції $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$ є гіпербола, гілки якої лежать у I і III чвертях, якщо $k > 0$ (мал. 4.6), і у II і IV чвертях, якщо $k < 0$ (мал. 4.7).



Мал. 4.6

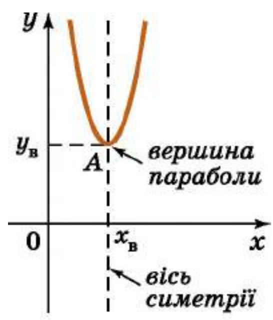


Мал. 4.7

Функція $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Графіком функції $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, є парабола з вершиною в точці $A(x_в; y_в)$ (мал. 4.8). Її можна побудувати в такий спосіб:

1) знайти координати вершини параболи: $x_в = -\frac{b}{2a}$, $y_в = y(x_в)$; якщо $a > 0$ – гілки параболи напрямлені вгору, якщо $a < 0$ – униз;
2) знайти ще кілька точок, що належать параболі (під час побудови можна використати симетрію параболи відносно прямої $x = x_в$);
3) сполучити отримані точки плавною лінією.

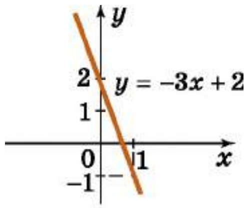


Мал. 4.8

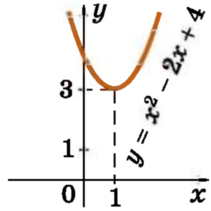
Приклад 1. Схематично побудувати графік функції та знайти її проміжки зростання і спадання:

1) $y = -3x + 2$; 2) $y = x^2 - 2x + 4$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) На малюнку 4.9 зображено графік функції $y = -3x + 2$. Це пряма, яку проведемо через точки (0; 2) і (1; −1). Функція спадає на проміжку $(-\infty; +\infty)$.



Мал. 4.9



Мал. 4.10

2) Графіком функції $y = x^2 - 2x + 4$ є парабола, гілки якої напрямлені вгору. Знайдемо координати вершини параболи: $x_в = -\dfrac{-2}{2 \cdot 1} = 1$, $y_в = 1 - 2 \cdot 1 + 4 = 3$. Графік функції схематично зображено на малюнку 4.10. Функція спадає на проміжку $(-\infty; 1]$ і зростає на проміжку $[1; +\infty)$.

В і д п о в і д ь. 1) Спадає на $(-\infty; +\infty)$; 2) спадає на $(-\infty; 1]$, зростає на $[1; +\infty)$.

2. Властивості основних видів функцій

Систематизуємо дані про властивості основних видів функцій у таблиці (с. 35).

3. Побудова графіків функцій за допомогою перетворень відомих графіків функцій

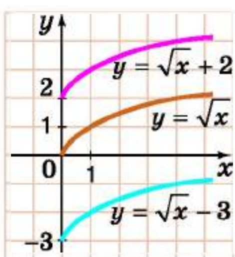
Нагадаємо, як за допомогою геометричних перетворень графіків функцій можна будувати графіки інших функцій.

Побудова графіка функції $y = f(x) \pm n$, де $n > 0$

Щоб побудувати графік функції $y = f(x) + n$, де $n > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі y на n одиниць вгору.

Щоб побудувати графік функції $y = f(x) - n$, де $n > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі y на n одиниць униз.

З а у в а ж е н н я. Замість того щоб переносити графік функції вгору або вниз, можна перенести вісь x на стільки ж одиниць у протилежний бік.



Мал. 4.11

Приклад 2. Побудувати графіки функцій

$$y = \sqrt{x} + 2 \text{ і } y = \sqrt{x} - 3.$$

Р о з в ' я з а н н я. Перетворимо графік функції $y = \sqrt{x}$. Графіки функцій $y = \sqrt{x} + 2$ і $y = \sqrt{x} - 3$ зображено на малюнку 4.11.

Властивість	$y = kx + l$				$y = \frac{k}{x}$		$y = x^2$	$y = \sqrt{x}$	$y = ax^2 + bx + c$	
	$k > 0$	$k < 0$	$k = 0,$ $l > 0$	$k = 0,$ $l < 0$	$k > 0$	$k < 0$			$a > 0$	$a < 0$
Область визначення	R	R	R	R	$x \neq 0$	$x \neq 0$	R	$x \geqslant 0$	R	R
Множина значень	R	R	$y = l$	$y = l$	$y \neq 0$	$y \neq 0$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$\left[y\left(-\frac{b}{2a}\right); +\infty\right)$	$\left(-\infty; y\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$
Нулі функції	$x = -\frac{l}{k}$	$x = -\frac{l}{k}$	–	–	–	–	$x = 0$	$x = 0$	корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$	
$y > 0$	$x > -\frac{l}{k}$	$x < -\frac{l}{k}$	$x \in R$	–	$x > 0$	$x < 0$	$x < 0$ або $x > 0$	$x > 0$	розв'язки нерівності $ax^2 + bx + c > 0$	
$y < 0$	$x < -\frac{l}{k}$	$x > -\frac{l}{k}$	–	$x \in R$	$x < 0$	$x > 0$	–	–	розв'язки нерівності $ax^2 + bx + c < 0$	
Проміжки зростання	$(-\infty; +\infty)$	–	функція є сталою		–	$(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$
Проміжки спадання	–	$(-\infty; +\infty)$			$(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$	–	$(-\infty; 0]$	–	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$	$\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$
Найбільше значення функції	–	–	l	l	–	–	–	–	–	$y\left(-\frac{b}{2a}\right)$
Найменше значення функції	–	–	l	l	–	–	0	0	$y\left(-\frac{b}{2a}\right)$	–
Парність, непарність	якщо $l \neq 0$, то ні парна, ні непарна; якщо $l = 0$, то непарна		парна		непарна		парна	ні парна, ні непарна	якщо $b \neq 0$, то ні парна, ні непарна; якщо $b = 0$, то парна	

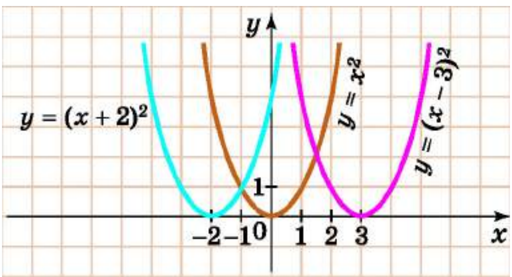
Побудова графіка функції $y = f(x \pm m)$, де $m > 0$

Щоб побудувати графік функції $y = f(x - m)$, де $m > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі x на m одиниць вправо; щоб побудувати графік функції $y = f(x + m)$, де $m > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі x на m одиниць вліво.

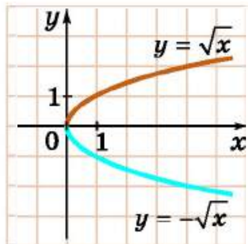
Зауваження. Замість того, щоб переносити графік функції вправо або вліво, можна перенести вісь y на стільки ж одиниць у протилежний бік.

Приклад 3. Побудувати графіки функцій $y = (x - 3)^2$ і $y = (x + 2)^2$.

Розв'язання. Перетворимо графік функції $y = x^2$. Графіки функцій $y = x^2$, $y = (x - 3)^2$ і $y = (x + 2)^2$ зображено на малюнку 4.12.



Мал. 4.12



Мал. 4.13

Побудова графіка функції $y = -f(x)$

Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі x.

Приклад 4. Побудувати графік функції $y = -\sqrt{x}$.

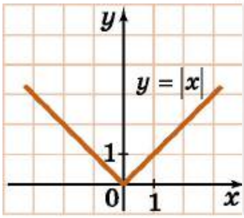
Розв'язання. Графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = -\sqrt{x}$ зображено на малюнку 4.13.

Побудова графіка функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$

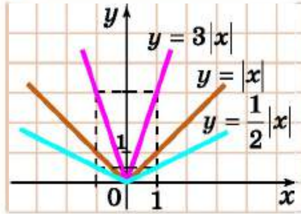
Щоб отримати графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$, треба графік функції $y = f(x)$ розтягнути від осі x у k разів, якщо $k > 1$, або стиснути його до осі x у $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$.

Приклад 5. Побудувати графіки функцій $y = 3|x|$ і $y = \frac{1}{2}|x|$.

Розв'язання. $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$ Графік функції $y = |x|$ зображено на малюнку 4.14. На малюнку 4.15 зображено графіки функцій $y = |x|$, $y = 3|x|$ і $y = \frac{1}{2}|x|$.



Мал. 4.14



Мал. 4.15

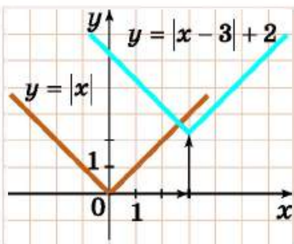
Виконуючи послідовно два і більше перетворень, можна будувати графіки функцій вигляду $y = f(x + m) + n$, $y = kf(x)$, де $k < 0$, і деяких інших.

Приклад 6. Побудувати графік функції $y = |x - 3| + 2$.

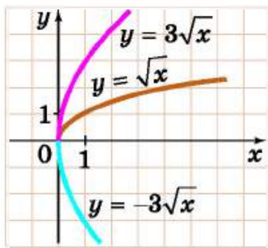
Розв'язання. Перенесемо графік функції $y = |x|$ уздовж осі x на 3 одиниці вправо, після чого – уздовж осі y на 2 одиниці вгору. Графік функції $y = |x - 3| + 2$ зображено на малюнку 4.16.

Приклад 7. Побудувати графік функції $y = -3\sqrt{x}$.

Розв'язання. Графік функції $y = \sqrt{x}$ розтягнемо втричі від осі x, отримаємо графік функції $y = 3\sqrt{x}$ (мал. 4.17). Графік функції $y = -3\sqrt{x}$ симетричний графіку функції $y = 3\sqrt{x}$ відносно осі x (мал. 4.17).



Мал. 4.16



Мал. 4.17

4. Обернена функція

Під час дослідження функцій ми неодноразово розв'язували задачу знаходження значення функції $f(x)$ для заданого значення аргументу x_0. Часто доводилося розв'язувати й обернену задачу: знаходити значення аргументу x, для якого функція набуває заданого значення y_0.

Приклад 8. Дано функцію $f(x) = 2x - 7$. Знайти значення аргументу, для якого значення функції дорівнює 3.

Розв'язання. Маємо: $3 = 2x - 7$, звідки $x = 5$.

Відповідь. 5.

Приклад 9. Дано функцію $f(x) = x^2 + 2$. Знайти значення аргументу, для якого значення функції дорівнює 11.

Розв'язання. За умовою: $11 = x^2 + 2$, тоді $x = 3$ або $x = -3$.

Відповідь. 3; −3.

Функцію, яка набуває кожного свого значення тільки в одній точці області визначення, називають *оборотною*.

Отже, функція $f(x) = 2x - 7$, яку ми розглянули у прикладі 8, є оборотною, а функція $f(x) = x^2 + 2$, яку ми розглянули у прикладі 9, не є оборотною.

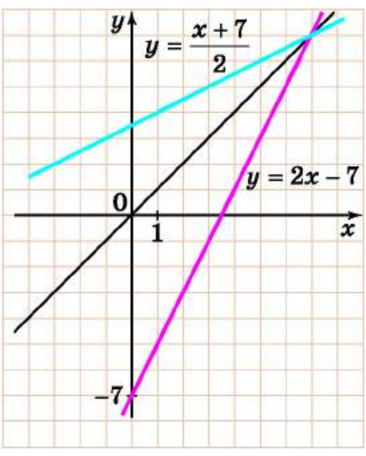
З рівності $y = f(x)$, де $f(x)$ – оборотна функція, як з рівняння, знайдемо x (якщо це можливо), отримаємо: $x = g(y)$. Цю функцію $x = g(y)$ називають *оберненою* до функції $f(x)$. Оскільки у шкільній математиці прийнято позначати аргумент через x, а функцію через y, остаточно отримаємо: $y = g(x)$.

Приклад 10. Для функції $y = 2x - 7$ знайти обернену.

Розв'язання. Оскільки функція $y = 2x - 7$ є оборотною, то для неї можна знайти обернену. Виразимо x через y, матимемо: $x = \dfrac{y+7}{2}$. Позначимо аргумент через x, функцію – через y і остаточно отримаємо $y = \dfrac{x+7}{2}$.

Побудувавши графіки функцій $y = 2x - 7$ і $y = \dfrac{x+7}{2}$ в одній координатній площині, можна помітити, що вони є симетричними відносно прямої $y = x$ (мал. 4.18).

Таку властивість мають графіки для будь-якої оборотної і оберненої до неї функцій.



Мал. 4.18

Графіки функцій $y = f(x)$ та оберненої до неї $y = g(x)$ є симетричними відносно прямої $y = x$.

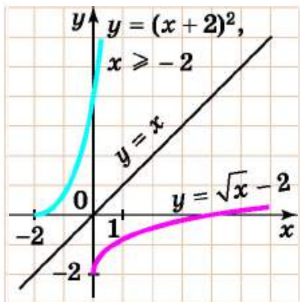
Можна довести, що коли функція $y = g(x)$ є оберненою до $y = f(x)$, то і, навпаки, функція $y = f(x)$ є оберненою до функції $y = g(x)$. Про такі функції $f(x)$ і $g(x)$ кажуть, що вони є *взаємно оберненими*.

Функції $y = 2x - 7$ і $y = \frac{x+7}{2}$ – взаємно обернені.

Зауважимо, що для взаємно обернених функцій справджується така властивість: областю визначення оберненої функції є множина значень прямої, а множина значень оберненої функції – область визначення прямої функції.

Приклад 11. Для функції $y = \sqrt{x} - 2$ знайти обернену.

Розв'язання. Функція $y = \sqrt{x} - 2$ є оборотною, її графік зображено на малюнку 4.19. Маємо: $y + 2 = \sqrt{x}$. Оскільки $\sqrt{x} \geqslant 0$ для всіх значень x з області визначення, то $y + 2 \geqslant 0$, тобто $y \geqslant -2$. Для таких y маємо: $x = (y+2)^2$.
Повертаючись до традиційних позначень, отримаємо, що $y = (x+2)^2$, де $x \geqslant -2$, – функція, обернена до $y = \sqrt{x} - 2$ (мал. 4.19).
Відповідь. $y = (x+2)^2$, $x \geqslant -2$.



Мал. 4.19

- Що називають графіком функції $y = f(x)$? - Сформулюйте основні властивості кожної з функцій: $y = kx + l$; $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$; $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$; $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. - Як, користуючись графіком функції $y = f(x)$, побудувати графіки функцій $y = f(x) \pm n$, де $n > 0$; $y = f(x \pm m)$, де $m > 0$; $y = -f(x)$; $y = kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$? - Яку функцію називають оборотною? Як знайти для неї обернену? - Яку властивість мають графіки оборотної і оберненої до неї функцій?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

4.1. (*Усно*). Зростаючою чи спадною на своїй області визначення є функція:

1) $y = \frac{1}{5}x - 7$;   2) $y = \sqrt{x}$;   3) $y = -4x$;   4) $y = 0{,}001x$?

4.2. Зростаючою чи спадною на проміжку $(-\infty; +\infty)$ є функція:

1) $y = -3x$;   2) $y = \frac{3}{7}x$;   3) $y = -8x + 13$;   4) $y = 7x - 9$?

4.3. (*Усно*). Як треба перетворити графік функції $y = \sqrt{x}$, щоб отримати графік функції:

1) $y = \sqrt{x} + 3$; 2) $y = \sqrt{x} - 2$; 3) $y = \sqrt{x+1}$; 4) $y = \sqrt{x-4}$?

4.4. Як треба перетворити графік функції $y = x^2$, щоб отримати графік функції:

1) $y = x^2 + 2$; 2) $y = x^2 - 1$; 3) $y = (x+3)^2$; 4) $y = (x-5)^2$?

2 Побудуйте в одній системі координат графіки функцій (4.5–4.6):

4.5. 1) $y = -x$, $y = -x + 2$, $y = -x - 3$;
2) $y = |x|$, $y = |x - 2|$, $y = |x + 1|$.

4.6. 1) $y = x$, $y = x + 1$, $y = x - 4$;
2) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x-3}$, $y = \sqrt{x+2}$.

Побудуйте графік функції (4.7–4.8):

4.7. 1) $y = 2x - 3$; 2) $y = -\frac{8}{x}$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = x^2 - 2x$.

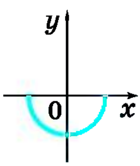
4.8. 1) $y = -2x$; 2) $y = x^2$; 3) $y = \frac{4}{x}$; 4) $y = x^2 + 4x$.

Знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання функції, попередньо побудувавши схематично її графік (4.9–4.10):

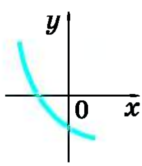
4.9. 1) $f(x) = 2x - 7$; 2) $g(x) = 3 - x$; 3) $h(x) = x^2$;
4) $t(x) = \frac{6}{x}$; 5) $p(x) = \sqrt{x}$; 6) $\varphi(x) = -\frac{2}{x}$.

4.10. 1) $f(x) = 5x$; 2) $g(x) = -x$; 3) $p(x) = \frac{8}{x}$; 4) $\psi(x) = -\frac{6}{x}$.

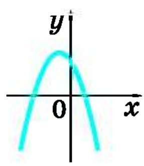
4.11. (*Усно*). Які з графіків, зображених на малюнках 4.20–4.23, є графіками оборотних функцій?



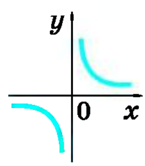
Мал. 4.20



Мал. 4.21



Мал. 4.22



Мал. 4.23

Знайдіть функцію, обернену до функції (4.12–4.13):

4.12. 1) $y = 3x$; 2) $y = x - 7$; 3) $y = -\frac{6}{x}$; 4) $y = 2x + 5$.

4.13. 1) $y = -2x$; 2) $y = x + 1$; 3) $y = 3x - 7$; 4) $y = \frac{8}{x}$.

4.14. Доведіть, що функції $y = x$ і $y = -\frac{10}{x}$ збігаються із собі оберненими.

4.15. Доведіть, що функції $y = -x$ і $y = \frac{4}{x}$ збігаються із собі оберненими.

4.16. Знайдіть координати вершини параболи $y = 3x^2 - 6x + 5$. Побудуйте схематично графік функції та знайдіть множину її значень.

3 Знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання функції та її найбільше і найменше значення (4.17–4.18):

4.17. 1) $y = x^2 - 2x$; 2) $y = -x^2 + 4x - 1$.

4.18. 1) $y = -x^2 + 6x$; 4) $y = x^2 + 8x + 3$.

4.19. М'яч рухається за законом $s(t) = 8t - 4t^2$, де s – відстань у метрах від поверхні землі, t – час у секундах, $t \geqslant 0$.

1) Побудуйте графік руху м'яча.
2) Визначте момент часу, коли м'яч буде на землі.
3) Знайдіть проміжок зростання і проміжок спадання функції $s(t)$.
4) Знайдіть найбільшу висоту, на яку піднявся м'яч.

Побудуйте графік функції (4.20–4.23):

4.20. 1) $y = \sqrt{x-3} + 1$; 2) $y = \sqrt{-x} + 3$; 3) $y = \sqrt{x+1} - 2$;
4) $y = \sqrt{x+2} + 4$; 5) $y = \sqrt{x-2} - 5$; 6) $y = -\sqrt{x} - 1$.

4.21. 1) $y = (x-1)^2 + 2$; 2) $y = -x^2 + 1$; 3) $y = (x+2)^2 - 3$;
4) $y = (x+3)^2 + 1$; 5) $y = (x-2)^2 + 3$; 6) $y = -x^2 - 2$.

4.22. 1) $y = 2x^2$; 2) $y = -3x^2$; 3) $y = \frac{1}{2}x^2$; 4) $y = -\frac{1}{4}x^2$.

4.23. 1) $y = 2|x|$; 2) $y = -4|x|$; 3) $y = \frac{1}{3}|x|$; 4) $y = -\frac{1}{2}|x|$.

4.24. При яких значеннях m функція $y = mx - 5m + 2x + 3$ є спадною?

4.25. При яких значеннях p функція $y = px + 9p - 4x - 5$ є зростаючою?

4.26. При якому значенні b функція $y = 4x^2 + bx + 7$ спадає на проміжку $(-\infty; -1]$ і зростає на проміжку $[-1; +\infty)$?

4.27. При якому значенні b функція $y = -2x^2 + bx$ зростає на проміжку $(-\infty; 4]$ і спадає на проміжку $[4; +\infty)$?

4.28. Які з даних функцій є оборотними:

1) $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$; 2) $y = x^2$, $x \in [-1; 3)$;
3) $y = x^2$, $x \in [-3; 0]$; 4) $y = x^2$, $x \in [3; 7]$;
5) $y = \sqrt{x}$; 6) $y = \sqrt{x^2 - 3}$?

Знайдіть функцію, обернену до даної, та побудуйте графіки прямої і оберненої їй функцій, якщо (4.29–4.30):

4.29. 1) $y = \sqrt{x} - 3$; 2) $y = -\sqrt{x} + 1$.

4.30. 1) $y = \sqrt{x} + 2$; 2) $y = -\sqrt{x} - 3$.

4 **Побудуйте графік функції. За графіком знайдіть нулі та проміжки знакосталості функції (4.31–4.32):**

4.31. 1) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x < 1, \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ |x - 6|, \text{ якщо } x > 4; \end{cases}$

2) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, \text{ якщо } x < 0, \\ 2x, \text{ якщо } 0 \leqslant x < 2, \\ \dfrac{8}{x}, \text{ якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$

4.32. 1) $f(x) = \begin{cases} -2x, \text{ якщо } x < 0, \\ 2\sqrt{x}, \text{ якщо } 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ x^2 - 4x + 4, \text{ якщо } x > 4; \end{cases}$

2) $g(x) = \begin{cases} |x|, \text{ якщо } x < 1, \\ 2 - x, \text{ якщо } 1 \leqslant x < 4, \\ -\dfrac{8}{x}, \text{ якщо } x > 4. \end{cases}$

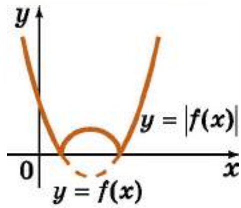
4.33. **Побудуйте графік функції та знайдіть проміжки, на яких вона зростає, і проміжки, на яких вона спадає:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{x}, \text{ якщо } x \leqslant -4, \\ \dfrac{1}{2}x, \text{ якщо } -4 < x \leqslant 4, \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x \geqslant 4. \end{cases}$$

4.34. **Побудуйте графік функції та знайдіть її проміжки зростання і проміжки спадання:**

$$f(x) = \begin{cases} -4x, \text{ якщо } x < 0, \\ x^2, \text{ якщо } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 5 - \dfrac{1}{2}x, \text{ якщо } x > 2. \end{cases}$$

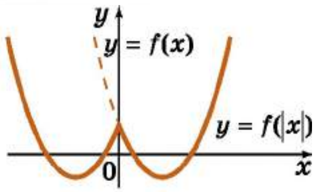
4.35. Доведіть, що графік функції $y = |f(x)|$ можна побудувати так: частину графіка функції $y = f(x)$, яка лежить вище від осі абсцис (і на самій осі), залишаємо без зміни, а частину, яка лежить нижче від осі абсцис, відображаємо симетрично відносно цієї осі (мал. 4.24).



Мал. 4.24

4.36. 1) Доведіть, що функція $y = f(|x|)$ – парна.

2) Доведіть, що графік функції $y = f(|x|)$ можна побудувати так: частину графіка $y = f(x)$, яка лежить праворуч від осі ординат (і на самій осі), залишаємо без зміни, а потім цю частину відображаємо симетрично відносно осі ординат (мал. 4.25).



Мал. 4.25

Побудуйте графік функції (**4.37–4.38**):

4.37. 1) $y = x^2 - 2x - 3$; 2) $y = |x^2 - 2x - 3|$;

3) $y = x^2 - 2|x| - 3$; 4) $y = |x^2 - 2|x| - 3|$.

4.38. 1) $y = x^2 - 2x$; 2) $y = |x^2 - 2x|$;

3) $y = x^2 - 2|x|$; 4) $y = |x^2 - 2|x||$.

Знайдіть функцію, обернену до функції (**4.39–4.40**):

4.39. 1) $y = x^2 + 3,\ x \geqslant 0$; 2) $y = x^2 - 2,\ x \leqslant 0$;

3) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$; 4) $y = \sqrt{x+1},\ x \in [3;8]$.

4.40. 1) $y = x^2 - 5,\ x \geqslant 0$; 2) $y = x^2 + 1,\ x \leqslant 0$;

3) $y = \dfrac{x}{1-x}$; 4) $y = \sqrt{x-3},\ x \in [4;12]$.

4.41. Побудуйте графік функції $y = 3 - \sqrt{x^2 - 2|x| + 1}$.

4.42. Прибуток малого підприємства щомісячно протягом півроку збільшувався на 10 % відносно прибутку за попередній місяць. Податок на прибуток підприємства (ППП) в Україні становить 18 %. Знайдіть розмір ППП, сплаченого підприємством за ці півроку, якщо його прибуток за перший місяць склав 20 000 грн. Округліть до цілих гривень.

4.43. (*Задача Стенфордського університету*). Три числа є членами арифметичної прогресії, а три інші – членами геометричної прогресії. Додаючи відповідні члени цих прогресій, отримали суми 85, 76 і 84, а сума трьох членів арифметичної прогресії дорівнює 126. Знайдіть члени обох прогресій.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

4.44. Розв'яжіть лінійні рівняння та рівняння, що зводяться до лінійних:

1) $-4x = 8$;
2) $0{,}1x = 12$;
3) $2(x - 1) = -6x$;
4) $3(x + 1) - 7 = 3x$;
5) $4(x + 3) - 4x = 12$;
6) $\frac{x-1}{2} + \frac{x+2}{3} = 1$.

4.45. Розв'яжіть квадратні рівняння:

1) $3x^2 - 4x = 0$;
2) $7x^2 - 28 = 0$;
3) $4x^2 + 16 = 0$;
4) $2x^2 - 3x - 5 = 0$;
5) $9x^2 + 6x + 1 = 0$;
6) $x^2 + 7x + 2 = 0$.

4.46. Розв'яжіть дробово-раціональні рівняння:

1) $\frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = 0$;
2) $\frac{3x^2}{x - 2} = \frac{5x}{x - 2}$;
3) $\frac{18}{x^2 + 6x + 9} + \frac{7}{x + 3} = 1$;
4) $\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{x + x^2} = \frac{10}{x - x^3}$.

§ 5. РІВНЯННЯ

У попередніх класах ми вже вивчали деякі види рівнянь: лінійні, квадратні, біквадратні, дробово-раціональні тощо. Систематизуємо та поглибимо відомості про рівняння.

1. Поняття про рівняння і його корені

Нагадаємо, що

! *рівнянням* називають рівність, що містить змінну.

Рівняння зі змінною x у загальному вигляді можна записати так: $f(x) = g(x)$.

! Значення змінної, яке перетворює рівняння на правильну числову рівність, називають *коренем* (*розв'язком*) *рівняння*.

Наприклад, число 2 є коренем рівняння $2x - 3 = 1$, бо $2 \cdot 2 - 3 = 1$, а 5 не є коренем цього рівняння, бо $2 \cdot 5 - 3 \neq 1$.

! *Розв'язати рівняння* — означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

2. Розв'язування рівнянь методом рівносильних перетворень

З поняттям рівносильних перетворень ми ознайомилися ще в курсі алгебри 7-го класу. Уточнимо означення рівносильності рівнянь.

Два рівняння називають *рівносильними* на деякій множині, якщо вони мають на цій множині одні й ті самі корені. Рівносильними вважають і рівняння, які не мають коренів.

Рівняння $x^2 = 1$ і $x - 1 = 0$ на множині дійсних чисел не є рівносильними, оскільки коренями першого є числа 1 і -1, а друге має лише один корінь – число 1. На множині невід'ємних чисел вони будуть рівносильними, оскільки матимуть один і той самий єдиний для кожного з рівнянь на цій множині корінь – число 1.

Рівносильні перетворення рівнянь покладено в основу відповідного методу розв'язування рівнянь, який полягає в заміні початкового рівняння рівносильним йому рівнянням (іноді кількома рівняннями) або системою, що містить інше, більш просте рівняння та деякі додаткові обмеження для змінної, записані у вигляді рівняння, нерівності тощо. У такому разі кажуть, що рівняння рівносильне рівнянню (сукупності рівнянь) або системі.

У попередніх класах ми вже розглядали деякі перетворення рівнянь, що зводять рівняння до йому рівносильного (до сукупності рівнянь) або рівносильної системи. Зокрема це:

1) розкриття дужок та зведення подібних доданків у будь-якій частині рівняння;
2) перенесення доданка з однієї частини рівняння в іншу зі зміною його знаку на протилежний;
3) множення або ділення обох частин рівняння на одне й те саме відмінне від нуля число;
4) заміна рівняння $f(x)g(x) = 0$ сукупністю рівнянь $f(x) = 0$ та $g(x) = 0$ (за умови, що вирази $f(x)$ і $g(x)$ мають зміст для усіх отриманих коренів цієї сукупності);
5) заміна рівняння $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ системою $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$

Пригадаємо, як розв'язати рівняння за допомогою рівносильних перетворень.

Приклад 2. Знайти корені рівняння $2(x - 1) + 3 = 4(x + 1) + 7$.

Розв'язання.

$2x - 2 + 3 = 4x + 4 + 7$ (розкрили дужки);

$2x - 4x = 4 + 7 + 2 - 3$ (перенесли доданки);

$-2x = 10$ (звели подібні доданки);

$x = 10 : (-2)$ (поділили обидві частини на -2);

$x = -5$ (отримали корінь).

Відповідь. -5.

Приклад 3. Розв'язати рівняння: $\dfrac{18}{9 - x^2} + \dfrac{2(x + 1)}{x - 3} = \dfrac{x + 6}{x + 3}$.

Розв'язання. Перенесемо всі доданки в ліву частину рівняння, далі зведемо дроби до спільного знаменника:

$$\frac{18}{(3-x)(3+x)}-\frac{2(x+1)}{3-x}-\frac{x+6}{x+3}=0;$$

$$\frac{18-2(x+1)(3+x)-(x+6)(3-x)}{(3-x)(3+x)}=0;$$

спростимо чисельник: $\dfrac{x^2+5x+6}{(3-x)(3+x)}=0.$

Рівняння рівносильне системі: $\begin{cases} x^2+5x+6=0, \\ (3-x)(3+x)\neq 0. \end{cases}$

Коренями першого рівняння системи є числа -2 і -3, але, враховуючи другий рядок системи, отримаємо, що $x \neq 3$ і $x \neq -3$, тому $x=-2$ – єдиний корінь рівняння.

Відповідь. -2.

3. Рівняння-наслідки

Більшість рівнянь, які ми розглянули в попередніх класах, зручно було розв'язувати методом рівносильних перетворень. Перевагами методу є те, що за таких перетворень кожне наступне рівняння є простішим за попереднє, а множина коренів останнього рівняння є множиною коренів початкового.

Проте рівносильні перетворення іноді бувають досить громіздкими або призводять до систем, розв'язування яких може виявитися не тільки громіздким, а й потребуватиме знань, що виходять за межі шкільного курсу математики. У такому разі доцільно використовувати інший підхід – замінювати початкове рівняння *рівнянням-наслідком*.

! Якщо кожен корінь першого рівняння є коренем другого рівняння, то друге рівняння називають *наслідком* першого.

Приклад 4. Розглянемо два рівняння:

$$\frac{x^2-x-2}{x+1}=0 \quad \text{і} \quad x^2-x-2=0.$$

Перше з них рівносильне системі $\begin{cases} x^2-x-2=0, \\ x+1\neq 0, \end{cases}$ з якої отримаємо корінь: $x=2$. Корені другого рівняння: $x_1=-1$; $x_2=2$. Отже, рівняння $x^2-x-2=0$ є наслідком рівняння $\dfrac{x^2-x-2}{x+1}=0.$

Таким чином, можна дійти висновку, що під час переходу від рівняння до рівняння-наслідку можлива поява сторонніх коренів. Тому,

розв'язуючи рівняння за допомогою рівнянь-наслідків, треба обов'язково перевіряти, чи є отримані корені рівняння-наслідку коренями початкового рівняння.

Інакше кажучи, треба виконувати *перевірку коренів*.

Приклад 5. Розв'язати рівняння: $\frac{x^2}{x-2}=\frac{3x-2}{x-2}$.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки знаменники дробів рівні, то рівними мають бути й чисельники. Маємо рівняння-наслідок: $x^2 = 3x - 2$, тобто $x^2 - 3x + 2 = 0$, звідки $x_1 = 1$; $x_2 = 2$. Виконаємо перевірку коренів.

Якщо $x_1 = 1$, то: $\frac{1^2}{1-2}=\frac{3\cdot 1-2}{1-2}$, тому 1 – корінь рівняння.

Якщо $x_2 = 2$, то знаменники дробів перетворяться на нуль, тому число 2 не може бути коренем початкового рівняння, отже, є стороннім коренем.

Таким чином, число 1 – єдиний корінь початкового рівняння.

В і д п о в і д ь. 1.

4. Область допустимих значень рівняння

Нагадаємо, що областю допустимих значень змінної у виразі називають усі значення змінної, при яких вираз має зміст. Розглянемо поняття області допустимих значень змінної в рівнянні.

Областю допустимих значень **(ОДЗ) змінної в рівнянні $f(x) = g(x)$ називають переріз областей допустимих значень змінної у виразах $f(x)$ і $g(x)$.**

Ми вже згадували, що рівносильні перетворення іноді призводять до громіздких обчислень. Певні проблеми трапляються й під час використання рівнянь-наслідків, наприклад, іноді складно виконати перевірку отриманих з рівняння-наслідку коренів та виявити серед них сторонні. Зокрема, доволі складною і громіздкою є перевірка коренів, що є ірраціональними числами.

Розв'язуючи раціональне рівняння, цих проблем можна уникнути, якщо спочатку знайти ОДЗ змінної в рівнянні. Тоді, отримавши корені рівняння-наслідку, доцільніше перевірити, чи належать вони ОДЗ, ніж виконувати перевірку підстановкою їх у початкове рівняння. Ті корені, що не належатимуть ОДЗ, і будуть сторонніми. Цей спосіб є досить корисним і в тих випадках, коли перетворення призводять до розширення ОДЗ початкового рівняння, що, у свою чергу, призводить до появи сторонніх коренів. Розглянемо це на прикладі.

Приклад 6. Розв'язати рівняння: $x^2+\frac{1}{x+2}=x+\frac{1}{x+2}+6$.

Р о з в ' я з а н н я. Областю допустимих значень змінної в рівнянні будуть всі значення x, крім числа -2. Надалі записуватимемо це так – ОДЗ: $x \neq -2$.

Перенесемо всі доданки в ліву частину рівняння:

$$x^2+\frac{1}{x+2}-x-\frac{1}{x+2}-6=0.$$

Оскільки $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+2}=0$, маємо: $x^2-x-6=0$, тоді $x_1=-2$; $x_2=3$. Але -2 не належить ОДЗ і тому є стороннім коренем. Отже, 3 – єдиний корінь рівняння.

Відповідь. 3.

5. Найпростіші рівняння з параметром

Зазвичай у рівняннях літерами позначають змінні, але іноді, крім змінної, рівняння може містити ще й іншу літеру, якою позначено невідоме стале число. Цю літеру в рівнянні називають *параметром*, а рівняння, що її містить, *рівнянням з параметром*.

Якщо в рівнянні є параметр, то маємо вже не одне рівняння, а нескінченну їх кількість, які отримуватимемо для різних значень параметра. Для різних значень параметра кількість коренів рівняння також може бути різною.

! ***Розв'язати рівняння з параметром*** **означає для кожного значення параметра встановити, чи має рівняння корені, і якщо так, то знайти ці корені, які в більшості випадків залежатимуть від параметра.**

У шкільному курсі математики до рівнянь з параметрами, зазвичай, висувають одну з двох вимог: розв'язати рівняння (мається на увазі, для кожного допустимого значення параметра) або знайти значення параметра, при якому рівняння задовольняє певну умову, зазвичай, щодо кількості або числових значень його коренів. Залежно від цих вимог рівняння з параметрами можна умовно поділити на два типи. При цьому будь-яке таке рівняння є по своєму унікальним, тому універсальних методів розв'язування рівнянь з параметрами не існує. Можна лише зазначити певні дії, без виконання яких розв'язання рівняння з параметром не буде успішним.

Наприклад, якщо поставлено вимогу розв'язати рівняння, то спочатку знаходять область допустимих значень параметра (якщо вона відмінна від множини всіх дійсних чисел), потім досліджують усі можливі випадки існування коренів, знаходячи значення параметра для кожного із цих випадків та відповідні їм корені. Усі знайдені значення параметра та відповідні їм корені зазначають у відповіді до задачі, зазвичай, у формі «Якщо..., то...». При цьому зазначені у відповіді значення параметра мають обов'язково охоплювати всю його область допустимих значень. Відсутність у відповіді хоча б одного значення параметра з його області допустимих значень означатиме, що деякі випадки існування коренів не розглянуто, тому відповідь є неповною.

Розглянемо кілька рівнянь такого типу на прикладах, де a – параметр.

Приклад 7. Розв'язати рівняння: $(a^2-4)x = a-2$.

Р о з в ' я з а н н я. Рівняння є лінійним. Якби воно не містило параметра, корінь ми б знаходили діленням обох частин рівняння на коефіцієнт при змінній x. Але цей коефіцієнт містить параметр, тому при певних значеннях параметра може дорівнювати нулю, і тоді виконувати ділення не можна. Отже, маємо випадки, коли $a^2-4=0$, тобто коли $a=2$ або $a=-2$, та коли $a^2-4\neq 0$, тобто коли $a\neq 2$ і $a\neq -2$. Розглянемо кожний випадок окремо.

1) Нехай $a=2$, тоді рівняння набуває вигляду $0\cdot x=0$, розв'язком якого є будь-яке число.

2) Нехай $a=-2$, тоді рівняння набуває вигляду $0\cdot x=-4$ і розв'язків не має.

3) Нехай $a\neq 2$, $a\neq -2$, тоді $x=\dfrac{a-2}{a^2-4}$, тобто $x=\dfrac{a-2}{(a-2)(a+2)}$, отже, $x=\dfrac{1}{a+2}$.

В і д п о в і д ь. Якщо $a=2$, то x – будь-яке число; якщо $a=-2$, коренів немає; якщо $a\neq 2$ і $a\neq -2$, то $x=\dfrac{1}{a+2}$.

Приклад 8. Розв'язати рівняння: $ax^2-2x+1=0$.

Р о з в ' я з а н н я. Якщо $a=0$, матимемо лінійне рівняння, якщо $a\neq 0$, – квадратне. Розглянемо ці випадки.

1) Нехай $a=0$, тоді рівняння набуває вигляду $-2x+1=0$, отже, $x=0,5$.

2) Нехай $a\neq 0$. Знаходимо дискримінант квадратного рівняння: $D=4-4a$.

Якщо $D>0$, тобто $4-4a>0$, отже, $a<1$, за умови, що $a\neq 0$, рівняння матиме два різних корені:

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4a}}{2}=1\pm\sqrt{1-a}.$$

Якщо $D=0$, тобто $4-4a=0$, отже, $a=1$, рівняння набуває вигляду: $x^2-2x+1=0$ і має один корінь: $x=1$.

Якщо $4-4a<0$, тобто $a>1$, рівняння коренів не має.

В і д п о в і д ь. Якщо $a=0$, то $x=0,5$; якщо $a<0$ або $0<a<1$, то $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-a}$; якщо $a=1$, то $x=1$; якщо $a>1$, то коренів немає.

Розглянемо тепер кілька прикладів рівнянь другого типу, тобто тих, у яких треба знайти значення параметра, при якому має виконуватися певна умова щодо кількості коренів рівняння або їх значень. У таких задачах найчастіше ми маємо знайти ці значення параметра та зазначити їх у відповіді.

Приклад 9. При яких значеннях параметра a рівняння $ax-2=3x$ рівносильне рівнянню $5x-2=13$?

Розв'язання. Єдиним коренем рівняння $5x - 2 = 13$ є число 3. Тому, за означенням рівносильних рівнянь, рівняння $ax - 2 = 3x$ теж повинно мати тільки один корінь і він має бути числом 3. Припустимо, що число 3 є коренем рівняння $ax - 2 = 3x$, тоді воно перетворює рівняння у правильну рівність. Підставимо число 3 замість x у рівняння з параметром, отримаємо: $3a - 2 = 3 \cdot 3$, тобто $3a = 11$, отже, $a = \frac{11}{3}$. Залишається впевнитися, що при знайденому значенні параметра інших коренів, крім числа 3, у рівняння немає. Підставивши в рівняння $ax - 2 = 3x$ знайдене значення параметра a, отримаємо рівняння $\frac{11}{3}x - 2 = 3x$, єдиним коренем якого і буде число 3. Отже, при $a = \frac{11}{3}$ рівняння $5x - 2 = 13$ і $ax - 2 = 3x$ – рівносильні.

Відповідь. $\frac{11}{3}$.

Приклад 10. При яких значеннях параметра a рівняння $(a+2)x^2 - 2ax + 1 = 0$ має рівно два різних дійсних корені?

Розв'язання. Розглянемо два випадки: коли $a + 2 = 0$, тобто рівняння буде лінійним, і коли $a + 2 \neq 0$, тобто рівняння буде квадратним.

1) Нехай $a + 2 = 0$, тоді $a = -2$, і рівняння набуває вигляду: $4x + 1 = 0$.

Тоді $x = -0{,}25$ – його єдиний корінь. Значення параметра $a = -2$ не задовольняє умову задачі, оскільки для цього значення рівняння має лише один корінь.

2) Нехай $a + 2 \neq 0$, тоді $a \neq -2$. Знайдемо дискримінант квадратного рівняння: $D = (-2a)^2 - 4(a+2) = 4(a^2 - a - 2)$. Рівняння матиме два різних дійсних корені за умови $D > 0$, тобто коли $a^2 - a - 2 > 0$. Розв'язком цієї нерівності є множина $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. Ураховуючи, що при цьому ще й $a \neq -2$, то при $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (2; +\infty)$ рівняння матиме два різних дійсних корені.

Відповідь. $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (2; +\infty)$.

Приклад 11. При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{x^2 - 6x + 8 + 2a - a^2}{x - 2} = 0$ має єдиний корінь?

Розв'язання. Рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 + 2a - a^2 = 0, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

З рівняння системи маємо: $D = 36 - 4(8 + 2a - a^2) = 4(a-1)^2$;

$$x_1 = \frac{6 + 2(a-1)}{2} = a + 2; \quad x_2 = \frac{6 - 2(a-1)}{2} = 4 - a.$$

Початкове рівняння має лише один корінь в одному з таких випадків:

1) $x_1 = x_2$ і $x_1 \neq 2$; 2) $x_1 = 2$; $x_2 \neq 2$; 3) $x_2 = 2$; $x_1 \neq 2$.

Розглянемо ці випадки.

1) Нехай $a + 2 = 4 - a$, тобто $a = 1$. Тоді $x_1 = a + 2 = 1 + 2 = 3 \neq 2$. Отже, $a = 1$ задовольняє умову задачі.

2) Нехай $\begin{cases} a + 2 = 2, \\ 4 - a \neq 2. \end{cases}$ Тоді $a = 0$.

3) Нехай $\begin{cases} 4 - a = 2, \\ a + 2 \neq 2. \end{cases}$ Тоді $a = 2$.

В і д п о в і д ь. 1; 0; 2.

Що називають рівнянням? Що називають коренем або розв'язком рівняння? Що означає розв'язати рівняння? Які два рівняння називають рівносильними? Які рівносильні перетворення рівнянь ви знаєте? Що називають рівнянням-наслідком? Що називають областю допустимих значень рівняння? Що розуміють під поняттям параметра? Що означає розв'язати рівняння з параметром?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **Чи рівносильні рівняння (5.1–5.2):**

5.1. 1) $x + 2 = 5$ і $x \cdot 9 = 27$; 2) $x - 5 = 12$ і $x : 2 = 10$?

5.2. 1) $x - 3 = 8$ і $x : 3 = 5$; 2) $x + 3 = 8$ і $25 : x = 5$?

Розв'яжіть рівняння (5.3–5.4):

5.3. 1) $\frac{x}{x+1} = 0$; 2) $\frac{x-1}{x+2} = 0$; 3) $\frac{x^2-1}{x-5} = 0$; 4) $\frac{x^2-3x}{x-2} = 0$.

5.4. 1) $\frac{x}{x-8} = 0$; 2) $\frac{x+3}{x-7} = 0$; 3) $\frac{x^2-4}{x+5} = 0$; 4) $\frac{x^2+2x}{x+3} = 0$.

Знайдіть ОДЗ рівняння (5.5–5.6):

5.5. 1) $\frac{x+2}{x-3} = \frac{1}{x}$; 2) $\sqrt{x} = x + 7$.

5.6. 1) $\frac{10}{x} = \frac{x-3}{x+2}$; 2) $x - \sqrt{x} = 5$.

2 **Розв'яжіть рівняння (5.7–5.10):**

5.7. 1) $3(x-5) + 11 = 2x - 7$; 2) $4(x+9) - 6x = -2(x-7)$.

5.8. 1) $5(x+2) - 17 = 3x + 5$; 2) $2(x-7) + 3x = 5(x-2)$.

5.9. 1) $\frac{x^2-x}{5x-5} = 0$; 2) $\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4} = 0$.

5.10. 1) $\dfrac{x^2+x}{7x+7}=0;$ 2) $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+4x-5}=0.$

5.11. Покажіть, що рівняння $x^2-2x=0$ є наслідком рівняння $\dfrac{x^2-2x}{x^2+2x-8}=0.$

5.12. Покажіть, що рівняння $x^2-x=0$ є наслідком рівняння $\dfrac{x^2-x}{x^2+2x-3}=0.$

Розв'яжіть рівняння (5.13–5.16):

5.13. 1) $\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{2x}{x-2};$ 2) $\dfrac{x^2-2}{x+3}=\dfrac{4-x}{x+3}.$

5.14. 1) $\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{x}{x-1};$ 2) $\dfrac{x^2+1}{x+2}=\dfrac{3-x}{x+2}.$

5.15. 1) $\dfrac{7-x}{x-2}-\dfrac{x+4}{x+2}=-1;$ 2) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{x-3}{x^2-2x}.$

5.16. 1) $\dfrac{x+6}{x+1}-\dfrac{9-3x}{x-1}=3;$ 2) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x+4}=\dfrac{x+3}{x^2+4x}.$

5.17. При яких значеннях параметра b рівняння $4x-1=7$ рівносильне рівнянню $bx+3=3x-7$?

5.18. При яких значеннях параметра a рівняння $ax-5=5x+9$ і $7x-3=4$ рівносильні?

5.19. При яких значеннях параметра a рівняння:
1) $x^2-2ax+a^2+2a-1=0$ має два різних дійсних корені;
2) $x^2-4ax+4a^2+3a+1=0$ не має дійсних коренів?

5.20. При яких значеннях параметра b рівняння:
1) $x^2-2bx+b^2+2b-4=0$ має два різних дійсних корені;
2) $x^2-4bx+4b^2+b+3=0$ не має дійсних коренів?

Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння (5.21–5.22):

5.21. 1) $\dfrac{a}{2a-x}=3;$ 2) $\dfrac{a}{a-2x}=2.$

5.22. 1) $\dfrac{a}{a-2x}=3;$ 2) $\dfrac{a}{2a-x}=2.$

3 Розв'яжіть рівняння (a – параметр) (5.23–5.24):

5.23. 1) $(a-1)x=5;$ 2) $(a+2)x=a+2;$
3) $(a^2-1)x=a+1;$ 4) $(a-2)x=a^2-4.$

5.24. 1) $(a+1)x=7;$ 2) $(a-2)x=a-2;$
3) $(a+3)x=a^2-9;$ 4) $(a^2-25)x=a-5.$

Розв'яжіть рівняння (5.25–5.28):

5.25. 1) $\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{4x-6}{(x+1)(x+3)}=3;$ 2) $\dfrac{22-4x}{(x-1)(x-3)}+3=\dfrac{5}{x-3};$

3) $\frac{3x-2}{x-1}+\frac{x-4}{x+3}=\frac{3x^2+1}{x^2+2x-3}$; 4) $\frac{9}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{6}{x^2-4}$.

5.26. 1) $\frac{1-x}{(2-x)(x-3)}+1=\frac{1}{2-x}$; 2) $\frac{1}{x+3}+\frac{x+4}{(x+3)(x+2)}=-1$;

3) $\frac{2x-7}{x-4}-\frac{x+2}{x+1}=\frac{5}{x^2-3x-4}$; 4) $\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{9}{(x+3)^2}=\frac{6}{x^2-9}$.

5.27. 1) $x^2+\frac{1}{x-2}=x+\frac{1}{x-2}+2$; 2) $x^2+\sqrt{-x}=2x+8+\sqrt{-x}$.

5.28. 1) $x^2+\frac{1}{x+1}=x+\frac{1}{x+1}+2$; 2) $x^2+\sqrt{x}=3x+\sqrt{x}+4$.

При яких значеннях параметра a рівняння (5.29–5.30):

5.29. 1) $(3a-1)x^2+2ax+3a-2=0$ має два різних дійсних корені;

2) $(a+1)x^2-ax+a-3=0$ має не більше ніж один корінь?

5.30. 1) $(2a+1)x^2-ax+a-2=0$ має два різних дійсних корені;

2) $(2a-1)x^2+ax+2a-3=0$ має не більше ніж один корінь?

4 **Чи завжди рівносильні рівняння (5.31–5.32):**

5.31. 1) $(x^2+2)f(x)=2x^2+4$ і $f(x)=2$;

2) $(x^2-1)f(x)=(x-1)g(x)$ і $(x+1)f(x)=g(x)$;

3) $\frac{f(x)}{x-2}=\frac{g(x)}{x-2}$ і $f(x)=g(x)$;

4) $\frac{f(x)}{x^2+x+2}=\frac{5}{x^2+x+2}$ і $f(x)=5$?

5.32. 1) $(x-2)f(x)=2x-4$ і $f(x)=2$;

2) $(x^2+1)f(x)=(x^2+1)g(x)$ і $f(x)=g(x)$;

3) $\frac{f(x)}{x^2+x}=\frac{g(x)}{x^2+x}$ і $f(x)=g(x)$;

4) $\frac{f(x)}{x^2+x+7}=\frac{10}{x^2+x+7}$ і $f(x)=10$?

Розв'яжіть рівняння, де a – параметр, (5.33–5.34):

5.33. 1) $a^2x^2+6ax+5=0$; 2) $ax^2+4x-2=0$.

5.34. 1) $a^2x^2-4ax-5=0$; 2) $ax^2+6x-1=0$.

5.35. При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{x^2-2x+4a-a^2-3}{x+1}=0$ має лише один корінь?

5.36. При яких значеннях параметра b рівняння $\frac{x^2+2x-b^2+2b}{x-5}=0$ має лише один корінь?

5.37. Залежно від значень параметра a знайдіть кількість коренів рівняння $|x^2-2x-3|=a$.

5.38. Знайдіть кількість коренів рівняння $\left|x^2 + 2x\right| = a$ залежно від значень параметра a.

5.39. Розв'яжіть рівняння (x – змінна):

1) $\frac{5m}{x+m} + \frac{4m}{x+2m} + \frac{3m}{x+3m} = 8$;
2) $\frac{ax^2}{x-1} = (a+1)^2$;
3) $\frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x-a} = 2,5$;
4) $\frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b} = 2$.

5.40. Знайдіть усі значення параметра m, при кожному з яких рівняння $(x-m)^2(m(x-m)^2 - m - 1) + 1 = 0$ має додатних коренів більше, ніж від'ємних.

5.41. Знайдіть усі значення параметра m, при кожному з яких рівняння $(x-m)^2((x-m)^2 - 2m - 4) + 2m + 3 = 0$ має від'ємних коренів більше, ніж додатних.

5.42. Деяка модель смартфона коштувала 3500 грн. Через деякий час ціну на неї знизили до 2800 грн. На скільки відсотків було знижено ціну на цю модель?

5.43. (*Міжнародна математична олімпіада, 1960 р.*). Знайдіть усі трицифрові натуральні числа, які при діленні на 11 дають в остачі число, що дорівнює сумі квадратів цифр даного числа.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

Розв'яжіть нерівність (5.44–5.45):

5.44. 1) $2x > -8$; 2) $4x \leqslant -12$; 3) $-2x < 10$; 4) $-3x \geqslant -15$; 5) $0x \geqslant 5$; 6) $0x < 3$; 7) $0x > -7$; 8) $0x \leqslant -11$.

5.45. 1) $x^2 + 2x - 3 > 0$; 2) $x^2 - x - 6 \leqslant 0$; 3) $x^2 - 4 \geqslant 0$; 4) $2x^2 - 3x - 5 < 0$.

§ 6. НЕРІВНОСТІ

Нерівності, як і рівняння, відіграють значну роль у курсі алгебри. У цьому параграфі систематизуємо та поглибимо знання про нерівності.

1. Нерівність з однією змінною. Рівносильні нерівності

У попередніх класах нам уже доводилося розв'язувати нерівності з однією змінною. Це були лінійні та квадратні нерівності, наприклад, $2(x-1) + 5x > 7$, $x^2 \geqslant 4$ тощо.

Значення змінної, яке перетворює нерівність у правильну числову нерівність, називають *розв'язком нерівності*.

Наприклад, число 1 є розв'язком нерівності $2x + 7 > 8$, бо $2 \cdot 1 + 7 > 8$, але 0 не є розв'язком цієї нерівності, бо $2 \cdot 0 + 7 < 8$.

Розв'язати нерівність **— означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.**

Наприклад, нерівність $0 \cdot x > 7$ розв'язків не має, а розв'язком нерівності $2x > 8$ є проміжок $(4; +\infty)$.

Нерівності **називають** ***рівносильними,*** **якщо множини їх розв'язків збігаються.**

Як і рівняння, нерівності теж можна розв'язувати за допомогою рівносильних перетворень, тобто замінюючи нерівність рівносильною їй простішою нерівністю (іноді кількома простішими нерівностями) або системою нерівностей, яка матиме ту саму множину розв'язків, що й початкова нерівність. У такому разі кажуть, що нерівність рівносильна нерівності (сукупності нерівностей) або системі нерівностей.

Пригадаємо рівносильні перетворення нерівностей, з якими ми ознайомилися в курсі алгебри 9 класу:

1) розкриття дужок та зведення подібних доданків у будь-якій частині нерівності;
2) перенесення доданка з однієї частини нерівності в іншу зі зміною його знаку на протилежний;
3) множення або ділення обох частин нерівності на одне й те саме додатне число;
4) множення або ділення обох частин нерівності на одне й те саме від'ємне число зі зміною при цьому знаку нерівності на протилежний.

Пригадаємо, як розв'язати нерівність за допомогою рівносильних перетворень.

Приклад 1. Розв'язати нерівність: $3(x - 2) + 5 > 5x - 2$.

Розв'язання. $3x - 6 + 5 > 5x - 2$ (розкрили дужки).
$3x - 5x > -2 + 6 - 5$ (перенесли доданки).
$-2x > -1$ (звели подібні доданки).
$x < 0,5$ (поділили на від'ємне число).

Відповідь. $x < 0,5$.

Зауважимо, відповідь можна записати і так: $(-\infty; 0,5)$.

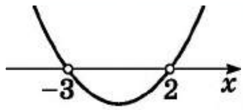
2. Метод інтервалів

Пригадаємо, як розв'язати квадратну нерівність.

Приклад 2. Розв'язати нерівність: $x^2 + x - 6 > 0$.

Розв'язання. Знайдемо корені квадратного тричлена $x^2 + x - 6$. Маємо: $x_1 = 2$; $x_2 = -3$. Оскільки нерівність строгого знаку, то ці числа не належатимуть множині розв'язків нерівності. Тому на числовій осі зображуємо їх «порожніми» точками. Через ці точки схематично поведемо графік функції $y = x^2 + x - 6$, що є параболою, гілки якої напрямлені вгору (мал. 6.1).

Отже, множиною розв'язків нерівності є об'єднання інтервалів $(-\infty; -3)$ і $(2; +\infty)$, на яких функція набуває додатних значень.



Мал. 6.1

Відповідь. $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

Як і для рівнянь:

областю допустимих значень **(ОДЗ) змінної для кожної з нерівностей $f(x) > g(x)$, $f(x) \geqslant g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) \leqslant g(x)$) називають переріз областей допустимих значень змінної виразів $f(x)$ і $g(x)$.**

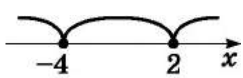
Розв'язати нерівність $x^2 + x - 6 > 0$ можна й іншим способом, ґрунтуючись, наприклад, на властивостях неперервних функцій. Оскільки графіком функції $f(x) = x^2 + x - 6$ є неперервна лінія, а нулями функції – числа -3 і 2, то ці числа розбивають числову вісь на три проміжки (інтервали): $(-\infty; -3)$, $(-3; 2)$ і $(2; +\infty)$, на кожному з яких функція є знакосталою. Тому, щоб знайти знак функції на кожному із цих інтервалів знакосталості, достатньо визначити знак числа, що є значенням функції в одній (будь-якій) точці інтервалу (таку точку називатимемо «контрольною»). Той самий знак матиме і функція в кожній точці цього інтервалу, тобто на цьому інтервалі. Визначивши у цей спосіб знак функції на кожному з інтервалів знакосталості, легко записати розв'язки нерівності. Наприклад, $-5 \in (-\infty; -3)$, $f(-5) > 0$, тому $x^2 + x - 6 > 0$, якщо $x \in (-\infty; -3)$. Аналогічно, $0 \in (-3; 2)$, $f(0) < 0$, тому $x^2 + x - 6 < 0$, якщо $x \in (-3; 2)$. Візьмемо останню «контрольну» точку: $3 \in (2; +\infty)$, $f(3) > 0$, тому $x^2 + x - 6 > 0$, якщо $x \in (2; +\infty)$. Як бачимо, знаки функції на інтервалах збігаються зі знаками цієї ж функції, отриманими у прикладі 2 (мал. 6.1).

Спосіб розв'язування нерівностей, який ми щойно використали, називають *методом інтервалів*. Він є універсальним, тому його можна застосовувати для будь-яких нерівностей. Зауважимо, що перевіряти знак функції на інтервалах за допомогою «контрольних» точок зручніше, коли вираз $f(x)$ розкладено на лінійні множники.

Розглянемо кілька вправ на застосування методу інтервалів для розв'язування нерівностей, областю допустимих значень яких є множина всіх дійсних чисел.

Приклад 3. Розв'язати нерівність: $(x+4)(x-2) \leqslant 0$.

Розв'язання. Нулями функції $f(x) = (x+4)(x-2)$ є числа -4 і 2. Позначимо їх точками на числовій осі. Ці числа належать множині розв'язків нерівності, оскільки нерівність є нестрогою. Отже, маємо три проміжки знакосталості фукції: $(-\infty; -4]$, $[-4; 2]$ та $[2; +\infty)$ (мал. 6.2).



Мал. 6.2

У кожному з інтервалів візьмемо по одній «контрольній» точці, за якими визначимо

знак кожного з множників у лівій частині нерівності, отже, й усього виразу (мал. 6.3).
Маємо:

$-5 \in (-\infty; -4)$, тоді $(x \overset{-}{+} 4)(x \overset{-}{-} 2) > 0$;

$0 \in (-4; 2)$, тоді $(x \overset{+}{+} 4)(x \overset{-}{-} 2) < 0$;

$3 \in (2; +\infty)$, тоді $(x \overset{+}{+} 4)(x \overset{+}{-} 2) > 0$.

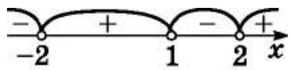
Отже, $(x + 4)(x - 2) \leqslant 0$, коли $x \in [-4; 2]$.

Мал. 6.3

В і д п о в і д ь. $[-4; 2]$.

Приклад 4. Розв’язати нерівність: $x^3 - x^2 - 4x + 4 < 0$.

Р о з в ’ я з а н н я. Розкладемо на множники ліву частину нерівності способом групування: $x^3 - x^2 - 4x + 4 =$
$= x^2(x - 1) - 4(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$.
Отримали нерівність, рівносильну даній:
$(x - 1)(x - 2)(x + 2) < 0$.
Позначимо числа 1, 2 і −2, які є нулями функції $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$, на числовій осі «порожніми» точками, бо знак нерівності є строгим (мал. 6.4). Визначимо знак функції $f(x)$ на кожному з отриманих проміжків (зробіть це самостійно).



Мал. 6.4

Маємо розв’язки нерівності:
$(-\infty; -2) \cup (1; 2)$.

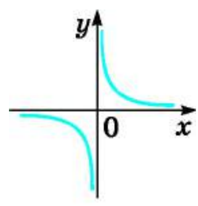
В і д п о в і д ь. $(-\infty; -2) \cup (1; 2)$.

Приклади, які ми розглянули вище, дають змогу дійти висновку, що функція може змінити свій знак при переході через свій нуль. Є й інша умова зміни знаку.

Розглянемо добре відомий нам графік функції $y = \dfrac{6}{x}$, для якої $D(y) : x \neq 0$ (мал. 6.5). Очевидно, якщо $x > 0$, то $y > 0$, а якщо $x < 0$, то $y < 0$.

Отже, функція може змінювати знак ще в одному випадку – при переході через точки, які не належать області визначення функції.

Таким чином, враховуючи, що знакосталість функції залежить не тільки від нулів функції, а й від її точок розриву (тобто функція може змінювати знак при переході як через свої нулі, так і через свої точки розриву), метод інтервалів можна застосовувати для розв’язування будь-яких нерівностей.



Мал. 6.5

Сформулюємо алгоритм застосування методу інтервалів для розв’язування нерівностей. При цьому зауважимо, що будь-яку нерівність можна перетворити так, щоб її права частина дорівнювала нулю.

Щоб розв'язати нерівність вигляду $f(x) > 0$ (або $f(x) \geqslant 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leqslant 0$), треба:
1) Знайти область визначення функції $f(x)$ та позначити її на числовій осі.
2) Знайти нулі функції $f(x)$ (розв'язати рівняння $f(x) = 0$) та позначити їх на області визначення функції (для строгої нерівності — «порожніми» точками).
3) Визначити знак функції $f(x)$ на кожному з отриманих проміжків (інтервалів знакосталості), наприклад, за допомогою «контрольних» точок.
4) Записати відповідь.

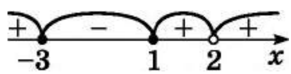
Розглянемо приклад на застосування методу інтервалів для раціональних нерівностей.

Приклад 5. Розв'язати нерівність: $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 4} \geqslant 0.$

Розв'язання. Застосуємо алгоритм розв'язування нерівностей методом інтервалів. Для зручності розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники і розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-2)^2}$.

1) $D(f)$: $x \neq 2$. Позначимо цю точку «порожньою» на числовій осі.

2) Нулями функції є числа 1 і -3. Доповнимо цими точками числову вісь.


Мал. 6.6

3) Визначимо знак функції на кожному з отриманих проміжків за допомогою «контрольних» точок. Маємо: $-5 \in (-\infty; -3)$, $f(-5) > 0$, отже, на інтервалі $(-\infty; -3)$ функція набуває додатних значень, тому на малюнку над цим інтервалом пишемо знак «+»; $0 \in (-3; 1)$, $f(0) < 0$, тому на інтервалі $(-3; 1)$ маємо «−»; $1{,}5 \in (1; 2)$, $f(1{,}5) > 0$, тому на інтервалі $(1; 2)$ маємо «+»; $3 \in (2; +\infty)$, $f(3) > 0$, тому на інтервалі $(2; +\infty)$ теж маємо «+» (мал. 6.6).

Оскільки нерівність є нестрогою, то її розв'язками будуть усі проміжки, на яких маємо знак «+», включаючи кінці, крім «порожніх» точок, тобто проміжки $(-\infty; -3]$, $[1; 2)$ та $(2; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; -3] \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$.

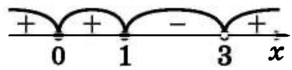
Приклад 6. Розв'язати нерівність: $\dfrac{x^2(x-1)(x^2+1)}{x-3} \leqslant 0.$

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{x^2(x-1)(x^2+1)}{x-3}$.

1) $D(f)$: $x \neq 3$. Позначимо на числовій осі число 3 «порожньою» точкою.

2) Нулями функції є лише числа 0 і 1, оскільки вираз $x^2 + 1$ нулів не має, отже, є знакосталим для будь-якого

значення змінної (легко перевірити, що додатним). Оскільки $x^2 + 1 > 0$, то для кожного значення x його можна вважати додатним числом, а отже, поділити на нього обидві частини нерівності або не враховувати під час розв'язання, оскільки додатне число на знак нерівності не впливає.
Позначимо нулі функції 0 і 1 точками на тій самій числовій осі, де й область визначення функції.
3) Визначимо знак функції на кожному з отриманих проміжків (зробіть це самостійно) (мал. 6.7).
Оскільки нерівність є нестрогою, то її розв'язком буде не тільки проміжок $[1; 3)$, а й число 0.



Мал. 6.7

Відповідь. $\{0\} \cup [1; 3)$.

3. Найпростіші нерівності з параметром

Під час розв'язування нерівностей з параметрами використовують ті самі прийоми розв'язання, що й для рівнянь з параметром.

Розглянемо кілька прикладів нерівностей з параметрами.

Приклад 7. Розв'язати нерівність: $ax > 1$, де a – параметр.

Розв'язання. Нерівність є лінійною. Якби вона не містила параметра, то для знаходження її розв'язків ми б ділили обидві частини нерівності на коефіцієнт при змінній x. Оскільки цей коефіцієнт може бути додатним, від'ємним або нулем і для кожного із цих випадків розв'язки будуть різними, розглянемо кожен з них окремо.
1) Нехай $a < 0$. Поділимо ліву і праву частини нерівності на a, та, оскільки $a < 0$, знак нерівності змінимо на протилежний. Матимемо: $x < \frac{1}{a}$.
2) Нехай $a = 0$. Отримаємо нерівність $0 \cdot x > 1$, яка не має розв'язків.
3) Нехай $a > 0$. Поділимо ліву і праву частини нерівності на число a, отримаємо: $x > \frac{1}{a}$.

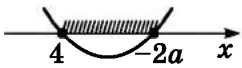
Відповідь. Якщо $a < 0$, то $x < \frac{1}{a}$; якщо $a = 0$, розв'язків немає; якщо $a > 0$, то $x > \frac{1}{a}$.

Приклад 8. Розв'язати нерівність: $x^2 + x(2a - 4) - 8a \leqslant 0$.

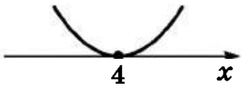
Розв'язання. Нерівність є квадратною, для її розв'язання знайдемо корені квадратного тричлена $x^2 + x(2a - 4) - 8a$. Маємо:
$D = (2a - 4)^2 - 4 \cdot (-8a) = 4a^2 - 16a + 16 + 32a = 4a^2 + 16a + 16 =$
$= 4(a^2 + 4a + 4) = 4(a + 2)^2$. Оскільки $D \geqslant 0$ для $a \in R$, то

$$x_{1,2} = \frac{-(2a - 4) \pm \sqrt{4(a + 2)^2}}{2} = 2 - a \pm |a + 2|.$$

Маємо: $x_1 = 4$; $x_2 = -2a$.
Щоб записати розв'язки нерівності, треба з'ясувати взаємне розташування цих коренів на числовій осі. Можливі три випадки такого розташування: $-2a > 4$, $-2a = 4$ та $-2a < 4$. Розглянемо кожний з них окремо.
1) Нехай $-2a > 4$, тобто $a < -2$. Тоді множиною розв'язків нерівності буде проміжок $[4; -2a]$ (мал. 6.8).
2) Нехай $-2a = 4$, тобто $a = -2$. Тоді $x = 4$ – єдиний розв'язок нерівності (мал. 6.9).
3) Нехай $-2a < 4$, тобто $a > -2$. Тоді множиною розв'язків нерівності буде проміжок $[-2a; 4]$ (мал. 6.10).



Мал. 6.8



Мал. 6.9

Мал. 6.10

Відповідь. Якщо $a < -2$, то $x \in [4; -2a]$; якщо $a = -2$, то $x = 4$; якщо $a > -2$, то $x \in [-2a; 4]$.

Що називають розв'язком нерівності? Що означає розв'язати нерівність? Які перетворення є рівносильними для нерівностей? Поясніть суть методу інтервалів. Запам'ятайте алгоритм розв'язування нерівності методом інтервалів. Які прийоми використовують під час розв'язування нерівностей з параметрами?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Чи рівносильні нерівності (6.1–6.2):

6.1. 1) $2x > 6$ і $x > 3$; 2) $-3x \geqslant 9$ і $x \geqslant -3$;
3) $-4x > -8$ і $x < 2$; 4) $4x < 0$ і $x > 0$?

6.2. 1) $-4x < 8$ і $x < -2$; 2) $2x \geqslant 0$ і $x \geqslant 0$;
3) $-2x > -10$ і $x < 5$; 4) $3x < -9$ і $x > -3$?

Розв'яжіть нерівність (6.3–6.6):

6.3. 1) $13x > 0$; 2) $-2x \geqslant 12$; 3) $-3x \leqslant -12$; 4) $7x < -14$.

6.4. 1) $-2x \geqslant 0$; 2) $3x < -12$; 3) $-7x \leqslant -21$; 4) $4x > -8$.

2 **6.5.** 1) $3x + 1 > 4 - 2x$; 2) $-(2 + x) + 3 \leqslant 4(x - 2)$;
3) $2(x - 1) + 4 \geqslant 2x$; 4) $\dfrac{x - 7}{2} < 4$.

6.6. 1) $12x + 3 > 2x - 4$; 2) $-(3 + x) + 7 \leqslant 4(x - 1)$;
3) $3(x + 2) + 7 < 3x$; 4) $\dfrac{x + 2}{3} \geqslant 5$.

Розв'яжіть подвійну нерівність (6.7–6.8):

6.7. 1) $-2 \leqslant x - 3 < 5$; 2) $5 < x + 7 \leqslant 9$;

3) $9 \leqslant 3x \leqslant 12$; 4) $0 < \frac{x}{3} \leqslant 2$.

6.8. 1) $-3 < x + 2 < 7$; 2) $0 < x - 5 \leqslant 3$;
3) $-8 \leqslant 2x < 12$; 4) $3 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 5$.

Розв'яжіть квадратичну нерівність, використовуючи ескіз графіка відповідної функції (6.9–6.10):

6.9. 1) $x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$; 2) $x^2 + x - 12 < 0$.

6.10. 1) $x^2 + x - 6 > 0$; 2) $x^2 - 5x - 6 \leqslant 0$.

Розв'яжіть нерівність методом інтервалів (6.11–6.16):

6.11. 1) $(x+1)(x-5) > 0$; 2) $(x-3)(2x+10) \leqslant 0$;
3) $x(2x-7) \geqslant 0$; 4) $(x+3)(3x-8) < 0$.

6.12. 1) $(x-1)(x+3) < 0$; 2) $(x+5)(2x-8) \geqslant 0$;
3) $x(4x+9) \leqslant 0$; 4) $(x-3)(5x+7) > 0$.

6.13. 1) $\frac{x+2}{x-7} \geqslant 0$; 2) $\frac{x-5}{x+3} < 0$; 3) $\frac{x}{2x-9} > 0$; 4) $\frac{3x-12}{x+1} \leqslant 0$.

6.14. 1) $\frac{x}{x-3} \leqslant 0$; 2) $\frac{x+2}{x-4} > 0$; 3) $\frac{2x+3}{x-7} < 0$; 4) $\frac{x-1}{2x+4} \geqslant 0$.

6.15. 1) $\frac{1}{1-x} \geqslant -3$; 2) $\frac{1}{2-x} \leqslant 1$; 3) $\frac{4x-1}{3x+1} > 1$;
4) $\frac{3x+4}{5-8x} \leqslant -3$; 5) $\frac{3x}{x-1} > 2$; 6) $\frac{2x}{x+1} < 1$.

6.16. 1) $\frac{1}{x-1} \geqslant -2$; 2) $\frac{1}{x+2} \leqslant 3$; 3) $\frac{5x+2}{3-x} > -7$;
4) $\frac{4x-1}{2-3x} \geqslant -\frac{5}{8}$; 5) $\frac{3x+2}{x-1} < 2$; 6) $\frac{2x-1}{x+3} > 1$.

3 **6.17.** **Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:**
1) $(x-1)(x+1) - (x-2)^2 \geqslant 17$; 2) $x^2 + 0{,}8x - 2{,}4 < 0$.

6.18. **Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:**
1) $x(x-7) - (x+3)(x-3) \geqslant 5$; 2) $x^2 - 0{,}5x - 3 < 0$.

Розв'яжіть нерівність методом інтервалів (6.19–6.22):

6.19. 1) $-x(x+1)(x-3) \geqslant 0$; 2) $(x^2-4)(x+7) < 0$;
3) $x^3 - 4x > 0$; 4) $x^3 - 5x^2 + x - 5 \leqslant 0$.

6.20. 1) $-x(x-5)(x+2) < 0$; 2) $(x-3)(x^2-1) \geqslant 0$;
3) $x^3 + 9x > 0$; 4) $x^3 - x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$.

6.21. 1) $\frac{x^2-9}{x+7} > 0$; 2) $\frac{x^2-4x}{x+3} \leqslant 0$.

6.22. 1) $\frac{x^2-1}{x-3} \geqslant 0$; 2) $\frac{x^2+3x}{x-5} < 0$.

Розв'яжіть нерівність з параметром a (6.23–6.24):

6.23. 1) $ax > 7$; 2) $ax \geqslant 0$; 3) $(a-1)x < a-1$; 4) $-ax > -3$.

6.24. 1) $ax \geqslant a$; 2) $(a+2)x < 0$.

Розв'яжіть нерівність (6.25–6.26):

6.25. 1) $\frac{9-2x}{x-2} < x+4$; 2) $\frac{1}{2x} \geqslant \frac{1}{1-x}$; 3) $\frac{81}{x} \geqslant x^3$;

4) $x \leqslant \frac{2}{x-1}$; 5) $x \geqslant \frac{6-x}{x-2}$; 6) $x+3+\frac{4}{x-1} < 0$.

6.26. 1) $3-x < \frac{5x}{x-2}$; 2) $\frac{1}{2-x} \geqslant \frac{1}{x}$; 3) $\frac{16}{x^3} \leqslant x$;

4) $x < \frac{2}{x+1}$; 5) $\frac{4x+3}{x+2} \geqslant x$; 6) $x-3+\frac{4}{x+1} > 0$.

6.27. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

1) $\frac{2x-3}{4-x} > \frac{1}{x}$; 2) $x-1 \leqslant \frac{4x}{3-x}$.

6.28. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

1) $\frac{12}{x} > \frac{x+4}{x-1}$; 2) $2-x \leqslant \frac{x+4}{x+1}$.

Скільки цілих розв'язків має нерівність (6.29–6.30):

6.29. $\frac{2x-3}{x} < \frac{3-2x}{x(x+1)}$? **6.30.** $\frac{3}{x(x-4)} > 1$?

4 Розв'яжіть нерівність (6.31–6.32):

6.31. 1) $\frac{x}{1-x} < x-6$; 2) $\frac{2x-8}{3-x} \geqslant 5-x$;

3) $\frac{x-3}{x^2+2x-5} > 0{,}5$; 4) $\frac{x-1}{x^2+6x-4} \geqslant \frac{1}{6}$.

6.32. 1) $\frac{2x^2-7}{x-2} \leqslant 4$; 2) $\frac{4-2x}{x-4} > x$;

3) $\frac{2x-1}{x^2+8x-1} > 0{,}25$; 4) $\frac{x-3}{x^2+6x-2} \geqslant \frac{1}{6}$.

Розв'яжіть нерівність методом інтервалів (6.33–6.34):

6.33. 1) $(x+3)^2(x^2-2x-3) \leqslant 0$; 2) $(x-1)^3(x+3)^2(x-2) > 0$;

3) $\frac{4x+x^2}{x^2+2x+1} < 0$; 4) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-4x} \geqslant 0$.

6.34. 1) $(x-3)^2(x^2-5x-6) < 0$; 2) $(x+1)^2(x-5)^3(x+3) \geqslant 0$;

3) $\frac{x^2}{-x^2+4x+5} \leqslant 0$; 4) $\frac{x^2-3x}{x^2+4x+4} > 0$.

6.35. (*Національна олімпіада Болгарії*). Розв'яжіть нерівність

$$\frac{1}{2(x-1)} - \frac{4}{x} + \frac{15}{2(x+1)} \geqslant 1.$$

Розв'яжіть нерівність з параметром a (6.36–6.37):

6.36. 1) $x^2 + (3a - 6)x - 18a < 0$; 2) $x^2 + (a + 7)x + 10 + 5a \geqslant 0$.

6.37. 1) $x^2 - (2a + 8)x + 16a > 0$; 2) $x^2 - (a + 1)x + 3a - 6 \leqslant 0$.

6.38. При яких значеннях параметра b нерівність:

1) $x^2 + 6bx + 1 < 0$ не має розв'язків;

2) $x^2 + (b + 1)x + 9 > 0$ справджується для всіх дійсних значень x?

6.39. Одна пігулка важить 20 мг і містить 5 % активної речовини. Дитині у віці до шести місяців лікар прописує 1,4 мг активної речовини на кожен кілограм маси на добу. Скільки пігулок треба дати дитині у віці чотирьох місяців і масою 5 кг протягом доби?

6.40. (*Задача ібн-Сіни (Авіценни)*). Перевірте, що коли число, поділене на 9, дає в остачі 1 або 8, то квадрат цього числа, поділений на 9, дає в остачі 1.

§ 7. ДІЛЕННЯ МНОГОЧЛЕНІВ. ТЕОРЕМА БЕЗУ ТА НАСЛІДКИ З НЕЇ

Раніше ви вже виконували деякі арифметичні дії з многочленами, зокрема, додавали, віднімали та множили многочлени. У цьому параграфі дізнаємося, як поділити многочлен на многочлен, розглянемо важливу теорему про ділення многочлена на двочлен та її застосування.

1. Многочлен від однієї змінної

Многочленом (поліномом) **n-го степеня з однією змінною називають вираз вигляду**

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_k x^k + a_1 x + a_0,$$

де x — змінна, a_n, a_{n-1}, ..., a_0 — числа, $a_n \neq 0$.

Запис многочлена в такому вигляді називають *стандартним* виглядом многочлена, доданок $a_n x^n$ – *старшим членом*, a_n – *старшим коефіцієнтом*, a_0 – *вільним членом* многочлена $P(x)$.

Якщо $P(x) = a_0$, де $a_0 \neq 0$, то многочлен $P(x)$ називають *многочленом нульового степеня*. Многочлен $P(x) = 0$ називають *нульовим многочленом*.

Значенням многочлена $P(x)$ при $x = x_0$ називають число $P(x_0)$, яке отримують, якщо у вищезазначений запис многочлена замість x підставити x_0 і знайти значення отриманого виразу.

Наприклад, якщо $P(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$, то $P(2) = 2^3 - 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = 9$ – значення многочлена $P(x)$ при $x = 2$.

Очевидно, що $P(0) = a_0$, $P(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$. Тобто значення будь-якого многочлена $P(x)$ для $x = 0$ дорівнює вільному члену цього многочлена, а для $x = 1$ – сумі всіх його коефіцієнтів.

Приклад 1. Знайти вільний член і суму всіх коефіцієнтів многочлена $P(x)$, який тотожно дорівнює виразу
$$(3x^2-2x-3)^2(4x^3-2x+1)^5.$$
Розв'язання. Для виконання вимоги задачі не обов'язково зводити даний вираз до многочлена стандартного вигляду, адже $a_0 = P(0)$. Знайдемо значення виразу $P(x)$ при $x = 0$: $a_0 = (3\cdot 0^2 - 2\cdot 0 - 3)^2(4\cdot 0^3 - 2\cdot 0 + 1)^5 = (-3)^2\cdot 1^5 = 9$. Так само знайдемо суму всіх коефіцієнтів многочлена, яка дорівнює значенню виразу $P(x)$ при $x = 1$. Маємо:
$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = P(1) =$$
$$= (3\cdot 1^2 - 2\cdot 1 - 3)^2(4\cdot 1^3 - 2\cdot 1 + 1)^5 = (-2)^2\cdot 3^5 = 972.$$
Відповідь. $a_0 = 9$; $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0 = 972$.

! **Число a називають *коренем многочлена* $P(x)$, якщо $P(a) = 0$.**

Наприклад, коренями многочлена $2x^2 + 3x - 5$ є числа 1 і $-2,5$ (перевірте це самостійно).

! **Многочлени називають *тотожно рівними*, якщо вони однакового степеня і їх відповідні коефіцієнти при однакових степенях змінних також між собою рівні.**

2. Ділення многочленів

Як ми вже знаємо, результатом додавання, віднімання або множення многочленів є многочлен. Розглянемо, як знайти частку двох многочленів.

Означимо дію ділення многочленів аналогічно до дії ділення натуральних чисел націло, тобто без остачі. Раніше вже було домовлено, що у випадку натуральних чисел замість терміну «ділиться без остачі» використовуватимемо «ділиться». Так само домовимося і в теорії ділення многочленів.

Нагадаємо, про натуральне число a кажуть, що воно ділиться на натуральне число b, якщо існує таке число q, що $a = bq$. Аналогічно означимо і дію ділення многочленів.

! ***Кажуть, що многочлен $P(x)$ ділиться на многочлен $B(x)$*** **(де $B(x)$ – ненульовий многочлен), якщо існує такий многочлен $Q(x)$, що для будь-якого дійсного значення x справджується рівність: $P(x) = B(x)\cdot Q(x)$.**

Многочлен $A(x)$ при цьому називають *діленим*, многочлен $B(x)$ – *дільником*, а многочлен $Q(x)$ – *часткою*.

Наприклад, якщо $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$, це означає, що многочлен $x^3 - 8$ ділиться на двочлен $x - 2$, при цьому в частці отримуємо многочлен $x^2 + 2x + 4$, і навпаки, $x^3 - 8$ ділиться на $x^2 + 2x + 4$, при цьому в частці отримуємо $x - 2$.

Знаходити частку від ділення многочлена на многочлен зручно у спосіб, подібний до ділення чисел «у стовпчик», його ще називають діленням «куточком».

Приклад 2. Поділити многочлен $x^3-2x^2+3x+22$ на двочлен $x+2$.

Р о з в ' я з а н н я. Виконаємо ділення «куточком». Спочатку знайдемо результат ділення x^3 (старшого члена діленого) на x (старший член дільника). Для цього з'ясуємо, який одночлен при множенні на одночлен x дає x^3. Це буде x^2. Очевидно, що $x^2\cdot(x+2)=x^3+2x^2$. Цей результат множення записуємо під дільником і виконуємо почленне віднімання: $(x^3-2x^2)-(x^3+2x^2)$, у результаті отримаємо $-4x^2$. До отриманої різниці додаємо $3x$ (наступний член діленого) і у той самий спосіб продовжуємо процес ділення.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-2x^2+3x+22 & x+2 \\ \cline{2-2}
-\;\underline{x^3+2x^2} & x^2-4x+11 \\
-4x^2+3x & \\
-\;\underline{-4x^2-8x} & \\
11x+22 & \\
-\;\underline{11x+22} & \\
0 &
\end{array}
$$

У результаті отримаємо частку: $x^2-4x+11$.

Отже, $x^3-2x^2+3x+22=(x+2)(x^2-4x+11)$.

Щоб перевірити, чи правильно виконано ділення, достатньо помножити дільник на отриману частку і порівняти отриманий добуток з діленим.

Якщо многочлен $P(x)$ ділиться на ненульовий многочлен $B(x)$ і справджується рівність $P(x)=B(x)\cdot Q(x)$, то, очевидно, що степінь многочлена $P(x)$ дорівнює сумі степенів многочленів $B(x)$ і $Q(x)$.

Як і для натуральних чисел, не завжди один многочлен ділиться на інший. Так, наприклад, многочлен x^2+4 не ділиться на многочлен $x-1$. Справді, припустимо, що існує многочлен $Q(x)$ такий, що для будь-якого значення x справджується рівність: $x^2+4=(x-1)Q(x)$. При цьому для $x=1$ отримаємо рівність: $5=0\cdot Q(x)$, яка не є правильною. Отже, многочлен x^2+4 не ділиться на многочлен $x-1$.

Тому є потреба означити дію ділення многочленів з остачею.

! ***Кажуть, що многочлен $P(x)$ ділиться на ненульовий многочлен $B(x)$ з остачею,*** **якщо існують такі многочлени $Q(x)$ і $R(x)$, що для будь-якого дійсного значення x справджується рівність $P(x)=B(x)\cdot Q(x)+R(x)$, при цьому степінь многочлена $R(x)$ менший за степінь многочлена $B(x)$.**

Зазначимо, що в рівності $P(x)=B(x)\cdot Q(x)+R(x)$ многочлен $Q(x)$ називають *неповною часткою*, а $R(x)$ – *остачею*.

Знайти неповну частку та остачу від ділення одного многочлена на інший також можна «куточком». Виконаємо, наприклад, ділення многочлена $3x^4 - x^3 + 4x - 2$ на многочлен $x^2 - x + 1$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,3x^4 - x^3 + 4x - 2 & x^2 - x + 1 \\
\underline{3x^4 - 3x^3 + 3x^2} & 3x^2 + 2x - 1 \\
-\,2x^3 - 3x^2 + 4x & \\
\underline{2x^3 - 2x^2 + 2x} & \\
-\,-x^2 + 2x - 2 & \\
\underline{-x^2 + x - 1} & \\
x - 1 &
\end{array}
$$

Отримали неповну частку $3x^2 + 2x - 1$ і остачу $x - 1$.

Отже, можемо записати, що

$$3x^4 - x^3 + 4x - 2 = (x^2 - x + 1)(3x^2 + 2x - 1) + (x - 1).$$

Дріб, чисельником і знаменником якого є многочлен з однією і тією самою змінною, називають *правильним*, якщо степінь його чисельника менший за степінь знаменника, і відповідно – *неправильним*, якщо степінь його чисельника не менший за степінь знаменника. Ділення многочленів (без остачі чи з остачею), дозволяє у неправильних раціональних дробах *виділяти цілу частину*.

Приклад 3. Виділити цілу частину дробу $\dfrac{3x^4 - x^3 + 4x - 2}{x^2 - x + 1}$.

Розв'язання. Вище ми вже розклали на множники многочлен, що є чисельником дробу. Ураховуючи це, маємо:

$$\frac{3x^4 - x^3 + 4x - 2}{x^2 - x + 1} = \frac{(x^2 - x + 1)(3x^2 + 2x - 1) + (x - 1)}{x^2 - x + 1} =$$

$$= \frac{(x^2 - x + 1)(3x^2 + 2x - 1)}{x^2 - x + 1} + \frac{x - 1}{x^2 - x + 1} = 3x^2 + 2x - 1 + \frac{x - 1}{x^2 - x + 1}.$$

Відповідь. $3x^2 + 2x - 1 + \dfrac{x - 1}{x^2 - x + 1}$.

3. Теорема Безу та її наслідки

Цікаву властивість ділення многочлена $P(x)$ на двочлен $x - c$ помітив французький математик Етьєн Безу. Розглянемо цю властивість.

Теорема Безу. Остача від ділення многочлена $P(x)$ на двочлен $x - c$ дорівнює $P(c)$.

Доведення. Оскільки степінь дільника (двочлена $x - c$) дорівнює 1, то степінь остачі має бути нульовою (тобто остачею є або деяке відмінне від нуля число, або остача дорівнює нулю, тобто $P(x)$ на $x - c$ ділиться без остачі).

Припустимо остачею є деяке число r. Тоді

$$P(x) = (x - c)Q(x) + r.$$

Якщо $x = c$, то $P(c) = 0 \cdot Q(c) + r = 0 + r = r$, тобто $r = P(c)$. ■

Е. Безу (1730–1783)

Розглянемо наслідки з теореми Безу.

Наслідок 1. Якщо число c є коренем многочлена $P(x)$, то цей многочлен ділиться на $x - c$ без остачі.

Доведення. Нехай c є коренем многочлена $P(x)$, тоді $P(c) = 0$, але $r = P(c) = 0$, отже, $r = 0$. ■

Наслідок 2. Якщо многочлен $P(x)$ ділиться на $x - c$ без остачі, то число c є коренем многочлена $P(x)$.

Доведення. Якщо $P(x)$ ділиться на $x - c$ без остачі, то у рівності $P(x) = (x - c)Q(x) + r$ маємо, що $r = 0$. Але $r = P(c)$, тому $P(c) = 0$. Отже, c – корінь многочлена $P(x)$. ■

Наслідок 3. Якщо $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ – попарно різні корені многочлена $P(x)$, то

$$P(x) = (x - c_1)(x - c_2)...(x - c_n) \cdot Q(x).$$

Доведення. Оскільки c_1 – корінь многочлена $P(x)$, то $P(x) = (x - c_1)Q_1(x)$ (за наслідком 1). Але c_2 – також корінь многочлена $P(x)$, тому $P(c_2) = 0$. У рівність $P(x) = (x - c_1)Q_1(x)$ підставимо $x = c_2$, матимемо $P(c_2) = (c_2 - c_1)Q_1(c_2)$; тобто $0 = (c_2 - c_1)Q_1(c_2)$. Оскільки $c_2 \neq c_1$, то $Q_1(c_2) = 0$, а тому c_2 – корінь многочлена $Q_1(x)$. Тоді $Q_1(x) = (x - c_2)Q_2(x)$, а $P(x) = (x - c_1)(x - c_2)Q_2(x)$.

Міркуючи так само далі, матимемо:

$P(x) = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)\ldots(x - c_n) \cdot Q(x)$. ■

Наслідок 4. Многочлен n-го степеня має не більше ніж n різних коренів.

Доведення. Нехай многочлен n-го степеня $P(x)$ має $(n + 1)$ різних коренів $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}$. Тоді (за наслідком 3): $P(x) = (x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n)(x - c_{n+1})Q(x)$. У лівій частині рівності маємо многочлен n-го степеня, а у правій – не менш ніж $(n + 1)$-го, що неможливо. Тому многочлен n-го степеня має не більше ніж n різних коренів. ■

Розглянемо вправи на застосування теореми Безу та її наслідків.

Приклад 4. Знайти остачу від ділення многочлена $x^3 - x^2 + 7x - 2$ на двочлен $x + 3$.

Розв'язання. Нехай $P(x) = x^3 - x^2 + 7x - 2$, r – остача від ділення $P(x)$ на $x + 3$. Ураховуючи, що $x + 3 = x - (-3)$ та теорему Безу, матимемо, що $r = P(-3)$.
Тоді $r = P(-3) = (-3)^3 - (-3)^2 + 7 \cdot (-3) - 2 = -59$.

Відповідь. -59.

Приклад 5. Довести, що вираз $P(x) = x^{15} + (x - 1)^{16} - 1$ ділиться на вираз $x^2 - x$.

Розв'язання. Оскільки $P(0) = 0^{15} + (-1)^{16} - 1 = 0$ і $P(1) = 1^{15} + 0^{16} - 1 = 0$, то $P(x)$ ділиться і на x, і на $x - 1$.
Нехай вираз $P(x)$ тотожно рівний многочлену $P_1(x)$. Тоді за наслідком 3 маємо: $P_1(x) = x(x - 1)Q(x) = (x^2 - x)Q(x)$. Це означає, що $P_1(x)$, а отже і $P(x)$, ділиться на вираз $x^2 - x$.

Приклад 6. Многочлен $P(x)$ при діленні на $x + 1$ дає в остачі 6, а при діленні на $x - 1$ дає в остачі 2. Яку остачу отримаємо від ділення многочлена $P(x)$ на $x^2 - 1$?

Розв'язання. 1) Оскільки степінь многочлена $x^2 - 1$ дорівнює 2, то степінь шуканої остачі – не більший за 1 або взагалі в остачі 0 (нульовий многочлен).
Для розв'язування задачі застосуємо *метод невизначених коефіцієнтів*. Припустимо, що остача є многочленом першого степеня, отже, має вигляд $ax + b$ (a і b і є невизначеними, тобто поки невідомими, коефіцієнтами).
2) Нехай $P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + (ax + b)$. Оскільки при діленні многочлена $P(x)$ на $x + 1$ в остачі маємо 6, то $P(-1) = 6$, а тому $6 = 0 \cdot Q(-1) + (a \cdot (-1) + b) = 0 + (-a + b)$, отже, $b - a = 6$.
Аналогічно, $P(1) = 2$, тоді $2 = 0 \cdot Q(1) + (a + b)$, отже, $a + b = 2$.
3) Маємо систему рівнянь: $\begin{cases} b - a = 6, \\ a + b = 2; \end{cases}$ звідки $\begin{cases} a = -2, \\ b = 4. \end{cases}$
4) Отже, остачею від ділення $P(x)$ на $x^2 - 1$ є двочлен $-2x + 4$.

Відповідь. $-2x + 4$.

4. Теорема Безу і зведене алгебраїчне рівняння

Рівняння вигляду

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

де $a_n \neq 0$, a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 – деякі числа, називають *алгебраїчним рівнянням n-го степеня.*

Числа a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 називають *коефіцієнтами алгебраїчного рівняння n-го степеня*, a_n – *старшим коефіцієнтом*, a_0 – *вільним членом*.

Утакому вигляді можна записати і відомі нам лінійне рівняння: $a_1x + a_0 = 0$ та квадратне: $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$. Алгебраїчні рівняння, степінь яких більший за 2, прийнято називати алгебраїчними рівняннями *вищих степенів*. Раніше ви вже розглядали ті алгебраїчні рівняння вищих степенів, які можна було розв'язати розкладанням на множники, степінь яких не перевищував 2, або введенням нової змінної, чим також зводили рівняння до квадратного.

Розглянемо ще один спосіб розв'язування алгебраїчних рівнянь вищих степенів із цілими коефіцієнтами.

Нехай $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ – алгебраїчне рівняння із цілими коефіцієнтами, а $x = c$ – його цілий корінь. Тоді, за наслідком 3, маємо:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = (x - c)Q(x), \qquad (*)$$

де $Q(x)$ – деякий многочлен $(n - 1)$-го степеня, наприклад $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0$. Із процесу ділення многочленів «куточком» зрозуміло, що якщо многочлен із цілими коефіцієнтами ділиться на двочлен $x - c$, то часткою теж буде многочлен із цілими коефіцієнтами, тому, наприклад, b_0 – ціле число. Оскільки многочлени в рівності (*) між собою рівні, то рівні і їх вільні члени, тобто: $a_0 = -cb_0$. А оскільки a_0, b_0 і c – цілі числа, то число c є дільником числа a_0. Дійдемо важливого висновку:

якщо алгебраїчне рівняння із цілими коефіцієнтами має цілий корінь, то він є дільником вільного члена.

Це дає можливість шукати цілі корені алгебраїчного рівняння серед дільників вільного члена (якщо корені існують). Але це ще не означає, що дільники вільного члена обов'язково будуть коренями рівняння. Наприклад, для рівняння $3x^2 + 2x - 5 = 0$ дільниками вільного члена є числа ±1; ±5, проте коренем рівняння є лише число 1. Для рівняння $6x^2 - 3x - 1 = 0$ дільниками вільного члена є числа 1 і -1, проте жодне з них не є коренем рівняння.

Отриманий висновок можна застосувати до будь-яких алгебраїчних рівнянь вищих степенів. Найбільш зручно його використовувати для зведеного рівняння.

Нагадаємо, що

алгебраїчне рівняння загального вигляду називають *зведеним*, якщо $a_n = 1$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння: $x^4 - x^3 - x^2 + 7x - 6 = 0$.

Розв'язання. 1) Цілі корені рівняння будемо шукати серед дільників числа -6, тобто серед чисел ±1; ±2; ±3; ±6. Достатньо знайти хоча б один корінь. Наприклад, у нашому випадку $x = 1$ – корінь рівняння. Зверніть увагу, що коли коренем алгебраїчного рівняння є число 1, то сума всіх його коефіцієнтів дорівнює нулю.

2) Виконаємо ділення многочлена $x^4 - x^3 - x^2 + 7x - 6$ на двочлен $x - 1$ «куточком», отримаємо, що:

$$x^4 - x^3 - x^2 + 7x - 6 = (x - 1)(x^3 - x + 6).$$

3) Маємо рівняння, рівносильне початковому:

$$(x - 1)(x^3 - x + 6) = 0.$$

4) Тепер шукаємо корені многочлена $x^3 - x + 6$ серед дільників числа 6, а саме, серед чисел ±1; ±2; ±3; ±6. Отримаємо, що $x = -2$ – корінь многочлена (упевніться в цьому самостійно). Поділимо $x^3 - x + 6$ на $x + 2$ «куточком», отримаємо, що: $x^3 - x + 6 = (x + 2)(x^2 - 2x + 3)$.

5) Маємо рівняння, рівносильне початковому:

$$(x - 1)(x + 2)(x^2 - 2x + 3) = 0.$$

Квадратний тричлен $x^2 - 2x + 3$ коренів не має.

Отже, $x_1 = 1$; $x_2 = -2$ – корені початкового рівняння.

В і д п о в і д ь. 1; –2.

5. Розв'язування незведених алгебраїчних рівнянь вищих степенів

Для розв'язування незведених алгебраїчних рівнянь вищих степенів можна застосувати висновок з попереднього пункту. Досить часто незведене рівняння цілих коренів не має, проте має раціональні корені. Можна довести, що

якщо алгебраїчне рівняння із цілими коефіцієнтами має корінь вигляду $\frac{p}{q}$, то p є дільником вільного члена, а q – дільником старшого коефіцієнта.

Проте цей спосіб призводить до доволі громіздких обчислень, оскільки корінь доведеться шукати серед великої кількості чисел. Так, наприклад, для рівняння $5x^3 + 6x^2 + 11x + 2 = 0$ чисельниками дробу $\frac{p}{q}$ можуть бути числа ±1; ±2, а знаменниками – числа ±1; ±5.

Розглянемо більш зручний спосіб розв'язування такого рівняння, який полягає у введенні нової змінної так, щоб рівняння стало зведеним. Розглянемо цей спосіб на прикладі.

Приклад 8. Розв'язати рівняння: $5x^3 + 6x^2 + 11x + 2 = 0$.

Р о з в ' я з а н н я. Помножимо ліву і праву частини рівняння на 5^2. Маємо: $5^3x^3 + 6 \cdot 5^2x^2 + 11 \cdot 5^2x + 2 \cdot 5^2 = 0$, тобто $(5x)^3 + 6 \cdot (5x)^2 + 55 \cdot 5x + 50 = 0$. Нехай $5x = t$, тоді маємо зведене рівняння 3-го степеня: $t^3 + 6t^2 + 55t + 50 = 0$. Далі шукаємо корені цього рівняння серед дільників вільного члена (зробіть це самостійно), $t = -1$ – єдиний корінь цього рівняння. Повертаючись до заміни, матимемо: $t = -1$, тому $5x = -1$, отже, $x = -0,2$.

В і д п о в і д ь. –0,2.

Який вираз називають многочленом n-го степеня з однією змінною; його степенем; старшим членом; старшим коефіцієнтом; вільним членом? Що називають коренем многочлена? У якому випадку кажуть, що многочлен $P(x)$ ділиться на $B(x)$; ділиться на многочлен $B(x)$ з остачею? Сформулюйте і доведіть теорему Безу. Сформулюйте і доведіть наслідки з теореми Безу.

● Що називають алгебраїчним рівнянням n-го степеня; його старшим коефіцієнтом; вільним членом? ● Яке алгебраїчне рівняння називають зведеним? ● Серед яких чисел можна шукати цілі корені зведеного алгебраїчного рівняння?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **7.1.** Чи є коренем многочлена $x^3 - 4x^2 + x + 6$ число:
1) -3; 2) -2; 3) -1; 4) 1; 5) 2; 6) 3?

7.2. Чи є коренем многочлена $x^3 + x^2 - 2x$ число:
1) -2; 2) -1; 3) 0; 4) 1; 5) 2; 6) 3?

2 Знайдіть остачу від ділення многочлена $P(x)$ на двочлен $B(x)$, якщо (7.3–7.4):

7.3. 1) $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, $B(x) = x - 1$;
2) $P(x) = 2x^3 + x - 11$, $B(x) = x + 3$;
3) $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x - 3$, $B(x) = x - 2$;
4) $P(x) = 3x^4 - x^3 + x^2$, $B(x) = x + 1$.

7.4. 1) $P(x) = x^3 + 2x^2 - x$, $B(x) = x + 2$;
2) $P(x) = 3x^3 - x^2 - 2$, $B(x) = x - 1$;
3) $P(x) = x^4 - x^2 + 11$, $B(x) = x + 1$;
4) $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + x$, $B(x) = x - 3$.

Виконайте ділення многочлена $P(x)$ на многочлен $B(x)$ (7.5–7.6):

7.5. 1) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 40$, $B(x) = x + 2$;
2) $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x$, $B(x) = x^2 - x$.

7.6. 1) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 4$, $B(x) = x - 2$;
2) $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3x$, $B(x) = x^2 + x$.

Виконайте ділення з остачею многочлена $P(x)$ на многочлен $B(x)$ і знайдіть неповну частку та остачу (7.7–7.8):

7.7. 1) $P(x) = 4x^3 + 7x^2 - 2x - 1$, $B(x) = x - 3$;
2) $P(x) = 5x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 2$, $B(x) = x^2 + x - 1$.

7.8. 1) $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$, $B(x) = x + 3$;
2) $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1$, $B(x) = x^2 - x + 1$.

Чи ділиться многочлен $P(x)$ на двочлен $B(x)$, якщо (7.9 – 7.10):

7.9. 1) $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 28$, $B(x) = x + 4$;
2) $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x - 9$, $B(x) = x - 2$?

7.10. 1) $P(x) = x^3 - x^2 + 11$, $B(x) = x - 4$;
2) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 7x - 5$, $B(x) = x + 1$?

3 **7.11.** Знайдіть вільний член і суму всіх коефіцієнтів многочлена $P(x)$, який тотожно дорівнює виразу $(2x^2 - 2x - 1)^7(x^3 + 1)^4$.

7.12. Знайдіть вільний член і суму всіх коефіцієнтів многочлена $P(x)$, який тотожно дорівнює виразу $(x^3 - x - 1)^9(x^3 + x)^5$.

7.13. При якому значенні параметра m остача від ділення многочлена $2x^5 - 3x^3 + 11x^2 - x + m$ на $x + 2$ дорівнює 3?

7.14. При якому значенні параметра c остача від ділення многочлена $x^3 - 3x^2 + 5x + c$ на $x + 1$ дорівнює 4?

7.15. Знайдіть, при якому значенні параметра a многочлен $x^4 - ax^3 + x^2 - 5x + 3$ ділиться на многочлен $x - 1$?

7.16. Знайдіть, при якому значенні параметра k многочлен $x^4 - 4x^3 + kx^2 - 13x + 6$ ділиться на многочлен $x - 2$?

Виділіть цілу частину з дробу (7.17–7.18):

7.17. 1) $\dfrac{x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 7}{x + 1}$; 2) $\dfrac{x^3 + 7x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 1}$.

7.18. 1) $\dfrac{x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 4x + 11}{x - 1}$; 2) $\dfrac{x^3 + 4x^2 - 2x + 5}{x^2 + 2x + 5}$.

7.19. Доведіть, що вираз $(x - 1)^{2n} - 1$ ділиться на многочлен $x^2 - 2x$ для будь-якого натурального значення n.

7.20. Доведіть, що вираз $(x + 1)^{2019} + x^{2020} - 1$ ділиться на многочлен $x^2 + x$.

7.21. При яких значеннях параметрів a і b остача від ділення многочлена $x^3 - 2x^2 + ax + b$ на $x + 1$ дорівнює числу -15, а від ділення на $x - 2$ – числу 3?

7.22. При яких значеннях параметрів a і b остача від ділення многочлена $x^3 + ax^2 + 3x + b$ на $x + 2$ дорівнює числу -5, а від ділення на $x - 1$ – числу 7?

Розкладіть на множники многочлен (7.23 – 7.24):

7.23. 1) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$; 2) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$.

7.24. 1) $x^3 - 2x^2 - 11x + 12$; 2) $x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 14x - 8$.

Розв'яжіть рівняння (7.25 – 7.26):

7.25. 1) $x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0$; 2) $x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = 0$;
3) $x^4 - x^3 - x^2 + 7x - 6 = 0$;
4) $x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 17x + 30 = 0$.

7.26. 1) $x^3 + 4x^2 + 7x + 12 = 0$; 2) $x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0$;
3) $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10 = 0$;
4) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 8x + 28 = 0$.

Розв'яжіть нерівність (7.27–7.28):

7.27. 1) $x^2 - 2x^2 - 5x + 6 > 0$; 2) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \le 0$.

7.28. 1) $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \ge 0$; 2) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 < 0$.

4 **7.29.** При яких значеннях параметрів a і b многочлен $ax^3 + bx^2 - 37x + 14$ ділиться на многочлен $x^2 + x - 2$?

7.30. При яких значеннях параметрів a і b многочлен $x^3 + ax^2 + bx + 2$ ділиться на многочлен $x^2 - 1$?

Розкладіть на множники многочлен (7.31–7.32):

7.31. 1) $x^5 - 7x^4 + 23x^3 - 40x^2 + 28x$;

2) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x + 2$.

7.32. 1) $x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 16x^2 + 20x$;

2) $x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 7x - 6$.

Розв'яжіть рівняння **(7.33–7.34)**:

7.33. 1) $4x^3 + 3x^2 + 19x - 5 = 0$; 2) $3x^3 + 7x^2 - x - 1 = 0$.

7.34. 1) $9x^3 + 10x^2 + 19x + 2 = 0$; 2) $2x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = 0$.

7.35. Многочлен $P(x)$ при діленні на $x - 1$ дає в остачі 1, а при діленні на $x - 2$ дає в остачі 4. Яку остачу отримаємо від ділення многочлена $P(x)$ на $x^2 - 3x + 2$?

7.36. Многочлен $P(x)$ як при діленні на $x + 1$, так і при діленні на $x - 2$ дає в остачі 2. Яку остачу отримаємо від ділення многочлена $P(x)$ на $x^2 - x - 2$?

Розв'яжіть нерівність **(7.37–7.38)**:

7.37. $x^3 - 3x + 2 \leqslant 0$. **7.38.** $x^3 - x^2 - 5x - 3 \geqslant 0$.

7.39. Гумові покришки коліс автомобіля стираються, і щорічно кожен автомобіль розсіює в повітря 10 кілограмів гумового пилу. Скільки такого пилу здатні виробити за рік всі автомобілі невеликого містечка, у якому проживає 3000 родин і чверть із них має по одному автомобілю?

7.40. Знайдіть усі функції $f(x)$, визначені на множині всіх дійсних чисел, таких, що для будь-якого $x \in R$ справджується рівність:

1) $Af(x) + Bf(-x) = Cx^{2k-1}$, де A, B, C – числа, причому $A \neq 0$, $B \neq 0$, $A \pm B \neq 0$, $C \neq 0$, $k \in R$;

2) $Af(x) + Bf(-x) = Cx^{2k}$, де A, B, C – числа, причому $A \neq 0$, $B \neq 0$, $A \pm B \neq 0$, $C \neq 0$, $k \in R$.

§ 8. МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

Спостерігаючи за навколишнім світом, люди, зазвичай, роблять загальні висновки на основі окремих спостережень. Наприклад, спостерігаючи за тим, що після ночі настає ранок, а після вечора – ніч, людина робить висновок про настання певного часу доби. Цей висновок є правильним.

Загальні висновки, які зроблено на основі окремих спостережень, називають *індуктивними*, а сам метод таких міркувань – *індуктивним методом*, або *індукцією* (від лат. *inducatio* – наведення). Наш приклад щодо висновку про настання певного часу доби є індуктивним.

П'єр Ферма
(1607–1665)

Проте за допомогою індуктивного методу не завжди можна отримати правильні висновки. Наприклад, у XVII ст. видатний французький математик П. Ферма помітив, що

Леонард Ейлер (1707–1783)

числа вигляду $F_n = 2^{2^n} + 1$, якщо $n = 0; 1; 2; 3; 4$, є простими. Справді, числа $F_0 = 2^1 + 1 = 3$; $F_1 = 2^2 + 1 = 5$; $F_2 = 2^4 + 1 = 17$; $F_3 = 2^8 + 1 = 257$; $F_4 = 2^{16} + 1 = 65\ 537$ – прості. Ферма припустив, що і при будь-якому іншому натуральному n числа такого вигляду будуть простими (їх стали називати простими числами Ферма). Але в 1732 р. інший видатний математик Л. Ейлер (1707–1783) показав, що при $n = 5$ маємо число $F_5 = 2^{32} + 1 = 4\ 294\ 967\ 297 = 641 \cdot 6\ 700\ 417$, яке вже не є простим. Отже, гіпотезу Ферма, до якої він прийшов індуктивним методом, було спростовано.

Таким чином, можна стверджувати, що в одних випадках міркування за індукцією приводить до правильних висновків, а в інших – до неправильних. А тому з'явилася потреба в методі, який дозволив би встановлювати, у яких випадках гіпотеза є істинною, а в яких – хибною. Таким методом є *метод математичної індукції*.

1. Метод математичної індукції

Сформулюємо суть методу математичної індукції.

! **Якщо висловлення $S(n)$, у формулюванні якого фігурує натуральне число n, правильне для $n = 1$, а з припущення, що воно правильне для $n = k$, випливає, що воно є правильним для $n = k + 1$, то висловлення $S(n)$ правильне для будь-якого натурального n.**

Це твердження називають *принципом математичної індукції*. Із цього формулювання зрозуміло, що методом математичної індукції можна доводити лише ті твердження, висновки яких залежать від натурального числа (інколи від нуля та натуральних чисел), тобто лише математичні.

Отже, щоб довести таке твердження методом математичної індукції, треба:

1) *перевірити, що твердження справджується для $n = 1$ (іноді для деяких наступних за ним натуральних чисел)*;

2) *припустивши, що твердження справджується для $n = k$, довести, що воно є правильним для $n = k + 1$.*

Таким чином, на першому етапі перевіряють правильність твердження $S(1)$, яке називають *базою індукції*, а на другому – на основі твердження $S(k)$ (яке називають *припущенням індукції*) доводять твердження $S(k + 1)$. Це доведення називають *індуктивним переходом*, а сам перехід від $S(k)$ до $S(k + 1)$ – *кроком індукції*.

За допомогою методу математичної індукції можна доводити різні твердження, у формулюванні яких фігурує натуральне число n: числові тотожності, числові нерівності, твердження про подільність чисел, геометричні факти тощо.

2. Доведення числових тотожностей

Приклад 1. Довести, що для будь-якого $n \in N$ справджується рівність:

$$1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Доведення. 1) Перевіримо правильність твердження для $n = 1$. Маємо: $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$, рівність є правильною.

2) Нехай рівність правильна для $n = k$, тобто:

$$1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}.$$

Для $n = k + 1$ маємо рівність:

$$1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6},$$

доведемо її. Перетворимо ліву частину цієї рівності, ураховуючи наше припущення:

$$1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\left(\frac{k}{3}+1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \cdot \frac{k+3}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}.$$

Отже, ліва частина рівності для $n = k + 1$ дорівнює її правій частині, тобто рівність справджується і для $n = k + 1$. Тому, за принципом математичної індукції, рівність правильна для будь-якого $n \in N$. ■

Приклад 2. Довести, що для будь-якого $n \in N$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Доведення. 1) Якщо $n = 1$, маємо $1^3 = \left(\frac{1(1+2)}{2}\right)^2$ – правильна числова рівність.

2) Припустимо, що для $n = k$ справджується рівність:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

Для $n = k + 1$ маємо:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Доведемо цю рівність. Перетворимо її ліву частину:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 =$$

$$= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right) = (k+1)^2\cdot\frac{k^2+4k+4}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} =$$

$$= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2,$$ отримали праву її частину.

Отже, рівність для $n = k + 1$ є правильною. Тому, за принципом математичної індукції, рівність правильна і для будь-якого $n \in N$. ■

3. Доведення гіпотез

Метод математичної індукції допоможе нам і в задачах, де спочатку на основі кількох спостережень установлюють деяку закономірність або формулу для обчислення деякої суми чи добутку, що залежать від натурального числа n, а потім методом математичної індукції доводять її істинність.

Приклад 3. Знайти формулу для обчислення добутку $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, де $n \in N$, $n \geqslant 2$, та довести її.

Р о з в ' я з а н н я. Спочатку обчислимо кілька перших значень цього добутку.

Для $n = 2$: $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}$;

Для $n = 3$: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}=\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{3+1}{2\cdot 3}$;

Для $n = 4$: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}=\frac{5}{8}=\frac{4+1}{2\cdot 4}$.

Висунемо гіпотезу про те, що $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$, де $n \in N$, $n \geqslant 2$.

Доведемо цю гіпотезу методом математичної індукції.

1) Для $n = 2$ перевірено вище.

2) Припустимо, що для $n = k$ справджується рівність:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k+1}{2k}.$$

Запишемо рівність для $n = k + 1$:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{(k+1)+1}{2(k+1)}$$

і доведемо її.

Перетворимо ліву частину цієї рівності:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{k^2+2k+1-1}{(k+1)^2}=$$

$$=\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}=\frac{k+2}{2(k+1)}=\frac{(k+1)+1}{2(k+1)},$$ отримали її праву частину.

Отже, для $n = k + 1$ наша гіпотеза є істинною, тому запропонована формула є правильною для будь-якого $n \in N$, $n \geqslant 2$. ■

Відповідь. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$.

4. Доведення нерівностей

Приклад 4. Довести, що для всіх $n \in N$, $n \geqslant 3$ справджується нерівність: $2^n > 2n + 1$.

Доведення. 1) Якщо $n = 3$, то, справді, $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$.
2) Припустимо, що для $n = k$ справджується нерівність: $2^k > 2k + 1$.
Запишемо нерівність для $n = k + 1$, маємо: $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$.
Доведемо, що вона є правильною.
Оскільки нерівність для $n = k$ за припущенням є правильною, помножимо обидві її частини на 2. Матимемо: $2 \cdot 2^k > 2(2k + 1)$, а враховуючи, що $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, отримаємо: $2^{k+1} > 2(2k + 1)$.
Розглянемо праву частину цієї нерівності:
$2(2k + 1) = 4k + 2 = 2k + 2k + 2 = 2k + 2(k + 1) + 1 - 1 = 2(k + 1) + 1 + (2k - 1)$.
Оскільки $2k - 1 > 0$, то $2(k + 1) + 1 + (2k - 1) > 2(k + 1) + 1$.
Тому, якщо $2^{k+1} > 2(2k + 1)$, а $2(2k + 1) > 2(k + 1) + 1$, то $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$. Отже, для $n = k + 1$ нерівність є правильною, а тому, за принципом математичної індукції, нерівність $2^n > 2n + 1$ справджується для будь-якого $n \in N$, $n \geqslant 3$. ■

Приклад 5. Довести, що $\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+2}>\frac{13}{24}$ для будь-якого $n \in N$.

Доведення. 1) Якщо $n = 1$, маємо: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{14}{24}>\frac{13}{24}$.

2) Припустимо, що для $n = k$ справджується нерівність:

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k+2}>\frac{13}{24}. \qquad (*)$$

Запишемо нерівність для $n = k + 1$:

$$\frac{1}{k+3}+\frac{1}{k+4}+\ldots+\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2(k+1)+1}+\frac{1}{2(k+1)+2}>\frac{13}{24}.$$

Доведемо її.
Для доведення до обох частин нерівності (*), додамо суму

$$\frac{1}{2(k+1)+1}+\frac{1}{2(k+1)+2}-\frac{1}{k+2}.$$

Тоді, за властивостями числових нерівностей, отримаємо правильну нерівність:

$$\frac{1}{k+3}+\frac{1}{k+4}+\ldots+\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2(k+1)+1}+\frac{1}{2(k+1)+2}>\frac{13}{24}+$$
$$+\frac{1}{2(k+1)+1}+\frac{1}{2(k+1)+2}-\frac{1}{k+2},$$

ліва частина якої тотожно рівна лівій частині нерівності, яку треба довести, а праву частину можна спростити. Для правої частини матимемо:

$$\frac{13}{24}+\frac{1}{2k+3}+\frac{1}{2(k+2)}-\frac{1}{k+2}=\frac{13}{24}+\frac{1}{2k+3}-\frac{1}{2k+4}=$$
$$=\frac{13}{24}+\frac{1}{(2k+3)(2k+4)}>\frac{13}{24}.$$

Отже, нерівність для $n = k + 1$ є правильною, а тому є правильною для будь-якого $n \in N$. ■

5. Доведення подільності виразів

Приклад 6. Довести, що для будь-якого цілого значення $n \geqslant 0$ число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ кратне числу 133.

Доведення. 1) Для $n = 0$ маємо: $11^{0+2} + 12^{0+1} = 133$ – кратне числу 133. Отже, для $n = 0$ твердження істинне.

2) Для $n = k$ маємо: $S_k = 11^{k+2} + 12^{2k+1}$. Припустимо, що цей вираз кратний числу 133.

Для $n = k + 1$ маємо: $S_{k+1} = 11^{(k+1)+2} + 12^{2(k+1)+1}$.

Доведемо, що вираз S_{k+1} кратний числу 133.

Маємо: $S_{k+1} = 11^{(k+1)+2} + 12^{2(k+1)+1} = 11 \cdot 11^{k+2} + 144 \cdot 12^{2k+1} =$

$= 11 \cdot 11^{k+2} + (11+133) \cdot 12^{2k+1} =$

$$=11\underbrace{(11^{k+2}+12^{2k+2})}_{S_k}+133\cdot 12^{2k+1}=11\cdot S_k+133\cdot 12^{2k+1}.$$

Оскільки доданок $S_k = 11^{k+2} + 12^{2k+1}$ кратний числу 133 (за припущенням індукції) і доданок $133 \cdot 12^{2k+1}$ теж кратний числу 133, то сума $S_{k+1} = 11 \cdot S_k + 133 \cdot 12^{2k+1}$ також кратна числу 133.

Отже, за принципом математичної індукції, число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ кратне числу 133 для будь-якого цілого $n \geqslant 0$. ■

6. Доведення геометричних фактів

Деякі геометричні факти, умова яких пов'язана з натуральним числом n, можна довести методом математичної індукції.

Приклад 7. На площині проведено n прямих ($n \geqslant 1$), жодні дві з яких не паралельні і жодні три не мають спільної точки. Довести, що ці прямі розбивають площину на $\frac{n^2+n+2}{2}$ частин.

Доведення. 1) Очевидно, що одна пряма розбиває площину на 2 частини; $\frac{1^2+1+2}{2}=2$. Для $n = 1$ твердження є правильним.
2) Припустимо, що k прямих, які задовольняють умову, розбивають площину на $\frac{k^2+k+2}{2}$ частин.
Проведемо ще одну пряму, тепер їх $k + 1$. Ця пряма перетинає кожну з попередніх прямих, при цьому всі точки перетину будуть різними (оскільки серед прямих немає паралельних і жодні три прямі не мають спільної точки). Ці точки ділять $(k + 1)$ прямих на $(k + 1)$ частин, а саме $(k - 1)$ відрізків і два промені. Кожний із цих відрізків або променів ділить раніше цілу частину площини на дві частини, тобто кількість частин збільшується на $(k + 1)$ і буде дорівнювати:

$$\frac{k^2+k+2}{2}+(k+1)=\frac{k^2+k+2+2k+2}{2}=\frac{(k^2+2k+1)+k+3}{2}=$$

$$=\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}.$$

Отже, твердження є правильним для $n = k + 1$, а тому, за принципом індукції, твердження задачі є правильним. ■

Приклад 8. Доведіть, що n кіл ($n \in N$), які проведено на площині, ділять її не більше ніж на n^2-n+2 частин.

Доведення. 1) Очевидно, що одне коло розбиває площину на дві частини; $1^2 - 1 + 2 = 2$. Для $n = 1$ твердження є правильним.
2) Припустимо, що k кіл розбивають площину не більше ніж на k^2-k+2 частин. Проведемо $(k + 1)$-ше коло. Це коло може мати з k попередніми не більше ніж $2k$ спільних точок, які будуть розбивати $(k + 1)$-ше коло на $2k$ дуг. Кожна із цих дуг ділить раніше цілу область на дві, тобто кількість частин площини збільшиться не більше ніж на $2k$ і буде дорівнювати:

$$k^2 - k + 2 + 2k = (k^2 + 2k + 1) - (k + 1) + 2 =$$
$$= (k + 1)^2 - (k + 1) + 2.$$

Отже, твердження задачі є правильним для $n = k + 1$, а тому, за принципом математичної індукції, і для будь-якого натурального n.

? • Які висновки називають індуктивними? • У чому полягає принцип математичної індукції? • З яких етапів складається доведення твердження методом математичної індукції? • Що називають базою індукції; припущенням індукції; кроком індукції? • Що називають індуктивним переходом?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2 **8.1.** Виписавши кілька чисел, кратних числу 6, наприклад 12; 36; 72; 216, помічаємо, що вони закінчуються цифрою 2 або 6. Чи можна дійти висновку, що число, яке закінчується цифрою 2 або 6, кратне числу 6?

8.2. Виписавши кілька чисел, кратних числу 5, наприклад 15; 30; 75; 190, помічаємо, що вони закінчуються цифрою 0 або 5. Чи можна дійти висновку, що число, яке закінчуються цифрою 0 або 5, кратне числу 5?

8.3. Доведіть методом математичної індукції, що для будь-якого натурального n справджується рівність: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$. Як ще можна довести цю формулу?

8.4. Доведіть методом математичної індукції, що для будь-якого натурального n справджується рівність: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(n+1)n}{2}$. Як ще можна довести цю формулу?

3 Доведіть методом математичної індукції, що для $n \in N$ справджується рівність: **(8.5–8.6):**

8.5. 1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

2) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \ldots + n(2n+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$;

3) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$;

4) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$.

8.6. 1) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$;

2) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

3) $2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \ldots + 2(2n-1) = 2n^2$;

4) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

Доведіть, що для будь-якого $n \in N$ справджується нерівність **(8.7–8.8):**

8.7. $2^{n+2} > 2n + 5$.

8.8. $2^n > n$.

Доведіть, що для $n \in N$ справджується нерівність **(8.9–8.10):**

8.9. $3^n > 4n + 1$, де $n \geqslant 3$.

8.10. $2^n > n^2$, де $n \geqslant 5$.

8.11. Установіть істинність гіпотези про те, що для $n \in N$ справджується рівність: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

8.12. Доведіть, що n прямих, проведених на площині через одну точку, ділять площину на $2n$ частин.

4 **8.13.** Знайдіть формулу для обчислення виразу $\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)$, де $n \in N$.

8.14. Знайдіть формулу для обчислення суми $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$, де $n \in N$.

Доведіть, що при будь-якому $n \in N$ справджується рівність: **(8.15–8.16)**:

8.15. 1) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$;

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$;

3) $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

8.16. 1) $-1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \ldots + (-1)^n(2n - 1) = (-1)^n \cdot n$;

2) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2\,(2n^2 - 1)$.

8.17. Доведіть, що для будь-якого n, $n \in N$ та будь-яких чисел a і b справджується рівність:

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)}+\ldots+\frac{1}{(a+(n+1)b)(a+nb)}=\frac{n}{a(a+nb)}.$$

Доведіть, що для будь-якого $n \in N$ справджується нерівність **(8.18–8.19)**:

8.18. 1) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1$;

2) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2$;

3) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

8.19. 1) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$; 2) $2^n>1+n\sqrt{2^{n-1}}$.

8.20. Доведіть, що для будь-яких чисел a_1, a_2, …, a_n справджується нерівність: $|a_1+a_2+\ldots+a_n|<|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$.

Доведіть, що для будь-якого n, $n \in N$, число **(8.21–8.22)**:

8.21. 1) $7^n - 1$ ділиться на 6;

2) $6^{2n-1} + 1$ ділиться на 7;

3) $9^n - 8n - 1$ ділиться на 16;

4) $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ ділиться на 8.

8.22. 1) $5^n - 1$ ділиться на 4;
2) $2^{2n-1} + 1$ ділиться на 3;
3) $4^n + 6n - 1$ ділиться на 9;
4) $5^n + 2 \cdot 3^n - 3$ – ділиться на 8.

8.23. Доведіть, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 9.

8.24. Доведіть за допомогою методу математичної індукції, що сума внутрішніх кутів довільного опуклого n-кутника дорівнює $180°(n - 2)$.

Доведіть, що для будь-якого n, $n \in N$, справджується рівність (8.25–8.26):

8.25. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

8.26. $\dfrac{1}{2^3-2} + \dfrac{1}{4^3-4} + \ldots + \dfrac{1}{(2n)^3-2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{n}{2n+1}$.

8.27. Доведіть, що сума чисел, які стоять у кожному рядку таблиці

1
2; 3; 4;
3; 4; 5; 6; 7;
....

дорівнює квадрату непарного числа, номер якого в рядку дорівнює номеру рядка, рахуючи від початку таблиці, тобто, що $1 = 1^2$; $2 + 3 + 4 = 3^2$; $3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 5^2$; ... .

8.28. Доведіть, що число $36^n + 19^n - 2^{n+1}$ для будь-якого натурального n ділиться на 17.

8.29. Доведіть, що число, записане 243-ма одиницями, ділиться на 243.

8.30. Числа a_1, a_2, ..., a_n задовольняють умову $a_1 = 2$; $a_n = 3a_{n-1} + 1$. Доведіть, що $a_n = \dfrac{5 \cdot 3^{n-1} - 1}{2}$.

8.31. Числа a_1, a_2, ..., a_n задовольняють умову $a_1 = 2$; $a_{n+1} = \dfrac{n+2}{n} a_n$. Доведіть, що $a_n = n^2 + n$.

8.32. Розмір коштів, внесених на банківський рахунок, складає 10 000 грн. За два роки ця сума зросла до 13 456 грн. Якою є відсоткова ставка банку, якщо відсотки нараховуються один раз на рік на поточний рахунок?

8.33. (*Національна олімпіада Великої Британії*). Доведіть, що коли коренями многочлена $x^2 + px + 1$ є числа α і β, а коренями многочлена $x^2 + qx + 1$ – числа γ і δ, то рівність $(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) = q^2 - p^2$ – правильна.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

8.34. Обчисліть:

1) $\sqrt{25}$; 2) $\sqrt{16}-2\sqrt{0,01}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{100}-(\sqrt{3})^2$;

4) $\sqrt{0}+\frac{1}{4}(2\sqrt{2})^2$; 5) $5(-\sqrt{7})^2$; 6) $(\sqrt{5})^4+\sqrt{2^3+1}$.

8.35. При яких значеннях x має зміст вираз:

1) $\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{2x-7}$; 3) $\sqrt{4+8x}$; 4) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+7}$?

8.36. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2=36$; 2) $x^2=0$; 3) $x^2=-9$; 4) $x^2=7$.

Українці у світі

Микола Іванович Шкіль народився 13 грудня 1932 року в с. Бурбино (Полтавська обл.). Після закінчення середньої школи вступив на фізико-математичний факультет Київського педагогічного інституту ім. О.М. Горького (КПДІ), який закінчив з відзнакою за фахом «Учитель математики». У 1955 році Микола Іванович закінчив аспірантуру і надалі все своє життя пов'язав з КПДІ (нині це Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова), де і пройшов шлях від аспіранта до ректора.

(1932-2015)

Упродовж багатьох років Микола Іванович поєднував наукову роботу з педагогічною – читав курси для студентів фізико-математичного факультету, здійснював наукове керівництво аспірантами і докторантами, підготував більше 30 кандидатів та 5 докторів наук. Його діяльність була високо відзначена державою. За комплект підручників «Вища математика» та «Математичний аналіз» М.І. Шкілю у складі авторського колективу Указом Президента України в 1996 році присуджено Державну премію в галузі науки і техніки. Премією Національної академії педагогічних наук України відзначено також підручник «Алгебра і початки аналізу» для 10 класу шкіл і класів з поглибленим вивченням математики, одним із авторів якого є М.І. Шкіль.

Микола Іванович знаний у світі. Його монографію «Асимптотичні методи в теорії лінійних диференціальних рівнянь» (у співавторстві) перевидано у США. М.І. Шкіля було відзначено премією НАН України імені М.М. Крилова, він також є лауреатом премій імені В.І. Вернадського та М.В. Остроградського.

М.І. Шкіль упродовж десятиліть був членом редколегій журналів «Нелінійні коливання», «Вища школа», «Рідна школа». До останніх своїх днів він був сповнений енергією і великими творчими задумами...

Автору підручника, який ви тримаєте в руках, пощастило бути студентом Миколи Івановича Шкіля.

СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

РОЗДІЛ 2

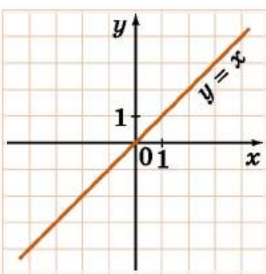
У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ МИ...

- ***пригадаємо*** *поняття арифметичного квадратного кореня та його властивості;*
- ***дізнаємося*** *про корінь n-го степеня та його властивості; степінь з раціональним показником та його властивості; про функцію* $y = \sqrt[n]{x}$ *та степеневу функцію;*
- ***навчимося*** *обчислювати та перетворювати вирази, що містять корені і степені з раціональним показником; розв'язувати ірраціональні рівняння.*

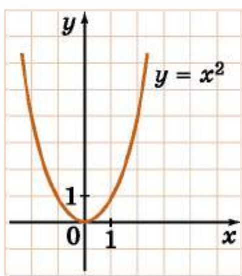
§ 9. КОРІНЬ n-го СТЕПЕНЯ. АРИФМЕТИЧНИЙ КОРІНЬ n-го СТЕПЕНЯ

1. Функція $y = x^n$, де $n \in N$

Розглянемо функцію $y = x^n$, $n \in N$. Її називають *степеневою функцією з натуральним показником*. Степеневі функції для $n = 1$ і $n = 2$, тобто функції $y = x$ і $y = x^2$, нам вже відомі. Їх графіки зображено на малюнках 9.1 і 9.2.



Мал. 9.1



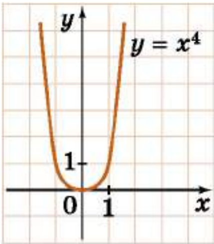
Мал. 9.2

З'ясуємо властивості функції $y = x^n$ та особливості її графіка для будь-яких значень n, $n \in N$.

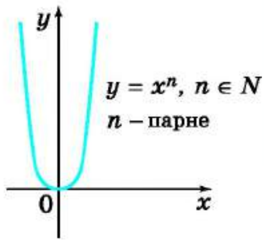
Спочатку розглянемо випадок, коли n – парне число.

На малюнку 9.2 зображено графік функції $y = x^2$, а на малюнку 9.3 – графік функції $y = x^4$. Функція $y = x^n$, де n – парне, є парною, оскільки $(-x)^n = x^n$, тому її графік симетричний відносно осі ординат.

Графік функції $y = x^n$ з парним натуральним показником n схематично зображено на малюнку 9.4.



Мал. 9.3

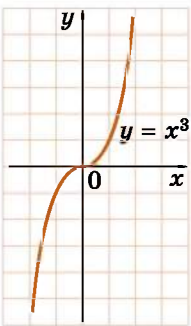


Мал. 9.4

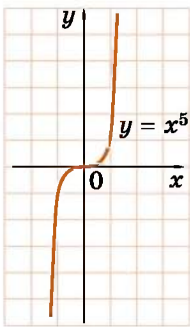
Розглянемо випадок, коли n – непарне число.

На малюнку 9.5 зображено графік функції $y = x^3$, а на малюнку 9.6 – графік функції $y = x^5$. Функція $y = x^n$ при непарному n є непарною, оскільки $(-x)^n = -x^n$, тому її графік симетричний відносно початку координат.

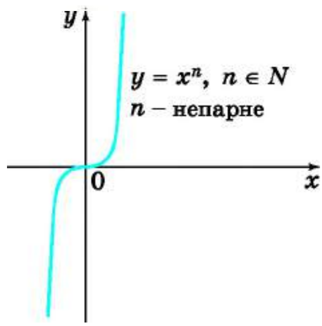
Графік функції $y = x^n$ з непарним натуральним показником n, $n \geqslant 3$, зображено на малюнку 9.7.



Мал. 9.5



Мал. 9.6



Мал. 9.7

Узагальнимо властивості функції $y = x^n$, де n – натуральне число, і подамо їх у вигляді таблиці (с. 86).

Приклад 1. Функцію задано формулою $f(x) = x^9$. Порівняти:
1) $f(0)$ і $f(-1{,}8)$; 2) $f(-2)$ і $f(2)$.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки функція $f(x) = x^9$ зростає на $(-\infty; +\infty)$, то більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Отже:
1) $f(0) > f(-1{,}8)$, бо $0 > -1{,}8$; 2) $f(-2) < f(2)$, бо $-2 < 2$.

В і д п о в і д ь: 1) $f(0) > f(-1{,}8)$; 2) $f(-2) < f(2)$.

Функція $y = x^n$, $n \in N$		
Властивості	**n – парне**	**n – непарне**
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Множина значень	$[0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Знакосталість ($y > 0$)	$x < 0$ або $x > 0$	$x > 0$
Знакосталість ($y < 0$)	–	$x < 0$
Парність, непарність	парна	непарна
Проміжки зростання	$[0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Проміжки спадання	$(-\infty; 0]$	–

Приклад 2. Функцію задано формулою $g(x) = x^{14}$. Порівняти:
1) $g(-2)$ і $g(-3)$; 2) $g(1,7)$ і $g(1,6)$;
3) $g(5)$ і $g(-5)$; 4) $g(-8)$ і $g(7)$.

Розв'язання. 1) Оскільки на проміжку $(-\infty; 0]$ функція $g(x) = x^{14}$ спадає, то більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Оскільки $-2 > -3$, то $g(-2) < g(-3)$.
2) На проміжку $[0; +\infty)$ функція $g(x) = x^{14}$ зростає, тому більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Оскільки $1,7 > 1,6$, то $g(1,7) > g(1,6)$.
3) Функція $g(x) = x^{14}$ – парна, тому $g(-x) = g(x)$. Отже, $g(5) = g(-5)$.
4) Функція $g(x) = x^{14}$ – парна, тому $g(-8) = g(8)$. На проміжку $[0; +\infty)$ функція зростає, тому $g(8) > g(7)$, а отже $g(-8) > g(7)$.

Відповідь. 1) $g(-2) < g(-3)$; 2) $g(1,7) > g(1,6)$;
3) $g(5) = g(-5)$; 4) $g(-8) > g(7)$.

2. *Корінь n-го степеня*

Нагадаємо, що *квадратним коренем із числа a називають таке число, квадрат якого дорівнює a*.

Наприклад, числа 4 і –4 – квадратні корені із числа 16, бо $4^2 = 16$ і $(-4)^2 = 16$; 0 – квадратний корінь із числа 0, оскільки $0^2 = 0$; а квадратного кореня із числа –9 не існує, бо немає числа, квадрат якого дорівнює –9.

У той самий спосіб уведемо означення кореня n-го степеня із числа a, де $n \in N$, $n > 2$.

! ***Коренем n-го степеня*** **із числа a називають таке число, n-й степінь якого дорівнює a.**

Наприклад, корінь третього степеня із числа 64 дорівнює 4, оскільки $4^3 = 64$. Числа 3 і –3 є коренями четвертого степеня із числа 81, бо $3^4 = 81$ і $(-3)^4 = 81$. Коренем п'ятого степеня із числа –32 є число –2, оскільки $(-2)^5 = -32$.

3. *Арифметичний корінь n-го степеня*

Як і для квадратного кореня, для кореня n-го степеня розглянемо поняття арифметичного кореня. Нагадаємо, що ***арифметичним квадратним коренем із числа a називають таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a.*** Арифметичний квадратний корінь із числа a позначають $\sqrt{a}$ і читають так: ***квадратний корінь із числа a*** (слово «арифметичний» при цьому домовилися не вживати). Нагадаємо, що вираз $\sqrt{a}$ має зміст для $a \geqslant 0$.

Аналогічно означують арифметичний корінь n-го степеня.

> ***Арифметичним коренем n-го степеня*** **з невід'ємного числа *a* називають таке невід'ємне число, *n*-й степінь якого дорівнює *a*.**

Арифметичний корінь n-го степеня із числа a позначають $\sqrt[n]{a}$, при цьому число n називають ***показником кореня***, а число a – ***підкореневим виразом***. Знак кореня $\sqrt{}$ ще називають ***радикалом***. Запис $\sqrt[n]{a}$ читають так: ***корінь n-го степеня із числа a*** (тут також слово «арифметичний» не вживають).

Якщо $n = 2$, то матимемо арифметичний квадратний корінь із числа a, який позначають $\sqrt{a}$ (показник кореня у цьому випадку не пишуть). Якщо $n = 3$, матимемо $\sqrt[3]{a}$ – арифметичний ***кубічний корінь із числа a*** (слово «*арифметичний*» під час читання не вживають).

Приклад 3. Знайти: 1) $\sqrt[3]{27}$; 2) $\sqrt[4]{16}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; 4) $\sqrt[7]{0}$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) $\sqrt[3]{27} = 3$ (оскільки $3^3 = 27$ і $3 \geqslant 0$);

2) $\sqrt[4]{16} = 2$ (оскільки $2^4 = 16$ і $2 \geqslant 0$);

3) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$ (оскільки $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ і $\frac{1}{2} \geqslant 0$);

4) $\sqrt[7]{0} = 0$ (оскільки $0^7 = 0$ і $0 \geqslant 0$).

З означення випливає, що рівність $\sqrt[n]{a} = x$, де $a \geqslant 0$, є правильною, якщо виконуються одночасно дві умови: 1) $x \geqslant 0$; 2) $x^n = a$. Тому, якщо в рівність $x^n = a$ замість x підставити $\sqrt[n]{a}$, то отримаємо тотожність $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

> **Для будь-якого $a \geqslant 0$, $n \in N$, $n \geqslant 2$ маємо тотожність:**
>
> $$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Наприклад, $(\sqrt[7]{17})^7 = 17$;

$(-\sqrt[4]{8})^4 = (-1 \cdot \sqrt[4]{8})^4 = (-1)^4 \cdot (\sqrt[4]{8})^4 = 1 \cdot 8 = 8$;

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt[6]{16}\right)^6 = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 \cdot (\sqrt[6]{16})^6 = \frac{1}{64} \cdot 16 = \frac{1}{4}.$$

Приклад 4. Знайти значення виразу: $\sqrt[5]{3^4+5^2+137}$.

Розв'язання. Спочатку треба знайти значення підкореневого виразу $3^4 + 5^2 + 137$, а потім з отриманого значення добути корінь 5-го степеня:

$$\sqrt[5]{3^4+5^2+137} = \sqrt[5]{81+25+137} = \sqrt[5]{243} = 3 \text{ (бо } 3^5 = 243 \text{ і } 3 \geqslant 0).$$

Відповідь. 3.

4. Тотожності для кореня n-го степеня

Знак кореня $\sqrt[n]{\ }$ використовують не тільки для запису арифметичного кореня n-го степеня з невід'ємного числа, а й для запису кореня непарного степеня з від'ємного числа. Наприклад,

$$\sqrt[5]{-32} = -2 \text{ (бо } (-2)^5 = -32); \quad \sqrt[7]{-1} = -1 \text{ (бо } (-1)^7 = -1);$$

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{2}{3} \left(\text{бо } \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}\right).$$

Тому рівність $\sqrt[n]{a} = x$, де a – будь-яке число, n – непарне натуральне число, є правильною, якщо виконується лише одна умова: $x^n = a$. Доходимо висновку:

! **для будь-якого числа a і непарного числа n, $n \in N$, $n \geqslant 3$, маємо тотожність:**

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Оскільки $\sqrt[3]{-8} = -2$ і $-\sqrt[3]{8} = -2$, то $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$. Узагалі,

! **для коренів непарного степеня маємо тотожність:**

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}.$$

Отже,

1) якщо $a \geqslant 0$, $n \in N$, $n \geqslant 2$, то вираз $\sqrt[n]{a}$ означає арифметичний корінь n-го степеня із числа a;

2) якщо $a < 0$, то при непарному n вираз $\sqrt[n]{a}$ означає корінь n-го степеня із числа a, а при парному n цей вираз не має змісту.

Доходимо висновку:

! **вираз $\sqrt[n]{a}$ при парному n має зміст лише для $a \geqslant 0$; при непарному n – для будь-якого значення a.**

Приклад 5. При яких значення x має зміст вираз:

1) $\sqrt[7]{x+2}$; 2) $\sqrt[4]{5x-10}$?

Розв'язання. 1) Корінь 7-го (непарного) степеня існує для будь-якого значення підкореневого виразу, тому вираз має зміст для будь-якого значення x.

2) Корінь 4-го (парного) степеня має зміст лише в тому випадку, коли підкореневий вираз – невід'ємний. Розв'язав-

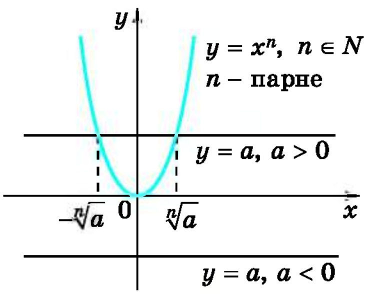
ши нерівність: $5x - 10 \geqslant 0$, матимемо, що $x \geqslant 2$.

Відповідь: 1) x – будь-яке число; 2) $x \geqslant 2$.

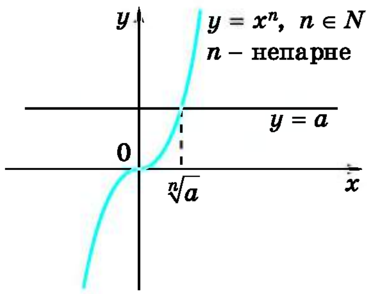
5. Рівняння $x^n = a$, $n \in N$, $n \geqslant 2$

Розглянемо рівняння $x^n = a$, $a \in R$, $n \in N$, $n \geqslant 2$. Розв'яжемо його графічно.

Нехай у рівнянні $x^n = a$ маємо випадок, коли n – парне. Побудуємо графіки функцій $y = x^n$, n – парне, і $y = a$ (мал. 9.8). Якщо $a > 0$, то графіки перетинатимуться у двох точках, тобто рівняння $x^n = a$ матиме два корені. Оскільки $(\sqrt[n]{a})^n = a$ і $(-\sqrt[n]{a})^n = a$, то $x_1 = \sqrt[n]{a}$ і $x_2 = -\sqrt[n]{a}$ – корені рівняння $x^n = a$ у випадку парного n. Якщо $a = 0$, то рівняння $x^n = 0$ має єдиний корінь – число 0. Якщо $a < 0$, при парному n рівняння $x^n = a$ коренів не має.



Мал. 9.8



Мал 9.9

Нехай n – непарне. Тоді для будь-якого a рівняння $x^n = a$ має єдиний корінь (мал. 9.9). Оскільки $(\sqrt[n]{a})^n = a$, то $x = \sqrt[n]{a}$ – єдиний корінь рівняння $x^n = a$, коли n – непарне.

Систематизуємо дані про розв'язки рівняння $x^n = a$ у вигляді схеми.

$x^n = a$, $a \in R$, $n \in N$, $n \geqslant 2$

- n – парне
  - Якщо $a > 0$, то $x_1 = \sqrt[n]{a}$; $x_2 = -\sqrt[n]{a}$
  - Якщо $a = 0$, то $x = 0$
  - Якщо $a < 0$, то коренів немає
- n – непарне
  - Якщо a – будь-яке число, то $x = \sqrt[n]{a}$

Приклад 6. Розв'язати рівняння:

1) $x^4 = 81$; 2) $x^6 = -1$; 3) $x^5 = 19$; 4) $(2x - 1)^8 = 1$.

Розв'язання. 1) $x_1 = \sqrt[4]{81}$, $x_2 = -\sqrt[4]{81}$. Отже, $x_1 = 3$; $x_2 = -3$.

2) Коренів немає.

3) $x = \sqrt[5]{19}$; корінь рівняння $x^5 = 19$ є ірраціональним числом.

4) Маємо: $2x - 1 = \sqrt[8]{1}$ або $2x - 1 = -\sqrt[8]{1}$;

$2x - 1 = 1$ $2x - 1 = -1$;

$x = 1$ $x = 0$.

Отже, рівняння має два корені: 0 і 1.

Відповідь. 1) 3; −3; 2) коренів немає; 3) $\sqrt[5]{19}$; 4) 0; 1.

А ще раніше...

Терміни «радикал» і «корінь», які було введено у XIII ст., походять від латинського слова «radix», яке має два значення: сторона і корінь. Грецькі математики замість «добувати корінь» говорили «знайти сторону квадрата за його даною величиною», маючи на увазі під величиною квадрата його площу.

Знак кореня у вигляді символу $\sqrt{}$ вперше з'явився в 1525 р. У 1626 р. голландський математик Альбер Жирар (1595–1663) увів позначення $2\sqrt{}$, $3\sqrt{}$, ..., при цьому над підкореневим виразом ставили риску, тобто замість $\sqrt{5}$ писали $\sqrt{\ }\overline{5}$. Сучасне позначення кореня з'явилося завдяки французькому математику, фізику і філософу Рене Декарту (1596–1650). У своїй праці «Геометрія» (1637 р.) він з'єднав горизонтальну риску зі знаком $\sqrt{}$. Англійський математик, фізик і механік Ісаак Ньютон (1643–1727) записував корені будь-яких степенів у сучасному вигляді: $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$ тощо.

○ Яку функцію називають степеневою функцією з натуральним показником? ○ Сформулюйте властивості функції $y = x^n$ для парного n і для непарного n. ○ Що називають коренем n-го степеня із числа a? ○ Що називають арифметичним коренем n-го степеня із числа a? ○ При яких значеннях a має зміст вираз $\sqrt[n]{a}$ у випадку парного n; непарного n? ○ Що можна сказати про корені рівняння $x^n = a$, залежно від значень a і n, де $n \in N$, $n \geqslant 2$?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Чи має зміст вираз (9.1–9.2):

9.1. 1) $\sqrt[3]{19}$; 2) $\sqrt[4]{-1}$; 3) $\sqrt[6]{8}$; 4) $\sqrt[5]{-17}$; 5) $\sqrt[8]{0}$; 6) $\sqrt{-3}$?

9.2. 1) $\sqrt[6]{1}$; 2) $\sqrt[9]{0}$; 3) $\sqrt[7]{-11}$; 4) $\sqrt[6]{-10}$; 5) $\sqrt[8]{12}$; 6) $\sqrt[5]{11}$?

9.3. Доведіть, що число:

1) $\frac{1}{2}$ є арифметичним кубічним коренем із числа $\frac{1}{8}$;

2) 5 є арифметичним коренем четвертого степеня із числа 625;
3) −1 не є арифметичним коренем шостого степеня із числа 1;
4) 0,1 не є арифметичним коренем п'ятого степеня із числа 0,0001.

Доведіть, що справджується рівність (**9.4–9.5**):

9.4. 1) $\sqrt{361} = 19$; 2) $\sqrt[3]{-125} = -5$; 3) $\sqrt[6]{1} = 1$;
4) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} = \frac{1}{3}$; 5) $\sqrt[8]{0} = 0$; 6) $\sqrt[4]{0,0001} = 0,1$.

9.5. 1) $\sqrt{121} = 11$; 2) $\sqrt[3]{0,027} = 0,3$; 3) $\sqrt[4]{0} = 0$;
4) $\sqrt[5]{-1} = -1$; 5) $\sqrt[6]{64} = 2$; 6) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$.

Знайдіть значення виразу (**9.6–9.7**):

9.6. 1) $\sqrt{0,25}$; 2) $\sqrt[3]{64}$; 3) $\sqrt[4]{1}$; 4) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$.

9.7. 1) $\sqrt{0,81}$; 2) $\sqrt[5]{32}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; 4) $\sqrt[6]{1}$.

9.8. (*Усно.*) Чи має корені рівняння:
1) $x^6 = 2$; 2) $x^8 = -1$; 3) $x^{10} = 0$; 4) $x^7 = -2$?

2 Обчисліть (**9.9–9.12**):

9.9. 1) $10\sqrt[3]{0,216}$; 2) $0,25\sqrt[3]{64}$; 3) $4\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$; 4) $3\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$.

9.10. 1) $2\sqrt[3]{0,125}$; 2) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{81}$; 3) $2\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}$; 4) $12\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$.

9.11. 1) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} - \sqrt[4]{\frac{1}{16}}$; 2) $\sqrt[5]{-0,00032} + \sqrt[3]{\frac{1}{125}}$;
3) $10\sqrt[6]{\frac{1}{64}} + \sqrt[3]{\frac{27}{64}}$; 4) $\sqrt[7]{\frac{128}{2187}} + \sqrt[4]{\frac{81}{625}}$.

9.12. 1) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} - \sqrt[4]{\frac{16}{625}}$; 2) $\sqrt[5]{-0,00001} + \sqrt[3]{\frac{8}{125}}$;
3) $-3\sqrt[5]{\frac{1}{32}} + \sqrt[6]{\frac{64}{729}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} - \sqrt[5]{\frac{243}{10\,000}}$.

Схематично побудуйте графік функції (**9.13–9.14**):

9.13. 1) $y = x^4$; 2) $y = x^9$. **9.14.** 1) $y = x^3$; 2) $y = x^6$.

При яких значення змінної має зміст вираз (**9.15–9.16**):

9.15. 1) $\sqrt{x+2}$; 2) $\sqrt[3]{9+a}$; 3) $\sqrt[4]{9-3b}$; 4) $\sqrt[6]{5c-4}$?

9.16. 1) $\sqrt{a-4}$; 2) $\sqrt[5]{b+7}$; 3) $\sqrt[6]{6+2x}$; 4) $\sqrt[8]{10-4y}$?

Обчисліть (9.17–9.18):

9.17. 1) $(\sqrt{5})^2$; 2) $(\sqrt[3]{7})^3$; 3) $(-\sqrt[6]{2})^6$; 4) $(\sqrt[4]{17})^4$.

9.18. 1) $(\sqrt{3})^2$; 2) $(\sqrt[5]{9})^5$; 3) $(\sqrt[8]{2})^8$; 4) $(-\sqrt[10]{12})^{10}$.

Розв'яжіть рівняння (9.19–9.20):

9.19. 1) $x^3=64$; 2) $x^3=-64$; 3) $x^6=1$; 4) $x^6=-1$;
5) $x^5=17$; 6) $x^5=-17$; 7) $x^8=0$; 8) $x^{10}=2$.

9.20. 1) $x^3=8$; 2) $x^3=-8$; 3) $x^4=16$; 4) $x^4=-16$;
5) $x^7=5$; 6) $x^7=-5$; 7) $x^8=3$; 8) $x^{12}=0$.

9.21. Чи належить графіку функції $y=\sqrt[4]{x}$ точка:
1) $A(0;\ 0)$; 2) $B(-1;\ 1)$; 3) $C(16;\ 2)$; 4) $D(81;\ -3)$?

Обчисліть значення виразу (9.22–9.23):

9.22. 1) $\sqrt[5]{0{,}01024}-\sqrt[3]{-\dfrac{27}{125}}$; 2) $\sqrt[5]{-7\dfrac{19}{32}}-\sqrt{12\dfrac{1}{4}}$.

9.23. 1) $\sqrt[3]{-0{,}343}-\sqrt[5]{-\dfrac{243}{1024}}$; 2) $\sqrt[4]{5\dfrac{1}{16}}-\sqrt[3]{-15\dfrac{5}{8}}$.

Знайдіть значення виразу (9.24–9.25):

9.24. 1) $(2\sqrt[3]{5})^3$; 2) $(-3\sqrt[4]{2})^4$; 3) $(-2\sqrt[5]{11})^5$; 4) $(5\sqrt[3]{-0{,}1})^3$.

9.25. 1) $(3\sqrt[3]{2})^3$; 2) $(-2\sqrt[4]{5})^4$; 3) $(-3\sqrt[5]{2})^5$; 4) $(10\sqrt[3]{-0{,}2})^3$.

3 При яких значення x має зміст вираз (9.26–9.27):

9.26. 1) $\sqrt[6]{2x-x^2}$; 2) $\sqrt[5]{x^2-2x-3}$;
3) $\sqrt[4]{x^2+2x-8}$; 4) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x^2-4}$?

9.27. 1) $\sqrt[8]{x^2+3x}$; 2) $\sqrt[7]{x^2-5x}$;
3) $\sqrt{-x^2+2x+3}$; 4) $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[5]{x-7}$?

Розв'яжіть рівняння (9.28–9.29):

9.28. 1) $\frac{1}{4}x^4-4=0$; 2) $\frac{1}{4}x^5+8=0$; 3) $9x^3-\frac{1}{3}=0$;
4) $(x-2)^6=1$; 5) $(x+5)^3=8$; 6) $(x-3)^7=5$.

9.29. 1) $\frac{1}{16}x^6-4=0$; 2) $\frac{1}{3}x^3+9=0$; 3) $7x^4+7=0$;
4) $(x+7)^5=0$; 5) $(x+3)^4=81$; 6) $(x+1)^5=2$.

9.30. Функцію задано формулою $f(x)=x^{17}$. Порівняйте:
1) $f(4)$ і $f(7)$; 2) $f(-2)$ і $f(-5)$;
3) $f(0)$ і $f(1{,}8)$; 4) $f(3)$ і $f(-3)$.

9.31. Функцію задано формулою $g(x)=x^{11}$. Порівняйте:
1) $g(2)$ і $g(1)$; 2) $g(-9)$ і $g(-8)$;
3) $g(1{,}7)$ і $g(0)$; 4) $g(-5)$ і $g(5)$.

9.32. Функцію задано формулою $g(x)=x^{12}$. Порівняйте:
1) $g(7)$ і $g(11)$; 2) $g(-7)$ і $g(-11)$;

3) $g(-7)$ і $g(7)$; 4) $g(-11)$ і $g(7)$.

9.33. Функцію задано формулою $f(x) = x^8$. Порівняйте:
1) $f(9)$ і $f(7)$; 2) $f(-9)$ і $f(-7)$;
3) $f(-9)$ і $f(9)$; 4) $f(9)$ і $f(-7)$.

9.34. Знайдіть два послідовних цілих числа, між якими міститься число: 1) $\sqrt[4]{1,9}$; 2) $-\sqrt[3]{5}$; 3) $\sqrt[6]{65}$; 4) $-\sqrt[9]{0,511}$.

9.35. Знайдіть два послідовних цілих числа, між якими міститься число: 1) $\sqrt[3]{1,2}$; 2) $-\sqrt[4]{0,85}$; 3) $\sqrt[5]{33}$; 4) $-\sqrt[3]{7,8}$.

9.36. Бак має форму куба і вміщує 2,744 м^3 води. Знайдіть висоту бака і площу його основи.

9.37. Вкладник відкрив у банку депозит на 10 000 грн, а через 3 роки, закриваючи депозит, отримав 17 280 грн. Який відсоток річних нараховував банк?

9.38. Вкладник відкрив у банку депозит на 20 000 грн, а через 4 роки, закриваючи депозит, отримав 29 282 грн. Який відсоток річних нараховував банк?

Установіть графічно, скільки розв'язків має рівняння (9.39–9.40):

9.39. 1) $x^6 = x + 2$; 2) $x^7 = x^2 - 4$; 3) $\frac{6}{x} = x^8$; 4) $x - 7 = x^{10}$.

9.40. 1) $x^4 = x - 2$; 2) $4x = x^9$; 3) $\frac{4}{x} = x^6$; 4) $x^{10} = x + 5$.

Побудуйте графік функції (9.41–9.42):

9.41. 1) $g(x) = \begin{cases} x^4, \text{ якщо } x \leqslant 1, \\ 3 - 2x, \text{ якщо } x > 1; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} -2x, \text{ якщо } x < 0, \\ x^3, \text{ якщо } x \geqslant 0. \end{cases}$

9.42. 1) $f(x) = \begin{cases} x + 6, \text{ якщо } x \leqslant -2, \\ x^2, \text{ якщо } x > -2; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ якщо } x < 1, \\ 2 - x, \text{ якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$

Знайдіть усі корені рівняння (9.43–9.44):

9.43. 1) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$; 2) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$;
3) $x^{12} + 3x^6 + 2 = 0$; 4) $x^{16} - 4x^8 + 3 = 0$.

9.44. 1) $x^8 + x^4 - 2 = 0$; 2) $x^6 + 26x^3 - 27 = 0$;
3) $x^{16} + 5x^8 + 4 = 0$; 4) $x^{12} - 6x^6 + 5 = 0$.

Знайдіть область визначення функції (9.45–9.46):

9.45. $y = \sqrt[4]{x^2 - 4x - 5} + \frac{1}{\sqrt[6]{x + 3}}$.

9.46. $y = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 3x + 10}} + \sqrt[8]{x + 3}$.

4 Побудуйте графік функції (9.47–9.48):

9.47. 1) $y = |x|\, x^2$; 2) $y = \frac{|x|}{x} x^5$;
3) $y = \frac{x - 1}{|x - 1|} x^3$; 4) $y = |x|x^3 - x^4$.

9.48. 1) $y = |x|x$; 2) $y = \dfrac{x}{|x|}x^3$;

3) $y = \dfrac{|x+1|}{x+1}x^2$; 4) $y = x^5 - |x|x^4$.

Знайдіть область визначення функції (9.49–9.50):

9.49. 1) $y = \sqrt[8]{\dfrac{1-|x|}{x+4}}$; 2) $y = \sqrt[7]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[6]{|x|-2}} + \sqrt[18]{x^2+3x}$.

9.50. 1) $y = \sqrt[10]{\dfrac{|x|-2}{3-x}}$; 2) $y = \dfrac{4}{\sqrt[8]{5-|x|}} + \sqrt[9]{x} + \sqrt[6]{x^2-2x}$.

Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння (9.51–9.52):

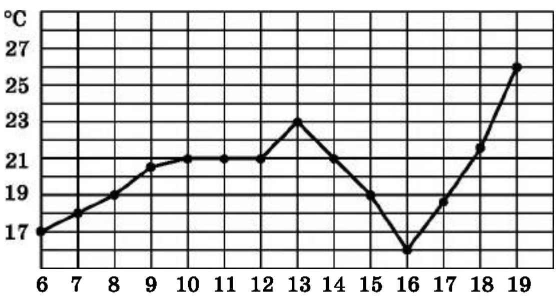
9.51. 1) $x^8 = a - 1$; 2) $x^5 = a + 7$;

3) $(a + 4)x^6 = a + 4$; 4) $ax^4 = 6$.

9.52. 1) $x^6 = a + 1$; 2) $x^2 = a - 2$;

3) $ax^4 = a$; 4) $ax^{10} = 2$.

9.53. На малюнку точками позначено середньодобову температуру повітря в Одесі щоденно із 6 по 19 червня. По горизонтальній осі вказано числа місяця, по вертикальній – температура у градусах Цельсія. Для наочності точки з'єднано лінією. За даними малюнка визначте різницю між найбільшою і найменшою середньодобовими температурами у зазначений період. Відповідь дайте у градусах Цельсія.



9.54. Дано три числа 2; $\sqrt{2}$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Дозволяється будь-які два з них замінити двома такими: їх сумою, поділеною на $\sqrt{2}$, та їх різницею, поділеною на $\sqrt{2}$. Чи можна, виконавши цю процедуру кілька разів, отримати трійку чисел: 1; $\sqrt{2}$; $1 + \sqrt{2}$?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

Обчисліть значення виразу (9.55–9.56):

9.55. 1) $\sqrt{0{,}16 \cdot 25}$; 2) $\sqrt{2^4 \cdot 3^2}$; 3) $\sqrt{7^2 \cdot 0{,}01 \cdot 64}$;

4) $\sqrt{\frac{36}{625}}$; 5) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; 6) $\sqrt{2^2 \cdot 1\frac{9}{16}}$.

9.56. 1) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}$; 3) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{32}}$.

9.57. При яких значеннях x справджується рівність:

1) $\sqrt{x^2} = x$; 2) $\sqrt{x^2} = -x$?

9.58. Замініть вираз йому тотожно рівним, але без знака кореня:

1) $\sqrt{m^2}$; 2) $3\sqrt{p^2}$; 3) $\sqrt{100a^2}$;

4) $-\sqrt{36t^2}$; 5) $\sqrt{n^6}$; 6) $\sqrt{b^{12}}$.

9.59. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{l^2}$, якщо $l \geqslant 0$; 2) $\sqrt{t^4}$;

3) $3\sqrt{c^2}$, якщо $c < 0$; 4) $5\sqrt{p^6}$, якщо $p \geqslant 0$;

5) $\sqrt{m^{10}}$, якщо $m < 0$; 6) $x\sqrt{x^{14}}$, якщо $x < 0$.

§ 10. ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОГО КОРЕНЯ *n*-го СТЕПЕНЯ. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОРЕНІВ. ДІЇ НАД КОРЕНЯМИ

1. Корінь з добутку і дробу

З курсу алгебри 8 класу нам відомо, що:

коли $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;

коли $a \geqslant 0$ і $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Такі самі властивості має й арифметичний корінь n-го степеня для $n > 2$.

Т Теорема 1 (про корінь n-го степеня з добутку). **Корінь n-го степеня з добутку двох невід'ємних чисел дорівнює добутку коренів n-го степеня із цих чисел, тобто якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то**

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Доведення. Оскільки $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то вирази $\sqrt[n]{a}$ і $\sqrt[n]{b}$ мають зміст і $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$, $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Тому $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Крім того,

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab.$$

Отже, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geqslant 0$ і $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab$. Тоді, за означенням арифметичного кореня n-го степеня, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. ■

Теорему можна поширити і на випадок, коли множників під знаком кореня більше ніж два.

Наслідок. **Корінь n-го степеня з добутку невід'ємних множників дорівнює добутку коренів n-го степеня із цих множників.**

Доведення. Доведемо цей наслідок, наприклад, для трьох невід'ємних чисел $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$. Маємо:

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{(ab)c} = \sqrt[n]{ab} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}. \blacksquare$$

За властивістю про корінь з добутку, наприклад, маємо:

1) $\sqrt[3]{27 \cdot 64} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12;$

2) $\sqrt[4]{8 \cdot 162} = \sqrt[4]{8 \cdot 2 \cdot 81} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = 2 \cdot 3 = 6.$

Зауваження 1. Очевидно, що вираз $\sqrt[n]{ab}$ при парному n має зміст, коли $ab \geqslant 0$, тобто коли числа a і b – одного знака, а значить, і тоді, коли a і b – від'ємні. У такому випадку рівність у теоремі 1 набуває вигляду $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{-b}$. Отже,

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}, \text{ якщо } ab \geqslant 0 \text{ і } n \text{ — парне.}$$

Якщо в рівності $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ поміняти місцями ліву і праву частини, матимемо тотожність:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \text{ де } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0.$$

Добуток коренів n-го степеня з невід'ємних чисел дорівнює кореню n-го степеня з добутку цих чисел.

Наприклад, $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{4 \cdot 8} = \sqrt[5]{32} = 2.$

Теорема 2 (про корінь n-го степеня з дробу). **Корінь n-го степеня з дробу, чисельник якого невід'ємний, а знаменник додатний, дорівнює кореню n-го степеня із чисельника, поділеному на корінь n-го степеня із знаменника, тобто якщо $a \geqslant 0$ і $b > 0$, то**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Пропонуємо довести цю теорему самостійно.

За теоремою 2, наприклад, маємо:

1) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{256}} = \dfrac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{256}} = \dfrac{1}{4};$ 2) $\sqrt[3]{15\dfrac{5}{8}} = \sqrt[3]{\dfrac{125}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5.$

Зауваження 2. Очевидно, що корінь із частки при парному n має зміст, коли $ab \geqslant 0$, $b \neq 0$, отже, і тоді, коли $a \leqslant 0$, $b < 0$. У цьому випадку $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{-a}}{\sqrt[n]{-b}}$. Отже, якщо $ab \geqslant 0$, $b \neq 0$ і n – парне, то

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}.$$

Якщо в рівності $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ поміняти місцями ліву і праву частини, матимемо тотожність:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ де } a \geqslant 0,\ b > 0.$$

Частка, чисельник якої – корінь n-го степеня з невід'ємного числа, а знаменник – корінь n-го степеня з додатного числа, дорівнює кореню n-го степеня із частки цих чисел.

Наприклад, $\frac{\sqrt[5]{486}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{486}{2}} = \sqrt[5]{243} = 3;$

$$\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{250}} = \sqrt[3]{\frac{128}{250}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}.$$

2. *Корінь із степеня*

Теорема 3 (про корінь n-го степеня зі степеня). **Для будь-якого $a \in R$ і $n \in N$, $n \geqslant 2$, маємо:**

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & \text{якщо } n \text{ – парне,} \\ a, & \text{якщо } n \text{ – непарне.} \end{cases}$$

Доведення. 1) Якщо n – парне, то вираз $\sqrt[n]{a^n}$ має зміст для будь-якого a, оскільки в цьому випадку $a^n \geqslant 0$. Крім того, $|a| \geqslant 0$ і $|a|^n = a^n$. Тоді за означенням кореня n-го степеня: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

2) Якщо n – непарне, то вираз $\sqrt[n]{a^n}$ також має зміст для будь-якого a, тоді за означенням кореня n-го степеня: $\sqrt[n]{a^n} = a$. ■

За теоремою 3, наприклад, маємо:

$\sqrt[8]{9^8} = |9| = 9;$ $\sqrt[6]{(-2)^6} = |-2| = 2;$

$\sqrt[9]{7^9} = 7;$ $\sqrt[5]{2^{10}} = \sqrt[5]{(2^2)^5} = \sqrt[5]{4^5} = 4.$

Приклад 1. Спростити вираз:

1) $\sqrt{p^6}$; 2) $\sqrt[8]{a^8}$, якщо $a \geqslant 0$; 3) $\sqrt[3]{c^{12}}$;

4) $\sqrt[4]{16m^8}$; 5) $\sqrt[10]{1024a^{10}}$, якщо $a \leqslant 0$; 6) $\sqrt[5]{a^5b^{10}}$.

Розв'язання. 1) $\sqrt{p^6} = \sqrt{(p^3)^2} = |p^3|$.

2) $\sqrt[8]{a^8} = |a|$. Оскільки $a \geqslant 0$, то $|a| = a$, а тому $\sqrt[8]{a^8} = a$.

3) $\sqrt[3]{c^{12}} = \sqrt[3]{(c^4)^3} = c^4$.

4) $\sqrt[4]{16m^8} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{m^8} = 2\sqrt[4]{(m^2)^4} = 2|m^2|$. Оскільки $m^2 \geqslant 0$ для будь-якого m, то $|m^2| = m^2$, а тому $\sqrt[4]{16m^8} = 2m^2$.

5) $\sqrt[5]{a^5b^{10}} = \sqrt[5]{a^5}\cdot\sqrt[5]{b^{10}} = a\sqrt[5]{(b^2)^5} = ab^2$.

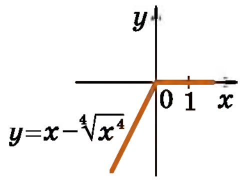
6) $\sqrt[10]{1024a^{10}} = \sqrt[10]{1024}\cdot\sqrt[10]{a^{10}} = 2|a|$. Оскільки $a \leqslant 0$, то $|a| = -a$, а тому $\sqrt[10]{1024a^{10}} = -2a$.

Відповідь. 1) $|p^3|$; 2) a; 3) c^4; 4) $2m^2$; 5) ab^2; 6) $-2a$.

Приклад 2. Побудувати графік функції $y = x - \sqrt[4]{x^4}$.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt[4]{x^4} = |x|$, то $y = x - |x|$.
Якщо $x \geqslant 0$, то $|x| = x$, а тому $y = x - x$, тобто $y = 0$;
якщо $x < 0$, то $|x| = -x$, маємо $y = x - (-x)$, тобто $y = 2x$.

Отже, $y = \begin{cases} 2x, \text{ якщо } x < 0, \\ 0, \text{ якщо } x \geqslant 0. \end{cases}$



Мал. 10.1

Графік функції $y = x - \sqrt[4]{x^4}$ зображено на малюнку 10.1.

3. Корінь із кореня та степінь кореня

Теорема 4. Якщо n і k – натуральні числа і $a \geqslant 0$, то
$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}.$$

Доведення. Оскільки $a \geqslant 0$, то вирази $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}$ і $\sqrt[kn]{a}$ мають зміст і невід'ємні. Крім того, $(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}})^{kn} = ((\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}})^k)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$.

Тоді за означенням кореня n-го степеня: $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$. ■

За теоремою 4, наприклад, маємо:

$\sqrt[4]{\sqrt[7]{2}} = \sqrt[28]{2}$; $\quad \sqrt{\sqrt[3]{36}} = \sqrt[6]{36} = \sqrt[3]{\sqrt{36}} = \sqrt[3]{6}$.

Теорема 5. Якщо n, k і m – натуральні числа і $a \geqslant 0$, то
$$\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}.$$

Доведення. Використовуючи попередню теорему, маємо:
$$\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{mk}}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{(a^k)^m}} = \sqrt[n]{a^k}. \ ■$$

Зауваження 3. Якщо m – парне число, то вираз $\sqrt[mn]{a^{mk}}$ має зміст при будь-якому дійсному a, і тоді для будь-якого a має місце рівність: $\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{|a|^k}$ (доведіть самостійно).

Зауваження 4. Домовимося, що корінь першого степеня із числа a дорівнює числу a. Це дозволяє використовувати тотожність $\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}$ і у випадку, коли $n = 1$.

Враховуючи теорему 5 і зауваження, наприклад, маємо:

$\sqrt[20]{a^{15}} = \sqrt[5\cdot4]{a^{5\cdot3}} = \sqrt[4]{a^3}$; $\quad \sqrt[10]{b^6} = \sqrt[5\cdot2]{b^{3\cdot2}} = \sqrt[5]{|b^3|}$;

$\sqrt[21]{128} = \sqrt[21]{2^7} = \sqrt[7\cdot 3]{2^7} = \sqrt[3]{2^1} = \sqrt[3]{2}$;

$\sqrt[5]{243^4} = \sqrt[5]{(3^5)^4} = \sqrt[5\cdot 1]{3^{5\cdot 4}} = 3^4 = 81$.

Теорема 6. Якщо n – натуральне число, k – ціле число і $a > 0$, то

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

Доведення. Оскільки $((\sqrt[n]{a})^k)^n = ((\sqrt[n]{a})^n)^k = a^k$, то за означенням кореня n-го степеня: $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$. ■

Наприклад, 1) $(\sqrt[6]{4})^3 = \sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{(2^2)^3} = \sqrt[6]{2^6} = 2$;

2) $(\sqrt[3]{5})^{-6} = \sqrt[3]{5^{-6}} = \sqrt[3]{(5^3)^{-2}} = (\sqrt[3]{5^3})^{-2} = 5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$.

● Сформулюйте і доведіть теорему про корінь n-го степеня з добутку. ● Чому дорівнює добуток коренів n-го степеня? ● Сформулюйте теорему про корінь n-го степеня з дробу. ● Чому дорівнює частка коренів n-го степеня? ● Сформулюйте і доведіть теорему про корінь n-го степеня із степеня. ● Сформулюйте теорему про корінь n-го степеня з кореня.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

10.1. (Усно). Чи правильно виконано обчислення:

1) $\sqrt[3]{64\cdot 125} = \sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{125} = 4\cdot 5 = 20$; 2) $\sqrt{\dfrac{9}{49}} = \dfrac{\sqrt{9}}{49} = \dfrac{3}{49}$?

10.2. Чи правильно виконано обчислення:

1) $\sqrt{100\cdot 4} = \sqrt{100}\cdot 4 = 10\cdot 4 = 40$; 2) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{16}} = \dfrac{1}{2}$?

Закінчіть обчислення (10.3–10.4):

10.3. 1) $\sqrt[3]{1000\cdot 216} = \sqrt[3]{1000}\cdot\sqrt[3]{216} = \ldots$; 2) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{625}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{625}} = \ldots$.

10.4. 1) $\sqrt[4]{81\cdot 10\,000} = \sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{10\,000} = \ldots$; 2) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{343}} = \dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{343}} = \ldots$.

Подайте вираз у вигляді добутку коренів (10.5–10.6):

10.5. 1) $\sqrt{2\cdot 5}$; 2) $\sqrt[3]{5p}$; 3) $\sqrt[4]{7a}$, де $a \geqslant 0$; 4) $\sqrt[9]{mp}$.

10.6. 1) $\sqrt[3]{7\cdot 6}$; 2) $\sqrt[6]{2a}$, де $a \geqslant 0$; 3) $\sqrt[5]{ab}$; 4) $\sqrt[8]{3p}$, де $p \geqslant 0$.

Подайте вираз у вигляді частки коренів (10.7–10.8):

10.7. 1) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$; 2) $\sqrt[4]{\dfrac{5}{p}}$, де $p > 0$; 3) $\sqrt[5]{\dfrac{x}{y}}$; 4) $\sqrt[8]{\dfrac{m}{11}}$, де $m \geqslant 0$.

10.8. 1) $\sqrt[6]{\frac{2}{7}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{m}{3}}$; 3) $\sqrt{\frac{a}{19}}$, де $a \geqslant 0$; 4) $\sqrt[5]{\frac{p}{t}}$.

2 **Знайдіть значення виразу (10.9–10.22):**

10.9. 1) $\sqrt{36 \cdot 49}$; 2) $\sqrt[3]{27 \cdot 64}$; 3) $\sqrt[4]{16 \cdot 256}$;

4) $\sqrt[4]{0,0001 \cdot 81}$; 5) $\sqrt[5]{\frac{1}{243} \cdot 32}$; 6) $\sqrt[6]{64 \cdot \frac{1}{729}}$.

10.10. 1) $\sqrt{9 \cdot 100}$; 2) $\sqrt[3]{8 \cdot 125}$;

3) $\sqrt[4]{0,0016 \cdot 625}$; 4) $\sqrt[5]{\frac{1}{1024} \cdot 243}$.

10.11. 1) $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$; 3) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$; 4) $\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{96}}$.

10.12. 1) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16}$; 2) $\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{9}$; 3) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{54}}$.

10.13. 1) $\sqrt[8]{2^8}$; 2) $\sqrt[6]{(-3)^6}$; 3) $\sqrt[7]{2^{14}}$; 4) $\sqrt[5]{3^{15}}$.

10.14. 1) $\sqrt[4]{3^4}$; 2) $\sqrt[8]{(-1)^8}$; 3) $\sqrt[9]{2^{27}}$; 4) $\sqrt[7]{4^{21}}$.

10.15. 1) $(\sqrt[8]{5})^8$; 2) $(-\sqrt[6]{7})^{12}$; 3) $(\sqrt[10]{3})^{-10}$; 4) $(\sqrt[6]{9})^3$.

10.16. 1) $(\sqrt[3]{7})^3$; 2) $(-\sqrt[4]{5})^8$; 3) $(\sqrt[7]{2})^{-7}$; 4) $(\sqrt[8]{25})^4$.

10.17. 1) $\sqrt[3]{3^6 \cdot 5^3}$; 2) $\sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12}}$; 3) $\sqrt[6]{\frac{5^6}{3^{12}}}$; 4) $\sqrt[7]{\frac{4^7 \cdot 2^{14}}{6^{21}}}$.

10.18. 1) $\sqrt[4]{7^8 \cdot 2^4}$; 2) $\sqrt[3]{2^9 \cdot 3^6}$; 3) $\sqrt[7]{\frac{5^7}{4^{14}}}$; 4) $\sqrt[5]{\frac{2^{10} \cdot 3^5}{5^{15}}}$.

10.19. 1) $\sqrt[3]{4 \cdot 54}$; 2) $\sqrt[5]{48} \cdot \sqrt[5]{162}$;

3) $\sqrt[4]{7^8 \cdot 5} \cdot \sqrt[4]{5^3}$; 4) $\frac{\sqrt[6]{7^{10} \cdot 2^{21}}}{\sqrt[6]{2^9 \cdot 7^4}}$.

10.20. 1) $\sqrt[3]{375 \cdot 9}$; 2) $\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{24}$;

3) $\sqrt[5]{3^{10} \cdot 4^2} \cdot \sqrt[5]{4^3}$; 4) $\frac{\sqrt[8]{3^{21} \cdot 2^{10}}}{\sqrt[8]{3^5 \cdot 2^2}}$.

10.21. 1) $\sqrt{6+\sqrt{11}} \cdot \sqrt{6-\sqrt{11}}$; 2) $\sqrt[3]{5-\sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{5+\sqrt{17}}$;

3) $\sqrt[4]{\sqrt{82}+\sqrt{66}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{82}-\sqrt{66}}$; 4) $\sqrt[5]{5\sqrt{2}-3\sqrt{2}} \cdot \sqrt[5]{5\sqrt{2}+3\sqrt{2}}$.

10.22. 1) $\sqrt[3]{7+\sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$; 2) $\sqrt[4]{3\sqrt{11}-3\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{3\sqrt{11}+3\sqrt{2}}$.

Подайте вираз у вигляді одночлена (літерами позначено невід'ємні числа) (10.23–10.24):

10.23. 1) $\sqrt{64a^2}$; 2) $\sqrt[3]{64p^6}$; 3) $\sqrt[4]{625a^8b^{12}}$; 4) $\sqrt[5]{\frac{32p^{20}x^{15}}{243}}$.

10.24. 1) $\sqrt{25m^4}$; 2) $\sqrt[3]{8b^3}$; 3) $\sqrt[5]{1024t^{10}m^{25}}$; 4) $\sqrt[4]{\dfrac{16x^4m^{24}}{81}}$.

3 **10.25.** При яких значеннях a справджується рівність:

1) $\sqrt[6]{a^6} = a$;
2) $\sqrt[6]{a^6} = -a$;
3) $\sqrt[5]{a^5} = a$;
4) $\sqrt[5]{a^5} = -a$;
5) $\sqrt[8]{(a+1)^8} = a+1$;
6) $\sqrt[8]{(a+1)^8} = -a-1$;
7) $\sqrt[9]{(a-2)^9} = a-2$;
8) $\sqrt[9]{(a-2)^9} = 2-a$?

10.26. При яких значеннях b справджується рівність:

1) $\sqrt{b^2} = b$;
2) $\sqrt{b^2} = -b$;
3) $\sqrt[7]{b^7} = b$;
4) $\sqrt[7]{b^7} = -b$;
5) $\sqrt[10]{(b-3)^{10}} = b-3$;
6) $\sqrt[10]{(b-3)^{10}} = 3-b$;
7) $\sqrt[3]{(b+1)^3} = b+1$;
8) $\sqrt[3]{(b+1)^3} = -(b+1)$?

10.27. При яких значення x і y, відмінних від нуля, виконується рівність:

1) $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$;
2) $\sqrt{xy} = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-y}$;
3) $\sqrt[18]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[18]{x}}{\sqrt[18]{y}}$;
4) $\sqrt[18]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[18]{-x}}{\sqrt[18]{-y}}$?

10.28. При яких значення c і t, відмінних від нуля, виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{ct} = \sqrt[4]{c} \cdot \sqrt[4]{t}$;
2) $\sqrt[4]{ct} = \sqrt[4]{-c} \cdot \sqrt[4]{-t}$;
3) $\sqrt[6]{\dfrac{c}{t}} = \dfrac{\sqrt[6]{c}}{\sqrt[6]{t}}$;
4) $\sqrt[6]{\dfrac{c}{t}} = \dfrac{\sqrt[6]{-c}}{\sqrt[6]{-t}}$?

Спростіть вираз (10.29–10.37):

10.29. 1) $\sqrt{(t+2)^2}$; 2) $\sqrt[4]{(a+1)^8}$;
3) $\sqrt[6]{(x-1)^6}$, якщо $x \geqslant 1$; 4) $\sqrt[8]{(b-5)^8}$, якщо $b < 5$.

10.30. 1) $\sqrt[4]{(5-\sqrt{2})^4}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}$;
3) $\sqrt[3]{(3-\sqrt{11})^3}$; 4) $\sqrt[4]{(7-5\sqrt{3})^4} + \sqrt[6]{(9-5\sqrt{3})^6}$.

10.31. 1) $\sqrt[4]{(x+2)^4}$, якщо $x \geqslant -2$; 2) $\sqrt[6]{(c-7)^6}$, якщо $c < 7$;
3) $\sqrt[8]{(\sqrt{2}-5)^8}$; 4) $\sqrt{(5-2\sqrt{3})^2} + \sqrt[4]{(3-2\sqrt{3})^4}$.

10.32. 1) $\sqrt[12]{p^{12}}$; 2) $\sqrt[10]{c^{10}}$, якщо $c \geqslant 0$;
3) $\sqrt[18]{b^{18}}$, якщо $b \leqslant 0$; 4) $\sqrt[10]{m^{40}}$;
5) $\sqrt[3]{27p^{30}}$; 6) $\sqrt[4]{16c^4}$, якщо $c \leqslant 0$;
7) $\sqrt[6]{64m^{18}}$, якщо $m \geqslant 0$; 8) $\sqrt[7]{a^{21}b^7}$;
9) $\sqrt{0{,}04a^2b^4}$, якщо $a \leqslant 0$;
10) $\sqrt[8]{c^{24}p^{40}}$, якщо $c \geqslant 0$, $p \leqslant 0$.

10.33. 1) $\sqrt[6]{p^6}$, якщо $p \geqslant 0$; 2) $\sqrt[8]{t^8}$;
3) $\sqrt[20]{c^{20}}$, якщо $c \leqslant 0$; 4) $\sqrt[12]{c^{24}}$;
5) $\sqrt[5]{32a^{15}}$; 6) $\sqrt{100t^2}$, якщо $t \leqslant 0$;
7) $\sqrt[4]{81p^{20}}$, якщо $p < 0$; 8) $\sqrt[9]{c^{27}m^{90}}$;
9) $\sqrt{0{,}09m^2p^8}$, якщо $m \leqslant 0$;
10) $\sqrt[10]{c^{30}p^{50}}$, якщо $c \leqslant 0$, $p \leqslant 0$.

10.34. 1) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}}$; 2) $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}}$;
4) $\sqrt[7]{x\sqrt{x}}$; 5) $\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}$; 6) $\sqrt[11]{x^2\sqrt[5]{x}}$.

10.35. 1) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}}$; 2) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{125}}$;
4) $\sqrt[5]{m\sqrt[3]{m}}$; 5) $\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x^2}}$; 6) $\sqrt[7]{x^2\sqrt[3]{x}}$.

10.36. 1) $\sqrt[30]{m^{25}}$; 2) $\sqrt[8]{b^4}$; 3) $\sqrt[14]{p^{21}c^{28}}$; 4) $\sqrt[12]{a^{28}b^{32}}$.

10.37. 1) $\sqrt[45]{c^{27}}$; 2) $\sqrt[12]{c^6}$; 3) $\sqrt[6]{c^9p^{15}}$; 4) $\sqrt[18]{p^{24}a^{30}}$.

Обчисліть (**10.38–10.41**):

10.38. 1) $\sqrt[14]{7^{28}}$; 2) $\sqrt[5]{32^3}$; 3) $\sqrt[16]{(-11)^{32}}$;
4) $\sqrt[15]{(-2)^{45}}$; 5) $\sqrt[15]{32}\cdot\sqrt[3]{4}$; 6) $\sqrt[16]{(-3)^8}\cdot\sqrt{27}$.

10.39. 1) $\sqrt[12]{10^{24}}$; 2) $\sqrt[7]{128^2}$; 3) $\sqrt[14]{(-5)^{28}}$;
4) $\sqrt[17]{(-3)^{51}}$; 5) $\sqrt[6]{27}\cdot\sqrt{3}$; 6) $\sqrt[20]{(-2)^{10}}\cdot\sqrt{8}$.

4 **10.40.** 1) $\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[10]{7-4\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}-2}\cdot\sqrt[6]{49+20\sqrt{6}}$.

10.41. 1) $\sqrt{4-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[5]{\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[10]{7+4\sqrt{3}}$.

Побудуйте графік функції (**10.42–10.43**):

10.42. 1) $y=\sqrt[9]{x^9}+x$; 2) $y=2x-\sqrt[5]{x^{10}}$; 3) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt[7]{x^7}}+1$;
4) $y=\sqrt[6]{x^6}+2x$; 5) $y=x-\sqrt[8]{x}$; 6) $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2}}$;
7) $y=\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[5]{x^3}$; 8) $y=\sqrt[6]{x^6}\cdot\sqrt[6]{x^5}$.

10.43. 1) $y=2x-\sqrt[7]{x^7}$; 2) $y=\sqrt[6]{x^{12}}-4x$; 3) $y=\dfrac{\sqrt[9]{x^9}}{x}$;
4) $y=3x+\sqrt[8]{x^8}$; 5) $y=\sqrt{x^2}+x$; 6) $y=\dfrac{x^3}{\sqrt[4]{x^4}}-1$;
7) $y=\sqrt[7]{x^3}\cdot\sqrt[7]{x^4}$; 8) $y=\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{x^3}$.

10.44. Клієнт «Добробанку» взяв кредит у розмірі 24 000 грн на рік під 16 %. Погашати кредит він має, вносячи щомісяця однакову суму коштів, так, щоб через рік виплатити всю суму кредиту разом з відсотками. Скільки коштів має щомісяця вносити в банк цей клієнт?

10.45. (*Міжнародний математичний конкурс «Кенгуру»*). Ірина розрізала прямокутник площею 2016 см^2 на 56 рівних квадратів. Довжини сторін прямокутника і квадратів у сантиметрах є цілими числами. Для скількох різних прямокутників дівчинка могла це зробити?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

10.46. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{18}$; 2) $\sqrt{48}$; 3) $\sqrt{75}$;

4) $\sqrt{15a^2}$, якщо $a \geqslant 0$; 5) $\sqrt{p^5}$; 6) $\sqrt{7a^{10}}$, якщо $a < 0$.

10.47. Внесіть множник під знак кореня:

1) $5\sqrt{2}$; 2) $-3\sqrt{7}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{8x}$;

4) $a\sqrt{3}$, якщо $a \geqslant 0$; 5) $c^3\sqrt{2}$, якщо $c < 0$; 6) $m\sqrt{m}$.

10.48. Скоротіть дріб:

1) $\frac{m^2-5}{m-\sqrt{5}}$; 2) $\frac{\sqrt{p}+2}{4-p}$; 3) $\frac{\sqrt{7}+7}{\sqrt{7}}$; 4) $\frac{a+6\sqrt{a}}{a-36}$.

10.49. Звільніть знаменник дробу від ірраціональності:

1) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{10}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{12}{\sqrt{7}-1}$; 4) $\frac{18}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

§ 11. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ, ЩО МІСТЯТЬ КОРЕНІ

Властивості арифметичного кореня n-го степеня використовують для тотожних перетворень виразів: винесення множника з-під знака кореня, внесення множника під знак кореня, спрощення ірраціональних виразів.

1. Винесення множника з-під знака кореня

У виразах, що містять корені n-го степеня, як і у виразах, що містять арифметичні квадратні корені, також можна *виносити множник з-під знака кореня*, використовуючи при цьому теорему про корінь n-го степеня з добутку.

Приклад 1. Винести множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[3]{108}$; 2) $\sqrt[5]{160m}$.

Розв'язання. 1) $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{27 \cdot 4} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{4}$.

2) $\sqrt[5]{160m} = \sqrt[5]{32 \cdot 5m} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{5m} = 2\sqrt[5]{5m}$.

Відповідь. 1) $3\sqrt[3]{4}$; 2) $2\sqrt[5]{5m}$.

Приклад 2. Винести множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[5]{x^{11}}$; 2) $\sqrt[4]{a^{15}}$; 3) $\sqrt[8]{-b^{11}}$.

Розв'язання.

1) $\sqrt[5]{x^{11}} = \sqrt[5]{x^{10}\cdot x} = \sqrt[5]{x^{10}}\cdot\sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{(x^2)^5}\cdot\sqrt[5]{x} = x^2\sqrt[5]{x}$.

2) $\sqrt[4]{a^{15}} = \sqrt[4]{a^{12}\cdot a^3} = \sqrt[4]{a^{12}}\cdot\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4]{(a^3)^4}\cdot\sqrt[4]{a^3} = |a^3|\sqrt[4]{a^3}$.

Очевидно, областю допустимих значень виразу $\sqrt[4]{a^{15}}$ є невід'ємні значення a, тобто $a \geqslant 0$. Тоді $a^3 \geqslant 0$, а отже, $|a^3| = a^3$. Маємо: $\sqrt[4]{a^{15}} = a^3\sqrt[4]{a^3}$.

3) Область допустимих значень виразу можна знайти з нерівності $-b^{11} \geqslant 0$, тобто $b^{11} \leqslant 0$. Отже, $b \leqslant 0$, тому $|b| = -b$. Тепер виконаємо винесення множника з-під знака кореня:

$\sqrt[8]{-b^{11}} = \sqrt[8]{b^8\cdot(-b^3)} = \sqrt[8]{b^8}\cdot\sqrt[8]{-b^3} = |b|\sqrt[8]{-b^3} = -b\sqrt[8]{-b^3}$.

Відповідь: 1) $x^2\sqrt[5]{x}$; 2) $b^2\sqrt[6]{b}$; 3) $a^3\sqrt[4]{a^3}$; 4) $-b\sqrt[8]{-b^3}$.

Приклад 3. Спростити вираз: $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$.

Розв'язання. $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{81\cdot 5} - \sqrt[4]{16\cdot 5} =$
$= \sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{5} = 3\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} = (3-2)\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5}$.

Відповідь. $\sqrt[4]{5}$.

2. Внесення множника під знак кореня

Розглядаючи перетворення винесення множника з-під знака кореня у зворотному порядку, отримаємо перетворення, яке називають *внесенням множника під знак кореня*.

Приклад 4. Внести множник під знак кореня:

1) $2\sqrt[5]{3}$; 2) $-3\sqrt[6]{2}$.

Розв'язання. 1) $2\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{32\cdot 3} = \sqrt[5]{96}$.

2) $-3\sqrt[6]{2} = -\sqrt[6]{3^6}\sqrt[6]{2} = -\sqrt[6]{729}\cdot\sqrt[6]{2} = -\sqrt[6]{729\cdot 2} = -\sqrt[6]{1458}$.

Зверніть увагу, що під знак кореня парного степеня вносимо лише модуль множника, знак множника залишаємо перед коренем.

Відповідь. 1) $\sqrt[5]{96}$; 2) $-\sqrt[6]{1458}$.

Приклад 5. Внести множник під знак кореня:

1) $c\sqrt[3]{5}$; 2) $m\sqrt[8]{2}$, якщо $m \geqslant 0$; 3) $a\sqrt[4]{b}$, якщо $a < 0$; 4) $b\sqrt[6]{7}$.

Розв'язання. 1) $c\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{c^3}\cdot\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5c^3}$;

2) Оскільки $m \geqslant 0$, то $m = |m| = \sqrt[8]{m^8}$, тому

$m\sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{m^8}\cdot\sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2m^8}$.

3) Оскільки $a < 0$, то $a = -|a| = -\sqrt[4]{a^4}$, тому

$a\sqrt[4]{b} = -\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{b} = -\sqrt[4]{a^4b}$.

4) Оскільки в умові не задано обмежень для змінної b, розглянемо два випадки.

Якщо $b \geqslant 0$, то $b\sqrt[6]{7} = \sqrt[6]{b^6} \cdot \sqrt[6]{7} = \sqrt[6]{7b^6}$.

Якщо $b < 0$, то $b\sqrt[6]{7} = -\sqrt[6]{b^6} \cdot \sqrt[6]{7} = -\sqrt[6]{7b^6}$.

Відповідь. 1) $\sqrt[3]{5c^3}$; 2) $\sqrt[8]{2m^8}$; 3) $-\sqrt[4]{a^4b}$;
4) $\sqrt[6]{7b^6}$, якщо $b \geqslant 0$; $-\sqrt[6]{7b^6}$, якщо $b < 0$.

Приклад 6. Внести множник під знак кореня:

$$1)\ a\sqrt[6]{\frac{10}{a}}; \qquad 2)\ b^3\sqrt[10]{-b}.$$

Розв'язання. 1) ОДЗ: $a > 0$. Маємо:

$$a\sqrt[6]{\frac{10}{a}} = \sqrt[6]{a^6} \cdot \sqrt[6]{\frac{10}{a}} = \sqrt[6]{a^6 \cdot \frac{10}{a}} = \sqrt[6]{10a^5}.$$

2) ОДЗ: $b \leqslant 0$. Маємо:

$$b^3\sqrt[10]{-b} = -\left|b^3\right| \cdot \sqrt[10]{-b} = -\sqrt[10]{(b^3)^{10}} \cdot \sqrt[10]{-b} = -\sqrt[10]{b^{30} \cdot (-b)} = -\sqrt[10]{-b^{31}}.$$

Відповідь: 1) $\sqrt[6]{10a^5}$; 2) $-\sqrt[10]{-b^{31}}$.

Приклад 7. Спростити вираз $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$.

Розв'язання. Внесемо множник 5 під знак квадратного кореня і далі застосуємо властивості кореня n-го степеня:

$$\sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{5^2 \cdot 5}} = \sqrt[3]{\sqrt{5^3}} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt{\sqrt[3]{5^3}} = \sqrt{5}.$$

Відповідь. $\sqrt{5}$.

3. Скорочення дробів

Приклад 8. Скоротити дріб: 1) $\dfrac{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt[4]{2x}}{\sqrt[4]{2x} - \sqrt{2}}$.

Розв'язання. Вирази $\sqrt[6]{a}$ і $\sqrt[6]{b}$ мають зміст для $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, тому $\sqrt[3]{a} = (\sqrt[6]{a})^2$ і $\sqrt[3]{b} = (\sqrt[6]{b})^2$.
Маємо:

$$\frac{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{(\sqrt[6]{a})^2 - (\sqrt[6]{b})^2} = \frac{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{(\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})} = \frac{1}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}}.$$

2) З умови випливає, що $x \geqslant 0$; $x \neq 2$. Для таких значень x маємо: $\sqrt{x} = \sqrt[4]{x^2} = (\sqrt[4]{x})^2$, крім того, $\sqrt{2} = \sqrt[4]{2^2} = (\sqrt[4]{2})^2$. Тоді:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt[4]{2x}}{\sqrt[4]{2x} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt[4]{x})^2 - \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{x} - (\sqrt[4]{2})^2} = \frac{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2})}{\sqrt[4]{2}(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2})} = \sqrt[4]{\frac{x}{2}}.$$

Відповідь. 1) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}}$; 2) $\sqrt[4]{\dfrac{x}{2}}$.

4. Звільнення від ірраціональності у знаменнику дробу

Нагадаємо, що звільнитися від ірраціональності у знаменнику (чисельнику) дробу означає виконати такі перетворення цього дробу, щоб його знаменник (чисельник) не містив знака кореня.

Приклад 9. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу: 1) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$; 2) $\frac{10}{\sqrt[3]{4}+1}$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{1\cdot\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{2}$.

2) Щоб звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{10}{\sqrt[3]{4}+1}$, помножимо його чисельник і знаменник на вираз, спряжений до знаменника, тобто на неповний квадрат різниці чисел $\sqrt[3]{4}$ і 1. Маємо:

$$\frac{10}{\sqrt[3]{4}+1} = \frac{10((\sqrt[3]{4})^2 - \sqrt[3]{4}\cdot 1 + 1^2)}{(\sqrt[3]{4}+1)((\sqrt[3]{4})^2 - \sqrt[3]{4}\cdot 1 + 1^2)} = \frac{10(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1)}{(\sqrt[3]{4})^3 + 1^3} =$$

$$= \frac{10(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1)}{4+1} = \frac{10(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1)}{5} = 2(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1).$$

В і д п о в і д ь. 1) $\frac{\sqrt[5]{8}}{2}$; 2) $2(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1)$.

5. Спрощення виразів

Приклад 10. Спростити $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}} + a}$.

Р о з в ' я з а н н я. Зазначимо, що

$$\sqrt[4]{9\pm4\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5\pm4\sqrt{5}+4} = \sqrt[4]{(\sqrt{5})^2 \pm 2\sqrt{5}\cdot2 + 2^2} =$$

$$= \sqrt[4]{(\sqrt{5}\pm2)^2} = \sqrt{\left|\sqrt{5}\pm2\right|} = \sqrt{\sqrt{5}\pm2}.$$

Тоді $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}} + a} =$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} + \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} + a} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} + \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} + (\sqrt[3]{a})^3} =$$

$$= \frac{1 + \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}}{1 + (\sqrt[3]{a})^3} = \frac{1 - \sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2}{(1+\sqrt[3]{a})(1 - \sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2)} = \frac{1}{1+\sqrt[3]{a}}.$$

В і д п о в і д ь. $\frac{1}{1+\sqrt[3]{a}}$.

Приклад 11. Спростити вираз A, якщо

$$A=\sqrt[4]{\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-4\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+12}:(z-1).$$

Знайти область допустимих значень виразу A.

Розв'язання. Спростимо підкореневий вираз:

$$\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-4\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+12=\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2\right)^2-4\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+12=$$

$$=\left(z+\frac{1}{z}\right)^4-4\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+4-4\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+12=$$

$$=\left(z+\frac{1}{z}\right)^4-8\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+16=\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-4\right)^2=$$

$$=\left(z^2+2+\frac{1}{z^2}-4\right)^2=\left(z^2-2+\frac{1}{z^2}\right)^2=\left(\left(z-\frac{1}{z}\right)^2\right)^2=\left(z-\frac{1}{z}\right)^4.$$

$$A=\sqrt[4]{\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-4\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+12}:(z-1)=\sqrt[4]{\left(z-\frac{1}{z}\right)^4}\cdot\frac{1}{z-1}=$$

$$=\left|z-\frac{1}{z}\right|\cdot\frac{1}{z-1}=\left|\frac{z^2-1}{z}\right|\cdot\frac{1}{z-1}.$$

ОДЗ: $z\neq0$, $z\neq1$. Зауважимо, що

$\dfrac{z^2-1}{z}=\dfrac{(z-1)(z+1)}{z}\geqslant0$, якщо $z\in[-1;\,0)\cup(1;\,+\infty)$, і

$\dfrac{(z-1)(z+1)}{z}<0$, якщо $z\in(-\infty;\,-1)\cup(0;\,1)$.

Тому маємо два випадки: 1) $z\in(-\infty;\,-1)\cup(0;\,1)$.

Тоді $\left|\dfrac{z^2-1}{z}\right|=-\dfrac{z^2-1}{z}$; $A=-\dfrac{(z-1)(z+1)}{z(z-1)}=-\dfrac{z+1}{z}$.

2) $z\in[-1;\,0)\cup(1;\,+\infty)$. Тоді

$\left|\dfrac{z^2-1}{z}\right|=\dfrac{z^2-1}{z}$; $A=\dfrac{(z-1)(z+1)}{z(z-1)}=\dfrac{z+1}{z}$.

Відповідь. $-\dfrac{z+1}{z}$, якщо $z\in(-\infty;\,-1)\cup(0;\,1)$;

$\dfrac{z+1}{z}$, якщо $z\in[-1;\,0)\cup(1;\,+\infty)$.

Приклад 12. Доведіть, що $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3.$

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $x=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}.$
Оскільки $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, то

$$x^3=(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}})^3+(\sqrt[3]{9-\sqrt{80}})^3+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\times$$

$$\times(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}})=9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{9^2-(\sqrt{80})^2}\cdot x=$$

$$=18+3x.$$

Маємо $x^3-3x-18=0$. За наслідком з теореми Везу знаходимо корінь: $x=3$.
Тоді рівняння можна переписати у вигляді:
$(x-3)(x^3+3x+6)=0$.
Многочлен x^3+3x+6 коренів не має, тому рівняння має єдиний розв'язок: $x=3$. Отже, $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3.$

● Поясніть, як винести множник з-під знака кореня. ● Поясніть, як внести множник під знак кореня. ● Поясніть, як звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробів: $\frac{1}{\sqrt{7}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; $\frac{3}{\sqrt{5}-1}$?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Виконайте дії (11.1–11.2):

11.1. 1) $4\sqrt[3]{7}+2\sqrt[3]{7}$; 2) $7\sqrt{3}-\sqrt{3}$;
3) $4\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{3}$; 4) $9\sqrt[5]{7}-8\sqrt[5]{7}$.

11.2. 1) $2\sqrt{3}+7\sqrt{3}$; 2) $9\sqrt[8]{5}-2\sqrt[8]{5}$;
3) $5\sqrt[7]{3}+\sqrt[7]{3}$; 4) $7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}$.

Подайте у вигляді кореня (11.3–11.4):

11.3. 1) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}}$; 3) $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{7}$; 4) $\frac{\sqrt[5]{10}}{\sqrt[5]{t}}$.

11.4. 1) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{2}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{6}}$; 3) $\sqrt[7]{p}\cdot\sqrt[7]{2}$; 4) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$.

2 Винесіть множник з-під знака кореня (11.5–11.6):

11.5. 1) $\sqrt[3]{64m}$; 2) $\sqrt[3]{3000}$; 3) $\sqrt[4]{81p}$;
4) $\sqrt[4]{32}$; 5) $\sqrt[5]{486}$; 6) $\sqrt{50c}$.

11.6. 1) $\sqrt[4]{32}$; 2) $\sqrt{25p}$; 3) $\sqrt[3]{27a}$;
4) $\sqrt[5]{96}$; 5) $\sqrt[4]{162}$; 6) $\sqrt{72b}$.

Внесіть множник під знак кореня (11.7–11.8):

11.7. 1) $2\sqrt[3]{6}$; 2) $5\sqrt[4]{\frac{1}{5}}$; 3) $2\sqrt[5]{m}$; 4) $3\sqrt{2p}$.

11.8. 1) $3\sqrt{7}$; 2) $4\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$; 3) $3\sqrt[4]{a}$; 4) $2\sqrt[5]{3m}$.

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу (11.9–11.10):

11.9. 1) $\frac{1}{\sqrt{7}}$; 2) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$; 3) $\frac{9}{\sqrt[4]{27}}$; 4) $\frac{5}{\sqrt[3]{16}}$.

11.10. 1) $\frac{10}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; 3) $\frac{8}{\sqrt[5]{16}}$; 4) $\frac{7}{\sqrt[4]{8}}$.

Спростіть вираз (11.11–11.12):

11.11. 1) $(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})$; 2) $(1-\sqrt[3]{p})(1+\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{p^2})$.

11.12. 1) $(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})$; 2) $(\sqrt[3]{a}+1)(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1)$.

Замініть вираз йому тотожно рівним (11.13–11.14):

11.13. 1) $\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{500}$; 2) $2\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{3}$.

11.14. 1) $\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{162}$; 2) $5\sqrt[3]{56}-\sqrt[3]{7}$.

Обчисліть значення виразу (11.15–11.16):

11.15. 1) $\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}-5\sqrt[3]{32})$; 2) $\frac{\sqrt[4]{5}+2\sqrt[4]{80}-4\sqrt[4]{405}}{\sqrt[4]{5}}$.

11.16. 1) $\sqrt[4]{9}(3\sqrt[4]{9}-\sqrt[4]{144})$; 2) $\frac{2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{40}-4\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}$.

Подайте у вигляді кореня (11.17–11.18):

11.17. 1) $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{x}$; 2) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[8]{a}$; 3) $\frac{\sqrt[24]{p}}{\sqrt[6]{6}}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{m}}{\sqrt[9]{m}}$.

11.18. 1) $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a}$; 2) $\sqrt[3]{p}\cdot\sqrt[12]{p}$; 3) $\frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt{a}}$; 4) $\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[24]{b}}$.

3 **Винесіть множник з-під знака кореня (11.19–11.20):**

11.19. 1) $\sqrt{32a^4}$; 2) $\sqrt[4]{162p^6}$, якщо $p \geqslant 0$;
3) $\sqrt{50x^2}$, якщо $x < 0$; 4) $\sqrt[3]{54c^8}$;
5) $\sqrt[6]{a^{13}b^8}$, якщо $b > 0$; 6) $\sqrt[4]{32x^6y^4}$, якщо $x > 0$, $y < 0$.

11.20. 1) $\sqrt{75a^6}$, якщо $a \geqslant 0$; 2) $\sqrt[4]{48p^{16}}$;
3) $\sqrt[6]{128m^{18}}$, якщо $m < 0$; 4) $\sqrt[3]{250x^4}$.

Внесіть множник під знак кореня (11.21–11.22):

11.21. 1) $a\sqrt[3]{2}$; 2) $x\sqrt{3}$, якщо $x \geqslant 0$; 3) $y\sqrt[4]{7}$, якщо $y < 0$;
4) $a\sqrt[6]{a}$; 5) $p\sqrt[8]{-p}$; 6) $xy\sqrt[4]{2}$, якщо $x < 0$, $y > 0$.

11.22. 1) $b\sqrt[4]{3}$; 2) $m\sqrt[4]{2}$, якщо $m \geqslant 0$;
3) $t\sqrt{a}$, якщо $t < 0$; 4) $c\sqrt[6]{c^3}$.

Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу (11.23–11.24):

11.23. 1) $\dfrac{12}{\sqrt{13}-1}$; 2) $\dfrac{10}{\sqrt{17}+\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{5}+1}$; 4) $\dfrac{9}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}$.

11.24. 1) $\dfrac{7}{\sqrt{11}+2}$; 2) $\dfrac{18}{\sqrt{15}-\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{7}-1}$; 4) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$.

Скоротіть дріб (11.25–11.28):

11.25. 1) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}}$.

11.26. 1) $\dfrac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[5]{m^2}-\sqrt{n}}{\sqrt[5]{m}+\sqrt[4]{n}}$.

11.27. 1) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[6]{x^2y^3}+\sqrt[6]{x^3y^2}}{\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{x}}$;

3) $\dfrac{a+8}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{a}+4}$; 4) $\dfrac{x-y}{\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x}}$.

11.28. 1) $\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt[4]{mn}}{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}$; 2) $\dfrac{9+3\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{a-27}$.

Спростіть вираз (11.29–11.30):

11.29. 1) $11a\sqrt[5]{\dfrac{3}{a^4}}+4\sqrt[5]{96a}-a^2\sqrt[5]{\dfrac{3}{a^9}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}$.

11.30. 1) $7p\sqrt[4]{\dfrac{2}{p^3}}-\sqrt[4]{162p}-p^2\sqrt[4]{\dfrac{2}{p^7}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}}+\dfrac{1}{\sqrt[6]{ab}-\sqrt[3]{b}}$.

4 **11.31.** Доведіть, що при $a > 0$, $b > 0$, $a^2 > b$ мають місце *формули складного радикала*:

1) $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$;

2) $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.

Спростіть вираз (11.32–11.33):

11.32. 1) $\left((\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^{-2}+(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^{-2}\right):\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$;

2) $\dfrac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})^2+(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2}{2(x-y)}:\dfrac{1}{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}-3\sqrt{xy}$;

3) $\dfrac{a-b}{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}}:\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{b}}\right)$;

4) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

11.33. 1) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}+1\right)$;

2) $\sqrt{x^2+x\sqrt{8}+2}+\sqrt{x^2-x\sqrt{8}+2}$.

11.34. Обчисліть:

1) $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})}$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}+15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}$.

Спростіть вираз (11.35–11.36):

11.35. $\sqrt[4]{(1-2x+x^2)(x^2-1)(x-1)}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{x+1}}{x^2+2x-3}$.

11.36. $\sqrt[4]{(a+1)(a^2-1)(1+2a+a^2)}\cdot\dfrac{\sqrt{a-1}}{a^2+3a+2}$.

11.37. Спростіть вираз $\sqrt[4]{6x(5+2\sqrt{6})}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$ і знайдіть його значення, якщо $x=\dfrac{1}{6}$.

Спростіть вираз (11.38–11.39):

11.38. 1) $\dfrac{\sqrt{a-2\sqrt{a}+1}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a}+1}:\dfrac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt[4]{a}-1}$;

2) $\left(1+\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\right):\left(1-\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\right)$, якщо $a>b>0$.

11.39. 1) $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}$;

2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{1-x}\right):(\sqrt{1-x^2}+1)$.

Знайдіть значення виразу (11.40–11.41):

11.40. 1) $\dfrac{a+\sqrt{a^2-4a}}{a-\sqrt{a^2-4a}}-\dfrac{a-\sqrt{a^2-4a}}{a+\sqrt{a^2-4a}}$, якщо $a=9$;

2) $\left((a-b)\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+a-b\right)\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-1\right)$, якщо $a=2019$; $b=-0{,}5$;

3) $\dfrac{x^2-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}-2}{x^2-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}+2}$, якщо $x=4{,}25$.

11.41. 1) $\dfrac{a+2+\sqrt{a^2-4}}{a+2-\sqrt{a^2-4}}+\dfrac{a+2-\sqrt{a^2-4}}{a+2+\sqrt{a^2-4}}$, якщо $a = 2018$;

2) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\left(\dfrac{x+\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}-\sqrt[4]{xy}\right):\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$,

якщо $x = 2020$; $y = 16$;

3) $\dfrac{p^2-p-2+(p-1)\sqrt{p^2-4}}{p^2+p-2+(p-1)\sqrt{p^2-4}}$, якщо $p = 2{,}5$.

11.42. Доведіть, що значення виразу $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{x}+\dfrac{x}{\sqrt{2}}+2}-$ $-\dfrac{x^2\sqrt[4]{2}-2\sqrt{x}}{x\sqrt{2x}-\sqrt[4]{8x^4}}$ не залежить від значення змінної.

11.43. Обчисліть значення виразу $a^3 + 3a$, якщо $a=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+$ $+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу (11.44–11.45):

11.44. 1) $\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

11.45. $\dfrac{23}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

11.46. Доведіть, що раціональним є число:

1) $\sqrt[3]{99-70\sqrt{2}}\cdot\sqrt{17+12\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

11.47. Доведіть, що число $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ є раціональним.

11.48. Унаслідок пошкодження водопровідний кран став протікати. Щосекунди з нього падає крапля води, а за 24 хв набігає повна склянка. Скільки води втрачається через цей кран за добу? За місяць? Що треба зробити, щоб уникнути цих втрат? (Вважатимемо, що в 1 літрі 5 склянок води, а в 1 місяці 30 днів).

11.49. (*Національна олімпіада Румунії, 1981 р.*). Розв'яжіть рівняння $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$ у цілих числах.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

11.50. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt{x+2}$; 3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$; 4) $y=\sqrt{x^2+2x}$.

11.51. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt{x+1}$; 3) $y = \sqrt{x} - 2$;

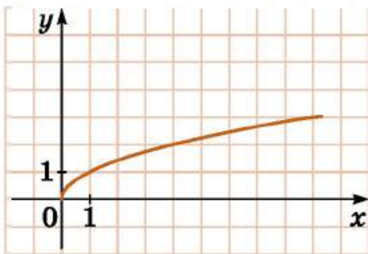
4) $y = \sqrt{x-3}$; 5) $y = \sqrt{x} + 2$; 6) $y = 3 + \sqrt{x-1}$.

§ 12. ФУНКЦІЯ $y = \sqrt[n]{x}$ ТА ЇЇ ГРАФІК

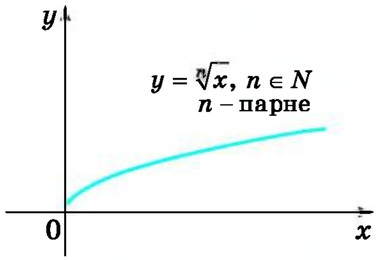
Розглянемо функцію $y = \sqrt[n]{x}$, де $n \in N$, $n > 1$.

1. Функція $y = \sqrt[n]{x}$, де n – натуральне парне число

Розглянемо спочатку функцію $y = \sqrt{x}$, яку ми вже вивчали в курсі алгебри 8 класу. Її графік зображено на малюнку 12.1. Областю визначення функції є $x \geqslant 0$, а множиною значень: $y \geqslant 0$. Функція зростає на $[0; +\infty)$.



Мал. 12.1



Мал. 12.2

Розглянемо загальний випадок функції $y = \sqrt[n]{x}$, де n – натуральне парне число. Функція визначена для $x \geqslant 0$ і є зростаючою. Множина її значень: $y \geqslant 0$.

Графік функції $y = \sqrt[n]{x}$, де n – натуральне парне число, схематично зображено на малюнку 12.2.

2. Функція $y = \sqrt[n]{x}$, де n – натуральне непарне число, $n \geqslant 3$

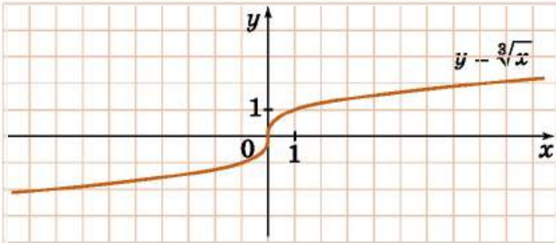
Розглянемо спочатку графік функції $y = \sqrt[3]{x}$. Областю визначення цієї функції є множина всіх дійсних чисел. Складемо таблицю значень функції для деяких значень аргументу:

x	-8	-1	0	1	8
y	-2	-1	0	1	2

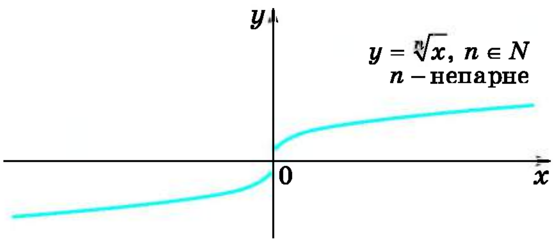
Позначимо отримані точки на координатній площині і сполучимо їх плавною лінією. Отримаємо графік функції $y = \sqrt[3]{x}$ (мал. 12.3). Множиною значень цієї функції є множина всіх дійсних чисел, функція є зростаючою.

У загальному випадку функція $y = \sqrt[n]{x}$, де n – натуральне непарне число, $n \geqslant 3$, також визначена для будь-якого дійсного значення аргументу, зростає на R, множиною її значень є множина всіх дійсних чисел.

Графік функції $y = \sqrt[n]{x}$, де n – натуральне непарне число, $n \geqslant 3$, зображено на малюнку 12.4.



Мал. 12.3



Мал. 12.4

3. Властивості функції $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$, $n \geqslant 2$

Узагальнимо властивості функції, яку ми щойно розглянули, у вигляді таблиці.

Функція $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$, $n \geqslant 2$		
Властивості	**n – парне**	**n – непарне**
Область визначення	$[0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Множина значень	$[0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості, $y > 0$	$x > 0$	$x > 0$
Проміжки знакосталості, $y < 0$	–	$x < 0$
Парність, непарність	Ні парна, ні непарна	Непарна
Проміжки зростання	$[0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Проміжки спадання	–	–

4. Застосування властивостей функції $y = \sqrt[n]{x}$

Розглянемо кілька вправ, які розв'яжемо за допомогою властивостей функції $y = \sqrt[n]{x}$.

Приклад 1. Знайти область допустимих значень виразу:

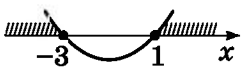
1) $\sqrt[4]{x+1}$; 2) $\sqrt[5]{7-x}$; 3) $\sqrt[18]{x^2+2x-3}$; 4) $\sqrt[10]{\dfrac{x-2}{3-x}}$.

Р о з в ' я з а н н я. ОДЗ виразу $\sqrt[n]{f(x)}$ у випадку парного n знаходимо, розв'язавши нерівність $f(x) \geqslant 0$, якщо ж n – непарне, то ОДЗ виразу збігається з областю визначення функції $f(x)$.

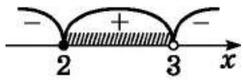
1) $x + 1 \geqslant 0$; $x \geqslant -1$; $D(y) = [-1; +\infty)$;

2) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

3) $x^2 + 2x - 3 \geqslant 0$, отже, $D(y) = (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$ (мал. 12.5).



Мал. 12.5



Мал. 12.6

4) $\dfrac{x-2}{3-x} \geqslant 0$, розв'язавши цю нерівність методом інтервалів (мал. 12.6), отримаємо, що $D(y) = [2; 3)$.

В і д п о в і д ь. 1) $[-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$; 4) $[2; 3)$.

Приклад 2. Знайти множину значень функції:

1) $y = \sqrt[4]{x+1}$; 2) $y = \sqrt[4]{x} + 1$; 3) $y = \sqrt[3]{x} - 11$; 4) $y = \sqrt[6]{x^2+64} - 3$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Оскільки $\sqrt[4]{x+1} \geqslant 0$, то $E(y) = [0; +\infty)$.

2) $\sqrt[4]{x} \geqslant 0$, тоді $\sqrt[4]{x} + 1 \geqslant 1$, тому $E(y) = [1; +\infty)$.

3) Оскільки областю значень функції $y = \sqrt[3]{x}$ є множина R, то областю значень функції $y = \sqrt[3]{x} - 11$ є також множина R.

4) $x^2 \geqslant 0$, тоді $x^2 + 64 \geqslant 64$. Маємо: $\sqrt[6]{x^2+64} \geqslant \sqrt[6]{64}$, тоді $\sqrt[6]{x^2+64} \geqslant 2$, а тому $\sqrt[6]{x^2+64} - 3 \geqslant -1$. Отже, $E(y) = [-1; +\infty)$.

В і д п о в і д ь. 1) $[0; +\infty)$; 2) $[1; +\infty)$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4) $[-1; +\infty)$.

Приклад 3. Порівняти числа:

1) $\sqrt[7]{3}$ і $\sqrt[7]{11}$; 2) $\sqrt[4]{15}$ і 2; 3) $\sqrt[4]{7}$ і $\sqrt[8]{45}$; 4) $\sqrt[4]{9}$ і $\sqrt[3]{5}$.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки функція $y = \sqrt[n]{x}$ зростає на всій своїй області визначення при будь-якому натуральному n, $n \geqslant 2$, то якщо $a > b$ і значення виразів $\sqrt[n]{a}$ та $\sqrt[n]{b}$ існують, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

1) Отже, $\sqrt[7]{3} < \sqrt[7]{11}$.

2) Оскільки $2 = \sqrt[4]{16}$, а $\sqrt[4]{15} < \sqrt[4]{16}$, то $\sqrt[4]{15} < 2$.

3) За властивостями кореня n-го степеня перетворимо вираз $\sqrt[4]{7}$, подавши його у вигляді кореня 8-го степеня: $\sqrt[4]{7} = \sqrt[4\cdot 2]{7^2} = \sqrt[8]{49}$. Оскільки $\sqrt[8]{49} > \sqrt[8]{45}$, то $\sqrt[4]{7} > \sqrt[8]{45}$.

4) Подамо число у вигляді коренів одного й того самого степеня: $\sqrt[4]{9} = \sqrt[4\cdot 3]{9^3} = \sqrt[12]{729}$ та $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3\cdot 4]{5^4} = \sqrt[12]{625}$. Оскільки $\sqrt[12]{729} > \sqrt[12]{625}$, то $\sqrt[4]{9} > \sqrt[3]{5}$.

В і д п о в і д ь. 1) $\sqrt[7]{3} < \sqrt[7]{11}$; 2) $\sqrt[4]{15} < 2$; 3) $\sqrt[4]{7} > \sqrt[8]{45}$; 4) $\sqrt[4]{9} > \sqrt[3]{5}$.

○ Схематично побудуйте графіки функцій $y = \sqrt[n]{x}$ для парного n та для непарного n. ○ Сформулюйте властивості функції $y = \sqrt[n]{x}$ для парного n та для непарного n.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Знайдіть область визначення і область значень функції (12.1–12.2):

12.1. 1) $y = \sqrt[7]{x}$; 2) $y = \sqrt[10]{x}$; 3) $y = \sqrt[8]{x}$; 4) $y = \sqrt[8]{x}$.

12.2. 1) $y = \sqrt[8]{x}$; 2) $y = \sqrt[11]{x}$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \sqrt[9]{x}$.

Схематично побудуйте графік функції (12.3–12.4):

12.3. 1) $y = \sqrt[8]{x}$; 2) $y = \sqrt[21]{x}$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \sqrt[5]{x}$.

12.4. 1) $y = \sqrt[9]{x}$; 2) $y = \sqrt[12]{x}$; 3) $y = \sqrt[3]{x}$; 4) $y = \sqrt[10]{x}$.

12.5. Чи належить графіку функції $y = \sqrt[4]{x}$ точка:
1) $A(0; 1)$; 2) $B(16; 2)$; 3) $C(-1; 1)$; 4) $D(0; 0)$?

12.6. Чи належить графіку функції $y = \sqrt[3]{x}$ точка:
1) $A(1; 1)$; 2) $B(-8; 2)$; 3) $C(8; -2)$; 4) $D(-1; -1)$?

2 За допомогою геометричних перетворень побудуйте схематично графік функції (12.7–12.8):

12.7. 1) $y = \sqrt[3]{x} + 2$; 2) $y = \sqrt[4]{x-1}$.

12.8. 1) $y = \sqrt{x} - 3$; 2) $y = \sqrt[5]{x+2}$.

Чи перетинаються графіки функцій (відповідь обґрунтуйте) (12.9–12.10):

12.9. 1) $y = \sqrt[6]{x}$ і $y = -2019$; 2) $y = \sqrt[6]{x}$ і $y = -0{,}01$?

12.10. 1) $y = \sqrt[4]{x}$ і $y = 0{,}003$; 2) $y = \sqrt[3]{x}$ і $y = 2020$?

Порівняйте числа (12.11–12.12):

12.11. 1) $\sqrt[7]{5}$ і $\sqrt[7]{9}$; 2) $\sqrt[10]{19}$ і $\sqrt[10]{18}$;

3) $\sqrt[4]{5}$ і $\sqrt[8]{26}$; 4) $\sqrt[6]{3}$ і $\sqrt[18]{26}$.

12.12. 1) $\sqrt{11}$ і $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt[9]{3}$ і $\sqrt[9]{2}$;
3) $\sqrt[3]{7}$ і $\sqrt[6]{48}$; 4) $\sqrt[5]{4}$ і $\sqrt[15]{65}$.

Знайдіть область визначення функції (12.13–12.14):

12.13. 1) $y = \sqrt[5]{x+1}$; 2) $y = \sqrt[6]{10-x}$;
3) $y = \sqrt[4]{x^2-8x}$; 4) $y = \sqrt[10]{2-x-x^2}$.

12.14. 1) $y = \sqrt[10]{x+3}$; 2) $y = \sqrt[9]{x-7}$;
3) $y = \sqrt[6]{3x-x^2}$; 4) $y = \sqrt[8]{2x^2+3x-5}$.

Знайдіть множину значень функції (12.15–12.16):

12.15. 1) $y = \sqrt[5]{x}+1$; 2) $y = \sqrt[8]{x}-2$.

12.16. 1) $y = \sqrt[10]{x}+5$; 2) $y = \sqrt[7]{x}-1$.

12.17. Оцініть значення виразу $\sqrt[3]{x}$, якщо:
1) $-1 \leqslant x \leqslant 27$; 2) $0 < x \leqslant 1000$.

12.18. Оцініть значення виразу $\sqrt[4]{x}$, якщо:
1) $0 \leqslant x < 16$; 2) $1 < x < 81$.

3 Побудуйте графік функції (12.19–12.20):

12.19. 1) $y = \sqrt[3]{x-1}+2$; 2) $y = 3\sqrt[6]{x}$.

12.20. 1) $y = \sqrt[4]{x+1}-2$; 2) $y = 2\sqrt[3]{x}$.

Між якими двома послідовними цілими числами на координатній прямій міститься число (12.21–12.22):

12.21. 1) $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt[7]{5}$; 3) $\sqrt[3]{0,5}$;
4) $\sqrt[9]{-0,2}$; 5) $-\sqrt[6]{65}$; 6) $\sqrt[3]{-8,01}$?

12.22. 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[5]{3}$; 3) $\sqrt[7]{0,3}$;
4) $\sqrt[3]{-1,05}$; 5) $-\sqrt[4]{82}$; 6) $\sqrt[5]{-0,012}$?

Укажіть усі цілі числа, які розташовані на координатній прямій між числами (12.23–12.24):

12.23. 1) $\sqrt[5]{0,25}$ і $\sqrt[4]{17,9}$; 2) $\sqrt[3]{-27,3}$ і $\sqrt{3,99}$.

12.24. 1) $\sqrt[3]{-2,4}$ і $\sqrt[4]{16,7}$; 2) $\sqrt[5]{11}$ і $\sqrt{41}$.

Знайдіть область визначення функції (12.25–12.26):

12.25. 1) $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5+4x-x^2}}$; 2) $y = \sqrt[6]{\dfrac{x^2-4x}{x+7}}$.

12.26. 1) $y = \dfrac{4}{\sqrt[6]{x^2+x-2}}$; 2) $y = \sqrt[8]{\dfrac{2x-x^2}{x-3}}$.

Порівняйте числа (12.27–12.28):

12.27. 1) $\sqrt[3]{5}$ і $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[8]{10}$ і $\sqrt[5]{3\sqrt[4]{3}}$.

12.28. 1) $\sqrt[3]{3}$ і $\sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[9]{7}$ і $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$.

4 Розв'яжіть рівняння графічно (12.29–12.30):

12.29. 1) $\sqrt[3]{x-1} = 3 - x$; 2) $-\sqrt[4]{x} = x - 2$.

12.30. 1) $\sqrt[4]{x+1} = 1 - x$; 2) $-\sqrt[3]{x} = 2x - 3$.

Порівняйте числа (12.31–12.32):

12.31. 1) $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ і 3; 2) $\sqrt{13} - \sqrt[3]{4}$ і 2.

12.32. 1) $\sqrt[3]{4} + \sqrt{2}$ і 3; 2) $\sqrt{6} - \sqrt[3]{3}$ і 1.

12.33. Для скління музейних вітрин в одній з трьох фірм треба замовити 28 однакових скляних прямокутників. Площа кожного скла 0,25 м^2. У таблиці зазначено ціни на скло і на різку скла. Скільки буде коштувати найдешевше замовлення?

Фірма	Ціна скла (грн за 1 м^2)	Різка скла (грн за одне скло)	Додаткові умови
А	140	9	
Б	150	7	
В	160	5	Для замовлень від 1200 грн різка безкоштовна

12.34. Доведіть, що число $n^9 - n^3$, $n \in N$, кратне числу 504.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

12.35. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = 7$; 2) $\sqrt{x} = 0$; 3) $\sqrt{x} + 2 = 0$;

4) $\frac{1}{4}\sqrt{x} = 5$; 5) $\sqrt{x-7} = 3$; 6) $2\sqrt{x+2} - 3 = 5$.

§ 13. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

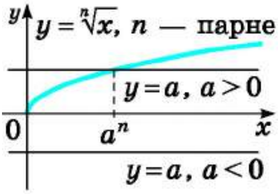
Рівняння **називають *ірраціональним*, якщо воно містить змінну під знаком кореня.**

Розглянемо деякі види ірраціональних рівнянь і методи їх розв'язування.

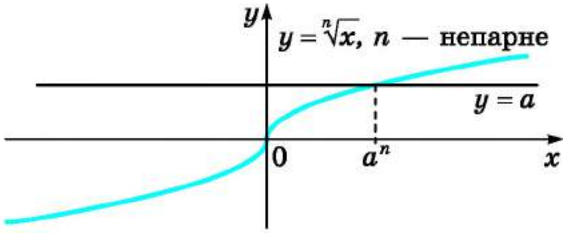
1. Рівняння $\sqrt[n]{x} = a$, $n \in N$, $n \geqslant 2$

Розглянемо рівняння $\sqrt[n]{x} = a$, де a – деяке число, $n \in N$, $n \geqslant 2$.

Нехай n – парне. Знайдемо розв'язки рівняння графічно. Побудуємо графіки функцій $y = \sqrt[n]{x}$, n – парне, і $y = a$ (мал. 13.1). Якщо $a \geqslant 0$, то рівняння $\sqrt[n]{x} = a$ має розв'язки. Оскільки $\sqrt[n]{a^n} = a$, якщо $a \geqslant 0$, то $x = a^n$ – єдиний корінь рівняння у випадку $a \geqslant 0$. Якщо ж $a < 0$, то рівняння коренів не має.



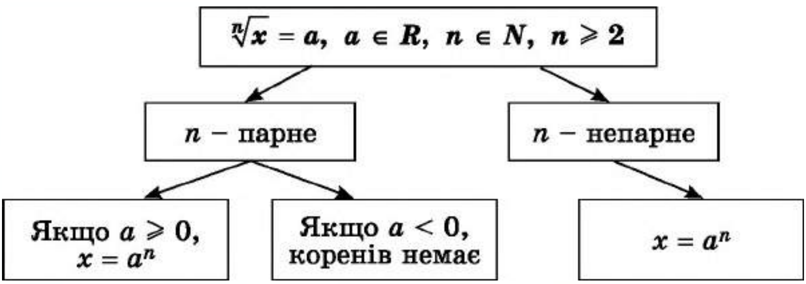
Мал. 13.1



Мал. 13.2

Якщо n – непарне, то для будь-якого значення a рівняння має тільки один корінь (мал. 13.2). Оскільки $\sqrt[n]{a^n} = a$, то $x = a^n$ – єдиний корінь рівняння.

Систематизуємо дані про розв'язки рівняння $\sqrt[n]{x} = a$ у вигляді схеми.



Приклад 1. Розв'язати рівняння:

1) $\sqrt[3]{x} = 2$; 2) $\sqrt{x} = 7$; 3) $\sqrt[6]{x} = -5$; 4) $\sqrt[4]{2x - 5} = 3$.

Розв'язання.

1) $x = 2^3$; $x = 8$. 2) $x = 7^2$; $x = 49$. 3) $-5 < 0$; коренів немає. 4) $2x - 5 = 3^4$; $x = 43$.

Відповідь. 1) 8; 2) 49; 3) немає коренів; 4) 43.

2. Рівняння вигляду $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$, $n \in N$, $n \geqslant 2$

Оскільки функція $y = \sqrt[n]{x}$ для будь-якого $n \in N$ кожного свого значення набуває лише один раз, то з рівності $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ випливає, що

$$f(x) = g(x).$$

У випадку непарного n функції $f(x)$ і $g(x)$ можуть набувати будь-яких значень. Тому рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ для непарного n буде рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

Якщо ж n – парне, то областю допустимих значень рівняння є такі значення x, для яких одночасно справджуються умови $f(x) \geqslant 0$ і $g(x) \geqslant 0$. Тому у випадку парного n рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ буде рівносильне одній із систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

У першій системі умову $g(x) \geqslant 0$ ми не писали, оскільки при виконанні умов $f(x) = g(x)$ і $f(x) \geqslant 0$ умова $g(x) \geqslant 0$ виконується автоматично. Аналогічно й у другій системі умова $f(x) \geqslant 0$ є зайвою. Записуючи систему для розв'язування рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$, яку саме з двох нерівностей $f(x) \geqslant 0$ або $g(x) \geqslant 0$ вибирати залежить від того, яку з них легше розв'язати.

Систематизуємо дані про розв'язки рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ у вигляді схеми.

$$\boxed{\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)},\ n \in N,\ n \geqslant 2}$$

n – парне → $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geqslant 0 \ (\text{або}\ \ g(x) \geqslant 0) \end{cases}$

n – непарне → $f(x) = g(x)$

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

1) $\sqrt[5]{3x-2} = \sqrt[5]{2x+11}$; 2) $\sqrt[4]{x^2+2x} = \sqrt[4]{3x+2}$.

Розв'язання. 1) $3x - 2 = 2x + 11$, тобто $x = 13$.

2) Рівняння рівносильне системі: $\begin{cases} x^2 + 2x = 3x + 2, \\ 3x + 2 \geqslant 0; \end{cases}$

тобто: $\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ x \geqslant -\dfrac{2}{3}; \end{cases}$ звідки отримаємо, що $x = 2$.

Відповідь. 1) 13; 2) 2.

3. Рівняння вигляду $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, $n \in N$, $n \geqslant 2$

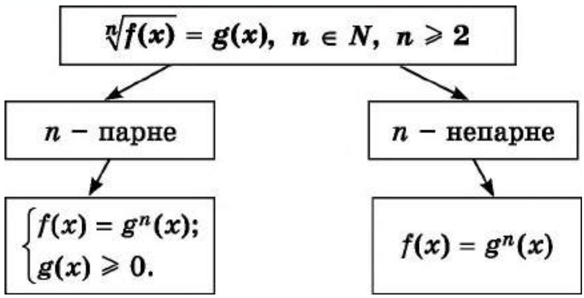
Загальним методом розв'язування рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ є піднесення лівої і правої частин рівняння до степеня n.

Якщо n – непарне число, то піднесення обох частин рівняння до степеня є рівносильним перетворенням рівняння. Отже, у випадку непарного n рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ буде рівносильне рівнянню $f(x) = g^n(x)$, де $g^n(x) = (g(x))^n$.

Якщо n – парне число, то ліва частина рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ є невід'ємною, тому невід'ємною має бути і права його частина. Отже, для рівносильних перетворень рівняння умова $g(x) \geqslant 0$ є обов'язковою. Після піднесення обох частин рівняння до степеня n, отримаємо: $f(x) = g^n(x)$, де $g^n(x) \geqslant 0$ (оскільки n – парне), тому $f(x) \geqslant 0$. Отже, у випадку парного n рівняння рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = g^n(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$

Умову $f(x) \geqslant 0$ (ОДЗ рівняння) включати в систему необов'язково, оскільки, як було зазначено вище, з рівності $f(x) = g^n(x)$, де n – парне число, автоматично випливає, що $f(x) \geqslant 0$.

Систематизуємо дані про розв'язки рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ у вигляді схеми.



Приклад 3. Розв'язати рівняння:

1) $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 2x} = x$; 2) $\sqrt{x - 3} = 5 - x$.

Розв'язання. 1) Піднесемо ліву і праву частини рівняння до третього степеня, отримаємо рівняння: $x^3 + x^2 - 2x = x^3$, розв'язавши яке матимемо: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

2) Рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} x - 3 = (5 - x)^2, \\ 5 - x \geqslant 0; \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} x^2 - 11x + 28 = 0, \\ x \leqslant 5. \end{cases}$$

$x = 4$ – єдиний розв'язок системи, а отже, єдиний корінь рівняння.

Відповідь. 1) 0; 2; 2) 4.

4. Розв'язування ірраціональних рівнянь, що містять кілька квадратних коренів

Розв'язування рівняння вигляду $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = a$, де a – деяке число, $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{t(x)}$ та їм подібні доцільно починати зі знаходження ОДЗ рівняння, а далі скористатись одним із двох нижченаведених способів розв'язування.

1-й спосіб. Послідовність дій може бути такою:
1) *знайти ОДЗ рівняння;*
2) *записати рівняння так, щоб обидві його частини стали невід'ємними, наприклад, перенести доданки з однієї частини рівняння в іншу;*
3) *піднести ліву і праву частини отриманого рівняння до квадрата, спростити його та звести до більш простого ірраціонального рівняння;*
4) *розв'язати отримане рівняння та з отриманих коренів вилучити сторонні, тобто ті, що не належать ОДЗ початкового рівняння.*

Приклад 4. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}=1$.

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ рівняння, розв'язавши систему $\begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ x-2 \geqslant 0, \end{cases}$ звідки отримаємо, що $x \geqslant 2$.

Перенесемо вираз $\sqrt{x-2}$ у праву частину рівняння, матимемо: $\sqrt{x+1}=1+\sqrt{x-2}$. Оскільки тепер обидві частини рівняння – невід'ємні, піднесемо їх до квадрата та розв'яжемо отримане рівняння: $(\sqrt{x+1})^2=(1+\sqrt{x-2})^2$;

$$x+1=1+2\sqrt{x-2}+x-2;$$
$$2\sqrt{x-2}=2;$$
$$\sqrt{x-2}=1;$$
$$x-2=1;$$
$$x=3.$$

Оскільки 3 належить ОДЗ початкового рівняння, то і є його коренем.

Відповідь. 3.

2-й спосіб полягає в тому, щоб після знаходження ОДЗ рівняння обидві його частини підносять до квадрата, не вимагаючи їх невід'ємності. Але такий спосіб може призвести до появи сторонніх коренів. Для виявлення сторонніх коренів можна запропонувати два підходи. Перший полягає в тому, щоб виконати перевірку отриманих коренів підстановкою в початкове рівняння. Але, якщо отримані корені – ірраціональні, перевірка буде доволі громіздкою. Другий підхід полягає у тому, щоб перейти до системи, рівносильної даному рівнянню. Таку систему можна отримати, якщо доповнити рівняння, у якому записано ліву і праву частини, піднесені до квадрата, нерівністю, що забезпечує однаковий знак обох частин.

Приклад 5. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння задається системою $\begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ x+8 \geqslant 0; \end{cases}$ тобто $x \geqslant -3$.

Ліва і права частини заданого рівняння невід'ємні, тому їх можна підносити до квадрата, але це призводить до досить громіздких обчислень (перевірте це самостійно). Тому доцільніше один з ірраціональних виразів, наприклад $\sqrt{x+8}$, перенести у праву частину. Матимемо: $\sqrt{x+3}=5-\sqrt{x+8}$. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата і розв'яжемо його. Оскільки права частина останнього рівняння може бути як додатною, так і від'ємною, то таке перетворення не є рівносильним, тому отриманий корінь слід перевірити.

$$(\sqrt{x+3})^2=(5-\sqrt{x+8})^2;$$
$$x+3=25-10\sqrt{x+8}+x+8;$$
$$\sqrt{x+8}=3;$$
$$x=1.$$

Перевірка: $\sqrt{1+3}+\sqrt{1+8}=2+3=5$.
Отже, число 1 – єдиний корінь рівняння.
Відповідь. 1.

Приклад 6. Розв'язати рівняння: $\sqrt{5x+5}+\sqrt{2x+1}=\sqrt{3x+4}$.

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ рівняння, розв'язавши систему нерівностей: $\begin{cases}5x+5\geqslant 0,\\2x+1\geqslant 0,\\3x+4\geqslant 0,\end{cases}$ з якої маємо: $x\geqslant -0,5$.

Обидві частини рівняння є невід'ємними. Піднесення їх до квадрата призведе до громіздких обчислень. Тому вираз $\sqrt{2x+1}$ перенесемо у праву частину:

$$\sqrt{5x+5}=\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}.$$

Отримане рівняння можна розв'язати тим самим способом, що й попереднє, а можна підійти до розв'язування інакше. Ліва частина отриманого рівняння – невід'ємна, тому невід'ємною має бути і права частина. Отже, рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases}(\sqrt{5x+5})^2=(\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1})^2,\\ \sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}\geqslant 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}5x+5=3x+4-2\sqrt{3x+4}\cdot\sqrt{2x+1}+2x+1,\\ \sqrt{3x+4}\geqslant\sqrt{2x+1};\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\sqrt{3x+4}\cdot\sqrt{2x+1}=0,\\ 3x+4\geqslant 2x+1;\end{cases}\quad \begin{cases}\sqrt{3x+4}\cdot\sqrt{2x+1}=0,\\ x\geqslant -3.\end{cases}$$

Перше рівняння має корені $x_1=-\dfrac{4}{3}$, $x_2=-0,5$. Але лише другий задовольняє як умову $x\geqslant -3$, так і ОДЗ рівняння. Оскільки всі перетворення рівняння були рівносильними, то перевірка не є обов'язковою. Отже, $x=-0,5$ – єдиний корінь рівняння.
Відповідь. $-0,5$.

Отже, розв'язувати рівняння, що містять кілька знаків радикала, можна в такій послідовності:
1) *знайти ОДЗ рівняння;*
2) *піднести до квадрата обидві його частини;*
3) *після спрощень отримати простіше ірраціональне рівняння і розв'язати його;*
4) *виконати перевірку отриманих коренів.*

Або в такій послідовності:
1) *знайти ОДЗ рівняння;*
2) *піднести до квадрата обидві його частини;*
3) *скласти систему умов, доповнивши отримане після піднесення до квадрата рівняння нерівністю (або нерівностями), що забезпечують однаковий знак лівої і правої частин рівняння;*
4) *розв'язати отриману систему;*
5) *виключити з її розв'язків ті, що не належать ОДЗ початкового рівняння.*

5. *Метод заміни змінної в ірраціональному рівнянні*

Деякі ірраціональні рівняння зручно розв'язувати, зводячи їх до раціональних заміною $\sqrt[n]{f(x)} = t$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\dfrac{6}{\sqrt{5-x}} - \sqrt{5-x} = 1$.

Розв'язання. Зробимо заміну $\sqrt{5-x} = t$, очевидно, що $t > 0$. Тоді $\dfrac{6}{t} - t = 1$, звідки маємо $t_1 = 2$; $t_2 = -3$. Умову $t > 0$ задовольняє лише t_1. Повертаємося до заміни: $\sqrt{5-x} = 2$; звідки $x = 1$.

Відповідь. 1.

Приклад 8. Розв'язати рівняння: $\sqrt[3]{x-2} - 5\sqrt[6]{x-2} + 6 = 0$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt[6]{x-2} = t$, $t \geqslant 0$, тоді матимемо $\sqrt[3]{x-2} = \sqrt[6]{(x-2)^2} = (\sqrt[6]{x-2})^2 = t^2$. Отже, маємо рівняння: $t^2 - 5t + 6 = 0$, корені якого: $t_1 = 2$, $t_2 = 3$. Обидва корені задовольняють умову $t \geqslant 0$. Повертаємося до заміни:

1) якщо $t = 2$, то $\sqrt[6]{x-2} = 2$; тоді $x = 66$.

2) якщо $t = 3$, то $\sqrt[6]{x-2} = 3$; тоді $x = 731$.

Відповідь. 66; 731.

Приклад 9. Розв'язати рівняння: $x^2 + \sqrt{x^2 + 20} = 22$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x^2+20} = t$, $t \geqslant \sqrt{20}$ і $x^2 = t^2 - 20$. Маємо рівняння: $t^2 - 20 + t - 22 = 0$, тобто $t^2 + t - 42 = 0$, звідки $t_1 = 6$, $t_2 = -7$. Враховуючи обмеження на t, маємо, що $t = 6$. Повертаємося до заміни: $\sqrt{x^2+20} = 6$. Тоді:

$x^2 + 20 = 6^2$, тобто $x^2 = 16$, отже, $x_{1,2} = \pm 4$.
Відповідь. ± 4.

Приклад 10. Розв'язати рівняння: $\sqrt[5]{\frac{16z}{z-1}} + \sqrt[5]{\frac{z-1}{16z}} = 2{,}5$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt[5]{\frac{16z}{z-1}} = y \neq 0$. Враховуючи, що $2{,}5 = 2 + \frac{1}{2}$, маємо рівняння: $y + \frac{1}{y} = 2 + \frac{1}{2}$, звідки $y_1 = 2$, $y_2 = \frac{1}{2}$. Повертаємося до заміни:

1) Якщо $y = 2$, то $\sqrt[5]{\frac{16z}{z-1}} = 2$. Маємо: $\begin{cases} 16z = 32(z-1), \\ z \neq 1; \end{cases}$ звідки $z = 2$.

2) Якщо $y = \frac{1}{2}$, то $\sqrt[5]{\frac{16z}{z-1}} = \frac{1}{2}$. Маємо: $\begin{cases} 32 \cdot 16z = z-1, \\ z \neq 1; \end{cases}$ звідки $z = -\frac{1}{511}$.

Відповідь. $2; -\frac{1}{511}$.

6. Розв'язування ірраціональних рівнянь з параметрами

Розглянемо, як розв'язувати ірраціональні рівняння з параметрами.

Приклад 11. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння $(a^2 - 1)\sqrt[6]{x} = a - 1$.

Розв'язання. Треба розглянути два випадки: $a^2 - 1 = 0$ і $a^2 - 1 \neq 0$.

1) Нехай $a^2 - 1 = 0$, тоді $a = 1$ або $a = -1$.

Якщо $a = 1$, маємо рівняння: $0 \cdot \sqrt[6]{x} = 0$, тоді коренем є будь-яке число з ОДЗ рівняння. Отже, $x \geqslant 0$;

Якщо $a = -1$, маємо рівняння: $0 \cdot \sqrt[6]{x} = -2$, яке не має коренів.

2) Нехай $a^2 - 1 \neq 0$, тобто $a \neq 1$; $a \neq -1$. Тоді $\sqrt[6]{x} = \frac{a-1}{a^2-1}$; тобто $\sqrt[6]{x} = \frac{1}{a+1}$.

Якщо $a + 1 > 0$, тобто $a > -1$, то $x = \frac{1}{(a+1)^6}$.

Якщо $a + 1 < 0$, тобто $a < -1$, то рівняння не має коренів.

Відповідь. Якщо $a \leqslant -1$, коренів немає; якщо $a = 1$, то $x \geqslant 0$; якщо $-1 < a < 1$ або $a > 1$, то $x = \frac{1}{(a+1)^6}$.

Приклад 12. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2-6x+5}+\sqrt{x^2-7x+10}=a\sqrt{x-5}$.

Р о з в ' я з а н н я. Перепишемо рівняння у вигляді: $\sqrt{(x-5)(x-1)}+\sqrt{(x-5)(x-2)}=a\sqrt{x-5}$. ОДЗ рівняння: $x \geqslant 5$. Очевидно, що $x = 5$ – корінь рівняння для будь-якого a.

Розглянемо рівняння для $x > 5$. Для таких значень x маємо, що $x-5>0$, і рівняння можна записати у вигляді: $\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{x-1}+\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{x-2}=a\sqrt{x-5}$. Поділимо обидві його частини на $\sqrt{x-5}$, отримаємо: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}=a$.

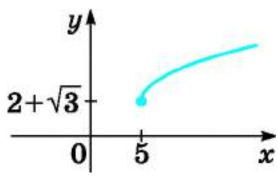
Розглянемо функцію $y(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$ для $x \geqslant 5$. Вона є зростаючою, як сума двох зростаючих функцій, а її найменше значення дорівнює $y(5)$. Знайдемо це значення: $y(5)=\sqrt{5-1}+\sqrt{5-2}=2+\sqrt{3}$ (мал. 13.3).

Тоді для $a \geqslant 2+\sqrt{3}$ рівняння $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}=a$ матиме єдиний розв'язок, та не буде мати розв'язків, якщо $a < 2+\sqrt{3}$.

Запишемо рівняння у вигляді $\sqrt{x-2}=a-\sqrt{x-1}$ і знайдемо його корінь за умови, що $a \geqslant 2+\sqrt{3}$. Маємо:

$$\begin{cases} x-2=a^2-2a\sqrt{x-1}+x-1, \\ a-\sqrt{x-1}\geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}=\dfrac{1+a^2}{2a}, \\ \sqrt{x-1}-a\leqslant 0. \end{cases}$$



Мал. 13.3

Оскільки $\sqrt{x-1}=\dfrac{1+a^2}{2a}$, то $\dfrac{1+a^2}{2a}-a=\dfrac{1+a^2-2a^2}{2a}=\dfrac{1-a^2}{2a}\leqslant 0$ для $a \geqslant 2+\sqrt{3}$.

Отже, остаточно маємо: $x-1=\left(\dfrac{1+a^2}{2a}\right)^2$, тоді $x=1+\left(\dfrac{1+a^2}{2a}\right)^2$.

В і д п о в і д ь. Якщо $a < 2+\sqrt{3}$, то $x = 5$; якщо $a \geqslant 2+\sqrt{3}$, то $x_1 = 5$; $x_2=1+\left(\dfrac{1+a^2}{2a}\right)^2$.

Приклад 13. При яких значеннях параметра a рівняння $\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x$ має лише один корінь?

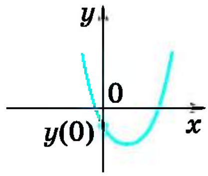
Р о з в ' я з а н н я. Оскільки ліва частина рівняння невід'ємна, то $x \geqslant 0$. Виконаємо заміну: $\sqrt{a+x}=y$, тоді $y \geqslant 0$ і $a+y=x^2$. Початкове рівняння набуде вигляду: $\sqrt{a+y}=x$, тобто $a + y = x^2$. Маємо: $\begin{cases} a + x = y^2, \\ a + y = x^2, \\ x \geqslant 0, \ \ y \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 - x - a = 0, \\ -x^2 + y + a = 0, \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0. \end{cases}$

Додамо почленно рівняння системи: $y^2 - x^2 + y - x = 0$. Розкладемо ліву частину отриманого рівняння на множники: $(y - x)(y + x + 1) = 0$.

Оскільки $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, то $y + x + 1 > 0$, і рівняння рівносильне рівнянню $y = x$. Повертаючись до рівнянь системи, маємо: $x^2 - x - a = 0$, $x \geqslant 0$. Знайдемо дискримінант цього рівняння: $D = 1 + 4a$ та його корені.

1) Нехай $D = 0$, тобто $a = -0{,}25$, маємо: $x^2 - x + 0{,}25 = 0$; $x = 0{,}5$ – єдиний корінь рівняння.

2) Нехай $D > 0$, але один з коренів є від'ємним. Розглянемо функцію $y(x) = x^2 - x - a$. Тоді очевидно, що для того, щоб один з коренів був додатним, а інший – від'ємним, достатньо виконання умови: $y(0) < 0$ (мал. 13.4).



Мал. 13.4

Але $y(0) = -a$; тоді $-a < 0$, тобто $a > 0$.

В і д п о в і д ь. $a = -0{,}25$; $a > 0$.

Приклад 14. Скільки коренів залежно від значень параметра a має рівняння $(x + a)\sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0$?

Р о з в ' я з а н н я. Область допустимих значень рівняння знайдемо з умови $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$, тобто $(x - 1)(x - 2) \geqslant 0$, отже, $x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

Розв'язуючи рівняння, отримаємо корені $x_1 = 1$ і $x_2 = 2$ для будь-якого значення параметра a та корінь $x = -a$. Останній корінь має задовольняти ОДЗ, тобто $-a \leqslant 1$ або $-a \geqslant 2$, що справджується за умови: $a \geqslant -1$ або $a \leqslant -2$.

Якщо $a = -1$ або $a = -2$, то отримаємо корінь, що збігатиметься з раніше знайденим ($x = 1$ і $x = 2$ відповідно).

Якщо ж $a < -2$ або $a > -1$, то $x_3 = -a$ – третій корінь рівняння.

В і д п о в і д ь. Якщо $a < -2$ або $a > -1$, то рівняння має три корені, а якщо $-2 \leqslant a \leqslant -1$, то рівняння має два корені.

? ● Які рівняння називають ірраціональними? ● Як розв'язують рівняння $\sqrt[n]{x} = a$, де a – число, у випадку парного n і у випадку непарного n? ● Як розв'язують рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ у випадку парного n і випадку непарного n? ● Як розв'язують рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ у випадку парного n і випадку непарного n? ● Як можна розв'язувати ірраціональні рівняння, що містять кілька квадратних коренів?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **13.1.** (Усно.) Які з рівнянь є ірраціональними:

1) $x - \sqrt{x} = 8$; 2) $x - \sqrt{5} = 8$; 3) $y^2 + \sqrt{3}y - 8 = 0$;

4) $y^2 + 3\sqrt{y} - 8 = 0$; 5) $\sqrt{x - 2} = 7$; 6) $x - \dfrac{\sqrt{15}}{x} = \sqrt{7}$?

Чи є число a коренем рівняння (13.2–13.3):

13.2. 1) $\sqrt{x-3} = \sqrt{3-x}$, $a = 3$; 2) $\sqrt[5]{2-x} = \sqrt[5]{x-2}$, $a = 1$;

3) $\sqrt[4]{x-4} = \sqrt[4]{2x-11}$, $a = 5$; 4) $\sqrt{x+1} = \sqrt[3]{3x-1}$, $a = 3$?

13.3. 1) $\sqrt[3]{x-3} = \sqrt[3]{3-x}$, $a = 2$; 2) $\sqrt[4]{x-7} = \sqrt[4]{7-x}$, $a = 7$;

3) $\sqrt{3x-2} = \sqrt{5x-4}$, $a = 1$; 4) $\sqrt{2x+1} = \sqrt[3]{3x-1}$, $a = 0$?

Розв'яжіть рівняння (13.4–13.31):

13.4. 1) $\sqrt[3]{x} = 2$; 2) $\sqrt[4]{x} = 0$; 3) $\sqrt{x} = -2$;

4) $\sqrt[5]{x} = -1$; 5) $\sqrt[8]{x} = 1$; 6) $\sqrt[4]{x} = 2$.

13.5. 1) $\sqrt{x} = 5$; 2) $\sqrt[3]{x} = 1$; 3) $\sqrt[4]{x} = -1$;

4) $\sqrt[7]{x} = -2$; 5) $\sqrt[6]{x} = 0$; 6) $\sqrt[8]{x} = 1$.

13.6. 1) $\sqrt{x-7} = 2$; 2) $\sqrt[4]{x+1} = 1$; 3) $\sqrt[4]{x^2-9} = 0$;

4) $\sqrt[6]{x+3} = -1$; 5) $\sqrt[5]{x^2-1} = -1$; 6) $\sqrt{x^2+8x} = 3$.

13.7. 1) $\sqrt[4]{x+2} = 1$; 2) $\sqrt[6]{x-3} = -2$; 3) $\sqrt[3]{x^2+4} = 0$;

4) $\sqrt[8]{2x-4} = 2$; 5) $\sqrt[7]{x^2-3} = 1$; 6) $\sqrt{x^2-3x} = 2$.

2 **13.8.** 1) $\sqrt{3x-2} = \sqrt{x}$; 2) $\sqrt[3]{4x-7} = \sqrt[3]{x-1}$;

3) $\sqrt[4]{2x-5} = \sqrt[4]{5-2x}$; 4) $\sqrt[6]{2x-3} = \sqrt[6]{x-2}$;

5) $\sqrt{x} = \sqrt{x^2-2}$; 6) $\sqrt[5]{x-8} = \sqrt[5]{x^2+6}$.

13.9. 1) $\sqrt{2x+3} = \sqrt{x+5}$; 2) $\sqrt[6]{7-2x} = \sqrt[6]{2x-7}$;

3) $\sqrt[5]{x-2} = \sqrt[5]{3x-4}$; 4) $\sqrt[4]{x-3} = \sqrt[4]{3x-5}$;

5) $\sqrt[7]{x^2} = \sqrt[7]{x+2}$; 6) $\sqrt[6]{x^2-2x} = \sqrt[6]{-x}$.

13.10. 1) $\sqrt{x+5} = x-1$; 2) $\sqrt{x^2+1} = x-1$;

3) $\sqrt{2x^2+2x} = x+1$; 4) $\sqrt{x+2} = 4-x$.

13.11. 1) $\sqrt{x+4} = x-2$; 2) $\sqrt{x^2+4} = x-2$;

3) $\sqrt{2x^2+2x} = x-1$; 4) $\sqrt{x+1} = 5-x$.

13.12. 1) $(\sqrt[4]{x})^2 + 2\sqrt[4]{x} - 3 = 0$; 2) $\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} - 8 = 0$.

13.13. 1) $(\sqrt[5]{x})^2 + \sqrt[5]{x} - 2 = 0$; 2) $\sqrt[4]{x^2} - 2\sqrt[4]{x} - 3 = 0$.

13.14. 1) $x^2 + 13 = 35 + 2\sqrt{13+x^2}$; 2) $41 - x^2 - 2\sqrt{41-x^2} - 15$.

13.15. 1) $x^2 - 24 = 15 + 2\sqrt{x^2-24}$; 2) $x^2 + 11 + \sqrt{11+x^2} = 42$.

3 **13.16.** 1) $x+4=\sqrt{4-6x-x^2}$; 2) $\sqrt{-x^2-6x+8}-x=6$.

13.17. 1) $\sqrt{-x^2-8x+9}-x=5$; 2) $4+x=\sqrt{x^2-4x+30}$.

13.18. 1) $\sqrt{2+\sqrt{x-3}}=3$; 2) $\sqrt[3]{3-\sqrt{x+1}}=-1$.

13.19. 1) $\sqrt{3-\sqrt[3]{x+5}}=1$; 2) $\sqrt{1+\sqrt{x+7}}=2$.

13.20. 1) $x=\sqrt[3]{x^3+x^2-2x-7}$; 2) $\sqrt[3]{x^3+1}=x+1$.

13.21. 1) $\sqrt[3]{x^3+x^2+2x-5}=x$; 2) $x-2=\sqrt[3]{x^3-8}$.

13.22. 1) $\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}-15=0$; 2) $\sqrt[3]{x-1}-5\sqrt[6]{x-1}+6=0$.

13.23. 1) $\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{x}-2=0$; 2) $\sqrt[5]{x+1}+3\sqrt[10]{x+1}-4=0$.

13.24. 1) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-3}=2x$; 2) $\sqrt{x-3}=\dfrac{x}{\sqrt{20-x}}$.

13.25. 1) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-5}=\dfrac{2}{3}x$; 2) $\sqrt{x-4}=\dfrac{x}{\sqrt{24-x}}$.

13.26. 1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=5$; 2) $\sqrt{5-x}+\sqrt{x}=3$;
3) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-7}=2$; 4) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=1$.

13.27. 1) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+5}=4$; 2) $\sqrt{10-x}+\sqrt{x}=4$;
3) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=1$; 4) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=1$.

13.28. 1) $(x-4)\sqrt{4x-x^2-3}=0$;
2) $(x+2)\sqrt{x^2-x+4}=2x+4$;
3) $(x+1)\sqrt{x^2+x-2}=2x+2$;
4) $(1-x)\sqrt{x^2-x-6}=6-6x$.

13.29. 1) $(x-2)\sqrt{3-x^2-2x}=0$;
2) $(x+3)\sqrt{x^2+x+9}=3x+9$;
3) $(3-x)\sqrt{x^2-5x+4}=6-2x$;
4) $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=12+6x$.

13.30. 1) $\sqrt{x^4-2x-5}=1-x$; 2) $2x+\sqrt{12-x^4}=0$.

13.31. 1) $2-x=\sqrt{x^4-4x-16}$; 2) $\sqrt{x^4-2}+x=0$.

4 **За допомогою заміни змінної розв'яжіть рівняння (13.32–13.33):**

13.32. 1) $x^2-2x+\sqrt{x^2-2x+5}=1$;
2) $4x-4x^2+8\sqrt{12+16x-16x^2}=33$;
3) $6\sqrt{81x^2+54x+45}=35-6x-9x^2$;
4) $\sqrt{\dfrac{5x-6}{6x-7}}-\sqrt{\dfrac{6x-7}{5x-6}}=1{,}5$.

13.33. 1) $x^2 + x + \sqrt{x^2 + x + 7} = 5$;

2) $4x + 4x^2 + 7\sqrt{16x^2 + 16x + 20} = 27$;

3) $5\sqrt{27 + 54x - 81x^2} = 31 - 6x + 9x^2$;

4) $\sqrt{\dfrac{5x-16}{7x-9}} - \sqrt{\dfrac{7x-9}{5x-16}} = \dfrac{7}{12}$.

Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння (13.34–13.35):

13.34. 1) $a\sqrt[4]{x-1} = 0$; 2) $(a-1)\sqrt[3]{x+7} = 0$;

3) $(a-3)\sqrt[6]{x} = a - 3$; 4) $(a^2 - 4)\sqrt{x-2} = a - 2$.

13.35. 1) $a\sqrt[3]{x+7} = 0$; 2) $(a+1)\sqrt[8]{x-1} = 0$;

3) $(a+5)\sqrt[8]{x} = a + 5$; 4) $(a^2 - 9)\sqrt{x+7} = a + 3$.

Розв'яжіть рівняння (13.36–13.37):

13.36. 1) $\sqrt{3x+5} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+4}$;

2) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x} = \sqrt{2x-1}$;

3) $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x-2}$;

4) $\sqrt{2x-4} = \sqrt{3x-11} + \sqrt{x-3}$.

13.37. 1) $\sqrt{2x+7} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x+4}$;

2) $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-3}$;

3) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = \sqrt{x-2}$;

4) $\sqrt{x+2} = \sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1}$.

13.38. Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \cdot (x - a^2) = 0$ залежно від значень параметра a?

13.39. Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x^2 - 3x - 4} \cdot (a - x) = 0$ залежно від значень параметра a?

Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння (13.40–13.41):

13.40. $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + \sqrt{x^2 - 5x + 6} = a\sqrt{x-3}$.

13.41. $\sqrt{x^2 + 7x - 8} + \sqrt{x^2 - x} = a\sqrt{x-1}$.

Розв'яжіть рівняння (13.42–13.43):

13.42. $\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$.

13.43. $\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 2} = \sqrt{3x^2 + 2x - 3} + \sqrt{x^2 + 3x - 1}$.

13.44. Агенція «Престиж» займається визначенням рейтингу фенів для волосся за співвідношенням «ціна–якість». Рейтинг обчислюють на основі середньої ціни P і оцінок функціональності F, якості Q і дизайну D. Кожен окремий показник оцінюють експерти за 5-бальною шкалою цілими числами від 0 до 4. Підсумковий рейтинг обчислюють за формулою $R = 3(F + Q) + D - 0{,}01P$.

У таблиці зазначено оцінку кожного з показників для кількох моделей фенів. Визначте, яка модель має найнижчий рейтинг і яка – найвищий.

Модель фена	Середня ціна, грн	Функціональність	Якість	Дизайн
А	200	1	2	3
Б	250	2	2	4
В	300	4	3	2
Г	400	3	4	2

13.45. Доведіть, що для будь-яких додатних чисел a, b і c справджується нерівність:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{a+c}{a^2+c^2} \leqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

13.46. Чи є число 4 розв'язком нерівності:

1) $3x > 7$; 2) $-2x < -10$; 3) $x + 2 > 3$;
4) $\sqrt{x} \leqslant 2$; 5) $\sqrt[3]{x+4} > 3$; 6) $\sqrt[4]{x} > 1$?

13.47. Укажіть деякі три числа, що є розв'язками нерівності:

1) $2x > 17$; 2) $\sqrt{x} > 3$; 3) $\frac{1}{x} \geqslant 5$;
4) $\sqrt[3]{x+1} \leqslant 1$; 5) $\sqrt[4]{x-2} \geqslant 2$; 6) $\sqrt[5]{x} < 0$.

§ 14. ІРРАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

***Нерівність* називають *ірраціональною*, якщо вона містить змінну під знаком кореня.**

Розглянемо деякі види ірраціональних нерівностей і методи їх розв'язування.

1. Найпростіші ірраціональні нерівності

Найпростішими вважають нерівності вигляду: $\sqrt[n]{x} > a$, $\sqrt[n]{x} \geqslant a$, $\sqrt[n]{x} < a$, $\sqrt[n]{x} \leqslant a$, де $a \in R$, $n \in N$, $n \geqslant 2$.

Якщо n – непарне, то після піднесення обох частин нерівності до степеня n отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Приклад 1. Розв'язати нерівність: 1) $\sqrt[3]{x} > -1$; 2) $\sqrt[5]{x} \leqslant 2$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Піднесемо обидві частини нерівності до третього степеня, маємо: $(\sqrt[3]{x})^3 > (-1)^3$, тобто $x > -1$.

2) Маємо: $(\sqrt[5]{x})^5 \leqslant 2^5$, тобто $x \leqslant 32$.

В і д п о в і д ь. 1) $x > -1$; 2) $x \leqslant 32$.

Якщо n – парне число, то після піднесення обох частин нерівності до степеня n отримаємо (на ОДЗ нерівності) нерівність, рівносильну даній, лише за умови $a \geqslant 0$. Отже, під час розв'язування найпростіших нерівностей при парному n треба звертати увагу на число a та на ОДЗ нерівності.

Приклад 2. Розв'язати нерівність:

1) $\sqrt[4]{x} > 2$; 2) $\sqrt[6]{x} \leqslant 1$; 3) $\sqrt[8]{x} \geqslant -1$; 4) $\sqrt[10]{x} < -5$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) ОДЗ даної нерівності $x \geqslant 0$. На ОДЗ піднесемо до четвертого степеня невід'ємні ліву і праву частини нерівності, отримаємо: $(\sqrt[4]{x})^4 > 2^4$, тобто $x > 16$. Ці значення x задовольняють і ОДЗ.

2) ОДЗ: $x \geqslant 0$. Маємо: $(\sqrt[6]{x})^6 \leqslant 1^6$, тобто $x \leqslant 1$. Але враховуючи ОДЗ, отримаємо, що $0 \leqslant x \leqslant 1$.

3) Оскільки $\sqrt[8]{x} \geqslant 0$ для всіх x з ОДЗ, розв'язками нерівності $\sqrt[8]{x} \geqslant -1$ будуть усі значення x з ОДЗ нерівності, тобто $x \geqslant 0$.

4) Оскільки $\sqrt[10]{x} \geqslant 0$ для всіх x, що задовольняють ОДЗ нерівності, то нерівність $\sqrt[10]{x} < -5$ розв'язків не має.

В і д п о в і д ь. 1) $x > 16$; 2) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 3) $x \geqslant 0$; 4) немає розв'язків.

Аналогічно розв'язують нерівності, коли під коренем маємо деякий вираз $f(x)$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність: $\sqrt[4]{x+2} < 3$.

Р о з в ' я з а н н я. ОДЗ: $x + 2 \geqslant 0$. Враховуючи ОДЗ, після піднесення до степеня маємо: $0 \leqslant x+2 < 3^4$. Тоді $-2 \leqslant x < 79$.

В і д п о в і д ь. $-2 \leqslant x < 79$.

2. Нерівності вигляду $\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)}$, $\sqrt[n]{f(x)} \geqslant \sqrt[n]{g(x)}$

Якщо n – непарне, то піднесенням до степеня n отримаємо рівносильну нерівність.

Приклад 4. Розв'язати нерівність: $\sqrt[5]{x+1} \geqslant \sqrt[5]{5-3x}$.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо: $x+1 \geqslant 5-3x$, тобто $x \geqslant 1$.

В і д п о в і д ь. $x \geqslant 1$.

Якщо n – парне, то ОДЗ нерівності визначаємо із системи: $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$ Після піднесення (на ОДЗ) до степеня n обох частин нерівності $\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)}$ матимемо: $f(x) > g(x)$.

Оскільки $g(x) \geqslant 0$ (на ОДЗ), а $f(x) > g(x)$, то умова $f(x) \geqslant 0$ виконуватиметься автоматично. Отже,

якщо n — парне, то нерівність $\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)}$ рівносильна системі нерівностей $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$

Аналогічно:

нерівність $\sqrt[n]{f(x)} \geqslant \sqrt[n]{g(x)}$ рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} f(x) \geqslant g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Приклад 5. Розв'язати нерівність: $\sqrt[4]{2x-1} > \sqrt[4]{3x-2}$.

Розв'язання. Нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3x - 2, \\ 3x - 2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо її: $\begin{cases} -x > -1, \\ 3x \geqslant 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ x \geqslant \frac{2}{3}; \end{cases}$ $\frac{2}{3} \leqslant x < 1.$

Відповідь. $\frac{2}{3} \leqslant x < 1.$

3. Нерівності вигляду $\sqrt{f(x)} < g(x)$, $\sqrt{f(x)} \leqslant g(x)$

Розглянемо нерівність $\sqrt{f(x)} < g(x)$. Оскільки $\sqrt{f(x)} \geqslant 0$, а $g(x) > \sqrt{f(x)}$, то має виконуватися умова $g(x) > 0$. За цієї умови підносимо до квадрата обидві частини початкової нерівності, що є невід'ємними, і отримаємо нерівність-наслідок: $f(x) < g^2(x)$. Оскільки це нерівність-наслідок, доповнимо її ще нерівністю для ОДЗ: $f(x) \geqslant 0$. Отже,

нерівність $\sqrt{f(x)} < g(x)$ рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} f(x) < g^2(x), \\ f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Аналогічно

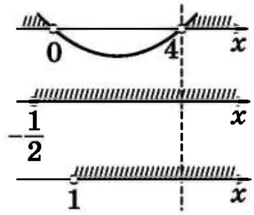
нерівність $\sqrt{f(x)} \leqslant g(x)$ рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} f(x) \leqslant g^2(x), \\ f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Приклад 6. Розв'язати нерівність: $\sqrt{2x+1} < x-1$.

Розв'язання. Маємо рівносильну нерівності систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2x+1 < (x-1)^2, \\ 2x+1 \geqslant 0, \\ x-1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4x > 0, \\ x \geqslant -\dfrac{1}{2}, \\ x > 1. \end{cases}$$



Мал. 14.1

Отримаємо, що $x > 4$ (мал. 14.1).

Відповідь. $x > 4$.

4. Нерівності вигляду $\sqrt{f(x)} > g(x)$, $\sqrt{f(x)} \geqslant g(x)$

Розглянемо нерівність вигляду $\sqrt{f(x)} > g(x)$. Її ОДЗ: $f(x) \geqslant 0$. Якщо $g(x) < 0$, то для будь-якого x із ОДЗ нерівність буде правильною.

Якщо ж $g(x) \geqslant 0$, то обидві частини нерівності є невід'ємними. Піднесемо їх до квадрата, матимемо: $f(x) > g^2(x)$. Оскільки $g^2(x) \geqslant 0$, а $f(x) > g^2(x)$, то нерівність $f(x) \geqslant 0$ (ОДЗ нерівності) виконується автоматично.

Отже, підсумовуючи, маємо:

! **нерівність $\sqrt{f(x)} > g(x)$ рівносильна сукупності систем**

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Аналогічно

! **нерівність $\sqrt{f(x)} \geqslant g(x)$ рівносильна сукупності систем**

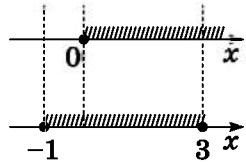
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant g^2(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Квадратна дужка означає об'єднання (знак сукупності), тобто кожну із систем нерівностей треба розв'язати окремо, а у відповіді отримані результати об'єднати.

Приклад 7. Розв'язати нерівність: $\sqrt{2x+3} \geqslant x$.

Розв'язання. Нерівність рівносильна сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x < 0,\\ 2x+3 \geqslant 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x \geqslant 0,\\ 2x+3 \geqslant x^2.\end{cases}\end{array}\right.$$



Мал. 14.2

1) $\begin{cases}x < 0,\\ 2x+3 \geqslant 0;\end{cases}$ $-1{,}5 \leqslant x < 0.$

2) $\begin{cases}x \geqslant 0,\\ 2x+3 \geqslant x^2;\end{cases}$ $\begin{cases}x \geqslant 0,\\ -1 \leqslant x \leqslant 3;\end{cases}$ $0 \leqslant x \leqslant 3$ (мал. 14.2).

Об'єднуючи отримані в пунктах 1) і 2) результати, маємо: $-1{,}5 \leqslant x \leqslant 3$.

Відповідь. $-1{,}5 \leqslant x \leqslant 3$.

5. Розв'язування ірраціональних нерівностей, що містять кілька квадратних коренів

Нерівності вигляду $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} > a$ (або $\geqslant a$, $< a$, $\leqslant a$), де $a \in R$, $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} > \sqrt{t(x)}$ та їм подібні починаємо розв'язувати зі знаходження ОДЗ нерівності. Після цього застосовуємо прийоми, відомі нам з розв'язування відповідних рівнянь та найпростіших нерівностей.

Приклад 8. Розв'язати нерівність: $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2} \geqslant 2$.

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ нерівності: $\begin{cases}x+6 \geqslant 0,\\ x-2 \geqslant 0;\end{cases}$ маємо: $x \geqslant 2$.

Перенесемо вираз $\sqrt{x-2}$ у праву частину нерівності: $\sqrt{x+6} \geqslant 2 + \sqrt{x-2}$, щоб обидві частини нерівності стали невід'ємними. Піднесемо їх до квадрата. Враховуючи ОДЗ, маємо систему, рівносильну даній нерівності:

$$\begin{cases}x \geqslant 2,\\ x+6 \geqslant 4 + 4\sqrt{x-2} + x - 2.\end{cases}$$

Розв'яжемо її: $\begin{cases}x \geqslant 2,\\ \sqrt{x-2} \leqslant 1;\end{cases}$ отже, $0 \leqslant x-2 \leqslant 1$, тобто $2 \leqslant x \leqslant 3$.

Відповідь. $[2; 3]$.

6. Розв'язування ірраціональних нерівностей методом інтервалів

Деякі більш складні ірраціональні нерівності, попередньо записані у вигляді $f(x) > 0$ (або $f(x) \geqslant 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leqslant 0$), де $f(x)$ – ірраціональний вираз, зручно розв'язувати методом інтервалів. Скористаємося відповідним алгоритмом із § 6 (с. 58) та застосуємо його до розв'язування ірраціональних нерівностей.

Приклад 9. Розв'язати нерівність: $(x-2)\sqrt{x^2+16} \geqslant x^2-4$.

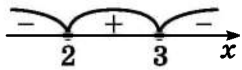
Розв'язання. Перепишемо нерівність у вигляді: $(x-2)(\sqrt{x^2+16}-(x+2)) \geqslant 0$ і розглянемо функцію: $f(x)=(x-2)(\sqrt{x^2+16}-(x+2))$.

ОДЗ нерівності: $x \in R$.

Знайдемо нулі функції $f(x)$, розв'язавши рівняння: $(x-2)(\sqrt{x^2+16}-(x+2))=0$.

Маємо: $(x-2)(\sqrt{x^2+16}-(x+2))=0$;

$$\left[\begin{array}{l} x=2, \\ \sqrt{x^2+16}=x+2; \end{array}\right.$$



Мал. 14.3

звідки отримаємо, що $x=2$; $x=3$ – нулі функції $f(x)$.

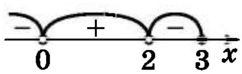
Числа 2 і 3 позначимо на числовій осі та визначимо знак функції $f(x)$ на кожному з отриманих проміжків (мал. 14.3). Отже, маємо розв'язки нерівності: $2 \leqslant x \leqslant 3$.

Відповідь. $2 \leqslant x \leqslant 3$.

Приклад 10. Розв'язати нерівність: $\dfrac{\sqrt{3-x}+4x+1}{x} > 5$.

Розв'язання. Перепишемо нерівність у вигляді $\dfrac{\sqrt{3-x}+4x+1}{x}-5>0$, спростимо її ліву частину: $\dfrac{\sqrt{3-x}+1-x}{x}>0$ і розглянемо функцію $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}+1-x}{x}$.

$D(f)=(-\infty;\ 0) \cup (0;\ 3]$. Позначимо число 0 – точку розриву функції на числовій осі. Знайдемо нулі функції, розв'язавши рівняння $\dfrac{\sqrt{3-x}+1-x}{x}=0$. Отримаємо, що $x=2$ (розв'яжіть рівняння самостійно). Позначимо число 2 на тій самій числовій осі.



Мал. 14.4

На кожному з отриманих проміжків $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ 2)$, $(2;\ 3]$ визначимо знак функції $f(x)$ (мал. 14.4). Отже, $0<x<2$.

Відповідь. $0<x<2$.

7. Ірраціональні нерівності з параметрами

Розглянемо ірраціональні нерівності з параметрами.

Приклад 11. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність $(a+2)\sqrt[6]{x} \geqslant a+2$.

Розв'язання. Розглянемо три випадки: 1) $a + 2 = 0$; 2) $a + 2 > 0$; 3) $a + 2 < 0$.

1) $a + 2 = 0$, тобто $a = -2$. Тоді маємо нерівність: $0\sqrt[6]{x} \geqslant 0$, отже, x – будь-яке число з ОДЗ змінної, тобто $x \geqslant 0$.

2) $a + 2 > 0$, тобто $a > -2$. Поділимо обидві частини нерівності на $a + 2$, де $a + 2 > 0$. Маємо: $\sqrt[6]{x} \geqslant 1$, тоді $x \geqslant 1$.

3) $a + 2 < 0$, тобто $a < -2$. Поділимо обидві частини нерівності на $a + 2$, де $a + 2 < 0$. Маємо: $\sqrt[6]{x} \leqslant 1$, тоді $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Відповідь. Якщо $a < -2$, то $0 \leqslant x \leqslant 1$; якщо $a = -2$, то $x \geqslant 0$; якщо $a > -2$, то $x \geqslant 1$.

Приклад 12. При яких значеннях параметрів a і b множина розв'язків нерівності $\sqrt{x-a} > \sqrt{2x-b}$ збігається з проміжком [3; 7)?

Розв'язання. Маємо систему нерівностей, рівносильну даній нерівності:

$$\begin{cases} x - a > 2x - b, \\ 2x - b \geqslant 0; \end{cases} \quad \text{тоді} \quad \begin{cases} x < b - a, \\ x \geqslant \dfrac{b}{2}. \end{cases}$$

Множина розв'язків початкової нерівності збігатиметься з проміжком [3; 7), якщо $b - a = 7$ і $\dfrac{b}{2} = 3$. Отже,

$$\begin{cases} b - a = 7, \\ \dfrac{b}{2} = 3; \end{cases} \quad \text{тоді} \quad \begin{cases} a = -1, \\ b = 6. \end{cases}$$

Відповідь. $a = -1$; $b = 6$.

- Як розв'язують найпростіші ірраціональні нерівності для непарного n і як – для парного n? - Як розв'язують нерівності вигляду $\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)}$, $\sqrt[n]{f(x)} \geqslant \sqrt[n]{g(x)}$ для парного n і як – для непарного n? - Як розв'язують нерівності вигляду $\sqrt{f(x)} < g(x)$, $\sqrt{f(x)} \leqslant g(x)$? - Як розв'язують нерівності вигляду $\sqrt{f(x)} > g(x)$, $\sqrt{f(x)} \geqslant g(x)$? - Як розв'язують ірраціональні нерівності, що містять кілька квадратних коренів?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **14.1.** Чи є число 64 розв'язком нерівності:

1) $\sqrt[6]{x} > 3$; 2) $\sqrt[6]{x} \geqslant 2$; 3) $\sqrt{x} > 7$;
4) $\sqrt{x} < 5$; 5) $\sqrt[3]{x} \geqslant 4$; 6) $\sqrt[3]{x} < 4$?

14.2. Чи є число 16 розв'язком нерівності:

1) $\sqrt{x} > 9$; 2) $\sqrt{x} \leqslant 8$; 3) $\sqrt{x} > 4$;

4) $\sqrt[4]{x} \leqslant 2$; 5) $\sqrt[4]{x} < 3$; 6) $\sqrt[4]{x} \geqslant 3$?

Розв'яжіть нерівність (14.3–14.10):

14.3. 1) $\sqrt{x} \geqslant 2$; 2) $\sqrt{x} < 3$; 3) $\sqrt[4]{x} \leqslant -1$; 4) $\sqrt[6]{x} > -3$;

5) $\sqrt[3]{x} > 1$; 6) $\sqrt[3]{x} \leqslant -2$; 7) $\sqrt[4]{x} > 2$; 8) $\sqrt[6]{x} \leqslant 1$.

14.4. 1) $\sqrt{x} > 5$; 2) $\sqrt{x} \leqslant 2$; 3) $\sqrt[6]{x} \geqslant -2$; 4) $\sqrt[4]{x} < -1$;

5) $\sqrt[3]{x} \geqslant -2$; 6) $\sqrt[3]{x} < 3$; 7) $\sqrt[4]{x} < 3$; 8) $\sqrt[8]{x} \geqslant 1$.

2 **14.5.** 1) $\sqrt[5]{x+1} > 1$; 2) $\sqrt[4]{x-2} \geqslant 1$;

3) $\sqrt{x+3} < 5$; 4) $\sqrt{x-2} > -5$.

14.6. 1) $\sqrt[3]{x-1} \leqslant 2$; 2) $\sqrt[6]{x+2} > 1$;

3) $\sqrt{x-7} \leqslant 4$; 4) $\sqrt{x+7} \geqslant -2$.

14.7. 1) $\sqrt[4]{x^2-10x+81} \geqslant 3$; 2) $\sqrt{3x^2+10x+7} < 2$.

14.8. 1) $\sqrt[4]{x^2+2x+16} > 2$; 2) $\sqrt{x^2-5x+4} \leqslant 2$.

14.9. 1) $\sqrt{3x+2} \geqslant \sqrt{1-2x}$; 2) $\sqrt[4]{x-1} < \sqrt[4]{x^2+x-5}$.

14.10. 1) $\sqrt[6]{2x+3} > \sqrt[6]{3-x}$; 2) $\sqrt{x+1} \leqslant \sqrt{x^2+x-8}$.

14.11. Знайдіть найменший натуральний розв'язок нерівності $\sqrt[3]{3x^2+7} > \sqrt[3]{x+11}$.

14.12. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності $\sqrt[5]{x^2+5} < \sqrt[5]{x+11}$.

Розв'яжіть нерівність (14.13–14.16):

14.13. 1) $\sqrt{x} \leqslant 2x-1$; 2) $\sqrt{x-1} < \frac{x}{2}$;

3) $\sqrt{5x^2+61x} < 4x+2$; 4) $\sqrt{2x^2-6x+4} \leqslant x+2$.

14.14. 1) $\sqrt{x} \leqslant x-6$; 2) $\sqrt{2x-1} < x-2$;

3) $\sqrt{(x-4)(5x+41)} < 4x-14$; 4) $\sqrt{2x^2-12x+16} \leqslant x+4$.

14.15. 1) $\sqrt{x-1} \geqslant 3-x$; 2) $\sqrt{2-x} > x$;

3) $\sqrt{x^2+x-6} > -1-x$; 4) $\sqrt{(x+3,5)(3x-0,5)} \geqslant 4x-10$.

14.16. 1) $\sqrt{x} \geqslant x-2$; 2) $\sqrt{6-x} > x$;

3) $\sqrt{x^2-2x-24} \geqslant x-2$; 4) $\sqrt{(x+5)(3x+4)} > 4x-4$.

Скільки цілих розв'язків має нерівність (14.17–14.18):

14.17. $\sqrt{4-3x-x^2} > x+1$. **14.18.** $\sqrt{11-x} \leqslant x-5$.

Розв'яжіть нерівність (14.19–14.24):

14.19. $\sqrt{x+7} - \sqrt{x} \geqslant 1$. **14.20.** $\sqrt{x+3} - \sqrt{x} > 1$.

14.21. 1) $2x - 5\sqrt{x} + 2 \leqslant 0$; 2) $\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[6]{x} - 4 > 0$.

14.22. 1) $2x + 3\sqrt{x} - 2 \geqslant 0$; 2) $\sqrt[5]{x} + \sqrt[10]{x} - 2 < 0$.

4 **14.23.** 1) $\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x} > 3$; 2) $\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{x+2}$.

14.24. 1) $\sqrt{x-2} + \sqrt{7-x} \leqslant 3$; 2) $\sqrt{x+8} - \sqrt{x} > \sqrt{3x+1}$.

Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність (14.25–14.26):

14.25. 1) $(a+1)\sqrt[3]{x} < a^2 - 1$; 2) $(a-2)\sqrt[8]{x+2} \geqslant a - 2$.

14.26. 1) $(a-2)\sqrt[5]{x} \geqslant a^2 - 4$; 2) $(a+3)\sqrt[4]{x-1} < a + 3$.

14.27. При яких значеннях параметрів c і d множина розв'язків нерівності $\sqrt[4]{x-c} > \sqrt[4]{3x-d}$ збігається з проміжком $[1; 5)$?

14.28. При яких значеннях параметрів a і b множина розв'язків нерівності $\sqrt[6]{2x-a} \leqslant \sqrt[6]{x-2b}$ збігається з проміжком $[3; 9]$?

14.29. Знайдіть усі цілі розв'язки нерівності $\sqrt{x^2-2x-3} \leqslant 2x+2$, які задовольняють умову $|x| \leqslant 5$.

14.30. Знайдіть усі цілі розв'язки нерівності $\sqrt{x^2-3x-10} \leqslant 2x+4$, які задовольняють умову $|x| \leqslant 6$.

Розв'яжіть нерівність (14.31–14.32):

14.31. 1) $(x^2 + 8x + 15)\sqrt{x+4} \geqslant 0$;

2) $(8x^2 - 30x + 25)\sqrt{3x - x^2 - 2} \geqslant 0$;

3) $\dfrac{\sqrt{6 + x - x^2}}{x+4} \leqslant \dfrac{\sqrt{6 + x - x^2}}{2x+5}$.

14.32. 1) $(18 - 7x - x^2)\sqrt{5 - 3x} \leqslant 0$;

2) $(3x^2 - 4x + 1)\sqrt{25x^2 - 20x + 3} \leqslant 0$;

3) $\dfrac{\sqrt{12 + x - x^2}}{x-11} \geqslant \dfrac{\sqrt{12 + x - x^2}}{2x-9}$.

Розв'яжіть нерівність методом інтервалів (14.33–14.34):

14.33. 1) $(x-1)\sqrt{x^2+9} \leqslant x^2 - 1$; 2) $\dfrac{\sqrt{2-x} + 4x - 3}{x} \geqslant 2$;

3) $\dfrac{9x^2 - 4}{\sqrt{5x^2 - 1}} \leqslant 3x - 2$; 4) $\dfrac{\sqrt{x^2 - 3x - 4} - 3x + 16}{6 - x} > 1$.

14.34. 1) $(8+x)\sqrt{x^2+16} \leqslant 64 - x^2$; 2) $\dfrac{7x - 6 + \sqrt{5 - 4x}}{x} \geqslant 2$;

3) $\dfrac{3(4x^2 - 9)}{\sqrt{3x^2 - 3}} \leqslant 2x + 3$; 4) $\dfrac{\sqrt{x^2 + x - 6} + 3x + 13}{x + 5} > 1$.

14.35. Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність

$$\sqrt{a + 2x} \geqslant x.$$

14.36. При яких значеннях параметра m розв'язком нерівності $\sqrt{m^2 - 16x^2} \geqslant 3x$ є відрізок завдовжки 0,9?

14.37. При яких значеннях параметра b розв'язком нерівності $\sqrt{4x - b} \geqslant x + 1$ є відрізок завдовжки 1?

14.38. Відомо, що в середньому 80 % курців страждають на захворювання легенів. Знайдіть приблизну кількість осіб, у яких може бути виявлено захворювання легенів, серед мешканців деякого населеного пункту, якщо 1800 осіб з них є курцями.

14.39. (*Національна олімпіада Болгарії*). Із трьох різних цифр x, y, z складено всі можливі трицифрові числа. Сума цих чисел утричі більша за трицифрове число, кожна цифра якого дорівнює x. Знайдіть цифри x, y, z.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

14.40. Подайте у вигляді степеня:

1) з основою 2 числа 16; 2; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{128}$;

2) з основою 10 числа 0,001; $\frac{1}{10}$; 10; 100.

14.41. Обчисліть значення виразу:

1) 8^{-2}; 2) 2^{-3}; 3) $4^0 + (-1)^8 + 1^{-5}$;

4) $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; 5) $7^{-1} + 5^2 - 0{,}1^{-1}$; 6) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-3}$.

14.42. Подайте вираз у вигляді степеня з основою a:

1) $a^{-1}a^{14}$; 2) $a^2a^{-2}a^{11}$; 3) $a^7 : a^{-3}$; 4) $a^{-8} : a^3$;

5) $(a^{-2})^7$; 6) $(a^{-1})^{-6} \cdot a$; 7) $(a^{-1})^4 \cdot (a^2)^2$; 8) $\frac{(a^8)^3a^{-1}}{(a^{-2})^4}$.

14.43. Обчисліть значення виразів, використовуючи властивості степенів:

1) $2^{-3} \cdot 2^{12} \cdot 2^{-10}$; 2) $7^{-3} : 7^2 \cdot 49^3$;

3) $(5^2)^{-6} \cdot (25^{-3})^{-2}$; 4) $\frac{3^{-8} \cdot 4^7}{9^{-4} \cdot 2^{11}}$.

14.44. Спростіть вираз:

1) $(x^{-1} + 3)^2 - 6x^{-1}$; 2) $(a^{-2} + y)(a^{-2} - y) + y^2$;

3) $p^{-3}(p^2 + 6) - p^{-2}(p - 5p^{-1})$; 4) $(m^{-1} + 2)(m^{-1} - 3) - m^{-2}$.

§ 15. СТЕПІНЬ З РАЦІОНАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ, ЩО МІСТЯТЬ СТЕПІНЬ З РАЦІОНАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

У попередніх класах ми розглядали степені з натуральними та із цілими показниками.

1. Означення степеня з раціональним показником

Пригадаємо основні поняття, пов'язані зі степенем:

$\underbrace{aaa \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}} = a^n$ – степінь, a – основа, n – показник, $a \in R$, $n \in N$, $n > 1$;

$$a^1 = a, \text{ де } a \in R; \quad a^0 = 1, \text{ де } a \neq 0; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \; n \in N, \; a \neq 0.$$

Тепер розглянемо поняття степеня для виразів типу $3^{\frac{4}{5}}$; $2^{0,3}$; $8^{-\frac{1}{3}}$ тощо, тобто для *степеня з раціональним показником*.

Означення степеня з раціональним показником $a^{\frac{m}{n}}$ природно сформулювати так, щоб він мав ті самі властивості, що й раніше вивчені нами степені із цілими показниками. Так, наприклад, має справджуватися властивість піднесення степеня до степеня $(a^p)^q = a^{pq}$. Тоді $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$, а тому, за означенням кореня n-го степеня, можна дійти висновку, що $a^{\frac{m}{n}}$ має бути коренем n-го степеня із числа a^m. Отже, сформулюємо означення степеня з раціональним показником:

якщо $a > 0$, m – ціле число, n – натуральне число ($n > 1$), то степенем числа a з показником $\frac{m}{n}$ є вираз $\sqrt[n]{a^m}$, тобто

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Наприклад, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $b^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{b^3}$; $7^{0,3} = 7^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{7^3}$;

$2^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{-1}{2}} = \sqrt{2^{-1}}$; $18^{-\frac{3}{4}} = 18^{\frac{-3}{4}} = \sqrt[4]{18^{-3}}$;

$(x-y)^{-0,2} = (x-y)^{\frac{-1}{5}} = \sqrt[5]{(x-y)^{-1}}$.

І, навпаки, $\sqrt{12} = 12^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[4]{7^3} = 7^{\frac{3}{4}}$; $\sqrt[9]{3a} = (3a)^{\frac{1}{9}}$;

$\sqrt[5]{3^{-4}} = 3^{-\frac{4}{5}} = 3^{-0,8}$; $\sqrt[8]{27} = \sqrt[8]{3^3} = 3^{\frac{3}{8}}$; $\sqrt[7]{(a+b)^5} = (a+b)^{\frac{5}{7}}$.

Якщо $a = 0$, то $0^r = 0$ для $r > 0$, тому $0^{\frac{m}{n}}$ має зміст, якщо m і n – натуральні числа. Вирази $0^{-\frac{1}{2}}$, $0^{-0,3}$ тощо – не мають змісту.

Зауваження. 1) Оскільки $a > 0$, то очевидно, $a^{\frac{m}{n}} > 0$ для будь-якого натурального n і цілого m. 2) Для $a < 0$ степінь із дробовим показником $a^{\frac{m}{n}}$ не визначений. Це не випадково. Оскільки $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, то має справджуватися рівність $a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{6}}$. Розглянемо, наприклад, випадок, коли $a = -1$. Тоді, за формулою $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, маємо:

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1 \text{ і } (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1 \neq -1.$$

Отже, якщо $a < 0$, то $a^{\frac{1}{3}} \neq a^{\frac{2}{6}}$. Тому вищенаведене означення степеня з дробовим показником для від'ємних значень a не розглядають. Вирази $(-1)^{\frac{1}{3}}$; $(-4)^{0,5}$; $(-1,3)^{-\frac{1}{8}}$ тощо – не мають змісту.

Приклад 1. Обчислити: 1) $25^{\frac{1}{2}}$; 2) $64^{-\frac{1}{3}}$; 3) $36^{1,5}$; 4) $32^{-\frac{4}{5}}$.

Розв'язання. 1) $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$;

2) $64^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$;

3) $36^{1,5} = 36^{\frac{3}{2}} = \sqrt{36^3} = \sqrt{6^{2\cdot 3}} = 6^3 = 216$;

4) $32^{-\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{32^{-4}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32^4}} = \frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{2^{5\cdot 4}}} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$.

Відповідь. 1) 5; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 216; 4) $\frac{1}{16}$.

2. Властивості степеня з раціональним показником

Степінь із раціональним показником має усі ті самі властивості, що й степінь із цілим показником, а саме:

якщо $a > 0$, $b > 0$, p і q – раціональні числа, то:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}; \qquad (ab)^p = a^p b^p;$$

$$a^p : a^q = a^{p-q}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

$$(a^p)^q = a^{pq};$$

Усі зазначені властивості легко довести, використовуючи означення степеня з раціональним показником і властивості кореня n-го степеня, які ми довели в § 10.

Доведемо, наприклад, властивість про добуток степенів. Запишемо раціональні числа p і q у вигляді дробів з однаковими знаменниками (як відомо, будь-які два дроби можна завжди звести до спільного знаменника).

Нехай $p = \frac{k_1}{t}$; $q = \frac{k_2}{t}$. Тоді $a^p \cdot a^q = a^{\frac{k_1}{t}} \cdot a^{\frac{k_2}{t}} = \sqrt[t]{a^{k_1}} \cdot \sqrt[t]{a^{k_2}} =$

$= \sqrt[t]{a^{k_1} \cdot a^{k_2}} = \sqrt[t]{a^{k_1+k_2}} = a^{\frac{k_1+k_2}{t}} = a^{\frac{k_1}{t}+\frac{k_2}{t}} = a^{p+q}$.

Отже, $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

Для степеня з раціональним показником справджуються і такі властивості:

якщо $a > 0$, $b > 0$, p – раціональне число, то

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p.$$

Приклад 2. Спростити вираз: 1) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}$; 2) $x^{0,8} : x^{-1,2}$;

3) $(b^{-5})^{-\frac{4}{5}}$; 4) $(\sqrt{y} \cdot y^{1,7})^{-1}$; 5) $(8m^{-3})^{-\frac{1}{3}}$.

Розв'язання. 1) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)} = a^{\frac{1}{6}}$;

2) $x^{0,8} : x^{-1,2} = x^{0,8-(-1,2)} = x^2$; 3) $(b^{-5})^{-\frac{4}{5}} = b^{-5\left(-\frac{4}{5}\right)} = b^4$;

4) $(\sqrt{y} \cdot y^{1,7})^{-1} = (y^{0,5} \cdot y^{1,7})^{-1} = (y^{0,5+1,7})^{-1} = (y^{2,2})^{-1} = y^{2,2\cdot(-1)} = y^{-2,2}$;

5) $(8m^{-3})^{-\frac{1}{3}} = 8^{-\frac{1}{3}} \cdot (m^{-3})^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^{-1}} \cdot m^{-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot m = \frac{1}{2}m$.

Приклад 3. Знайти значення виразу:

1) $49^{-0,5}$; 2) $16^{\frac{3}{4}}$; 3) $0,125^{-1\frac{1}{3}}$.

Розв'язання. 1) $49^{-0,5} = (7^2)^{-0,5} = 7^{2\cdot(-0,5)} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$;

2) $16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4\cdot\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$;

3) $0,125^{-1\frac{1}{3}} = \left(\frac{125}{1000}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = (8)^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^{3\cdot\frac{4}{3}} = 2^4 = 16$.

Відповідь. 1) $\frac{1}{7}$; 2) 8; 3) 16.

Зауважимо, що в останньому прикладі обчислення можна було виконати за означенням степеня з дробовим показником, тобто, як у Прикладі 1 цього параграфа.

Приклад 4. Обчислити: 1) $36^{\frac{1}{3}} : 36^{-\frac{1}{6}}$; 2) $(7^{-0,5})^{-\frac{3}{5}} \cdot 7^{1,7}$.

Розв'язання.

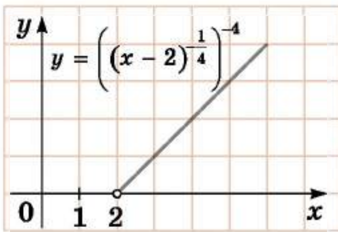
1) $36^{\frac{1}{3}} : 36^{-\frac{1}{6}} = 36^{\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)} = 36^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$;

2) $(7^{-0,5})^{-\frac{3}{5}} \cdot 7^{1,7} = 7^{-0,5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)} \cdot 7^{1,7} = 7^{0,3+1,7} = 7^2 = 49$.

Відповідь. 1) 6; 2) 49.

Приклад 5. Побудувати графік функції $y = ((x-2)^{-0,25})^{-4}$.

Розв'язання. $D(y) = (2; +\infty)$. Спростимо формулу функції на $D(y)$, матимемо: $y = x - 2$. Графік функції $y = ((x-2)^{-0,25})^{-4}$ зображено на малюнку 15.1.



Мал. 15.1.

3. Перетворення виразів, які містять степінь з раціональним показником

Розглянемо на прикладах тотожні перетворення виразів, що містять степені з дробовим показником.

Приклад 6. Спростити вираз: 1) $3x^{\frac{1}{2}}\left(2 - x^{\frac{1}{2}}\right) - 6x^{\frac{1}{2}}$;

2) $\left(a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2a^{\frac{3}{4}}$; 3) $(x^{1,5} + y^{2,5})(x^{1,5} - y^{2,5})$.

Розв'язання. 1) $3x^{\frac{1}{2}}\left(2 - x^{\frac{1}{2}}\right) - 6x^{\frac{1}{2}} = 6x^{\frac{1}{2}} - 3x - 6x^{\frac{1}{2}} = -3x$.

2) $\left(a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2a^{\frac{3}{4}} = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2 + 2a^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{2}} + \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2a^{\frac{3}{4}} =$

$= a^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{3}{4}} + a - 2a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}} + a$.

3) $(x^{1,5} + y^{2,5})(x^{1,5} - y^{2,5}) = (x^{1,5})^2 - (y^{2,5})^2 = x^3 - y^5.$

Відповідь. 1) $-3x$; 2) $a^{\frac{1}{2}} + a$; 3) $x^3 - y^5$.

Приклад 7. Спростити вираз

$$\left(\frac{y^{0,5}}{x - x^{0,5}y^{0,5}} + \frac{x^{0,5}}{y - x^{0,5}y^{0,5}}\right) \cdot \frac{xy^{0,5} + yx^{0,5}}{x - y}$$

і знайти його значення, якщо $x = 25$, $y = 36$.

Розв'язання. Введемо позначення: $x^{0,5} = a$; $y^{0,5} = b$. Тоді $x = (x^{0,5})^2 = a^2$; $y = (y^{0,5})^2 = b^2$. Перепишемо вираз і спростимо його:

$$\left(\frac{b}{a^2 - ab} + \frac{a}{b^2 - ab}\right) \cdot \frac{a^2b + b^2a}{a^2 - b^2} = \left(\frac{b}{a(a - b)} - \frac{a}{b(a - b)}\right) \cdot \frac{ab(a + b)}{(a + b)(a - b)} =$$

$$= \frac{(b^2 - a^2) \cdot ab}{ab \cdot (a - b)(a - b)} = \frac{(b - a)(b + a)}{(a - b)(a - b)} = \frac{b + a}{b - a} = \frac{y^{0,5} + x^{0,5}}{y^{0,5} - x^{0,5}}.$$

Знайдемо значення отриманого виразу для заданих значень змінних x і y.

Якщо $x = 25$, $y = 36$, то $\frac{y^{0,5} + x^{0,5}}{y^{0,5} - x^{0,5}} = \frac{36^{0,5} + 25^{0,5}}{36^{0,5} - 25^{0,5}} = \frac{6 + 5}{6 - 5} = 11.$

Відповідь. $\frac{y^{0,5} + x^{0,5}}{y^{0,5} - x^{0,5}}$; 11.

Приклад 8. Довести, що значення виразу

$$\frac{\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^3}{x + y + \sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}} + \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^3}{x - y - x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}$$

не залежить від значення змінних.

Розв'язання. Позначимо $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} = a$; $y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{y} = b$.

Маємо: $\frac{(a + b)^3}{a^3 + b^3 + a^2b + b^2a} + \frac{(a - b)^3}{a^3 - b^3 - a^2b + ab^2} =$

$$= \frac{(a + b)^3}{(a + b)(a^2 + b^2)} + \frac{(a - b)^3}{(a^2 + b^2)(a - b)} = \frac{(a + b)^2}{a^2 + b^2} + \frac{(a - b)^2}{a^2 + b^2} =$$

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2}{a^2 + b^2} = \frac{2a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2} = \frac{2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = 2.$$

Отже, значення виразу не залежить від значення змінних. ■

4. *Знаходження значень степенів за допомогою калькулятора або комп'ютера*

Для обчислення значень степенів у більшості калькуляторів використовують клавішу $\boxed{x^y}$ (у деяких калькуляторах це клавіша $\boxed{y^x}$ або $\boxed{\wedge}$).

Приклад 9. Обчислити з точністю до тисячних $8^{1,2}$.

Розв'язання. Спочатку вводимо основу степеня – число 8, потім натискаємо клавішу $\boxed{x^y}$, далі показник степеня 1,2 і клавішу $\boxed{=}$. Округлюємо отримане значення до тисячних: $8^{1,2} \approx 12,126$.

Зауважимо, що в деяких калькуляторах порядок обчислень може бути іншим, тому перед використанням калькулятора радимо ознайомитися з інструкцією.

Також за допомогою калькулятора можна знаходити значення коренів n-го степеня. У деяких калькуляторах є клавіша $\boxed{\sqrt[n]{\ }}$ (або схожа на неї), що дозволяє виконувати такі обчислення безпосередньо. Якщо такої клавіші немає, то обчислення виконують, враховуючи, що $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Приклад 10. Обчислити з точністю до тисячних $\sqrt[7]{5}$.

Розв'язання. $\sqrt[7]{5} = 5^{\frac{1}{7}}$. Схема обчислення може бути такою:

$\boxed{5}\ \boxed{x^y}\ \boxed{(}\ \boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{7}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$

Маємо: $\sqrt[7]{5} \approx 1,258$.

А ще раніше...

Поняття степеня було відоме ще в Давній Греції та Вавилоні. Квадрат і куб числа використовували відповідно для знаходження площі квадрата та об'єму куба. Сучасне позначення степеня (a^4, a^5, ...) увів Рене Декарт (1596–1650) у XVII ст.

Поняття про дробові показники степеня і найпростіші правила дій над степенями з дробовими показниками в 1368 р. виклав французький математик Нікола Орем (1323–1382). Інший французький математик Нікола Шюке (1445 – бл. 1500) у трактаті «Наука про число» (1484 р., опубліковано в 1848 р. у Ліоні) уперше розглянув степені з від'ємним і нульовим показниками.

Німецький математик Міхаель Штифель (1487–1567) дав означення $a^0 = 1$, де $a \neq 0$, і ввів термін «показник» (це буквальний переклад з німецької слова «exponent»), німецьке слово «potenzieren» означає піднесення до степеня. Голланд-

ський математик та інженер Симон Стевін (1548–1620) запропонував під записом $a^{\frac{1}{n}}$ розуміти $\sqrt[n]{a}$.

- Сформулюйте означення степеня з дробовим показником.
- Сформулюйте властивості степеня з дробовим показником.
- Як обчислити значення степеня за допомогою калькулятора?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **Запишіть степінь із дробовим показником у вигляді кореня (15.1–15.2):**

15.1. 1) $a^{\frac{1}{2}}$; 2) $4^{\frac{1}{3}}$; 3) $7^{\frac{4}{5}}$; 4) $8^{-\frac{1}{4}}$;
5) $t^{-\frac{2}{3}}$; 6) $3^{0,2}$; 7) $14^{1,3}$; 8) $p^{-1,2}$.

15.2. 1) $7^{\frac{1}{2}}$; 2) $a^{\frac{1}{4}}$; 3) $8^{\frac{5}{6}}$; 4) $p^{-\frac{1}{3}}$;
5) $m^{-\frac{4}{5}}$; 6) $5^{0,4}$; 7) $t^{1,5}$; 8) $m^{-0,8}$.

Замініть степенем із дробовим показником арифметичний корінь (літерами позначено додатні числа) (15.3–15.4):

15.3. 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[7]{a}$; 3) $\sqrt[6]{b^5}$; 4) $\sqrt[10]{m^{-3}}$.

15.4. 1) $\sqrt{p}$; 2) $\sqrt[9]{11}$; 3) $\sqrt[7]{2^5}$; 4) $\sqrt[9]{a^{-5}}$.

Замініть коренями степені з дробовим показником (15.5–15.6):

15.5. 1) $7p^{-\frac{2}{3}}$; 2) $-9m^{\frac{4}{7}}$; 3) $(2m)^{-\frac{1}{8}}$;
4) $(a-b)^{\frac{4}{9}}$; 5) $p^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{3}{4}}$; 6) $ax^{1,8} + by^{-1,2}$.

15.6. 1) $4m^{-\frac{1}{8}}$; 2) $-10a^{\frac{3}{7}}$; 3) $(3m)^{-\frac{1}{7}}$;
4) $(x+2y)^{\frac{3}{8}}$; 5) $t^{\frac{1}{5}} + b^{\frac{2}{5}}$; 6) $xa^{-1,5} + yb^{2,5}$.

2 **Обчисліть (15.7–15.8):**

15.7. 1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $100^{-\frac{1}{2}}$; 3) $216^{-\frac{1}{3}}$; 4) $0,04^{\frac{3}{2}}$;
5) $0,125^{\frac{2}{3}}$; 6) $0,00001^{0,4}$; 7) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 8) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$.

15.8. 1) $9^{\frac{1}{2}}$; 2) $121^{-\frac{1}{2}}$; 3) $16^{\frac{1}{4}}$; 4) $0,008^{\frac{2}{3}}$;
5) $0,0016^{-\frac{1}{4}}$; 6) $0,36^{0,5}$; 7) $\left(11\frac{1}{9}\right)^{-1,5}$; 8) $\left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

15.9. Запишіть вираз у вигляді степеня з основою a:

1) $a^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{5}}$; 2) $a^{-\frac{1}{8}}a^{\frac{3}{8}}$; 3) $a^{-4}a^{-\frac{1}{3}}$;

4) $a^{\frac{1}{8}} : a^{\frac{1}{9}}$; 5) $a^{\frac{1}{3}} : a^{-\frac{1}{2}}$; 6) $a^{-\frac{4}{7}} : a^{-\frac{1}{21}}$;

7) $\left(a^{\frac{1}{8}}\right)^{-8}$; 8) $\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{9}{10}}$; 9) $(a^{-5})^{\frac{2}{5}}$.

15.10. Запишіть вираз у вигляді степеня з основою b:

1) $b^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$; 2) $b^{-\frac{1}{10}}b^{\frac{1}{2}}$; 3) $b^{-2}b^{-\frac{1}{8}}$;

4) $b^{\frac{1}{4}} : b^{\frac{1}{8}}$; 5) $b^{\frac{1}{5}} : b^{-\frac{1}{15}}$; 6) $b^{-\frac{3}{8}} : b^{-\frac{1}{24}}$;

7) $\left(b^{-\frac{1}{3}}\right)^{3}$; 8) $\left(b^{-\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{10}{27}}$; 9) $\left(b^{\frac{4}{7}}\right)^{-7}$.

Спростіть вираз (15.11–15.12):

15.11. 1) $(a^{0,2})^{0,8}a^{0,34}$; 2) $\left(b^{\frac{4}{7}}\right)^{1,4} \cdot \left(b^{-\frac{3}{8}}\right)^{1,6}$;

3) $\dfrac{p^{\frac{3}{8}}p^{\frac{1}{4}}}{p^{-\frac{3}{8}}}$; 4) $\dfrac{m^{1,8}m^{-3,7}}{m^{4,5}m^{-6,4}}$.

15.12. 1) $(p^{0,1})^4 \cdot p^{0,6}$; 2) $\left(m^{\frac{1}{3}}\right)^{1,2} \cdot \left(m^{\frac{1}{5}}\right)^{-1,5}$;

3) $\dfrac{m^{\frac{4}{7}}m^{-\frac{1}{21}}}{m^{\frac{11}{21}}}$; 4) $\dfrac{a^{1,2}a^{-1,8}}{a^{1,5}a^{-1,1}}$.

Обчисліть (15.13–15.14):

15.13. 1) $4^{-\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{5}} \cdot 4^{0,8}$; 2) $(1000 \cdot 8)^{\frac{1}{3}}$;

3) $(1000 \cdot 8)^{-\frac{1}{3}}$; 4) $\left(\frac{1}{16} \cdot 81\right)^{-\frac{1}{4}}$.

15.14. 1) $81^{\frac{1}{6}} \cdot 81^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{-\frac{1}{4}}$; 2) $(64 \cdot 25)^{\frac{1}{2}}$;

3) $(64 \cdot 25)^{-\frac{1}{2}}$; 4) $\left(\frac{1}{27} \cdot 64\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Подайте вираз у вигляді суми (15.15–15.16):

15.15. 1) $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$; 2) $\left(x^{\frac{1}{4}} - 3\right)\left(x^{\frac{1}{4}} + 3\right)$;

3) $(a^{1,5} - b^{0,5})^2$; 4) $\left(p^{\frac{1}{6}} + t^{\frac{1}{8}}\right)^2$.

15.16. 1) $x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{5}}\left(x^{\frac{4}{5}}+y^{\frac{4}{5}}\right)$; 2) $\left(7+m^{\frac{1}{2}}\right)\left(7-m^{\frac{1}{2}}\right)$;

3) $\left(x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{5}{2}}\right)^2$; 4) $(m^{3,5}+n^{4,5})^2$.

15.17. (*Усно.*) Чи має зміст вираз:

1) $4^{\frac{2}{3}}$; 2) $(-13)^{\frac{1}{8}}$; 3) $(-25)^{\frac{1}{2}}$; 4) $8^{-0,01}$; 5) $0^{\frac{3}{4}}$; 6) $0^{-\frac{4}{7}}$?

15.18. За допомогою калькулятора знайдіть значення виразу (результат округліть до тисячних):

1) $2^{1,8}$; 2) $3{,}4^{-1,2}$; 3) $7^{\frac{2}{5}}$; 4) $\sqrt[7]{13}$.

15.19. За допомогою калькулятора знайдіть значення виразу (результат округліть до сотих):

1) $3^{0,9}$; 2) $4{,}7^{-2,3}$; 3) $4^{\frac{3}{7}}$; 4) $\sqrt[6]{19}$.

Знайдіть значення виразу (15.20–15.21):

15.20. 1) $16^{\frac{3}{4}}+(0{,}5)^{-3}$; 2) $\left(27^{\frac{2}{3}}+125^{\frac{1}{3}}+8^{\frac{1}{3}}\right)^{-0,25}$;

3) $81^{0,25}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}-32^{-\frac{1}{5}}\cdot 27^{\frac{2}{3}}$;

4) $(0{,}25)^{-2}+81^{0,5}-(0{,}0001)^{-0,75}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{-0,5}$.

15.21. 1) $0{,}0016^{-0,25}+\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$; 2) $\left(8^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}+125^{\frac{1}{3}}\right)^{1,5}$;

3) $81^{-0,25}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-0,5}+8^{-\frac{4}{3}}\cdot 0{,}01^{-1,5}$;

4) $(0{,}125)^{-\frac{1}{3}}+216^{\frac{2}{3}}-(0{,}25)^{-2}:\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}$.

15.22. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=x^{\frac{2}{7}}$; 2) $y=x^{-\frac{3}{4}}$; 3) $y=(x-2)^{-0,2}$; 4) $y=(x^2+2x)^{\frac{1}{8}}$.

15.23. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $m^{\frac{1}{3}}$; 2) $p^{-\frac{4}{5}}$; 3) $(a+2)^{1,4}$; 4) $(4x-x^2)^{-\frac{2}{7}}$.

3 Подайте у вигляді степеня (15.24–15.25):

15.24. 1) $\left(x^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{x^8}\right)^{-2}$; 2) $(\sqrt[4]{x}:\sqrt[5]{x^3})^{-20}$.

15.25. 1) $\left(a^{\frac{4}{7}}\sqrt[7]{a^3}\right)^{-3}$; 2) $(\sqrt[4]{a^5}:\sqrt[3]{a})^{-12}$.

Обчисліть (15.26–15.27):

15.26. 1) $\left(2^{-\frac{1}{7}}\right)^{1,4}\cdot 4^{0,1}$; 2) $81^{\frac{1}{8}}\cdot 27^{-\frac{5}{6}}\cdot 9^{2,5}$; 3) $\dfrac{16^{0,4}\cdot 2^{0,5}}{4^{0,3}\cdot 8^{\frac{1}{6}}}$;

4) $(2^{0,5})^{-0,5}\cdot(0,5)^{-0,25}$; 5) $\left(\sqrt[3]{24}\cdot\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 6) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{36}}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

15.27. 1) $\left(5^{-\frac{1}{9}}\right)^{1,8}\cdot 25^{0,1}$; 2) $16^{0,25}\cdot 8^{-\frac{1}{6}}\cdot 4^{0,75}$; 3) $\dfrac{243^{0,42}\cdot 9^{0,6}}{81^{0,3}\cdot 3^{0,1}}$;

4) $(5^{0,7})^{-0,7}\cdot(0,2)^{-0,49}$; 5) $\left(\sqrt[6]{28}\cdot\sqrt[6]{2\frac{2}{7}}\right)^{-2}$; 6) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{27}}\right)^{-\frac{4}{3}}$.

Спростіть вираз (15.28–15.31):

15.28. 1) $\left(9b^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$; 2) $(81x^{8})^{-\frac{3}{4}}$; 3) $(64t^{-9})^{-\frac{1}{3}}$; 4) $(0,25a^{-0,6})^{\frac{1}{2}}$.

15.29. 1) $(8m^{-1})^{\frac{2}{3}}$; 2) $(16a^{-4})^{-\frac{1}{4}}$; 3) $(0,0016b^{-4})^{\frac{3}{4}}$; 4) $\left(\dfrac{4}{9}c^{-6}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

15.30. 1) $(4-x^{0,5})^2+8x^{0,5}$; 2) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{4}}\right)^2$;

3) $\left(2x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{3}}\right)^2-4x^{\frac{7}{12}}$; 4) $\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)$.

15.31. 1) $\left(\sqrt{a}+b^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(a^{\frac{1}{2}}-\sqrt{b}\right)^2$; 2) $(3a^{2,5}+a^{0,5})^2-6a^3$.

15.32. Спростіть вираз

$$\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}+b^3\right)+\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\right)\left(a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}+b^3\right)$$

та знайдіть його значення, якщо $a=4$, $b=2100$.

Винесіть за дужки спільний множник (15.33–15.34):

15.33. 1) $x-2x^{\frac{2}{3}}$; 2) $m^{0,5}+3m^{0,25}$; 3) $ab^{\frac{1}{5}}+ba^{\frac{1}{6}}$;

4) $(ab)^{\frac{1}{2}}-(ac)^{\frac{1}{2}}$; 5) $12^{\frac{1}{3}}-4^{\frac{1}{3}}$; 6) $18^{0,75}-15^{0,75}$.

15.34. 1) $a+3a^{\frac{1}{8}}$; 2) $a^{\frac{1}{3}}+4a^{\frac{1}{4}}$; 3) $mn^{\frac{1}{2}}+m^{\frac{1}{3}}n$;

4) $(ax)^{0,6}+(bx)^{0,6}$; 5) $6^{0,5}+2^{0,5}$; 6) $12^{\frac{3}{8}}-8^{\frac{3}{8}}$.

Використовуючи тотожність $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, розкладіть на множники вираз (15.35–15.36):

15.35. 1) $5-m^2$; 2) $a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$; 3) $x^{\frac{4}{7}}-y^{\frac{6}{13}}$;
4) $9m-n$, де $m>0$, $n>0$.

15.36. 1) $a^2 - 7$; 2) $p^{\frac{2}{5}} - q^{\frac{2}{5}}$; 3) $m^{\frac{8}{9}} - n^{\frac{2}{7}}$;
4) $a - 25b$, де $a > 0$, $b > 0$.

Скоротіть дріб (15.37–15.38):

15.37. 1) $\dfrac{x + 5x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + 5}$; 2) $\dfrac{3a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} - 7a^{\frac{1}{4}}}$; 3) $\dfrac{a - b}{a^{0,5} - b^{0,5}}$;

4) $\dfrac{a^{0,5}b - b^{0,5}a}{b^{1,5}a - a^{1,5}b}$; 5) $\dfrac{m - 5m^{\frac{1}{2}}}{5m - m^{\frac{3}{2}}}$; 6) $\dfrac{x^{0,5}y^{0,5} + 2x}{4x - y}$;

7) $\dfrac{m + n}{m^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}}$; 8) $\dfrac{4x^{\frac{2}{3}} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{8x - 1}$.

15.38. 1) $\dfrac{m - 3m^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{2}{3}} - 3}$; 2) $\dfrac{x^{0,5} + y^{0,5}}{x - y}$; 3) $\dfrac{x - 9x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} - 9x}$;

4) $\dfrac{9a - b}{a^{0,5}b^{0,5} + 3a}$; 5) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}{a - b}$; 6) $\dfrac{x + 8}{x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt[3]{x} + 4}$.

Порівняйте числа (15.39–15.40):

15.39. 1) $3^{\frac{1}{2}}$ і $5^{\frac{1}{3}}$; 2) $2^{-\frac{1}{6}}$ і $3^{-\frac{1}{8}}$.

15.40. 1) $2^{\frac{1}{4}}$ і $3^{\frac{1}{5}}$; 2) $3^{-\frac{1}{2}}$ і $4^{-\frac{1}{3}}$.

Побудуйте графік функції (15.41–15.42):

15.41. 1) $y = \left(x^{-\frac{1}{8}}\right)^{-8}$; 2) $y = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1,5}$;

3) $y = \left((x+1)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}$; 4) $y = \left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^{-8}$.

15.42. 1) $y = \left(x^{-\frac{5}{6}}\right)^{\frac{6}{5}}$; 2) $y = \left(x^{\frac{7}{8}}\right)^{-\frac{8}{7}}$;

3) $y = ((x-1)^{0,1})^{10}$; 4) $y = \left(x^{-\frac{1}{5}}\right)^{-10}$.

Спростіть вираз (15.43–15.44):

15.43. 1) $\dfrac{a - 1}{a - a^{\frac{1}{2}} + 1} : \dfrac{a^{\frac{1}{2}} - 1}{a^{\frac{3}{2}} + 1} - 2a^{\frac{1}{2}}$;

2) $\dfrac{x^{0,5}}{x^{0,5} - 3} - \dfrac{3}{x^{0,5} + 3} + \dfrac{x}{9 - x}$.

15.44. 1) $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{x-y}{x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$;

2) $\dfrac{m}{1-m}-\dfrac{1}{m^{0,5}+1}+\dfrac{m^{0,5}}{m^{0,5}-1}$.

4 **15.45.** Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{1}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3}$$

не залежить від значень змінних.

15.46. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{a+b}{a-25b}:\left(\frac{5a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}-5b^{0,5}}+\frac{5a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{0,5}+5b^{0,5}}\right)$$

не залежить від значень змінних.

15.47. Спростіть вираз $\dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b}:\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b}+\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{ab^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b}\right)$ та знайдіть його значення, якщо $a=3$, $b=2$.

15.48. Доведіть, що значення виразу $\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{x+y}{y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot xy^{-1}$ є додатним, якщо $y>x>0$.

15.49. Порівняйте з нулем значення виразу

$$\left(\frac{a^2-b^2}{a^{\frac{3}{2}}+ab^{\frac{1}{2}}}-\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right):\left(\frac{a}{b}\right)^{-1},$$

якщо $a>b>0$.

Доведіть тотожність (15.50–15.51):

15.50. $\dfrac{x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)^{-1}}{x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+1}-\dfrac{y^{\frac{1}{4}}}{\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}+1\right)-2x^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{x+y}{x-y}$.

15.51. $\dfrac{\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}\right)^2}{x^{-1}+y^{-1}-\left(x^{-\frac{2}{3}}-y^{-\frac{2}{3}}\right)\left(x^{-\frac{1}{3}}-y^{-\frac{1}{3}}\right)}=\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

15.52. Спростіть вираз

$$\frac{\left(a^{-\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}+b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(b^{\frac{5}{6}}a^{-\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\left(a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)}-2a+\frac{4a^2}{a-b}.$$

15.53. Спростіть вираз

$$\left(\frac{(a+x)^{-0,5}(b+x)^{-0,5}+(a-x)^{-0,5}(x-b)^{-0,5}}{(a+x)^{-0,5}(x+b)^{-0,5}-(a-x)^{-0,5}(x-b)^{-0,5}}\right)^{-2},$$

якщо $x=\sqrt{ab}$, $0<b<a$.

15.54. Спростіть вираз $\left(\frac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}-(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-2}$, якщо

$x=a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}$, $a>0$, $0<m<n$.

15.55. Родина витрачає 12 % своїх доходів на оплату житла, 48 % – на продукти харчування, 18 % – на ситуативні витрати, а решту, що складає 33 000 грн на рік, на відпочинок. Який річний бюджет у цієї родини?

15.56. Чи можуть бути простими три послідовних непарних числа, якщо менше з них більше за число 3?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

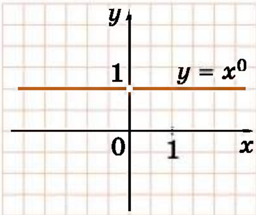
15.57. Побудуйте графік функції та пригадайте її властивості:

1) $y=x$; 2) $y=x^2$; 3) $y=\frac{1}{x}$; 4) $y=\sqrt{x}$.

15.58. Установіть на свій комп'ютер (планшет або телефон) одну з програм для побудови графіків функцій і побудуйте за допомогою цієї програми графіки функцій, наведених у попередньому номері, та графіки функцій $y=x^3$, $y=x^4$, $y=\frac{1}{x^2}$.

§ 16. СТЕПЕНЕВІ ФУНКЦІЇ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

Функцію вигляду $y=x^{\alpha}$, де α – деяке стале число, називають *степеневою*.



Мал. 16.1

Наприклад, $y = x^3$, $y = x^{0,2}$, $y = x^{-\frac{1}{3}}$ – степеневі функції.

Властивість степеневої функції $y = x^\alpha$ та вигляд її графіка залежать від виду числа α. Розглянемо степеневу функцію для різних видів числа α, вважаючи, що α – раціональне число.

Випадок, коли $\alpha \in N$, ми детально розглянули в п. 1 § 9.

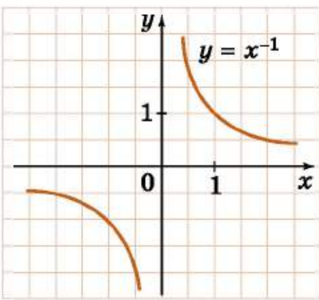
2. Функція $y = x^\alpha$, якщо $\alpha = 0$

Розглянемо функцію $y = x^0$, яка визначена для всіх значень x, крім 0, бо вираз 0^0 не має змісту. Оскільки $x^0 = 1$ при $x \neq 0$, то функція набуває лише одного значення: $y = 1$. Графік її зображено на малюнку 16.1.

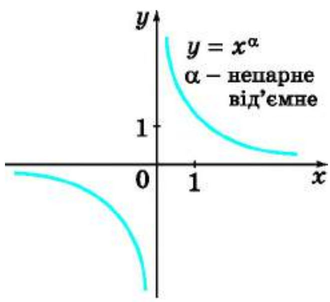
3. Функція $y = x^\alpha$, α – ціле від'ємне число

У цьому випадку функція визначена для всіх значень x, крім $x = 0$. Якщо $\alpha = -1$, то матимемо функцію $y = x^{-1}$, тобто $y = \frac{1}{x}$, графіком якої є гіпербола (мал. 16.2). Функція спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$, є непарною, тому її графік симетричний відносно початку координат.

Ті самі властивості має функція $y = x^\alpha$ для будь-якого цілого від'ємного непарного α, тобто коли $\alpha = -1; -3; -5; ...$. Схематично графік функції $y = x^\alpha$, де α – ціле від'ємне непарне число зображено на малюнку 16.3.

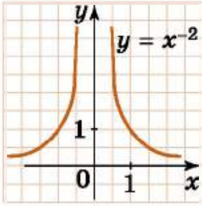


Мал. 16.2

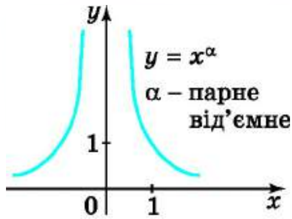


Мал. 16.3

Якщо $\alpha = -2$, то маємо $y = x^{-2}$, тобто $y = \frac{1}{x^2}$. Функція парна, тому її графік симетричний відносно осі ординат, його зображено на малюнку 16.4. Функція зростає на проміжку $(-\infty; 0)$ і спадає на проміжку $(0; +\infty)$. Ті самі властивості має функція $y = x^\alpha$ для будь-якого від'ємного парного числа α, тобто коли $\alpha = -2; -4; -6; ...$. Схематично графік функції $y = x^\alpha$, де α – ціле від'ємне парне число, зображено на малюнку 16.5.



Мал. 16.4

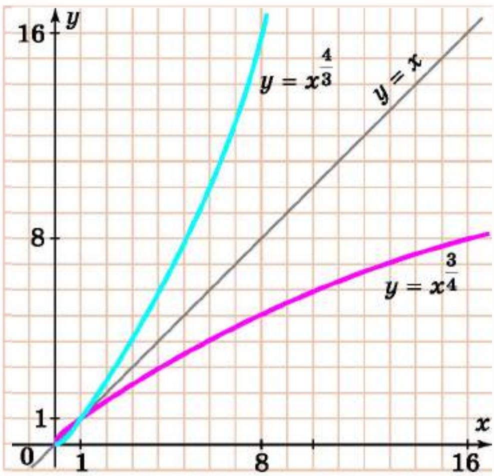


Мал. 16.5

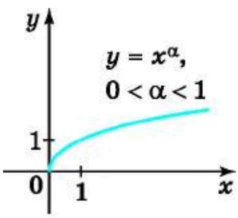
4. Функція $y = x^{\alpha}$, α – не ціле додатне число

У випадку, коли α – додатне, але неціле число, областю визначення функції є проміжок $[0; +\infty)$. Оскільки область визначення функції не є симетричною відносно нуля, то функція ні парна, ні непарна. На малюнку 16.6 зображено графіки функцій $y = x^{\frac{3}{4}}$ і $y = x^{\frac{4}{3}}$ та графік функції $y = x$ для наочності їх взаємного розташування.

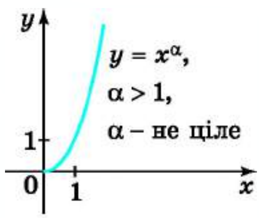
На малюнку 16.7 схематично зображено графік функції $y = x^{\alpha}$, якщо $0 < \alpha < 1$, а на малюнку 16.8 – якщо $\alpha > 1$, де α – не ціле число. У кожному із цих випадків функція є зростаючою на проміжку $[0; +\infty)$.



Мал. 16.6



Мал. 16.7

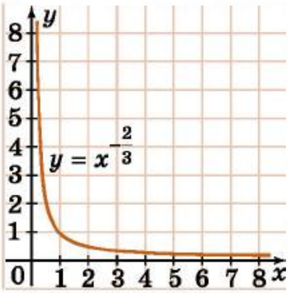


Мал. 16.8

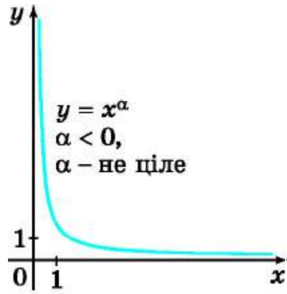
5. *Функція $y = x^{\alpha}$, α – не ціле від'ємне число*

У цьому випадку областю визначення є проміжок $(0; +\infty)$. Функція ні парна, ні непарна.

На малюнку 16.9 зображено графік функції $y = x^{-\frac{2}{3}}$. На малюнку 16.10 схематично зображено графік функції $y = x^{\alpha}$, коли $\alpha < 0$, α – не ціле. Функція в цьому випадку спадає на $(0; +\infty)$.



Мал. 16.9



Мал. 16.10

Узагальнимо всі згадані вище властивості функції $y = x^{\alpha}$ у вигляді таблиці (с. 157).

Приклад 1. Дано функцію $f(x) = x^{\frac{5}{6}}$. Порівняти:

1) $f(3)$ і $f(3{,}2)$; 2) $f(\sqrt{2})$ і $f(1{,}4)$.

Розв'язання. $D(f) = [0; +\infty)$.

Функція $f(x) = x^{\frac{5}{6}}$ зростає на $D(f)$. Тому більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

1) Оскільки $3 < 3{,}2$, то $f(3) < f(3{,}2)$.

2) Оскільки $\sqrt{2} > 1{,}4$, то $f(\sqrt{2}) > f(1{,}4)$.

Відповідь. 1) $f(3) < f(3{,}2)$; 2) $f(\sqrt{2}) > f(1{,}4)$.

Приклад 2. Дано функцію $g(x) = x^{-2018}$. Порівняти:

1) $g(-5)$ і $g(-6)$; 2) $g(1)$ і $g(1{,}2)$.

Розв'язання. 1) На проміжку $(-\infty; 0)$ функція $g(x) = x^{-2018}$ зростає, тому якщо $-5 > -6$, то і $g(-5) > g(-6)$.

2) На проміжку $(0; +\infty)$ функція $g(x) = x^{-2018}$ спадає, тому якщо $1 < 1{,}2$, то $g(1) > g(1{,}2)$.

Відповідь. 1) $g(-5) > g(-6)$; 2) $g(1) > g(1{,}2)$.

7. *Розв'язування рівняння $x^{\alpha} = m$, де α – не ціле число, $m \in R$*

Якщо $m < 0$, то рівняння $x^{\alpha} = m$ коренів не має. Якщо $m = 0$ і $\alpha > 0$, то рівняння $x^{\alpha} = 0$ має лише один корінь: $x = 0$. Якщо ж $m = 0$ і $\alpha < 0$, то рівняння $x^{\alpha} = 0$ коренів не має.

Властивості	Функція $y = x^{\alpha}$						
	α – натуральне парне	α – натуральне непарне	$\alpha = 0$	α – непарне від'ємне	α – парне від'ємне	α – не ціле додатне	α – не ціле від'ємне
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
Множина значень	$[0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	1	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$	–	–	–	$x = 0$	–
Знакосталість, $y > 0$	$x < 0$ або $x > 0$	$x > 0$	$x < 0$ або $x > 0$	$x > 0$	$x < 0$ або $x > 0$	$x > 0$	$x > 0$
Знакосталість, $y < 0$	–	$x < 0$	–	$x < 0$	–	–	–
Парність, непарність	Парна	Непарна	Парна	Непарна	Парна	Ні парна, ні непарна	Ні парна, ні непарна
Проміжки зростання	$[0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	–	–	$(-\infty; 0)$	$[0; +\infty)$	–
Проміжки спадання	$(-\infty; 0]$	–	–	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	–	$(0; +\infty)$

Якщо $m > 0$, то рівняння $x^{\alpha} = m$ має єдиний корінь, оскільки графіки функцій $y = x^{\alpha}$ і $y = m$, де $m > 0$, як у випадку не цілого додатного α, так і у випадку не цілого від'ємного α, перетинаються в єдиній точці. Щоб знайти цей єдиний корінь, потрібно ліву і праву частини рівняння $x^{\alpha} = m$ піднести до степеня $\frac{1}{\alpha}$. Маємо: $(x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} = m^{\frac{1}{\alpha}}$, тоді $x = m^{\frac{1}{\alpha}}$.

Систематизуємо дані про розв'язки рівняння $x^{\alpha} = m$ у вигляді схеми:

$x^{\alpha} = m$, де α – не ціле, $\alpha \in R$

- Якщо $m > 0$, то $x = m^{\frac{1}{\alpha}}$
- Якщо $m = 0$
  - при $\alpha > 0$ $x = 0$
  - при $\alpha < 0$ коренів немає
- Якщо $m < 0$, то коренів немає

Приклад 3. Розв'язати рівняння:

1) $x^{\frac{1}{5}} = 2$; 2) $x^{\frac{4}{3}} = 5$; 3) $x^{-\frac{2}{3}} = 4$.

Розв'язання.

1) $x^{\frac{1}{5}} = 2$;

$\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^5 = 2^5$;

$x = 32$.

2) $x^{\frac{4}{3}} = 5$;

$\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{3}{4}}$;

$x = \sqrt[4]{5^3}$;

$x = \sqrt[4]{125}$.

3) $x^{-\frac{2}{3}} = 4$;

$\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}} = 4^{-\frac{3}{2}}$;

$x = (2^2)^{-\frac{3}{2}}$;

$x = 2^{-3}$;

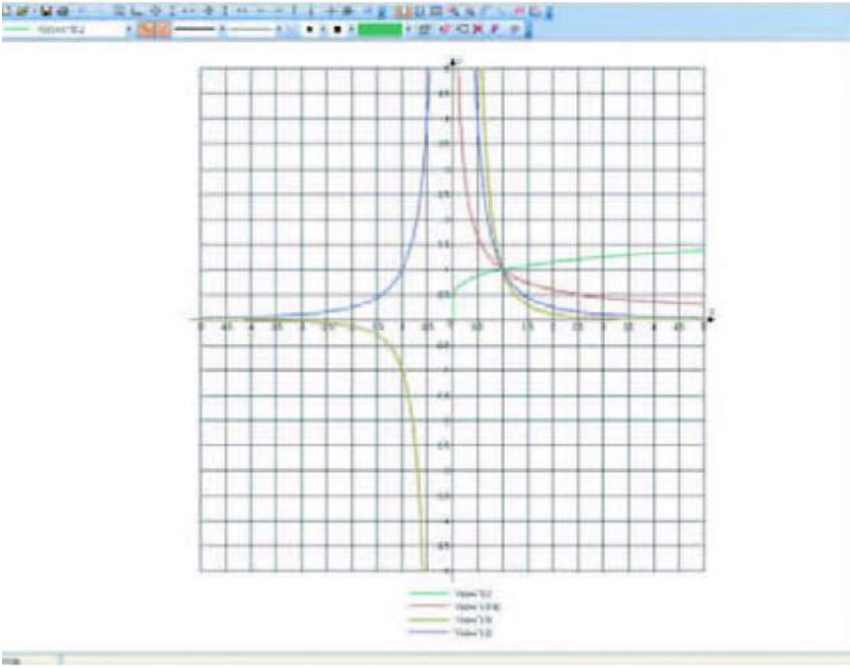
$x = \frac{1}{8}$.

Відповідь. 1) 8; 2) $\sqrt[4]{125}$; 3) $\frac{1}{8}$.

8. Побудова графіків степеневих функцій за допомогою комп'ютера

Існує багато програм, які дозволяють будувати графіки функцій, а потім їх аналізувати. На малюнку 16.11 зображено вікно однієї з програм, за допомогою якої побудовано графіки функцій $y = x^{0,2}$ (зеленого кольору), $y = x^{-\frac{3}{4}}$ (червоного), $y = x^{-3}$ (сірого) і $y = x^{-2}$ (синього).

Серед корисних опцій подібних програм слід відзначити опцію слідування курсора вздовж графіка (за допомогою цієї опції можна встановлювати координати точок графіка), знаходження точки перетину двох графіків (за допомогою цієї опції можна, наприклад, знаходити наближений розв'язок рівняння вигляду $x^{\alpha} = m$, де $m \in R$), збільшувати чи зменшувати окремі ділянки графіка тощо.



Мал. 16.11

● Яку функцію називають степеневою? ● Пригадайте властивості цієї функції та вигляд її графіка для різних значень (парних та непарних) показника степеня. ● Опишіть властивості степеневої функції $y = x^{\alpha}$ залежно від значення α. ● Як розв'язати рівняння $x^{\alpha} = m$, де α – не ціле число?

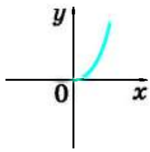
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **16.1.** (*Усно.*) Серед запропонованих функцій укажіть степеневі:

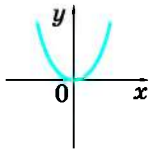
1) $y = x^2$; 2) $y = 2x - x^2$; 3) $y = x^{-\frac{1}{3}}$;

4) $y = x^{\frac{3}{4}}$; 5) $y = \sqrt[3]{x}$; 6) $y = 5$.

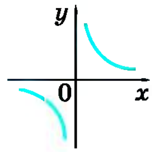
16.2. (*Усно.*) На якому з малюнків 16.12–16.17 схематично зображено графік функції $y = x^3$, на якому $y = x^{\frac{4}{3}}$, а на якому $y = x^{-4}$?



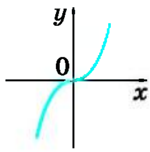
Мал. 16.12



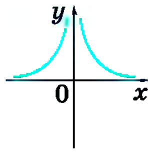
Мал. 16.13



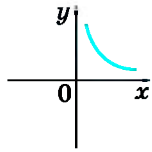
Мал. 16.14



Мал. 16.15



Мал. 16.16



Мал. 16.17

16.3. На якому з малюнків 16.12–16.17 схематично зображено графік функції $y = x^2$; $y = x^{-5}$; $y = x^{-\frac{1}{3}}$?

2 Накресліть схематично графік функції та запишіть її властивості **(16.4–16.5)**:

16.4. 1) $y = x^{-5}$; 2) $y = x^{\frac{2}{3}}$; 3) $y = x^{-12}$; 4) $y = x^{-1,45}$.

16.5. 1) $y = x^4$; 2) $y = x^{-\frac{1}{2}}$; 3) $y = x^{1,8}$; 4) $y = x^7$.

Розв'яжіть рівняння **(16.6–16.7)**:

16.6. 1) $x^{\frac{1}{3}} = 2$; 2) $x^{\frac{1}{4}} = 0$; 3) $x^{\frac{1}{6}} = 1$; 4) $x^{\frac{1}{2}} = 3$.

16.7. 1) $x^{\frac{1}{4}} = 1$; 2) $x^{\frac{1}{7}} = 0$; 3) $x^{\frac{1}{3}} = 4$; 4) $x^{\frac{1}{2}} = 5$.

16.8. Чи проходить графік функції $y = x^{-3}$ через точку:

1) $A(0;\ 3)$; 2) $B(1;\ 1)$; 3) $C\left(2;\ \frac{1}{8}\right)$; 4) $D(-1;\ 1)$?

16.9. Чи проходить графік функції $y = x^{-4}$ через точку:

1) $K\left(2;\ \frac{1}{16}\right)$; 2) $L(0;\ 0)$; 3) $M\left(-3;\ -\frac{1}{81}\right)$; 4) $N(1;\ 1)$?

16.10. Функцію задано формулою $f(x) = x^{-9}$. Порівняйте:
1) $f(2)$ і $f(4)$; 2) $f(3,7)$ і $f(3,6)$.

16.11. Функцію задано формулою $g(x) = x^{\frac{4}{5}}$. Порівняйте:
1) $g(7)$ і $g(8)$; 2) $g(1,19)$ і $g(1,15)$.

Чи має корені рівняння (16.12–16.13):

16.12. 1) $x^{-17} = -12$; 2) $x^{\frac{4}{5}} = -1$; 3) $x^{1,8} = 1,8$;
4) $x^{-2} = -2$; 5) $x^0 = 4$; 6) $x^{-8} = 0,01$?

16.13. 1) $x^{-9} = 7$; 2) $x^{-1,2} = -1,2$; 3) $x^{\frac{4}{5}} = \frac{4}{5}$;
4) $x^0 = 0$; 5) $x^{-3} = -3$; 6) $x^{-6} = -0,02$?

16.14. Побудуйте графік функції $y = x^{0,25}$. За допомогою графіка знайдіть значення:
1) функції, якщо значення аргументу дорівнює 0,5; 16;
2) аргументу, що відповідають значенням функції 1; 1,5.

16.15. Побудуйте графік функції $y = x^{\frac{1}{3}}$. За допомогою графіка знайдіть значення:
1) функції, якщо значення аргументу дорівнює 0,5; 8;
2) аргументу, що відповідають значенням функції 1; 1,5.

3 Побудуйте графік функції та запишіть її властивості (16.16–16.17):

16.16. 1) $y = x^3 + 2$; 2) $y = (x-2)^{-\frac{2}{5}}$.

16.17. 1) $y = x^{-2} - 3$; 2) $y = (x+1)^{1,25}$.

Розв'яжіть рівняння (16.18–16.19):

16.18. 1) $(x-3)^{\frac{1}{2}} = 5$; 2) $(x+1)^{\frac{1}{5}} = 0$; 3) $(x-2)^{-\frac{1}{3}} = 0$;
4) $(x^2-2)^{0,5} = \sqrt{7}$; 5) $(x^2-6x)^{\frac{1}{3}} = 3$; 6) $(x^2+x)^{-1} = \frac{1}{2}$.

16.19. 1) $(x+2)^{\frac{1}{3}} = 4$; 2) $(x-4)^{0,4} = 0$;
3) $(x^2+2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$; 4) $(x^2-2x)^{-1} = \frac{1}{3}$.

Порівняйте числа (16.20–16.21):

16.20. 1) $7^{1,2}$ і $7,2^{1,2}$; 2) $1,8^{-0,4}$ і $2^{-0,4}$.

16.21. 1) $3^{\frac{1}{8}}$ і $2^{\frac{1}{8}}$; 2) 5^{-6} і $4,8^{-6}$.

16.22. Функцію задано формулою $f(x) = x^{-108}$. Порівняйте:
1) $f(1,2)$ і $f(1,3)$; 2) $f(-5)$ і $f(-5,01)$;
3) $f(-7,4)$ і $f(7,4)$; 4) $f(-2,7)$ і $f(2,8)$.

16.23. Функцію задано формулою $g(x) = x^{-104}$. Порівняйте:
1) $g(-6)$ і $g(-7)$; 2) $g(1,7)$ і $g(1,6)$;
3) $g(4,2)$ і $g(-4,1)$; 4) $g(7,9)$ і $g(-7,9)$.

16.24. Побудуйте ескіз графіка функції $y = (x+3)^{0,8} - 2$ та запишіть її властивості.

16.25. Побудуйте ескіз графіка функції $y = (x-1)^{-1,2} + 3$ та запишіть її властивості.

Розв'яжіть рівняння (16.26–16.29):

16.26. $(x^2 - 7x)^{\frac{2}{3}} = 4$; 2) $(x^2 - 9)^{-0,75} = \frac{1}{8}$.

16.27. 1) $(x^2 + 6x)^{\frac{3}{4}} = 8$; 2) $(x^2 + 4)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{25}$.

16.28. $x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} - 6 = 0$.

16.29. $x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{6}} - 4 = 0$.

Скільки коренів має рівняння (16.30–16.31):

16.30. 1) $x^6 - x = 2$; 2) $x^{-\frac{4}{5}} - x^2 = 1 + 2x$?

16.31. 1) $x^5 + 2x = 3$; 2) $x^{0,8} - 4 = x^2 - 4x$?

16.32. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x, \text{ якщо } x < 1, \\ x^{\frac{2}{3}}, \text{ якщо } 1 \leqslant x \leqslant 8, \\ \frac{32}{x}, \text{ якщо } x > 8. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання функції $f(x)$.

16.33. Побудуйте графік функції $g(x) = \begin{cases} 5 - 4x, \text{ якщо } x \leqslant 1, \\ x^{\frac{1}{2}}, \text{ якщо } 1 < x \leqslant 4, \\ \frac{8}{x}, \text{ якщо } x > 4. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання функції $g(x)$.

16.34. Парним чи непарним є натуральне число n у показнику степеня функції $g(x) = x^{-n}$, якщо:
1) $g(-3) > g(-2)$; 2) $g(-3) > g(4)$;
3) $g(3) > g(4)$; 4) $g(-8) = g(8)$?

16.35. Парним чи непарним є натуральне число n у показнику степеня функції $f(x) = x^{-n}$, якщо:
1) $f(-1) > f(5)$; 2) $f(6) > f(10)$;
3) $f(4) = f(-4)$; 4) $f(-4) > f(-2)$?

16.36. *Практична діяльність.* За допомогою будь-якої комп'ютерної програми, що будує графіки, побудуйте графіки функцій $y = x^{0,8}$; $y = x^{-\frac{2}{5}}$; $y = x^{1,5}$; $y = x^{-4}$ та заповніть таблицю.

№	Завдання	$y = x^{0,8}$	$y = x^{-\frac{2}{5}}$	$y = x^{1,5}$	$y = x^{-4}$
1	Знайти значення функції, що відповідає значенню аргументу: $x = 1,5$				
	$x = 3$				
	$x = 4$				
2	Знайти значення аргументу, що відповідає значенню функції: $y = 0,5$				
	$y = 1$				
	$y = 1,5$				
3	Знайти наближений розв'язок рівняння	$x^{0,8} = 1,5$ $x \approx$	$x^{-\frac{2}{5}} = 0,5$ $x \approx$	$x^{1,5} = 5$ $x \approx$	$x^{-4} = 3$ $x \approx$

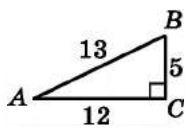
16.37. Залізничний квиток на потяг Київ–Львів для дорослого коштує 180 гривень. Знижка на вартість квитка для дітей від 6 до 14 років становить 25 % від вартості квитка для дорослого. Група, що складається із 16 школярів віком 12–13 років та 2 дорослих, вирушає з Києва до Львова на екскурсію. Скільки заплатили за квитки на всю групу?

16.38. (*Українська математична олімпіада, 1975 р.*). Знайдіть усі цілі значення n, для яких число $(n + 2)^4 - n^4$ є кубом цілого числа.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

16.39. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $AC = 12$, $BC = 5$, $AB = 13$ (мал. 16.18). Знайдіть:

1) $\sin\angle A$; 2) $\cos\angle B$; 3) $\operatorname{tg}\angle A$;
4) $\cos\angle A$; 5) $\operatorname{tg}\angle B$; 6) $\sin\angle B$.



Мал. 16.18

16.40. Обчисліть:

1) $\sin 30°$; 2) $\sqrt{2}\cos 45°$;
3) $\operatorname{tg}120° - \operatorname{tg}60°$; 4) $\cos^2 150°$;
5) $\sin 120° - \cos 30°$; 6) $(\cos 120° + 5\operatorname{tg}45°)^2$.

16.41. Знайдіть за допомогою калькулятора або комп'ютера:

1) $\sin 15°$; 2) $\cos 48°$; 3) $\operatorname{tg}138°$;
4) $\sin 130°45'$; 5) $\cos 107°30'$; 6) $\operatorname{tg}13°15'$.

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

РОЗДІЛ 3

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ МИ...

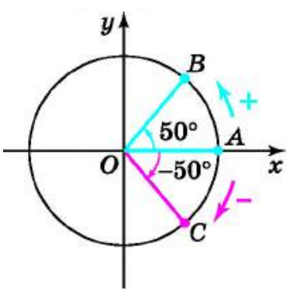
- ***пригадаємо*** *відомості з геометрії про синус, косинус і тангенс кута трикутника;*
- ***дізнаємося*** *про радіанну міру кута; тригонометричні функції кутів та числових аргументів; основні співвідношення між тригонометричними функціями;*
- ***навчимося*** *переходити від радіанної міри кута до градусної і навпаки; перетворювати тригонометричні вирази та обчислювати їх значення; будувати графіки тригонометричних функцій.*

§ 17. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС І КОТАНГЕНС КУТА

З курсу геометрії ви вже знаєте, що таке синус, косинус і тангенс кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. У цьому параграфі ознайомимося з поняттями синуса, косинуса і тангенса довільного кута, а також з поняттям котангенса кута.

1. Кути довільної величини

Розглянемо коло радіуса R із центром у початку координат (мал. 17.1). Позначимо на додатній півосі абсцис точку A, яка належить колу. Радіус OA будемо називати *початковим радіусом*.

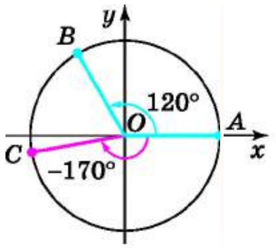


Мал. 17.1

Повернемо радіус OA навколо точки O на $50°$ проти руху годинникової стрілки, отримаємо радіус OB. Кут AOB, який при цьому утворився, називають *кутом повороту*. У нашому випадку кут повороту дорівнює $50°$. Повернемо тепер початковий радіус OA на кут $50°$ у напрямку руху годинникової стрілки, отримаємо радіус OC. У цьому випадку кут повороту дорівнює $-50°$. На малюнку 17.1 стрілками вказано кути повороту $50°$ і $-50°$ та напрям повороту. Узагалі,

при повороті початкового радіуса проти руху годинникової стрілки кут повороту вважають додатним, а за рухом годинникової стрілки – від'ємним (мал. 17.1).

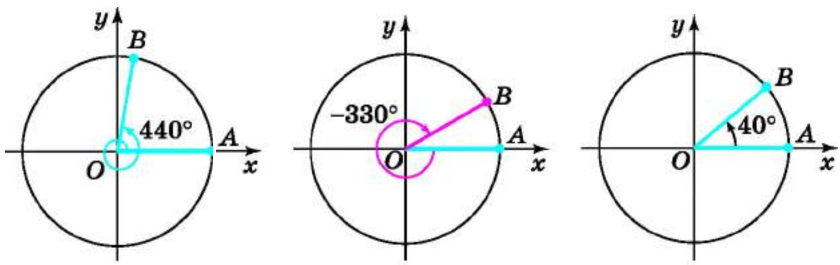
Кут повороту може бути будь-яким числом. На малюнку 17.2 маємо кути повороту 120° і –170°.



Мал. 17.2 Мал. 17.3 Мал. 17.4

Покажемо кут повороту 225°. Оскільки 225° = 180° + 45°, повернемо початковий радіус *OA* в додатному напрямі на 180°, а потім у тому ж напрямі ще на 45° (мал. 17.3). Якщо початковий радіус виконає повний оберт проти руху годинникової стрілки, то отримаємо кут повороту 360° (мал. 17.4). Початковий радіус можна повернути і більш ніж на повний оберт, наприклад на малюнку 17.5 маємо кут повороту 440°.

Якщо початковий радіус повернути за рухом годинникової стрілки на 330°, тобто у від'ємному напрямі, отримаємо кут повороту –330° (мал. 17.6).



Мал. 17.5 Мал. 17.6 Мал. 17.7

Нехай при повороті на 40° початковий радіус *OA* перейшов у радіус *OB* (мал. 17.7). Якщо після цього радіус *OB* повернути на кут 360° або –360°, то знову отримаємо радіус *OB*. Із цього можна дійти висновку, що радіус *OA* переходить у радіус *OB* як при повороті на кут 40° + 360° = 400°, так і при повороті на кут 40° – 360° = –320°, та й узагалі при повороті на кут $40° + 360°k$, де k – будь-яке ціле число, тобто $k \in Z$.

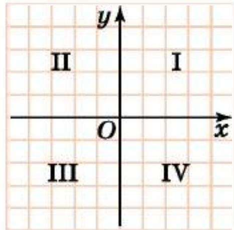
Очевидно, що й будь-який кут α можна подати у вигляді $\alpha = \alpha_0 + 360°k$, де $0 \leqslant \alpha_0 < 360°$, $k \in Z$. Наприклад, $1100° = 20° + 360° \cdot 3$, а $-640° = 80° + 360° \cdot (-2)$.

Приклад 1. Серед кутів повороту 460°, −270°, 810°, −660° знайти ті, при повороті на які початковий радіус приймає те саме положення, що й при повороті на кут 90°.

Розв'язання. Оскільки $460° = 100° + 360° \cdot 1$; $-270° = 90° + 360° \cdot (-1)$; $810° = 90° + 360° \cdot 2$; $-660° = 60° + 360° \cdot (-2)$, то такими є кути −270° і 810°.

Відповідь. −270° і 810°.

Нагадаємо, що координатні осі ділять координатну площину на чотири чверті (мал. 17.8). Нехай при повороті на кут α початковий радіус OA перейшов у радіус OB. тоді кут α називають кутом тої чверті, у якій міститься радіус OB. Так, наприклад, $\alpha = 50°$ – кут першої чверті (мал. 17.1), $\alpha = 120°$ – кут другої чверті (мал. 17.2), $\alpha = 225°$ – кут третьої чверті (мал. 17.3), $\alpha = -50°$ – кут четвертої чверті (мал. 17.1).



Мал. 17.8

Кути 0°; ±90°; ±180°; ±270°; ±360°; ... не належать жодній чверті.

Приклад 2. Кутом якої чверті є кут: 1) 1999°; 2) −2010°?

Розв'язання.
1) $1999° = 199° + 360° \cdot 5$, отже, 1999° – кут III чверті.
2) $-2010° = 150° + 360° \cdot (-6)$, отже, −2010° – кут II чверті.

Відповідь. 1) кут III чверті; 2) кут II чверті.

2. Означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса

Нехай при повороті на кут α початковий радіус OA перейшов у радіус OB, причому точка B має координати $(x; y)$ (мал. 17.9).

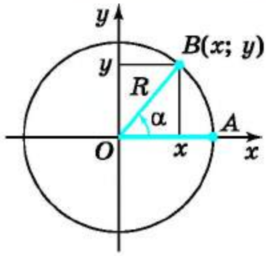
Синусом кута α **називають відношення ординати точки B до довжини радіуса:** $\sin\alpha = \frac{y}{R}$.

Косинусом кута α **називають відношення абсциси точки B до довжини радіуса:** $\cos\alpha = \frac{x}{R}$.

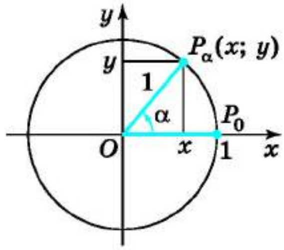
Тангенсом кута α **називають відношення ординати точки B до її абсциси:** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$.

Котангенсом кута α **називають відношення абсциси точки B до її ординати:** $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$, $y \neq 0$.

Зауважимо, що вказані означення не суперечать означенням синуса, косинуса і тангенса кутів від 0° до 180°, раніше введеним у геометрії.



Мал. 17.9



Мал. 17.10

3. Одиничне коло

Як відомо з курсу геометрії, значення виразів $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, де $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$, залежать лише від градусної міри кута α і не залежать від довжини радіуса R. Тому зручно розглядати коло з радіусом $R = 1$ і центром у початку координат (мал. 17.10). Таке коло називають *одиничним колом*.

Нехай при повороті на кут α початковий радіус OP_0 переходить у радіус OP_α, де точка P_α має координати $(x;\ y)$ (мал. 17.10). Кажуть, що куту α відповідає точка P_α одиничного кола. Тоді

❗ ***синусом кута*** **α називають ординату точки $P_\alpha(x;\ y)$ одиничного кола, тобто $\sin\alpha = y$;**

косинусом кута **α називають абсцису точки $P_\alpha(x;\ y)$ одиничного кола, тобто $\cos\alpha = x$;**

тангенсом кута **α називають відношення ординати точки $P_\alpha(x;\ y)$ одиничного кола до її абсциси, тобто $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$, $x \neq 0$;**

котангенсом кута **α називають відношення абсциси точки $P_\alpha(x;\ y)$ одиничного кола до її ординати, тобто $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$, $y \neq 0$.**

Означення тангенса можна сформулювати й так:

❗ тангенсом кута α називають відношення синуса цього кута до його косинуса.

Справді, оскільки $y = \sin\alpha$, а $x = \cos\alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, де $\cos\alpha \neq 0$. Аналогічно:

❗ котангенсом кута α називають відношення косинуса цього кута до його синуса.

Справді, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, де $\sin\alpha \neq 0$.

Вирази $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ мають зміст для будь-якого значення α. Вираз $\operatorname{tg}\alpha$ має зміст, коли $x \neq 0$, тобто коли $\alpha \neq \pm 90^\circ$, $\pm 270^\circ$,

$\pm 450°$, ... , оскільки для цих кутів абсциса відповідної точки одиничного кола дорівнює нулю. Вираз $\operatorname{ctg}\alpha$ має зміст, коли $y \neq 0$, тобто коли $\alpha \neq 0°, \pm 180°, \pm 360°, \ldots$, оскільки для цих кутів ордината відповідної точки одиничного кола дорівнює нулю.

Отже, кожному допустимому значенню кута α відповідає єдине значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$. Тому синус, косинус, тангенс і котангенс є функціями кута α. Їх називають *тригонометричними функціями кута*.

4. Тригонометричні значення деяких кутів

Знайдемо значення тригонометричних функцій кутів 0°, 90°, 180°, 270°, 360° за означенням.

На одиничному колі (мал. 17.11) позначимо точки P_α для $\alpha = 0°; 90°; 180°; 270°; 360°$. Матимемо:

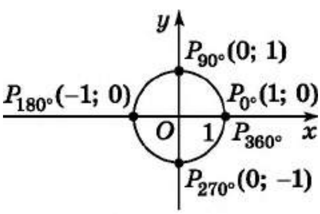
$P_{0°}(1; 0)$, тому $\sin 0° = 0$; $\cos 0° = 1$; $\operatorname{tg} 0° = 0$; $\operatorname{ctg} 0°$ – не існує.

$P_{90°}(0; 1)$, тому $\sin 90° = 1$; $\cos 90° = 0$; $\operatorname{tg} 90°$ – не існує; $\operatorname{ctg} 90° = 0$.

$P_{180°}(-1; 0)$, тому $\sin 180° = 0$; $\cos 180° = -1$; $\operatorname{tg} 180° = 0$; $\operatorname{ctg} 180°$ – не існує.

$P_{270°}(0; -1)$, тому $\sin 270° = -1$; $\cos 270° = 0$; $\operatorname{tg} 270°$ – не існує; $\operatorname{ctg} 270° = 0$.

Точка $P_{360°}$ має ті самі координати, що й точка $P_{0°}$, тому $\sin 360° = \sin 0° = 0$; $\cos 360° = \cos 0° = 1$; $\operatorname{tg} 360° = \operatorname{tg} 0° = 0$; $\operatorname{ctg} 360°$ – не існує.



Мал. 17.11

Подамо отримані значення у вигляді таблиці, доповнивши її значеннями синуса, косинуса і тангенса гострих і тупих кутів, відомих нам з курсу геометрії. Невідомі значення тангенса і котангенса для цієї таблиці обчислимо відповідно за формулами $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Кути α, зазначені у першому рядку цієї таблиці, ще називають *табличними кутами*. Маємо:

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	–1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

Приклад 3. Обчислити:

1) $\cos 60° + \mathrm{tg}\,45°$; 2) $\sin^2 30° + \mathrm{ctg}\,135°$;

3) $(3\cos^2 90° + 2\sin 270° - 5\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,120°)^{-1}$;

4) $\sqrt{(1-2\cos 30°)^2} - \sqrt{(1+\mathrm{ctg}\,30°)^2}$.

Розв'язання. 1) $\cos 60° + \mathrm{tg}\,45° = \frac{1}{2} + 1 = 1{,}5$.

2) Запис $\sin^2 30°$ означає $(\sin 30°)^2$. Маємо:

$$\sin^2 30° + \mathrm{ctg}\,135° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1) = -\frac{3}{4}.$$

3) $(3\cos^2 90° + 2\sin 270° - 5\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,120°)^{-1} =$

$$= (3\cdot 0^2 + 2(-1) - 5\sqrt{3}(-\sqrt{3}))^{-1} = (-2+15)^{-1} = 13^{-1} = \frac{1}{13}.$$

4) $\sqrt{(1-2\cos 30°)^2} - \sqrt{(1+\mathrm{ctg}30°)^2} =$

$$\left|1 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right| - \left|1+\sqrt{3}\right| = \left|1-\sqrt{3}\right| - \left|1+\sqrt{3}\right|.$$

Оскільки $1-\sqrt{3} < 0$, то $\left|1-\sqrt{3}\right| = -(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1$;

$1+\sqrt{3} > 0$, тому $\left|1+\sqrt{3}\right| = 1+\sqrt{3}$.

Отже, $\left|1-\sqrt{3}\right| - \left|1+\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}-1-(1+\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1-1-\sqrt{3} = -2$.

Відповідь: 1) 1,5; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) $\frac{1}{13}$; 4) -2.

5. Знаходження тригонометричних функцій за допомогою калькулятора

Для знаходження синуса, косинуса і тангенса в калькуляторах є відповідні клавіші $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ і $\boxed{\mathrm{tg}}$ (у деяких калькуляторах $\boxed{\tan}$). Спочатку перемикач «Г–Р» треба зафіксувати у положенні «Г» для задання кутів у градусах. У деяких калькуляторах це досягається за допомогою клавіші $\boxed{\mathrm{MODE}}$ і вибору відповідного режиму. Залежно від типу калькулятора порядок обчислень може бути різним, тому радимо уважно ознайомитися з інструкцією до калькулятора. Наведемо порядок обчислень для двох найбільш поширених типів калькуляторів (с. 170).

В останніх рядках обох таблиць скористалися тим, що котангенс є числом, оберненим до тангенса. Справді,

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}.$$

Умова	Послідовність дій для калькуляторів I типу	Результат (з точністю до десятитисячних)
$\sin 28°$	$\boxed{28}$ $\boxed{\sin}$	$\approx 0{,}4695$
$\cos 12°20'$	$\boxed{20}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{60}$ $\boxed{+}$ $\boxed{12}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\cos}$	$\approx 0{,}9769$
$\text{tg}\, 17°$	$\boxed{17}$ $\boxed{\text{tg}}$	$\approx 0{,}3057$
$\text{ctg}\, 54°$	$\boxed{54}$ $\boxed{\text{tg}}$ $\boxed{1/x}$	$\approx 0{,}7265$

Умова	Послідовність дій для калькуляторів II типу	Результат (з точністю до десятитисячних)
$\sin 28°$	$\boxed{\sin}$ $\boxed{28}$ $\boxed{=}$	$\approx 0{,}4695$
$\cos 12°20'$	$\boxed{\cos}$ $\boxed{12}$ $\boxed{°, ''}$ $\boxed{20}$ $\boxed{°, ''}$ $\boxed{=}$	$\approx 0{,}9769$
$\text{tg}\, 17°$	$\boxed{\text{tg}}$ $\boxed{17}$ $\boxed{=}$	$\approx 0{,}3057$
$\text{ctg}\, 54°$	$\boxed{1}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{tg}}$ $\boxed{54}$ $\boxed{=}$	$\approx 0{,}7265$

А ще раніше...

Термін «тригонометрія» походить від грецьких слів «тригоном» – трикутник і «метріо» – вимірюю, що разом означає вимірювання трикутників.

Потреба у вимірюванні відстаней і кутів виникла ще у стародавні часи через необхідність визначення положення зірок на небі, кораблів у відкритому морі, караванів у пустелі тощо.

Деякі знання з тригонометрії накопичили і вчені Стародавнього Вавилону. Засновниками ж тригонометрії прийнято вважати давньогрецьких вчених Гіпарха (бл. 180 р. – бл. 125 р. до н. е.) і Птолемея (бл. 100 р. – бл. 178 р.). Зокрема, Гіпарх склав таблиці хорд – перші тригонометричні таблиці. Більш точні таблиці синусів склав Птолемей. Крім цих таблиць, його праця «Альмагест» містила також тогочасні відомості з астрономії та суміжних наук.

У Європі вперше тригонометрія як самостійна наука трактується у праці «П'ять книг про трикутник усіх видів» Йоганна Мюллера (1436–1476). Подальший розвиток тригонометрії відбувся завдяки Миколаю Копернику (1473–1543), Франсуа Вієту (1540–1603), Йоганну Кеплеру (1571–1630) і був пов'язаний з дослідженнями в астрономії.

Сучасного вигляду тригонометрія набула у працях Леонарда Ейлера (1707–1783), який уперше сформулював означення тригонометричних функцій, розглянув їх для довільних кутів та довів кілька тригонометричних формул.

Термін «синус» уперше з'явився у працях індійського вченого Аріабхатти (476–550). Термін «косинус» є скороченням латинського «complementy sinus», тобто додатковий синус.

Сучасні позначення «sinx» і «cosx» уперше запропонував Йоганн Бернуллі в 1739 р. в листі до Леонарда Ейлера. Ейлер їх прийняв і систематизував.

Терміни «тангенс» і «котангенс» уведено арабським математиком Абу-н-Вефа (940–998). Він же склав перші таблиці тангенсів і котангенсів.

? Що називають початковим радіусом; кутом повороту? Який кут повороту вважають додатним, а який – від'ємним? Сформулюйте означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута α. Яке коло називають одиничним? Сформулюйте означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута α, заданого на одиничному колі.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

17.1. Чому дорівнюють $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо куту α на одиничному колі відповідає точка $P_\alpha\left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$?

17.2. Чому дорівнюють $\sin\beta$ і $\cos\beta$, якщо куту β на одиничному колі відповідає точка $P_\beta(0{,}8;\ 0{,}6)$?

Знайдіть (17.3–17.4):

17.3. 1) $\sin 45°$; 2) $\cos 90°$; 3) $\operatorname{tg} 30°$; 4) $\operatorname{ctg} 135°$; 5) $\cos 120°$; 6) $\sin 180°$; 7) $\operatorname{ctg} 60°$; 8) $\operatorname{tg} 0°$.

17.4. 1) $\sin 120°$; 2) $\cos 30°$; 3) $\operatorname{tg} 45°$; 4) $\operatorname{ctg} 90°$; 5) $\cos 270°$; 6) $\sin 0°$; 7) $\operatorname{ctg} 120°$; 8) $\operatorname{tg} 60°$.

Накресліть коло із центром у початку координат і, використовуючи транспортир, позначте кут повороту, що дорівнює (17.5–17.6):

17.5. 1) $60°$; 2) $210°$; 3) $-40°$; 4) $-320°$.

17.6. 1) $110°$; 2) $300°$; 3) $-130°$; 4) $-200°$.

2

Запишіть кут α у вигляді $\alpha = \alpha_0 + 360°k$, де $0° \leqslant \alpha_0 < 360°$, а k – деяке ціле число (17.7–17.8):

17.7. 1) $\alpha = 420°$; 2) $\alpha = 765°$; 3) $\alpha = -320°$; 4) $\alpha = -1060°$.

17.8. 1) $\alpha = 730°$; 2) $\alpha = 395°$; 3) $\alpha = -710°$; 4) $\alpha = -770°$.

17.9. Кутом якої чверті є кут β, якщо:
1) $\beta = 190°$; 2) $\beta = -190°$; 3) $\beta = 105°$; 4) $\beta = -105°$; 5) $\beta = 89°$; 6) $\beta = -89°$; 7) $\beta = 320°$; 8) $\beta = -320°$?

17.10. Кутом якої чверті є кут γ, якщо:

1) $\gamma = 95°$; 2) $\gamma = -95°$; 3) $\gamma = 210°$; 4) $\gamma = -210°$;
5) $\gamma = 20°$; 6) $\gamma = -20°$; 7) $\gamma = 280°$; 8) $\gamma = -280°$?

17.11. Відомо, що $\sin\gamma = -\frac{12}{13}$; $\cos\gamma = -\frac{5}{13}$. Знайдіть $\operatorname{tg}\gamma$ і $\operatorname{ctg}\gamma$.

17.12. Відомо, що $\sin\beta = \frac{8}{17}$; $\cos\beta = -\frac{15}{17}$. Знайдіть $\operatorname{tg}\beta$ і $\operatorname{ctg}\beta$.

Знайдіть за допомогою калькулятора (округліть до тисячних) (17.13–17.14):

17.13. 1) $\sin(-15°)$; 2) $\cos 127°$; 3) $\operatorname{tg}(1000°)$; 4) $\operatorname{ctg}(-37°)$.

17.14. 1) $\sin 190°$; 2) $\cos(-100°)$; 3) $\operatorname{tg}(-29°)$; 4) $\operatorname{ctg} 1200°$.

Знайдіть значення виразу (17.15–17.18):

17.15. 1) $\cos 90° + \sin 0°$; 2) $3\cos 180° \cdot \sin 90°$;
3) $2\operatorname{tg}180° - 4\operatorname{ctg} 90°$; 4) $\operatorname{ctg} 270° - \cos 270° + \sin 270°$.

17.16. 1) $5\sin 360° + \cos 360°$; 2) $\operatorname{tg} 0° + \sin 180° - \cos 0°$.

17.17. 1) $4\cos 30° - 2\sin 60°$; 2) $\sqrt{2}\sin 45° + 2\sqrt{2}\cos 45°$;
3) $\operatorname{tg}60° : \operatorname{ctg} 30°$; 4) $\sin 150° + \cos 120°$.

17.18. 1) $\operatorname{ctg} 60° - \operatorname{tg} 30°$; 2) $\sqrt{3}\sin 120° - \cos 60°$;
3) $\sin 135° + \cos 135°$; 4) $\operatorname{tg} 120° : \operatorname{ctg} 150°$.

Знайдіть за допомогою калькулятора (округліть до сотих) (17.19–17.20):

17.19. 1) $\sin 12°37' + \cos 15°13'$; 2) $\operatorname{tg} 105°12' + \operatorname{ctg} 185°38'$.

17.20. 1) $\cos 113°24' + \operatorname{tg} 17°36'$; 2) $\sin 190°15' + \operatorname{ctg} 12°30'$.

3

17.21. Серед кутів повороту 520°; 440°; −310°; 220°; 770°; −560° знайдіть ті, у яких початковий радіус прийматиме те саме положення, що й при повороті на кут:

1) 50°; 2) 160°.

17.22. Знайдіть у проміжку від 0° до 360° кут β такий, щоб поворот початкового радіуса на цей кут збігався з поворотом на кут α, якщо:

1) $\alpha = 480°$; 2) $\alpha = -70°$; 3) $\alpha = 1150°$; 4) $\alpha = -670°$.

17.23. Укажіть кут α, що належить проміжку [360°; 720°], для якого:

1) $\sin\alpha = 1$; 2) $\cos\alpha = 0$; 3) $\sin\alpha = 0$; 4) $\cos\alpha = -1$.

17.24. Укажіть кут β, що належить проміжку [−360°; 0°], для якого: 1) $\sin\beta = -1$; 2) $\cos\beta = 1$.

17.25. Укажіть три таких значення x, для яких:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{tg} x = 0$.

17.26. Укажіть два таких значення α, для яких:

1) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha = 0$.

Обчисліть (**17.27–17.28**):

17.27. 1) $\sin^2 45° + \cos^2 60°$; 2) $\sin 30° \cos 180° \operatorname{tg} 45°$;
3) $\operatorname{tg}^2 180° + \cos^2 120°$;
4) $(2\operatorname{ctg} 270° - 2\cos 60° + \sin^2 60°)^{-1}$.

17.28. 1) $\sin^2 120° - \cos^2 0°$; 2) $\cos 45° \sin 135° \operatorname{ctg} 45°$;
3) $\operatorname{ctg}^2 60° + \sin^2 30°$;
4) $(2\cos^2 0° - \operatorname{ctg} 135° - 10\cos^2 60°)^{-1}$.

17.29. Знайдіть значення виразу $\sin 3\alpha + \sin 2\alpha$, якщо:
1) $\alpha = 15°$; 2) $\alpha = 30°$; 3) $\alpha = 60°$; 4) $\alpha = 90°$.

17.30. Знайдіть значення виразу $\cos\alpha + \cos 2\alpha - \cos 3\alpha$, якщо:
1) $\alpha = 30°$; 2) $\alpha = 60°$.

Які координати має точка одиничного кола, отримана при повороті точки $P_0(1;\ 0)$ на кут (**17.31–17.32**):

17.31. 1) $90°$; 2) $-180°$; 3) $135°$; 4) $-240°$?

17.32. 1) $30°$; 2) $-270°$; 3) $150°$; 4) $-300°$?

17.33. Точка одиничного кола має абсцису, що дорівнює числу $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Яка ордината у цієї точки?

17.34. Точка одиничного кола має ординату, що дорівнює числу $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Яка абсциса у цієї точки?

4 Обчисліть (**17.35–17.36**):

17.35. 1) $\sqrt{(1 - 2\cos 45°)^2} - \sqrt{(1 + 2\sin 45°)^2}$;
2) $\sqrt{(\operatorname{ctg} 30° - 2)^2} + \sqrt{(\operatorname{tg} 60° - 1)^2}$.

17.36. 1) $\sqrt{(1 - 2\sin 60°)^2} - \sqrt{(1 + 2\cos 30°)^2}$;
2) $\sqrt{(3\operatorname{tg} 30° - 1)^2} + \sqrt{(3\operatorname{ctg} 60° - 2)^2}$.

17.37. Точка P_α одиничного кола має координати $(a;\ b)$. Знайдіть координати точок $P_{-\alpha}$ і $P_{\alpha+180°}$.

Знайдіть координати точок одиничного кола, отриманих при повороті точки $P_0(1;\ 0)$ на кут (**17.38–17.39**):

17.38. 1) $60° + 360°k,\ k \in Z$; 2) $180°k,\ k \in Z$;
3) $135° + 720°k,\ k \in Z$; 4) $-90° + 180°k,\ k \in Z$.

17.39. 1) $120° + 360°k,\ k \in Z$; 2) $90° + 180°k,\ k \in Z$;
3) $720°k,\ k \in Z$; 4) $30° + 1080°k,\ k \in Z$.

17.40. Для табору пластунів потрібно придбати цукор з розрахунку добової норми у 50 г цукру на одну особу. У таборі 4 курені на 28 місць кожен. Скільки кілограмових упаковок цукру знадобиться на 5 днів для всього табору?

17.41. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2 - x} = \sqrt[3]{2x - 3}$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

17.42. Радіус кола дорівнює 1 дм. Знайдіть довжину дуги, що відповідає центральному куту:

1) 30°;	2) 45°;	3) 60°;
4) 90°;	5) 120°;	6) 135°;
7) 150°;	8) 180°;	9) 210°;
10) 235°;	11) 240°;	12) 270°.

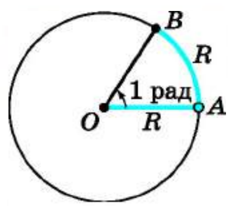
§ 18. РАДІАННЕ ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТУ

Як відомо, кути вимірюють у градусах і його частинах – мінутах, секундах. Проте в математиці, астрономії, фізиці та інших науках використовують ще й *радіанну міру* кута, яка має певні переваги порівняно з градусною.

1. Радіанна міра кута

Кутом в 1 (один) радіан називають центральний кут, довжина дуги якого дорівнює довжині радіуса кола.

На малюнку 18.1 $\overset{\frown}{AB} = R$, тому міра кута AOB дорівнює 1 радіан (скорочено «рад»).



Мал. 18.1

Знайдемо зв'язок між радіанною і градусною мірами. Довжина півкола, радіус якого R, дорівнює πR, що в π разів більше за довжину дуги AB. Тому розгорнутому куту відповідає дуга міри π радіанів. Отже,

$180° = \pi$ рад.

Звідси маємо, що $1° = \frac{\pi}{180}$ рад, тоді $n° = \frac{\pi}{180} \cdot n$ рад;

$1 \text{ рад} = \frac{180°}{\pi}$, тоді α рад $= \frac{180°}{\pi} \cdot \alpha$.

Корисно пам'ятати, що $1 \text{ рад} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°18'$.

Одержані формули, зокрема, використовують для переходу від градусної міри кута до радіанної і навпаки, проте для цього можемо застосовувати і пропорцію, врахувавши, що $180° = \pi$ рад.

Приклад 1. Знайти радіанну міру кута 144°.

Розв'язання. *І спосіб* (за формулою).

$$144° = \frac{\pi}{180°} \cdot 144° = \frac{144\pi}{180} = \frac{4\pi}{5} \text{ (рад).}$$

II спосіб (за допомогою пропорції).

Маємо пропорцію: $180° - \pi$ рад
$144° - x$ рад

Маємо рівняння: $\frac{180}{144} = \frac{\pi}{x}$, звідки $x = \frac{144\pi}{180}$, тобто $x = \frac{4\pi}{5}$ рад.

Відповідь. $\frac{4\pi}{5}$ рад.

Приклад 2. Знайти градусну міру кута 1,5 рад.

Розв'язання. $1{,}5 \text{ рад} = \frac{180°}{\pi} \cdot 1{,}5 = \frac{270°}{\pi} \approx 85°59'$.

Відповідь. $\frac{270°}{\pi} \approx 85°59'$.

Приклад 3. Знайти градусну міру кута $\frac{5\pi}{6}$.

Розв'язання. Виконати це завдання можна у той самий спосіб, що й попереднє, але тут доцільніше буде замінити π на $180°$. Матимемо: $\frac{5\pi}{6} = \frac{5 \cdot 180°}{6} = 150°$.

Відповідь. $150°$.

Приклад 4. Знайдемо радіанні міри табличних кутів:

$30° = \frac{\pi}{180} \cdot 30 = \frac{\pi}{6}$ рад; $45° = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4}$ рад;

$60° = \frac{\pi}{180} \cdot 60 = \frac{\pi}{3}$ рад; $90° = \frac{\pi}{180} \cdot 90 = \frac{\pi}{2}$ рад;

$120° = 2 \cdot 60° = 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ рад; $135° = 3 \cdot 45° = 3 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ рад;

$150° = 5 \cdot 30° = 5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ рад; $270° = 3 \cdot 90° = \frac{3\pi}{2}$ рад;

$360° = 2 \cdot 180° = 2\pi$ рад.

2. Тригонометричні функції числового аргументу

Використовують радіанну міру кута, так само як і градусну, у записах тригонометричних виразів. Так, запис $\sin 2$ означає синус кута, міра якого 2 радіани, запис $\cos\frac{3\pi}{4}$ означає косинус кута міри $\frac{3\pi}{4}$ радіанів, запис $\mathrm{tg}(-3)$ – тангенс кута, міра якого -3 радіани.

Кожному допустимому значенню числа x (кута, що містить x радіанів) відповідає *єдине* значення $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. Тому синус, косинус, тангенс і котангенс є функціями числового аргументу x. Їх називають ***тригонометричними функціями числового аргументу***.

Наприклад, $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Приклад 5. Знайти значення виразу $\cos x + x$, якщо $x = 0$.

Розв'язання. Якщо $x = 0$, то $\cos x + x = \cos 0 + 0 = 1 + 0 = 1$.

Відповідь. 1.

3. Знаходження значень тригонометричних функцій числового аргументу за допомогою калькулятора

Значення тригонометричних функцій числового аргументу за допомогою калькулятора знаходять так само, як і значення тригонометричних функцій кутів, які задано у градусах (§ 17, п. 5). Але у цьому випадку перемикач «Г–Р» для задання кутів у радіанах треба виставити в положення «Р». Нагадаємо, що в деяких калькуляторах це досягається за допомогою клавіші $\boxed{\text{MODE}}$ і вибору відповідного режиму.

Перевірте на своєму калькуляторі, що

$\sin 2 \approx 0{,}9093$; $\cos 30 \approx 0{,}1543$;

$\operatorname{tg}(-2{,}7) \approx 0{,}4727$; $\operatorname{ctg} 2{,}95 \approx -5{,}1554$.

А ще раніше...

Перше використання радіана замість кутового градуса зазвичай приписують Роджеру Котсу (XVII ст.), який вважав цю одиницю вимірювання кутів найбільш природною. Однак ідею вимірювання довжини дуги радіусом кола використовували й інші математики. Наприклад, Аль-Каші використовував одиницю вимірювання, яку називав «частина діаметра» і яка дорівнювала $\frac{1}{60}$ сучасного розуміння радіана. Також він використовував і більш дрібні частини цієї одиниці вимірювання.

Термін «радіан» уперше з'явився 5 червня 1873 року в екзаменаційних білетах, складених Джеймсоном Томсоном з Університету Квінса у Белфасті (Північна Ірландія). Томсон використовував цей термін ще раніше (до видання цих білетів), у той самий час коли його колега Томас Мюїр з Сент-Ендрюського університету коливався у виборі між термінами «рад», «радіал» і «радіан». У 1877 році Мюїр, після консультації з Томсоном, вирішив використовувати термін «радіан».

● Що називають кутом в 1 радіан? ● Яка радіанна міра кута 180°? ● Як перейти від градусної міри до радіанної, і навпаки? Укажіть наближено градусну міру кута в 1 рад? ● Що називають тригонометричною функцією числового аргументу? ● Запам'ятайте радіанні міри табличних кутів.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **Знайдіть радіанну міру кута (18.1–18.2):**

18.1. 1) 20°; 2) 75°; 3) −40°; 4) 720°; 5) −110°; 6) 225°.

18.2. 1) 25°; 2) −30°; 3) 130°; 4) −160°; 5) 50°; 6) 240°.

Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює (18.3–18.4):

18.3. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 3π; 3) $-\frac{3\pi}{4}$; 4) $-\pi$; 5) 0,5; 6) −2.

18.4. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) -2π; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{6}$; 5) 1,5; 6) −3.

2 **Кутом якої чверті є кут (18.5–18.6):**

18.5. 1) $\frac{\pi}{5}$; 2) $\frac{4\pi}{3}$; 3) $-\frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{7\pi}{8}$?

18.6. 1) $\frac{9\pi}{10}$; 2) $-\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{20}$; 4) $\frac{5\pi}{3}$?

18.7. Дах має форму трикутника. Радіанні міри двох кутів цього трикутника дорівнюють $\frac{2\pi}{3}$ і $\frac{\pi}{6}$. Знайдіть радіанну та градусну міри третього кута трикутника.

18.8. Туристичний намет має форму рівнобічної трапеції, один з кутів якої 72°. Знайдіть градусну та радіанну міри більшого з кутів цієї трапеції.

За допомогою калькулятора знайдіть і запишіть число з точністю до сотих (18.9–18.10):

18.9. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{8}$; 3) 2π; 4) $-4{,}5\pi$.

18.10. 1) $-\frac{\pi}{5}$; 2) $\frac{\pi}{10}$; 3) $-1{,}5\pi$; 4) 8π.

Знайдіть за допомогою калькулятора (округліть до тисячних) (18.11–18.12):

18.11. 1) $\sin 1$; 2) $\cos(-2{,}5)$; 3) $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{7}$; 4) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$.

18.12. 1) $\sin(-3)$; 2) $\cos 0{,}8\pi$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{12}\right)$; 4) $\operatorname{ctg} 4{,}2$.

18.13. Накресліть таблицю в зошиті та заповніть її.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$											
$\cos\alpha$											
$\operatorname{tg}\alpha$											
$\operatorname{ctg}\alpha$											

Знайдіть значення виразу (18.14–18.15):

18.14. 1) $4\sin\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}$;

3) $2\cos\pi - \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}$; 4) $2\cos\frac{2\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$.

18.15. 1) $2\cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; 2) $\sin\pi + \cos 2\pi$;

3) $\sin\frac{3\pi}{2} - \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$; 4) $4\sin\frac{5\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$.

Позначте на одиничному колі точку, яку отримаємо при повороті точки $P_0(1;\ 0)$ на кут (18.16–18.17):

18.16. 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $-\frac{3\pi}{4}$; 3) 2π; 4) $-\pi$;

5) $-\frac{\pi}{3}$; 6) $\frac{\pi}{2}$; 7) $\frac{2\pi}{3}$; 8) 3π.

18.17. 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $-\frac{5\pi}{6}$; 3) 4π; 4) $\frac{4\pi}{3}$.

18.18. Знайдіть значення виразу $3\sin\alpha + 2\cos\alpha$, якщо:

1) $\alpha = 0$; 2) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; 3) $\alpha = \pi$; 4) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

18.19. Знайдіть значення виразу $5\cos b - 2\sin b$, якщо:

1) $\beta = 0$; 2) $\beta = \frac{\pi}{2}$; 3) $\beta = \pi$; 4) $\beta = \frac{3\pi}{2}$.

3 **18.20.** Знайдіть радіанну міру внутрішнього кута правильного:

1) трикутника; 2) чотирикутника;
3) шестикутника; 4) десятикутника;
5) дванадцятикутника; 6) двадцятикутника.

18.21. Знайдіть радіанну міру кутів трикутника, якщо їх міри відносяться як 1 : 4 : 5.

Порівняйте числа (18.22–18.23):

18.22. 1) $\frac{\pi}{2}$ і 1,6; 2) π і $3\frac{1}{8}$; 3) $-\frac{3\pi}{2}$ і -5; 4) -2π і -6.

18.23. 1) $-\frac{\pi}{2}$ і $-1{,}5$; 2) 2π і 6,3; 3) $-\pi$ і $-3{,}2$; 4) $\frac{3\pi}{2}$ і 4,5.

Обчисліть (18.24–18.25):

18.24. 1) $5\cos^2\frac{\pi}{3} - 2\sin^2\frac{\pi}{6}$; 2) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} + \sin\frac{5\pi}{6}\right)^2$;

3) $\left(\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}\right)^2 - \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$; 4) $\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}$.

18.25. 1) $4\cos^2\frac{\pi}{6} + 8\sin^2\frac{\pi}{3}$; 2) $\left(\cos\frac{2\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}\right)^2$;

3) $\left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{6}\right)^2 - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$; 4) $\cos^2\frac{3\pi}{4} + \sin^2\frac{3\pi}{4} - \operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{4}$.

Знайдіть значення виразу (18.26–18.27):

18.26. 1) $\sin2\alpha - 4\cos\alpha$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \pi$;

2) $4\sin\alpha + 2\cos3\alpha$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}$.

18.27. 1) $2\cos2\alpha + \sin\alpha$, якщо $\alpha = 0; \frac{\pi}{6}; \pi$;

2) $3\cos\alpha - \sin3\alpha$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$.

Які координати має точка одиничного кола, отримана при повороті точки $P_0(1; 0)$ на кут (18.28–18.29):

18.28. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $-\frac{3\pi}{2}$?

18.29. 1) $\frac{5\pi}{6}$; 2) $-\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$?

18.30. Скільки сторін має правильний многокутник, якщо його:

1) внутрішній кут дорівнює $\frac{3\pi}{4}$;

2) зовнішній кут дорівнює $\frac{\pi}{8}$?

Знайдіть значення виразу (18.31–18.32):

18.31. 1) $\dfrac{\sin2\alpha + \cos2\alpha}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) + 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

2) $\dfrac{4\cos(\alpha+\beta) - 3\sin(\alpha-\beta)}{6\sin(\alpha+\beta)}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{3}$; $\beta = \frac{\pi}{6}$.

18.32. 1) $\dfrac{\sqrt{3}\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{12}\right) + 2\sin\alpha}$, якщо $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{2\sin(\alpha - \beta) + 4\cos(\alpha + \beta)}$, якщо $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$; $\beta = \dfrac{\pi}{6}$.

4 **Порівняйте (18.33–18.34):**

18.33. 1) $\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3} + \operatorname{ctg}\dfrac{2\pi}{3}$ і -2; 2) $\sin\dfrac{2\pi}{3} - \cos\dfrac{5\pi}{6}$ і $\sqrt[3]{4}$.

18.34. 1) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}$ і 2; 2) $2\cos\dfrac{3\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{4}$ і $-\sqrt[5]{5}$.

18.35. Доведіть, що $\sin\dfrac{\pi}{3}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6} = \operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{3}\left(1 - \cos^2\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

18.36. Доведіть, що $\cos\dfrac{\pi}{6}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} - 1 = \operatorname{ctg}^2\dfrac{\pi}{3}\left(1 + \sin^2\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Знайдіть координати точки одиничного кола, отриманої при повороті точки $P_0(1; 0)$ на кут (18.37–18.38):

18.37. 1) $2\pi k,\ k \in Z$; 2) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$;

3) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$; 4) $\dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z$.

18.38. 1) $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$; 2) $\pi k,\ k \in Z$.

18.39. Сплативши від заробітної плати 18 % податку на доходи фізичних осіб і 1,5 % військового збору, менеджер супермаркету отримав 5635 грн. Який розмір заробітної плати у цього менеджера?

18.40. Знайдіть найменше значення функції
$$y = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4).$$

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

18.41. Наведіть приклади кількох значень:

1) кута α, для яких $\operatorname{tg}\alpha$ не існує.
2) кута β, для яких $\operatorname{ctg}\beta$ не існує.

18.42. Нехай $A(x; y)$ – довільна точка, що належить одиничному колу. Чи правильні нерівності $-1 \leqslant x \leqslant 1$; $-1 \leqslant y \leqslant 1$?

18.43. Порівняйте з нулем координати x і y точки $B(x; y)$, якщо ця точка лежить у:

1) I чверті; 2) II чверті;
3) III чверті; 4) IV чверті.

18.44. Точки A і A' симетричні відносно осі абсцис. Знайдіть координати точки A', якщо:

1) $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

18.45. Парною чи непарною є функція:

1) $y = x^4$; 2) $y = x^3$;

3) $y = 7x - x^5$; 4) $y = \frac{1}{|x| - 1}$?

§ 19. ВЛАСТИВОСТІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо властивості тригонометричних функцій, які безпосередньо випливають з їх означень.

1. Область визначення тригонометричних функцій

Як ми вже зазначали раніше, вирази $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ мають зміст для будь-якого кута α (§ 17, п. 3). Так само мають зміст вирази $\sin x$ і $\cos x$ для будь-якого числа x (кута x у радіанах). Отже,

! **областю визначення функцій синуса і косинуса є множина всіх дійсних чисел.**

Це можна записати так:
$D(\sin x) = D(\cos x) = (-\infty; +\infty)$, або $D(\sin x) = D(\cos x) = R$.

Вираз $\mathrm{tg}\,\alpha$ має зміст для будь-яких кутів α, крім $\pm 90°$, $\pm 270°$, $\pm 450°$, ..., тобто крім кутів, які можна задати формулою $90° + 180°k$, де $k \in Z$. Тому вираз $\mathrm{tg}\,x$ не має змісту для чисел (кутів у радіанах) вигляду $\frac{\pi}{2} + \pi k$, де $k \in Z$.

! **Областю визначення функції тангенса є множина всіх дійсних чисел, крім чисел $\frac{\pi}{2} + \pi k$, де $k \in Z$.**

Вираз $\mathrm{ctg}\,\alpha$ має зміст для всіх кутів α, крім кутів $0°$, $\pm 180°$, $\pm 360°$, ..., тобто кутів, які можна задати формулою $180°k$, де $k \in Z$. Тому вираз $\mathrm{ctg}\,x$ не має змісту для чисел (кутів у радіанах) вигляду πk, де $k \in Z$.

! **Областю визначення функції котангенса є множина всіх дійсних чисел, крім чисел πk, де $k \in Z$.**

Приклад 1. Знайти область визначення функції $y = \mathrm{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо значення x, для яких котангенс не існує, розв'язавши рівняння: $2x - \frac{\pi}{4} = \pi k$.

Далі маємо: $2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, де $k \in Z$.

Отже, областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, крім чисел $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. Скорочено це можна записати так: $x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Відповідь. $x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

2. Множина значень тригонометричних функцій

Синус і косинус кута α є відповідно ординатою та абсцисою точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола (див. § 17, п. 3). Тому ординати і абсциси точок одиничного кола набувають усіх значень від -1 до 1. Отже,

множиною значень функцій синуса і косинуса є проміжок $[-1; 1]$.

Такий самий проміжок $[-1; 1]$ є множиною значень і для випадку синуса і косинуса числового аргументу x (кута x у радіанах). Отже,

$$E(\sin x) = E(\cos x) = [-1; 1].$$

Розглянемо кілька вправ на використання встановлених фактів.

Приклад 2. Чи існують значення x, при яких справджується рівність: 1) $\cos x = -\frac{5}{6}$; 2) $\sin x = \sqrt{2}$?

Розв'язання. 1) Оскільки $-1 \leqslant -\frac{5}{6} \leqslant 1$, то значення x, при якому $\cos x = -\frac{5}{6}$, існує. 2) Оскільки $\sqrt{2} > 1$, то не існує значення x, при якому $\sin x = \sqrt{2}$.

Відповідь. 1) Так; 2) ні.

Приклад 3. Знайти множину значень функції:

1) $y = \sin x + 2$; 2) $y = \cos^2 x - 3$; 3) $y = \frac{15}{4 + \cos x}$.

Розв'язання. 1) Маємо: $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$;
$-1 + 2 \leqslant \sin x + 2 \leqslant 1 + 2$ (додали до усіх частин число 2);
$1 \leqslant \sin x + 2 \leqslant 3$.
Отже, $E(y) = [1; 3]$.

2) Зрозуміло, що $\cos^2 x \geqslant 0$, з іншого боку, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, тому $\cos^2 x \leqslant 1$. Отже, $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$;
$0 - 3 \leqslant \cos^2 x - 3 \leqslant 1 - 3$ (відняли від усіх частин число 3);
$-3 \leqslant \cos^2 x - 3 \leqslant -2$.

Отже, $E(y) = [-3; -2]$.

3) Оскільки $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, маємо: $3 \leqslant 4 + \cos x \leqslant 5$. Тоді $\frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{4+\cos x} \geqslant \frac{1}{5}$ (порівняли обернені вирази), тобто $\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{4+\cos x} \leqslant \frac{1}{3}$;

маємо: $3 \leqslant \frac{15}{4+\cos x} \leqslant 5$ (помножили усі частини на 15).

Отже, $E(y) = [3; 5]$.

Відповідь. 1) $[1; 3]$; 2) $[-3; -2]$; 3) $[3; 5]$.

Приклад 4. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $a(2 - \sin x)^4 - 12 + \cos^2 x + 3a > 0$ є правильною для будь-якого значення x.

Розв'язання. Зауважимо, що вирази $(2 - \sin x)^4$ і $\cos^2 x$ набувають найменших значень, коли $\sin x = 1$, а $\cos x = 0$, тобто, наприклад, для значення $x = \frac{\pi}{2}$.

Оскільки нерівність має бути правильною для будь-якого значення x, то має бути правильною і для $x = \frac{\pi}{2}$. Підставимо в нерівність замість x число $\frac{\pi}{2}$, матимемо правильну нерівність: $a\left(2-\sin\frac{\pi}{2}\right)^4 - 12 + \cos^2\frac{\pi}{2} + 3a > 0$, а після спрощень: $4a - 12 > 0$, отже, $a > 3$. Таким чином, усі значення a, що задовольняють умову задачі, належать проміжку $(3; +\infty)$.

Перевіримо, чи всі значення a з отриманого проміжку задовольняють умову задачі.

Нехай $a > 3$. Для будь-якого x справджуються нерівності: $2 - \sin x \geqslant 1$; $(2 - \sin x)^4 \geqslant 1$ та $\cos^2 x \geqslant 0$. Оскільки $a > 3$, то, очевидно, що $a > 0$. Враховуючи ці співвідношення в початковій нерівності, матимемо: $a(2 - \sin x)^4 - 12 + \cos^2 x + 3a \geqslant a - 12 + 0 + 3a = 4a - 12 = 4(a - 3) > 0$.

Отже, умову задачі задовольняють усі значення a, такі, що $a > 3$.

Відповідь. $a > 3$.

Множину значень тангенса знайдемо за допомогою графічної інтерпретації.

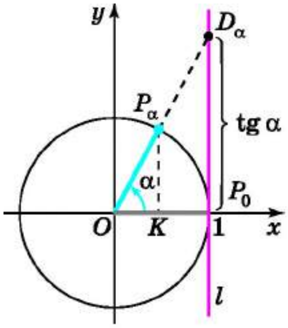
Розглянемо пряму l, що проходить через точку $(1; 0)$ перпендикулярно до осі абсцис. Вона є дотичною до одиничного кола (мал. 19.1). Нехай при повороті на кут α початковий радіус OP_0 одиничного кола переходить у радіус OP_α, а пряма OP_α перетинає пряму l у точці D_α. Нехай $P_\alpha(x; y)$, тому $x = \cos\alpha$; $y = \sin\alpha$. Проведемо перпендикуляр $P_\alpha K$ на вісь абсцис.

Тоді $\triangle OP_\alpha K \backsim \triangle OD_\alpha P_0$, тому $\frac{P_\alpha K}{OK} = \frac{D_\alpha P_0}{OP_0}$, тобто $\frac{y}{x} = \frac{T_\alpha P_0}{1}$, отже, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = D_\alpha P_0$ і тому $D_\alpha P_0 = \operatorname{tg}\alpha$. Отже, *ордината точки D_α дорівнює тангенсу α.*

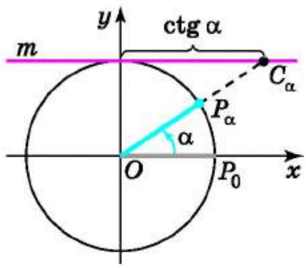
Пряму, яка проходить через точку (1; 0) перпендикулярно до осі абсцис, називають *лінією тангенсів.*

У разі зміни положення точки P_α на одиничному колі буде змінюватися і положення точки D_α (мал. 19.1). Геометрична інтерпретація показує, що ордината точки D_α може набувати будь-яких значень. Отже, множиною значень тангенса є множина всіх дійсних чисел.

У той самий спосіб визначимо і множину значень котангенса.



Мал. 19.1



Мал. 19.2

Пряму m, яка проходить через точку (0; 1) перпендикулярно до осі ординат, називають *лінією котангенсів* (мал. 19.2). Можна довести, що абсциса точки C_α перетину прямої OP_α з лінією котангенсів дорівнює котангенсу α.

За малюнком 19.2 зрозуміло, що абсциса точки C_α може набувати будь-яких значень, тому множиною значень котангенса є множина всіх дійсних чисел.

Отже,

множиною значень функцій тангенса і котангенса є множина всіх дійсних чисел: $E(\operatorname{tg} x) = E(\operatorname{ctg} x) = R$.

3. Знаки тригонометричних функцій

Синус кута α є ординатою точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола. У I та II чвертях $y > 0$, а у III та IV чвертях $y < 0$. Тому:

- $\sin\alpha > 0$, якщо α – кут I або II чверті,
- $\sin\alpha < 0$, якщо α – кут III або IV чверті.

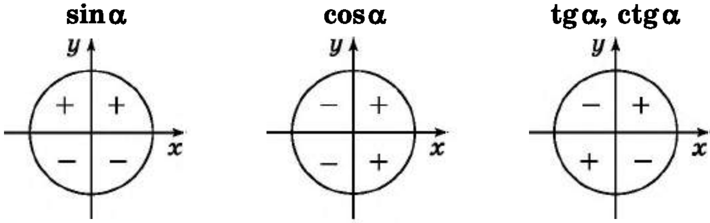
Косинус кута α є абсцисою точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола. У I та IV чвертях $x > 0$, а у II та III чвертях $x < 0$. Тому:

- $\cos\alpha > 0$, якщо α – кут I або IV чверті,
- $\cos\alpha < 0$, якщо α – кут II або III чверті.

Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, а $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ залежать від знаків $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$. У I та III чвертях $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ мають однакові знаки, а у II та IV чвертях – різні. Тому:

- $\operatorname{tg}\alpha > 0$ і $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, якщо α – кут I або III чверті;
- $\operatorname{tg}\alpha < 0$ і $\operatorname{ctg}\alpha < 0$, якщо α – кут II або IV чверті.

Висновки щодо знаків тригонометричних функцій кутів зручно запам'ятати за малюнком 19.3.



Мал. 19.3

Приклад 5. Порівняти з нулем числа:

1) $\sin 152°$; 2) $\cos(-12°)$; 3) $\operatorname{tg}(-125°)$; 4) $\operatorname{ctg} 2$.

Розв'язання.

1) Оскільки $152°$ – кут II чверті, то $\sin 152° > 0$;

2) $-12°$ – кут IV чверті, тому $\cos(-12°) > 0$;

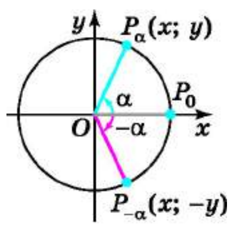
3) $-125°$ – кут III чверті, тому $\operatorname{tg}(-125°) > 0$;

4) 2 радіани $\approx 2 \cdot 57° = 114°$, тоді 2 радіани – кут II чверті; тому $\operatorname{ctg} 2 < 0$.

Відповідь. 1) $\sin 152° > 0$; 2) $\cos(-12°) > 0$; 3) $\operatorname{tg}(-125°) > 0$; 4) $\operatorname{ctg} 2 < 0$.

4. Парність і непарність тригонометричних функцій

Нехай при повороті на кут α початковий радіус OP_0 одиничного кола переходить у радіус OP_α, а при повороті на кут $-\alpha$ – у радіус $OP_{-\alpha}$ (мал. 19.4). Точки P_α і $P_{-\alpha}$ – симетричні відносно осі абсцис, тому вони мають однакові абсциси і протилежні ординати. Маємо:



Мал. 19.4

$\cos\alpha = x$ і $\cos(-\alpha) = x$, тому $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;

$\sin\alpha = y$ і $\sin(-\alpha) = -y$, тому $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, тому

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha;$$

Отже,

косинус – парна функція; синус, тангенс і котангенс – непарні функції, тобто:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha; \qquad \mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha;$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \qquad \mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Ці формули допомагають обчислювати значення тригонометричних виразів. Наприклад,

1) $\cos(-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2}$;

3) $\mathrm{tg}(-180°) = -\mathrm{tg}\,180° = 0$; 4) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} = -1$.

5. Періодичність тригонометричних функцій

Якщо при повороті на кут α початковий радіус OP_0 одиничного кола переходить у радіус OP_α (мал. 19.4), то цей самий радіус OP_α отримаємо і при повороті радіуса OP_0 на кут, відмінний від α на повний оберт або будь-яку кількість повних обертів, тобто на число $360°k$ (або $2\pi k$), де $k \in Z$. Маємо, що

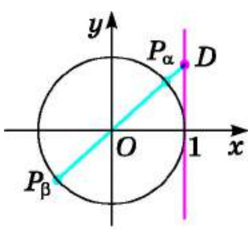
при зміні кута на ціле число повних обертів значення тригонометричних функцій не змінюються:

$\sin(\alpha + 360°k) = \sin\alpha$ **або** $\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha$

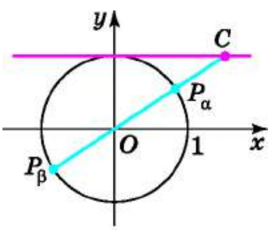
$\cos(\alpha + 360°k) = \cos\alpha$ **або** $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$.

Отже, значення тригонометричних функцій синус і косинус не змінюються, якщо до їх аргументів додати (або відняти) число, кратне числу 2π. Кожне таке число для синуса і косинуса є періодом, а 2π – найменшим періодом. Функції, що мають таку властивість, називають ***періодичними***.

Число 2π також є періодом функцій тангенс і котангенс, проте для цих функцій можна знайти і менший період. Розглянемо точки O, P_α та P_β, які лежать на одній прямій (мал. 19.5). Тоді прямі OP_α і OP_β збігаються, а тому перетинають вісь тангенсів в одній і тій самій точці D.



Мал. 19.5



Мал. 19.6

Аналогічно, прямі OP_α і OP_β перетинають вісь котангенсів в одній і тій самій точці C (мал. 19.6). Отже, якщо $k \in Z$, то

при зміні кута на ціле число півобертів (π; 2π; 3π; 4π; ...) значення функцій тангенса і котангенса не змінюються:

$\mathrm{tg}(\alpha + 180°k) = \mathrm{tg}\,\alpha$; **або** $\mathrm{tg}(\alpha + \pi k) = \mathrm{tg}\,\alpha$;

$\mathrm{ctg}(\alpha + 180°k) = \mathrm{ctg}\,\alpha$; **або** $\mathrm{ctg}(\alpha + \pi k) = \mathrm{ctg}\,\alpha$.

Виходячи з періодичності, знаходження значень синуса і косинуса будь-якого кута можна звести до знаходження значення цієї ж функції невід'ємного кута, меншого від 360° (або від 2π), а значень тангенса і котангенса будь-якого кута – до знаходження значення цієї ж функції невід'ємного кута, меншого від 180° (або від π).

Приклад 6. Обчислити: 1) $\sin 780°$; 2) $\mathrm{tg}\left(-\frac{14\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. 1) *1-й спосіб.* Подамо градусну міру кута 780° у вигляді $\alpha + 360°k$, де $k \in Z$, та застосуємо формулу $\sin(\alpha + 360°k) = \sin\alpha$. Маємо:

$$\sin 780° = \sin(60° + 2 \cdot 360°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2-й спосіб. Від 780° віднімемо два періоди по 360°. Маємо:

$$\sin 780° = \sin(780° - 2 \cdot 360°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) Ураховуючи, що період тангенса дорівнює π, матимемо:

1-й спосіб: $\mathrm{tg}\left(-\frac{14\pi}{3}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 5\pi\right) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$

2-й спосіб: $\mathrm{tg}\left(-\frac{14\pi}{3}\right) = \mathrm{tg}\left(-\frac{14\pi}{3} + 5\pi\right) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$

Відповідь. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sqrt{3}$.

Інколи шукати значення тригонометричної функції деякого кута за допомогою періодичності доцільніше через значення цієї функції від'ємного кута, який лежить в межах від −180° до 0° (або від $-\pi$ до 0), а далі застосувати парність або непарність відповідної тригонометричної функції.

Наприклад,

$$\cos 330° = \cos(330° - 360°) = \cos(-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\mathrm{ctg}\frac{13\pi}{4} = \mathrm{ctg}\left(\frac{13\pi}{4} - 4 \cdot \pi\right) = \mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{4} = -(-1) = 1.$$

- Назвіть область визначення функцій синуса, косинуса, тангенса і котангенса. - Назвіть множину значень функцій синуса, косинуса, тангенса і котангенса. - Які знаки мають тригонометричні функції в кожній із координатних чвертей? - Назвіть тригонометричні функції, що є парними; непарними. Запишіть відповідні рівності. - Поясніть, у чому полягає періодичність тригонометричних функцій.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

19.1. (Усно.) Чи існує таке значення x, для якого справджується рівність:

1) $\sin x = 0{,}3$; 2) $\cos x = 1{,}2$; 3) $\sin x = -1{,}8$;

4) $\cos x = -\frac{7}{8}$; 5) $\operatorname{tg} x = 12$; 6) $\operatorname{ctg} x = -14$?

19.2. Чи існує таке значення α, для якого справджується рівність:

1) $\sin\alpha = 1\frac{7}{9}$; 2) $\cos\alpha = 0{,}33$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = -4{,}7$;

4) $\cos\alpha = -1{,}8$; 5) $\sin\alpha = \frac{1}{19}$; 6) $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}18$?

Який знак має (19.3–19.4):

19.3. 1) $\sin\alpha$, якщо $\alpha = 13°; 115°; 215°; 288°$;
2) $\cos\alpha$, якщо $\alpha = 83°; 132°; 193°; 315°$;
3) $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\alpha = 37°; 158°; 235°; 328°$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\alpha = 42°; 173°; 217°; 359°$?

19.4. 1) $\sin\beta$, якщо $\beta = 57°; 123°; 240°; 329°$;
2) $\cos\beta$, якщо $\beta = 32°; 142°; 215°; 278°$;
3) $\operatorname{tg}\beta$, якщо $\beta = 12°; 137°; 189°; 280°$;
4) $\operatorname{ctg}\beta$, якщо $\beta = 68°; 163°; 237°; 342°$?

Закінчіть обчислення (19.5–19.6):

19.5. 1) $\sin 750° = \sin(30° + 360° \cdot 2) = \sin 30° = ...$;
2) $\cos 405° = \cos(405° - 360°) = ...$;
3) $\operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg}(60° + 180°) = ...$;
4) $\operatorname{ctg}(-510°) = \operatorname{ctg}(-510° + 180° \cdot 3) = ...$.

19.6. 1) $\cos 720° = \cos(0° + 360° \cdot 2) = \cos 0° = ...$;
2) $\sin 420° = \sin(420° - 360°) = ...$;
3) $\operatorname{ctg} 600° = \operatorname{ctg}(60° + 180° \cdot 3) = ...$;
4) $\operatorname{tg}(-330°) = \operatorname{tg}(-330° + 180° \cdot 2) = ...$

Обчисліть (19.7–19.8):

19.7. 1) $\cos(-60°)$; 2) $\sin(-90°)$; 3) $\operatorname{ctg}(-45°)$;

4) $\operatorname{tg}(-60°)$; 5) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

19.8. 1) $\cos(-45°)$; 2) $\sin(-60°)$; 3) $\operatorname{ctg}(-30°)$;

4) $\operatorname{tg}(-45°)$; 5) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; 6) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

2

Порівняйте вираз з нулем (19.9–19.10):

19.9. 1) $\sin(-12°)$; 2) $\cos(-88°)$; 3) $\operatorname{tg}(-115°)$; 4) $\operatorname{ctg}(-97°)$;

5) $\cos\frac{\pi}{8}$; 6) $\sin\left(-\frac{11\pi}{10}\right)$; 7) $\operatorname{tg}\frac{23\pi}{20}$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{9}\right)$.

19.10. 1) $\sin(-112°)$; 2) $\cos(-139°)$; 3) $\mathrm{tg}(-13°)$;

4) $\mathrm{ctg}(-46°)$; 5) $\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$; 6) $\sin\frac{13\pi}{12}$;

7) $\mathrm{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$; 8) $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{7}$.

З'ясуйте знак виразу (19.11–19.12):

19.11. 1) $\sin 92°\cos 193°$; 2) $\sin 342°\mathrm{tg}\,310°$;

3) $\frac{\cos 263°}{\mathrm{ctg}\,127°}$; 4) $\frac{\mathrm{tg}\,85°}{\mathrm{ctg}\,191°}$.

19.12. 1) $\cos 15°\sin 207°$; 2) $\cos 107°\mathrm{ctg}\,89°$;
3) $\mathrm{tg}\,113°\sin 1°$; 4) $\mathrm{tg}\,195°\mathrm{ctg}\,279°$.

19.13. Чи можна стверджувати, що $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ є значенням:

1) $\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $\mathrm{tg}\,\alpha$; 4) $\mathrm{ctg}\,\alpha$?

19.14. Чи можна стверджувати, що $\frac{\sqrt{13}}{4}$ є значенням:

1) $\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $\mathrm{tg}\,\alpha$; 4) $\mathrm{ctg}\,\alpha$?

Знайдіть значення виразу (19.15–19.16):

19.15. 1) $\cos 390°$; 2) $\sin 405°$; 3) $\mathrm{ctg}\,420°$;
4) $\mathrm{tg}\,750°$; 5) $\sin 720°$; 6) $\cos 780°$;
7) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{4}$; 8) $\sin\frac{13\pi}{6}$; 9) $\cos\frac{17\pi}{4}$;
10) $\mathrm{ctg}\frac{11\pi}{6}$; 11) $\cos(-780°)$; 12) $\sin(-6\pi)$.

19.16. 1) $\cos 420°$; 2) $\sin 390°$; 3) $\mathrm{ctg}\,405°$;
4) $\mathrm{tg}\,390°$; 5) $\cos 750°$; 6) $\sin 765°$;
7) $\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{6}$; 8) $\sin\frac{9\pi}{4}$; 9) $\mathrm{tg}\frac{10\pi}{3}$;
10) $\cos\frac{7\pi}{4}$; 11) $\mathrm{tg}(-210°)$; 12) $\cos(-5\pi)$.

19.17. Доведіть, що функція є парною:
1) $f(x) = 3 + \cos x$; 2) $f(x) = x\sin x$.

19.18. Доведіть, що функція є непарною:
1) $f(x) = x\cos x$; 2) $f(x) = x + \sin x$.

19.19. Доведіть, що функція:
1) $f(x) = x^2\cos x$ – парна; 2) $f(x) = x^3 - \sin x$ – непарна.

Знайдіть найменше і найбільше значення виразу (19.20–19.21):

19.20. 1) $1 + \sin\alpha$; 2) $2 - \cos\alpha$; 3) $4 + \sin^2\alpha$; 4) $\cos^2\alpha - 3$.

19.21. 1) $\cos\alpha - 3$; 2) $\sin\alpha - 1$; 3) $\cos^2\alpha + 1$; 4) $2 - \sin^2\alpha$.

19.22. Чи існує таке значення α, для якого:
1) $\cos\alpha = \cos 60° + \cos 45°$; 2) $\sin\alpha = \sin 30° - \sin 45°$?

3 **19.23.** Кутом якої чверті є кут β, якщо:

1) $\sin\beta < 0$ і $\cos\beta > 0$; 2) $\sin\beta > 0$ і $\operatorname{tg}\beta < 0$;
3) $\cos\beta < 0$ і $\operatorname{ctg}\beta > 0$; 4) $\operatorname{tg}\beta < 0$ і $\cos\beta > 0$?

19.24. Кутом якої чверті є кут α, якщо:

1) $\cos\alpha < 0$ і $\sin\alpha > 0$; 2) $\cos\alpha > 0$ і $\operatorname{ctg}\alpha > 0$;
3) $\sin\alpha < 0$ і $\operatorname{tg}\alpha > 0$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha < 0$ і $\sin\alpha < 0$?

Обчисліть (19.25–19.26):

19.25. 1) $\sin(-60°) + \cos(-30°) - 2\operatorname{ctg}(-60°)\operatorname{tg}(-30°)$;

2) $6\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos(-\pi) - 4\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

19.26. 1) $\cos(-45°) + \sin(-45°) + 6\cos(-60°) - 3\sin(-30°)$;

2) $4\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 5\sin(-\pi) + 2\sqrt{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Знайдіть область визначення функції (19.27–19.28):

19.27. 1) $y = \operatorname{ctg} 2x$; 2) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

19.28. 1) $y = \operatorname{tg} 4x$; 2) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Знайдіть множину значень функції (19.29–19.30):

19.29. 1) $y = 4\sin x - 3$; 2) $y = 2 - 3\cos x$;

3) $y = \frac{6}{2 - |\sin x|}$; 4) $y = \frac{3}{1 + \cos x}$.

19.30. 1) $y = 2\cos x + 7$; 2) $y = 4 - 5\sin x$;

3) $y = \frac{4}{3 + \cos x}$; 4) $y = \frac{6}{|\cos x|}$.

Дослідіть функцію на парність і непарність (19.31–19.32):

19.31. 1) $f(x) = x + \cos x$; 2) $f(x) = x^5 + \sin x$;

3) $g(x) = x^3\operatorname{tg} x$; 4) $g(x) = \frac{\operatorname{ctg} x + x^3}{x}$.

19.32. 1) $f(x) = x^2 + \cos x$; 2) $f(x) = \sin x + x^4$;

3) $g(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$; 4) $g(x) = \frac{\cos x - x^4}{x^2}$.

19.33. Відомо, що β – кут II чверті. Спростіть вираз:

1) $|\sin\beta| - \sin\beta$; 2) $\cos\beta - |\cos\beta|$;
3) $|\operatorname{tg}\beta| + \operatorname{tg}\beta$; 4) $2|\operatorname{ctg}\beta| - \operatorname{ctg}\beta$.

19.34. Відомо, що x – кут III чверті. Спростіть вираз:

1) $\cos x + |\cos x|$; 2) $\sin x - |\sin x|$;
3) $|\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x$; 4) $3|\operatorname{ctg} x| - 2\operatorname{ctg} x$.

19.35. При яких значеннях b для деякого кута x можлива рівність:

1) $\sin x = \sqrt{b}$; 2) $\cos x = \dfrac{1}{b}$?

19.36. При яких значеннях a для деякого кута x можлива рівність:

1) $\cos x = a^2$; 2) $\sin x = \sqrt{a-1}$?

4 **19.37.** Кутом якої чверті може бути кут x, якщо:

1) $\sin x \cos x > 0$; 2) $\cos x \operatorname{ctg} x < 0$;

3) $|\cos x| = \cos x$; 4) $|\operatorname{ctg} x| = -\operatorname{ctg} x$?

19.38. Кутом якої чверті може бути кут α, якщо:

1) $\sin\alpha\cos\alpha < 0$; 2) $\sin\alpha \operatorname{tg}\alpha > 0$;

3) $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$; 4) $|\operatorname{tg}\alpha| = \operatorname{tg}\alpha$?

Знайдіть найбільше і найменше значення виразу (19.39–19.40):

19.39. 1) $\dfrac{\sin^5 x}{\sin x}$; 2) $\dfrac{\cos x(3+\sin x)}{\cos x}$.

19.40. 1) $\dfrac{\cos^3 x}{\cos x}$; 2) $\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{\sin x}$.

19.41. Знайдіть множину значень функції $f(x) = \dfrac{3}{2\sin x - 1}$.

19.42. Знайдіть множину значень виразу $\dfrac{8}{1-3\cos x}$.

19.43. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $\sin^2 x + 2 - 4a + a(3 - \cos^2 x) < 0$ є правильною для будь-якого значення x.

19.44. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $4a - 5 + \sin^2 x + a(2 - \cos x)^3 < 0$ є правильною для будь-якого значення x.

19.45. Знайдіть множину всіх пар чисел $(x;\ y)$, для кожної з яких при будь-якому α справджується рівність

$$x(\cos\alpha - 1) + y^2 = \cos(x\alpha + y^2) - 1.$$

Знайдіть найменше значення функції (19.46–19.47):

19.46. $f(x) = \sin x + 4x + \dfrac{9\pi^2}{x}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$.

19.47. $f(x) = \cos x + 2x + \dfrac{18\pi^2}{x}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$.

19.48. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $\sqrt{1 + a + \sqrt{a + 2\sin^2 x}} = 2\sin^2 x - 1$ має розв'язки.

19.49. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $\sqrt{a + \sqrt{a + \cos x}} = \cos x$ має розв'язки.

19.50. Знайдіть усі значення параметра a, при якому нерівність $\frac{\sqrt{a}}{x^2-2x+1}+a\sqrt{a}(x^2-2x+1)\leqslant\sqrt[4]{a^3}\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$ має хоча б один розв'язок.

19.51. Залежність обсягу попиту q (одиниць на місяць) на продукцію підприємства-монополіста від ціни p (тис. грн) задається формулою $q = 50 - 5p$. Виручка підприємства за місяць r (у тис. грн) обчислюється за формулою $r(p) = qp$. Визначте найбільшу ціну p, при якій виручка $r(p)$ складе не менше 120 тис. грн на місяць.

19.52. (*Національна олімпіада Великої Британії*). Функція $f(x)$ тотожно не дорівнює нулю. Нехай $f(x)\cdot f(y) = f(x-y)$ для всіх можливих значень x і y. Знайдіть $f(x)$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

19.53. На колі $x^2 + y^2 = 1$ знайдіть точки:

1) з абсцисою $-\frac{1}{2}$; 2) з ординатою $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

19.54. Знайдіть точку, що належить колу $x^2 + y^2 = 1$ та має:

1) абсцису $\frac{\sqrt{2}}{2}$ і розміщена в IV чверті;

2) ординату $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ і розміщена у III чверті.

§ 20. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ ОДНОГО Й ТОГО САМОГО АРГУМЕНТУ

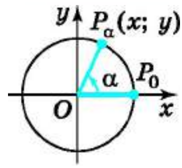
У цьому параграфі розглянемо тотожності, що задають співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу.

1. Основна тригонометрична тотожність

Нехай при повороті на кут α початковий радіус OP_0 одиничного кола переходить у радіус OP_α (мал. 20.1). Точка $P_\alpha(x; y)$ належить колу, радіус якого дорівнює 1. Тому координати точки задовольняють рівняння кола: $x^2 + y^2 = 1$. Але $x = \cos\alpha$; $y = \sin\alpha$, тому

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Це співвідношення називають *основною тригонометричною тотожністю*. Вона задає залежність між значеннями синуса і косинуса одного й того самого кута, отже, дає можливість знаходити одне з цих значень через інше. Покажемо це на схемі:



Мал. 20.1

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha} \arrow[r] & \boxed{\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \\
\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & \boxed{\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha} \arrow[r] & \boxed{\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}
\end{tikzcd}$$

У формулах $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ і $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ знак перед радикалом обираємо залежно від чверті, у якій лежить кут α.

Приклад 1. Спростити вираз:

1) $(1 - \sin x)(1 + \sin x)$; 2) $\dfrac{\cos^2 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha}$.

Р о з в ' я з а н н я.

1) $(1 - \sin x)(1 + \sin x) = 1^2 - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$.

2) $\dfrac{\cos^2 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha} = \dfrac{-(1-\cos^2 2\alpha)}{\sin 2\alpha} = \dfrac{-\sin^2 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -\sin 2\alpha$.

В і д п о в і д ь. 1) $\cos^2 x$; 2) $-\sin 2\alpha$.

Приклад 2. Знайти $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = -0{,}6$ і $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки α – кут II чверті, то $\sin\alpha > 0$. Маємо:

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-(-0{,}6)^2} = \sqrt{1-0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

В і д п о в і д ь. 0,8.

2. Інші тригонометричні тотожності

Ми вже знаємо, що

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ (якщо } \cos\alpha \neq 0\text{) і}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \text{ (якщо } \sin\alpha \neq 0\text{).}$$

Перемножимо ці рівності почленно:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1.$$

Отже,

! $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1$ (якщо $\cos\alpha \neq 0$, $\sin\alpha \neq 0$).

Ця рівність справджується для всіх значень α, при яких $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ мають зміст, тобто за умови, що $\sin\alpha \neq 0$ і $\cos\alpha \neq 0$. Тоді:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \text{ і } \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Приклад 3. Довести тотожність:

1) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin(-\alpha)} + \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$.

Доведення. Перетворимо ліву частину кожної з тотожностей:

1) $$\frac{\cos\alpha}{1-\sin(-\alpha)} + \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin\alpha(1+\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha} =$$
$$= \frac{\cos^2\alpha + \sin\alpha + \sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha},$$ що й треба було довести.

2) $$\frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = (\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta) : \left(\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}\right) =$$
$$= (\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta) : \frac{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta} = \frac{(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{-(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta)} =$$
$= -\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$, що й треба було довести.

Приклад 4. Знайти значення виразу $\dfrac{3\cos x + 5\sin x}{3\sin x - \cos x}$, якщо $\operatorname{tg} x = 5$.

Розв'язання. *1-й спосіб.* Оскільки $\operatorname{tg} x = 5$, то $\cos x \neq 0$. Поділимо чисельник і знаменник дробу на $\cos x$, маємо:

$$\frac{\dfrac{3\cos x + 5\sin x}{\cos x}}{\dfrac{3\sin x - \cos x}{\cos x}} = \frac{\dfrac{3\cos x}{\cos x} + \dfrac{5\sin x}{\cos x}}{\dfrac{3\sin x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\cos x}} = \frac{3+5\operatorname{tg} x}{3\operatorname{tg} x - 1} = \frac{3+5\cdot5}{3\cdot5-1} = \frac{28}{14} = 2.$$

2-й спосіб. Оскільки $\operatorname{tg} x = 5$, то $\dfrac{\sin x}{\cos x} = 5$, тому $\sin x = 5\cos x$.

Маємо: $$\frac{3\cos x + 5\sin x}{3\sin x - \cos x} = \frac{3\cos x + 5\cdot5\cos x}{3\cdot5\cos x - \cos x} = \frac{28\cos x}{14\cos x} = 2.$$

Відповідь. 2.

3. Наслідки з основної тригонометричної тотожності

Поділимо обидві частини тотожності $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\cos^2\alpha$ (за умови, що $\cos^2\alpha \neq 0$). Отримаємо:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$ тобто

$$1+\mathrm{tg}^2\,\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Якщо обидві частини тотожності $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ поділити на $\sin^2\alpha$ (за умови, що $\sin^2\alpha\neq 0$), отримаємо:

$1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, тобто

$$1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Приклад 5. Довести, що при всіх допустимих значеннях β значення виразу $\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\beta}+\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\beta}$ не залежить від β.

Доведення. Перетворимо ліву частину тотожності:

$\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\beta}+\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\beta}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\beta}}+\frac{1}{\frac{1}{\sin^2\beta}}=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$, отримали число. Отже, значення виразу не залежить від β.

Приклад 6. Знайти $\mathrm{tg}\,x$, $\sin x$, $\cos x$, якщо $\mathrm{ctg}\,x=-\frac{5}{12}$ і $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$.

Розв'язання. 1) $\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{\mathrm{ctg}\,x}=1:\left(-\frac{5}{12}\right)=-\frac{12}{5}=-2{,}4.$

2) Із тотожності $1+\mathrm{ctg}^2\,x=\frac{1}{\sin^2 x}$ виразимо $\sin^2 x$, маємо:

$\sin^2 x=\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\,x}=\frac{1}{1+\left(-\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{144}{169}.$ Оскільки x – кут IV чверті, то $\sin x<0$, тому $\sin x=-\sqrt{\frac{144}{169}}=-\frac{12}{13}.$

3) $\mathrm{ctg}\,x=\frac{\cos x}{\sin x}$, тому $\cos x=\mathrm{ctg}\,x\cdot\sin x=-\frac{5}{12}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)=\frac{5}{13}.$

Відповідь. $\mathrm{tg}\,x=-2{,}4$; $\sin x=-\frac{12}{13}$; $\cos x=\frac{5}{13}$.

○ Запам'ятайте основну тригонометричну тотожність. ○ Запишіть означення тангенса і котангенса кута через синус і косинус цього кута. ○ Як пов'язані між собою тангенс і котангенс? ○ Запам'ятайте формули, які є наслідками з основної тригонометричної тотожності.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Спростіть вираз (20.1–20.2):

20.1. 1) $1 - \cos^2\alpha$; 2) $2 - \text{tg}\alpha\,\text{ctg}\alpha$.

20.2. 1) $1 - \sin^2\alpha$; 2) $\text{tg}\alpha\,\text{ctg}\alpha + 3$.

Знайдіть значення виразу (20.3–20.4):

20.3. 1) $\sin^2 17° + \cos^2 17°$; 2) $\text{tg}3\,\text{ctg}3$.

20.4. 1) $\cos^2 2 + \sin^2 2$; 2) $\text{ctg}12°\,\text{tg}12°$.

Доведіть, що (20.5–20.6):

20.5. 1) $\sin^2\alpha - 1 = -\cos^2\alpha$; 2) $1 + \text{tg}^2\,\alpha - \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 0$;

3) $\sin\alpha\,\text{ctg}\,\alpha = \cos\alpha$.

20.6. 1) $\cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$; 2) $1 + \text{ctg}^2\,\alpha - \dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 0$;

3) $\cos\alpha\,\text{tg}\,\alpha = \sin\alpha$.

2 Спростіть вираз (20.7–20.10):

20.7. 1) $2\sin^2\alpha + (1 - \cos^2\alpha)$; 2) $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1$;
3) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos(-\alpha))$; 4) $(\sin\alpha - 1)(1 + \sin\alpha)$.

20.8. 1) $3\cos^2\alpha + (1 - \sin^2\alpha)$; 2) $\cos^2\alpha + 5\sin^2\alpha - 1$;
3) $(1 + \sin\alpha)(1 + \sin(-\alpha))$; 4) $(1 + \cos\alpha)(\cos\alpha - 1)$.

20.9. 1) $\sin^2 x + \cos^2 x + \text{ctg}^2 x$; 2) $\cos^2\beta(1 + \text{tg}^2\beta)$;
3) $\sin x - \sin x\cos^2 x$; 4) $\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \cos^4\alpha$;
5) $\text{tg}^3\gamma\,\text{ctg}^3\gamma - \cos^2\beta$; 6) $\dfrac{1 - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - 1}$.

20.10. 1) $\text{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$; 2) $\sin^2 x(1 + \text{ctg}^2 x)$;
3) $\cos^3 x - \cos^3 x\sin^2 x$; 4) $\text{ctg}^2\alpha\,\text{tg}^2\,\alpha - \sin^2\beta$.

Доведіть тотожність (20.11–20.12):

20.11. 1) $(1 - \sin^2 x)(1 + \text{ctg}^2 x) = \text{ctg}^2 x$; 2) $\dfrac{\text{tg}\,\alpha}{\text{ctg}\,\alpha} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

20.12. 1) $(1 - \cos^2 x)(1 + \text{tg}^2 x) = \text{tg}^2 x$; 2) $\dfrac{\text{ctg}\,\beta}{\text{tg}\,\beta} + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\beta}$.

Спростіть вираз (20.13–20.14):

20.13. 1) $\cos(-x) + \cos x\,\text{tg}^2(-x)$; 2) $\text{ctg}(-\beta)\text{tg}\,\beta + \sin^2(-\beta)$.

20.14. 1) $\sin(-\beta) - \sin\beta\,\text{ctg}^2(-\beta)$; 2) $\text{ctg}\,x\,\text{tg}(-x) + \cos^2(-x)$.

20.15. Доведіть, що не можуть одночасно справджуватися рівності:

1) $\sin x = 1$ і $\cos x = -1$; 2) $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{2}$ і $\text{ctg}\,\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Чи можуть одночасно справджуватися рівності (20.16–20.17):

20.16. 1) $\sin\alpha = 0{,}6$ і $\cos\alpha = -0{,}8$; 2) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ і $\cos\alpha = \frac{2}{3}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = 3$ і $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{3}$; 4) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{7}$ і $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$?

20.17. 1) $\cos\alpha = 0{,}25$ і $\sin\alpha = 0{,}75$;

2) $\sin\alpha = -0{,}6$ і $\cos\alpha = -0{,}8$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{8}$ і $\operatorname{ctg}\alpha = 8$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$ і $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}5$?

20.18. Чи можуть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ одночасно дорівнювати:

1) -1; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) 1?

20.19. Чи можуть $\operatorname{tg}\beta$ і $\operatorname{ctg}\beta$ одночасно дорівнювати:

1) -3; 2) -1; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 1; 6) $\sqrt{3}$?

Обчисліть (20.20–20.21):

20.20. 1) $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{7}}$;

2) $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = 0{,}8$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\sin\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{ctg}\varphi$, якщо $\cos\varphi = -\frac{12}{13}$ і $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$;

4) $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\beta$, якщо $\sin\beta = -\frac{24}{25}$ і $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

20.21. 1) $\operatorname{ctg}\beta$, якщо $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

2) $\sin x$ і $\operatorname{tg}x$, якщо $\cos x = \frac{3}{5}$ і $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$;

3) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4) $\sin\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\beta$, якщо $\cos\beta = -0{,}8$ і $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

Доведіть тотожність (20.22–20.23):

20.22. 1) $\frac{\operatorname{ctg}2\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{ctg}2\alpha} = \cos^2 2\alpha$; 2) $\frac{1+\operatorname{ctg}4\beta}{1+\operatorname{tg}4\beta} = \operatorname{ctg}4\beta$.

20.23. 1) $\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}3x + \operatorname{ctg}3x} = \sin^2 3x$; 2) $\frac{1-\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{ctg}2\alpha - 1} = \operatorname{tg}2\alpha$.

3 Спростіть вираз (20.24–20.25):

20.24. 1) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; 2) $\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{1+\sin x}{\cos x}$;

3) $\dfrac{\sin\beta}{1+\cos\beta}-\dfrac{\sin\beta}{1-\cos\beta}$; 4) $\dfrac{1+\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}-\operatorname{tg}(-\alpha)$;

5) $\dfrac{\sin(-2x)}{1-\cos(-2x)}-\operatorname{ctg}(-2x)$; 6) $\dfrac{\cos^2\left(-\dfrac{x}{4}\right)-\cos^4\left(-\dfrac{x}{4}\right)}{\sin^2\left(-\dfrac{x}{4}\right)}$.

20.25. 1) $\dfrac{\cos\beta+\operatorname{ctg}\beta}{1+\sin\beta}$; 2) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$;

3) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$; 4) $\dfrac{1+\cos(-x)}{\sin(-x)}-\operatorname{ctg}(-x)$;

5) $\dfrac{\cos(-2\alpha)}{1+\sin(-2\alpha)}+\operatorname{tg}(-2\alpha)$; 6) $\dfrac{\sin^2\left(-\dfrac{x}{3}\right)-\sin^4\left(-\dfrac{x}{3}\right)}{\cos^2\left(-\dfrac{x}{3}\right)}$.

Доведіть тотожність (**20.26–20.27**):

20.26. 1) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$;

2) $\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x\cos x}=\sin x+\cos x$;

3) $\dfrac{\sin^2\beta}{\operatorname{ctg}^2\beta-\cos^2\beta}=\operatorname{tg}^4\beta$;

4) $2\cos^2 x+\sin^4 x-\cos^4 x=1$.

20.27. 1) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$;

2) $\dfrac{\cos^3 x-\sin^3 x}{1+\cos x\sin x}=\cos x-\sin x$;

3) $\dfrac{\cos^2\beta}{\operatorname{tg}^2\beta-\sin^2\beta}=\operatorname{ctg}^4\beta$;

4) $2\sin^2 x+\cos^4 x-\sin^4 x=1$.

20.28. Спростіть вираз:

1) $\sin^4 2x-\cos^4 2x+\cos^2 2x$; 2) $\dfrac{\sin^2 5\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 5\alpha}-\dfrac{\cos^2 5\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2 5\alpha}$.

Обчисліть (**20.29–20.30**):

20.29. 1) $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{3}{4}$ і $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

2) $\sin x$ і $\cos x$, якщо $\operatorname{ctg}x=2$ і x – кут III чверті.

20.30. 1) $\cos\beta$ і $\sin\beta$, якщо $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{5}{12}$ і β – кут I чверті;

2) $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha=-1$ і $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

20.31. Знайдіть значення тригонометричних функцій кута α, якщо:

1) $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$ і α – кут II чверті; 2) $\operatorname{tg}\alpha = -5$ і $\pi < \alpha < 2\pi$.

20.32. Знайдіть значення тригонометричних функцій кута β, якщо:

1) $\cos\beta = -\dfrac{1}{5}$ і $0 < \beta < \pi$; 2) $\operatorname{ctg}\beta = 0,5$ і β – кут I чверті.

Спростіть вираз (**20.33–20.34**):

20.33. 1) $\dfrac{1 - 2\sin 3\alpha\cos(-3\alpha)}{\cos 3\alpha + \sin(-3\alpha)}$; 2) $\dfrac{\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha + \cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

20.34. 1) $\dfrac{1 - 2\sin(-2\beta)\cos 2\beta}{\cos(-2\beta) + \sin 2\beta}$; 2) $\dfrac{\cos^2 x + \operatorname{ctg}^4 x + \sin^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

Доведіть тотожність (**20.35–20.36**):

20.35. 1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$;

2) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$.

20.36. 1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$;

2) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

4 Знайдіть значення виразу (**20.37–20.38**):

20.37. 1) $\dfrac{2\cos x + 8\sin x}{3\cos x - 4\sin x}$, якщо $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{4}$;

2) $\dfrac{\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x}{3\cos^2 x - 2\sin^2 x}$, якщо $\operatorname{ctg} x = -2$;

3) $\dfrac{\sin x + 2\cos x}{\sin^3 x - 3\cos^3 x}$, якщо $\operatorname{tg} x = 2$.

20.38. 1) $\dfrac{4\cos\alpha + 5\sin\alpha}{2\cos\alpha - \sin\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 3$;

2) $\dfrac{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{10\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha}$, якщо $\operatorname{ctg} x = -\dfrac{1}{5}$;

3) $\dfrac{\cos^3\alpha + 2\sin^3\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -3$.

20.39. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної α:

1) $\dfrac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{1 - \sin^4\alpha - \cos^4\alpha}$; 2) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \dfrac{1 + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}$;

3) $\dfrac{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1}{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1}$.

20.40. Знайдіть значення виразу $\mathrm{tg}^2\,\alpha - \dfrac{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha}$, якщо $\alpha = 11°$.

20.41. Знайдіть найменше і найбільше значення виразу:
1) $4\sin^2 x - 3\cos^2 x$; 2) $4\cos^2 x + 3\,\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{ctg}\,x$.

20.42. Знайдіть область значень функції $y = 7\cos^2 x + 3\sin^2 x$.

20.43. Спростіть вираз $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, якщо:
1) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

20.44. Спростіть вираз $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$, якщо:
1) $0° < \alpha < 90°$; 2) $180° < \alpha < 270°$.

Спростіть вираз (20.45–20.46):

20.45. 1) $\sqrt{\cos^2\alpha(1-\mathrm{tg}\,\alpha)+\sin^2(1-\mathrm{ctg}\,\alpha)}$, якщо $270° < \alpha < 360°$;
2) $\sqrt{4-4\sin^2\alpha} - \sqrt{4\cos^2\alpha+4\cos\alpha+1}$, якщо $\dfrac{2\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

20.46. 1) $\sqrt{\cos^2\alpha(1+\mathrm{tg}\,\alpha)+\sin^2(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)}$, якщо $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;
2) $\sqrt{4\sin^2\alpha-4\sin\alpha+1} + \sqrt{4-4\cos^2\alpha}$, якщо $0° \leqslant \alpha \leqslant 30°$.

20.47. Порівняйте значення виразів $\dfrac{\sin\beta-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\beta}$ і $\dfrac{\sin\alpha-\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}$, якщо $\alpha = 12°$, $\beta = 37°$.

20.48. Порівняйте значення виразів $\dfrac{1+2\cos\alpha}{2\sin\alpha+\sqrt{3}}$ і $\dfrac{\sqrt{3}-2\sin\alpha}{2\cos\alpha-1}$, якщо $\alpha = 142°$.

20.49. Відомо, що $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}2$. Знайдіть:
1) $\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$; 3) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$;
4) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$; 5) $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha$; 6) $\sin\alpha + \cos\alpha$.

20.50. Відомо, що $\sin\alpha + \cos\alpha = -0{,}2$. Знайдіть:
1) $\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$; 3) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$;
4) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$; 5) $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha$; 6) $\sin\alpha - \cos\alpha$.

20.51. Відомо, що $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha = 3$. Знайдіть:
1) $\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{ctg}^2\alpha$; 2) $\mathrm{tg}^3\alpha + \mathrm{ctg}^3\alpha$; 3) $\mathrm{tg}^4\alpha + \mathrm{ctg}^4\alpha$;
4) $\mathrm{tg}^6\alpha + \mathrm{ctg}^6\alpha$; 5) $\sin\alpha\cos\alpha$; 6) $\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\alpha$.

20.52. Відомо, що $\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$. Знайдіть:
1) $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha$; 2) $\mathrm{tg}^3\alpha - \mathrm{ctg}^3\alpha$;
3) $\mathrm{tg}^4\alpha + \mathrm{ctg}^4\alpha$; 4) $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha$.

Побудуйте графік функції (20.53–20.54):

20.53. 1) $y = \sqrt{x}\sin^2 x + \sqrt{x}\cos^2 x$; 2) $y = \sin^2\sqrt{x} + \cos^2\sqrt{x}$;

3) $y = x\,\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{ctg}\,x$; 4) $y = \mathrm{ctg}^2\,x - \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

20.54. 1) $y = \sin^2\sqrt{4-x^2} + \cos^2\sqrt{4-x^2}$; 2) $y = \dfrac{x^2}{\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{ctg}\,x}$.

20.55. Знайдіть найбільше значення виразу $\sin^8 x + \cos^8 x$.

20.56. Кімната обладнана приладами освітлення, які споживають 300 Вт щогодини. Щодоби прилади вмикають на 6 годин. Якщо замінити їх на енергозберігаюче освітлення, то витрати на електроенергію скоротяться на 30 %.

1) Скільки ват протягом тижня можна заощадити, використовуючи енергозберігаюче освітлення?

2) Дізнайтеся тариф на електроенергію та з'ясуйте, скільки коштів протягом тижня можна заощадити, використовуючи енергозберігаюче освітлення?

20.57. Для кубічного рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ справджується умова $b = \dfrac{a^3}{3}$. Доведіть, що воно має єдиний розв'язок, та знайдіть цей розв'язок.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

20.58. Пригадайте відомі з курсу геометрії формули та заповніть пропуски:

1) $\sin(180° - \alpha) = ...$; 2) $\cos(180° - \alpha) = ...$;
3) $\sin(90° - \alpha) = ...$; 4) $\cos(90° - \alpha) = ...$.

20.59. Порівняйте з нулем вираз, якщо $0° < \alpha < 90°$:

1) $\sin(90° + \alpha)$; 2) $\cos(180° - \alpha)$; 3) $\mathrm{tg}(270° + \alpha)$;
4) $\mathrm{ctg}(360° - \alpha)$; 5) $\sin(180° + \alpha)$; 6) $\cos(270° - \alpha)$;
7) $\mathrm{tg}(90° - \alpha)$; 8) $\mathrm{ctg}(180° - \alpha)$; 9) $\cos(360° + \alpha)$.

§ 21. ФОРМУЛИ ЗВЕДЕННЯ

Тригонометричні функції кутів $x \pm \alpha$, де $x = \dfrac{\pi}{2}$; π; $\dfrac{3\pi}{2}$; 2π, (або $x = 90°$; $180°$; $270°$; $360°$) можна зводити до тригонометричних функцій кута α за допомогою формул, які називають *формулами зведення*.

1. Формули зведення та правило для їх застосування

Деякі з цих формул нам відомі з курсу геометрії. Зокрема, ми знаємо, що:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$;
$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$;

або ті самі формули у радіанах:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha; \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

Застосовуючи ці формули та властивості тригонометричних функцій, можна знайти формули зведення для різних кутів.

Наприклад, для кута $\frac{\pi}{2} + \alpha$, матимемо:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha.$$

А для кута $\pi - \alpha$, враховуючи вищезгадані формули, матимемо:

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

У той самий спосіб можна знайти формули зведення для усіх зазначених на початку параграфа кутів. Усього таких формул тридцять дві. Запишемо їх у вигляді таблиці:

x	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
	$90° - \alpha$	$90° + \alpha$	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$270° - \alpha$	$270° + \alpha$	$360° - \alpha$	$360° + \alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

Ці формули не треба запам'ятовувати. Достатньо помітити в них певну закономірність, сформулювати її у вигляді правила і правило запам'ятати. Для цього домовимося називати синус *кофункцією* косинуса, косинус – кофункцією синуса, тангенс – кофункцією котангенса і котангенс – кофункцією тангенса.

Тепер сформулюємо *правило* для застосування формул зведення.

! **У правій частині формули зведення записуємо той знак (+ або –), який має ліва частина формули за умови, що кут α – гострий, при цьому для кутів $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ назву тригонометричної функції не змінюємо, а для кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ – назву змінюємо на кофункцію.**

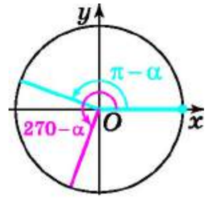
Зауважимо, що тільки для зручності використання правила кут α вважаємо гострим. Насправді, кожна з формул зведення є правильною для будь-якого кута α з області визначення тригонометричної функції.

Зверніть увагу, що послідовність міркувань за згаданим правилом можна стисло сформулювати у вигляді мнемонічного[1] правила: «*Чверть. Знак. Назва*». Розглянемо приклад на застосування правила.

Приклад 1. Записати через тригонометричну функцію кута α: 1) $\cos(\pi - \alpha)$; 2) $\operatorname{ctg}(270° - \alpha)$.

Розв'язання. 1) *Чверть*: кут $(\pi - \alpha)$ – кут II чверті (мал. 21.1). *Знак*: косинус у II чверті – від'ємний, тому матимемо «–». *Назва*: для кута $(\pi - \alpha)$ назва тригонометричної функції зберігається, тобто матимемо «cos». Отже, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

2) $(270° - \alpha)$ – кут III чверті (мал. 21.1), котангенс у III чверті має знак «+». Оскільки $270° = \dfrac{3\pi}{2}$, то назву функції змінюємо на кофункцію (на «tg»). Отже, $\operatorname{ctg}(270° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$.



Мал. 21.1

2. Застосування формул зведення

Формули зведення допомагають обчислювати значення тригонометричних функцій деяких кутів, що перевищують π (або $180°$). Для формули зведення такі кути можна записувати одним із двох способів, або як суму, або як різницю. Наприклад, кут $195°$ лежить на одиничному колі між кутами $180°$ и $270°$, тому його можна записати і як суму $(180° + 15°)$, і як різницю $(270° - 75°)$.

Приклад 2. Обчислити: 1) $\operatorname{tg}315°$; 2) $\sin\dfrac{7\pi}{6}$.

Розв'язання.

1) *1-й спосіб.* $\operatorname{tg}315° = \operatorname{tg}(360° - 45°) = -\operatorname{tg}45° = -1.$

2-й спосіб. $\operatorname{tg}315° = \operatorname{tg}(270° + 45°) = -\operatorname{ctg}45° = -1.$

2) $\sin\dfrac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}.$

Відповідь. 1) -1; 2) $-\dfrac{1}{2}$.

За допомогою формул зведення, періодичності, парності чи непарності тригонометричних функцій знаходження значення тригонометричної функції будь-якого кута можна звести до знаходження значення тригонометричної функції гострого кута.

Приклад 3. Обчислити: 1) $\cos(-945°)$; 2) $\sin^2\dfrac{\pi}{8} + \cos^2\dfrac{25\pi}{8}$.

Розв'язання. Використаємо парність функції косинуса:

[1] **Мнемо́ніка** (*давньогр.* – мистецтво запам'ятовування) – сукупність прийомів і методів запам'ятовування інформації.

1) $\cos(-945°) = \cos 945° = \cos(225° + 2 \cdot 360°) = \cos 225° = \cos(180° + 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Оскільки $\cos^2 \frac{25\pi}{8} = \cos^2\left(\frac{25\pi}{8} - 2\pi\right) = \cos^2 \frac{9\pi}{8} = \cos^2\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) = \left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 = \cos^2\frac{\pi}{8}$, тому $\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{25\pi}{8} = \sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} = 1$.

Відповідь. 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) 1.

Приклад 4. Спростити вираз: $\cos(\alpha - \pi) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Оскільки $\cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$;

$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$, то

$\cos(\alpha - \pi) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha - (-\cos\alpha) = -\cos\alpha + \cos\alpha = 0$.

Відповідь. 0.

Приклад 5. Довести, що коли α, β і γ – кути трикутника, то

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Розв'язання. Оскільки α, β і γ – кути трикутника, то $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, тоді $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ і $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi-\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$.

Маємо: $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\frac{\gamma}{2}$. ■

- Сформулюйте правило для застосування формул зведення; вивчіть відповідне мнемонічне правило.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Користуючись таблицею формул зведення (с. 202), зведіть до тригонометричної функції кута α (21.1–21.2):

21.1. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $\operatorname{tg}(90° + \alpha)$; 3) $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)$;
4) $\cos(180° + \alpha)$; 5) $\cos(270° - \alpha)$; 6) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;
7) $\operatorname{tg}(360° - \alpha)$; 8) $\operatorname{ctg}(2\pi + \alpha)$.

21.2. 1) $\cos(90° - \alpha)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 3) $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$;

4) $\sin(\pi + \alpha)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 6) $\cos(270° + \alpha)$;

7) $\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$; 8) $\sin(360° + \alpha)$.

2 Користуючись правилом, зведіть до тригонометричної функції кута α (21.3–21.4):

21.3. 1) $\operatorname{tg}(90° - \alpha)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 3) $\cos(180° - \alpha)$;

4) $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)$; 5) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 6) $\operatorname{ctg}(270° + \alpha)$;

7) $\cos(2\pi - \alpha)$; 8) $\operatorname{tg}(360° + \alpha)$.

21.4. 1) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $\cos(90° + \alpha)$; 3) $\sin(\pi - \alpha)$;

4) $\operatorname{tg}(180° + \alpha)$; 5) $\operatorname{ctg}(270° - \alpha)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;

7) $\sin(360° - \alpha)$; 8) $\cos(2\pi + \alpha)$.

Зведіть до значень тригонометричної функції гострого кута (21.5–21.6):

21.5. 1) $\sin 182°$; 2) $\cos 217°$; 3) $\operatorname{tg} 342°$;
4) $\operatorname{ctg} 690°$; 5) $\sin(-126°)$; 6) $\cos(-592°)$;
7) $\operatorname{tg}(-227°)$; 8) $\operatorname{ctg}(-190°)$.

21.6. 1) $\sin 318°$; 2) $\cos 142°$; 3) $\operatorname{tg} 459°$;
4) $\operatorname{ctg} 219°$; 5) $\sin(-193°)$; 6) $\cos(-249°)$;
7) $\operatorname{tg}(-549°)$; 8) $\operatorname{ctg}(-251°)$.

Обчисліть (21.7–21.8):

21.7. 1) $\operatorname{tg} 135°$; 2) $\cos 210°$; 3) $\operatorname{ctg} 315°$; 4) $\sin 570°$;
5) $\sin\frac{13\pi}{6}$; 6) $\cos\frac{5\pi}{4}$; 7) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$; 8) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}$.

21.8. 1) $\cos 150°$; 2) $\sin 240°$; 3) $\operatorname{tg} 300°$; 4) $\operatorname{ctg} 495°$;
5) $\cos\frac{4\pi}{3}$; 6) $\sin\frac{7\pi}{4}$; 7) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$; 8) $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}$.

Спростіть вираз (21.9–21.12):

21.9. 1) $\sin(270° - \alpha) - \cos(180° - \alpha)$;
2) $\operatorname{tg}(90° + \alpha)\operatorname{ctg}(270° + \alpha)$;
3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(\pi - \alpha)$; 4) $\sin(\pi + \alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

21.10. 1) $\operatorname{tg}(180° + \alpha) - \operatorname{ctg}(270° - \alpha)$;
2) $\sin(180° - \alpha)\operatorname{ctg}(360° + \alpha)$;

3) $\cos(2\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

21.11. 1) $\sin(\alpha-\pi)$; 2) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $\operatorname{tg}(\alpha-2\pi)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$.

21.12. 1) $\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$; 2) $\sin(\alpha-2\pi)$;

3) $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$; 4) $\operatorname{tg}(\alpha-\pi)$.

Зведіть до тригонометричної функції гострого кута (21.13–21.14):

21.13. 1) $\sin\frac{43\pi}{4}$; 2) $\cos\left(-\frac{36\pi}{5}\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{37\pi}{5}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{36\pi}{7}$.

21.14. 1) $\sin\frac{19\pi}{5}$; 2) $\cos\frac{25\pi}{8}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{24\pi}{5}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{12\pi}{7}\right)$.

3 **Знайдіть значення виразу (21.15–21.18):**

21.15. 1) $\sin(-930^\circ)+\sqrt{3}\cos(-210^\circ)+\operatorname{tg}675^\circ$;

2) $\operatorname{tg}\frac{15\pi}{4}+2\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)-2\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$.

21.16. 1) $\cos(-585^\circ)-\sin225^\circ-\operatorname{tg}765^\circ$;

2) $\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\sin\frac{23\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4}$.

21.17. 1) $\frac{\cos35^\circ}{\sin55^\circ}$; 2) $\cos125^\circ+\cos(-55^\circ)$;

3) $\operatorname{tg}189^\circ\operatorname{ctg}171^\circ$; 4) $\sin^2(-15^\circ)+\sin^2 75^\circ$.

21.18. 1) $\frac{\operatorname{tg}42^\circ}{\operatorname{ctg}48^\circ}$; 2) $\sin136^\circ-\sin44^\circ$;

3) $\operatorname{ctg}179^\circ\operatorname{tg}181^\circ$; 4) $\cos^2(-10^\circ)+\cos^2 80^\circ$.

Спростіть вираз (21.19–21.20):

21.19. 1) $1+\sin(90^\circ+\alpha)\cos(180^\circ+\alpha)$;

2) $\cos^2(270^\circ-\alpha)+\sin^2(90^\circ-\alpha)$;

3) $\cos(\alpha-\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin^2(\pi-\alpha)$;

4) $\sin(2\pi+\alpha)\sin(\alpha-\pi)+1$.

21.20. 1) $1-\cos(270^\circ+\alpha)\sin(180^\circ-\alpha)$;

2) $\cos(\pi+\alpha)\cos(\alpha-2\pi)+\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Доведіть тотожність (21.21–21.22):

21.21. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

2) $\frac{\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)\sin(180^\circ+\alpha)\cos(90^\circ+\alpha)}{\cos(270^\circ-\alpha)\sin(90^\circ+\alpha)}=\operatorname{tg}^2\alpha$.

21.22. 1) $\sin(30^\circ+\alpha)=\cos(60^\circ-\alpha)$;

2) $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\sin^2(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\pi+\alpha)}=\sin\alpha\cos\alpha$.

21.23. Дано $\cos\alpha=-0{,}8$. Знайдіть:
1) $\cos(180^\circ+\alpha)$; 2) $\sin(270^\circ-\alpha)$;
3) $\cos(270^\circ+\alpha)$; 4) $\sin(180^\circ-\alpha)$.

21.24. Дано: $\sin\alpha=0{,}6$; $0^\circ<\alpha<90^\circ$. Знайдіть:

1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; 2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

21.25. Кути α і β – суміжні, $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$. Знайдіть $\cos\beta$ і $\sin\beta$.

21.26. Кут α суміжний з гострим кутом β, $\sin\beta=\frac{8}{17}$. Знайдіть $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$.

4 Нехай α, β, γ – кути трикутника. Доведіть, що (21.27–21.28):

21.27. 1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma$; 2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

21.28. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\operatorname{tg}\gamma$.

21.29. Синус гострого кута паралелограма дорівнює $\frac{8}{17}$. Знайдіть косинус тупого кута цього паралелограма.

21.30. Косинус суми двох кутів трикутника дорівнює $\frac{2}{3}$.
1) Знайдіть косинус третього кута трикутника.
2) Визначте вид цього трикутника за кутами.

Знайдіть значення виразу (21.31–21.34):

21.31. 1) $\operatorname{tg}1^\circ\operatorname{tg}3^\circ\operatorname{tg}5^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}87^\circ\operatorname{tg}89^\circ$;
2) $\operatorname{ctg}20^\circ+\operatorname{ctg}40^\circ+\operatorname{ctg}60^\circ+\ldots+\operatorname{ctg}160^\circ$;
3) $\cos(-5{,}9\pi)\operatorname{tg}(-2{,}1\pi)-\sin3{,}6\pi\operatorname{ctg}3{,}4\pi$;
4) $\sin^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{2\pi}{11}+\sin^2\frac{7\pi}{16}+\cos^2\frac{7\pi}{22}$.

21.32. 1) $\operatorname{ctg}88^\circ \operatorname{ctg}86^\circ \operatorname{ctg}84^\circ \dots \operatorname{ctg}4^\circ \operatorname{ctg}2^\circ$;
2) $\operatorname{tg}4^\circ + \operatorname{tg}8^\circ + \operatorname{tg}12^\circ + \dots + \operatorname{tg}172^\circ + \operatorname{tg}176^\circ$;
3) $\sin 3{,}9\pi \operatorname{tg}(-1{,}6\pi) + \cos 1{,}6\pi \operatorname{ctg}(-3{,}9\pi)$;
4) $\cos^2\frac{\pi}{17} + \sin^2\frac{\pi}{10} + \cos^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{2\pi}{5}$.

21.33. $(\operatorname{ctg}(4{,}5\pi - \alpha)\cos(-\alpha) + \cos(3\pi - \alpha))^2 + \frac{2\sin^2(\pi+\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha - \pi)}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{18}$.

21.34. $\left(\frac{\cos(0{,}5\pi+\alpha)}{\operatorname{ctg}(5\pi+\alpha)} - \sin(-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{10}$.

Обчисліть (21.35–21.36):

21.35. 1) $\sin(-3{,}3\pi)\cos(-1{,}7\pi)\operatorname{tg}0{,}3\pi + \sin 2{,}8\pi\cos(-0{,}2\pi)\operatorname{tg}3{,}2\pi$;
2) $\operatorname{tg}(-70^\circ)\operatorname{tg}160^\circ + \sin(-110^\circ)\cos 700^\circ + \sin 520^\circ\cos 110^\circ$.

21.36. 1) $\operatorname{ctg}3{,}2\pi\sin 0{,}7\pi\sin(-1{,}2\pi) + \operatorname{ctg}(-0{,}3\pi)\cos(-1{,}7\pi)\cos 0{,}8\pi$;
2) $\operatorname{tg}(-162^\circ)\operatorname{tg}108^\circ - \sin 662^\circ\sin(-238^\circ) + \sin 32^\circ\sin 508^\circ$.

Спростіть вираз (21.37–21.38):

21.37. 1) $\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{9\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\alpha - \pi)$;

2) $\frac{1 - 2\sin^2(3\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \sin(\pi - \alpha)} + \frac{1 - 2\cos^2(3\pi - \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \cos(\pi+\alpha)}$;

3) $\frac{\sin(9\pi+\alpha)\cos(11\pi-\alpha) - \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)}{1 - \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \cos(\pi-\alpha)\right)^2}$.

21.38. $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right) - \cos(7\pi-\alpha)\sin(5\pi+\alpha)}{(\cos(1{,}5\pi-\alpha) + \sin(\alpha - 0{,}5\pi))^2 - 1}$.

21.39. Пачка офісного паперу формату А4 містить 500 аркушів. За тиждень в офісі витрачають 1700 аркушів. Якої найменшої кількості таких пачок паперу буде достатньо цьому офісу на чотири тижні?

21.40. Числа p; $p + 10$; $p + 14$ – прості. Знайдіть p.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

21.41. Обчисліть:

1) $\cos 390°$; 2) $\sin 765°$; 3) $\sin(-300°)$; 4) $\cos(-1050°)$.

21.42. Знайдіть нулі функцій:

1) $y = 4x - 12$; 2) $y = \dfrac{x+1}{x}$;

3) $y = \sqrt{2x+6}$; 4) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x}}{x}$.

21.43. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x+1}$; 2) $y = \sqrt{x-3}$; 3) $y = \sqrt{x} + 2$;

4) $y = \sqrt{x} - 4$; 5) $y = 3\sqrt{x}$; 6) $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$.

§ 22. ПЕРІОДИЧНІСТЬ ФУНКЦІЙ. ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ. ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ

1. Періодичність функцій

Багато процесів та явищ у природі або техніці на практиці мають повторювальний характер: рух Землі навколо Сонця, рух маятника, різні обертальні рухи тощо. Такі процеси називають періодичними, а функції, які їх описують, – періодичними функціями.

Ми вже знаємо, що тригонометричні функції є періодичними, оскільки при зміні кута на ціле число обертів значення тригонометричних функцій синуса і косинуса не змінюються (§ 19, п. 5). При зміні кута на ціле число півобертів не змінюються значення функцій тангенс і котангенс. Тобто тригонометричні функції синуса і косинуса не змінюються, якщо до аргументу додати деяке число, кратне 2π, а тангенса і котангенса, – якщо додати число, кратне π.

Сформулюємо означення періодичної функції.

Функцію $y = f(x)$ називають *періодичною* з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x з області визначення функції числа $x + T$ і $x - T$ також належать області визначення і справджується рівність: $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$.

Оскільки $\sin(x + 2\pi) = \sin(x - 2\pi) = \sin x$; $\cos(x + 2\pi) = \cos(x - 2\pi) = \cos x$ для будь-якого x, то функції синуса і косинуса – періодичні з періодом 2π. Періодами цих функцій також будуть числа, кратні 2π, тобто числа -2π; $\pm 4\pi$; $\pm 6\pi$; ... .

Для дослідження властивостей функцій та побудови їх графіків важливо знати найменший додатний період функції. Доведемо, що найменшим додатним періодом функції $y = \cos x$ є число 2π. Нехай T – довільний період косинуса, тоді $\cos(x + T) = \cos x$ для будь-якого x, отже і для $x = 0$. Підставивши в цю рівність замість x число 0, матимемо: $\cos T = \cos 0 = 1$. Найменшим додатним числом, для якого $\cos T = 1$, є число 2π. Отже, 2π – найменший додатний період функції $y = \cos x$.

У той самий спосіб можна довести, що найменшим додатним періодом функції $y = \sin x$ також є число 2π. Отже,

найменшим додатним періодом функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є число 2π.

Оскільки $\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}\, x$; $\mathrm{tg}(x - \pi) = -\mathrm{tg}(\pi - x) = -(-\mathrm{tg}\, x) = \mathrm{tg}\, x$ і $\mathrm{ctg}(x + \pi) = \mathrm{ctg}\, x$; $\mathrm{ctg}(x - \pi) = \mathrm{ctg}\, x$ для будь-якого x з області визначення тангенса і котангенса відповідно, то функції тангенса і котангенса – періодичні з періодом π.

Доведемо, що π – найменший додатний період функції $y = \mathrm{tg}\, x$. Нехай T – довільний період функції $y = \mathrm{tg}\, x$, тоді $\mathrm{tg}(x + T) = \mathrm{tg}\, x$ для будь-якого x з її області визначення, зокрема і для $x = 0$. Тоді $\mathrm{tg}\, T = \mathrm{tg}\, 0 = 0$. Найменшим додатним числом, для якого $\mathrm{tg}\, T = 0$, є число π. Отже, π – найменший додатний період функції $y = \mathrm{tg}\, x$.

У той самий спосіб можна довести, що найменшим додатним періодом функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ також є число π. Отже,

найменшим додатним періодом функцій $y = \mathrm{tg}\, x$ і $y = \mathrm{ctg}\, x$ є число π.

Періодичність функції використовують для побудови її графіка:

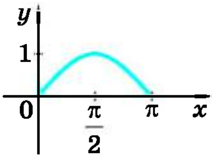
для побудови графіка періодичної функції з найменшим додатним періодом T_0 достатньо побудувати графік на будь-якому проміжку завдовжки T_0 (наприклад, $[0; T_0]$), а потім доповнити його отриманим графіком, паралельно перенесеним вправо і вліво вздовж осі абсцис на відстань kT_0, де k – будь-яке натуральне число.

2. Графік функції $y = \sin x$

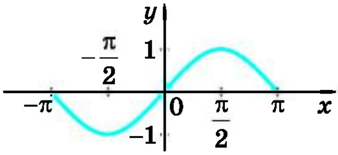
Спочатку побудуємо графік функції $y = \sin x$ на проміжку $[0; \pi]$. Складемо таблицю її значень:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Будуємо графік функції $y = \sin x$ на проміжку $[0; \pi]$, враховуючи, що $\pi \approx 3{,}14$. На малюнку 22.1 зображено графік функції $y = \sin x$ на проміжку $[0; \pi]$.



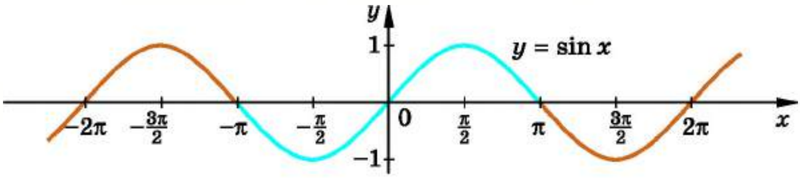
Мал. 22.1



Мал. 22.2

Оскільки функція $y = \sin x$ є непарною, то її графік симетричний відносно початку координат. Виконаємо симетричне відображення лінії, зображеної на малюнку 22.1, відносно початку координат і отримаємо графік функції $y = \sin x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ (мал. 22.2).

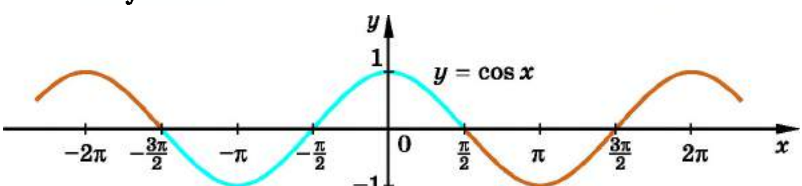
Далі врахуємо періодичність функції $y = \sin x$, найменшим додатним періодом якої є 2π, а саме, отриманий графік доповнимо таким самим, паралельно перенесеним вліво і вправо уздовж осі абсцис на 2π, 4π, 6π, ... Маємо графік функції $y = \sin x$ на всій області визначення (мал. 22.3). Лінію, яка є графіком функції $y = \sin x$, називають *синусоїдою*.



Мал. 22.3

3. Графік функції $y = \cos x$

Побудувати графік функції $y = \cos x$ можна в той самий спосіб, що й графік функції $y = \sin x$. Проте ми врахуємо тотожність $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Тобто графік функції $y = \cos x$ отримаємо з графіка функції $y = \sin x$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі абсцис вліво на відстань $\frac{\pi}{2}$ (мал. 22.4). Графіком функції $y = \cos x$ є також синусоїда, бо це та сама лінія, що є графіком функції $y = \sin x$, тільки розміщена інакше відносно системи координат. Інколи графік функції $y = \cos x$ називають ще *косинусоїдою*, його зображено на малюнку 22.4.



Мал. 22.4

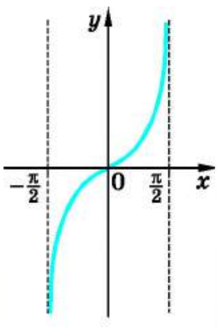
4. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$

Побудуємо графік функції $y = \operatorname{tg} x$ спочатку на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, використовуючи таблицю її значень.

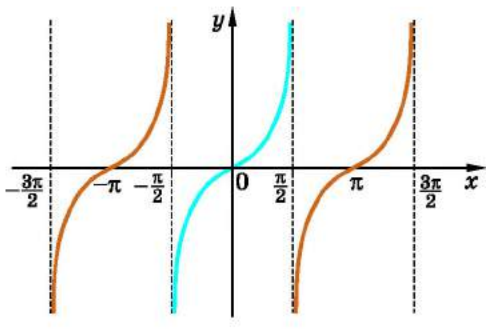
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–

Графік функції зображено на малюнку 22.5. Зауважимо, що він не перетинає прямі $x = \frac{\pi}{2}$ й $x = -\frac{\pi}{2}$ (оскільки тангенс у точках $\frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2}$ не існує), при наближенні x до $\frac{\pi}{2}$ значення $\operatorname{tg} x$ стає як завгодно великим, а при наближенні до $-\frac{\pi}{2}$ – як завгодно малим.

Далі врахуємо періодичність функції $y = \operatorname{tg} x$, найменший додатний період якої дорівнює π, та отримаємо графік функції $y = \operatorname{tg} x$ на всій області визначення (мал. 22.6). Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ називають *тангенсоїдою*, він складається з безлічі окремих гілок – гілок тангенсоїди.



Мал. 22.5

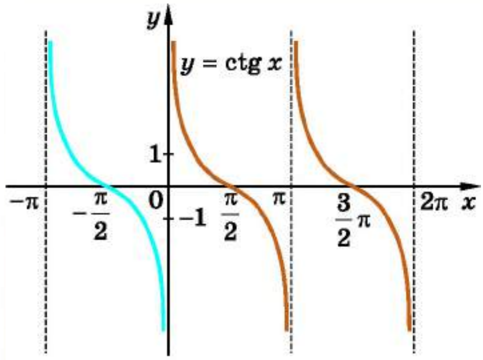


Мал. 22.6

5. Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$

Функція $y = \operatorname{ctg} x$ не визначена для чисел πk, $k \in Z$. Графік цієї функції можна або спочатку побудувати на проміжку $(0; \pi)$ і далі використати періодичність функції, або скористатися формулою $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ і виконати послідовно два перетворення графіка $y = \operatorname{tg} x$: паралельне перенесення на $\frac{\pi}{2}$ вліво вздовж осі абсцис, а потім симетричне відображення отриманого графіка відносно цієї осі. Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ зображено на малюнку 22.7. Графіком функції $y = \operatorname{ctg} x$ є також тангенсоїда, але розміщена інакше відносно системи координат.

Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ називають також *котангенсоїдою*.



Мал. 22.7

6. Властивості тригонометричних функцій

Узагальнимо вивчені раніше властивості тригонометричних функцій та властивості, отримані з їх графіків (ураховуючи, що $k \in Z$) у таблицях на с. 214–215.

Тепер ми можемо знаходити властивості не тільки функцій, зазначених у цих таблицях, а й інших тригонометричних функцій.

Приклад 1. Знайти нулі функції $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)$.

Р о з в ' я з а н н я. Нулями функції $y = \operatorname{tg} x$ є числа πk, $k \in Z$. Знайдемо такі значення x, для яких $2x - \frac{\pi}{8} = \pi k$. Маємо:

$2x - \frac{\pi}{8} = \pi k$, тобто $2x = \frac{\pi}{8} + \pi k$, звідки $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, – нулі функції.

В і д п о в і д ь. $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Приклад 2. Знайти проміжки зростання функції

$$y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Р о з в ' я з а н н я. Проміжками зростання функції $y = \sin x$ є $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$. Знайдемо такі значення x, для яких значення виразу $3x + \frac{\pi}{4}$ належатиме цим проміжкам:

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi k \leqslant 3x+\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{2}+2\pi k; \quad -\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi k \leqslant 3x \leqslant \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi k;$$

$$-\frac{3\pi}{4}+2\pi k \leqslant 3x \leqslant \frac{\pi}{4}+2\pi k; \quad -\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}, \ k \in Z.$$

Отже, функція зростає на проміжках $\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right]$, $k \in Z$.

Відповідь. $\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right]$, $k \in Z$.

Властивості	Функція	
	$y = \sin x$	$y = \cos x$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Множина значень	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Парність, непарність	Непарна	Парна
Найменший додатний період	2π	2π
Нулі функції	πk	$\frac{\pi}{2}+\pi k$
Знакосталість, $y > 0$	$(2\pi k; \pi+2\pi k)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$
Знакосталість, $y < 0$	$(-\pi+2\pi k; 2\pi k)$	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$
Проміжки зростання	$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$	$[-\pi+2\pi k; 2\pi k]$
Проміжки спадання	$\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$	$[2\pi k; \pi+2\pi k]$
Найбільше значення функції	1 при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$	1 при $x=2\pi k$
Найменше значення функції	-1 при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$	-1 при $x=\pi+2\pi k$

Властивості	Функція	
	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Область визначення	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x \neq \pi k$
Множина значень	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Парність, непарність	Непарна	Непарна
Найменший додатний період	π	π
Нулі функції	πk	$\frac{\pi}{2} + \pi k$
Знакосталість, $y > 0$	$\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$	$\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$
Знакосталість, $y < 0$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$
Проміжки зростання	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$	–
Проміжки спадання	–	$(\pi k; \pi + \pi k)$
Найбільше значення функції	–	–
Найменше значення функції	–	–

Для знаходження періодів деяких тригонометричних функцій скористаємося властивістю, яку приймемо без доведення:

найменший додатний період функцій виду $y = \sin(ax + b)$ і $y = \cos(ax + b)$, де a і b – числа, дорівнює $\frac{2\pi}{|a|}$, а функцій виду $y = \operatorname{tg}(ax + b)$ і $y = \operatorname{ctg}(ax + b)$ дорівнює $\frac{\pi}{|a|}$.

Наприклад, найменшим додатним періодом функції $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{7}\right)$ буде $\frac{2\pi}{|4|}$, тобто $\frac{\pi}{2}$, а для функції $y = \operatorname{ctg}\left(3 - \frac{1}{8}x\right)$ матимемо такий найменший додатний період: $\frac{\pi}{\left|-\frac{1}{8}\right|} = 8\pi$.

Розглянемо, як знайти найменший додатний період функції, що є сумою кількох періодичних функцій.

Приклад 3. Знайти найменший додатний період функції $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай маємо функції $g_1(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right)$ і $g_2(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ з найменшими додатними періодами T_1 і T_2 відповідно. Тоді $T_1 = \frac{2\pi}{3}$, $T_2 = \frac{\pi}{|-1|} = \pi$. Найменшим додатним періодом функції $f(x)$ буде найменше спільне кратне (якщо воно існує) чисел T_1 і T_2. Таким числом є число 2π. Дійсно, $2\pi : \frac{2\pi}{3} = 3$; $2\pi : \pi = 2$. Отже, найменшим додатним періодом функції $f(x)$ є число 2π.

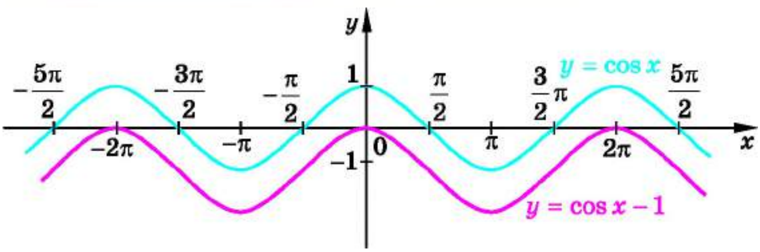
В і д п о в і д ь. 2π.

Зауважимо, що не завжди сума кількох періодичних функцій є функцією періодичною. Так, наприклад, функція $g_1(x) = \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right)$ є періодичною з періодом $T_1 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, а функція $g_2(x) = \operatorname{tg} x$ є періодичною з періодом $T_2 = \pi$, проте функція $f(x) = \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg} x$ не є періодичною, оскільки не існує такого числа T, яке б ділилося націло як на π, так і на 2 (строге доведення цього факта не наводитимемо).

7. Побудова графіків тригонометричних функцій за допомогою перетворень

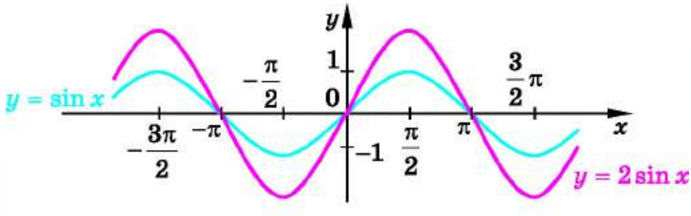
Побудувати графіки тригонометричних функцій, відмінні від тих, які ми розглянули вище, можна за допомогою перетворень графіків функцій.

Наприклад, для побудови графіка функції $y = \cos x - 1$ достатньо графік функції $y = \cos x$ перенести вздовж осі y на одну одиницю вниз (мал. 22.8).



Мал. 22.8

А для побудови графіка функції $y = 2\sin x$ достатньо графік функції $y = \sin x$ розтягнути удвічі від осі абсцис (мал. 22.9).

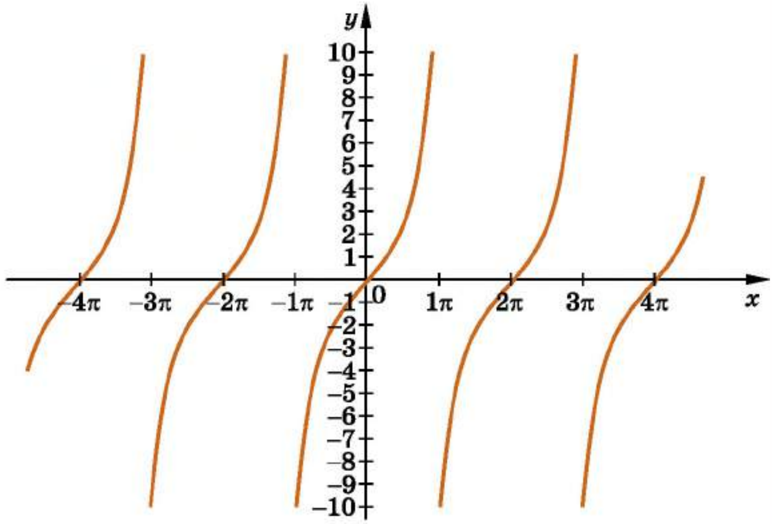


Мал. 22.9

8. Побудова графіків тригонометричних функцій за допомогою комп'ютера

За допомогою спеціальних комп'ютерних програм можна будувати графіки тригонометричних функцій різного рівня складності.

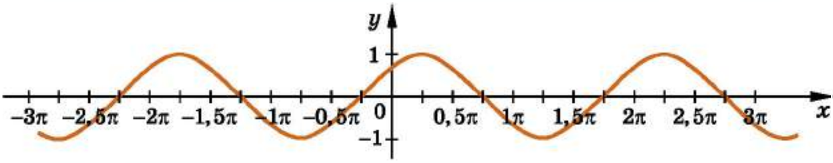
На малюнку 22.10 зображено графік функції $y = \text{tg}\,\frac{x}{2}$, а на малюнку 22.11 – графік функції $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, побудовані однією з подібних програм.



Мал. 22.10

Радимо перед використанням конкретної програми ознайомитися з файлом допомоги (у більшості програм для цього треба натиснути клавішу $F1$, знаходячись у вікні програми). Більшість програм має спеціальні опції або інструменти для роботи з тригонометричними функціями. Наприклад, у деяких з них опція «тригонометричний набір» дозволяє по осі x

відкладати позначки, яким відповідають числа, що залежать від π. Саме такий інструмент застосовано до графіків, зображених на малюнках 22.10 і 22.11.



Мал. 22.11

За графіками легко визначати властивості функцій. Наприклад, нулями функції $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ є числа вигляду $x = 2\pi k$, $k \in Z$, а функція $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ спадає на проміжках $\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.

9. Гармонічні коливання Величини, що змінюються за законом $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$, де A, ω, φ – деякі сталі, відіграють важливу роль у фізиці. Такими функціями описують *гармонічні коливання* – малі коливання підвішеного на пружині тягаря, малі коливання маятника, коливання в молекулах, якими зумовлене поглинання інфрачервоних променів, різноманітні коливання в електротехніці, наприклад у коливальному контурі тощо.

Якщо кульку, яка підвішена на пружині, вивести зі стану рівноваги, то в ідеальній ситуації (якщо нехтувати опором повітря чи нагріванням пружини) кулька здійснюватиме гармонічні коливання. Координата відхилення кульки від положення рівноваги буде залежати від часу t і визначатися за формулою $f(t) = A\sin(\omega x + \varphi)$.

Параметри A, ω, φ, які повністю описують гармонічні коливання, мають спеціальні назви: A – *амплітуда коливань*, ω – *циклічна* (або *кругова*) *частота коливань*, φ – *початкова фаза коливань* (зазвичай, $\varphi \in [0; 2\pi)$). Виходячи з фізичного змісту гармонічних коливань, матимемо, що $A > 0$, $\omega > 0$. Період функції $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, який дорівнює $\frac{2\pi}{\omega}$, називають *періодом гармонічного коливання*. Період гармонічного коливання – це час одного повного коливання.

Яку функцію називають періодичною з періодом $T \neq 0$? Назвіть найменший додатний період функцій $y = \sin x$; $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$? Як використовують періодичність для побудови графіків? За графіками функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ сформулюйте їх властивості.

● Назвіть найменший додатний період функцій виду $y = \sin(ax + b)$; $y = \cos(ax + b)$; $y = \operatorname{tg}(ax + b)$; $y = \operatorname{ctg}(ax + b)$? ● Функціями якого вигляду описують гармонічні коливання? ● Як називають параметри A, ω, φ у формулах гармонічних коливань?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

22.1. Для функції $y = \sin x$ знайдіть:

1) $y(0)$; 2) $y\left(\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y\left(\frac{\pi}{3}\right)$; 4) $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

22.2. Для функції $y = \cos x$ знайдіть:

1) $y(0)$; 2) $y\left(\frac{\pi}{6}\right)$; 3) $y\left(\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

22.3. (*Усно.*) Координати рухомого тіла змінюються за законом $y = 0{,}8\sin 100\pi t$. Назвіть амплітуду коливання.

2

22.4. Побудуйте графік функції $y = \cos x$ на проміжку $[0; 2\pi]$. Укажіть множину значень, проміжок зростання і проміжок спадання та нулі функції.

22.5. Побудуйте графік функції $y = \sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Укажіть множину значень, проміжок зростання і проміжок спадання та нулі функції.

22.6. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. Укажіть нулі функції, проміжки зростання і проміжки спадання функції.

Знайдіть найменший додатний період функції (22.7–22.8):

22.7. 1) $y = \cos 4x$; 2) $y = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{x}{3}\right)$;

3) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{7}x - \frac{\pi}{8}\right)$; 4) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{9} - x\right)$.

22.8. 1) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{9}\right)$; 2) $y = \cos\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right)$;

3) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{18}\right)$; 4) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{7} - \frac{1}{7}x\right)$.

22.9. Під час обертання дротяної рамки у магнітному полі потік магнітної індукції, який пронизує її, змінюється залежно від часу за законом $\Phi(t) = 0{,}02\sin 20\pi t$. Знайдіть амплітуду, частоту та період обертання.

22.10. Сила струму змінюється за законом $I(t) = 5\sin 50\pi t$ (сила струму – в амперах; час – у секундах). Знайдіть амплітуду, частоту та період сили струму.

22.11. За графіками функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ визначте знак числа:

1) $\sin 0{,}9\pi$; 2) $\cos\frac{9\pi}{8}$; 3) $\operatorname{tg} 1{,}1\pi$; 4) $\operatorname{ctg}(-0{,}2\pi)$;

5) $\sin(-1{,}6)$; 6) $\cos(-1)$; 7) $\operatorname{tg} 4$; 8) $\operatorname{ctg} 3$.

22.12. За графіками функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ порівняйте з нулем число:

1) $\sin 3{,}5$; 2) $\cos(-0{,}2\pi)$; 3) $\operatorname{tg} 0{,}6\pi$;

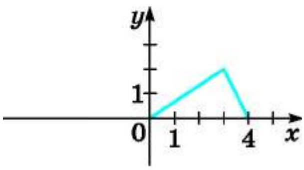
4) $\sin(-1{,}1\pi)$; 5) $\operatorname{ctg}(-1)$; 6) $\cos 2$.

Побудуйте графік функції та опишіть її властивості на зразок таблиці на с. 214 і 215 (22.13–22.14):

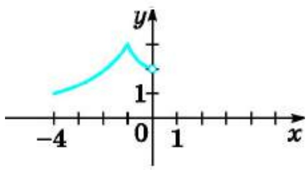
22.13. 1) $y = \sin x - 2$; 2) $y = 3\cos x$.

22.14. 1) $y = \cos x + 3$; 2) $y = 2\sin x$.

3 **22.15.** На малюнках 22.12 і 22.13 зображено частину графіка періодичної функції, період якої дорівнює 4. Побудуйте графік цієї функції на проміжку [–8; 8].

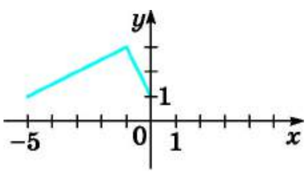


Мал. 22.12

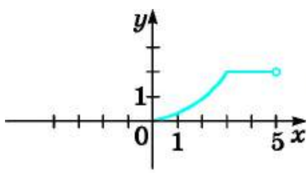


Мал. 22.13

22.16. На малюнках 22.14 і 22.15 зображено частину графіка періодичної функції, період якої дорівнює 5. Побудуйте графік цієї функції на проміжку [–10; 10].



Мал. 22.14



Мал. 22.15

22.17. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Укажіть:

1) нулі функції;
2) проміжки, на яких функція набуває додатних значень, і на яких – від'ємних;
3) проміжки зростання і проміжки спадання функції.

22.18. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Укажіть:

1) нулі функції;
2) проміжки, на яких функція набуває додатних значень, і на яких – від'ємних;
3) проміжки зростання і проміжки спадання функції.

22.19. Гармонічні коливання задано функцією

$$f(t) = 2,5\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right).$$

1) Запишіть функцію у вигляді $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.
2) Знайдіть амплітуду, частоту, початкову фазу та період коливань.

22.20. Гармонічні коливання задано функцією $f(t) = 4\cos\left(2t - \frac{\pi}{8}\right)$.

1) Запишіть функцію у вигляді $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.
2) Знайдіть амплітуду, частоту, початкову фазу та період коливань.

22.21. Чи є число T періодом функції $f(x)$, якщо:

1) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$, $T = 2\pi$; 2) $f(x) = \sin\frac{x}{3}$, $T = \frac{2\pi}{3}$;

3) $f(x) = \operatorname{ctg}\pi x$, $T = 2$; 4) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$, $T = 2$?

Знайдіть найменший додатний період функції (22.22–22.23):

22.22. 1) $f(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{8}$;

3) $g(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{9} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{6} - \frac{\pi}{3}\right)$;

4) $g(x) = \operatorname{ctg}4\pi x - \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$.

22.23. 1) $g(x) = \cos\left(6x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$;

2) $g(x) = \operatorname{ctg}\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{5}$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{\pi x}{6} - \sin\left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{8}\right)$; 4) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} - \operatorname{ctg}2\pi x$.

Не виконуючи побудови, знайдіть нулі функції (22.24–22.25):

22.24. 1) $f(x) = \cos 4x$; 2) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$.

22.25. 1) $f(x) = \sin\left(0{,}5x - \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $f(x) = \operatorname{ctg} 2x$.

Користуючись графіками функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, порівняйте числа **(22.26–22.27)**:

22.26. 1) $\sin 0{,}7\pi$ і $\sin 0{,}8\pi$; 2) $\cos 2$ і $\cos 3$;
3) $\operatorname{tg}(-2)$ і $\operatorname{tg}(-1)$; 4) $\operatorname{ctg} 1{,}6$ і $\operatorname{ctg} 3{,}5$.

22.27. 1) $\sin 1$ і $\sin 4$; 2) $\cos(-0{,}2\pi)$ і $\cos(-0{,}1\pi)$;
3) $\operatorname{tg} 0{,}2\pi$ і $\operatorname{tg} 0{,}3\pi$; 4) $\operatorname{ctg}(-3)$ і $\operatorname{ctg}(-2)$.

Не виконуючи побудови, знайдіть **(22.28–22.29)**:

22.28. 1) проміжки зростання функції $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$;

2) значення x, при яких функція $y = \cos\left(4x - \frac{\pi}{8}\right)$ набуває додатних значень.

22.29. 1) проміжки спадання функції $y = \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{9}\right)$;

2) значення x, при яких функція $y = \sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{4}\right)$ набуває додатних значень.

Побудуйте графік функції **(22.30–22.31)**:

22.30. 1) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$.

22.31. 1) $y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$.

Знайдіть область визначення функції **(22.32–22.33)**:

22.32. 1) $y = \frac{1}{1 + \cos 4x}$; 2) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$;

3) $y = \sqrt{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$; 4) $y = \frac{2x}{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}$.

22.33. 1) $y = \frac{1}{1 - \sin 2x}$; 2) $y = \operatorname{ctg}\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$;

3) $y = \sqrt{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$; 4) $y = \frac{4x^2}{\operatorname{tg} 2x}$.

4 При яких значеннях x з проміжка $[0;\ 2\pi]$ функція $f(x)$ набуває найменшого значення, а при яких – найбільшого? Знайдіть ці значення, якщо **(22.34–22.35)**:

22.34. 1) $f(x) = \sin 2x + 1$; 2) $f(x) = 3 - \cos x$.

22.35. 1) $g(x) = \cos 2x + 3$; 2) $g(x) = 1 - \sin x$.

Знайдіть область визначення функції (22.36–22.37):

22.36. 1) $f(x) = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\operatorname{ctg} 2x}$; 2) $g(x) = \sqrt{6x-2} - \sqrt{\cos x}$.

22.37. 1) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} 3x} - \sqrt{\cos 3x}$; 2) $g(x) = \sqrt{4x-10} + \sqrt{\sin x}$.

Побудуйте графік функції (22.38–22.39):

22.38. 1) $y = \sqrt{1-\sin^2 x}$; 2) $y = (\sqrt{\sin x})^2$;

3) $y = \frac{|x|}{x}\operatorname{tg} x$; 4) $y = \operatorname{ctg} x + |\operatorname{ctg} x|$;

5) $y = 2\operatorname{tg} x \cos x$; 6) $y = \sqrt{\cos x - 1}$;

7) $y = \sqrt{-(\operatorname{tg} x - 1)^2}$; 8) $y = 2x^2\sqrt{-\cos^2 x}$;

9) $y = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}$; 10) $y = \frac{\operatorname{ctg}|x| + \operatorname{ctg} x}{2}$.

22.39. 1) $y = \sqrt{1-\cos^2 x}$; 2) $y = (\sqrt{\cos x})^2$;

3) $y = \frac{x}{|x|}\operatorname{ctg} x$; 4) $y = |\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x$;

5) $y = 3\operatorname{ctg} x \sin x$; 6) $y = \sqrt{\sin x - 1}$;

7) $y = \sqrt{-(\operatorname{ctg} x + 1)^2}$; 8) $y = 3x\sqrt{-\sin^2 x}$;

9) $y = \sqrt{\sin^2 x} - \sin x$; 10) $y = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}|x|}{2}$.

Побудуйте графік рівняння (22.40–22.41):

22.40. 1) $\operatorname{tg} x = 0$; 2) $x^2 + \operatorname{ctg}^2 y = 0$;
3) $\cos \pi(x^2 + y^2) = 1$; 4) $\sin x + \cos y = -2$.

22.41. 1) $\sin x = 1$; 2) $\cos^2 x + y^2 = 0$;
3) $\operatorname{tg} \pi(x^2 + y^2) = 0$; 4) $\cos x + \sin y = 2$.

22.42. При яких значеннях параметра a число $\frac{\pi}{2}$ є періодом функції $f(x) = \frac{a^2 - 4 + \sin 2x}{\cos 2x}$?

22.43. При яких значеннях параметра b число π є періодом функції $g(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 1 - b^2}$?

Доведіть, що функція (22.44–22.45):

22.44. 1) $f(x) = \cos(\sin x)$ спадає на $[0;\ 0,5\pi]$;
2) $g(x) = \sin(\cos x)$ зростає на $[\pi;\ 1,5\pi]$.

22.45. 1) $f(x) = \sin(\cos x)$ спадає на $[0;\ 0,5\pi]$;
2) $g(x) = \cos(\sin x)$ зростає на $[-0,5\pi;\ 0]$.

22.46. Скільки коренів має рівняння $\cos x = \dfrac{|x|}{6\pi}$?

22.47. Скільки коренів має рівняння $\dfrac{x}{8\pi} = \sin x$?

22.48. *Практична діяльність.* За допомогою будь-якої комп'ютерної програми, що будує графіки, побудуйте графіки функцій $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{4} - 1$; $y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 3$ та $y = 2\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right) - 1$ і вкажіть їх властивості на зразок таблиць на с. 214 і 215.

22.49. Вхідний квиток на 2-й поверх Ейфелевої вежі для дорослих коштує 8 євро, для осіб віком 12–24 років – 6,4 євро, а для дітей 4–11 років – 4 євро. Родина Петренків, що складається з батька, мами, студента Сергія (19 років), школярки Марійки (10 років) та малюка Ореста (2 роки), хоче відвідати 2-й поверх Ейфелевої вежі. У паризькому банку 1 євро коштує 32 гривні. Яку суму (у грн) заплатить родина Петренків за цю екскурсію? Округліть до цілих гривень.

22.50. (*Задача аль-Хорезмі*). Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ xy : |y - x| = 5\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

22.51. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$; $\vec{b}(\cos\beta;\ \sin\beta)$;
2) $\vec{a}(\sin\alpha;\ \cos\alpha)$; $\vec{b}(\cos\beta;\ \sin\beta)$.

22.52. Дано: $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$. Перевірте, що:

1) $\cos(\alpha + \beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$; 2) $\sin(\alpha + \beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$;
3) $\cos(\alpha - \beta) \neq \cos\alpha - \cos\beta$; 4) $\sin(\alpha - \beta) \neq \sin\alpha - \sin\beta$.

§ 23. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ

У цьому параграфі розглянемо формули, які дають можливість записувати тригонометричні функції суми і різниці двох кутів через тригонометричні функції цих кутів.

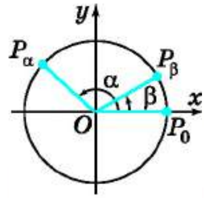
1. Косинус різниці й суми

Для того щоб отримати формулу для $\cos(\alpha - \beta)$, спочатку розглянемо випадок, коли $\alpha > \beta$ і $\alpha - \beta < \pi$.

Нехай при повороті на кут α початковий радіус OP_0 одиничного кола перейшов у радіус OP_α, $P_\alpha(x;\,y)$ (мал. 23.1). Оскільки $x = \cos\alpha$; $y = \sin\alpha$, то маємо вектор $\overline{OP}_\alpha(\cos\alpha; \sin\alpha)$. Аналогічно, $\overline{OP}_\beta(\cos\beta; \sin\beta)$. Тоді: $\overline{OP}_\alpha \cdot \overline{OP}_\beta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

З іншого боку:

$$\overline{OP}_\alpha \cdot \overline{OP}_\beta = \left|\overline{OP}_\alpha\right| \cdot \left|\overline{OP}_\beta\right| \cdot \cos\angle P_\alpha OP_\beta.$$



Мал. 23.1

Але $\left|\overline{OP}_\alpha\right| = 1$; $\left|\overline{OP}_\beta\right| = 1$; $\angle P_\alpha OP_\beta = \alpha - \beta$. Тому

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Аналогічно розглядають і випадки, коли $\alpha < \beta$ або $\alpha - \beta > \pi$.

Отримали *формулу косинуса різниці*:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Із цієї формули маємо:

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Отримали *формулу косинуса суми*:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Приклад 1. Обчислити $\cos 75°$.

Розв'язання. $\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45°\cos 30° - \sin 45°\sin 30° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Відповідь. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Приклад 2. Спростити вираз $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right) =$

$= \cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{3} - \sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{3} - \left(\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{3}\right) =$

$= \dfrac{1}{2}\cos\alpha - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \dfrac{1}{2}\cos\alpha - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = -\sqrt{3}\sin\alpha.$

Відповідь. $-\sqrt{3}\sin\alpha$.

2. Синус різниці і суми

Знайдемо формулу для $\sin(\alpha - \beta)$. Маємо:

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Отримали *формулу синуса різниці*:

$$\mathbf{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.}$$

Для $\sin(\alpha + \beta)$ матимемо:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\sin(-\beta) =$
$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$

Отримали *формулу синуса суми*:

$$\mathbf{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.}$$

Приклад 3. Знайти $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, якщо $\sin\alpha = 0{,}6$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Розв'язання.

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} - \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha).$$

Оскільки α – кут II чверті, то $\cos\alpha < 0$. Маємо:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - 0{,}6^2} = -0{,}8.$$

Тоді $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(0{,}6 - (-0{,}8)) = 0{,}7\sqrt{2}.$

Відповідь. $0{,}7\sqrt{2}$.

Приклад 4. Спростити вираз $\sin 12x\cos 4x + \cos 12x\sin 4x$.

Розв'язання. Неважко помітити, що маємо праву частину формули $\sin(\alpha + \beta)$, де $\alpha = 12x$, $\beta = 4x$.

Отже, $\sin 12x\cos 4x + \cos 12x\sin 4x = \sin(12x + 4x) = \sin 16x$.

Відповідь. $\sin 16x$.

3. Тангенс різниці і суми

Виразимо $\mathrm{tg}(\alpha - \beta)$ через $\mathrm{tg}\,\alpha$ і $\mathrm{tg}\,\beta$ за умови, що кожен із цих виразів має зміст, тобто за умови, що $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$. Маємо:

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}.$$

Поділимо чисельник і знаменник на добуток $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$. Матимемо:

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Отримали *формулу тангенса різниці*:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Для тангенса суми матимемо:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(\alpha-(-\beta))=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}(-\beta)}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Отримали *формулу тангенса суми*:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Приклад 5. Обчислити: 1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}42^\circ+\operatorname{tg}18^\circ}{1-\operatorname{tg}42^\circ\operatorname{tg}18^\circ}$.

Розв'язання. 1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=$

$=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}.$

2) $\frac{\operatorname{tg}42^\circ+\operatorname{tg}18^\circ}{1-\operatorname{tg}42^\circ\operatorname{tg}18^\circ}=\operatorname{tg}(42^\circ+18^\circ)=\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}.$

Відповідь. 1) $2-\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3}$.

4. Метод допоміжного кута

Для розв'язування задач вираз $a\sin x\pm b\cos x$ іноді доцільно подавати у вигляді синуса (або косинуса) суми чи різниці двох аргументів. Для цього у вказаному виразі винесемо за дужки множник $\sqrt{a^2+b^2}$, матимемо:

$$a\sin x\pm b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Числові коефіцієнти, отримані перед тригонометричними функціями в дужках, можна вважати косинусом і синусом (або синусом і косинусом) деякого кута, оскільки для них справджується основна тригонометрична тотожність. Справді, $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1.$ Зокрема, якщо введемо позначення $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$; $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$, де α – деякий кут, то в дужках отримаємо формулу суми або різниці синусів:

$$a\sin x\pm b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\alpha\pm\sin\alpha\cos x)=$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x\pm\alpha).$$

А якщо введемо позначення $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$; $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$, то отримаємо формулу різниці або суми косинусів:

$$a\sin x \pm b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos x\cos\alpha \pm \sin\alpha\sin x) =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x \mp \alpha).$$

Кут α, який ми ввели для згаданого перетворення виразу, називають *допоміжним кутом*, тому таке перетворення дістало назву – *метод допоміжного кута*.

Приклад 6. Знайдіть усі значення параметра a, при яких можлива рівність: $12\sin 4x - 5\cos 4x = a$.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки $\sqrt{12^2+5^2} = 13$, то маємо:

$$12\sin 4x - 5\cos 4x = 13\left(\frac{12}{13}\sin 4x - \frac{5}{13}\cos 4x\right) =$$
$$= 13(\cos\alpha\sin 4x - \cos 4x\sin\alpha) = 13\sin(4x - \alpha).$$

Отже, $13\sin(4x - \alpha) = a$, тобто $\sin(4x-\alpha) = \frac{a}{13}$. Оскільки $-1 \leqslant \sin(4x - \alpha) \leqslant 1$ і $\sin(4x-\alpha) = \frac{a}{13}$, то $-1 \leqslant \frac{a}{13} \leqslant 1$, звідки $-13 \leqslant a \leqslant 13$.

В і д п о в і д ь. $-13 \leqslant a \leqslant 13$.

А ще раніше...

Для складання тригонометричних таблиць важливо мати формули, за якими можна знаходити тригонометричні функції суми та різниці аргументів ($\alpha \pm \beta$) *через тригонометричні функції аргументів* α *і* β.

Першим, який дійшов до нас, трактатом, що містив такі формули, став «Альмагест» Птолемея. У цій праці видатний математик геометричним шляхом на основі теореми Птолемея виводить формули різниці і суми двох кутів для хорд.

Індійські вчені, зокрема Бхаскара (XII ст.), використовували формули, які в сучасній символіці можна записати так:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{R},$$ *де* R *– радіус кола.*

Цю та інші формули додавання використовували вчені середньовічних Азії та Європи.

У сучасному вигляді формули додавання стали використовувати після праці Г. Клюгера «Аналітична тригонометрія» (1770 р.). У ній автор на початку вводить тригонометричні функції не як лінії в колі, а як співвідношення між сторонами трикутника. Так, наприклад, формулу синуса суми Клюгер отримав з формули:

$\sin C = \sin A\cos B + \cos A\sin B$, *де* A, B, C *– кути трикутника.*

- Запам'ятайте формули косинуса різниці і суми, синуса різниці і суми, тангенса різниці і суми.
- Що таке метод допоміжного кута?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **Чи правильна рівність (23.1–23.2):**

23.1. 1) $\sin(2x + y) = \sin 2x\cos y - \cos 2x\sin y$;
2) $\cos(x - y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$?

23.2. 1) $\sin(3x - y) = \sin 3x\cos y - \cos 3x\sin y$;
2) $\cos(x + y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$?

Чи правильно виконано спрощення (23.3–23.4):

23.3. 1) $\sin 20°\cos 5° - \sin 5°\cos 20° = \sin(20° + 5°) = \sin 25°$;
2) $\cos 40°\cos 10° - \sin 40°\sin 10° = \cos(40° + 10°) = \cos 50°$?

23.4. 1) $\sin 15°\cos 6° + \cos 15°\sin 6° = \sin(15° + 6°) = \sin 21°$;
2) $\cos 17°\cos 7° + \sin 17°\sin 7° = \cos(17° + 7°) = \cos 24°$?

2 **За допомогою формул додавання перетворіть вираз (23.5–23.6):**

23.5. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$; 2) $\cos(45° + \alpha)$;
3) $\sin(\alpha - 45°)$; 4) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$.

23.6. 1) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$;
3) $\cos(45° - \alpha)$; 4) $\sin(\alpha + 60°)$.

За формулами додавання перевірте істинність формули зведення (23.7–23.8):

23.7. 1) $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$;
3) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$; 4) $\cos(270° + \alpha) = \sin\alpha$.

23.8. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$; 2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$;
3) $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$; 4) $\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$.

23.9. Запишіть кут 105° як суму 60° + 45° та обчисліть:
1) $\sin 105°$; 2) $\cos 105°$; 3) $\mathrm{tg}\,105°$.

23.10. Запишіть кут 15° як різницю 60° − 45° (або 45° − 30°) та обчисліть:
1) $\sin 15°$; 2) $\cos 15°$; 3) $\mathrm{tg}\,15°$.

Спростіть вираз (23.11–23.16):

23.11. 1) $\cos(\alpha + \beta) - \cos\alpha\cos\beta$; 2) $\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha - \beta)$;
3) $\cos(\alpha - 30°) - \frac{1}{2}\sin\alpha$; 4) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$.

23.12. 1) $\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos\beta$; 2) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\cos\alpha$.

23.13. 1) $\cos\alpha-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 2) $\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+3\sin\alpha$;

3) $2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin\alpha$; 4) $2\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\alpha$.

23.14. 1) $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\alpha$; 2) $\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos(\alpha+60°)$.

23.15. 1) $\cos2\alpha\cos7\alpha+\sin2\alpha\sin7\alpha$; 2) $\sin4\alpha\cos\alpha-\cos4\alpha\sin\alpha$;
3) $\cos4x\cos2x-\sin4x\sin2x$;
4) $\sin2y\cos8y+\cos2y\sin8y$.

23.16. 1) $\sin4y\cos y-\cos4y\sin y$; 2) $\cos3\alpha\cos\alpha-\sin3\alpha\sin\alpha$;
3) $\cos14x\cos2x+\sin14x\sin2x$;
4) $\sin2\beta\cos\beta+\sin\beta\cos2\beta$.

Знайдіть значення виразу (23.17–23.18):

23.17. 1) $\cos28°\cos62°-\sin28°\sin62°$;
2) $\sin11°\cos19°+\cos11°\sin19°$;
3) $\cos\frac{5\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}+\sin\frac{5\pi}{16}\sin\frac{\pi}{16}$;
4) $\sin\frac{7\pi}{18}\cos\frac{\pi}{18}-\cos\frac{7\pi}{18}\sin\frac{\pi}{18}$.

23.18. 1) $\cos31°\cos1°+\sin31°\sin1°$;
2) $\sin92°\cos2°-\cos92°\sin2°$;
3) $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{5\pi}{7}$;
4) $\sin\frac{3\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}+\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{3\pi}{16}$.

23.19. Відомо, що $\mathrm{tg}\,\alpha=4$, $\mathrm{tg}\,\beta=-0{,}5$. Знайдіть:
1) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$; 2) $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$.

23.20. Відомо, що $\mathrm{tg}\,\alpha=0{,}25$, $\mathrm{tg}\,\beta=-8$. Знайдіть:
1) $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$; 2) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$.

Обчисліть (23.21–23.22):

23.21. 1) $\dfrac{\mathrm{tg}\,51°-\mathrm{tg}\,6°}{1+\mathrm{tg}\,51°\,\mathrm{tg}\,6°}$; 2) $\dfrac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{7}+\mathrm{tg}\frac{6\pi}{7}}{1-\mathrm{tg}\frac{\pi}{7}\,\mathrm{tg}\frac{6\pi}{7}}$.

23.22. 1) $\dfrac{\mathrm{tg}\,18°+\mathrm{tg}\,12°}{1-\mathrm{tg}\,18°\,\mathrm{tg}\,12°}$; 2) $\dfrac{\mathrm{tg}\frac{7\pi}{16}-\mathrm{tg}\frac{3\pi}{16}}{1+\mathrm{tg}\frac{7\pi}{16}\,\mathrm{tg}\frac{3\pi}{16}}$.

Спростіть вираз (23.23–23.24):

23.23. 1) $\sin(\alpha + 45°) + \sin(\alpha - 45°)$;

2) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$;

3) $\frac{\cos(x-y) - \cos x \cos y}{\cos(x+y) + \sin x \sin y}$; 4) $\frac{\sin(x-y) - \sin x \cos y}{\cos x \cos y}$.

23.24. 1) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$;

2) $\cos(\alpha + 30°) + \cos(\alpha - 30°)$;

3) $\frac{\cos(x+y) - \cos x \cos y}{\cos(x-y) - \sin x \sin y}$; 4) $\frac{\sin(x+y) - \cos x \sin y}{\sin x \sin y}$.

3 Доведіть тотожність (23.25–23.26):

23.25. 1) $\cos(\alpha + \beta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\alpha\cos\beta$;

2) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$;

3) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$;

4) $\frac{\sin(\alpha-\beta) + 2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

23.26. 1) $\cos(\alpha - \beta) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \cos\alpha\cos\beta$;

2) $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1$;

3) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)$;

4) $\frac{\cos(\alpha-\beta) - 2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)} = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$.

Спростіть вираз (23.27–23.28):

23.27. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{5} + \alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{10} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{10} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{5} + \alpha\right)$;

2) $\cos(13° + 2x)\cos(17° - 2x) - \sin(13° + 2x)\sin(17° - 2x)$.

23.28. 1) $\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$;

2) $\cos(70° + 3x)\cos(10° + 3x) + \sin(70° + 3x)\sin(10° + 3x)$.

Знайдіть (23.29–23.30):

23.29. 1) $\sin(\alpha - 30^\circ)$, якщо $\cos\alpha = -0{,}6$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$, якщо $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

23.30. 1) $\cos(\alpha - 60^\circ)$, якщо $\sin\alpha = 0{,}8$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, якщо $\cos\alpha = \frac{8}{17}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

23.31. Дано: $\sin\alpha = 0{,}28$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\cos\beta = -0{,}6$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.
Знайдіть:
1) $\sin(\alpha + \beta)$; 2) $\cos(\alpha - \beta)$.

23.32. Дано: $\cos\alpha = 0{,}96$; $\sin\beta = -0{,}8$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.
Знайдіть:
1) $\sin(\alpha - \beta)$; 2) $\cos(\alpha + \beta)$.

23.33. Доведіть формули котангенса суми і різниці:

1) $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$; 2) $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$.

23.34. Застосовуючи формули з попередньої вправи, обчисліть:

1) $\frac{\operatorname{ctg}40^\circ\operatorname{ctg}20^\circ - 1}{\operatorname{ctg}40^\circ + \operatorname{ctg}20^\circ}$; 2) $\frac{\operatorname{ctg}70^\circ\operatorname{ctg}25^\circ + 1}{\operatorname{ctg}25^\circ - \operatorname{ctg}70^\circ}$.

4

23.35. Доведіть, що коли α, β, γ – кути трикутника, то $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin\gamma$.

23.36. Відомо, що $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\sin\beta = \frac{8}{17}$, α і β – кути II чверті.
Знайдіть $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

23.37. Відомо, що $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{12}{13}$, α і β – кути I чверті.
Знайдіть $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

23.38. Обчисліть: $\operatorname{tg}16^\circ + \frac{\sin 23^\circ\sin 83^\circ - \cos 443^\circ\cos 337^\circ}{\cos 128^\circ\sin 22^\circ - \cos 398^\circ\cos 338^\circ}$.

23.39. Доведіть тотожність: $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$.

23.40. Доведіть тотожність: $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

23.41. Знайдіть найменше і найбільше значення виразу:

1) $\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$; 2) $\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha$;

3) $4\cos2\alpha + 3\sin2\alpha$; 4) $2\sin3\alpha - 3\cos3\alpha$.

23.42. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$; 2) $y = \sqrt{3}\cos x + \sin x$;

3) $y = 12\cos 3x - 5\sin 3x$; 4) $y = \sin 2x + 3\cos 2x$.

23.43. Доведіть, що коли $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\cos\beta = \frac{5\sqrt{7}}{14}$, $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$, то $\alpha + \beta = 60°$.

23.44. Дано: $\sin\alpha = \frac{40}{41}$, $\sin\beta = -\frac{9}{41}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$. Доведіть, що $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$.

23.45. Відомо, що $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Знайдіть $\alpha - \beta$.

23.46. Знайдіть $\alpha + \beta$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = 7$, $0 < \alpha < 90°$, $0 < \beta < 90°$.

23.47. Доведіть, що $\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

23.48. Доведіть, що $\cos(\alpha - \beta) < \sin\alpha + \cos\beta$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Знайдіть значення виразу (23.49–23.52):

23.49. $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 7{,}5° \operatorname{tg}^2 52{,}5°}{\operatorname{tg}^2 52{,}5° - \operatorname{tg}^2 7{,}5°}$. **23.50.** $\frac{\operatorname{tg}^2 37{,}5° - \operatorname{tg}^2 7{,}5°}{\operatorname{tg}^2 37{,}5° \operatorname{tg}^2 7{,}5° - 1}$.

23.51. 1) $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$, якщо $\alpha = 17°$, $\beta = 12°$;

2) $(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\beta)$, якщо $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

23.52. $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$, якщо $\alpha = 27°$, $\beta = 19°$.

23.53. Нехай α, β, γ – кути гострокутного або тупокутного трикутника. Доведіть, що $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

23.54. Нехай α, β, γ – кути трикутника. Доведіть, що

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1.$$

23.55. Знайдіть усі натуральні значення параметра a, при яких можлива рівність: $8\cos 2x - 15\sin 2x = a^2 + 1$.

23.56. Знайдіть усі значення параметра b, при яких можлива рівність: $8\sin x - 6\cos x = b - 3$.

23.57. α – внутрішній кут правильного n-кутника, β – його зовнішній кут. Знайдіть n, якщо

$$\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=1.$$

23.58. Доведіть, що коли $0<\alpha<90°$, то $\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

23.59. α, β, γ – кути трикутника, причому γ – тупий. Порівняйте $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$ і 1.

23.60. Коефіцієнт корисної дії (ККД) деякого двигуна визначають за формулою $\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}\cdot100\%$, де T_1 – температура нагрівача (у градусах Кельвіна), T_2 – температура холодильника (у градусах Кельвіна). При якій мінімальній температурі нагрівача T_1 ККД цього двигуна буде не менше за 20 %, якщо температура холодильника $T_2=320$ К? Відповідь подайте у градусах Кельвіна.

23.61. (*Національна олімпіада США*). Доведіть, що кубічні корені з трьох різних простих чисел не можуть бути трьома членами (не обов'язково послідовними) деякої арифметичної прогресії.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

23.62. Для $\alpha=30°$ і $\alpha=60°$ порівняйте значення виразів:
1) $\sin2\alpha$ і $2\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\cos2\alpha$ і $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

§ 24. ФОРМУЛИ ПОДВІЙНОГО, ПОТРІЙНОГО І ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТІВ. ФОРМУЛИ ПОНИЖЕННЯ СТЕПЕНЯ

Розглянемо формули, що є *наслідками формул додавання*.

1. Формули подвійного кута

Формула

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

є істинною для будь-яких значень α і β. Якщо припустити, що $\beta=\alpha$, матимемо:

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha,$$ тобто

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Отримали *формулу синуса подвійного кута*.

Аналогічно для формули $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, коли $\beta=\alpha$, матимемо: $\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$, тобто

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Отримали *формулу косинуса подвійного кута.*

Якщо в отриману формулу спочатку замість $\cos^2\alpha$ підставити $1-\sin^2\alpha$, а потім замість $\sin^2\alpha$ підставити $1-\cos^2\alpha$, отримаємо ще дві формули косинуса подвійного кута:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \text{та} \quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Так само з формули $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ матимемо, що $\operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha}$, тобто

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Отримали *формулу тангенса подвійного кута*, яка є істинною, коли $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}2\alpha$ існують.

Приклад 1. Спростити вираз: 1) $\dfrac{2\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha}$; 2) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$.

Розв'язання. 1) $\dfrac{2\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha} = \dfrac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$

2) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha - \sin\alpha} =$
$= \cos\alpha + \sin\alpha.$

Відповідь. 1) $\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\cos\alpha + \sin\alpha$.

Приклад 2. Обчислити $\sin 15°\cos 15°$.

Розв'язання. $\sin 15°\cos 15° =$
$= \dfrac{1}{2}\cdot 2\sin 15°\cos 15° = \dfrac{1}{2}\sin(2\cdot 15°) = \dfrac{1}{2}\sin 30° = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = 0,25.$

Відповідь. 0,25.

Зауважимо, що отримані формули можна застосовувати для будь-якого кута 2α, адже будь-який кут можна записати як подвійний. Наприклад, $\sin 6x = \sin(2\cdot 3x) = 2\sin 3x\cos 3x$;

$$\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(2\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}.$$

2. *Формули пониження степеня*

Якщо з формул $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ і $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ виразити відповідно $\sin^2\alpha$ і $\cos^2\alpha$, отримаємо:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \quad \text{та} \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Ці формули називають *формулами пониження степеня*. Вони дають можливість записати квадрати синуса і косинуса кута α через косинус кута 2α.

Оскільки $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$, маємо ще одну формулу пониження степеня:

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}.$$

Ця формула істинна, якщо $\operatorname{tg}\alpha$ існує.

Приклад 3. Понизити степінь у виразі:

1) $\cos^2 2\alpha$; 2) $\sin^2\frac{\alpha}{4}$; 3) $\operatorname{tg}^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. 1) $\cos^2 2\alpha = \frac{1+\cos(2\cdot 2\alpha)}{2} = \frac{1+\cos 4\alpha}{2}$.

2) $\sin^2\frac{\alpha}{4} = \frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{4}\right)}{2} = \frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}$.

3) $\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\cos\left(2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{1+\cos\left(2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \frac{1-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} =$

$= \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)} = \frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

Відповідь. 1) $\frac{1+\cos 4\alpha}{2}$; 2) $\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}$; 3) $\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

3. *Формули половинного кута*

Якщо у формули $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

замість кута α підставити кут $\frac{\alpha}{2}$, отримаємо *формули половинного кута*:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2};\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2};\quad \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Приклад 4. Знайти $\sin\frac{\alpha}{2}$, якщо $\cos\alpha=\frac{7}{9}$ і $2\pi<\alpha<\frac{5\pi}{2}$.

Розв'язання. За формулою половинного кута маємо $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$. Оскільки $2\pi<\alpha<\frac{5\pi}{2}$, то $\frac{2\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\frac{5\pi}{2}}{2}$, тобто $\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{5\pi}{4}$, отже, $\sin\frac{\alpha}{2}<0$, і тому

$$\sin\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{7}{9}}{2}}=-\sqrt{\frac{1}{9}}=-\frac{1}{3}.$$

Відповідь. $-\frac{1}{3}$.

Для $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ можна отримати ще дві формули, адже

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\text{і}\quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Отже, маємо:

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\quad \text{та}\quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Приклад 5. Обчислити $\mathrm{ctg}\,15°$.

Розв'язання.

$$\mathrm{ctg}\,15°=\frac{1}{\mathrm{tg}\,15°}=\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{30°}{2}}=\frac{1}{\frac{\sin 30°}{1+\cos 30°}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=2+\sqrt{3}.$$

Відповідь. $2+\sqrt{3}$.

4. Формули потрійного кута

З'ясуємо, як записати $\sin 3\alpha$ через $\sin\alpha$. Маємо:

$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 2\sin(1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$

Отже, маємо *формулу синуса потрійного кута*:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

У той самий спосіб можна отримати *формулу косинуса потрійного кута*:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Також маємо:

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Отримали *формулу тангенса потрійного кута*:

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Приклад 6. Довести тотожність:

$$\frac{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 3.$$

Доведення. Перетворимо ліву частину тотожності:

$$\frac{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos^3\alpha - (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)}{\cos\alpha} +$$

$$+ \frac{\sin^3\alpha + 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{3\cos\alpha - 3\cos^3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{3\sin\alpha - 3\sin^3\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{3\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha)}{\cos\alpha} + \frac{3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha)}{\sin\alpha} = 3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha =$$

$= 3(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 3.$

Отримали праву частину тотожності. ■

5. Запис тригонометричних функцій через тангенс половинного кута

Для обчислення і спрощення виразів та в подальшому для розв'язування тригонометричних рівнянь можуть бути корисними формули, за допомогою яких можна перейти від тригонометричних функцій кута до тангенса вдвічі меншого кута. Маємо:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 2\cdot\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} - 1 = \frac{2-\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Отже, отримали формули:

!

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad \cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Застосовувати ці формули треба дуже обережно, оскільки у їх лівої і правої частин різні області допустимих значень змінної, що, наприклад під час розв'язування рівнянь може призвести до втрати коренів або появи сторонніх коренів.

Приклад 7. Знайти $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$, якщо $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо:

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot 2}{1+2^2} = \frac{4}{5}; \quad \cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-2^2}{1+2^2} = -\frac{3}{5}.$$

Тоді $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$;

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$.

В і д п о в і д ь. $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$; $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$.

А ще раніше...

Складаючи таблиці хорд, Птолемей уже використовував співвідношення, яке у сучасних позначеннях має вигляд:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

Деякі формули, що після спрощень зводилися до цієї формули, знайшли і давньоіндійські математики. Індуси знали також і деякі інші тригонометричні формули. Так, наприклад, Абу-л-Вафа (940–998) винайшов формулу

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Ця, а також формули подвійного та половинного кутів для синуса і косинуса, є у працях багатьох середньовічних вчених.

Англієць Джон Пелль, француз Г. Роберваль та інші математики XVIII ст. різними шляхами прийшли до формули

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Видатний математик Л. Ейлер у праці «Введення в аналіз» запропонував формулу:

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha).$$

Яка, проте, зараз не має широкого вжитку.

- Запам'ятайте формули синуса, косинуса і тангенса подвійного кута. • Запам'ятайте формули пониження степеня. • Запам'ятайте формули половинного кута. • Запишіть формули потрійного кута. • Запишіть формули, що виражають тригонометричні функції через тангенс половинного аргументу.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **Чи правильно використано формули подвійного кута (24.1–24.2):**

24.1. 1) $2\sin x\cos x=\sin 2x$; 2) $\cos 2y=\cos^2 y+\sin^2 y$;

3) $\operatorname{tg}4x=\dfrac{2\operatorname{tg}2x}{1-\operatorname{tg}^2 2x}$; 4) $\sin 6\alpha=2\sin 12\alpha\cos 12\alpha$?

24.2. 1) $\cos^2\beta-\sin^2\beta=\cos 2\beta$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$;

3) $\sin 4y=2\sin 2y\cos 2y$; 4) $\cos 8\alpha=\cos^2 16\alpha-\sin^2 16\alpha$?

2 **Спростіть вираз (24.3–24.4):**

24.3. 1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{\sin 2\beta}{\cos\beta}-\sin\beta$;

3) $\dfrac{\cos\alpha\sin 2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$; 4) $\cos 2x-\cos^2 x$;

5) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}+\sin\alpha$;

6) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}$.

24.4. 1) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha}$;

2) $\dfrac{\sin 2x}{\sin x}-\cos x$;

3) $\cos 2\beta+\sin^2\beta$;

4) $\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}-\cos x$.

Скоротіть дріб (**24.5–24.6**):

24.5. 1) $\dfrac{\sin 40°}{\sin 20°}$;

2) $\dfrac{2\cos 10°}{\sin 20°}$;

3) $\dfrac{\cos 50°}{\sin 25°+\cos 25°}$;

4) $\dfrac{\sin 40°-\cos 40°}{\cos 80°}$.

24.6. 1) $\dfrac{\cos 5°}{\sin 10°}$;

2) $\dfrac{\sin 100°}{2\sin 50°}$;

3) $\dfrac{\cos 20°+\sin 20°}{\cos 40°}$;

4) $\dfrac{\cos 140°}{\sin 70°-\cos 70°}$.

Обчисліть (**24.7–24.8**):

24.7. 1) $2\sin 75°\cos 75°$;

2) $2\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}$;

3) $\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}$;

4) $(\cos 15°-\sin 15°)^2$;

5) $\cos^2 22°30'-\sin^2 22°30'$;

6) $\sin^2\dfrac{5\pi}{12}-\cos^2\dfrac{5\pi}{12}$.

24.8. 1) $2\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}$;

2) $2\sin 22°30'\cos 22°30'$;

3) $\sin\dfrac{5\pi}{12}\cos\dfrac{5\pi}{12}$;

4) $(\sin 75°+\cos 75°)^2$;

5) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$;

6) $\sin^2 15°-\cos^2 15°$.

Спростіть вираз (**24.9–24.10**):

24.9. 1) $\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$;

2) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}$;

3) $\dfrac{\sin 4x}{\sin 2x}$;

4) $4\sin\dfrac{\alpha}{8}\cos\dfrac{\alpha}{8}$;

5) $\cos 5x\sin 5x$;

6) $4\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha$.

24.10. 1) $\dfrac{\sin 6\alpha}{\cos 3\alpha}$;

2) $\dfrac{\cos 8\alpha}{\sin 4\alpha+\cos 4\alpha}$;

3) $8\sin 10\beta\cos 10\beta$;

4) $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha$.

Спростіть (24.11–24.12):

24.11. 1) $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,25^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\,25^\circ}$; 2) $\dfrac{8\,\mathrm{tg}\,40^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\,40^\circ}$.

24.12. 1) $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,5^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\,5^\circ}$; 2) $\dfrac{4\,\mathrm{tg}\,20^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\,20^\circ}$.

24.13. Знайдіть $\mathrm{tg}\,2\beta$, якщо: 1) $\mathrm{tg}\,\beta=\sqrt{2}$; 2) $\mathrm{ctg}\,\beta=\dfrac{1}{3}$.

24.14. Знайдіть $\mathrm{tg}\,2\alpha$, якщо: 1) $\mathrm{tg}\,\alpha=-\sqrt{3}$; 2) $\mathrm{ctg}\,\alpha=0,5$.

24.15. Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо: 1) $\cos\alpha=0,1$; 2) $\sin\alpha=-\dfrac{1}{4}$.

24.16. Знайдіть $\cos 2x$, якщо: 1) $\cos x=-\dfrac{1}{3}$; 2) $\sin x=0,4$.

Запишіть тригонометричну функцію кута через тригонометричну функцію вдвічі меншого кута (24.17–24.18):

24.17. 1) $\cos\alpha$; 2) $\sin 8\alpha$; 3) $\mathrm{tg}\,3\beta$;

4) $\sin\dfrac{x}{3}$; 5) $\cos\dfrac{\alpha}{8}$; 6) $\mathrm{tg}\,(\alpha-\beta)$.

24.18. 1) $\sin\alpha$; 2) $\mathrm{tg}\,6\alpha$; 3) $\cos 5x$;

4) $\mathrm{tg}\,\dfrac{\beta}{2}$; 5) $\sin\dfrac{x}{4}$; 6) $\cos(\alpha+\beta)$.

Виконайте пониження степеня у виразі (24.19–24.20):

24.19. 1) $\cos^2 3\alpha$; 2) $\sin^2 8x$.

24.20. 1) $\sin^2 4\alpha$; 2) $\cos^2 5x$.

24.21. Знайдіть $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}\,2\alpha$, якщо:

1) $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{1}{3}$; 2) $\mathrm{ctg}\,\alpha=-0,5$.

24.22. Знайдіть $\sin 2\beta$, $\cos 2\beta$, $\mathrm{tg}\,2\beta$, якщо:

1) $\mathrm{tg}\,\beta=-3$; 2) $\mathrm{ctg}\,\beta=2$.

Знайдіть $\sin 3\alpha$ і $\cos 3\alpha$, якщо (24.23–24.24):

24.23. 1) $\sin\alpha=0,8$ і $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$; 2) $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$ і $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

24.24. 1) $\cos\alpha=0,6$ і $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$; 2) $\sin\alpha=-\dfrac{12}{13}$ і $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

Понизьте степінь у виразі (24.25–24.26):

24.25. 1) $\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{4}-30^\circ\right)$; 2) $\sin^2\left(\dfrac{5\alpha}{2}+10^\circ\right)$;

3) $\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 4) $\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

24.26. 1) $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-16°\right)$; 2) $\cos^2\left(\frac{\alpha}{8}-15°\right)$;

3) $\operatorname{tg}^2\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)$; 4) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$.

24.27. Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ і $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

24.28. Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\cos\alpha=-0{,}8$ і $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

3 Подайте у вигляді добутку вираз (24.29–24.30):

24.29. 1) $1+\cos\alpha$; 2) $1-\cos 2\alpha$; 3) $1+\cos 10°$; 4) $1-\cos 15°$; 5) $1+\sin\beta$; 6) $1-\sin 20°$.

24.30. 1) $1-\cos x$; 2) $1+\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $1-\cos 20°$; 4) $1+\cos 25°$; 5) $1-\sin x$; 6) $1+\sin 40°$.

24.31. Спростіть вираз: 1) $\frac{1-\cos 4\alpha}{\sin^2 2\alpha}$; 2) $(1+\cos 2x)\operatorname{tg} x$.

24.32. Спростіть вираз: 1) $\frac{1+\cos 6\alpha}{2\cos 3\alpha}$; 2) $(1-\cos 2x)\operatorname{ctg} x$.

24.33. Відомо, що $\cos\alpha=\frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$. Знайдіть:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

24.34. Відомо, що $\cos\alpha=-\frac{7}{25}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Знайдіть:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

24.35. Чи існує таке значення α, при якому справджується рівність:

1) $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{3}{7}$; 2) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{5}{4}$?

24.36. Чи існує таке значення β, при якому справджується рівність:

1) $\sin\beta\cos\beta=-0{,}75$; 2) $\sin^2\beta-\cos^2\beta=0{,}1$?

24.37. Знайдіть $\frac{\cos\beta}{2-\sin\beta}$, якщо $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}$.

24.38. Знайдіть $\frac{3\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$.

Спростіть вираз (24.39–24.40):

24.39. 1) $\dfrac{2}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$; 2) $\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)\sin^2 2\alpha$;

3) $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}-\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$; 4) $\dfrac{\sin 4x}{1-\cos 4x}\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 2x}$.

24.40. 1) $(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)\sin 2x$; 2) $\dfrac{\sin 8x}{1+\cos 8x}\cdot\dfrac{\cos 4x}{1+\cos 4x}$.

Доведіть тотожність (24.41–24.42):

24.41. 1) $\left(\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)\sin 2\alpha=4\sin\alpha$;

2) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}=-\operatorname{tg}2\alpha$.

24.42. 1) $\left(\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)\sin 2\alpha=4\cos\alpha$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$.

24.43. Спростіть вираз $\sin^3\alpha\cos 3\alpha+\cos^3\alpha\sin 3\alpha$ і знайдіть його значення для $\alpha=7°30'$.

24.44. Спростіть вираз: $\dfrac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}$.

4 **24.45.** Знайдіть $\sin\alpha$, якщо $\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}=0{,}4$.

24.46. Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\cos\alpha+\sin\alpha=-0{,}2$.

Спростіть вираз (24.47–24.48):

24.47. 1) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$; 2) $\sqrt{\dfrac{1-\cos 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}}$, якщо $\dfrac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$.

24.48. 1) $\sqrt{\dfrac{1+\cos 4\alpha}{2}}$, якщо $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$; 2) $\sqrt{\dfrac{1+\cos 3\alpha}{1-\cos 3\alpha}}$.

24.49. Косинус кута при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 0,8. Знайдіть косинус і синус кута при вершині цього трикутника.

Знайдіть (24.50–24.51):

24.50. 1) $\sin 4\alpha$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha=-3$; 2) $\cos 3\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=2$.

24.51. 1) $\cos 4\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=-2$; 2) $\sin 3\alpha$, якщо $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$.

24.52. Доведіть формули потрійного аргументу:
1) $\cos 3\alpha = 4\cos\alpha\cos(60° - \alpha)\cos(60° + \alpha)$;
2) $\sin 3\alpha = 4\sin\alpha\sin(60° - \alpha)\sin(60° + \alpha)$;
3) $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60° - \alpha)\operatorname{tg}(60° + \alpha)$.

Обчисліть (24.53–24.54):

24.53. 1) $\sin 20°\sin 40°\sin 60°\sin 80°$; 2) $\operatorname{tg} 80°\operatorname{tg} 60°\operatorname{tg} 20°$.

24.54. 1) $\cos 20°\cos 40°\cos 60°\cos 80°$; 2) $\operatorname{tg} 10°\operatorname{tg} 50°\operatorname{tg} 70°$.

24.55. Доведіть, що $\frac{1}{\sin 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°} = 4$.

24.56. Відомо, що $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$. Знайдіть: $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.

24.57. Знайдіть найбільше значення виразу $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

24.58. Знайдіть найменше значення виразу $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Знайдіть (24.59–24.60):

24.59. 1) $\sin\alpha$, якщо $\sin 2\alpha \geqslant \frac{3}{5}$ і $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{1}{3}$;

2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, якщо $\cos 2\alpha \leqslant \frac{1}{8}$ і $\cos\alpha \leqslant -\frac{3}{4}$.

24.60. 1) $\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\sin 2\alpha \geqslant \frac{8}{17}$ і $\operatorname{ctg}\alpha \leqslant \frac{1}{4}$;

2) $\sin\frac{\alpha}{2}$, якщо $\cos 2\alpha \leqslant -\frac{7}{8}$ і $\cos\alpha \leqslant -\frac{1}{4}$.

24.61. Обчисліть: 1) $\sin 18°\sin 54°$; 2) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$.

24.62. Відомо, що $\cos 2\alpha = 0{,}2$. Знайдіть: $\cos^8\alpha - \sin^8\alpha$.

24.63. Відомо, що $\cos 2\alpha = 0{,}4$. Знайдіть: $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha$.

24.64. Знайдіть α і β – міри кутів рівнобічної трапеції, якщо $\sqrt{2}\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha + \sin\beta$.

24.65. Знайдіть величини гострих кутів α і β прямокутного трикутника, якщо $\sin 2\alpha = 1 + \sin(3\alpha - \beta)$ і $\alpha > \beta$.

24.66. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\alpha}}$, якщо $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$;

2) $\sqrt{2 - \sqrt{2 + 2\cos\alpha}}$, якщо $2\pi \leqslant \alpha \leqslant 3\pi$.

24.67. На бензозаправці 1 літр бензину коштує 22 грн. Марина залила у бак 30 літрів бензину та придбала пакет соку вартістю 12 грн. Скільки решти вона отримала із 700 грн?

24.68. У кожній клітинці дошки 5×5 сидить жук. У деякий момент часу всі жуки переповзають у сусідні по горизонталі чи по вертикалі клітинки. Доведіть, що при цьому принаймні одна клітинка залишиться порожньою.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

24.69. Розв'яжіть систему рівнянь (x і y – змінні): $\begin{cases} x + y = a, \\ x - y = b. \end{cases}$

24.70. Порівняйте значення виразів $\sin\alpha + \sin\beta$ і $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, якщо:

1) $\alpha = 45°$, $\beta = 135°$; 2) $\alpha = 90°$, $\beta = -30°$.

§ 25. ФОРМУЛИ СУМИ І РІЗНИЦІ ОДНОЙМЕННИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ. ФОРМУЛИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДОБУТКУ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ У СУМУ

Розглянемо ще кілька формул, що є *наслідками з формул додавання*.

1. Формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій на добуток

Додамо почленно формули додавання:

$$\begin{array}{l} \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \\ + \\ \sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y \\ \hline \sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y. \end{array}$$

Нехай $x + y = \alpha$ і $x - y = \beta$. Тоді $2x = \alpha + \beta$, $2y = \alpha - \beta$, звідки $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ і $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Підставимо отримані для x і y вирази в отриману вище суму. Матимемо *формулу суми синусів*:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Замінимо у цій формулі β на $-\beta$, отримаємо:

$$\sin\alpha + \sin(-\beta) = 2\sin\frac{\alpha+(-\beta)}{2}\cos\frac{\alpha-(-\beta)}{2}.$$

Отже, маємо *формулу різниці синусів*:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Аналогічно можна отримати *формули суми та різниці косинусів*:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Оскільки $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\left(-\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = -\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$, то останню формулу можна записати ще й так:

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Для суми тангенсів маємо:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Отримали *формулу суми тангенсів*:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Замінивши в цій формулі β на $-\beta$ і врахувавши, що $\operatorname{tg}(-\beta) = -\operatorname{tg}\beta$, матимемо *формулу різниці тангенсів*:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Приклад 1. Подати у вигляді добутку вираз:

1) $\sin 4\alpha + \sin 2\alpha$; 2) $\cos 6\alpha - \sin 2\alpha$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) За формулою суми синусів:

$$\sin 4\alpha + \sin 2\alpha = 2\sin\frac{4\alpha+2\alpha}{2}\cos\frac{4\alpha-2\alpha}{2} = 2\sin 3\alpha\cos\alpha.$$

2) Використаємо формулу різниці косинусів, ураховуючи, що за формулою зведення $\sin 2\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$. Маємо:

$$\cos 6\alpha - \sin 2\alpha = \cos 6\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) =$$

$$= -2\sin\frac{6a + \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}{2}\sin\frac{6a - \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}{2} =$$

$$= -2\sin\frac{4a+\frac{\pi}{2}}{2}\sin\frac{8a-\frac{\pi}{2}}{2} = -2\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

Відповідь. 1) $2\sin 3\alpha\cos\alpha$; 2) $-2\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

Приклад 2. Обчислити $\sin 75° - \sin 15°$.

Розв'язання. За формулою різниці синусів:

$\sin 75° - \sin 15° =$

$$= 2\sin\frac{75°-15°}{2}\cos\frac{75°+15°}{2} = 2\sin 30°\cos 45° = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Приклад 3. Подати вираз $\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha$ у вигляді частки.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, то вираз можна записати у вигляді різниці тангенсів:

$$\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\frac{1}{2}\cos\alpha} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\alpha}.$$

Відповідь. $\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\alpha}$.

Приклад 4. Подати вираз $\sqrt{2} + 2\cos\alpha$ у вигляді добутку.

Розв'язання. Винесемо число 2 за дужки та врахуємо, що $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$. Матимемо: $2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\alpha\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\right) =$

$$= 2\cdot 2\cos\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{4}-\alpha}{2} = 4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Відповідь. $4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Приклад 5. Нехай A, B, C – внутрішні кути трикутника. Довести, що $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2\cos A\cos B\cos C = 2$.

Доведення. Оскільки $\sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}$, $\sin^2 B = \frac{1-\cos 2B}{2}$

і $C = \pi - (A + B)$, матимемо:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + \sin^2(\pi - (A+B)) =$$
$$= \frac{2-(\cos 2A + \cos 2B)}{2} + 1 - \cos^2(A+B) =$$
$$= \frac{2-2\cos(A+B)\cos(A-B)}{2} + 1 - \cos^2(A+B) =$$
$$= 1 - \cos(A+B)\cos(A-B) + 1 - \cos^2(A+B) =$$
$$= 2 - \cos(A+B)(\cos(A-B) + \cos(A+B)) =$$
$$= 2 - \cos(\pi - C)\cdot 2\cos A\cos B = 2 + 2\cos A\cos B\cos C.$$

Звідси $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2\cos A\cos B\cos C = 2.$ ■

2. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

Додамо почленно формули додавання:

$$\begin{array}{r} \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ + \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \hline \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta \end{array}.$$

Звідси маємо:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

Віднімемо почленно від першої формули додавання другу:

$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$, звідси

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Додамо почленно формули додавання:

$$\begin{array}{r} \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ + \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \hline \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \end{array}$$, звідси:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

Отримали три *формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму*.

Приклад 6. Обчислити: $\sin 75°\sin 105°$.

Р о з в ' я з а н н я. За формулою добутку синусів маємо:

$$\sin 75°\sin 105° = \frac{1}{2}(\cos(75° - 105°) - \cos(75° + 105°)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos(-30°) - \cos 180°) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - (-1)\right) = \frac{\sqrt{3}+2}{4}.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$.

Приклад 7. Спростити вираз: $2\cos 7x \cos 5x - \cos 2x$.

Розв'язання. Застосуємо формулу добутку косинусів:

$$2\cos 7x \cos 5x - \cos 2x = 2\cdot\frac{1}{2}(\cos(7x-5x)+\cos(7x+5x)) - \cos 2x =$$
$$= \cos 2x + \cos 12x - \cos 2x = \cos 12x.$$

Відповідь. $\cos 12x$.

Приклад 8. Довести, що

$$\sin 10° + \sin 20° + \sin 30° + \sin 40° + \sin 50° = \frac{\sin 25°}{2\sin 5°}.$$

Доведення. Якщо в умові дано суму синусів або косинусів, кути яких утворюють арифметичну прогресію, для спрощення такого виразу його доцільно помножити і поділити на $2\sin\frac{\alpha}{2}$, де α – різниця прогресії, а потім застосувати формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму. Ураховуючи це, спростимо ліву частину рівності:

$$\sin 10° + \sin 20° + \sin 30° + \sin 40° + \sin 50° =$$
$$= \frac{1}{2\sin 5°}(2\sin 5° \sin 10° + 2\sin 5° \sin 20° + \ldots + 2\sin 5° \sin 50°) =$$
$$= \frac{1}{2\sin 5°}(\cos(10° - 5°) - \cos(10° + 5°) + \cos(20° - 5°) -$$
$$-\cos(20° + 5°) + \ldots + \cos(50° - 5°) - \cos(50° + 5°)) = \frac{\cos 5° - \cos 55°}{2\sin 5°} =$$
$$= \frac{2\sin\frac{5° + 55°}{2}\sin\frac{5° - 55°}{2}}{2\sin 5°} = \frac{\sin 25°}{2\sin 5°}. \blacksquare$$

А ще раніше...

Протягом століть практикували як перетворення добутку тригонометричних функцій у суму, так і перетворення суми в добуток. Необхідність таких перетворень залежала не лише від мети перетворень, а й від обчислювальних засобів, що використовувалися на той час. Дія множення, особливо якщо мова йшла про багатоцифрові числа, завжди вважалася складнішою, ніж дія додавання.

Тому в давні часи, щоб замінити множення додаванням, намагалися знайти формули для перетворення добутку тригонометричних величин у суму.

У XVI ст. астрономи, у тому числі й один з попередників Кеплера, датський учений Тихо Браге, застосовували формулу для заміни добутку сумою.

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

Для доведення тотожностей або обчислень формули перетворення добутку в суму застосовують і донині.

- Запам'ятайте формули суми і різниці синусів; суми і різниці косинусів; суми і різниці тангенсів. • Запишіть формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **Чи правильно використано формули суми і різниці тригонометричних функцій (25.1–25.2):**

25.1. 1) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$;

2) $\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$;

3) $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$;

4) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\cos(x+y)}{\cos x\cos y}$?

25.2. 1) $\cos x + \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}$;

2) $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$?

Перетворіть вираз на добуток (25.3–25.4):

25.3. 1) $\sin 3\alpha + \sin 5\alpha$; 2) $\cos 4\alpha - \cos 2\alpha$;
3) $\sin 6\alpha - \sin 2\alpha$; 4) $\cos 7\alpha + \cos\alpha$.

25.4. 1) $\sin 8\alpha - \sin 2\alpha$; 2) $\cos 4\alpha + \cos 6\alpha$;
3) $\sin 7\alpha + \sin 3\alpha$; 4) $\cos 5\alpha - \cos\alpha$.

2 **Подайте вираз у вигляді добутку (25.5–25.6):**

25.5. 1) $\sin(12^\circ + \alpha) - \sin\alpha$; 2) $\cos(18^\circ + x) + \cos(12^\circ + x)$;
3) $\cos 36^\circ - \cos 18^\circ$; 4) $\sin 70^\circ + \sin 20^\circ$.

25.6. 1) $\cos(10^\circ + \beta) - \cos\beta$; 2) $\sin(\alpha + 10^\circ) + \sin(\alpha + 20^\circ)$;
3) $\cos 25^\circ + \cos 35^\circ$; 4) $\sin 12^\circ - \sin 8^\circ$.

Доведіть, що (25.7–25.8):

25.7. 1) $\cos 21^\circ - \cos 39^\circ = \sin 9^\circ$; 2) $\sin 70^\circ + \sin 50^\circ = \sqrt{3}\cos 10^\circ$.

25.8. 1) $\sin 65^\circ - \sin 5^\circ = \cos 35^\circ$; 2) $\cos 61^\circ + \cos 1^\circ = \sqrt{3}\cos 31^\circ$.

Запишіть вираз у вигляді частки (25.9–25.10):

25.9. 1) $\operatorname{tg} 5\alpha - \operatorname{tg} \alpha$; 2) $\operatorname{tg} 18° + \operatorname{tg} 12°$.

25.10. 1) $\operatorname{tg} 4\alpha + \operatorname{tg} \alpha$; 2) $\operatorname{tg} 40° - \operatorname{tg} 10°$.

Перетворіть добуток на суму (25.11–25.12):

25.11. 1) $\sin 4\alpha \sin \alpha$; 2) $\cos 3x \cos 2x$; 3) $\sin 5\beta \cos \beta$; 4) $\sin 20° \sin 10°$; 5) $\cos 11° \cos 41°$; 6) $\sin 4° \cos 5°$.

25.12. 1) $\sin 6x \sin x$; 2) $\cos 4\alpha \cos \alpha$; 3) $\sin \beta \cos 3\beta$; 4) $\sin 16° \sin 14°$; 5) $\cos 8° \cos 68°$; 6) $\sin 12° \cos 9°$.

Обчисліть (25.13–25.14):

25.13. 1) $\sin 105° \sin 15°$; 2) $\cos 15° \sin 75°$.

25.14. 1) $\cos 75° \cos 105°$; 2) $\sin 15° \cos 105°$.

Спростіть вираз (25.15–25.16):

25.15. 1) $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 7\alpha}$; 2) $\dfrac{\sin 9\alpha - \sin \alpha}{\cos 9\alpha - \cos \alpha}$.

25.16. 1) $\dfrac{\cos 5\alpha - \cos 3\alpha}{\sin 5\alpha + \sin 3\alpha}$; 2) $\dfrac{\sin 14\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 14\alpha + \cos 2\alpha}$.

3 Запишіть вираз у вигляді добутку (25.17–25.18):

25.17. 1) $\sin 10° + \cos 18°$; 2) $\cos 40° - \sin 20°$.

25.18. 1) $\cos 32° + \sin 40°$; 2) $\sin 50° - \cos 70°$.

Перетворіть вираз на добуток (25.19–25.20):

25.19. 1) $\sin \alpha - \cos \beta$; 2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) + \sin \alpha$.

25.20. 1) $\cos \alpha + \sin \beta$; 2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right) - \cos \alpha$.

25.21. Доведіть формули суми та різниці котангенсів:

1) $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$; 2) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$.

Запишіть вираз у вигляді частки (25.22–25.23):

25.22. 1) $\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x$; 2) $\operatorname{ctg} 18° + \operatorname{ctg} 12°$.

25.23. 1) $\operatorname{ctg} 3\alpha + \operatorname{ctg} \alpha$; 2) $\operatorname{ctg} 50° - \operatorname{ctg} 5°$.

Подайте вираз у вигляді добутку (25.24–25.25):

25.24. 1) $\sin^2 40° - \sin^2 20°$; 2) $\cos^2 70° - \cos^2 50°$.

25.25. 1) $\sin^2 80° - \sin^2 40°$; 2) $\cos^2 10° - \cos^2 50°$.

Доведіть тотожність (25.26–25.27):

25.26. 1) $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

2) $\dfrac{\sin 6\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 6\alpha - \cos 2\alpha} = -\operatorname{ctg} 2\alpha$;

3) $\dfrac{\sin 9\alpha - \sin\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 9\alpha + \cos\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha;$

4) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 5\alpha + \sin 9\alpha + \sin 13\alpha}{\cos\alpha + \cos 5\alpha + \cos 9\alpha + \cos 13\alpha} = \operatorname{tg} 7\alpha.$

25.27. 1) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right);$ 2) $\dfrac{\cos\beta + \cos 5\beta}{\sin 5\beta - \sin\beta} = \operatorname{ctg} 2\beta;$

3) $\dfrac{\sin 15\alpha - \sin\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 15\alpha + \cos\alpha + \cos 7\alpha} = \operatorname{tg} 7\alpha;$

4) $\dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x} = \operatorname{tg} 4x.$

Подайте вираз у вигляді добутку (25.28–25.29):

25.28. 1) $\dfrac{1}{2} + \cos\alpha;$ 2) $2\sin\alpha - 1;$

3) $\sqrt{3} - 2\cos\alpha;$ 4) $4\sin\alpha + 2\sqrt{2}.$

25.29. 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \sin\alpha;$ 2) $\sqrt{2} + 2\cos x.$

Подайте вираз у вигляді частки (25.30–25.31):

25.30. 1) $\operatorname{tg}\alpha + 1;$ 2) $3\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{3}.$

25.31. 1) $1 - \operatorname{tg}\alpha;$ 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha + 3.$

Доведіть тотожність (25.32–25.33):

25.32. 1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{14} - 2\alpha\right)\cos\left(2\alpha - \dfrac{4\pi}{7}\right) = \dfrac{1}{2}\cos\left(4\alpha - \dfrac{9\pi}{14}\right);$

2) $4\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 - 4\cos^2\alpha.$

25.33. 1) $\sin\left(3\alpha - \dfrac{\pi}{10}\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{5} - 3\alpha\right) = \dfrac{1}{2}\cos\left(6\alpha - \dfrac{7\pi}{10}\right);$

2) $2\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2\cos^2\alpha - 1.$

25.34. Перетворіть на добуток вираз:

1) $\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha;$

2) $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \sin 8\alpha.$

Спростіть вираз (25.35–25.36):

25.35. 1) $\dfrac{\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha};$ 2) $\dfrac{\sin 5\alpha - 2\sin 3\alpha\cos 3\alpha}{2\sin^2 3\alpha + \cos 5\alpha - 1}.$

25.36. 1) $\dfrac{\sin 4\alpha + 2\cos 3\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha - 2\sin 3\alpha - \cos 2\alpha};$ 2) $\dfrac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha + \sin 5\alpha}{2\cos^2 2\alpha + \cos 5\alpha - 1}.$

Обчисліть (25.37–25.38):

25.37. 1) $2\cos 80^\circ \cos 50^\circ + \sin 140^\circ$; 2) $4\cos 40^\circ - \dfrac{1}{\sin 70^\circ}$.

25.38. 1) $2\sin 70^\circ \sin 50^\circ + \cos 160^\circ$; 2) $4\sin 10^\circ + \dfrac{1}{\cos 40^\circ}$.

4 Спростіть вираз (25.39–25.40):

25.39. 1) $\cos^2 x + \cos^2 y - \cos(x - y)\cos(x + y)$;

2) $\sin^2\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{8}\right) - \cos^2\left(\alpha + \dfrac{3\pi}{8}\right)$;

3) $\left(\dfrac{1}{\sin 3\alpha} + \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)\left(\dfrac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos 4\alpha}{\cos\alpha}\right)$;

4) $\dfrac{(\cos\alpha - \cos 3\alpha)(\sin\alpha + \sin 3\alpha)}{1 - \cos 4\alpha}$.

25.40. 1) $\sin^2 x + \sin^2 y + \cos(x + y)\cos(x - y)$;

2) $\left(\dfrac{1}{\cos 3\alpha} - \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\dfrac{\cos 4\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\sin 4\alpha}{\cos\alpha}\right)$.

Знайдіть значення виразу (25.41–25.42):

25.41. 1) $\dfrac{1}{\cos 20^\circ} - 4\sin 50^\circ$; 2) $\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$;

3) $\dfrac{1}{\sin 560^\circ} + \dfrac{1}{\sqrt{3}\sin 110^\circ}$; 4) $\cos\dfrac{\pi}{19} + \cos\dfrac{3\pi}{19} + \ldots + \cos\dfrac{17\pi}{19}$.

25.42. 1) $\dfrac{2}{\sin 50^\circ} + 8\sin 10^\circ$; 2) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$;

3) $\dfrac{1}{\cos 310^\circ} - \dfrac{1}{\sqrt{3}\cos 580^\circ}$; 4) $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$.

Доведіть тотожність (25.43–25.46):

25.43. 1) $1 - \cos x + \sin x = 2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$;

2) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$;

3) $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 = 4\sin^2\dfrac{\alpha - \beta}{2}$.

25.44. $1 - \cos x - \sin x = -2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$.

25.45. $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \dfrac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

25.46. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \dfrac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\cos\dfrac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

25.47. Обчисліть $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ і $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, якщо $\sin\alpha + \sin\beta = -\dfrac{21}{65}$, $\cos\alpha + \cos\beta = -\dfrac{27}{65}$, $\dfrac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$ і $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$.

25.48. Обчисліть $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, якщо $\sin\alpha+\sin\beta=-\dfrac{27}{65}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{7}{9}$, $\dfrac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$.

25.49. Відомо, що $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\alpha+\beta)$, $\alpha+\beta \neq 2\pi n$, $n \in Z$. Знайдіть $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}$.

A, B, C – кути трикутника. Доведіть тотожність (25.50–25.51):

25.50. 1) $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}$;

2) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$;

3) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$;

4) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$.

25.51. 1) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4\cos A\cos B\cos C = -1$;

2) $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = -4\sin 2A\sin 2B\sin 2C$.

25.52. Доведіть тотожність:

$$\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \ldots + \cos^2 n\alpha = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{2\sin\alpha},$$

де n – кількість доданків.

25.53. A, B, C – кути трикутника, $n \in Z$. Доведіть, що:

1) $\sin 2nA + \sin 2nB + \sin 2nC = (-1)^{n+1}\cdot 4\sin nA\sin nB\sin nC$;

2) $8\cos A\cos B\cos C \leqslant 1$.

25.54. Військовий збір у 2016 році складав 1,5 % від заробітної плати. Заробітна плата директора приватного підприємства «Патріот» протягом року становила 8000 грн на місяць, а кожного з трьох його робітників – по 6000 грн на місяць. Окрім військового збору, щомісяця директор перераховував 500 грн, а кожний з його робітників – по 300 грн у фонд на підтримку української армії. Яку загальну суму коштів сплатили робітники цього приватного підприємства у 2016 році на потреби української армії?

25.55. Розв'яжіть рівняння: $2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}$.

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

РОЗДІЛ 4

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ МИ...

- ***познайомимося*** *з поняттям оберненої тригонометричної функції (аркфункції), властивостями і графіками обернених тригонометричних функцій;*
- ***навчимося*** *обчислювати значення виразів, що містять обернені тригонометричні функції, розв'язувати найпростіші рівняння і нерівності з аркфункціями; розв'язувати тригонометричні рівняння і нерівності.*

§ 26. ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ І ГРАФІКИ

Ви вже знайомилися з поняттям оберненої функції. У цьому параграфі розглянемо функції, обернені до тригонометричних, які прийнято називати *оберненими тригонометричними функціями* або *аркфункціями*.

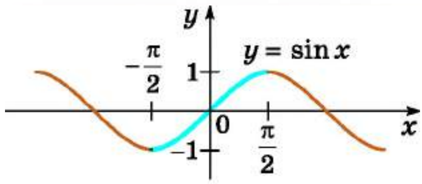
1. *Функція* $y = \arcsin x$

Розглянемо функцію $y = \sin x$. Ця функція, визначена на всій множині дійсних чисел, не є монотонною, оскільки кожного свого значення набуває в нескінченній множині точок. Для введення функції, оберненої до функції $y = \sin x$, розглянемо один з проміжків монотонності цієї функції, що містить точку 0, а саме $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (мал. 26.1). На цьому проміжку функція зростає, набуває усіх своїх значень від -1 до 1, отже, є оборотною.

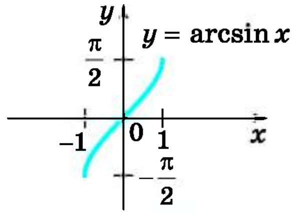
Функцію, обернену до функції $y = \sin x$, де $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, називають *арксинусом* і позначають $y = \arcsin x$.

Графік функції $y = \arcsin x$ зображено на малюнку 26.2, він є симетричним графіку функції $y = \sin x$ відносно прямої

$y = x$. $D(\arcsin x) = [-1;\ 1]$, $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. На всій своїй області визначення функція $y = \arcsin x$ зростає.



Мал. 26.1



Мал. 26.2

Ураховуючи означення функції арксинус, уведемо поняття *арксинуса числа*.

Арксинусом числа a, **де $|a| \leqslant 1$, називають такий кут із проміжка $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a.**

З означення арксинуса числа випливає, що $\arcsin a = \varphi$ тоді і тільки тоді, коли: 1) $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\sin\varphi = a$.

Наприклад, $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, бо $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, бо $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Графік функції $y = \arcsin x$ симетричний відносно початку координат. Тому функція $y = \arcsin x$ є непарною, тобто

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

Приймемо цей факт без доведення.

Приклад 1. Знайти область визначення функції $y = \arcsin(x + 2)$.

Розв'язання. Оскільки $D(\arcsin x) = [-1;\ 1]$, маємо: $-1 \leqslant x + 2 \leqslant 1$, звідки $-3 \leqslant x \leqslant -1$.

Відповідь. $[-3;\ -1]$.

Оскільки $\arcsin a = \varphi$ за умови, що $\sin\varphi = a$, отримаємо формулу:

$$\sin(\arcsin a) = a, \text{ де } |a| \leqslant 1.$$

Приклад 2. Знайти $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

Розв'язання. Нехай $\arcsin\frac{4}{5} = \varphi$. Оскільки $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos\varphi \geqslant 0$. З тотожності $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ маємо: $\cos\varphi = \pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}$. Але $\cos\varphi \geqslant 0$, тому $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} =$

$$= \sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Відповідь. 0,6.

Якщо розглядатимемо φ такий, що $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\varphi = a$, то $\arcsin a = \varphi$. Звідси отримаємо формулу:

$$\arcsin(\sin\varphi) = \varphi, \text{ де } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Приклад 3. Обчислити: 1) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$; 2) $\arcsin(\sin 2)$.

Розв'язання.

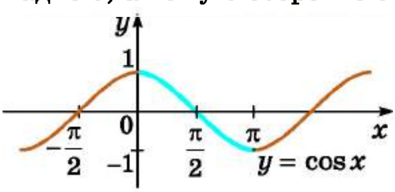
1) Оскільки $\frac{\pi}{7} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$.

2) $2 \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тому $\arcsin(\sin 2) \neq 2$. Для пошуку значень виразів $\arcsin(\sin\varphi)$ і $\arcsin(\cos\varphi)$ будемо використовувати періодичність тригонометричних функцій та формули зведення, що дозволить звести вираз до вигляду $\arcsin(\sin y)$, де $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, та використати вищезгадану формулу. Оскільки $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - 2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, скористаємося формулою зведення $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$. Тоді $\arcsin(\sin 2) = \arcsin(\sin(\pi - 2)) = \pi - 2$, оскільки $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - 2 \leqslant \frac{\pi}{2}$.

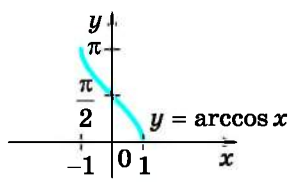
Відповідь. 1) $\frac{\pi}{7}$; 2) $\pi - 2$.

2. Функція $y = \arccos x$

Розглянемо функцію $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$. На цьому проміжку вона є спадною, а тому є оборотною (мал. 26.3).



Мал. 26.3



Мал. 26.4

Функцію, обернену до функції $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$, називають *арккосинусом* і позначають $y = \arccos x$.

Графік функції $y = \arccos x$ зображено на малюнку 26.4, він є симетричним графіку функції $y = \cos x$ відносно прямої $y = x$. $D(\arccos x) = [-1; 1]$, $E(\arccos x) = [0; \pi]$. На всій області визначення функція $y = \arccos x$ спадає.

Ураховуючи означення функції арккосинус, уведемо поняття арккосинуса числа.

***Арккосинусом числа a*, де $|a| \leqslant 1$, називають такий кут із проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює a.**

З означення арккосинуса числа випливає, що $\arccos a = \varphi$, тоді і тільки тоді, коли: 1) $\varphi \in [0; \pi]$; 2) $\cos\varphi = a$.

Наприклад, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, бо $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ і $\frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$;

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \text{ бо } \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \text{ і } \frac{2\pi}{3} \in [0; \pi].$$

Графік функції $y = \arccos x$ не є симетричним ні відносно осі ординат, ні відносно початку координат, тому функція $y = \arccos x$ ні парна, ні непарна.

Приклад 4. Знайти множину значень функції

$$y = 0,5\arccos x + \frac{\pi}{4}.$$

Розв'язання. Ураховуючи, що $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, помножимо обидві частини цієї нерівності на 0,5, а потім додамо до них $\frac{\pi}{4}$, матимемо: $\frac{\pi}{4} \leqslant 0,5\arccos x + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{3\pi}{4}$.

Відповідь. $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

З означення арккосинуса числа випливає, що

$$\cos(\arccos a) = a, \text{ де } |a| \leqslant 1.$$

Розглядаючи кут φ такий, що $\varphi \in [0; \pi]$ і $\cos\varphi = a$, матимемо, що $\arccos a = \varphi$. Тому

$$\arccos(\cos\varphi) = \varphi, \text{ якщо } \varphi \in [0; \pi].$$

Приклад 5. Обчислити $\arccos(\cos 10)$.

Розв'язання. Як і у прикладі 3 цього параграфа, для знаходження значень виразів $\arccos(\cos\varphi)$ і $\arccos(\sin\varphi)$ треба зводити їх до виразу вигляду $\arccos(\cos y)$, де $y \in [0; \pi]$, а далі застосувати формулу $\arccos(\cos\varphi) = \varphi$. Маємо:
$\arccos(\cos 10) = \arccos(\cos(10 - 4\pi)) = \arccos(\cos(4\pi - 10)) = 4\pi - 10$, оскільки $0 \leqslant 4\pi - 10 \leqslant \pi$.

Відповідь. $4\pi - 10$.

Приклад 6. Довести, що $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$, де $|a| \leqslant 1$.

Доведення. Нехай $\arccos(-a) = \varphi$, $\varphi \in [0; \pi]$. Тоді $\cos\varphi = -a$, тобто $-\cos\varphi = a$. За формулою зведення $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, тому $\cos(\pi - \varphi) = a$. Оскільки $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, то $0 \leqslant \pi - \varphi \leqslant \pi$. Отже, $\cos(\pi - \varphi) = a$, $0 \leqslant \pi - \varphi \leqslant \pi$, тому $\pi - \varphi = \arccos a$, звідси отримаємо: $\varphi = \pi - \arccos a$. Отже,

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a. \blacksquare$$

Занесемо в таблицю значення $\arcsin a$ і $\arccos a$ для деяких значень a:

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Помічаємо, що для табличних значень a справджується рівність: $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$. Ця рівність є істинною для будь-якого значення a з проміжку $[-1; 1]$.

Приклад 7. Довести тотожність:

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \text{ де } a \in [-1; 1].$$

Доведення. Доведемо, що $\arcsin a = \frac{\pi}{2} - \arccos a$, $a \in [-1; 1]$.

Оскільки $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \arccos a \leqslant \frac{\pi}{2}$, тобто обидві частини рівності $\arcsin a = \frac{\pi}{2} - \arccos a$ належать проміжку монотонності функції $y = \sin x$ — проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, знайдемо синус обох частин цієї рівності: $\sin(\arcsin a) = a$;

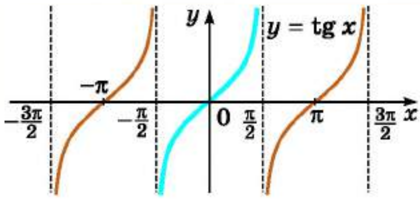
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos a\right) = \cos(\arccos a) = a$.

Отже, $\arcsin a = \frac{\pi}{2} - \arccos a$, тобто $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$, $a \in [-1; 1]$. $\blacksquare$

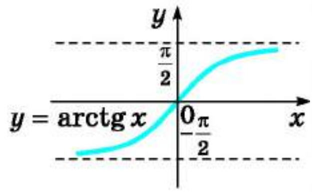
3. *Функція $y = \operatorname{arctg} x$*

Розглянемо функцію $y = \operatorname{tg} x$ (мал. 26.5), яка монотонно зростає на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На цьому проміжку вона набуває кожного свого значення з множини дійсних чисел тільки один раз, тому є оборотною.

Функцію, обернену до функції $y = \mathrm{tg}\,x$, де $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, називають *арктангенсом* і позначають $y = \mathrm{arctg}\,x$.



Мал. 26.5



Мал. 26.6

Графік функції $y = \mathrm{arctg}\,x$ зображено на малюнку 26.6, він є симетричним графіку функції $y = \mathrm{tg}\,x$ відносно прямої $y = x$. $D(\mathrm{arctg}\,x) = (-\infty;\ \infty)$, $E(\mathrm{arctg}\,x) = \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. На всій області визначення функція $y = \mathrm{arctg}\,x$ зростає.

***Арктангенсом числа a*, де a — будь-яке число, називають такий кут із проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a.**

З означення арктангенса випливає, що: $\mathrm{arctg}\,a = \varphi$ тоді і тільки тоді, коли: 1) $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\mathrm{tg}\,\varphi = a$.

Наприклад, $\mathrm{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$, бо $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ і $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

$\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$, бо $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ і $-\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Графік функції $y = \mathrm{arctg}\,x$ симетричний відносно початку координат, тому функція $y = \mathrm{arctg}\,x$ непарна:

$$\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}\,x.$$

Приймемо цей факт без доведення.

З означення арктангенса випливає, що

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,a) = a, \text{ де } a \in R.$$

Приклад 8. Знайти $\mathrm{ctg}(\mathrm{arctg}\,5)$.

Розв'язання. Позначимо $\mathrm{arctg}\,5 = \varphi$ та врахуємо, що $\mathrm{ctg}\,\varphi = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\varphi}$. Тоді $\mathrm{ctg}(\mathrm{arctg}\,5) = \frac{1}{\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,5)} = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

Відповідь. 0,2.

Якщо розглядати кут φ такий, що $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\varphi = a$, то $\operatorname{arctg} a = \varphi$. Отримаємо формулу:

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi) = \varphi, \text{ де } \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Для пошуку значень виразів $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi)$ і $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}\varphi)$ зводимо їх до вигляду $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y)$, де $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, використовуючи періодичність та формули зведення, і далі застосовуємо формулу $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi) = \varphi$.

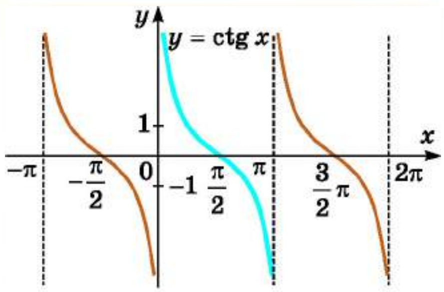
Наприклад,

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{14}\right) = \frac{5\pi}{14}.$$

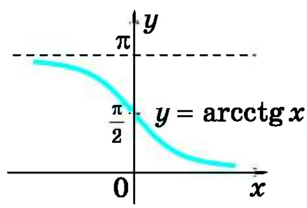
4. *Функція $y = \operatorname{arcctg} x$*

Функція $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$ монотонно спадає і кожного свого значення набуває тільки один раз (мал. 26.7), тому є оборотною.

Функцію, обернену до функції $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$, називають *арккотангенсом* і позначають $y = \operatorname{arcctg} x$.



Мал. 26.7



Мал. 26.8

Графік функції $y = \operatorname{arcctg} x$ зображено на малюнку 26.8, він є симетричним графіку функції $y = \operatorname{ctg} x$ відносно прямої $y = x$. $D(\operatorname{arcctg} x) = (-\infty; \infty)$, $E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi)$. На всій області визначення функція $y = \operatorname{arcctg} x$ спадає.

***Арккотангенсом числа a*, де a — будь-яке число, називають такий кут із проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a.**

З означення арккотангенса випливає, що: $\operatorname{arcctg} a = x$ тоді і тільки тоді, коли: 1) $x \in (0; \pi)$; 2) $\operatorname{ctg} x = a$.

Наприклад, $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, бо $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ і $\frac{\pi}{6} \in (0; \pi)$;

$\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, бо $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1$ і $\frac{3\pi}{4} \in (0; \pi)$.

Графік функції $y = \operatorname{arcctg} x$ не симетричний ні відносно осі ординат, ні відносно початку координат, тому функція $y = \operatorname{arcctg} x$ ні парна, ні непарна.

З означення арккотангенса випливає, що

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a) = a, \text{ де } a \in R.$$

Приклад 9. Знайти $\sin\left(\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}\right)$.

Розв'язання. Нехай $\operatorname{arcctg}\frac{4}{3} = \varphi$. Оскільки $\varphi \in (0; \pi)$, то $\sin\varphi > 0$. За формулою $\frac{1}{\sin^2\varphi} = 1 + \operatorname{ctg}^2\varphi$ маємо, що $\sin\varphi = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\varphi}}$. Оскільки $\sin\varphi > 0$, отримаємо:

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}\right)\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{9}}} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Відповідь. 0,6.

Аналогічно до отриманих раніше формул для інших обернених тригонометричних функцій маємо:

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\varphi) = \varphi, \text{ де } \varphi \in (0; \pi).$$

Під час знаходження значень виразів $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\varphi)$ і $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}\varphi)$ за допомогою періодичності та формул зведення їх зводять до вигляду $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} y)$, де $y \in (0; \pi)$, після чого використовують формулу $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\varphi) = \varphi$, де $\varphi \in (0; \pi)$.

Наприклад,

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 4) = \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 4\right)\right) = \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{2} - 4\right)\right) =$$

$$= \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 4\right)\right) = \frac{3\pi}{2} - 4.$$

Можна довести, що

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a, \text{ де } a \in R, \text{ та}$$

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}, \text{ де } a \in R.$$

Доведення цих формул аналогічне до доведень у прикладах 6 і 7.

Занесемо в таблицю значення $\operatorname{arctg} a$ і $\operatorname{arcctg} a$ для деяких значень a:

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} a$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

5. *Обчислення значень виразів, що містять аркфункції*

Розглянемо, як обчислювати значення виразів, що містять обернені тригонометричні функції.

Приклад 10. Знайти значення виразу:

1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-3\operatorname{arctg}(-1)$; 2) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-3\operatorname{arctg}(-1)=$

$=\frac{5\pi}{6}+2\cdot\frac{\pi}{4}-3\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}=\frac{10\pi+6\pi+9\pi}{12}=\frac{25\pi}{12}$.

2) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

В і д п о в і д ь. 1) $\frac{25\pi}{12}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. *Властивості обернених тригонометричних функцій*

Узагальнимо властивості обернених тригонометричних функцій, про які ми дізналися в цьому параграфі у вигляді таблиці (с. 265).

Тепер можемо знаходити властивості не тільки функцій, наведених у таблиці, а й інших обернених тригонометричних функцій.

Приклад 11. Знайти нулі функції $y=\arccos(x^2+3x+3)$.

Р о з в ' я з а н н я. Нулем функції $y=\arccos x$ є число 1. Знайдемо значення x, для яких $x^2+3x+3=1$.

Маємо рівняння: $x^2+3x+2=0$.

$x_1=-1$, $x_2=-2$ — його корені, отже, і нулі функції.

В і д п о в і д ь. -1; -2.

Властивість	Функція			
	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \mathrm{arctg}\, x$	$y = \mathrm{arcctg}\, x$
Область визначення	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Множина значень	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$[0; \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$(0; \pi)$
Парність, непарність	Непарна	Ні парна, ні непарна	Непарна	Ні парна, ні непарна
Нулі функції	$x = 0$	$x = 1$	$x = 0$	–
Знакосталість, $y > 0$	$0 < x \leqslant 1$	$-1 \leqslant x < 1$	$x > 0$	$x \in R$
Знакосталість, $y < 0$	$-1 \leqslant x < 0$	–	$x < 0$	–
Проміжки зростання	$[-1; 1]$	–	$(-\infty; +\infty)$	–
Проміжки спадання	–	$[-1; 1]$	–	$(-\infty; +\infty)$
Найбільше значення функції	$\frac{\pi}{2}$ при $x = 1$	π при $x = -1$	–	–
Найменше значення функції	$-\frac{\pi}{2}$ при $x = -1$	0 при $x = 1$	–	–

Яку функцію називають арксинусом? Що називають арксинусом числа? Яку функцію називають арккосинусом? Що називають арккосинусом числа? Яку функцію називають арктангенсом? Що називають арктангенсом числа? Яку функцію називають арккотангенсом? Що називають арккотангенсом числа? Сформулюйте властивості обернених тригонометричних функцій.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **(Усно.)** Чи має зміст вираз (**26.1–26.2**):

26.1. 1) $\arcsin\frac{1}{3}$; 2) $\arccos\frac{7}{6}$; 3) $\mathrm{arctg}(-8)$; 4) $\arcsin(-1{,}5)$?

26.2. 1) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\arcsin 2{,}5$; 3) $\mathrm{arcctg}\, 7$; 4) $\arccos(-2)$?

Знайдіть за допомогою таблиць на с. 260 і 264 (26.3–26.4):

26.3. 1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

3) $\operatorname{arctg} 0$; 4) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

26.4. 1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arccos(-1)$; 3) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 4) $\operatorname{arcctg} 1$.

2 Знайдіть значення виразу (26.5–26.10):

26.5. 1) $\arcsin\frac{1}{2} - \arccos 0$; 2) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg}(-1)$.

26.6. 1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arcctg} 0$.

26.7. 1) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; 2) $\operatorname{tg}(\arccos 1)$.

26.8. 1) $\operatorname{tg}(\arcsin 0)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

26.9. 1) $\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\cos\left(3\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

26.10. 1) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{2}\right)$; 2) $\sin\left(3\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Знайдіть область визначення функції (26.11–26.12):

26.11. 1) $y = \arcsin(x+3)$; 2) $y = \arccos(2-x)$.

26.12. 1) $y = \arccos(x+1)$; 2) $y = \arcsin(3-x)$.

26.13. Порівняйте: 1) $\arcsin\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{3}$; 2) $\arcsin(-1)$ і $\operatorname{arctg}(-1)$.

26.14. Порівняйте: 1) $\arccos\frac{1}{2}$ і $\frac{5}{6}$; 2) $\arccos 1$ і $\operatorname{arcctg} 1$.

Обчисліть (26.15–26.16):

26.15. 1) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$.

26.16. 1) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{1}{2} + 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;

2) $\operatorname{tg}(2\arccos 1 - 2\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$.

3 Знайдіть область визначення функції (26.17–26.18):

26.17. 1) $y = \arccos\frac{3x-1}{2}$; 2) $y = \arcsin(2x + x^2)$.

26.18. 1) $y = \arcsin\frac{2x-5}{3}$; 2) $y = \arccos(2x^2 + x)$.

Дослідіть функцію на парність (26.19–26.20):

26.19. 1) $y = 3\arcsin\frac{x}{4}$; 2) $y = \operatorname{arctg} x + 2$.

26.20. 1) $y = 5\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$; 2) $y = \arcsin x - 3$.

Знайдіть множину значень функції (26.21–26.22):

26.21. 1) $y = \frac{\arcsin x + \pi}{2}$; 2) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

26.22. 1) $y = \frac{\arccos x - \pi}{2}$; 2) $y = \arcsin\sqrt{x}$.

Знайдіть нулі функції (26.23–26.24):

26.23. 1) $y = \arcsin(x^2 - 8x + 7)$; 2) $y = \arccos(x^2 - x + 1)$.

26.24. 1) $y = \operatorname{arctg}(2x^2 - 3x)$; 2) $y = \arccos(x^2 + 5x + 7)$.

Обчисліть (26.25–26.26):

26.25. 1) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$;

3) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-5))$; 4) $\sin\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$.

26.26. 1) $\cos(\arcsin 0{,}28)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{24}{25}\right)\right)$;

3) $\sin(\operatorname{arctg} 2{,}4)$; 4) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 0{,}2)$.

Побудуйте графік функції (26.27–26.28):

26.27. 1) $y = 2\operatorname{arctg} x$; 2) $y = \frac{\pi}{2} + \arcsin x$.

26.28. 1) $y = 3\arcsin x$; 2) $y = \arccos x - \frac{\pi}{2}$.

Обчисліть (26.29–26.30):

26.29. 1) $\arcsin(\sin 6)$; 2) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 4)$;

3) $\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{8}\right)$; 4) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

26.30. 1) $\arcsin(\sin 13)$; 2) $\arccos(\cos 16)$;

3) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{12\pi}{7}\right)$; 4) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{13\pi}{9}\right)\right)$.

4 **26.31.** 1) Знайдіть $\operatorname{tg}\alpha$, де $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{7}\right)$.

2) Використовуючи отриманий результат, знайдіть α.

26.32. 1) Знайдіть $\operatorname{tg}\beta$, де $\beta = \operatorname{arctg}3 - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

2) Використовуючи отриманий результат, знайдіть β.

Знайдіть область визначення функції (**26.33–26.34**):

26.33. 1) $y = \sqrt{6 - x - 2x^2} + \arcsin\frac{x+1}{2}$;

2) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} + \arccos\frac{x-1}{7}$.

26.34. 1) $y = \arccos\frac{x-6}{7} + \sqrt{2 + 3x - 5x^2}$;

2) $y = \frac{1}{\sqrt{6x^2 + x - 1}} + \arcsin\frac{x-2}{3}$.

Доведіть тотожність (**26.35–26.36**):

26.35. 1) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$, де $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$, де $x \neq 0$.

26.36. 1) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, де $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$, де $x \neq 0$.

Обчисліть (**26.37–26.38**):

26.37. 1) $\sin\left(\arccos\frac{12}{13} - \arcsin 0{,}6\right)$; 2) $\cos(2\arcsin 0{,}8)$.

26.38. 1) $\cos\left(\arcsin 0{,}28 + \arccos\frac{5}{13}\right)$; 2) $\cos(2\arccos(-0{,}8))$.

Побудуйте графік функції (**26.39–26.40**):

26.39. 1) $y = \arccos(x-1) + \frac{\pi}{4}$; 2) $y = \operatorname{arcctg}(x+2) - \frac{\pi}{2}$.

26.40. 1) $y = \operatorname{arctg}(x-2) - \pi$; 2) $y = \arcsin(x+1) + \frac{\pi}{2}$.

26.41. Знайдіть множину значень функції $y = 2\arccos x + 4\arcsin x$, попередньо спростивши її формулу.

26.42. Знайдіть множину значень функції $y = 2\arcsin x + 4\arccos x$, попередньо спростивши її формулу.

Обчисліть (**26.43–26.44**):

26.43. 1) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$; 2) $\arcsin\left(\cos\left(\frac{13\pi}{10}\right)\right)$;

3) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right)$; 4) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 5)$.

26.44. 1) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)\right)$; 2) $\arcsin\left(\cos\frac{13\pi}{3}\right)$;

3) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{8\pi}{9}\right)$; 4) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}\right)$.

Обчисліть (26.45–26.46):

26.45. 1) $\arccos(\sin 6) + \arcsin(\cos 5)$;

2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{8\pi}{5}\right) + \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{12\pi}{5}\right)$.

26.46. 1) $\arccos(\sin 8) + \arcsin(\cos 7)$;

2) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 12) + \operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 13)$.

26.47. Спростіть вираз $\arccos(\sin \pi(x^2 + x - 3))$ за умови, що $0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Знайдіть множину значень функції (26.48–26.49):

26.48. 1) $y = \operatorname{arctg}(4x - 2x^2)$; 2) $y = \arcsin x + \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}$;

3) $y = \arccos(\sin x)$; 4) $y = \arcsin^2 x + \arccos^2 x$.

26.49. 1) $y = \operatorname{arcctg}(2x - x^2)$; 2) $y = \arcsin x \arccos x$.

26.50. В одному з англійських видань можна прочитати, що зріст Наполеона становив 5 футів 2 дюйми. Яким був його зріст у сантиметрах? Результат округліть до цілого числа сантиметрів.

26.51. (*Національна олімпіада Румунії*). Три групи рибалок упіймали разом 113 рибин. Кожний рибалка першої групи впіймав 13 рибин, кожний рибалка другої групи – 5 риб, а третьої – 4 рибини. Скільки рибалок було в кожній групі, якщо всього їх було 16?

§ 27. РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ, ЩО МІСТЯТЬ ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

У цьому параграфі розглянемо деякі типи рівнянь і нерівностей, що містять аркфункції, та методи їх розв'язування.

1. *Рівність однойменних аркфункцій*

Ураховуючи монотонність аркфункцій, рівняння вигляду

$$\arcsin f(x) = \arcsin g(x)$$

та $\arccos f(x) = \arccos g(x)$ будуть рівносильні системі:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ -1 \leqslant g(x) \leqslant 1, \end{cases}$$

а рівняння вигляду $\operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arctg} g(x)$ і $\operatorname{arcctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x)$ будуть рівносильні рівнянню $f(x) = g(x)$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\arcsin x = \arcsin(x^2 - 2x - 4)$.

Розв'язання. Маємо систему: $\begin{cases} x = x^2 - 2x - 4, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

Отримаємо, що $x = -1$.

Відповідь. -1.

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

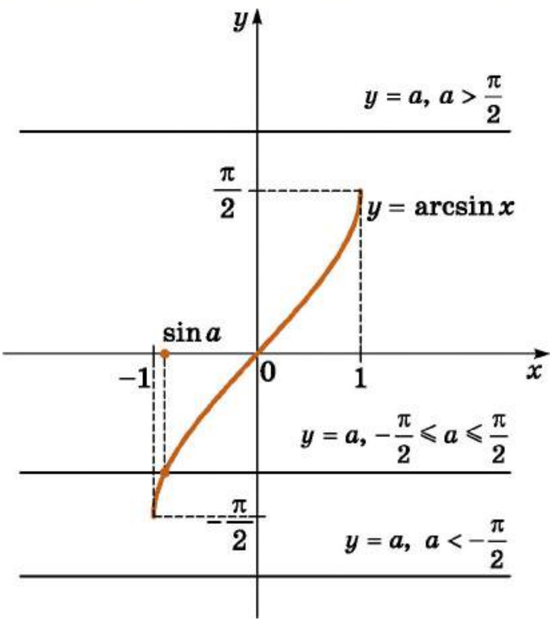
$$\operatorname{arctg}(x^3 + 1) = \operatorname{arctg}(x^2 - x + 1).$$

Розв'язання. Маємо: $x^3 + 1 = x^2 - x + 1$, звідки $x = 0$.

Відповідь. 0.

2. *Рівність аркфункції числу*

Розглянемо рівняння вигляду $\arcsin x = a$. З графічної інтерпретації (мал. 27.1) бачимо, що при $a < -\frac{\pi}{2}$ або $a > \frac{\pi}{2}$ рівняння розв'язків не має, а при $-\frac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}$ має єдиний корінь: $x = \sin a$. У той самий спосіб можна дійти висновків про розв'язки подібних рівнянь для інших аркфункцій. Ці висновки подамо у вигляді таблиць.



Мал. 27.1

Рівняння $\arcsin x = a$	
Значення a	**Розв'язки**
$a < -\frac{\pi}{2}$	$\varnothing$
$-\frac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}$	$x = \sin a$
$a > \frac{\pi}{2}$	$\varnothing$

Рівняння $\arccos x = a$	
Значення a	**Розв'язки**
$a < 0$	$\varnothing$
$0 \leqslant a \leqslant \pi$	$x = \cos a$
$a > \pi$	$\varnothing$

Рівняння $\mathrm{arctg}\, x = a$	
Значення a	**Розв'язки**
$a \leqslant -\frac{\pi}{2}$	$\varnothing$
$-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$	$x = \mathrm{tg}\, a$
$a \geqslant \frac{\pi}{2}$	$\varnothing$

Рівняння $\mathrm{arcctg}\, x = a$	
Значення a	**Розв'язки**
$a \leqslant 0$	$\varnothing$
$0 < a < \pi$	$x = \mathrm{ctg}\, a$
$a \geqslant \pi$	$\varnothing$

Приклад 3. **Розв'язати рівняння:**

1) $3\arcsin x = \pi$; 2) $\frac{1}{\pi}\arccos x = 0,5$; 3) $4\,\mathrm{arcctg}\sqrt{x} + \pi = 0$.

Розв'язання.

1) $\arcsin x = \frac{\pi}{3}$;

$x = \sin\frac{\pi}{3}$;

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $\arccos x = 0,5\pi$;

$\arccos x = \frac{\pi}{2}$;

$x = \cos\frac{\pi}{2}$;

$x = 0$.

Відповідь. 0.

3) $4\,\mathrm{arcctg}\, x = -\pi$;

$\mathrm{arcctg}\, x = -\frac{\pi}{4}$;

$-\frac{\pi}{4} < 0$; тому коренів немає.

Відповідь. $\varnothing$.

Приклад 4. **Розв'язати рівняння:**

1) $6\arcsin\sqrt{x} = \pi$; 2) $\arccos(x-2) = \frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{4}{\pi}\mathrm{arctg}(3x) = -1$.

Розв'язання.

1) $\arcsin\sqrt{x} = \frac{\pi}{6}$;

$\sqrt{x} = \sin\frac{\pi}{6}$;

$\sqrt{x} = 0,5$;

$x = 0,25$.

Відповідь. 0,25.

2) $x - 2 = \cos\frac{\pi}{3}$;

$x - 2 = \frac{1}{2}$;

$x = 2,5$.

Відповідь. 2,5.

3) $\mathrm{arctg}(3x) = -\frac{\pi}{4}$;

$3x = -1$;

$x = -\frac{1}{3}$.

Відповідь. $-\frac{1}{3}$.

3. *Заміна змінної у рівняннях з аркфункціями*

Рівняння вигляду $F(y(x)) = 0$, де F – раціональна функція, а $y(x)$ – аркфункція, зводять до алгебраїчних рівнянь шляхом уведення нової змінної $t = y(x)$. Розв'язавши рівняння $F(t) = 0$ та повернувшися до заміни, отримаємо одне або кілька найпростіших рівнянь з аркфункціями.

Приклад 5. Розв'язати рівняння: $3\operatorname{arctg}^2 x - 4\pi \operatorname{arctg} x + \pi^2 = 0$.

Розв'язання. Заміна: $\operatorname{arctg} x = t$. Маємо рівняння: $3t^2 - 4\pi t + \pi^2 = 0$, звідки $t = \pi$ або $t = \frac{\pi}{3}$. Повертаючися до заміни, матимемо: $\left[\begin{array}{l}\operatorname{arctg} x = \pi, \\ \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{3}.\end{array}\right.$

Перше рівняння розв'язків не має.

З другого рівняння отримаємо, що $x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, тобто $x = \sqrt{3}$.

Відповідь. $\sqrt{3}$.

Для розв'язування рівнянь вигляду

$$F(\arcsin y(x), \arccos y(x)) = 0$$

використовуємо формулу $\arccos y(x) + \arcsin y(x) = \frac{\pi}{2}$ та зводимо рівняння до рівняння, що міститиме тільки $\arcsin y(x)$ або тільки $\arccos y(x)$. Далі, за необхідності, уводимо нову змінну $t = \arcsin y(x)$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння: $4\arcsin x + \arccos x = \pi$.

Розв'язання. Оскільки $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, маємо:

$4\arcsin x + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \pi;$

$3\arcsin x = \frac{\pi}{2};$

$x = 0,5.$

Відповідь. 0,5.

Приклад 7. Розв'язати рівняння: $\arcsin^2 x + \arccos^2 x = \frac{5}{4}\pi^2$.

Розв'язання. Маємо: $\arcsin^2 x + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)^2 = \frac{5}{4}\pi^2$.

Розкриємо дужки та перенесемо всі доданки в ліву частину, рівняння набуде вигляду:

$$\arcsin^2 x + \frac{\pi^2}{4} - \pi\arcsin x + \arcsin^2 x - \frac{5}{4}\pi^2 = 0.$$

Зведемо подібні доданки, отримаємо квадратне рівняння відносно $\arcsin x$, аналогічне до рівняння у прикладі 5:

$$2\arcsin^2 x - \pi\arcsin x - \pi^2 = 0.$$

Рівняння має єдиний корінь: $x = -1$ (розв'яжіть самостійно).

Відповідь. -1.

Рівняння вигляду $F(\operatorname{arctg} y(x), \operatorname{arcctg} y(x)) = 0$ зводимо до рівняння, що міститиме лише $\operatorname{arctg} y(x)$ або $\operatorname{arcctg} y(x)$, за допомогою формули $\operatorname{arctg} y(x) + \operatorname{arcctg} y(x) = \frac{\pi}{2}$. Далі, за необхідності, уводимо нову змінну $t = \operatorname{arctg} y(x)$.

Приклад 8. Розв'язати рівняння:

$$2\operatorname{arctg}(3x - 2) + 3\operatorname{arcctg}(3x - 2) = \pi.$$

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{arcctg}(3x - 2) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(3x - 2)$, рівняння набуде вигляду:

$$2\operatorname{arctg}(3x - 2) + 3\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(3x - 2)\right) = \pi.$$

Після спрощень маємо: $\operatorname{arctg}(3x - 2) = \frac{\pi}{2}$.

Оскільки $\frac{\pi}{2} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то рівняння розв'язків не має.

Відповідь. Розв'язків немає.

4. *Метод обчислення тригонометричної функції від обох частин рівняння*

Це найбільш універсальний метод для розв'язування рівнянь, що містять аркфункції.

Якщо рівняння містить різнойменні аркфункції або аркфункції від різних аргументів і жодним з вищезгаданих методів розв'язати рівняння неможливо, треба обчислити деяку тригонометричну функцію від обох частин рівняння. Якщо при цьому область значень лівої і правої частин не належить проміжку монотонності цієї функції, то одержане алгебраїчне рівняння буде рівнянням-наслідком, тому можлива поява сторонніх коренів. Перевірка коренів у цьому випадку є обов'язковою.

Зауважимо, що розв'язати такі рівняння іноді допомагають формули, доведені у вправах 26.35 і 26.36.

Приклад 9. Розв'язати рівняння: $\arcsin x - \arcsin\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння: $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
Знайдемо косинус від кожної частини рівняння:

$$\cos\left(\arcsin x - \arcsin\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3}.$$

Скористаємося формулою косинуса різниці, матимемо:

$$\cos(\arcsin x)\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + \sin(\arcsin x)\sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

після спрощення якого отримаємо: $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}$, звідки $x_{1,2}=\pm1$. Підставивши (для перевірки) отримані корені в рівняння, доходимо висновку, що -1 – сторонній корінь. Отже, $x=1$.

Відповідь. 1.

Приклад 10. Розв'язати рівняння: $\arcsin x+\arccos(x-1)=\pi$.

Розв'язання. ОДЗ: $0<x<1$. Тут зручніше знайти від обох частин синус. Матимемо: $x(x-1)+\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-(x-1)^2}=0$;

$$\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{2x-x^2}=x(1-x).$$

Розв'язуючи це рівняння, одержимо, що $x=0$ або $x=1$. Перевіркою переконуємося в тому, що обидва числа – корені початкового рівняння. Відповідь. 0; 1.

Зауважимо, що тригонометричну функцію, значення якої від обох частин рівняння будемо знаходити, вибираємо так, щоб уникати громіздких перетворень. Корисно пам'ятати, що якщо в рівняннях з арксинусом і арккосинусом функції одноймені, то краще знаходити косинус, а якщо різнойменні – синус.

Якщо від обох частин рівняння знаходити значення тангенса або котангенса, може трапитися втрата коренів. Зазвичай це числа, які не належать області визначення функцій тангенса або котангенса. Тому, якщо під час розв'язування рівняння $f(x)=g(x)$ переходимо до рівняння $\operatorname{tg} f(x)=\operatorname{tg} g(x)$ або $\operatorname{ctg} f(x)=\operatorname{ctg} g(x)$, тобто знаходимо від обох частин тангенс або котангенс, слід дотримуватися такої послідовності дій:

1) знайти всі значення x, для яких $f(x)=0{,}5\pi+\pi k$ чи $g(x)=0{,}5\pi+\pi k$, $k\in Z$ (якщо переходимо до рівняння $\operatorname{tg} f(x)=\operatorname{tg} g(x)$), або знайти всі значення x, для яких $f(x)=\pi+\pi k$ чи $g(x)=\pi+\pi k$, $k\in Z$ (якщо переходимо до рівняння $\operatorname{ctg} f(x)=\operatorname{ctg} g(x)$);

2) перевірити, які зі знайдених у п. 1 значень x є коренями початкового рівняння;

3) для всіх інших значень x розв'язати рівняння $\operatorname{tg} f(x)=\operatorname{tg} g(x)$ (або $\operatorname{ctg} f(x)=\operatorname{ctg} g(x)$), що є рівнянням-наслідком, та перевіркою вибрати з його коренів ті, що є коренями початкового рівняння;

4) записати відповідь, ураховуючи результати, отримані в п. 2 і 3.

Приклад 11. Розв'язати рівняння:

$$\operatorname{arctg}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Розв'язання. Ті значення x, при яких ліва частина дорівнює $0{,}5\pi+\pi k$, $k\in Z$, не будуть коренями цього рівняння, бо права частина не дорівнює $0{,}5\pi+\pi k$, $k\in Z$. Візьмемо функцію тангенс від обох частин рівняння. Одержимо:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4};\quad \frac{x+\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}}{1-\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=1.$$

Звідси $x^2 + 2x - 1{,}25 = 0$, звідки $x = 0{,}5$ або $x = -2{,}5$. Перевірка показує, що перший корінь задовольняє рівняння, а другий – не задовольняє.

$$\left(\operatorname{arctg}(-2{,}5+0{,}5)+\operatorname{arctg}(-2{,}5-0{,}5)<0\neq\frac{\pi}{4}\right).$$

Відповідь. 0,5.

5. *Найпростіші нерівності, що містять аркфункції*

Нерівності вигляду $F(f(x)) < F(g(x))$, де F – аркфункція, розв'язують з урахуванням області визначення цієї функції та виходячи з того, що функції $y = \arcsin x$ і $y = \operatorname{arctg} x$ – зростаючі, а функції $y = \arccos x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$ – спадні. Як розв'язати такі нерівності подано в таблицях.

$\arcsin f(x) < \arcsin g(x)$	$\arccos f(x) < \arccos g(x)$
$-1 \leqslant f(x) < g(x) \leqslant 1$	$-1 \leqslant g(x) < f(x) \leqslant 1$

$\operatorname{arctg} f(x) < \operatorname{arctg} g(x)$	$\operatorname{arcctg} f(x) < \operatorname{arcctg} g(x)$
$f(x) < g(x)$	$g(x) < f(x)$

Аналогічно розв'язують нерівності вигляду $F(f(x)) \leqslant F(g(x))$, де F – аркфункція.

Приклад 12. Розв'язати нерівність $\arcsin(1 + x) < \arcsin 2x$.

Розв'язання. Маємо, ураховуючи, що $y = \arcsin x$ – зростаюча функція: $-1 \leqslant 1 + x < 2x \leqslant 1$. Ця нерівність рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases}1+x\geqslant -1,\\ 1+x<2x,\\ 2x\leqslant 1;\end{cases}\quad \begin{cases}x\geqslant -2,\\ x>1,\\ x\leqslant \frac{1}{2},\end{cases}$$ система розв'язків не має.

Відповідь. Нерівність не має розв'язків.

Приклад 13. Розв'язати нерівність $\arccos(1 - x) < \arccos 0{,}5x$.

Розв'язання. Маємо, ураховуючи, що $y = \arccos x$ – функція спадна: $-1 \leqslant 0{,}5x < 1 - x \leqslant 1$. Звідси

$$\begin{cases}0{,}5x\geqslant -1,\\ 0{,}5x<1-x,\\ 1-x\leqslant 1;\end{cases}\quad \begin{cases}x\geqslant -2,\\ x<\frac{2}{3},\\ x\geqslant 0;\end{cases}\quad x\in\left[0;\frac{2}{3}\right).$$ Відповідь. $\left[0;\frac{2}{3}\right)$.

Приклад 14. Розв'язати нерівність: $\operatorname{arcctg} 2x > \operatorname{arcctg} x^2$.

Розв'язання. Оскільки $y = \operatorname{arcctg} x$ – функція спадна, маємо: $2x < x^2$, тобто $x^2 - 2x > 0$, отже, $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Приклад 15. Розв'язати нерівність: $\arcsin(x^2 - 2x + 1) > 0$.

Розв'язання. Оскільки $0 = \arcsin 0$, то маємо: $\arcsin(x^2 - 2x + 1) > \arcsin 0$, $0 < x^2 - 2x + 1 \leqslant 1$,

$\begin{cases} (x-1)^2 > 0, \\ x^2 - 2x \leqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 1, \\ 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$ Остаточно $x \in [0; 1) \cup (1; 2]$.

Відповідь. $[0; 1) \cup (1; 2]$.

6. *Розв'язування складніших нерівностей, що містять аркфункції*

Під час розв'язування більш складних нерівностей, що містять обернені тригонометричні функції, застосовують прийоми, які використовувалися під час розв'язування рівнянь та прийоми розв'язування найпростіших нерівностей, що містять аркфункції.

Приклад 16. Розв'язати нерівність: $\operatorname{arctg} x > \operatorname{arcctg} x$.

Розв'язання. Перепишемо нерівність у вигляді: $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$. Тоді $2\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2}$, тобто $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{4}$, тому $\operatorname{arctg} x > \operatorname{arctg} 1$, отже, $x > 1$.

Відповідь. $(1; +\infty)$.

Приклад 17. Розв'язати нерівність: $4(\arccos x)^2 - 1 \geqslant 0$.

Розв'язання. Позначивши $\arccos x = t$, матимемо квадратну нерівність: $4t^2 - 1 \geqslant 0$, звідки $t \leqslant -\frac{1}{2}$ або $t \geqslant \frac{1}{2}$. Повернувшися до змінної x, отримаємо: $\arccos x \leqslant -\frac{1}{2}$ або $\arccos x \geqslant \frac{1}{2}$.

Перша з отриманих нерівностей розв'язків не має, а з другої отримаємо: $x \in \left[-1; \cos\frac{1}{2}\right]$.

Відповідь. $\left[-1; \cos\frac{1}{2}\right]$.

- Як розв'язують рівняння, що містять рівність однойменних аркфункцій? - Як розв'язують рівняння, що містять рівність оберненої тригонометричної функції числу? - Як застосовують метод заміни змінної у рівняннях з аркфункціями? - Як застосовують метод обчислення тригонометричної функції від обох частин рівняння в рівняннях з аркфункціями? - Як розв'язують найпростіші нерівності, що містять аркфункції? - Як розв'язують більш складні нерівності, що містять аркфункції?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Чи має розв'язки рівняння (27.1–27.2):

27.1. 1) $\arcsin x = -\pi$; 2) $\arccos x = \frac{\pi}{2}$; 3) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$;

4) $\operatorname{arcctg} x = -\frac{\pi}{6}$; 5) $\arccos x = -\frac{\pi}{2}$; 6) $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$;

7) $\operatorname{arctg} x = 0$; 8) $\operatorname{arcctg} x = 1$?

27.2. 1) $\arccos x = 0$; 2) $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$; 3) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{10}$;

4) $\operatorname{arcctg} x = 0$; 5) $\arcsin x = -2$; 6) $\arccos x = 2\pi$;

7) $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$; 8) $\operatorname{arctg} x = -\pi$?

2 Розв'яжіть рівняння (27.3–27.12):

27.3. 1) $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$; 2) $\arccos x = \frac{3\pi}{4}$;

3) $\operatorname{arctg} x = \pi$; 4) $2\operatorname{arcctg} x = \pi$.

27.4. 1) $\arcsin x = -\frac{\pi}{2}$; 2) $\arccos x = 2\pi$;

3) $\operatorname{arctg} x = 0$; 4) $4\operatorname{arcctg} x = \pi$.

27.5. 1) $\arcsin \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4}$; 2) $\arccos 2x = 0$;

3) $\operatorname{arctg}(x + 1) = \frac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{arcctg}(x - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$.

27.6. 1) $\arcsin(x - 1) = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$;

3) $\operatorname{arctg} 3x = -\frac{\pi}{6}$; 4) $\operatorname{arcctg} \frac{x}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

3 **27.7.** 1) $2\arcsin(5x - 1) = -\frac{\pi}{2}$; 2) $\arccos(x^2 + 0{,}2) = 2{,}25$;

3) $4\operatorname{arctg}(x^2 - 4x + 4) = \pi$; 4) $4\operatorname{arcctg}(x^2 - 7) - 3\pi = 0$.

27.8. 1) $3\arccos(2x + 3) = \frac{5\pi}{2}$; 2) $\arcsin(x^2 - 4x + 2) = -\frac{\pi}{2}$;

3) $6\operatorname{arcctg}(3x^2 + x + \sqrt{3}) = \pi$;

4) $4\operatorname{arctg}(x^2 - 3x - 3) - \pi = 0$.

27.9. 1) $\arcsin(3x^2 - x + 1) = \arcsin(9x - 2)$;

2) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} 3x = \frac{\pi}{2}$.

27.10. 1) $\arccos(x^2 + 3x + 3) = \arccos(4 + 3x)$;

2) $\operatorname{arctg}(x + 3) + \operatorname{arcctg} 4x = \frac{\pi}{2}$.

27.11. 1) $\arcsin^2 x - \frac{\pi}{2}\arcsin x + \frac{\pi^2}{18} = 0$;

2) $\operatorname{arctg}^2 x - \frac{5\pi}{12}\operatorname{arctg} x + \frac{\pi^2}{24} = 0$;

3) $2\arcsin^2 x - 7\arcsin x + 3 = 0$;

4) $2\arccos x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{9\arccos x}$.

27.12. 1) $\arccos^2 x - \frac{3\pi}{4}\arccos x + \frac{\pi^2}{8} = 0$;

2) $\arcsin^2 x - \frac{3\pi}{4}\arcsin x + \frac{\pi^2}{4} = 0$;

3) $2\arcsin^2 x - \arcsin x - 6 = 0$;

4) $\operatorname{arctg} x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4\operatorname{arctg} x}$.

Розв'яжіть нерівність (27.13–27.16):

27.13. 1) $\operatorname{arctg}(2x - 7) \leqslant \operatorname{arctg}(8 - 3x)$; 2) $\arccos x < \arccos x^2$.

27.14. 1) $\operatorname{arcctg}(2x - 1) \leqslant \operatorname{arcctg}(3x + 2)$;
2) $\arcsin x < \arcsin(1 - x)$.

27.15. 1) $\arcsin x \leqslant 3$; 2) $\arccos x \leqslant \arccos 0{,}25$;
3) $-6\operatorname{arctg} x < \pi$; 4) $\operatorname{arcctg} x > 2$.

27.16. 1) $\arcsin x \geqslant -2$; 2) $\arccos x > \arccos\frac{1}{12}$;
3) $-3\operatorname{arctg} x \geqslant \pi$; 4) $\operatorname{arcctg} x < 3$.

27.17. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння:

1) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} + a$; 2) $\operatorname{arcctg} x = a - 2\pi$?

27.18. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння:

1) $\arccos x = a - \pi$; 2) $\operatorname{arctg} x = a + \frac{3\pi}{2}$?

4 **Розв'яжіть рівняння (27.19–27.24):**

27.19. $\frac{3}{\pi}\arccos(x^3 - 2x^2 + 3x - 5{,}5) = \operatorname{tg}\left(-\frac{67\pi}{4}\right)$.

27.20. $\frac{2}{\pi}\arcsin(4{,}5 - 2x + 15x^2 - 6x^3) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\left(-\frac{46\pi}{3}\right)$.

27.21. 1) $2\arccos x + \arcsin x = \frac{11\pi}{6}$;

2) $5\operatorname{arctg} x + 3\operatorname{arcctg} x = 2\pi$; 3) $\arcsin x \cdot \arccos x = \frac{\pi^2}{18}$.

27.22. 1) $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$; 2) $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi^2}{16}$.

27.23. 1) $\arcsin x + \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{2}$;

2) $\operatorname{arctg}(1 - x) + \operatorname{arctg}(1 + x) = \dfrac{\pi}{4}$;

3) $\arccos x - \arcsin\dfrac{4x}{3} = \pi$; 4) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} 3x = \dfrac{\pi}{2}$.

27.24. 1) $\arccos x\sqrt{3} + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$;

2) $\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = -\dfrac{3\pi}{4}$;

3) $\arcsin\dfrac{2}{3\sqrt{x}} + \arcsin\sqrt{1-x} = \arcsin\dfrac{1}{3}$;

4) $\operatorname{arctg}(x + 1) - \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{4}$.

Розв'яжіть нерівність (27.25–27.26):

27.25. 1) $6\arcsin(1 - x - x^2) < \pi$;
2) $\operatorname{arctg}^2 x - 4\operatorname{arctg} x + 3 > 0$;
3) $\operatorname{arcctg}^2 x - 5\operatorname{arctg} x + 6 > 0$;
4) $3\arcsin x - \arccos x > \dfrac{\pi}{2}$.

27.26. 1) $6\arcsin(x^2 - 3) > \pi$; 2) $\arccos^2 x - 5\arccos x + 4 \geqslant 0$;
3) $\operatorname{arctg}^2 x - 5\operatorname{arctg} x + 6 < 0$;
4) $\arcsin x > \arccos x$.

Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння (27.27–27.28):

27.27. $(a - 1)\arcsin x = 1 - a$.

27.28. $(2 + a)\arccos x = a + 2$.

27.29. Розв'яжіть рівняння (27.29–27.34):

1) $\arcsin x \cdot \arccos x = -1$; 2) $\operatorname{arctg}^3 x + \operatorname{arcctg}^3 x = \dfrac{3\pi^3}{2}$.

27.30. $\operatorname{arctg}^2\dfrac{x}{3} + \operatorname{arcctg}^2\dfrac{x}{3} = \pi^2$.

27.31. 1) $\arcsin\dfrac{3x}{5} + \arcsin\dfrac{4x}{5} = \arcsin x$;
2) $\arcsin x - \arccos x = \arcsin(3x - 2)$;
3) $\operatorname{arctg}(x - 1) + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(x + 1) = \operatorname{arctg} 3x$.

27.32. 1) $\arccos x - \arcsin x = \arccos\sqrt{3}x$;
2) $\arccos x + \arccos(1 - x) = \arccos(-x)$;
3) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = \pi$.

27.33. $\sqrt{2-|y|}(5\sin^2 x - 6\sin x\cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}) =$

$= \arcsin^2 x + \arccos^2 x - \dfrac{5\pi^2}{4}$.

27.34. $\sqrt{x^2-4}(3\sin^2 x + 10\sin x\cos x + 11\cos^2 x - 2\sqrt[3]{301}) =$
$= 5\pi^2 - 4(\arcsin^2 y + \arccos^2 y)$.

27.35. При яких значеннях параметра a рівняння $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x = a$ має розв'язки?

Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння (27.36–27.37):

27.36. $2\arccos x = a + \dfrac{a^2}{\arccos x}$.

27.37. $2\arccos x + 3a = \dfrac{2a^2}{\arccos x}$.

27.38. Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність:

$$\arccos(ax) < \frac{2\pi}{3}.$$

Для всіх значень параметра a, де $a \geqslant 0$, розв'яжіть нерівність (27.39–27.40):

27.39. $4\arcsin^2 x - 3a\arcsin x - a^2 \geqslant 0$.

27.40. $2\operatorname{arcctg}^2 x + a\operatorname{arcctg} x - a^2 < 0$.

27.41. Швидкість автомобіля, який розганяється з місця старту вздовж прямолінійного відрізка шляху довжиною l км з постійним прискоренням a км/ч^2, обчислюється за формулою $v = \sqrt{2la}$. Визначте найменше прискорення, з яким повинен рухатися автомобіль, щоб, проїхавши один кілометр, набути швидкості не менше ніж 100 км/год.

27.42. Знайдіть усі пари цілих чисел $(x;\ y)$, що задовольняють рівняння $x^2 - xy - 2y^2 = 7$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

27.43. Чи існує таке значення x, для якого справджується рівність:

1) $\sin x = 1{,}7$; 2) $\cos x = 0{,}8$; 3) $\sin x = 0{,}4$;

4) $\operatorname{tg} x = \dfrac{4}{7}$; 5) $\cos x = -2$; 6) $\operatorname{ctg} x = 5$?

27.44. Укажіть значення кута $0° < \alpha < 90°$, для якого справджується рівність:

1) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$; 5) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

§ 28. НАЙПРОСТІШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Рівняння, що містить змінну під знаком тригонометричної функції, називають *тригонометричним рівнянням*.

Такі рівняння ми вже розглядали у вправах 17.23–17.26, де шукали окремі їх розв'язки. Також тригонометричними є рівняння:

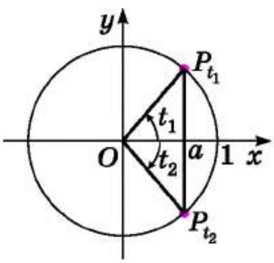
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \sin x-\cos=0;\quad \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{3}\ \text{тощо.}$$

У цьому параграфі навчимося знаходити множину всіх розв'язків рівнянь вигляду $\sin t = a$, $\cos t = a$, $\operatorname{tg} t = a$, $\operatorname{ctg} t = a$, де a – будь-яке число, t – змінна або вираз зі змінною, які називають *найпростішими тригонометричними рівняннями*.

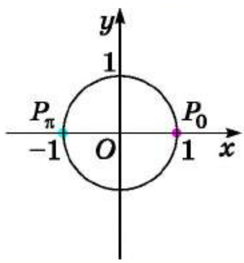
1. *Рівняння* $\cos t = a$

Якщо $a < -1$ або $a > 1$, то рівняння $\cos t = a$ розв'язків не має, оскільки $|\cos t| \leqslant 1$ для будь-якого значення t.

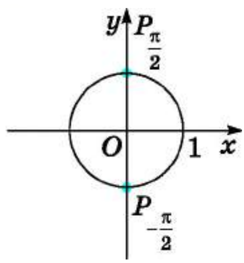
Нехай $-1 \leqslant a \leqslant 1$, тоді рівняння має розв'язки. Проілюструємо їх на одиничному колі. За означенням, $\cos t$ – це абсциса точки P_t одиничного кола. Тому розв'язками рівняння $\cos t = a$ будуть кути, абсциси точок яких на одиничному колі дорівнюють a. Для $|a| < 1$ таких кутів буде два, їм на колі відповідають дві точки (мал. 28.1 і 28.3), а для $a = 1$ та $a = -1$ – по одному куту (мал. 28.2).



Мал. 28.1



Мал. 28.2



Мал. 28.3

Оскільки $\cos t_1 = a$ і $t_1 \in [0; \pi]$, то $t_1 = \arccos a$. Тоді $t_2 = -t_1 = -\arccos a$. Ураховуючи, що функція $y = \cos x$ є періодичною з найменшим додатним періодом 2π, маємо формули коренів рівняння $\cos t = a$:

$$t_1 = \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z \ \text{ і } \ t_2 = -\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Ці розв'язки рівняння $\cos t = a$ можна об'єднати в одну формулу:

$$t = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z. \qquad (1)$$

Якщо $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$, матимемо *часткові випадки рівняння* $\cos t = a$, які зручніше розв'язувати не за формулою (1), а використовуючи одиничне коло:

1) якщо $\cos t = -1$, то $t = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$ (мал. 28.2);

2) якщо $\cos t = 0$, то $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ (мал. 28.3);

3) якщо $\cos t = 1$, то $t = 2\pi k$, $k \in Z$ (мал. 28.2).

Подамо розв'язки рівняння $\cos t = a$ у вигляді таблиці:

Рівняння $\cos t = a$				
$\lvert a\rvert > 1$	$\lvert a\rvert \leqslant 1$			
коренів немає	$a \neq 0;\ a \neq \pm 1$	$a = 0$	$a = 1$	$a = -1$
	$t = \pm\arccos a + 2\pi k$, $k \in Z$	$t = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$	$t = 2\pi k$, $k \in Z$	$t = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

1) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\pi}{3}$; 3) $\cos x = \frac{1}{7}$; 4) $\cos 4x = 0$.

Розв'язання. 1) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1$. За формулою (1):

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in Z;$$

$$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

2) $\cos x = \frac{\pi}{3}$. Оскільки $\frac{\pi}{3} \approx \frac{3,14}{3} > 1$, то розв'язків немає.

3) $\cos x = \frac{1}{7}$; $\left|\frac{1}{7}\right| < 1$. За формулою (1), маємо:

$$x = \pm\arccos\frac{1}{7} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Значення $\arccos\frac{1}{7}$ можна знайти лише наближено (наприклад, за допомогою калькулятора). У прикладних задачах знаходять наближено: $\arccos\frac{1}{7} \approx 1,4274$ і так само наближено записують розв'язки: $x \approx \pm 1,4274 + 2\pi k$, $k \in Z$. У математиці ж залишають точний розв'язок:

$$x = \pm\arccos\frac{1}{7} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

4) $\cos 4x = 0$ – це частковий випадок. Отже, маємо:

$4x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$, тобто $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4},\ k \in Z$.

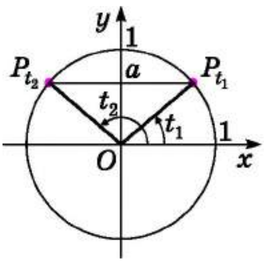
Відповідь. 1) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$; 2) розв'язків немає;

3) $\pm\arccos\frac{1}{7} + 2\pi k,\ k \in Z$; 4) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4},\ k \in Z$.

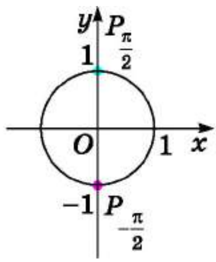
2. *Рівняння* $\sin t = a$

Якщо $a < -1$ або $a > 1$, то рівняння $\sin t = a$ розв'язків не має, оскільки $|\sin t| \leqslant 1$ для будь-якого значення t.

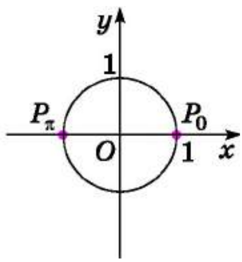
Нехай $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Тоді рівняння має розв'язки. Проілюструємо їх на одиничному колі. За означенням, $\sin t$ – це ордината точки P_t одиничного кола. Тому розв'язками рівняння будуть кути, ординати точок яких на одиничному колі дорівнюють a. Для $|a| < 1$ таких кутів буде два, їм на колі відповідають дві точки (мал. 28.4 і 28.6), а для $a = 1$ або $a = -1$ – по одному куту (мал. 28.5).



Мал. 28.4



Мал. 28.5



Мал. 28.6

Оскільки $\sin t_1 = a$ і $t_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $t_1 = \arcsin a$. Тоді $t_2 = \pi - t_1 = \pi - \arcsin a$. Ураховуючи, що функція $y = \sin x$ є періодичною з найменшим додатним періодом 2π, маємо формули коренів рівняння $\sin t = a$:

$$t_1 = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z, \text{ і } t_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Ці розв'язки рівняння $\sin t = a$ можна об'єднати в одну формулу:

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z. \quad (2)$$

Справді, якщо у формулу (2) підставити парне k, тобто $k = 2n$, $n \in Z$, отримаємо, що $t = \arcsin a + 2\pi n$. Якщо ж підставити непарне k, тобто $k = 2n + 1$, $n \in Z$, отримаємо, що $t = \pi - \arcsin a + 2\pi n$.

Якщо $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$, матимемо часткові випадки рівняння $\sin t = a$, які, як і у випадку рівняння $\cos t = a$, зручніше розв'язувати, використовуючи одиничне коло:

1) якщо $\sin t = -1$, то $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ (мал. 28.5);

2) якщо $\sin t = 0$, то $t = \pi k$, $k \in Z$ (мал. 28.6);

3) якщо $\sin t = 1$, то $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$ (мал. 28.5).

Подамо розв'язки рівняння $\sin t = a$ у вигляді таблиці:

Рівняння $\sin t = a$				
$\lvert a \rvert > 1$	$\lvert a \rvert \leqslant 1$			
коренів немає	$a \neq 0;\ a \neq \pm 1$	$a = 0$	$a = 1$	$a = -1$
	$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in Z$	$t = \pi k$, $k \in Z$	$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$	$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{1}{2}$; 3) $\sin x = -\pi$; 4) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Розв'язання. 1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$. За формулою (2):

$x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$, $k \in Z$;

$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

2) $\sin x = -\frac{1}{2}$; $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$. $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k$, $k \in Z$,

тобто $x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k$, $k \in Z$.

Оскільки $(-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) = (-1)^k \cdot (-1) \cdot \frac{\pi}{6} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6}$, то

$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

3) $\sin x = -\pi$. Оскільки $-\pi < -1$, то розв'язків немає.

4) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Маємо частковий випадок. Тоді:

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, звідси $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$;

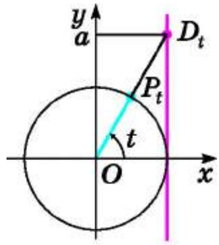
отже, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Відповідь. 1) $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; 2) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$;
3) розв'язків немає; 4) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

3. *Рівняння* $\operatorname{tg} t = a$

Оскільки $\operatorname{tg} t$ може набувати будь-яких дійсних значень, то рівняння $\operatorname{tg} t = a$ має розв'язки для будь-якого a. Знайдемо їх на одиничному колі.

На лінії тангенсів існує єдина точка D_t, ордината якої дорівнює a (мал. 28.7). Сполучимо точку D_t із центром кола O. Промінь OD_t перетинає одиничне коло в точці P_t, яка відповідає куту t такому, що $\operatorname{tg} t = a$ і $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тоді $t = \operatorname{arctg} a$. Це і є розв'язок рівняння $\operatorname{tg} t = a$.



Мал. 28.7

Оскільки функція $y = \operatorname{tg} x$ періодична з найменшим додатним періодом π, то маємо формулу коренів цього рівняння:

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z. \qquad (3)$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння: 1) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg} 2x = 5$.

Розв'язання. За формулою (3) маємо:

1) $x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi k,\ k \in Z;$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

2) $2x = \operatorname{arctg} 5 + \pi k,\ k \in Z;$

$$x = 0{,}5 \operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$$

Відповідь. $0{,}5 \operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z.$

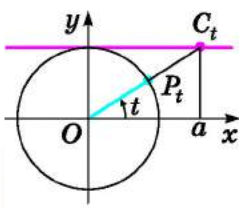
4. *Рівняння* $\operatorname{ctg} t = a$

Оскільки $\operatorname{ctg} t$ може набувати будь-яких дійсних значень, то рівняння $\operatorname{ctg} t = a$ має розв'язки для будь-якого a.

Знайдемо їх на одиничному колі.

Міркуючи так само, як і для рівняння $\operatorname{tg} t = a$ (мал. 28.8), отримаємо, що множину розв'язків рівняння $\operatorname{ctg} t = a$ можна задати формулою:

$$t = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in Z. \qquad (4)$$



Мал. 28.8

Приклад 4. Розв'язати рівняння:

1) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\operatorname{ctg}(x + 40°) = -1$.

Розв'язання. 1) За формулою (4) маємо:

$$x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k,\ k \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$$

2) Оскільки невідомий кут задано у градусах, то й формулу (4) також використаємо у градусах. Ураховуючи, що

$$\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4} = 135°; \ \pi k = 180°k, \text{ маємо:}$$

$$x + 40° = \operatorname{arcctg}(-1) + 180°k, \ k \in Z;$$
$$x + 40° = 135° + 180°k, \ k \in Z;$$
$$x = 135° - 40° + 180°k, \ k \in Z;$$
$$x = 95° + 180°k, \ k \in Z.$$

Відповідь. 1) $\frac{\pi}{3} + \pi k, \ k \in Z$; 2) $95° + 180°k, \ k \in Z$.

5. *Тригонометричні рівняння, що зводяться до найпростіших*

Розв'язування тригонометричних рівнянь, що не є найпростішими, за допомогою тригонометричних формул та тотожних перетворень зводять до розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.

Приклад 5. Розв'язати рівняння:

1) $4\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{3}\right) + 4\sqrt{3} = 0$; 2) $\sin x \cos x = -0,5$.

Розв'язання.

1) Оскільки $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{x}{3}$, матимемо:

$$-4\operatorname{tg}\frac{x}{3} = -4\sqrt{3};$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{3} = \sqrt{3};$$
$$\frac{x}{3} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k, \ k \in Z;$$
$$\frac{x}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi k, \ k \in Z;$$
$$x = \pi + 3\pi k, \ k \in Z.$$

Відповідь. $\pi + 3\pi k, \ k \in Z$.

2) Помножимо обидві частини рівняння на 2, матимемо: $2\sin x \cos x = -1$. Ураховуючи, що $2\sin x \cos x = \sin 2x$, отримаємо частковий випадок найпростішого рівняння: $\sin 2x = -1$;

$$2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z;$$
$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z$.

Приклад 6. Знайти корені рівняння $\cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}$, що належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо всі корені рівняння, а потім виберемо з них ті, що належать даному проміжку. Зведемо рівняння до найпростішого методом допоміжного кута (§ 23, п. 4). Поділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{2}$, матимемо:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x = 1.$$

Ураховуючи, що $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, отримаємо:

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{4}\sin 2x = 1.$$

Спростивши ліву частину, матимемо: $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, звідки $2x + \frac{\pi}{4} = 2\pi k,\ k \in Z$, отже, $x = \pi k - \frac{\pi}{8},\ k \in Z$.

Тепер з отриманої множини коренів виберемо ті, що належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Запишемо для коренів умову їх належності цьому проміжку: $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi k - \frac{\pi}{8} < \pi$. Розв'язавши отриману нерівність, знайдемо саме ті значення k, при яких корені належатимуть даному проміжку: $-\frac{3}{8} \leqslant k < \frac{9}{8}$. Оскільки $k \in Z$, розв'язками нерівності є $k = 0$ і $k = 1$. Отже, даному проміжку належать два корені рівняння. Знайдемо їх:

1) якщо $k = 0$, то $x = \pi \cdot 0 - \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{8}$;

2) якщо $k = 1$, то $x = \pi \cdot 1 - \frac{\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{8};\ \frac{7\pi}{8}$.

Приклад 7. Знайти найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\operatorname{tg}(x - 15°)\operatorname{ctg}(x + 15°) = \frac{1}{3}.$$

Розв'язання. Щоб знайти найбільший від'ємний корінь рівняння, треба знайти множину всіх коренів рівняння, а потім вибрати з неї найбільше від'ємне число.

Перетворимо ліву частину рівняння: $\operatorname{tg}(x - 15°)\operatorname{ctg}(x + 15°) =$

$$= \frac{\sin(x - 15°)\cos(x + 15°)}{\cos(x - 15°)\sin(x + 15°)} = \frac{\frac{1}{2}(\sin(-30°) + \sin 2x)}{\frac{1}{2}(\sin 30° + \sin 2x)} = \frac{2\sin 2x - 1}{2\sin 2x + 1}.$$

Маємо рівняння: $\frac{2\sin 2x - 1}{2\sin 2x + 1} = \frac{1}{3}$, яке рівносильне системі:

$$\begin{cases} 3(2\sin 2x - 1) = 2\sin 2x + 1, \\ 2\sin 2x + 1 \neq 0; \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \sin 2x \neq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Система рівносильна рівнянню: $\sin 2x = 1$, що є найпростішим. Розв'яжемо його: $2x = 90° + 360°k,\ k \in Z$;

$$x = 45° + 180°k,\ k \in Z.$$

Отримали множину коренів початкового рівняння.
Тепер виберемо із цієї множини найбільше від'ємне число.
Очевидно, що при $k \geqslant 0$ всі корені будуть додатними, а при $k < 0$ – від'ємними. Оскільки значення кореня залежить від значення k, то найбільшим коренем серед від'ємних буде той, який отримано для найбільшого від'ємного значення k, тобто для $k = -1$.
Якщо $k = -1$, то $45° + 180°k = 45° + 180° \cdot (-1) = -135°$.
Відповідь. $-135°$.

6. *Сторонні корені тригонометричних рівнянь*

Якщо область допустимих значень (ОДЗ) змінної у рівнянні, яке не є найпростішим, не є множиною всіх дійсних чисел, то під час розв'язування рівняння зведенням його до найпростішого можлива поява сторонніх коренів. Це можливо і тоді, коли перетворення тригонометричних виразів у рівнянні призводить до розширення його ОДЗ.

У більшості випадків уникнути появи сторонніх коренів дозволяє *метод рівносильних перетворень тригонометричних рівнянь*, що полягає в заміні початкового рівняння рівносильною йому системою рівнянь і нерівностей (додаткових умов, пов'язаних з ОДЗ змінної у рівнянні, які допоможуть виявити і вилучити сторонні корені).

Розглянемо застосування цього методу на прикладах.

Приклад 8. Розв'язати рівняння: $\dfrac{\cos x}{1 + \sin x} = 0.$

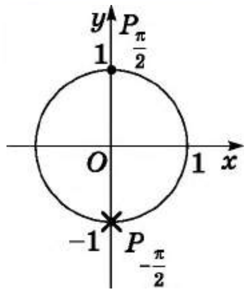
Розв'язання. Маємо рівносильну рівнянню систему:

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x \neq -1. \end{cases}$$

Розв'язки системи покажемо на одиничному колі. Домовимося, розв'язки тих співвідношень системи, що є рівняннями (у нашому випадку – перший рядок системи), позначати на колі точками, а тих співвідношень, що не є рівняннями, тобто відповідають за відбір коренів (у нашому випадку – це другий рядок системи) позначати на колі «хрестиками».
Коренями рівняння $\cos x = 0$ є значення x, яким на одиничному колі відповідають точки $P_{\frac{\pi}{2}}$ і $P_{-\frac{\pi}{2}}$. Коренями рівняння $\sin x = -1$ є значення x, яким на одиничному колі відповідає точка $P_{-\frac{\pi}{2}}$.
Ураховуючи, що другий рядок системи має вигляд $\sin x \neq -1$, позначимо точку $P_{-\frac{\pi}{2}}$ «хрестиком» (мал. 28.9). Це означає,

що в такий спосіб ми вилучили («викреслили») точку, що відповідає стороннім кореням, тобто вилучили сторонні корені, які з'явилися після розв'язання рівняння $\cos x = 0$, яким ми замінили початкове рівняння.

Отже, множиною розв'язків початкового рівняння є ті значення x, яким на одиничному колі відповідають точки без «хрестиків». Це кути вигляду $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.



Мал. 28.9

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння: $\mathrm{tg}5x = \mathrm{tg}3x$.

Розв'язання. Для розв'язування цього і подібних йому рівнянь, можна скористатися періодичністю тригонометричних функцій. За умовою, маємо рівність значень тангенсів кутів $3x$ і $5x$. Ураховуючи періодичність тангенса, ці значення можуть бути рівними лише тоді, коли кути між собою рівні або різняться на число, кратне числу π. Тому, з урахуванням цього та ОДЗ тангенса, рівняння $\mathrm{tg}5x = \mathrm{tg}3x$ рівносильне системі: $\begin{cases} 5x = 3x + \pi k,\ k \in Z, \\ \cos 5x \neq 0, \\ \cos 3x \neq 0. \end{cases}$

З першого рівняння системи отримаємо корені вигляду $x = \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$. Перевіримо, чи є серед них сторонні, тобто ті, які не задовольняють хоча б одну з умов $\cos 5x \neq 0$ або $\cos 3x \neq 0$.

Якщо $k = 2n + 1,\ n \in Z$, тобто k – непарне, то $x = \frac{\pi(2n+1)}{2}$, отже, корені мають вигляд $x = \pi n + \frac{\pi}{2},\ n \in Z$. Підставимо ці корені, наприклад, у рівняння $\cos 3x = 0$. Матимемо: $\cos 3\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(3\pi n + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$. Отже, для коренів вигляду $x = \pi n + \frac{\pi}{2},\ n \in Z$, умова $\cos 3x \neq 0$ не виконується, тому це сторонні корені.

Якщо $k = 2n,\ n \in Z$, тобто k – парне, то $x = \frac{\pi \cdot 2n}{2}$, отже, корені мають вигляд $x = \pi n,\ n \in Z$. Знайдемо значення виразів $\cos 5x$ та $\cos 3x$ для цих значень x. Матимемо:

$$\cos 5x = \cos 5\pi n = \pm 1 \text{ та } \cos 3x = \cos 3\pi n = \pm 1.$$

Отже, корені вигляду $x = \pi n$, $n \in Z$ задовольняють кожну з умов $\cos 5x \neq 0$ та $\cos 3x \neq 0$.
Доходимо висновку, що коренями початкового рівняння є лише числа вигляду $x = \pi n$, $n \in Z$.

Відповідь. πn, $n \in Z$.

Яке рівняння називають тригонометричним? Запишіть формули для розв'язування рівняння $\sin t = a$ у випадках: $a = -1$; $a = 0$; $a = 1$ і $|a| < 1$, $a \neq 0$. Запишіть формули для розв'язування рівняння $\cos t = a$ у випадках: $a = -1$; $a = 0$; $a = 1$ і $|a| < 1$, $a \neq 0$. Запишіть формулу для розв'язування рівняння $\operatorname{tg} t = a$. Запишіть формулу для розв'язування рівняння $\operatorname{ctg} t = a$.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Чи має корені рівняння (28.1–28.2):

28.1. 1) $\sin x = \frac{1}{3}$; 2) $\cos x = \sqrt{2}$; 3) $\operatorname{tg} x = -1$;
4) $\cos x = -\frac{1}{8}$; 5) $\sin x = \frac{\pi}{6}$; 6) $\operatorname{ctg} x = 4$?

28.2. 1) $\cos x = -\frac{\pi}{3}$; 2) $\sin x = -0{,}8$; 3) $\operatorname{tg} x = 2$;
4) $\sin x = 1{,}06$; 5) $\cos x = \frac{2}{3}$; 6) $\operatorname{ctg} x = -3$?

Розв'яжіть рівняння (28.3–28.10):

28.3. 1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = 0$; 3) $\sin x = \frac{9}{8}$;
4) $\cos x = \frac{1}{2}$; 5) $\cos x = -1$; 6) $\cos x = -1{,}2$;
7) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 8) $\operatorname{ctg} x = 1$.

28.4. 1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = -1$; 3) $\sin x = -1{,}8$;
4) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\cos x = 1{,}4$; 6) $\cos x = 0$;
7) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 8) $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2 **28.5.** 1) $\sin 2x = 1$; 2) $\cos \frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\operatorname{tg} 4x = 0$; 4) $\operatorname{ctg} 0{,}5x = -1$.

28.6. 1) $\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$; 2) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\frac{x}{4} = 1$; 4) $\operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

28.7. 1) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 2) $\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 1$;

3) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$; 4) $\operatorname{ctg}\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.

28.8. 1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$; 2) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

28.9. 1) $\sin x = \frac{1}{3}$; 2) $\cos x = -0{,}2$; 3) $\operatorname{tg} x = 4$; 4) $\operatorname{ctg} x = -3$.

28.10. 1) $\sin x = -0{,}1$; 2) $\cos x = \frac{1}{8}$;

3) $\operatorname{tg} x = -2$; 4) $\operatorname{ctg} x = 0{,}01$.

Знайдіть область визначення функції (28.11–28.12):

28.11. 1) $y = \frac{3}{\sin 4x + 1}$; 2) $y = \frac{4}{2\cos x + \sqrt{3}}$;

3) $y = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}}$; 4) $y = \frac{2}{5\operatorname{ctg} 2x + 5}$.

28.12. 1) $y = \frac{2}{3\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 3}$; 2) $y = \frac{4}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{6} - 1}$.

3 **Розв'яжіть рівняння (28.13–28.17):**

28.13. 1) $\cos(2x + 30°) = -1$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} - 15°\right) = \sqrt{3}$.

28.14. 1) $\sin(2x - 10°) = 1$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + 35°\right) = -1$.

28.15. 1) $3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 3 = 0$; 2) $2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} = 0$.

28.16. 1) $\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)} = 3$; 2) $\frac{5\sqrt{3}}{\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = -5$.

28.17. 1) $5\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) - 5 = 0$; 2) $\frac{4}{\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{8}\right)} = -4$.

28.18. Складіть рівняння, розв'язками якого є числа:

1) $\pi k,\ k \in Z$;
2) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$;
3) $2\pi k,\ k \in Z$;
4) $\pi + 2\pi k,\ k \in Z$;
5) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$;
6) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

За допомогою тригонометричних формул зведіть рівняння до найпростішого і розв'яжіть його (**28.19–28.20**):

28.19. 1) $\sin 4x \cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{4}$; 2) $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$;

3) $\sin 4x \cos x - \cos 4x \sin x = \frac{1}{2}$; 4) $\sin^2 \frac{x}{3} = \frac{3}{4}$.

28.20. 1) $4 \sin\frac{x}{4} \cos\frac{x}{4} = 1$; 2) $2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 2$;

3) $\sin 5x \cos 3x + \cos 5x \sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos^2 \frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$.

Розв'яжіть рівняння (**28.21–28.26**):

28.21. 1) $\sqrt{3}\cos x = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

3) $1 + 2\cos 3x \cos x = \cos 2x$;

4) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{3}$.

28.22. 1) $2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$; 2) $\cos x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

3) $1 + 2\sin x \cos 4x = \sin 5x$;

4) $\sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}$.

28.23. 1) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$;

2) $\cos(x - 60°) - \cos(x - 30°) = \sin(x - 45°)$.

28.24. 1) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

2) $\cos(x - 120°) + \cos(x + 30°) = \cos(x - 45°)$.

28.25. 1) $\cos x^2 = 1$; 2) $\mathrm{tg}\,\frac{2}{x} = -\sqrt{3}$.

28.26. 1) $\sin\sqrt{x} = 1$; 2) $\mathrm{ctg}\,\frac{4}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

28.27. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння:

1) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

28.28. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=1$; 2) $\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

28.29. Знайдіть найменший додатний і найбільший від'ємний корені рівняння $\sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=-1$.

28.30. Розв'яжіть рівняння $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ і знайдіть ті його корені, що належать проміжку $\left[-\frac{5\pi}{6};\ \frac{2\pi}{3}\right]$.

28.31. При яких значеннях a має корені рівняння:

1) $\sin\frac{x}{5}=\sqrt{a+5}$; 2) $(a-1)\cos x=a^2-1$?

28.32. При яких значеннях b має корені рівняння:

1) $\cos\frac{x}{6}=\sqrt{b-3}$; 2) $(b+2)\sin x=b^2-4$?

4 Розв'яжіть рівняння (**28.33–28.36**):

28.33. 1) $\frac{1-\sin x}{\cos x}=0$; 2) $\frac{\cos x}{1-\sin x}=0$;

3) $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} 3x$; 4) $\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{ctg} 5x$.

28.34. 1) $\frac{1+\cos x}{\sin x}=0$; 2) $\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$;

3) $\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{ctg} x$; 4) $\operatorname{tg} 7x=\operatorname{tg} 5x$.

28.35. 1) $(x+0,5)^2|\sin x|+\sin x=0$; 2) $|\cos x|-\frac{\cos x}{(x+1,5)^2}=0$.

28.36. 1) $\cos x=(x-2)^2|\cos x|$; 2) $|\sin x|+\frac{\sin x}{(x-4)^2}=0$.

Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння (**28.37–28.38**):

28.37. $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=0$.

28.38. $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=0$.

Розв'яжіть рівняння (**28.39–28.40**):

28.39. $2\cos(\sqrt{x}+\pi)=-1$. **28.40.** $2\sin\left(\sqrt{x}+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$.

28.41. Знайдіть усі розв'язки рівняння $1-\cos 2x = \frac{\sin x}{|\sin x|}$, що належать проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

28.42. Знайдіть усі розв'язки рівняння $\frac{|\cos x|}{\cos x} = \sin 2x - 1$, що належать проміжку $[0; \pi]$.

Розв'яжіть рівняння (**28.43–28.44**):

28.43. $(1-2\sin x)\sqrt{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = 0.$

28.44. $(2\cos x + 1)\sqrt{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = 0.$

28.45. Серед коренів рівняння $\frac{\cos 3\pi x}{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\pi x + 1} = 0$ знайдіть той, що має найменшу відстань до числа $2\sqrt{2}$ на числовій осі.

28.46. Серед коренів рівняння $\frac{\sin 2\pi x}{1+\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2}} = 0$ знайдіть той, що має найменшу відстань до числа $\sqrt{11}$ на числовій осі.

28.47. Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right]$ залежно від значень параметра a.

28.48. Визначте кількість коренів рівняння $\sin x = a$ на проміжку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}\right]$ залежно від значень параметра a.

Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння (**28.49–28.50**):

28.49. 1) $a\,\mathrm{ctg}\,x = 1$; 2) $a\cos x = 0$;
3) $a\sin x = 1$; 4) $(a-1)\,\mathrm{tg}\,x = a-1$.

28.50. 1) $(a-2)\,\mathrm{tg}\,x = 1$; 2) $a\sin x = 0$;
3) $a\cos x = 1$; 4) $a\,\mathrm{ctg}\,x = a$.

Знайдіть усі цілі корені рівняння (**28.51–28.52**):

28.51. $\cos\left(\frac{\pi}{2}(3x+\sqrt{9x^2+224x+1416})\right) = 1.$

28.52. $\cos\left(\frac{\pi}{4}(3x-\sqrt{9x^2-16x-80})\right) = 1.$

Розв'яжіть рівняння (**28.53–28.54**):

28.53. 1) $\cos\left(\frac{1}{2\sin x}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin\left(-\frac{13}{9}\pi\sin x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

28.54. 1) $\cos\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(-\frac{11}{8}\pi\cos x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

28.55. Знайдіть усі розв'язки рівняння $\operatorname{ctg}(3\cos x)=1$, що задовольняють умову $-2\pi < x < -\pi$.

28.56. Знайдіть усі розв'язки рівняння $\operatorname{tg}(3\sin x)=1$, що задовольняють умову $-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$.

28.57. Клієнт планує орендувати автомобіль на добу для поїздки на відстань 400 км. У таблиці наведено характеристики трьох автомобілів і вартість їх оренди. Крім оренди, клієнт зобов'язаний оплатити паливо для автомобіля на всю поїздку. Яку суму заплатить клієнт за оренду і паливо, якщо вибере найдешевший варіант?

Автомобіль	Паливо	Витрата палива (л на 100 км)	Орендна плата (грн за 1 добу)
А	Дизельне	7	500
Б	Бензин	10	400
В	Газ	14	450

Ціна дизельного палива – 20 грн за літр, бензину – 22 грн за літр, газу – 12 грн за літр.

28.58. (*Національна олімпіада Швеції*) Числа 1; 2; 3; ...; n переставлено в деякому порядку $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Доведіть, що коли n – непарне число, то добуток $(a_1-1)(a_2-2)\ldots(a_n-n)$ є парним числом.

§ 29. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗАМІНИ ЗМІННОЇ

У цьому параграфі розглянемо ті, відмінні від найпростіших, тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних рівнянь введенням нової змінної (заміни змінної).

1. *Рівняння з очевидною заміною змінної*

Якщо тригонометричне рівняння містить одну й ту саму тригонометричну функцію одного й того самого аргументу (або зводиться до такого рівняння), то, увівши замість цієї функції нову змінну, отримаємо алгебраїчне рівняння відносно нової змінної.

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.

Розв'язання. Нехай $\cos x = t$, тоді $|t| \leqslant 1$. Маємо рівняння: $2t^2 - 3t + 1 = 0$, корені якого: $t_1 = 1$, $t_2 = 0{,}5$. Повертаємося до заміни: 1) $t = 1$, тоді $\cos x = 1$, отже, $x = 2\pi k$, $k \in Z$.
2) $t = 0{,}5$, тоді $\cos x = 0{,}5$, отже, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Відповідь. $2\pi k$, $k \in Z$; $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $\sqrt{5 - 4\,\mathrm{tg}\,x} = \mathrm{tg}\,x$.

Розв'язання. Нехай $\mathrm{tg}\,x = t$. Тоді маємо рівняння: $\sqrt{5 - 4t} = t$, яке рівносильне системі:

$$\begin{cases} 5 - 4t = t^2, \\ t \geqslant 0; \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} t^2 + 4t - 5 = 0, \\ t \geqslant 0; \end{cases} \quad \text{звідки } t = 1.$$

Повертаємося до заміни: $\mathrm{tg}\,x = 1$, отже, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Відповідь. $\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Розглянемо рівняння, що містять різнойменні тригонометричні функції або одну й ту саму функцію різних аргументів. Зазвичай після використання відповідних тригонометричних формул удається звести таке рівняння до рівняння відносно однієї тригонометричної функції одного й того самого аргументу, після чого застосовують заміну змінних.

2. *Рівняння вигляду $F(\mathrm{tg}\,f(x), \mathrm{ctg}\,f(x)) = 0$*

У таких рівняннях використовуємо взаємну оберненість тангенса і котангенса, тим самим зводимо рівняння до рівняння, що міститиме тільки тангенс.

Приклад 3. Розв'язати рівняння: $\mathrm{tg}\,x + 2\,\mathrm{ctg}\,x = -3$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння: $\cos x \neq 0$ і $\sin x \neq 0$.
Оскільки $\mathrm{ctg}\,x = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,x}$, рівняння на ОДЗ набуває вигляду: $\mathrm{tg}\,x + \dfrac{2}{\mathrm{tg}\,x} = -3$. Нехай $\mathrm{tg}\,x = t$. Маємо рівняння: $t + \dfrac{2}{t} = -3$, корені якого $t_1 = -1$ і $t_2 = -2$. Повертаємося до заміни:
1) $t = -1$, тоді $\mathrm{tg}\,x = -1$, отже, $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in Z$.
2) $t = -2$, тоді $\mathrm{tg}\,x = -2$, отже, $x = -\mathrm{arctg}\,2 + \pi k$, $k \in Z$.

Відповідь. $-\dfrac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in Z$; $-\mathrm{arctg}\,2 + \pi k$, $k \in Z$.

3. *Рівняння вигляду* $F(\cos^{2n} f(x), \sin f(x)) = 0$ *або* $F(\sin^{2n} f(x), \cos f(x)) = 0$, $n \in N$

У таких рівняннях використовуємо основну тригонометричну тотожність $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, яка дозволяє виразити синус через косинус, або навпаки, та звести рівняння до рівняння відносно однієї з функцій синуса або косинуса.

Приклад 4. Розв'язати рівняння: $6\cos^2 2x + 5\sin 2x - 2 = 0$.

Розв'язання. Оскільки $\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x$, матимемо рівняння: $6(1 - \sin^2 2x) + 5\sin 2x - 2 = 0$. Спростивши його ліву частину, відносно $\sin 2x$ отримаємо рівняння вигляду: $-6\sin^2 2x + 5\sin 2x + 4 = 0$. Уведемо заміну: $\sin 2x = t$, $|t| \leqslant 1$.

Отримаємо рівняння: $6t^2 - 5t - 4 = 0$, корені якого $t_1 = -\frac{1}{2}$ і $t_2 = 1\frac{1}{3}$. Число $1\frac{1}{3}$ не задовольняє умову $|t| \leqslant 1$. Повертаємося до заміни: $t = -\frac{1}{2}$, тоді $\sin 2x = -\frac{1}{2}$, тобто $2x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$, отже, $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Відповідь. $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

4. *Рівняння вигляду* $F(\cos 2f(x), \cos f(x)) = 0$ *і* $F(\cos 2f(x), \sin f(x)) = 0$

Якщо до першого рівняння застосуємо формулу $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, то отримаємо рівняння відносно косинуса. Якщо до другого рівняння застосуємо формулу $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, то отримаємо рівняння відносно синуса.

Приклад 5. Розв'язати рівняння: $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$.

Розв'язання. Оскільки $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, маємо рівняння: $1 - 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$. Нехай $\sin x = t$, $|t| \leqslant 1$, маємо рівняння: $2t^2 + 5t + 2 = 0$, корені якого $t_1 = -\frac{1}{2}$ і $t_2 = -2$, з яких лише t_1 задовольняє умову $|t| \leqslant 1$. Повертаємося до заміни: $\sin x = -\frac{1}{2}$, тобто $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

Відповідь. $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

5. *Рівняння вигляду* $F(\sin f(x) \pm \cos f(x); \sin 2f(x)) = 0$

У рівняннях такого вигляду доцільною є заміна $t = \sin x \pm \cos x$. Тоді $t^2 = \sin^2 x \pm 2\sin x \cos x + \cos^2 x$, тобто $t^2 - 1 = \pm\sin 2x$, звідки $\sin 2x = \pm(t^2 - 1)$.

Зауважимо, що $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) =$

$= \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} \pm \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right).$

Отже, використовуючи заміну $t = \sin x \pm \cos x$, слід пам'ятати, що $-\sqrt{2} \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$, $|t| \leqslant \sqrt{2}$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння: $\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) + 1 = 0.$

Розв'язання. Заміна: $t = \sin x + \cos x$. Тоді $t^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x$, отже, $\sin 2x = t^2 - 1$. Після заміни маємо рівняння: $t^2 - 1 + 5t + 1 = 0$, звідки $t_1 = 0$ і $t_2 = -5$.

Ураховуючи, що $|t| \leqslant \sqrt{2}$, повертаємося до заміни тільки для $t = 0$. Маємо: $\sin x + \cos x = 0$. Уведенням допоміжного кута запишемо рівняння у вигляді: $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, звідки $x + \frac{\pi}{4} = \pi k$, $k \in Z$, отже, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

6. *Інші випадки застосування заміни змінної*

Розглянемо ще кілька прикладів розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою заміни змінної.

Приклад 7. Розв'язати рівняння: $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x \operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2 = 0.$

Розв'язання. ОДЗ: $\sin x \neq 0$; $\cos x \neq 0$; $\sin\frac{x}{2} \neq 0$; $\cos\frac{x}{2} \neq 0.$

Оскільки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$, а $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1}{\frac{\sin x}{1+\cos x}} = \frac{1+\cos x}{\sin x}$, рівняння перепишемо у вигляді: $\frac{1+\cos x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\cos x} + 2 = 0$ та позначимо $t = \frac{1+\cos x}{\cos x}$. Маємо рівняння: $t + \frac{1}{t} + 2 = 0$, звідки $t = -1$. Повертаємося до заміни: $\frac{1+\cos x}{\cos x} = -1$, звідки $\cos x = -\frac{1}{2}$, що задовольняє ОДЗ. Отже, маємо множину коренів початкового рівняння: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

В і д п о в і д ь. $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$

Приклад 8. Розв'язати рівняння:

$$2\sin^4 x+\frac{5}{4}\sin^2 2x-\cos^4 x=\cos 2x.$$

Р о з в ' я з а н н я. Перетворимо обидві частини рівняння:

$2(1-\cos^2 x)^2+\dfrac{5}{4}\cdot(2\sin x\cos x)^2-(\cos^2 x)^2=2\cos^2 x-1$, тобто

$2(1-\cos^2 x)^2+5(1-\cos^2 x)\cos^2 x-(\cos^2 x)^2=2\cos^2 x-1.$

Заміна: $\cos^2 x=t,\ 0\leqslant t\leqslant 1$. Маємо рівняння:

$2(1-t)^2+5t(1-t)-t^2=2t-1$, корені якого: $t_1=\dfrac{3}{4}$ і $t_2=-1$.

Корінь t_2 не задовольняє умову $0\leqslant t\leqslant 1$.

Повертаємося до заміни, отримаємо рівняння: $\cos^2 x=\dfrac{3}{4}$.

Перепишемо його у вигляді: $\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{3}{4}$, тоді $\cos 2x=\dfrac{1}{2}$,

звідки $2x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$, отже, $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$

В і д п о в і д ь. $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$

Приклад 9. Розв'язати рівняння $\sqrt{4\cos^2 x+1}+\sqrt{4\sin^2 x+3}=4.$

Р о з в ' я з а н н я. Заміною зведемо рівняння до системи рівнянь. Нехай $\sqrt{4\cos^2 x+1}=u$; $\sqrt{4\sin^2 x+3}=v$.

Тоді, за умовою, $u+v=4$.

Крім того:

$u^2+v^2=4\cos^2 x+1+4\sin^2 x+3=4(\cos^2 x+\sin^2 x)+4=$
$=4\cdot 1+4=8.$

Маємо систему рівнянь: $\begin{cases}u+v=4,\\ u^2+v^2=8.\end{cases}$

Отримаємо, що $u=v=2$ (розв'яжіть систему самостійно).

Повертаємося до заміни, наприклад, для змінної u: $\sqrt{4\cos^2 x+1}=2$. Тоді маємо рівняння: $4\cos^2 x+1=2^2$.

Розв'язавши це рівняння, отримаємо, що $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$

В і д п о в і д ь. $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$

- Назвіть випадки застосовування заміни змінних у тригонометричних рівняннях.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Розв'яжіть рівняння (29.1–29.20):

29.1. 1) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; 2) $4\cos^2 x - 3 = 1$;
3) $4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$; 4) $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$.

29.2. 1) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; 2) $4\sin^2 x - 3 = 0$;
3) $4\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0$; 4) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$.

2 **29.3.** 1) $\cos^4 x + \cos^2 x - 2 = 0$; 2) $2\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$.

29.4. 1) $\sin^4 x + 2\sin^2 x - 3 = 0$; 2) $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = -4$.

29.5. 1) $2\sin^2 x + 2\cos x = 2{,}5$; 2) $2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 0$.

29.6. 1) $2\cos^2 x - 2\sin x = 2{,}5$; 2) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$.

29.7. 1) $\cos 2x - 10\cos x - 11 = 0$; 2) $8\sin x + \cos 2x - 7 = 0$;
3) $8\sin x = 3 - \cos 2x$; 4) $5 + \cos 2x = 8\cos x$.

29.8. 1) $\cos 2x - 6\cos x + 5 = 0$; 2) $\cos 2x + 3\sin x + 4 = 0$;
3) $\cos 2x = 4\cos x + 1$; 4) $4\sin x + 3 = -\cos 2x$.

3 **29.9.** 1) $3\operatorname{ctg} x = 2\sin x$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x - \cos x = 0$;
3) $5\cos x + 4\operatorname{tg} x = 0$; 4) $\operatorname{ctg} x = \dfrac{3\sin x}{3\cos x - 4}$.

29.10. 1) $2\cos x = 3\operatorname{tg} x$; 2) $\operatorname{ctg} x + \sqrt{2}\sin x = 0$;
3) $2\operatorname{ctg} x - 3\sin x = 0$; 4) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\cos x}{3 + \sin x}$.

29.11. 1) $\cos 2x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0$; 2) $2\cos 2x + 4\cos x = \sin^2 x$;
3) $\cos 2x = 2\cos^2 \dfrac{x}{2} - 1$; 4) $\sin 3x \sin x = \cos 2x - 1$.

29.12. 1) $\cos 2x - 3\sqrt{3}\cos x + 4 = 0$; 2) $\cos 2x + 2\sin x = 2\cos^2 x$;
3) $\dfrac{1}{2}\cos 2x = \sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$; 4) $2\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2} + 2\cos x = 1$.

29.13. 1) $\cos 4x + 1 = 3\sin 2x$; 2) $1 + \cos^2 2x = 5\sin^2 x$;
3) $7\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 9\cos x = -1$;
4) $\cos\left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

29.14. 1) $1 + \cos 6x + 3\sin 3x = 0$; 2) $1 + \cos^2 2x = 5\cos^2 x$;
3) $3\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2x\right) - 5\sin x = 1$;
4) $\cos\left(2x - \dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

29.15. 1) $1+\sin 2x=\sin x+\cos x$;
2) $\cos x-\sin x=1+\sin x\cos x$.

29.16. 1) $4-\sin 2x=4(\cos x-\sin x)$;
2) $1+\sin x\cos x=\sin x+\cos x$.

29.17. 1) $\sqrt{37-48\operatorname{tg} x}=8\operatorname{tg} x-5$;
2) $36\sin x-1=6\sqrt{34\sin x-\frac{35}{36}}$;
3) $\sqrt{\cos x}=\sqrt{1-2\cos^2 x}$; 4) $\sqrt{2\cos^2 x-1}=\sqrt{-\sin x}$.

29.18. 1) $\sqrt{13-18\operatorname{ctg} x}=6\operatorname{ctg} x-3$;
2) $18\cos x-1=3\sqrt{32\cos x-\frac{17}{9}}$;
3) $\sqrt{1-2\sin^2 x}=\sqrt{\sin x}$; 4) $\sqrt{2\sin^2 x-1}=\sqrt{-\cos x}$.

29.19. 1) $1+3\operatorname{tg}^2 x-8\cos^2 x=0$; 2) $\operatorname{ctg}^2 x=1+8\sin^2 x$.

29.20. 1) $9\operatorname{ctg}^2 x=6-4\sin^2 x$; 2) $2\operatorname{tg}^2 x-7+4\cos^2 x=0$.

29.21. Знайдіть усі розв'язки рівняння $4-2\sin^2 x=5\cos x$, що задовольняють нерівність $\sin x>0$.

29.22. Знайдіть усі розв'язки рівняння $1+2\cos^2 x=5\sin x$, що задовольняють нерівність $\cos x>0$.

29.23. Знайдіть усі розв'язки рівняння $5\cos 2x+7\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-1$, що належать проміжку $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

29.24. Знайдіть усі розв'язки рівняння $3\cos 2x=1+5\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, що належать проміжку $[\pi;\ 2\pi]$.

29.25. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння
$$4\sin^2 4x+8\cos 6x\cos 2x=3.$$

29.26. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння
$$1+2\cos 2x+4\sin 3x\sin x=1.$$

4 Розв'яжіть рівняння (29.27–29.30):

29.27. 1) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=2+\sqrt{2}(1-\sin x)-4\sin x$;
2) $1+\cos 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

29.28. 1) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}(1+2\cos x)-\cos x-1$;
2) $1-\cos 2x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

29.29. 1) $\sqrt{3+4\cos 2x} = \sqrt{2\cos x}$; 2) $\sqrt{1-\cos 2x} = -\sin 2x$;

3) $\sqrt{2}\cos x = \sqrt{-3\sqrt{3}\sin x - 4}$;

4) $2\cos x + \sqrt{5\sin x + \cos 2x} = 0$.

29.30. 1) $\sqrt{\sin x} = \sqrt{2-3\cos 2x}$; 2) $\sqrt{1+\cos 2x} = -\sin 2x$;

3) $-2\cos x = \sqrt{\sqrt{3}\sin x - \frac{1}{2}}$;

4) $2\sin x - \sqrt{5\cos x - \cos 2x} = 0$.

29.31. Скільки розв'язків, що належать проміжку $[0; 2\pi]$, має рівняння $\frac{\cos x}{1-\sin x} = 1 + \sin x$?

29.32. Скільки розв'язків, що належать проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$, має рівняння $\frac{\sin x}{1+\cos x} = 1 - \cos x$?

29.33. Знайдіть усі корені рівняння $(1+\mathrm{tg}^2\, x)\sin x - \mathrm{tg}^2\, x + 1 = 0$, що задовольняють умову $\mathrm{tg}\, x < 0$.

29.34. Знайдіть усі корені рівняння $1 + \sin x = (1-\sin x)\,\mathrm{tg}^2\, x$, що задовольняють умову $\mathrm{tg}\, x > 0$.

Розв'яжіть рівняння (29.35–29.40):

29.35. $\frac{\sin 2x - 3\sqrt{2}\sin x + 1 + 2\sin^2 x}{\sin 2x - 1} = 1$.

29.36. $\frac{1 - \sin 2x + 3\sqrt{2}\sin x + 2\sin^2 x}{1 + \sin 2x} = -1$.

29.37. $(1+3\cos 2x)(4\sin x + 1 + \sqrt{3 + 5\cos 2x - 16\sin x}) = 0$.

29.38. $(3+5\cos 2x)(2 - 4\sin x + \sqrt{3 - 2\cos 2x + 5\sin x}) = 0$.

29.39. 1) $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{15}{8}\cos 2x - \frac{1}{2}$;

2) $\cos^2 2x - \cos 2x = 2(\sin^8 x - \cos^8 x)$.

29.40. 1) $\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{13}{8}\cos^2 2x$;

2) $2\cos^2 2x + \cos 2x = 2(\cos^8 x - \sin^8 x)$.

29.41. Сашко і Павло разом можуть пофарбувати паркан за 9 годин. Павло та Ігор разом пофарбують той самий паркан за 12 годин, а Сашко та Ігор – за 18 годин. За скільки годин пофарбують паркан ці хлопці, працюючи втрьох?

29.42. (*Національна олімпіада Чехословаччини, 1952 р.*). Доведіть, що коли додатні раціональні числа a, b і c задовольняють умову $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$, то числа $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ також є раціональними.

§ 30. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ РІЗНИМИ МЕТОДАМИ

У двох попередніх параграфах ми розглянули найпростіші тригонометричні рівняння та рівняння, які зводяться до алгебраїчних за допомогою заміни змінної. У цьому параграфі розглянемо інші види тригонометричних рівнянь та методи їх розв'язування.

1. *Метод розкладання на множники*

Нехай маємо рівняння $F(x) = 0$, ліву частину якого можна розкласти на множники, тобто звести до вигляду:

$$F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x).$$

Тоді рівняння $F(x) = 0$ буде рівносильне сукупності рівнянь вигляду: $f_1(x) = 0$; $f_2(x) = 0$; ...; $f_n(x) = 0$ за умови врахування його ОДЗ.

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $\sin 2x + 3\cos x = 0$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$.

Ураховуючи, що $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, рівняння набуває вигляду: $2\sin x\cos x + 3\cos x = 0$.

Ліву частину отриманого рівняння можна розкласти на множники: $\cos x(2\sin x + 3) = 0$. Тоді маємо: $\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \sin x = -\dfrac{3}{2};\end{array}\right.$

звідки $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z,\\ \varnothing.\end{array}\right.$ Отже, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Відповідь. $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $\sin 5x - \sin 3x = 0$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$.

Ураховуючи, що $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, рівняння набуде вигляду: $2\sin\dfrac{5x-3x}{2}\cos\dfrac{5x+3x}{2} = 0$. Отже, маємо рівняння: $2\sin x\cos 4x = 0$, яке рівносильне сукупності двох найпростіших тригонометричних рівнянь: $\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos 4x = 0;\end{array}\right.$

звідки отримаємо: $\left[\begin{array}{l}x = \pi k,\ k \in Z,\\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi m}{4},\ m \in Z.\end{array}\right.$

Відповідь. πk, $k \in Z$; $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi m}{4}$, $m \in Z$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння: $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = 0$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$. Ураховуючи, що

$$\cos x + \cos 3x = 2\cos\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2} = 2\cos x\cos 2x,$$

рівняння набуде вигляду: $2\cos x\cos 2x - \cos 2x = 0$.

Розкладемо ліву його частину на множники, отримаємо: $\cos 2x(2\cos x - 1) = 0$. Рівняння рівносильне сукупності рівнянь (розв'яжіть їх самостійно): $\left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0,\\ \cos x = \dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$

Відповідь. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння: $\cos z\cos 2z\cos 4z\cos 8z = \dfrac{1}{16}$.

Розв'язання. Якби ліва частина рівняння містила множник $\sin z$, то її можна було звести до вигляду $\dfrac{1}{16}\sin 16z$, застосувавши 4 рази формулу $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$. Тому домножимо обидві частини рівняння на $\sin z$. Зауважимо, що цей прийом зумовить появу сторонніх коренів вигляду $z = \pi k$, $k \in Z$ (розв'язків рівняння $\sin z = 0$), оскільки множення обох частин на вираз, що може дорівнювати нулю, не є рівносильним перетворенням рівняння. Справді, якщо $\sin z = 0$, тобто $z = \pi k$, $k \in Z$, ліва частина початкового рівняння дорівнює 1 або -1 відповідно для парних і непарних k, тобто не дорівнюватиме правій частині. Тому, розв'язуючи рівняння зазначеним методом, з отриманих розв'язків треба вилучити ті, при яких вираз, на який ми домножили, дорівнює нулю, тобто числа πk, $k \in Z$. Отже, після множення на $\sin z$ обох частин рівняння матимемо: $\dfrac{1}{16}\sin 16z = \dfrac{1}{16}\sin z$. Переписавши його у вигляді: $\sin 16z - \sin z = 0$, розкладемо ліву частину на множники: $2\sin\dfrac{16z - z}{2}\cos\dfrac{16z + z}{2} = 0$ і отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{15}{2}z = 0,\\ \cos\dfrac{17}{2}z = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\dfrac{15}{2}z = \pi n,\ n \in Z,\\ \dfrac{17}{2}z = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}z = \dfrac{2\pi n}{15},\ n \in Z,\\ z = \dfrac{\pi}{17} + \dfrac{2\pi l}{17},\ l \in Z.\end{array}\right.$$

Далі з отриманих коренів вилучимо сторонні.

1) Нехай $\dfrac{2\pi n}{15} \neq \pi k$, тобто $n \neq \dfrac{15k}{2}$, $k \in Z$, але n – ціле, тому $k = 2m$ – парне число і $n \neq 15m$, $m \in Z$.

2) Нехай $\frac{\pi}{17}+\frac{2\pi l}{17} \neq \pi k$, тобто $l \neq \frac{17k-1}{2}$. Тоді $l \neq \frac{16k+k-1}{2}$, тобто $l \neq 8k+\frac{k-1}{2}$, $k \in Z$. Оскільки l – ціле, то $k = 2p + 1$ – непарне число. Тоді $l \neq 8(2p + 1) + p$, тобто $l \neq 17p + 8$.

Отже, $z_1 = \frac{2\pi n}{15}$, $n \in Z$, $n \neq 15m$, $m \in Z$; $z_2 = \frac{\pi}{17}+\frac{2\pi l}{17}$, $l \in Z$, $l \neq 17p + 8$, $p \in Z$.

Відповідь. $\frac{2\pi n}{15}$, $n \in Z$, $n \neq 15m$, $m \in Z$; $\frac{\pi}{17}+\frac{2\pi l}{17}$, $l \in Z$, $l \neq 17p + 8$, $p \in Z$.

2. *Однорідні тригонометричні рівняння*

Тригонометричне рівняння вигляду

$$a\sin f(x) + b\cos f(x) = 0,$$

де a і b – числа, $a \neq 0$, $b \neq 0$, називають *однорідним тригонометричним рівнянням 1-го степеня* відносно $\sin f(x)$ і $\cos f(x)$, бо кожний із цих доданків міститься в рівнянні в першому степені. Рівняння зводять до найпростішого діленням обох його частин на $\cos f(x)$ за умови $\cos f(x) \neq 0$. При цьому втрати коренів не відбудеться, оскільки значення x, при яких $\cos f(x) = 0$, не є коренями рівняння. Справді, якщо $\cos f(x) = 0$, то рівняння набуде вигляду $a\sin f(x) = 0$. Оскільки $a \neq 0$, то тоді $\sin f(x) = 0$. Але не існує таких значень x, що $\cos f(x) = \sin f(x) = 0$.

Отже, якщо поділити обидві частини рівняння $a\sin f(x) + b\cos f(x) = 0$ на $\cos f(x)$, отримаємо рівносильне йому рівняння: $a\,\mathrm{tg}\, f(x) + b = 0$, що є найпростішим.

Приклад 5. Розв'язати рівняння: $2\sin 3x - 5\cos 3x = 0$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на $\cos 3x \neq 0$, матимемо: $\frac{2\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{5\cos 3x}{\cos 3x} = 0$; тобто $2\,\mathrm{tg}\, 3x - 5 = 0$.

Маємо рівняння: $\mathrm{tg}\, 3x = 2{,}5$, звідки $x = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\, 2{,}5 + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

Відповідь. $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\, 2{,}5 + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

Тригонометричне рівняння вигляду

$$a\sin^2 f(x) + b\cos f(x)\sin f(x) + c\cos^2 f(x) = 0,$$

де a, b, c – числа, з яких хоча б два відмінні від нуля, називають *однорідним тригонометричним рівнянням 2-го степеня* відносно $\sin f(x)$ і $\cos f(x)$. Кожний доданок у рівнянні – другого степеня.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння розв'язують, поділивши попередньо обидві його частини на $\cos^2 f(x)$ (за умови $\cos f(x) \neq 0$) з подальшою заміною $\operatorname{tg} f(x) = t$, при цьому втрати коренів (за аналогією з однорідним рівнянням 1-го степеня) не відбудеться. Якщо ж $a = 0$, то $\cos f(x)$ виносимо за дужки та застосовуємо прийом, відомий нам з попереднього пункту.

Приклад 6. Розв'язати рівняння:

$$\sin^2 \pi x - 4\sin \pi x \cos \pi x - 5\cos^2 \pi x = 0.$$

Розв'язання. Ті значення x, при яких $\cos \pi x = 0$, не є коренями рівняння, тому, поділивши обидві частини рівняння на $\cos^2 \pi x \neq 0$, коренів не загубимо. Маємо:

$$\frac{\sin^2 \pi x}{\cos^2 \pi x} - \frac{4\sin \pi x \cos \pi x}{\cos^2 \pi x} - \frac{5\cos^2 \pi x}{\cos^2 \pi x} = 0.$$

Отримали рівняння: $\operatorname{tg}^2 \pi x - 4\operatorname{tg} \pi x - 5 = 0$.

Заміна: $\operatorname{tg} \pi x = t$. Маємо: $t^2 - 4t - 5 = 0$, звідки $t_1 = -1$; $t_2 = 5$.

Повертаємося до заміни:

1) $t_1 = -1$, тоді $\operatorname{tg} \pi x = -1$, тобто $\pi x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, отже, $x = -0{,}25 + k$, $k \in Z$.

2) $t_2 = 5$, тоді $\operatorname{tg} \pi x = 5$, тобто $\pi x = \operatorname{arctg} 5 + \pi m$, отже, $x = \frac{\operatorname{arctg} 5}{\pi} + m$, $m \in Z$.

Відповідь. $-0{,}25 + k$, $k \in Z$; $\frac{\operatorname{arctg} 5}{\pi} + m$, $m \in Z$.

Серед тригонометричних рівнянь трапляються рівняння, вигляд яких відмінний від згаданого вище, але їх можна звести до однорідного рівняння. Для цього часто застосовують формули подвійного кута та основну тригонометричну тотожність.

Розглянемо приклад такого рівняння.

Приклад 7. Розв'язати рівняння: $5\sin^2 x - 3\cos^2 x - \sin 2x = 2$.

Розв'язання.

Оскільки $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, а $2 = 2 \cdot 1 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$, рівняння набуває вигляду:

$$5\sin^2 x - 3\cos^2 x - 2\sin x \cos x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0,$$

а після спрощень матимемо однорідне рівняння 2-го степеня:

$$3\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 0.$$

Далі розв'язуємо рівняння, як у попередньому прикладі (розв'яжіть самостійно).

Відповідь. $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $\operatorname{arctg}\frac{5}{3} + \pi m$, $m \in Z$.

3. *Рівняння вигляду $a\sin x + b\cos x = c$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$*

Один із способів розв'язування такого рівняння, а саме, метод допоміжного кута, ми вже розглянули в § 28 (приклад 6).

Розглянемо ще один спосіб розв'язування рівнянь такого типу. Він полягає у зведенні цього рівняння до однорідного за допомогою формул подвійного кута та основної тригонометричної тотожності.

Розглянемо цей спосіб на прикладі.

Приклад 8. Розв'язати рівняння: $3\sin x - 4\cos x = 3$.

Розв'язання. Оскільки $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$; $1 = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$, матимемо:

$$3\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 4\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 3\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right).$$

Після спрощень отримаємо однорідне рівняння 2-го степеня: $\sin^2\frac{x}{2} + 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 7\cos^2\frac{x}{2} = 0$. Розв'язавши його як однорідне 2-го степеня (зробіть це самостійно), отримаємо корені: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$; $x = -2\operatorname{arctg} 7 + 2\pi m,\ m \in Z$.

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$; $-2\operatorname{arctg} 7 + 2\pi m,\ m \in Z$.

Приклад 9. Знайти корені рівняння:

$$12\cos 3x - 5\sin 3x = 13\sin x.$$

Розв'язання. Скористаємося методом допоміжного кута. Оскільки $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, поділимо обидві частини рівняння на 13. Матимемо: $\frac{12}{13}\cos 3x - \frac{5}{13}\sin 3x = \sin x$. Оскільки права частина рівняння містить функцію синуса, вираз у лівій частині також зведемо до функції синуса. Нехай $\frac{12}{13} = \sin\varphi$, $\frac{5}{13} = \cos\varphi$. Маємо: $\sin\varphi\cos 3x - \cos\varphi\sin 3x = \sin x$. Застосуємо в лівій частині формулу додавання, отримаємо: $\sin(\varphi - 3x) = \sin x$. Це рівняння можна розв'язати або розкладанням на множники (аналогічно до прикладу 2 цього параграфа), або застосувати умову рівності двох однойменних функцій (як у прикладі 9 на с. 289). Запишемо для отриманого рівняння умову рівності двох синусів:

$$\left[\begin{array}{l} x = \varphi - 3x + 2\pi n,\ n \in Z, \\ x = \pi - (\varphi - 3x) + 2\pi k,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

Маємо сукупність двох лінійних рівнянь зі змінною x (розв'яжіть їх самостійно).

Відповідь. $0{,}25\varphi + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$; $0{,}5\varphi - \frac{\pi}{2} - \pi k,\ k \in Z$;

де $\sin\varphi = \frac{12}{13}$; $\cos\varphi = \frac{5}{13}$.

4. *Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою універсальної тригонометричної підстановки*

Під універсальною тригонометричною підстановкою розуміють запис основних тригонометричних функцій через тангенс половинного кута:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Слід пам'ятати, що застосування цих формул у рівнянні звужує його ОДЗ на множину $\alpha = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$. Тому перед застосуванням формул треба перевірити, чи не є числа цієї множини коренями рівняння.

Приклад 10. Розв'язати рівняння $2\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2} - 1\right) = \cos t$.

Р о з в ' я з а н н я. ОДЗ рівняння – усі дійсні числа, крім чисел $\pi + 2\pi k$, $k \in Z$, тому ці числа не можуть бути коренями даного рівняння.

Застосуємо формулу: $\cos t = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}$ та заміну: $u = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$.

Маємо рівняння: $2(u - 1) + \dfrac{u^2-1}{u^2+1} = 0$, звідки $u = 1$.

Повертаємося до заміни: $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = 1$. Тоді $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

В і д п о в і д ь. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Приклад 11. Розв'язати рівняння $(\operatorname{ctg} z - 1)(1 + \sin 2z) = 1 + \operatorname{ctg} z$.

Р о з в ' я з а н н я. Після застосування формули $\sin 2z = \dfrac{2\operatorname{tg} z}{1+\operatorname{tg}^2 z}$ ОДЗ рівняння звужується на множину $z = 0{,}5\pi + \pi k$, $k \in Z$, але ці числа не є коренями рівняння (перевірте самостійно). Застосовуючи зазначену формулу і заміну $\operatorname{tg} z = u$, матимемо: $\left(\frac{1}{u} - 1\right)\left(1 + \frac{2u}{1+u^2}\right) = 1 + \frac{1}{u}$; звідки $u = -1$. Повертаємося до заміни: $\operatorname{tg} z = -1$. Тоді $z = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

В і д п о в і д ь. $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

5. *Тригонометричні рівняння з параметрами*

Раніше ми вже розглядали деякі тригонометричні рівняння з параметрами. Розглянемо кілька більш складних вправ.

Приклад 12. Для всіх значень параметра b розв'язати рівняння:

$$12\sin x + 4\sqrt{3}\cos(\pi + x) = b\sqrt{3}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$12\sin x - 4\sqrt{3}\cos x = b\sqrt{3}.$$

Уведемо допоміжний кут. Для цього поділимо обидві частини рівняння на $8\sqrt{3}$, оскільки $\sqrt{12^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$.

Маємо: $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{b}{8}$, тобто $\sin x\cos\frac{\pi}{6} - \cos x\sin\frac{\pi}{6} = \frac{b}{8}$.

Отримали рівняння: $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{b}{8}$.

Оскільки $|\sin\alpha| \leqslant 1$, то:

1) якщо $|b| > 8$, тобто $b < -8$ або $b > 8$, коренів немає;

2) якщо $|b| \leqslant 8$, тобто $-8 \leqslant b \leqslant 8$ і $-1 \leqslant \frac{b}{8} \leqslant 1$. Тоді $x - \frac{\pi}{6} =$
$= (-1)^k\arcsin\frac{b}{8} + \pi k$, $k \in Z$, отже,

$x = \frac{\pi}{6} + (-1)^k\arcsin\frac{b}{8} + \pi k$, $k \in Z$.

В і д п о в і д ь. Якщо $b < -8$ або $b > 8$, то розв'язків немає; якщо $-8 \leqslant b \leqslant 8$, то $x = \frac{\pi}{6} + (-1)^k \arcsin\frac{b}{8} + \pi k$, $k \in Z$.

Приклад 13. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $(a^2 - 6a + 9)(2 + 2\sin x - \cos^2 x) + (12a - 18 - 2a^2)(1 + \sin x) + a + 3 = 0$ не має розв'язків.

Р о з в ' я з а н н я. Перетворимо ліву частину рівняння:
$(a - 3)^2(2 + 2\sin x - (1 - \sin^2 x)) - 2(a^2 - 6a + 9)(1 + \sin x) + a + 3 = (a - 3)^2(1 + 2\sin x + \sin^2 x) - 2(a - 3)^2(1 + \sin x) + a + 3 = (a - 3)^2(1 + 2\sin x + \sin^2 x - 2 - 2\sin x) + a + 3 = (a - 3)^2(\sin^2 x - 1) + a + 3$.

Отримали рівняння: $(a - 3)^2(\sin^2 x - 1) + a + 3 = 0$.

Перепишемо його у вигляді: $(a - 3)^2\cos^2 x = a + 3$.

1) Якщо $a = 3$, то маємо рівняння: $0 \cdot \cos^2 x = 6$, яке розв'язків не має.

2) Якщо $a \neq 3$, то $\cos^2 x = \frac{a+3}{(a-3)^2}$.

Оскільки $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$, то для вимог задачі необхідно виконання однієї з двох умов: $\frac{a+3}{(a-3)^2} < 0$ або $\frac{a+3}{(a-3)^2} > 1$.

З першої нерівності отримаємо, що $a < -3$, а з другої, що $1 < a < 3$ або $3 < a < 6$ (розв'яжіть нерівності самостійно). Отже, остаточно отримаємо, що вимогу задачі задовольняють такі значення параметра: $a < -3$ або $1 < a < 6$.

Відповідь. $a < -3$ або $1 < a < 6$.

○ Як розв'язують рівняння $F(x) = 0$ у випадку, коли його ліву частину можна розкласти на множники? ○ Які тригонометричні рівняння називають однорідними і як їх розв'язують? ○ Якими способами можна розв'язувати рівняння $a\sin x + b\cos x = c$? ○ Як можна розв'язати тригонометричні рівняння за допомогою універсальної тригонометричної підстановки?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Розв'яжіть рівняння (30.1–30.2):

30.1. 1) $\sin x(1 - \operatorname{tg} x) = 0$; 2) $\operatorname{ctg} x(\cos x + 2) = 0$;
3) $\cos x + 2\cos x\sin x = 0$; 4) $\operatorname{tg} x\sin x - \operatorname{tg} x = 0$.

30.2. 1) $\cos x(\operatorname{ctg} x + 1) = 0$; 2) $\operatorname{tg} x(3 - \sin x) = 0$;
3) $\sin x - 2\sin x\cos x = 0$; 4) $\operatorname{ctg} x\cos x + \operatorname{ctg} x = 0$.

2 Розв'яжіть рівняння розкладанням на множники його лівої частини (30.3–30.4):

30.3. 1) $\sin 5x - \sin x = 0$; 2) $\cos 5x + \cos 3x = 0$.

30.4. 1) $\sin 7x + \sin x = 0$; 2) $\cos 7x - \cos 5x = 0$.

Розв'яжіть однорідне рівняння (30.5–30.6):

30.5. 1) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$; 2) $2\sin x + 3\cos x = 0$.

30.6. 1) $\sin x + \cos x = 0$; 2) $\sin x - 4\cos x = 0$.

Розв'яжіть рівняння (30.7–30.10):

30.7. 1) $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin x$; 2) $2\cos\frac{x}{2}\sin 3x = \cos\frac{x}{2}$;
3) $\sin 2x + \cos x = 0$; 4) $2\sin^2 x - \sin 2x = 0$;
5) $\cos 8x = \cos^2 x - \sin^2 x$; 6) $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$.

30.8. 1) $\cos x = \sqrt{2}\cos^2 x$; 2) $2\cos 5x\sin\frac{x}{4} = \sin\frac{x}{4}$;
3) $\sin 2x - \sqrt{3}\sin x = 0$; 4) $\cos^2 x - 0{,}5\sin 2x = 0$;
5) $\sin 10x = 2\sin x\cos x$; 6) $\sin x + \sin 5x = \sin 3x$.

30.9. 1) $\sin^2 x + 11\cos x\sin x + 10\cos^2 x = 0$;
2) $\cos^2 4x + 5\cos 4x\sin 4x - 6\sin^2 4x = 0$.

30.10. 1) $6\sin^2 x + 7\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$;
2) $\cos^2 2x + 2\cos 2x\sin 2x - 3\sin^2 2x = 0$.

Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод допоміжного кута (30.11–30.12):

30.11. 1) $\sin x + \cos x = 1$; 2) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$.

30.12. 1) $\sin x - \cos x = 1$; 2) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$.

3 **Розв'яжіть рівняння (30.13–30.14):**

30.13. 1) $\cos x - \cos 3x = \sqrt{7}\sin 2x$; 2) $6\cos 7x = \sin 8x - \sin 6x$;
3) $\sin 3x = 1 - \cos 6x$; 4) $\sin 5x = \sin x + \sin 2x$;
5) $\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} = 3\sin^2\frac{x}{2}$; 6) $\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin(\pi + 4x)$;
7) $\sin x\cos x = \sin 2x\cos 2x$;
8) $\cos 4x\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$;
9) $\sin 3x\cos x = \sin 2x$; 10) $\cos x\cos 3x = \cos 2x\cos 4x$.

30.14. 1) $\sin 3x + \sin x = \sqrt{6}\cos x$; 2) $5\sin 4x = \cos 9x - \cos x$;
3) $\cos 4x = 1 + \cos 8x$; 4) $\cos x = 2\sin 2x + \cos 3x$;
5) $\sin 2x + \sin 6x = 3\cos^2 2x$;
6) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(6x - 5\pi)$;
7) $\sin 2x\cos 2x = \sqrt{3}\sin x\cos x$;
8) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \cos x\cos 6x$;
9) $\cos 4x\cos x = \cos 3x$; 10) $\sin x\sin 2x = \sin 3x\sin 4x$.

30.15. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння $\sin 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$.

30.16. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\cos 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$.

Розв'яжіть рівняння (30.17–30.20):

30.17. 1) $1 + 2\sin 2x = 6\cos^2 x$; 2) $\sin^2 x - \sin x\cos x = 0{,}5$;
3) $\cos 2x - 2\sin 2x = 1$; 4) $4\sin x + 5\cos x = 4$.

30.18. 1) $1 - 2\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$; 2) $\sin^2 x + 2{,}5\sin 2x + 2 = 0$;
3) $\sin 2x + 2\cos 2x = -1$; 4) $3\cos x + 5\sin x = 3$.

30.19. 1) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) = \cos(\pi + 3x)$;
2) $\sin 5x + \sin 3x + \sin x = 0$;
3) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$;
4) $\cos 2x - 1 = \sqrt{3}\sin 2x - 2\sin x$.

30.20. 1) $\sin\left(3x - \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;
2) $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$;

3) $\cos 3x - \cos x + \sin 3x - \sin x = 0$;

4) $1 + \cos 2x = \sin 2x - \sqrt{2}\cos x$.

30.21. При яких значеннях параметра a рівняння $4\sin x - 3\cos x = a$ має розв'язки?

30.22. При яких значеннях параметра b рівняння $5\cos x + 12\sin x = b$ має розв'язки?

4 Використовуючи метод уведення допоміжного кута, розв'яжіть рівняння (30.23–30.24):

30.23. 1) $\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x + \frac{1}{2}\cos x = 0$;

2) $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$.

30.24. 1) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin 3x$;

2) $\cos 3x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 3x)$.

Розв'яжіть рівняння (30.25–30.26):

30.25. 1) $\cos^2 2x + \cos^2 6x = 1$;

2) $\cos 7x + \cos x = 2\cos 3x(\sin 2x - 1)$;

3) $4(\sin 6x + \sin 4x) = \cos x(4\sin^2 5x - 5)$;

4) $\sin x + \sin 2x + \cos x(1 + 2\cos x) = 0$;

5) $3\cos x + \sin 2x(2\sin x + 4) = 0$;

6) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 1 - 2\cos x$.

30.26. 1) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$;

2) $\sin x + \sin 9x = 3\sin 5x(2\cos 2x - 1)$;

3) $4(\cos 5x - \cos 7x) = \sin x(4\sin^2 6x - 5)$;

4) $\sin 2x + \cos x - \sin x(1 + 2\sin x) = 0$;

5) $3\sin x - 2\sin 2x(\cos x - 1) = 0$;

6) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 1 - 2\sin x$.

30.27. Знайдіть усі корені рівняння $2\cos x - 3\sin x = -|\sin x|$, що належать проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

30.28. Знайдіть усі корені рівняння $3\cos x - 2\sin x = |\cos x|$, що належать проміжку $(0; \pi)$.

Використовуючи універсальну тригонометричну підстановку, розв'яжіть рівняння (30.29–30.30):

30.29. 1) $2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \cos x = 2$; 2) $\frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} + 2 \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} - 3 = 0$;

3) $\cos^2 2x - 1 = \operatorname{ctg}^4 x$;

4) $(1 + \cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2} + \sin x = 2\cos x$.

30.30. 1) $2(1 + \sin 2x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$; 2) $3\operatorname{tg} x - 3 = \cos 2x$.

Розв'яжіть рівняння (30.31–30.32):

30.31. $\sqrt{\frac{1}{2} + \sin x} = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin 3x}$.

30.32. $\sqrt{\frac{3}{4} - \cos 3x} = \sqrt{\frac{3}{4} - \cos x}$.

30.33. Знайдіть усі корені рівняння $2\cos 8x - 2 - \sin 12x = 0$, що належать проміжку $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$.

30.34. Знайдіть усі корені рівняння $\cos 9x - 2 - 2\cos 6x = 0$, що належать проміжку $\left(-\frac{7\pi}{18}; \frac{\pi}{18}\right)$.

30.35. Знайдіть усі розв'язки рівняння $2\cos^2 x = 1 - \sin 4x$, що задовольняють умову $|x| \leqslant 1$.

30.36. Знайдіть усі розв'язки рівняння $2\sin^2 x + \cos 4x = 0$, що задовольняють умову $|x| \leqslant 1$.

Розв'яжіть рівняння (30.37–30.38):

30.37. 1) $\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 0$;

2) $\cos 6x + \sin\frac{5x}{2} = 2$;

3) $\left(5 + \frac{3}{\sin^2 x}\right)(2 - \sin^6 x) = 7 + \cos 2y$;

4) $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)(1 + tg^2 2y)(3 + \sin 3z) = 4$.

30.38. 1) $\sin^2\frac{3x}{8} + \sin^2 x = 0$; 2) $\sin 6x - \sin 2x = 2$;

3) $\left(2 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)(4 - 2\cos^4 x) = 1 + 5\sin 3y$;

4) $\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)(2 - \cos y) = 2$.

30.39. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\cos \pi x^2 = \cos(\pi(x^2 + 2x + 1))$.

30.40. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\sin \pi x^2 = \sin(\pi(x^2 + 2x))$.

30.41. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $(a^2 - 4a + 4)(4 + 4\sin^2 x + 8\sin x) + 2(16a - 16 - 4a^2)(1 + \sin x) + 28 - 8a = 0$ має принаймні один розв'язок.

30.42. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $(a^2 + 8a + 16)(2 - 2\cos x - \sin^2 x) + (32 + 2a^2 + 16a)(\cos x - 1) + 3a + 10 = 0$ не має розв'язків.

Знайдіть найменше додатне значення параметра α, при якому має єдиний розв'язок рівняння (30.43–30.44):

30.43. $x^2 + \dfrac{6x}{\sqrt{\sin\alpha}} + \dfrac{9\sqrt{3}}{\cos\alpha} + 36 = 0.$

30.44. $x^2 + \dfrac{2x}{\sqrt{\sin\alpha}} + \dfrac{1}{\cos\alpha} + 2\sqrt{2} = 0.$

Знайдіть усі цілі значення параметра a, при кожному з яких рівняння має розв'язки (30.45–30.46):

30.45. $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \dfrac{x}{2} = 3a.$

30.46. $2 - 2\cos 2x - 4\sin x = 3a$

30.47. Потяг Харків–Ужгород відправляється о 10:35, а прибуває об 11:48 наступного дня. Скільки часу потяг перебуває в дорозі?

30.48. (*Національна олімпіада Бельгії, 1979 р.*). Розташуйте числа x, y, z, де $x = (a + b)(c + d)$, $y = (a + c)(b + d)$, $z = (a + d)(b + c)$, у порядку зростання, якщо $a < b < c < d$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

30.49. Укажіть серед нерівностей ті, що справджуються для будь-якого x, та ті, що при жодному значенні x не мають розв'язків:

1) $\sin x \leqslant -2$; 2) $\cos x > -1{,}8$; 3) $\sin x > -5$;
4) $\cos x < 3$; 5) $\cos x < -4$; 6) $\sin x > -1{,}7$.

30.50. Укажіть кілька значень кута α, для яких справджується нерівність:

1) $\sin\alpha > \dfrac{1}{2}$; 2) $\cos\alpha < -\dfrac{1}{2}$;

3) $\sin\alpha \leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos\alpha \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

§ 31. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ

Нерівність, що містить змінну під знаком тригонометричної функції, називають *тригонометричною нерівністю*.

Тригонометричними є, наприклад, нерівності:

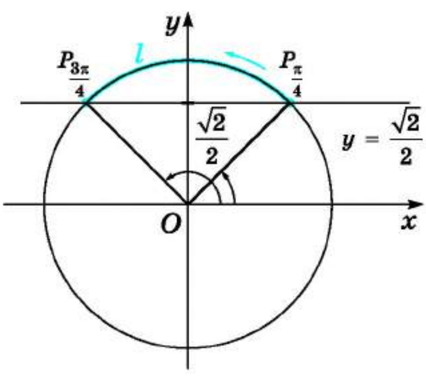
$$\sin x < \frac{1}{2},\ \cos x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2},\ 4\,\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > -\sqrt{3} \text{ тощо.}$$

1. *Найпростіші тригонометричні нерівності*

Найпростішими називають нерівності вигляду $\sin t > a$, $\cos t > a$, $\mathrm{tg}\, t > a$, $\mathrm{ctg}\, t > a$ та ті, які отримаємо, якщо в них знак $>$ замінимо на один із знаків $\geqslant$, $<$ або $\leqslant$. Загальні формули для розв'язування цих нерівностей є досить громіздкими. Тому розглянемо методи розв'язування нерівностей на прикладах. Для наочності будемо використовувати одиничне коло, лінії тангенса і котангенса.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sin t \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. $\sin t$ – це ордината точки одиничного кола, що відповідає куту t. Позначимо на одиничному колі всі точки, ординати яких більші за $\frac{\sqrt{2}}{2}$, вони лежать вище прямої $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (мал. 31.1). Множина всіх таких точок утворює дугу l. Якщо рухатися вздовж цієї дуги проти руху годинникової стрілки, тобто в додатному напрямі відкладання кутів, то перша точка дуги l відповідає куту $t_1 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, а остання – куту $t_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.



Мал. 31.1

Кожний із цих кутів є розв'язком нерівності, оскільки нерівність нестрогого знаку. Нерівність $\sin t \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ задовольняють усі значення t, точки яких належать дузі l: $\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4}$.
Функція синуса є періодичною з найменшим додатним періодом 2π, тому множина всіх розв'язків нерівності має вигляд: $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$.

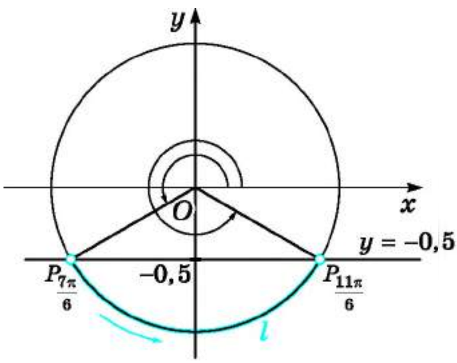
Відповідь. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Відповідь можна записати й у вигляді проміжка:

$$\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right],\ k \in Z.$$

Приклад 2. Розв'язати нерівність: $\sin 2x < -\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Нехай $2x = t$. Маємо нерівність: $\sin t < -\frac{1}{2}$.
Позначимо на одиничному колі дугою l всі точки, ординати яких менші за $-0,5$, це точки дуги l, які лежать нижче прямої $y = -0,5$ (мал. 31.2). Якщо рухатися вздовж дуги l у додатному напрямі, то перша точка дуги l відповідає куту $t_1 = \pi + \arcsin\frac{1}{2} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$, а остання – куту $t_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.



Мал. 31.2

Кінці дуги будуть «порожніми», оскільки нерівність строгого знаку. Розв'язки нерівності – усі кути t, яким відповідають точки, що лежать на дузі l між точками $\frac{7\pi}{6}$ і $\frac{11\pi}{6}$.
Ураховуючи періодичність синуса, маємо:

$$\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Повертаємося до змінної x: $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < 2x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$

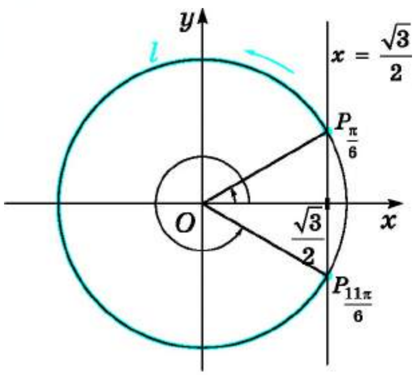
Поділимо всі частини отриманої нерівності на 2, матимемо:

$$\frac{7\pi}{12} + \pi k < x < \frac{11\pi}{12} + \pi k,\ k \in Z.$$

Відповідь. $\left(\frac{7\pi}{12} + \pi k;\ \frac{11\pi}{12} + \pi k\right),\ k \in Z.$

Приклад 3. Розв'язати нерівність: $\cos t \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. $\cos t$ – це абсциса точки одиничного кола, що відповідає куту t. Позначимо на одиничному колі всі точки, абсциси яких менші за $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ці точки лежать на дузі l одиничного кола зліва від прямої $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (мал. 31.3).



Мал. 31.3

Перша точка дуги l відповідає куту $t_1 = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, а остання – куту $t_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$. Розв'язками нерівності є всі кути, яким відповідають точки цієї дуги, уключаючи її кінці. Ураховуючи періодичність косинуса, маємо:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{11\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Відповідь. $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right],\ k \in Z.$

Приклад 4. Розв'язати нерівність: $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>\frac{1}{2}.$

Розв'язання. Нехай $x+\frac{\pi}{3}=t$, маємо нерівність: $\cos t>\frac{1}{2}.$ Позначимо на одиничному колі всі точки, абсциси яких більші за $\frac{1}{2}$, тобто за 0,5. Усі вони лежать на дузі l, перша точка якої відповідає куту $t_1=-\arccos\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{3}$, а остання – куту $t_2=\frac{\pi}{3}$ (мал. 31.4). Усі кути, що лежать між цими двома кутами, є розв'язками нерівності. Отже, маємо:

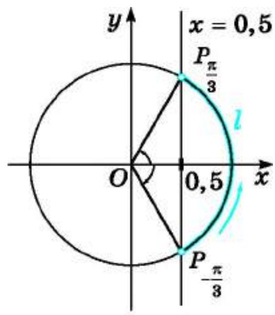
$$-\frac{\pi}{3}+2\pi k<t<\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Повертаємося до змінної x:

$$-\frac{\pi}{3}+2\pi k<x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z,$$

отримаємо: $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k<x<2\pi k,\ k\in Z.$

Відповідь. $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k<x<2\pi k,$ $k\in Z.$

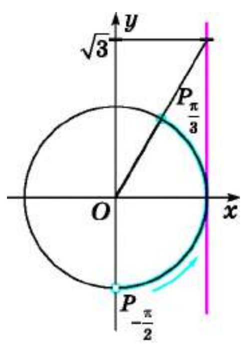


Мал. 31.4

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\operatorname{tg} t\leqslant\sqrt{3}.$

Розв'язання. Період функції тангенс дорівнює π, тому спочатку знайдемо розв'язки нерівності на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, а потім використаємо періодичність.

Проведемо лінію тангенсів. $\operatorname{tg} t$ – це ордината точки на лінії тангенсів, що відповідає куту t. Позначимо на лінії тангенсів точку, ордината якої дорівнює $\sqrt{3}$ (мал. 31.5). Ця точка відповідає куту $t=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, а точки лінії тангенсів, у яких ординати менші за $\sqrt{3}$, відповідають кутам від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{3}$. Зауважимо, що кут $\frac{\pi}{3}$ буде розв'язком нерівності, оскільки вона є нестрогою, а кут $-\frac{\pi}{2}$ – не буде, оскільки $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ не існує.



Мал. 31.5

Отже, на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ маємо розв'язки нерівності: $-\frac{\pi}{2} < t \leqslant \frac{\pi}{3}$. Ураховуючи періодичність, остаточно отримаємо: $-\frac{\pi}{2} + \pi k < t \leqslant \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{2} + \pi k < t \leqslant \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність: $\operatorname{tg} t \geqslant \sqrt{3}$.

Розв'язання. Використовуючи малюнок 31.5 та періодичність, маємо:

$$\frac{\pi}{3} + \pi k \leqslant t < \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z.$$

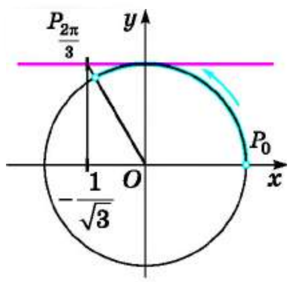
Відповідь. $\frac{\pi}{3} + \pi k \leqslant t < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\operatorname{ctg} t > -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання. Використовуючи лінію котангенсів, отримаємо розв'язки нерівності на проміжку $(0; \pi)$: $0 < t < \frac{2\pi}{3}$ (мал. 31.6). Далі використаємо періодичність:

$$\pi k < t < \frac{2\pi}{3} + \pi k, \ k \in Z.$$

Відповідь. $\pi k < t < \frac{2\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.



Мал. 31.6

2. *Тригонометричні нерівності, що зводяться до найпростіших*

Нерівності, відмінні від найпростіших, можна звести до найпростіших за допомогою тригонометричних формул.

Приклад 8. Розв'язати нерівність: $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > 1$.

Розв'язання. Спростимо ліву частину нерівності:

$$\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x = \sin 4x + \cos 4x \frac{\cos 2x}{\sin 2x} =$$

$$= \frac{\cos 4x \cos 2x + \sin 4x \sin 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos(4x - 2x)}{\sin 2x} = \operatorname{ctg} 2x.$$

Маємо нерівність $\operatorname{ctg} 2x > 1$, яка заміною $2x = t$ зводиться до найпростішої:

$$\operatorname{ctg} t > 1.$$

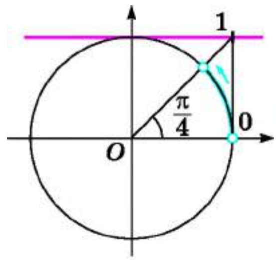
Тоді $\pi k < t < \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$ (мал. 31.7).

Повертаючись до змінної x, матимемо:

$$\pi k < 2x < \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$$

Отже, $\frac{\pi k}{2} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$

Відповідь. $\left(\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right),\ k \in Z.$



Мал. 31.7

3. *Розв'язування тригонометричних нерівностей за допомогою заміни змінної*

Як і тригонометричні рівняння, деякі тригонометричні нерівності можна розв'язати за допомогою введення нової змінної.

Приклад 9. Розв'язати нерівність: $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1.$

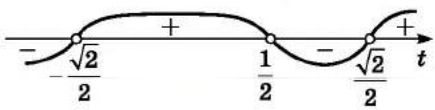
Розв'язання. Перенесемо всі доданки у праву частину нерівності і спростимо отриманий вираз:

$1 - 2\sin^2 x + (\sin x - \sin 3x) = \cos 2x + 2\sin(-x)\cos 2x =$

$= \cos 2x(1 - 2\sin x) = (1 - 2\sin^2 x)(1 - 2\sin x).$

Маємо нерівність: $(1-2\sin^2 x)(1-2\sin x) > 0$. Заміна: $\sin x = t$.

Маємо: $(1 - 2t^2)(1 - 2t) > 0$, тобто $\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t - \frac{1}{2}\right) > 0.$



Мал. 31.8

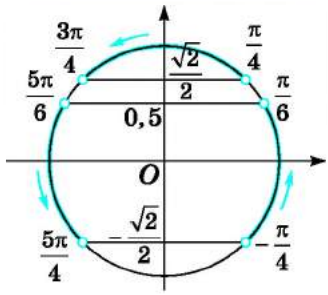
Розв'язуючи останню нерівність методом інтервалів (мал. 31.8), отримаємо сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{\sqrt{2}}{2} < t < \frac{1}{2}, \\ t > \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{array}\right. \quad \text{тобто для } x: \quad \left[\begin{array}{l} -\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \frac{1}{2}, \\ \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Покажемо на одиничному колі множину точок цієї сукупності (мал. 31.9). З урахуванням періодичності матимемо:

$x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) \cup$

$\cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right),\ k \in Z.$



Мал. 31.9

Відповідь. $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)\cup$

$$\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi k\right),\ k\in Z.$$

4. *Розв'язування тригонометричних нерівностей методом інтервалів*

Розв'язуючи нерівність $f(x)>0$ (або $f(x)<0$, $f(x)\geqslant 0$, $f(x)\leqslant 0$), де $f(x)$ – тригонометричний вираз, не завжди можна звести її до одного з вищезгаданих видів нерівностей. У такому разі розв'язати нерівність можна універсальним методом – методом інтервалів.

Алгоритм застосування методу інтервалів для розв'язування тригонометричних нерівностей може бути таким:
1) подати вираз $f(x)$ у вигляді суми тригонометричних функцій у першому степені;
2) знайти T – період $f(x)$, ним буде найменше спільне кратне періодів кожного з доданків;
3) розв'язати рівняння $f(x)=0$ на проміжку завдовжки T (найкраще, коли кінцями цього проміжку будуть нулі функції $f(x)$, що надалі дасть змогу компактніше записати відповідь);
4) розбити проміжок T областю визначення і нулями функції $f(x)$ на скінченну кількість проміжків та знайти знак $f(x)$ на кожному з них;
5) залежно від знайдених знаків з урахуванням періодичності $f(x)$ записати відповідь.

Приклад 10. Розв'язати нерівність:

$$\sin 2x\sin 3x-\cos 2x\cos 3x>\sin 10x.$$

Розв'язання. Перетворимо ліву частину нерівності: $-\cos(3x+2x)>\sin 10x$. Отже, маємо нерівність:

$$\sin 10x+\cos 5x<0.$$

Найменшим додатним періодом функції $\varphi_1(x)=\sin 10x$ є

$T_1 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$, а функції $\varphi_2(x) = \cos 5x$ є $T_2 = \frac{2\pi}{5}$. Тому найменшим додатним періодом функції $f(x) = \sin 10x + \cos 5x$ є $\frac{2\pi}{5}$.

Розглянемо цю нерівність на проміжку завдовжки $\frac{2\pi}{5}$. Для того щоб вибрати «зручний» проміжок, спочатку знайдемо нулі функції, розв'язавши рівняння $\sin 10x + \cos 5x = 0$ способом розкладання на множники. Маємо:

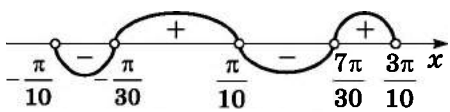
$2\sin 5x \cos 5x + \cos 5x = 0$; тобто $\cos 5x(2\sin 5x + 1) = 0$.

Отримане рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \cos 5x = 0, \\ \sin 5x = -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \text{ звідки } \left[\begin{array}{l} 5x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z, \\ 5x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z, \\ 5x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z; \end{array}\right.$$

отже, маємо множину нулів функції $f(x)$:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5},\ k \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5},\ n \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{5},\ m \in Z. \end{array}\right.$$



Мал. 31.10

Розглянемо проміжок $\left[-\frac{\pi}{10}; \frac{3\pi}{10}\right)$ завдовжки $\frac{2\pi}{5}$. Йому належать 4 нулі функції: $x_1 = -\frac{\pi}{10}$; $x_2 = -\frac{\pi}{30}$; $x_3 = \frac{\pi}{10}$; $x_4 = \frac{7\pi}{30}$.

Позначимо їх на числовій осі.

Визначимо знак функції на кожному з отриманих проміжків, підставляючи в $f(x)$ по одному значенню x з кожного проміжка (мал. 31.10).

Додаючи до одержаних проміжків період $\frac{2\pi n}{5}$, матимемо множину розв'язків нерівності:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}; -\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}\right) \cup \left(\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}; \frac{7\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}\right),\ n \in Z.$$

Відповідь.

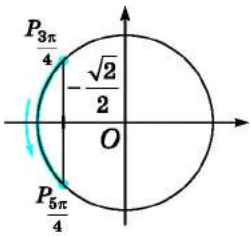
$$\left(-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}; -\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}\right) \cup \left(\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}; \frac{7\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}\right),\ n \in Z.$$

Що таке найпростіша тригонометрична нерівність і як її розв'язати? Поясніть, які бувають тригонометричні нерівності і як їх розв'язати? Як розв'язати тригонометричну нерівність методом інтервалів?

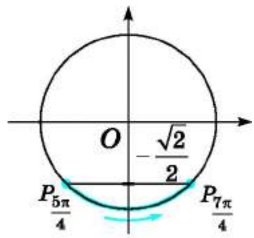
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

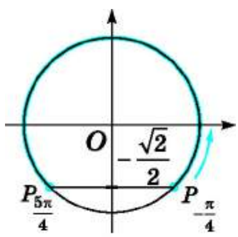
31.1. На якому з малюнків 31.11–31.14 зображено розв'язки нерівності $\cos x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$, а на якому – $\sin x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$?



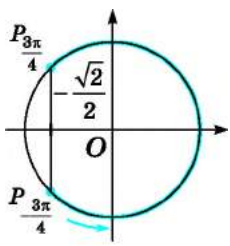
Мал. 31.11



Мал. 31.12



Мал. 31.13



Мал. 31.14

31.2. На якому з малюнків 31.11–31.14 зображено розв'язки нерівності $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$, а на якому – $\sin x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$?

2 Розв'яжіть нерівність (31.3–31.4):

31.3. 1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{tg} x > 1$; 4) $\operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}$.

31.4. 1) $\sin x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x > 0$;

3) $\operatorname{tg} x \leqslant -\sqrt{3}$; 4) $ctgx > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

31.5. (*Усно.*) Ураховуючи множини значень функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$, розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x > 1{,}8$; 2) $\sin x < 1{,}5$; 3) $\cos x > -1{,}9$;
4) $\cos x < -3$; 5) $\sin x \leqslant -1{,}5$; 6) $\cos x \geqslant -1$.

Розв'яжіть нерівність (31.6–31.9):

31.6. 1) $\sin 2x \leqslant 0$; 2) $\cos\frac{x}{2} > \frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leqslant 1$.

31.7. 1) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\operatorname{tg} 2x \leqslant 0$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{3} > -1$.

31.8. 1) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \leqslant 0$; 2) $4\operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) + 4 > 0$.

31.9. 1) $6\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 3 < 0$; 2) $3\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \geqslant 0$.

31.10. Кут α при основі рівнобедреного трикутника задовольняє умову $\sin\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Доведіть, що трикутник тупокутний.

31.11. Кут β трикутника задовольняє умову $\cos\beta < \frac{1}{2}$. Чи може цей трикутник бути рівностороннім?

3 Застосовуючи формули тригонометрії, зведіть нерівність до найпростішої та розв'яжіть її (31.12–31.13):

31.12. 1) $\sin 2x \cos 2x > \frac{1}{4}$; 2) $\cos^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{x}{4} < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin 5x \cos 3x + \sin 3x \cos 5x \geqslant 0$; 4) $\cos^2 2x \geqslant \frac{1}{4}$.

31.13. 1) $2\sin 3x \cos 3x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} > 0$;

3) $\sin 4x \cos x - \sin x \cos 4x > \frac{1}{2}$; 4) $\sin^2 4x \leqslant \frac{1}{4}$.

Розв'яжіть нерівність (31.14–31.25):

31.14. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\frac{1}{2} < \sin x \leqslant \frac{1}{3}$.

31.15. 1) $\frac{1}{2} < \sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \cos x < \frac{2}{3}$.

31.16. 1) $|\operatorname{tg} x| \leqslant \sqrt{3}$; 2) $|\operatorname{ctg} x| > 1$.

31.17. 1) $|\operatorname{tg} x| > 1$; 2) $|\operatorname{ctg} x| \leqslant \sqrt{3}$.

31.18. 1) $\sqrt{3}\sin x - \cos x > 1$; 2) $\sin x + \cos x \leqslant 0$.

31.19. 1) $\sin x + \sqrt{3}\cos x \leqslant 1$; 2) $\sin x - \cos x > 0$.

4 **31.20.** 1) $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 \leqslant 0$; 2) $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x > 0$.

31.21. 1) $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 \geqslant 0$; 2) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x < 0$.

31.22. 1) $\dfrac{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{2 + \cos x} > 0$; 2) $\dfrac{\cos x}{1 - \sin x} \leqslant 0$.

31.23. 1) $\dfrac{\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}}{3 + \sin x} < 0$; 2) $\dfrac{\sin x}{1 - \cos x} \geqslant 0$.

31.24. 1) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 \geqslant 0$; 2) $2\cos x + 3\cos 2x - 5 \geqslant 0$;
3) $\sin x + \cos 2x \geqslant 1$; 4) $3\operatorname{ctg} x < \operatorname{tg} x$.

31.25. 1) $3\sin^2 x + 7\cos x - 3 > 0$; 2) $\cos 2x + \sin x - 1 \geqslant 0$;
3) $2\cos 2x + \cos x - 1 \leqslant 0$; 4) $\operatorname{tg} x < \operatorname{ctg} x$.

31.26. Знайдіть множину розв'язків нерівності:
1) $2\sin^4 2x \geqslant \sin^2 2x$; 2) $2\cos^2 x - \sqrt{8}\sin x\cos x < 5$;
3) $4|\cos x| + 2\cos 2x > 1$; 4) $|\cos x| < |\sin x|$.

Розв'яжіть нерівність методом інтервалів (**31.27–31.28**):

31.27. 1) $\sin 2x + \sin x \leqslant 0$; 2) $\sin 3x - \sin 2x > 0$.

31.28. 1) $\sin 2x - \cos x > 0$; 2) $\cos 3x - \cos x \leqslant 0$.

31.29. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a\cos x > 2$ справджується для будь-якого значення x.

31.30. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $\cos^2 x + 2a\sin x - 2a < a^2 - 4$ справджується для будь-якого значення x.

31.31. Брат із сестрою вирішили влітку трохи допомогти своїм батькам матеріально. Вони придбали в сусіда-садівника на 1000 грн яблук, переробили їх на сухофрукти та віддали в торгівельну мережу на реалізацію, за що отримали 3000 грн. Сплативши з отриманої суми 18 % податку на доходи фізичних осіб, брат із сестрою підрахували чистий прибуток від цієї справи та передали цю суму батькам. Яку суму коштів вони передали батькам, якщо витрати на сушіння яблук склали 500 грн, а на їх реалізацію – 300 грн?

31.32. Двоє гравців по черзі розламують шоколадну плитку 6×8. За один хід дозволяється зробити прямолінійний розлом будь-якого зі шматочків уздовж заглиблення. Програє той, хто не зможе зробити наступного ходу. Хто з гравців переможе при правильній грі обох суперників?

ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

РОЗДІЛ 5

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ МИ...

- ***ознайомимося*** *з поняттями границі послідовності та границі функції в точці, похідної функції; правилами диференціювання;*
- ***дізнаємося*** *про геометричний і фізичний зміст похідної, таблицю похідних;*
- ***навчимося*** *застосовувати похідну для дослідження функцій і побудови їх графіків; розв'язувати прикладні задачі.*

§ 32. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ. ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

1. Поняття границі послідовності

У 9 класі ви вже ознайомилися із числовими послідовностями. Числову послідовність можна записувати у вигляді ряду чисел:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

або за допомогою загальної формули $a_n = f(n)$, де a_n – n-й член послідовності, $n \in Z$.

Прикладами числових послідовностей є арифметична прогресія, n-й член якої задають формулою $a_n = a_1 + d(n-1)$, де a_1 – перший член послідовності, d – її різниця, та геометрична прогресія, n-й член якої задають формулою $b_n = b_1q^{n-1}$, де b_1 – перший член послідовності, q – її знаменник.

Приклад 1. Розглянемо послідовність, яку задано формулою $a_n = \dfrac{1}{n}$, де $n \in Z$. Тоді:

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3},\ \ldots,\ a_{100} = \frac{1}{100},\ a_{101} = \frac{1}{101},\ \ldots,\ a_n = \frac{1}{n},\ \ldots$$

Очевидно, що для будь-якого n справджується нерівність $a_{n+1} < a_n$ і зі збільшенням числа n значення a_n прямують до нуля.

У такому разі кажуть, що *границею числової послідовності* $a_n = \frac{1}{n}$ є число 0. Для запису цього факту використовують поняття границі та позначення lim, а саме:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

(читають: «ліміт (границя) $\frac{1}{n}$ при n, що прямує до нескінченності, дорівнює нулю»). Позначення lim прийшло в математику від латинського слова *limes*, що означає границя.

У загальному випадку запис $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ означає, що границею числової послідовності a_n є число A.

2. Означення границі послідовності

Спочатку розглянемо функцію цілої частини числа.

Ціла частина дійсного числа x – це найбільше ціле число, яке не перевищує x. Цілу частину числа x позначають символом $[x]$.

Наприклад, $[2,5] = 2$; $[\pi] = 3$; $[0,17] = 0$; $[-2,17] = -3$.

Повернемося до прикладу 1. Розглянемо деяке довільне число $\varepsilon > 0$ і покажемо, що знайдеться таке значення $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ модуль різниці між значенням a_n і границею числової послідовності буде меншим за ε.

Маємо: $|a_n - 0| < \varepsilon$ або $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, тобто $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$. Враховуючи, що $n > 0$, отримаємо $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Позначимо $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Тоді для всіх $n > N$ справджуватиметься нерівність $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Так, наприклад, якщо $\varepsilon = 0,001$, то $N = \left[\frac{1}{0,001}\right] = 1000$.

Тому для всіх значень $n > 1000$ матимемо: $|a_n - 0| < 0,001$, тобто всі члени послідовності $a_{1001}, a_{1002}, a_{1003}, \ldots$ лежатимуть на відстані, меншій за 0,001 від границі числової послідовності – числа 0.

Приходимо до означення границі числової послідовності.

Число A називають *границею числової послідовності* a_n, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке натуральне число $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ справджується нерівність $|a_n - A| < \varepsilon$.

Це записують так: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Приклад 2. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$, де $\alpha\in N$, $\alpha>1$.

Д о в е д е н н я. Доведемо, що для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке натуральне число $N=N(\varepsilon)$, що для всіх $n>N$ справджується нерівність: $\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|<\varepsilon$. Маємо: $n^\alpha>\frac{1}{\varepsilon}$, тобто $n>\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\varepsilon}}$.

Отже, існує число $N=\left[\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\varepsilon}}\right]$, що для всіх $n>N$ справджується нерівність: $\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|<\varepsilon$. ■

Зауважимо, що в той самий спосіб можна довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{K}{n^\alpha+l}=0$, де K і l – деякі числа.

Приклад 3. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[\beta]{n}}=0$, де $\beta\in N$, $\beta>1$.

Д о в е д е н н я. Доведемо, що для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке число $N=N(\varepsilon)$, що для всіх $n>N$ справджується нерівність $\left|\frac{1}{\sqrt[\beta]{n}}-0\right|<\varepsilon$. Маємо: $\sqrt[\beta]{n}>\frac{1}{\varepsilon}$, тобто $n>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^\beta$. Отже, існує число $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^\beta}\right]$, що для всіх $n>N$ справджується нерівність: $\left|\frac{1}{\sqrt[\beta]{n}}-0\right|<\varepsilon$. ■

Зауважимо, що в той самий спосіб можна довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{K}{\sqrt[\beta]{n+l}}=0$, де K і l – деякі числа.

3. Основні теореми про границі послідовностей

Розглянемо правила обчислення границь послідовностей.

Т е о р е м а 1. Якщо послідовності a_n і b_n мають границі, то існують границі їх суми, різниці та добутку, причому

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n;\quad \lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Т е о р е м а 2. Якщо послідовності a_n і b_n мають границі, причому $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq0$, то існує границя їх частки, причому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

Теорема 3. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$, **де C — будь-яке число.**

Теорема 4. Якщо послідовність a_n має границю, то має границю і послідовність ka_n, де k — число, $k \neq 0$, причому

$$\lim_{n\to\infty}(ka_n) = k\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Приймемо ці теореми без доведення.

Приклад 4. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-3n}{2n^2+1}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник і знаменник дробу на n у найвищому для цього дробу степені, тобто на n^2. Матимемо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^2-3n}{n^2}}{\frac{2n^2+1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^2}{n^2}-\frac{3n}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}.$$

За теоремами про границі та з прикладів 1 і 2 отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}4-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{4-3\cdot 0}{2+0} = \frac{4}{2} = 2.$$

Відповідь. 2.

Приклад 5. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^3-n}$.

Розв'язання. У чисельнику дробу маємо суму n перших членів арифметичної прогресії. Тому

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = \frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n = n^2.$$

Отже, маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^3-n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^3-n}$.

Поділимо чисельник і знаменник дробу на n^3 та використаємо теореми про границі:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}-\frac{n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1-0} = 0.$$

Відповідь. 0.

Приклад 6. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})$.

Розв'язання. Перетворимо вираз у дужках, домноживши і поділивши його на спряжений йому вираз:

$$\sqrt{n+5}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}=\frac{n+5-n}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}=\frac{\frac{5}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}=\frac{\frac{5}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n+5}{n}}+1}=\frac{\frac{5}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1}.$$

Тоді: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{5}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1}=\dfrac{0}{\sqrt{1+0}+1}=0.$

Відповідь. 0.

4. Поняття границі функції на нескінченності

Крім границі послідовності на нескінченності в математиці також розглядають границю функції $f(x)$ на нескінченності, тобто $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

Число B називають *границею функції $f(x)$ на нескінченності,* якщо функція $f(x)$ визначена для всіх досить великих за модулем значень x і для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке число $M>0$, що для всіх x, що задовольняють умову $|x|>M$, справджується нерівність: $|f(x)-B|<\varepsilon$.

Це записують так: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=B$.

Правила обчислення границь функцій на нескінченності такі самі, як і для границь послідовностей.

Приклад 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+10^{11}}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{4x}{x}+\frac{10^{11}}{x}}{\frac{2x}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+\frac{10^{11}}{x}}{2}=$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}4+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10^{11}}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}2}=\frac{4+0}{2}=2.$$

- Наведіть приклади числових послідовностей. - Що називають цілою частиною числа? - Сформулюйте означення границі числової послідовності. - Сформулюйте основні теореми про границі послідовностей. - Сформулюйте означення границі функції на нескінченності.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Обчисліть границю (32.1–32.2):

32.1. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} 3$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

32.2. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}(-2)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}$.

32.3. Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 6$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

32.4. Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 10$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 5$. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$.

2 Обчисліть границю (32.5–32.8):

32.5. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^3+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+2\right)$.

32.6. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^5-2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)$.

32.7. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}-5\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2+x}$.

32.8. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+2\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^3+2x}$.

3 Користуючись означенням границі послідовності, доведіть, що (32.9–32.10):

32.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-3}{2n+2}=2$. **32.10.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-5}{n+2}=3$.

Обчисліть границю (32.11–32.22):

32.11. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n}{n^2+n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^4+2n}$.

32.12. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^2-n+3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+2}{2n-7}$.

32.13. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-1}{2+8x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-x^2}{x^2+2x-7}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4x^3+2x}{1-x^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3-7}$.

32.14. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+1}{1-14x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+5}{2x-x^2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-6x^3}{2x^3+x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-4}$.

32.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{5n^2-4n+1}$. **32.16.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2-3}$.

32.17. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{9n+1}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+7}}$.

32.18. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+3}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{9n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}$.

32.19. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n-2}-\sqrt{n})$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-2n)$.

32.20. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$.

32.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$. **32.22.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{\sqrt{1+25n^4}}$.

32.23. Заробітна плата менеджера супермаркету електроніки у 2017 році становила 8000 грн. Щомісяця із зарплати утримувалося 18 % податку на доходи фізичних осіб і 1,5 % військового збору. На початку року менеджер вирішив на придбання нового смартфона щомісяця відкладати 10 % від отриманої «на руки» зарплати. Роздрібна ціна цього смартфона в супермаркеті, де працює менеджер, складає 4000 грн. Через скільки місяців менеджер придбав смартфон, якщо супермаркет надав йому знижку у 15 % від роздрібної ціни?

32.24. (*Національна олімпіада США*). Нехай a, b і c – три різних цілих числа, $P(x)$ – многочлен із цілими коефіцієнтами. Доведіть, що рівності $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$ не можуть справджуватися одночасно.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

32.25. 1) Знайдіть область визначення функції $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ та побудуйте її графік.

2) Чи можна знайти $f(2)$?

3) Знайдіть за допомогою калькулятора $f(1{,}9)$, $f(1{,}99)$, $f(1{,}999)$ та $f(2{,}001)$, $f(2{,}01)$, $f(2{,}1)$. До якого значення наближаються значення функції у вказаних точках?

32.26. Для яких з функцій можна знайти $f(1)$, а для яких – ні:

1) $f(x) = 2x + 7;$ 2) $f(x) = \frac{x-1}{x+1};$

3) $f(x) = \frac{x+1}{x-1};$ 4) $f(x) = \frac{4x}{1-x^2};$

5) $f(x) = \frac{x-1}{x^3-1};$ 6) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+5}?$

§ 33. ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ

1. Поняття границі функції в точці

Приклад 1. Розглянемо функцію $f(x) = x - 1$. Знайдемо значення цієї функції в точці $x = 3$, маємо:

$$f(3) = 3 - 1 = 2.$$

Складемо таблицю значень функції $f(x) = x - 1$ у точках, які на числовій прямій лежать досить близько до числа 3.

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	3,0001	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	1,9999	2,0001	2,001	2,01	2,1

З таблиці помічаємо, що чим ближче аргумент x до числа 3, тим ближче значення функції $f(x) = x - 1$ до числа 2.

Кажуть, що якщо *аргумент прямує до числа* 3 (позначають так: $x \to 3$), то *значення функції прямує до числа* 2 (позначають так: $f(x) \to 2$). Для запису цього факту використовують позначення lim, а саме: $\lim\limits_{x\to 3}(x-1) = 2$ (читають: «ліміт (границя) $x - 1$ при x, що прямує до 3, дорівнює 2»). Число 2 при цьому називають *границею функції* $f(x) = x - 1$ у точці 3.

У загальному випадку запис $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ означає, що границею функції $y = f(x)$ у точці x_0 є число A.

Зауважимо, що у прикладі 1 границя функції $f(x) = x - 1$ у точці 3 дорівнює значенню функції в цій точці 3. У такому випадку кажуть, що функція $f(x) = x - 1$ *неперервна* в точці 3.

Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною* в точці x_0, якщо функція має значення в цій точці і справджується рівність $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Зауважимо, що *всі відомі нам раніше функції є неперервними в кожній точці своєї області визначення.*

Наприклад, функція $f(x) = 3x^7 - 5x^2 + 4x - 11$ неперервна для всіх значень x (кажуть, що така функція неперервна на R), а функція $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ неперервна для всіх значень x, за винятком значення $x = 2$. У такому випадку кажуть, що функція $g(x)$ неперервна на кожному з проміжків $(-\infty; 2)$ і $(2; +\infty)$, а в точці $x = 2$ має *розрив*. Точка $x = 2$ є *точкою розриву* функції $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.

Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною на деякому проміжку*, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

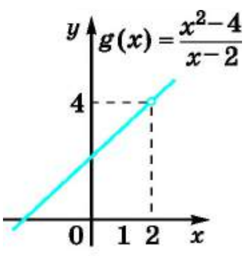
Незважаючи на те, що функція $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ у точці $x = 2$ має розрив, границю функції в цій точці знайти можна.

Приклад 2. Розглянемо функцію $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. Значення цієї функції в точці $x = 2$ не існує. Складемо таблицю значень функції $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ у точках, які на числовій прямій розташовані досить близько до числа 2.

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2,0001	2,001	2,01	2,1
$g(x)$	3,9	3,99	3,999	3,9999	4,0001	4,001	4,01	4,1

Отже, що ближче аргумент x до числа 2, то ближче значення функції $g(x)$ до числа 4, тому $\lim\limits_{x\to 2} = \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.

Цього висновку можна дійти, розглянувши графік функції $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. Областю визначення функції є всі значення x, за винятком числа 2. На області визначення $\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$. Тому графіком функції $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ є пряма $y = x + 2$ з «порожньою» точкою (2; 4) (мал. 33.1). З графіка видно, що при наближенні аргументу до числа 2 значення функції наближається до числа 4.



Мал. 33.1

2. Означення границі функції в точці

Повернемося до прикладу 1. Запис $x \to 3$ означає, що точка x знаходиться від точки 3 на незначній відстані, наприклад на відстані, меншій за якесь додатне число δ. Це можна записати так: $|x-3| < \delta$, враховуючи, що відстань між точками x і 3 на координатній прямій записують як $|x-3|$. Зауважимо, що запис $x \to 3$ означає, що x прямує до числа 3, але не обов'язково досягає цього значення, тому в означенні границі функції в точці не розглядають значення функції у цій точці.

Запис $f(x) \to 2$ означає, що значення функції $y = f(x)$ за умови, що $x \to 3$, знаходиться на незначній відстані від числа 2, наприклад на відстані, меншій за деяке додатне число ε, тобто $|f(x)-2| < \varepsilon$.

Для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке значення $\delta > 0$, що для всіх x таких, що $x \neq 3$ і $|x-3| < \delta$, справджуватиметься нерівність: $|f(x)-2| < \varepsilon$.

Справді, нехай, наприклад, $\varepsilon = 0{,}02$, тоді $|f(x)-2| < 0{,}02$. Оскільки $f(x) = x - 1$, маємо: $|x-1-2| < 0{,}02$, тобто $|x-3| < 0{,}02$. Отже, $\delta = 0{,}02$.

Маємо *означення границі функції в точці*:

число A називають *границею функції* $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що при всіх $x \neq x_0$ таких, що $|x - x_0| < \delta$, справджується нерівність: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Приклад 3. Довести за означенням, що $\lim\limits_{x\to 1}(5x-1) = 4$.

Розв'язання. Розглянемо $\varepsilon > 0$ таке, що $|(5x-1)-4| < \varepsilon$. Маємо: $|5x-5| < \varepsilon$, тобто $5|x-1| < \varepsilon$, отже, $|x-1| < \frac{\varepsilon}{5}$. Нехай $\frac{\varepsilon}{5} = \delta$, тоді $|x-1| < \delta$. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайшлося таке $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, що для всіх значень x таких, що $x \neq 1$ і які задовольняють умову $|x-1| < \delta$, справджується нерівність: $|(5x-1)-4| < \varepsilon$. Отже, за означенням, $\lim\limits_{x\to 1}(5x-1) = 4$.

Зауважимо, що оскільки функція $f(x) = 5x - 1$ є неперервною на R, і зокрема в точці 1, то значення границі можна буде знайти без використання означення, так: $\lim\limits_{x\to 1}(5x-1) = f(1) = 5 \cdot 1 - 1 = 4$.

3. Правила обчислення границі функції в точці

Розглянемо основні *правила обчислення границі функції у точці*, які приймемо без доведення.

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

Т Теорема 2. **Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ мають границі в точці x_0, то існують границі їх суми, різниці і добутку в цій точці, причому**

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x).$$

Т Теорема 3. $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$, **де C — довільне число.**

Т Теорема 4. **Якщо існує границя функції $f(x)$ у точці x_0, то в цій точці існує границя функції $kf(x)$, де k — деяке число, $k\neq 0$, причому $\lim\limits_{x\to x_0}kf(x)=k\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.**

Т Теорема 5. **Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ мають границі в точці x_0, причому границя функції $g(x)$ відмінна від нуля, то існує границя частки функцій $\frac{f(x)}{g(x)}$, причому**

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}.$$

Ці теореми використовують для обчислення границь.

Приклад 4. Обчислити границю:

1) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-2x+7)$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-8}{x+1}$.

Розв'язання.

1) *1-й спосіб.* $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-2x+7)=\lim\limits_{x\to 5}x^2-\lim\limits_{x\to 5}2x+\lim\limits_{x\to 5}7=$

$=\lim\limits_{x\to 5}x\cdot\lim\limits_{x\to 5}x-2\lim\limits_{x\to 5}x+7=5\cdot 5-2\cdot 5+7=22.$

2-й спосіб. Оскільки функція $f(x)=x^2-2x+7$ неперервна для $x\in R$, і зокрема в точці 5, то $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-2x+7)=f(5)=22$.

2) Значення функції $f(x)=\frac{x^2-8}{x+1}$ в точці -2 існує, $f(-2)=\frac{(-2)^2-8}{-2+1}=\frac{-4}{-1}=4$, тому функція в цій точці неперервна. Отже, $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-8}{x+1}=f(-2)=4$.

Відповідь. 1) 22; 2) 4.

Зі згаданих вище теорем та прикладів можна дійти висновку:

якщо існує значення функції $y = f(x)$ у точці x_0 і функція в цій точці неперервна, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Приклад 5. Обчислити $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$.

Розв'язання. Значення виразу $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$ при $x = 1$ не існує.

Розкладемо на множники чисельник і знаменник дробу:

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}.$$

Оскільки $x \to 1$, але $x \neq 1$, то отриманий дріб можна скоротити на $x - 1$, після чого отримаємо дріб $\dfrac{x+3}{x+1}$, для якого значення в точці $x = 1$ існує.

Отже, маємо:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+3}{x+1} = \frac{1+3}{1+1} = 2.$$

Відповідь. 2.

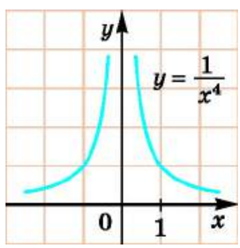
З теорем і прикладів, які ми розглянули, можна дійти висновку, що

якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0, то сума, добуток і частка функцій також неперервні в точці x_0 (для частки лише за умови $g(x_0) \neq 0$).

4. Нескінченна границя функції

Ми вже розглянули скінченні границі функції $f(x)$ при $x \to \infty$ або $x \to a$, де a – число. Проте в математиці розглядають також і поняття *нескінченної границі*.

Наприклад, функція $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$, графік якої зображено на малюнку 33.2, визначена для всіх $x \neq 0$. Але якщо $x \to 0$, то функція набуває яких завгодно великих значень. Кажуть, що функція $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ в точці $x = 0$ має нескінченну границю, і записують це так: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^4} = \infty$.



Мал. 33.2

Сформулюємо означення нескінченної границі функції.

Вважатимемо, що $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, якщо для довільного числа $M>0$ існує таке число $\delta>0$, що для всіх x таких, що $|x-a|<\delta$, $x\neq a$, справджується нерівність: $|f(x)|>M$.

Приклад 6. Довести, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{\alpha}}=\infty$, де $\alpha>0$ – раціональне число.

Д о в е д е н н я. Доведемо, що для довільного числа $M>0$ існує таке число $\delta>0$, що для всіх x таких, що $|x|<\delta$, справджується нерівність: $\left|\frac{1}{x^{\alpha}}\right|>M$. Маємо: $x^{\alpha}<\frac{1}{M}$, тобто $x<\left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Отже, для довільного числа $M>0$ існує таке $\delta=\left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, що для всіх x таких, що $|x|<\delta$, справджується нерівність: $\left|\frac{1}{x^{\alpha}}\right|>M$.

Так само можна довести, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{c}{x^{\alpha}}=\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{c}{(x-a)^{\alpha}}=\infty$, де c і a – будь-які числа, $c\neq 0$, $\alpha>0$ – раціональне число.

У математиці також розглядають поняття нескінченної границі на нескінченності, тобто границі вигляду $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

Будемо вважати, що $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, якщо для довільного числа $M>0$ існує таке число $N>0$, що для всіх x, таких, що $|x|>N$, справджується нерівність: $|f(x)|>M$.

Наприклад, $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-3)=\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+3x+1)=\infty$.

Приклад 7. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x}{3x-1}$.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+7x)=\infty$ і $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-1)=\infty$, то кажуть, що маємо невизначеність типу $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для обчислення цієї границі поділимо чисельник і знаменник на x у найвищому степені – на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{7x}{x^2}}{\frac{3x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{7}{x}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}.$$

Але $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{7}{x}\right)=2+0=2$ і $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=0-0=0$, тому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{7}{x}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}=\infty.$$

Відповідь. ∞.

А ще раніше...

Поява поняття границі, що сягає корінням у сиву давнину, пов'язане зі знаходженням площ криволінійних фігур і об'ємів тіл, обмежених кривими поверхнями.

Перше теоретичне узагальнення і обґрунтування методів обчислення площ і об'ємів, у яких неявно використовувалися граничні переходи, дав найвидатніший грецький математик IV ст. до н. е. Евдокс Кнідський. Метод Евдокса в XVII ст. було названо методом вичерпання.

Так, наприклад, за допомогою свого методу Евдокс довів, що об'єм піраміди дорівнює третині об'єму призми з тією ж основою і тією ж висотою, а об'єм конуса дорівнює третини об'єму відповідного циліндра.

Діностpат, сучасник й учень Евдокса, застосовуючи методи свого вчителя, знайшов, що $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$, *названий в сучасній термінології «першою чудовою границею».*

Наступними цеглинами фундаменту теорії границь слід вважати праці «Геометрія неподільних безперервних» (1635 р.) Кавальєрі і «Геометрична праця» Грегуара де Сен-Венсана.

Величезний внесок до теорії границь зробила полеміка і конкуренція між двома найбільшими математичними школами XVII ст. Одну з них очолював Лейбніц, а її учнями й представниками були Лопіталь, брати Бернуллі, Ейлер, а іншу школу очолював Ньютон, а одним з її представників був Маклорен. Обидві школи створили потужні алгоритми, які призвели, по суті, до одних і тих самих результатів – створення диференціального й інтегрального числення. Одним із цих алгоритмів і був метод границь.

- Коли функцію $y=f(x)$ називають неперервною в точці x_0? • Сформулюйте означення границі функції в точці. • Сформулюйте основні теореми про границі функції в точці. • Сформулюйте властивість неперервних функцій. • У якому випадку вважають, що $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$? • У якому випадку вважають, що $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **Знайдіть границю функції (33.1–33.2):**

33.1. 1) $\lim\limits_{x\to 2}x$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(2x-1)$. **33.2.** 1) $\lim\limits_{x\to -1}x$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(3x+2)$.

33.3. Чи буде функція $f(x)$ неперервною в точці 3, якщо:

1) $f(x) = 3x - 5$; 2) $f(x) = \frac{1}{x-3}$?

33.4. Чи буде функція $g(x)$ неперервною в точці 2, якщо:

1) $g(x) = 2x + 7$; 2) $g(x) = \frac{1}{2-x}$?

2 Обчисліть границю (33.5–33.8):

33.5. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+7}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-3x+5)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x-5}{x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4-x^2}{2-x}$.

33.6. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5+x^3}{1+x}$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-4x+7)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{20-10x}{2-x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$.

33.7. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^8}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{10}{x-1}$. **33.8.** 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$.

33.9. Відомо, що $\lim\limits_{x\to 1}f(x) = 5$. Знайдіть границю в точці 1 для функції:

1) $y = 2f(x)$; 2) $y = f(x) + 4$;

3) $y = \frac{10}{f(x)}$; 4) $y = \frac{f(x)}{f(x)-4}$.

33.10. Відомо, що $\lim\limits_{x\to 2}t(x) = 4$. Знайдіть границю в точці 2 для функції:

1) $y = 7t(x)$; 2) $y = t(x) - 3$; 3) $y = \frac{12}{t(x)}$; 4) $y = \frac{t(x)}{t(x)-3}$.

33.11. Обчисліть: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$; 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\cos x$.

33.12. Обчисліть: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$; 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\sin x$.

Знайдіть проміжки неперервності функції (33.13–33.14):

33.13. 1) $f(x) = 3x - 7$; 2) $f(x) = 4x^3 - 9x + 11$;

3) $g(x) = \frac{10}{x+7}$; 4) $g(x) = \sin 2x$.

33.14. 1) $g(x) = 4 - 9x$; 2) $g(x) = x^2 + 2x - 3$;

3) $f(x) = \frac{5}{x-5}$; 4) $f(x) = \cos 4x$.

Знайдіть точки розриву функції (33.15–33.16):

33.15. 1) $g(x) = \dfrac{11}{x-7}$; 2) $f(x) = \dfrac{10}{x} + \dfrac{1}{x+9}$.

33.16. 1) $f(x) = \dfrac{10}{x+1}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{2}{x}$.

3 Користуючись означенням границі, доведіть, що (33.17–33.18):

33.17. $\lim\limits_{x\to-1}(2x+3) = 1$. **33.18.** $\lim\limits_{x\to2}(3x-5) = 1$.

33.19. Знайдіть: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-7)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+2x-7)$.

33.20. Знайдіть: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+5)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+x)$.

33.21. Відомо, що $\lim\limits_{x\to3} f(x) = 5$ і $\lim\limits_{x\to3} g(x) = 7$. Знайдіть границю в точці 3 для функції:

1) $y = f(x) + g(x)$; 2) $y = 3f(x) - 5g(x)$;

3) $y = g^2(x) - f(x)$; 4) $y = \dfrac{f(x)+1}{g(x)-1}$.

33.22. Відомо, що $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 9$ і $\lim\limits_{x\to1} g(x) = 4$. Знайдіть границю в точці 1 для функції:

1) $y = f(x) - g(x)$; 2) $y = 4f(x) + 3g(x)$;

3) $y = f^2(x) + g(x)$; 4) $y = \dfrac{f(x)+1}{g(x)-2}$.

Обчисліть границю (33.23–33.24):

33.23. 1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2+2x-8}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$.

33.24. 1) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-x-6}{x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+5x+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$.

4 Користуючись означенням границі, доведіть, що (33.25–33.26):

33.25. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$. **33.26.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2} = -4$.

Обчисліть границю (33.27–33.32):

33.27. 1) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3-9x}{x^2+2x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{8}{x^2-4}\right)$.

33.28. 1) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x - x^3}{2x^2 + 3x - 2}$; 2) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{6}{x^2 - 1} \right)$.

33.29. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$.

33.30. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$.

33.31. 1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 4}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin^3 x}$.

33.32. 1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x + 1}$; 2) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 + \cos 2x}{\sin^4 x}$.

33.33. У вересні 1 кг винограду коштував 20 грн, у жовтні виноград подорожчав на 25 %, а в листопаді ще на 20 % (по відношенню до ціни жовтня). Скільки коштував 1 кг винограду після подорожчання в листопаді?

33.34. Розв'яжіть рівняння
$(x^2 - 10x + 24)(x^2 - 12x + 35) = 24$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

33.35. Спростіть вираз $y(a + b) - y(a)$, якщо:

1) $y(x) = 5$; 2) $y(x) = x$; 3) $y(x) = x^2$;

4) $y(x) = x^3$; 5) $y(x) = \dfrac{1}{x}$; 6) $y(x) = \sqrt{x}$.

§ 34. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ. ПОХІДНІ НАЙПРОСТІШИХ ФУНКЦІЙ

1. Приріст аргументу і приріст функції

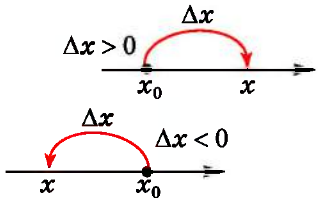
На практиці нас часто цікавить не значення якоїсь величини, а її приріст. Приріст величини позначають великою літерою грецького алфавіту Δ (дельта). Розглянемо поняття приросту для функції.

Спочатку розглянемо поняття *приросту аргументу*. Нехай x_0 – деяке фіксоване значення аргументу, а x – деяке довільне його значення.

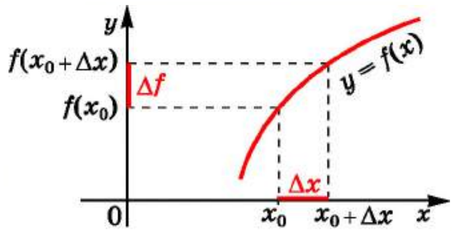
Різницю $x - x_0$ називають *приростом аргументу* (незалежної змінної) у точці x_0 і позначають Δx (читають: «дельта ікс»).

Отже, $\Delta x = x - x_0$, звідси $x = x_0 + \Delta x$.

Зауважимо, що значення Δx може бути як додатним, так і від'ємним. Зрозуміло, що коли $\Delta x > 0$, то $x > x_0$, а коли $\Delta x < 0$, то $x < x_0$ (мал. 34.1).



Мал. 34.1



Мал. 34.2

Розглянемо значення функції $f(x)$ у точках x та x_0, тобто $f(x)$ та $f(x_0)$. Значення функції $f(x)$ змінилося при переході від точки x_0 до точки x на значення $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Різницю $f(x) - f(x_0)$ називають *приростом функції* в точці x_0 і позначають Δf (читають: «дельта еф»).

Оскільки $x = x_0 + \Delta x$, то $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, звідки $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$ (мал. 34.2).

Приклад 1. Знайти приріст функції $f(x) = 3x - 2$ в точці $x_0 = 1$, що відповідає приросту аргументу $\Delta x = 0{,}1$.

Розв'язання. $f(x_0) = f(1) = 3 \cdot 1 - 2 = 1$. Оскільки $x_0 + \Delta x = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$, то $f(x_0 + \Delta x) = f(1{,}1) = 3 \cdot 1{,}1 - 2 = 1{,}3$. Тоді $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 1{,}3 - 1 = 0{,}3$.

Відповідь. 0,3.

2. Похідна функції

Для функції поняття *похідної* є одним з найважливіших понять математичного аналізу. За допомогою похідної можна досліджувати властивості функцій, знаходити їх найбільше і найменше значення на проміжку тощо. Похідну застосовують у фізиці, економіці, інших науках.

Границю відношення приросту функції Δf у точці x_0 до приросту аргументу Δx, коли $\Delta x \to 0$, називають *похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0*.

Похідну позначають так: $f'(x_0)$ (читають: «f штрих у точці x_0») або так: $y'(x_0)$ (читають: «y штрих у точці x_0»). Означення похідної у вигляді формули можна записати так:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо врахувати, що $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, то

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функцію $y = f(x)$, що має похідну в точці x_0, називають *диференційовною* в цій точці. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці деякого проміжку, то кажуть, що функція диференційовна на цьому проміжку. Дію знаходження похідної називають *диференціюванням функції*.

Знайти похідну функції $f(x)$ у точці x_0 за означенням можна за таким алгоритмом:

1) знайти приріст функції $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, *що відповідає приросту аргументу* Δx;

2) знайти відношення $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ *та спростити його*;

3) знайти границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Приклад 2. Знайти похідну функції $f(x) = x^2$ у точці $x_0 = 7$.

Розв'язання. 1) $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (7 + \Delta x)^2 - 7^2 =$
$= 49 + 14\Delta x + (\Delta x)^2 - 49 = 14\Delta x + (\Delta x)^2$.

2) $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{14\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(14 + \Delta x)}{\Delta x} = 14 + \Delta x$.

3) $f'(7) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(14 + \Delta x) = 14$. Відповідь. $f'(7) = 14$.

Приклад 3. Чи має функція $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, \text{ якщо } x \leqslant 1, \\ 2x - 4, \text{ якщо } x > 1 \end{cases}$ похідну у точці $x_0 = 1$? У разі позитивної відповіді, знайти $f'(1)$.

Розв'язання. Маємо: $f(x_0) = f(1) = 1^2 - 3 = -2$. Оскільки функцію $f(x)$ для різних значень аргументу задано різними формулами: для $x \leqslant 1$ – однією формулою, а для $x > 1$ – іншою, і дати відповідь про існування похідної потрібно саме в точці $x_0 = 1$, то під час розв'язування задачі треба розглянути два випадки $\Delta x < 0$ і $\Delta x > 0$.

Якщо $\Delta x < 0$, то $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (1 + \Delta x)^2 - 3 - (-2) =$
$= 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 3 + 2 = 2\Delta x + (\Delta x)^2$.

Тоді $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2 + \Delta x)}{\Delta x} = 2 + \Delta x$.

Якщо $\Delta x > 0$, то $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(1 + \Delta x) - 4 - (-2) =$
$= 2 + 2\Delta x - 4 + 2 = 2\Delta x$. Тоді $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$.

Отже, в обох випадках $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 2$, тобто $f'(1)$ існує і $f'(1) = 2$.

Відповідь. Має; $f'(1) = 2$.

3. Похідні найпростіших функцій

Оскільки для кожного значення x_0 значення $f'(x_0)$ або єдине, або взагалі не існує, будемо розглядати похідну $f'(x)$ як функцію від x.

Для деяких функцій можна знайти формули їх похідних. Це дозволить знаходити похідну функції в точці не за означенням, а за формулою.

Знайдемо формули похідних деяких найпростіших функцій за означенням, замінивши в запропонованому вище алгоритмі x_0 на x.

Приклад 4. Нехай $f(x) = C$, де C – число. Тоді за алгоритмом:

1) $\Delta f(x) = C - C = 0$; 2) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$; 3) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 0$.

Отже, $C' = 0$.

Приклад 5. Нехай $f(x) = x$. Тоді:

1) $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$;

2) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$; 3) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$. Отже, $x' = 1$.

Приклад 6. Нехай $f(x) = x^2$. Тоді:

1) $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$
$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$;

2) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;

3) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$. Отже, $(x^2)' = 2x$.

Аналогічно можна знайти похідні й інших функцій шкільного курсу математики.

Радимо запам'ятати похідні функцій, які найчастіше використовують у курсі алгебри і початків аналізу:

$C' = 0$ $\quad x' = 1$ $\quad (x^2)' = 2x$

$(x^3)' = 3x^2$ $\quad \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ $\quad \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Зверніть увагу, що похідна функції – це також функція, а похідна функції в точці – це число. Отже, тепер, знаючи формули похідних, похідні функцій в точках можна обчислювати значно простіше, ніж за означенням. Для цього достатньо у формулу похідної функції підставити дану точку і виконати обчислення.

Приклад 10. Дано функцію $f(x) = x^3$. Знайти $f'(-1)$, $f'(2)$.

Розв'язання. Відомо, що похідною функції $f(x) = x^3$ є функція $f'(x) = 3x^2$. Тоді
$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3$ і $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$.

Відповідь. $f'(-1) = 3$; $f'(2) = 12$.

А ще раніше...

Розділ математики, у якому вивчають похідні та їх застосування, називають диференціальним численням. Диференціальне числення створено не так давно, у кінці XVII ст., завдяки Ньютону і Лейбніцу. Вони майже одночасно прийшли до поняття похідної. Ньютон прийшов до цього, розглядаючи питання механіки, зокрема питання миттєвої швидкості. Функцію він називав «флюентою», а похідну – «флюксією», функції позначав літерами x; y; z; u; v; w, а їхні похідні – тими самими літерами із крапками вгорі: $\dot{x}$; $\dot{y}$ тощо.

Лейбніц прийшов до поняття похідної, виходячи з геометричних задач, а саме, розглядаючи задачу про проведення дотичної до кривої. Замість відомого нам Δx, він використовував позначення dx (літера d – перша літера латинського слова differentia – різниця).

І. Ньютон (1643–1727)

І.Ф. Лейбніц (1646–1716)

М.В. Остроградський (1801–1862)

М.П. Кравчук (1892–1942)

Подальший внесок у розвиток математичного аналізу взагалі та диференціального числення зокрема зробили А. Лопіталь (1661–1704), Л. Ейлер (1707–1783), О. Коші (1789–1857), К.Ф. Гаус (1777–1855), а також українські математики М.В. Остроградський і М.П. Кравчук.

● Що називають приростом аргументу в точці x_0? ● Що називають приростом функції у точці x_0? ● Що називають похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0? ● Яку функцію називають диференційовною в точці x_0? ● Сформулюйте алгоритм знаходження похідної за означенням. ● Запам'ятайте похідні функцій $f(x) = C$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **Знайдіть приріст аргументу Δx, якщо (34.1–34.2):**

34.1. 1) $x_0 = 2$, $x = 2{,}001$; 2) $x_0 = 3$, $x = 2{,}9$.

34.2. 1) $x_0 = 5$, $x = 5{,}01$; 2) $x_0 = 0$, $x = -0{,}001$.

Які похідні знайдено правильно, а які – ні (34.3–34.4):

34.3. 1) $5' = 0$; 2) $(x^2)' = 3x^2$; 3) $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$; 4) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$?

34.4. 1) $7' = 7$; 2) $(x^3)' = 3x^2$; 3) $(x^2)' = 2x$; 4) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}}$?

2 **Знайдіть приріст функції $f(x)$ у точці x_0 для даного приросту аргументу (34.5–34.6):**

34.5. 1) $f(x) = 3x - 4$, $x_0 = 5$, $\Delta x = 0,1$;
2) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 2$, $\Delta x = -0,2$.

34.6. 1) $f(x) = 2x + 3$, $x_0 = 1$, $\Delta x = -0,1$;
2) $f(x) = x^2 - 5$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0,2$.

34.7. Знайдіть приріст функції $g(x) = \sin x$ у точці $x_0 = 0$, якщо:
1) $\Delta x = \frac{\pi}{6}$; 2) $\Delta x = -\frac{\pi}{4}$.

34.8. Знайдіть приріст функції $f(x) = \cos x$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{2}$, якщо:
1) $\Delta x = \frac{\pi}{4}$; 2) $\Delta x = -\frac{\pi}{6}$.

Використовуючи таблицю похідних, знайдіть похідну функції (34.9–34.10):

34.9. 1) $f(x) = x^2$ у точках -5; -2; 0; 1;
2) $g(x) = \sqrt{x}$ у точках $\frac{1}{4}$; 9; 25.

34.10. 1) $f(x) = x^3$ у точках -1; 0; 1; 4;
2) $g(x) = \frac{1}{x}$ у точках $-0,1$; $0,2$; 5.

3 **34.11.** 1) Запишіть приріст функції $f(x) = 2x - 3$ в точці x_0 через x_0 і Δx.
2) Знайдіть $\Delta f(x_0)$, якщо $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,5$.
3) Накресліть графік функції $f(x) = 2x - 3$.
4) Проілюструйте зроблене малюнком.

34.12. 1) Запишіть приріст функції $g(x) = 2 - 3x$ у точці x_0 через x_0 і Δx.
2) Знайдіть $\Delta g(x_0)$, якщо $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,5$.
3) Накресліть графік функції $g(x) = 2 - 3x$.
4) Проілюструйте зроблене малюнком.

Користуючись означенням похідної, знайдіть похідну функції $g(x)$ у точці x_0 (34.13– 34.14):

34.13. 1) $g(x) = 3x^2 - x$, $x_0 = 1$; 2) $g(x) = \frac{16}{x} + 5$, $x_0 = -2$.

34.14. 1) $g(x) = 5x^2 + x$, $x_0 = -1$; 2) $g(x) = 1 - \frac{20}{x}$, $x_0 = 2$.

34.15. Порівняйте $\Delta f(x_0)$ і $\Delta g(x_0)$ у точці $x_0 = 1$ для функцій $f(x) = -\frac{2}{x}$ і $g(x) = x^2 - 1$, якщо $\Delta x = 0{,}1$.

Складіть і розв'яжіть рівняння (34.16–34.17):

34.16. 1) $f'(x) = f(x)$, якщо $f(x) = x^3$;

2) $g'(x) = -4$, якщо $g(x) = \frac{1}{x}$.

34.17. 1) $f(x) = f'(x)$, якщо $f(x) = x^2$;

2) $g'(x) = \frac{1}{8}$, якщо $g(x) = \sqrt{x}$.

34.18. Складіть і розв'яжіть нерівність $f'(x) \geqslant 3f(x)$, якщо $f(x) = x^2$.

34.19. Порівняйте $f'(3)$ і $f'(-3)$, якщо $f(x) = x^3$.

34.20. Порівняйте $g'\left(\frac{1}{4}\right)$ і $g'\left(\frac{1}{9}\right)$, якщо $g(x) = \sqrt{x}$.

4 Користуючись означенням похідної, знайдіть значення похідної функції $t(x)$ у точці x_0 (34.21–34.22):

34.21. 1) $t(x) = \frac{4}{x} - x$, $x_0 = 2$; 2) $t(x) = \sqrt{x+3}$, $x_0 = 1$.

34.22. 1) $t(x) = x + \frac{9}{x}$, $x_0 = 3$; 2) $t(x) = \sqrt{x-2}$, $x_0 = 6$.

Користуючись означенням, знайдіть похідну функції (34.23–34.24):

34.23. 1) $f(x) = 4 - 7x$; 2) $g(x) = 3x + x^2$.

34.24. 1) $f(x) = 2x + 5$; 2) $f(x) = x^2 - 5x$.

34.25. Складіть і розв'яжіть нерівність $f'(x) + g'(x) - 5 > 0$, якщо $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$.

34.26. Складіть і розв'яжіть рівняння $|f'(x)| = f(x)$, якщо $f(x) = x^2$.

34.27. Чи має функція $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ якщо } x < 1, \\ 1 + x^2, \text{ якщо } x \geqslant 1 \end{cases}$ похідну у точці $x_0 = 1$? Якщо так, то знайдіть $f'(1)$.

34.28. Доведіть, користуючись означенням похідної, що в точці $x_0 = 2$ існує похідна функції $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ якщо } x \leqslant 2, \\ 4x - 5, \text{ якщо } x > 2. \end{cases}$

Знайдіть $f'(2)$.

34.29. Висота над землею підкинутого вгору м'яча змінюється за законом $h(t) = 1{,}6 + 8t - 5t^2$, де h – висота в метрах, t – час у секундах, що минув з моменту підкидання. Скільки секунд м'яч буде перебувати на висоті, що не менша за три метри?

34.30. Додатні числа x і y задовольняють умову $x - y = x^3 + y^3$. Доведіть, що $x^2 + y^2 < 1$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

34.31. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої:

1) $y = 4x - 5$; 2) $y = -\frac{1}{3}x + 6$; 3) $y = 7$;

4) $y = 0{,}17x$; 5) $12x + 2y = 5$; 6) $7y = -14$.

34.32. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $K(-1;\ 4)$ і паралельна осі абсцис.

34.33. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(2;\ -1)$ і має кутовий коефіцієнт:

1) 3; 2) -7; 3) 0; 4) $0{,}5$.

34.34. Який кут утворює з додатним напрямом осі абсцис пряма:

1) $y = x + 2$; 2) $y = 7 - x$; 3) $y = 5$; 4) $y = \sqrt{3}x$?

34.35. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $L(2;\ -3)$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут:

1) $45°$; 2) $120°$.

34.36. Укажіть пари паралельних прямих серед прямих, які задано рівняннями:

1) $y = 5 - 2x$; 2) $y = 0{,}5x - 7$; 3) $y + 2x - 7 = 0$;

4) $y = -2$; 5) $y = \frac{1}{2}x$; 6) $y = 2$.

§ 35. ФІЗИЧНИЙ І ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

Розглянемо деякі задачі, що приводять до поняття похідної.

1. Середня та миттєва швидкості руху точки вздовж прямої

Нехай точка рухається вздовж прямої, і відомо її координату $x(t)$ у момент часу t. За інтервал часу від t_0 до $t = t_0 + \Delta t$ точка подолає відстань $x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$. Тоді *середню швидкість руху* за цей час можна визначити за формулою

$$v_с(\Delta t) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Зауважимо, що якщо $\Delta t < 0$, то розглядають інтервал часу від $t_0 + \Delta t$ до t_0, а відповідна відстань у цьому разі дорівнює $x(t_0) - x(t_0 + \Delta t)$. Тоді

$$v_c(\Delta t) = \frac{x(t_0) - x(t_0 + \Delta t)}{-\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Отже, в обох випадках середня швидкість точки, що рухається вздовж прямої, дорівнюватиме $\frac{\Delta x}{\Delta t}$.

У кожний момент часу точка рухається з певною швидкістю. З'ясуємо, як знайти *миттєву швидкість руху* в момент часу t_0. Природно припустити, що коли Δt досить мале, то за цей інтервал часу швидкість практично не зміниться, тобто середня швидкість за цей момент часу практично не відрізнятиметься від миттєвої швидкості $v_{\text{мит}}(t_0)$. Тому, щоб знайти миттєву швидкість, спочатку знайдемо середню швидкість $v_c(\Delta t)$, а далі – границю середньої швидкості за умови, що $\Delta t \to 0$. Отже,

$$v_{\text{мит}}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Права частина цієї рівності є, за означенням, похідною функції $x(t)$ у точці t_0, тобто $x'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Маємо:

! миттєва швидкість $v(t)$ визначена для будь-якої диференційовної функції $x(t)$ і при цьому

$$v(t) = x'(t)$$

або коротко:

! похідна від координати за часом є швидкістю.

У цьому полягає ***фізичний зміст похідної.***

Міркуючи аналогічно, можна показати, що

! похідна від швидкості за часом є прискоренням.

Приклад 1. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2$ (x вимірюється в метрах, t – у секундах). Знайти швидкість точки в момент часу $t = 5$ с.

Розв'язання. Оскільки $v(t) = x'(t) = (t^2)' = 2t$ і $t = 5$, то $v(5) = 2 \cdot 5 = 10$ (м/с).

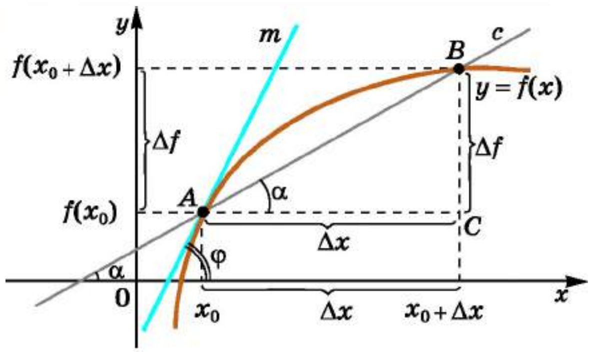
Відповідь. 10 м/с.

2. Дотична до графіка функції

Розглянемо графік функції $y = f(x)$. Пряму c, що проходить через будь-які дві точки графіка функції $f(x)$, називають *січною* до цього графіка (мал. 35.1). З курсу геометрії відомо, що кутовий коефіцієнт k прямої, що проходить через точки $A(x_0; y_0)$ і $B(x; y)$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α, дорівнює $\frac{y - y_0}{x - x_0}$. Використовуючи поняття приростів функції та аргументу, це зручно записати так:

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

***Дотичною в точці** $(x_0; y_0)$ **до графіка функції** $y = f(x)$* **називають граничне положення січної, що проходить через цю точку, коли** $\Delta x \to 0$**.**



Мал. 35.1

На малюнку 35.1 пряма m – дотична до графіка функції $y = f(x)$, яку проведено в точці A. Для прямої m маємо: $k = \operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$, то $k = f'(x_0)$. Отже,

кутовий коефіцієнт дотичної **до графіка функції** $y = f(x)$**, що проведена в точці з абсцисою** x_0**, дорівнює похідній функції** $y = f(x)$ **у цій точці:** $k = f'(x_0)$**.**

У цьому полягає *геометричний зміст похідної*.

Оскільки $f'(x_0) = k = \operatorname{tg}\varphi$, де φ – кут, який утворює дотична з додатним напрямом осі абсцис, то коли $f'(x_0) > 0$, кут φ – гострий; коли $f'(x_0) = 0$, то $\varphi = 0°$, тобто дотична паралельна осі абсцис (або збігається з нею), а у випадку $f'(x_0) < 0$ кут φ – тупий.

Приклад 2. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $f(x) = x^3$, у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

Р о з в ' я з а н н я. $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$.
Оскільки $k = f'(x_0)$ і $x_0 = -2$, то $k = f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 = 12$.
В і д п о в і д ь. $k = 12$.

Приклад 3. Знайти тангенс кута нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{x}$, що проведена в точці $A(4; 2)$.

Розв'язання. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Нехай φ – кут нахилу дотичної до осі абсцис.

Оскільки $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$ і $x_0 = 4$, то $\operatorname{tg}\varphi = f'(4) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{4}} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

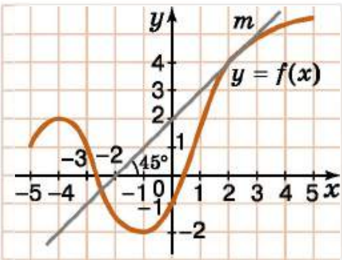
Відповідь. 0,25.

Приклад 4. На малюнку 35.2 зображено графік функції $y = f(x)$, яка визначена на проміжку $[-5; 5]$. Пряма m – дотична до графіка функції.

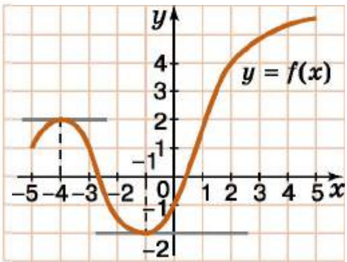
1) Використовуючи графік, знайдіть $f'(2)$.

2) Укажіть точки x_0, для яких $f'(x_0) = 0$.

Розв'язання. 1) Пряма m у точці з абсцисою $x = 2$ утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 45°. Тому $f'(2) = \operatorname{tg} 45° = 1$.



Мал. 35.2



Мал. 35.3

2) Оскільки $f'(x_0) = 0$, то x_0 – абсциса тих точок графіка функції $f(x)$, у яких дотична паралельна осі абсцис (або збігається з нею). Це точки $x_0 = -4$ та $x_0 = -1$ (мал. 35.3).

Відповідь. 1) $f'(2) = 1$; 2) -4; -1.

3. Рівняння дотичної до графіка функції

Нехай $y = kx + l$ – рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $A(x_0; f(x_0))$. Оскільки $k = f'(x_0)$, то рівняння дотичної набуває вигляду:

$$y = f'(x_0) \cdot x + l.$$

Оскільки дотична проходить через точку $A(x_0; f(x_0))$, то координати цієї точки задовольняють рівняння дотичної, тобто $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + l$, звідки $l = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

Отже, знаючи k і l можемо записати *рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0*:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0, \text{ тобто}$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Приклад 5. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=\frac{1}{x}$ у точці з абсцисою $x_0=-4$.

Розв'язання. Маємо: $f(x_0)=f(-4)=\frac{1}{-4}=-\frac{1}{4}$; $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$; $f'(-4)=-\frac{1}{16}$. Підставимо отримані значення в рівняння дотичної, отримаємо: $y=-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}(x+4)$. Спростивши вираз у цьому рівнянні, матимемо: $y=-\frac{1}{16}x-\frac{1}{2}$.

Відповідь. $y=-\frac{1}{16}x-\frac{1}{2}$.

А ще раніше...

Нагадаємо, що Ньютон прийшов до поняття похідної, розглядаючи питання механіки, зокрема, миттєвої швидкості, а Лейбніц – виходячи з геометричних задач, а саме задачі на побудову дотичної до кривої.

Однак питання побудови дотичних до кривих цікавило математиків задовго до Лейбніца. Так, наприклад, Евклід в «Началах» дав спосіб побудови дотичної до кола, Архімед побудував дотичну до спіралі, яку названо на його честь, Аполоній – до еліпса, гіперболи і параболи. Проте стародавні вчені не розв'язали цю задачу в загальному вигляді: не вказали, як побудувати дотичну до довільної кривої в будь-якій її точці.

Із самого початку XVII століття багато вчених намагалися розв'язати цю задачу, зокрема: Торрічеллі, Вівіані, Роберваль, Барроу, однак загальний метод побудови дотичних першим запропонував Лейбніц у 1684 році.

- Як знайти миттєву швидкість точки, що рухається за законом $x(t)$? - У чому полягає фізичний зміст похідної? - Що називають січною до графіка функції $y=f(x)$? - Що називають дотичною до графіка функції $y=f(x)$? - У чому полягає геометричний зміст похідної? - Запам'ятайте рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

35.1. (*Усно*). Відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0 дорівнює 0,4. Знайдіть значення похідної функції $y=f(x)$ у цій точці.

35.2. Відомо, що $f'(3)=5$. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y=f(x)$, проведеної в точці з абсцисою $x_0=3$.

35.3. Відомо, що $f'(4) = 1$. Знайдіть:
1) кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$, проведеної в точці з абсцисою $x_0 = 4$;
2) кут, який утворює ця дотична з додатним напрямом осі абсцис.

35.4. Дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 60°. Знайдіть $f'(x_0)$.

2

35.5. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{1}{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$.

35.6. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = \frac{1}{4}$.

35.7. Знайдіть тангенс кута нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції $f(x) = x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

35.8. Знайдіть тангенс кута нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції $f(x) = x^3$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$.

35.9. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^3$ (t вимірюється в секундах, x – у метрах). Знайдіть швидкість тіла в момент часу: 1) $t = 2$ с; 2) $t = 3$ с.

35.10. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2$ (t вимірюється в секундах; x – у метрах). Знайдіть швидкість тіла в момент часу: 1) $t = 4$ с; 2) $t = 10$ с.

35.11. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

36.12. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{1}{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

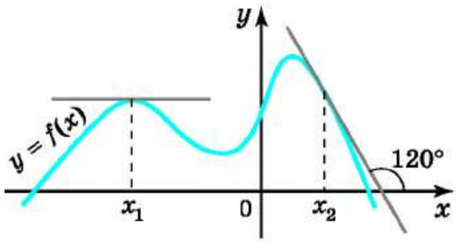
3

35.13. На графіку функції $f(x) = x^2$ знайдіть точку, у якій дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 135°.

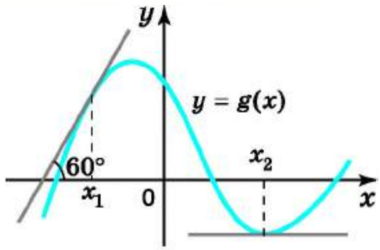
35.14. На графіку функції $f(x) = \sqrt{x}$ знайдіть точку, у якій дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 45°.

35.15. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = \frac{1}{t}$. У який момент часу t ($t > 0$) швидкість точки буде дорівнювати $-\frac{1}{9}$ м/с, якщо t вимірюється в секундах, x – у метрах?

35.16. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^3$ (t вимірюється в секундах, x – у метрах). У який момент часу t ($t > 0$) швидкість точки буде дорівнювати 48 м/с?



Мал. 35.4



Мал. 35.5

35.17. До графіка функції $y = f(x)$ у точках з абсцисами x_1 і x_2 проведено дотичні (мал. 35.4). Знайдіть $f'(x_1)$ і $f'(x_2)$.

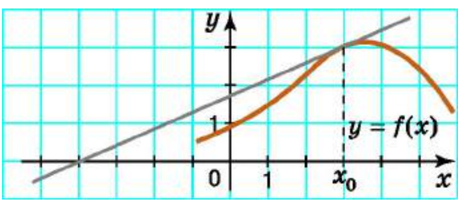
35.18. До графіка функції $y = g(x)$ у точках з абсцисами x_1 і x_2 проведено дотичні (мал. 35.5). Знайдіть $g'(x_1)$ і $g'(x_2)$.

35.19. Знайдіть точки, у яких дотична до графіка функції $f(x) = x^3$ паралельна прямій $y = 12x - 17$.

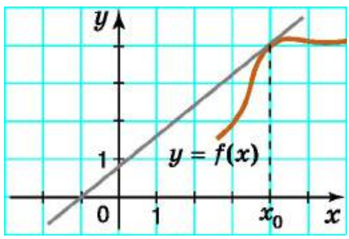
35.20. Знайдіть точки, у яких дотична до графіка функції $f(x) = \frac{1}{x}$ паралельна прямій $y = -\frac{1}{9}x + 8$.

35.21. Одна з матеріальних точок рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2$, а інша – за законом $x(t) = t^3$ (t вимірюється в секундах, x – у метрах). У який момент часу t ($t > 0$) їхні швидкості будуть однаковими?

35.22. На малюнку 35.6 до графіка функції $y = f(x)$ проведено дотичну в точці з абсцисою x_0. Знайдіть $f'(x_0)$.



Мал. 35.6



Мал. 35.7

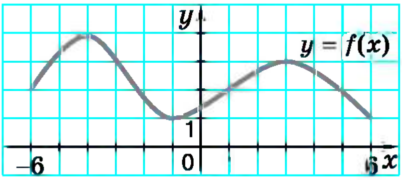
35.23. На малюнку 35.7 до графіка функції $y = f(x)$ проведено дотичну в точці з абсцисою x_0. Знайдіть $f'(x_0)$.

4 **35.24.** На малюнку 35.8 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-6; 6]$.

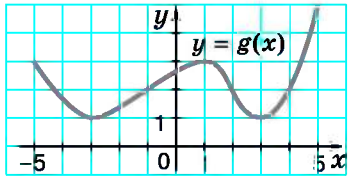
1) Укажіть усі точки, у яких похідна функції $y = f(x)$ дорівнює нулю.

2) Порівняйте $f'(1)$ і $f'(5)$.

35.25. На малюнку 35.9 зображено графік функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-5; 5]$.



Мал. 35.8



Мал. 35.9

1) Укажіть усі точки, у яких похідна функції $y = g(x)$ дорівнює нулю.
2) Порівняйте $g'(2)$ і $g'(0)$.

35.26. До графіка функції $f(x) = \sqrt{x}$ складіть рівняння дотичної, яка паралельна прямій $y = \frac{1}{6}x + 8$.

35.27. До графіка функції $f(x) = x^2$ складіть рівняння дотичної, яка паралельна прямій $y = -2x + 7$.

35.28. Дано функцію $f(x) = \frac{1}{x}$.
1) Складіть рівняння дотичної до графіка функції в точці з абсцисою $x_0 = -1$.
2) Виконайте малюнок.
3) Знайдіть площу трикутника, обмеженого відрізками дотичної і осей координат.

35.29. Дано функцію $f(x) = x^3$.
1) Складіть рівняння дотичної до графіка функції в точці з абсцисою $x_0 = -1$.
2) Виконайте малюнок.
3) Знайдіть площу трикутника, обмеженого відрізками дотичної і осей координат.

35.30. У якій точці перетинаються дотичні до параболи $y = x^2$, проведені в точках з абсцисами $x_0 = -2$ і $x_0 = 1$?

35.31. Ставка податку на доходи фізичних осіб (зарплату) у 2015 році становила 15 %, якщо зарплата до 12 180 грн, плюс 20 % від суми, що перевищує 12 180 грн. Із 2016 року ця ставка становить 18 % без обмежень. Директорка підприємства у 2015 році отримувала зарплату 13 000 грн на місяць, а в 2016 році – 15 000 грн на місяць; старший менеджер у 2015 році отримував зарплату 9000 грн на місяць, а в 2016 році – 10 000 грн на місяць. На яку суму змінився щомісячний податок кожного з них порівняно з 2015 роком?

35.32. (*Національна олімпіада Австрії, 1971 р.*). Доведіть, що для будь-яких додатних чисел a, b і c справджується нерівність:

$$a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \leqslant 3abc.$$

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

35.33. Подайте вираз у вигляді степеня з основою x:

1) $\frac{1}{x^3}$; 2) $\frac{1}{x^9}$; 3) $\frac{1}{x^2}$; 4) $\frac{1}{x^{2018}}$.

35.34. Дано $f(x) = \sin x - \cos x$. Знайдіть:

1) $f(0)$; 2) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$; 3) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

§ 36. ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ. ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ

У цьому параграфі розглянемо основні правила диференціювання та похідні степеневих і тригонометричних функцій. Для спрощення записів замість $u(x)$; $u'(x)$; $v(x)$; $v'(x)$ тощо писатимемо u; u'; v; v' тощо.

1. Основні правила диференціювання

Нехай функції u і v диференційовні в точці x. Тоді їх сума і різниця також диференційовні в точці x.

Правило 1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
(похідна суми (різниці) дорівнює сумі (різниці) похідних).

Доведення. Нехай $f = u + v$. Тоді:

1) $\Delta f = \Delta(u + v) = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - (u(x) + v(x)) = (u(x + \Delta x) - u(x)) + (v(x + \Delta x) - v(x)) = \Delta u + \Delta v$.

2) $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$.

3) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'$.

Аналогічно можна довести, що $(u - v)' = u' - v'$.
Отже, $(u \pm v)' = u' \pm v'$. ■

Наслідок. Похідна суми трьох і більше доданків дорівнює сумі похідних:

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + u_3' + \ldots + u_n'.$$

Приклад 1. 1) $(x^3 + 5)' = (x^3)' + 5' = 3x^2 + 0 = 3x^2$.

2) $(x^2 - \sqrt{x})' = (x^2)' - \left(\sqrt{x}\right)' = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Розглянемо правило диференціювання добутку.

Правило 2. $(uv)' = u'v + v'u$.

Приймемо цей факт без доведення.

Наслідок. $(Cu)' = Cu'$, де C — стала (сталий множник можна виносити за знак похідної).

Доведення. $(Cu)' = C'u + u'C = 0 \cdot u + C \cdot u' = Cu'$. ■

Приклад 2. $(5x^3)' = 5 \cdot (x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$.

$$(\sqrt{x} \cdot x^2)' = (\sqrt{x})'x^2 + (x^2)'\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^2 + 2x\sqrt{x} = \frac{x^2 + 4x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}}.$$

Приклад 3. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 + 4x + 7$, яка проходить через точку $A(-1; 0)$.

Розв'язання. Оскільки $f(-1) = 4 \neq 0$, то точка A не належить графіку даної функції. Нехай $(x_0; f(x_0))$ — точка дотику, тоді $f(x_0) = x_0^2 + 4x_0 + 7$. Оскільки $f'(x) = 2x + 4$, то $f'(x_0) = 2x_0 + 4$.

У рівняння дотичної $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ підставимо отримані для $f(x_0)$ та $f'(x_0)$ вирази:

$$y = x_0^2 + 4x_0 + 7 + (2x_0 + 4)(x - x_0).$$

Оскільки точка $A(-1; 0)$ належить дотичній, то її координати задовольняють рівняння дотичної, маємо:

$$0 = x_0^2 + 4x_0 + 7 + (2x_0 + 4)(-1 - x_0),$$

або після спрощень: $x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0$. Звідси $x_0 = 1$ або $x_0 = -3$. Отже, таких дотичних буде дві.

1) Якщо $x_0 = 1$, маємо рівняння дотичної:
$y = 1^2 + 4 \cdot 1 + 7 + (2 \cdot 1 + 4)(x - 1)$, тобто $y = 6x + 6$.

2) Якщо $x_0 = -3$, маємо рівняння дотичної:
$y = 9 - 12 + 7 + (2 \cdot (-3) + 4)(x + 3)$, тобто $y = -2x - 2$.

Відповідь. $y = 6x + 6$; $y = -2x - 2$.

Розглянемо правило диференціювання частки.

Правило 3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$.

Доведення. Можна довести в той самий спосіб, яким довели правило 1, але використаємо інший спосіб.

Нехай $f = \frac{u}{v}$, звідки $u = fv$, тому $u' = f'v + v'f$.

Тоді $f'v = u' - v'f$, тобто

$$f' = \frac{u' - v'f}{v} = \frac{u' - v' \cdot \frac{u}{v}}{v} = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \blacksquare$$

Приклад 4. $$\left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^3)'(x^2+1)-(x^2+1)'x^3}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{3x^2(x^2+1)-2x\cdot x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}.$$

2. Похідна степеневої функції

Ми знаємо, що $x' = 1 = 1 \cdot x^0$; $(x^2)' = 2x = 2x^1$; $(x^3)' = 3x^2$.

За формулою похідної добутку:

$(x^4)' = (x^3x)' = (x^3)'x + x'x^3 = 3x^2x + 1 \cdot x^3 = 3x^3 + x^3 = 4x^3$.

Аналогічно:

$(x^5)' = (x^4x)' = (x^4)'x + x'x^4 = 4x^3x + 1 \cdot x^4 = 4x^4 + x^4 = 5x^4$.

Можна помітити таку закономірність *для натурального n:*

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Приймемо цей факт без доведення.

Нехай тепер $f(x) = x^n$, де n – ціле від'ємне число. Тоді $(-n)$ – число натуральне. Маємо:

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = \frac{1'\cdot x^{-n}-(x^{-n})'\cdot 1}{(x^{-n})^2} = \frac{0\cdot x^{-n}+nx^{-n-1}}{x^{-2n}} =$$
$$= n\cdot x^{-n-1-(-2n)} = nx^{n-1}.$$

Отже, у цьому випадку також $(x^n)' = nx^{n-1}$. Маємо:

! **для будь-якого цілого n і будь-якого x ($x \neq 0$ при $n \leqslant 1$):**

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Похідну степеневої функції з дробовим показником знаходять за цією самою формулою (детально про це в 11 класі).

Приклад 5. $(5x^{13} - 2x^3 + 5)' = (5x^{13})' - (2x^3)' + 5' = 5 \cdot (x^{13})' - 2 \cdot (x^3)' + 0 = 5 \cdot 13x^{12} - 2 \cdot 3x^2 = 65x^{12} - 6x^2$.

Приклад 6. Знайти похідну функції $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ у точці $x_0 = -1$.

Розв'язання. Оскільки $\dfrac{2}{x^3} = 2x^{-3}$, то $f'(x) = (2x^{-3})' = 2(-3)x^{-3-1} = -6x^{-4} = -\dfrac{6}{x^4}$. Тоді $f'(-1) = -\dfrac{6}{(-1)^4} = -6$.

Відповідь. –6.

3. Похідні тригонометричних функцій

Щоб довести формули для похідних синуса і косинуса, розглянемо $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$. Складемо таблицю значень функції $f(\alpha) = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ для точок, близьких до точки 0 з точністю 10^{-7} (при цьому можна використати калькулятор або комп'ютер).

α	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$0{,}001$	$0{,}01$
$\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$	0,9999833	0,9999998	0,9999998	0,9999833

Аналізуючи значення в таблиці, маємо:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Теорема 1 (похідна синуса). **Для $x \in R$**

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Доведення. Нехай $f(x) = \sin x$. Тоді:

1) $\Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\dfrac{x+\Delta x - x}{2}\cos\dfrac{x+\Delta x + x}{2} =$

$= 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right).$

2) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$

3) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right).$

Якщо $\Delta x \to 0$, то й $\dfrac{\Delta x}{2}\to 0$, а тому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}=1$, а

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.$

Отже, $(\sin x)' = \cos x$.

Теорема 2 (похідна косинуса). **Для кожного $x \in R$**

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Доведення аналогічне доведенню теореми 1.

Теорема 3 (похідна тангенса). Для кожного x з області визначення функції тангенса

$$(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Доведення. Ураховуючи, що $\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$, за формулою похідної частки маємо:

$$(\mathrm{tg}\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отже, $(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. ■

Теорема 4 (похідна котангенса). Для кожного x з області визначення функції котангенса

$$(\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Доведення аналогічне доведенню теореми 3.

Приклад 7. $(2\sin x + 4\mathrm{tg}\,x)' = 2(\sin x)' + 4(\mathrm{tg}\,x)' = 2\cos x + \frac{4}{\cos^2 x}$.

Приклад 8. Для функції $f(x) = 3\cos x - 5\mathrm{ctg}\,x$ знайти $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. $f'(x) = 3(\cos x)' - 5(\mathrm{ctg}\,x)' = -3\sin x + \frac{5}{\sin^2 x}$.

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3\sin\frac{\pi}{2} + \frac{5}{\sin^2\frac{\pi}{2}} = -3\cdot 1 + \frac{5}{1^2} = -3 + 5 = 2.$$

Відповідь. 2.

Приклад 9. Розв'язати рівняння: $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \cos x + x$.

Розв'язання. 1) $f'(x) = (\cos x + x)' = (\cos x)' + x' = -\sin x + 1$.

2) Маємо рівняння: $-\sin x + 1 = 0$;

$$\sin x = 1;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

4. *Таблиця похідних*

Систематизуємо дані, отримані в цьому та попередніх параграфах про похідні функцій, у таблицю, яку прийнято називати *таблицею похідних*.

$C' = 0$; $x' = 1$	$(x^2)' = 2x$
$(x^3)' = 3x^2$	$(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in Z$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

● Чому дорівнює похідна суми, різниці, добутку, частки двох функцій? ● Чому дорівнює похідна функції Cu, де C – деяка стала? ● Чому дорівнює похідна функції $f(x) = x^n$, де n – ціле число? ● Вивчіть таблицю похідних та правила диференціювання.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Знайдіть похідну функції (36.1–36.10):

36.1. 1) $f(x) = x^7$; 2) $g(x) = \sin x$; 3) $t(x) = x^9$; 4) $\varphi(x) = x^{-4}$.

36.2. 1) $f(x) = \cos x$; 2) $p(x) = x^5$;
3) $\psi(x) = x^{-7}$; 4) $t(x) = x^{11}$.

36.3. 1) $m(x) = 5x$; 2) $f(x) = 3x^6$;
3) $\varphi(x) = 2\operatorname{ctg} x$; 4) $\psi(x) = 3x^{-2}$.

36.4. 1) $g(x) = 7x$; 2) $\varphi(x) = 3\operatorname{tg} x$;
3) $f(x) = 5x^2$; 4) $\psi(x) = 5x^{-3}$.

36.5. 1) $\varphi(x) = \cos x - x^8$; 2) $f(x) = x^3 + x^{17}$.

36.6. 1) $g(x) = x^4 + \sin x$; 2) $\varphi(x) = x^{10} - 1$.

2 **36.7.** 1) $f(x) = \dfrac{x^3}{5}$; 2) $g(x) = -\dfrac{x^{10}}{2}$;
3) $t(x) = \dfrac{4}{x^2}$; 4) $p(x) = \dfrac{5}{x^7}$.

36.8. 1) $\varphi(x) = \dfrac{x^4}{2}$; 2) $\psi(x) = -\dfrac{x^9}{3}$; 3) $f(x) = \dfrac{3}{x}$; 4) $t(x) = \dfrac{2}{x^5}$.

36.9. 1) $f(x) = 3x^2 - 7x^3 + 3$; 2) $g(x) = 2\sin x - 4x^5 + \sqrt{x}$.

36.10. 1) $f(x) = 2x^{11} - 3\cos x + 7$; 2) $g(x) = 5x^7 + \dfrac{1}{x} - x$.

Знайдіть похідну функції $g(x)$ у точці x_0 (36.11–36.12):

36.11. 1) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2,\ x_0 = -1$; 2) $g(x) = 3\text{tg}x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

36.12. 1) $g(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2,\ x_0 = 1$; 2) $g(x) = 2\text{ctg}x,\ x_0 = -\frac{\pi}{4}$.

Знайдіть похідну функції (36.13–36.16):

36.13. 1) $f(x) = x^3\sqrt{x}$; 2) $g(x) = x^4\sin x$.

36.14. 1) $g(x) = \sqrt{x} \cdot x^5$; 2) $f(x) = x^2\cos x$.

36.15. 1) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$; 2) $g(x) = \frac{\cos x}{x}$.

36.16. 1) $f(x) = \frac{x+1}{x^3}$; 2) $g(x) = \frac{x}{\sin x}$.

36.17. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \sqrt{x}$ у точках $x_0 = 1$; $x_0 = 9$; $x_0 = 25$.

36.18. Знайдіть значення похідної функції $g(x) = 2x + \sqrt{x}$ у точках $x_0 = 1$; $x_0 = 16$; $x_0 = 100$.

36.19. Знайдіть значення похідної функції $g(x) = \sin x + \cos x$ у точках $x_0 = 0$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

36.20. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = \cos x - \sin x$ у точках $x_0 = \frac{\pi}{2}$; $x_0 = \pi$.

36.21. Знайдіть тангенс кута нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції $f(x) = 3x^2 - 4x$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

36.22. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = 5x - 7x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$.

36.23. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 10t$ (t вимірюється в секундах, x – у метрах). Знайдіть швидкість тіла в момент часу: 1) $t = 2$ с; 2) $t = 6$ с.

36.24. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = 5t - \frac{2}{3}t^3$ (t вимірюється в секундах, x – у метрах). Знайдіть швидкість тіла в момент часу: 1) $t = 1$ с; 2) $t = 3$ с.

Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо (36.25–36.26):

36.25. 1) $f(x) = \cos x$; 2) $f(x) = x^2 - 6x$.

36.26. 1) $f(x) = \sin x$; 2) $f(x) = 8x + x^2$.

36.27. Розв'яжіть нерівність $g'(x) > 0$, якщо $g(x) = 4x + x^2$.

36.28. Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leqslant 0$, якщо $f(x) = x^2 - 10x$.

3 Знайдіть похідну функції (36.29–36.30):

36.29. 1) $f(x) = (3x^2 + 7)(2x - 5)$; 2) $g(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 4x)$.

36.30. 1) $f(x) = (5x^2 - 9)(3x + 4)$; 2) $g(x) = (3x - 5x^2)\sqrt{x}$.

Обчисліть $f'(x_0)$, якщо (36.31–36.32):

36.31. $f(x) = (4\sqrt{x} - 3)(x^2 + 7)$, $x_0 = 1$.

36.32. $f(x) = (2 + 6\sqrt{x})(x^2 - 3)$, $x_0 = 1$.

Знайдіть похідну функції (36.33–36.34):

36.33. 1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 2}$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 7}{x^3}$.

36.34. 1) $g(x) = \dfrac{8x + x^2}{x - 1}$; 2) $g(x) = \dfrac{3 + x^3}{x^4}$.

Знайдіть $g'(x_0)$, якщо (36.35–36.36):

36.35. $g(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 1}$; $x_0 = 0$; 2.

36.36. $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x + 1}$; $x_0 = 0$; -2.

Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$ та нерівність $f'(x) \leqslant 0$, якщо (36.37–36.38):

36.37. 1) $f(x) = 3x^2 + 2x^3 + 7$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 8$.

36.38. 1) $f(x) = 9x^2 - x^3 + 8$; 2) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + 19$.

Розв'яжіть рівняння $g'(x) = 0$, якщо (36.39–36.40):

36.39. 1) $g(x) = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$; 2) $g(x) = \dfrac{1}{x} + 4x - 7$.

36.40. 1) $g(x) = \dfrac{5 + x^2}{2 - x}$; 2) $g(x) = 9x + \dfrac{1}{x} + 3$.

36.41. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 3t^2 - 12t + 7$ (x вимірюється в метрах, t – у секундах).
1) У який момент часу швидкість точки дорівнюватиме 18 м/с?
2) У який момент часу точка зупиниться?

36.42. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = 2t^2 - 16t + 3$ (x вимірюється в метрах, t – у секундах).
1) У який момент часу швидкість тіла дорівнюватиме 12 м/с?
2) У який момент часу тіло зупиниться?

36.43. На графіку функції $f(x) = x^2 - 3x + 7$ знайдіть точку, у якій дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 45°.

36.44. На графіку функції $g(x) = 5x + x^2 - 9$ знайдіть точку, у якій дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 135°.

Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо (36.45–36.46):

36.45. $g(x) = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}x.$ **36.46.** $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x.$

36.47. Дано: $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$. Доведіть, що $f'(x) > 0$ для всіх допустимих значень x.

36.48. Для функції $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 5$ знайдіть абсциси точок її графіка, у яких дотична паралельна осі абсцис.

36.49. Для функції $g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ знайдіть абсциси точок її графіка, у яких дотична паралельна прямій $y = 2x - 7$.

36.50. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $g(x) = x^2 - 4x + 5$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

36.51. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 + 2x - 3$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$.

36.52. Складіть і розв'яжіть рівняння $f'(x) = f'(6)$, якщо $f(x) = \frac{3x - x^2}{4 - x}$.

Дано функції $f(x)$ і $g(x)$. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = g'(x)$, якщо (36.53–36.54):

36.53. $f(x) = 4\cos x$, $g(x) = 2\sqrt{3}x + 9$.

36.54. $f(x) = 2\sin x$, $g(x) = x + 11$.

36.55. Знайдіть похідну функції $t(x) = \frac{2\sin x}{3 - \cos x}$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

36.56. Знайдіть похідну функції $\varphi(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

4 **36.57.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 3x + 7$, яка паралельна прямій $y = 5x - 17$.

36.58. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $g(x) = x^2 + 4x - 6$, яка паралельна прямій $y = 6x - 7$.

36.59. Складіть і розв'яжіть рівняння $\frac{|f(x)|}{f'(x)} = -1$, якщо $f(x) = -x^2 - x - 1$.

36.60. Складіть і розв'яжіть рівняння $\frac{|f(x)|}{f'(x)} = 2$, якщо $f(x) = x^2 + x + 2$.

36.61. На синусоїді $y = \sin x$ узято точки з абсцисами $x_1 = 0$ і $x_2 = \frac{\pi}{2}$. Через ці точки проведено січну. У якій точці з абсцисою x_0, де $x_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, слід провести дотичну, щоб вона була паралельна січній?

36.62. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \mathrm{tg}x - 2x$.

36.63. Розв'яжіть рівняння $g'(x) = 0$, якщо $g(x) = 2x + \mathrm{ctg}x$.

36.64. Розв'яжіть нерівність $g'(x) \geqslant 0$, якщо $g(x) = \cos x + 0{,}5x$.

36.65. Розв'яжіть нерівність $f'(x) < 0$, якщо $f(x) = \sin x - 0{,}5x$.

36.66. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - \sqrt{3}x$, яка утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 60°.

36.67. Знайдіть координати точки перетину двох дотичних до графіка функції $g(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$, якщо одна з них проведена в точці з абсцисою $x = -1$, а друга – в точці з абсцисою $x = 3$.

36.68. Знайдіть координати точки перетину двох дотичних до графіка функції $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$, якщо одна з них проведена в точці з абсцисою $x = -2$, а друга – в точці з абсцисою $x = 4$.

36.69. Знайдіть координати точок перетину з осями координат тих дотичних до графіка функції $y(x) = \frac{2x-3}{x+3}$, кутовий коефіцієнт яких дорівнює 9.

36.70. Знайдіть координати точок перетину з осями координат тих дотичних до графіка функції $y(x) = \frac{2x-2}{x+1}$, кутовий коефіцієнт яких дорівнює 4.

36.71. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку з координатами (1; 3), дотикається до графіка функції $y = 8\sqrt{x} - 7$ і перетинає у двох різних точках графік функції $y = x^2 + 4x - 1$.

36.72. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку з координатами $\left(\frac{1}{4}; 0\right)$, дотикається до графіка функції $y = 3\sqrt{x} - 2{,}5$ і перетинає у двох різних точках графік функції $y = x^2 + 6x$.

36.73. Знайдіть площу трикутника, утвореного віссю ординат і двома дотичними, проведеними з точки $A(2; 0)$ до графіка функції $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 7$.

36.74. Знайдіть площу трикутника, утвореного віссю абсцис і двома дотичними, проведеними з точки $A(0;\ 3)$ до графіка функції $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 5$.

36.75. 1) Якщо протягом дня не вимкнути одну електричну лампочку потужністю 100 Вт, то втрати електроенергії за 10 год становитимуть 1 кВт.

2) Дізнайтеся тариф на електроенергію та обчисліть скільки грошей витратить ваша сім'я даремно, якщо лампочка потужністю 100 Вт, яку забули вимкнути, світитиме протягом 1 доби; 5 діб; місяця, у якому 30 днів.

36.76. Чи існує таке значення змінної x, при якому значення виразу $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1$ є від'ємним числом?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

36.77. Знайдіть: 1) $f(1)$, якщо $f(x) = \sqrt{2x+7}$;

2) $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$, якщо $f(x) = \sin\left(7x - \frac{\pi}{8}\right)$.

36.78. Знайдіть $g'(x)$, якщо:

1) $g(x) = 0{,}4x - 5$; 2) $g(x) = 8x + \frac{\pi}{8}$; 3) $g(x) = \frac{\pi}{4} - 2x$.

§ 37. ПОХІДНА СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ

Ви вже вмієте знаходити похідні функцій, аргументами яких є змінна x, наприклад, $y = x^8$; $y = \sin x$; $y = \operatorname{tg} x$. Як знайти похідні функцій, аргументами яких є інші функції, наприклад $y = (3x - 7)^8$; $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$ тощо, які називають *складеними*, дізнаємося в цьому параграфі.

1. Складена функція

Нехай треба обчислити значення функції $y = f(x) = \sqrt{4x+1}$ у точці $x = 6$. Зазвичай, спочатку обчислюють значення виразу $4x + 1$ для $x = 6$, тобто $4 \cdot 6 + 1 = 25$, а потім з отриманого числа добувають арифметичний квадратний корінь, тобто $\sqrt{25} = 5$. Отже, $f(6) = 5$.

Якщо позначити $u(x) = 4x + 1$, а $g(u) = \sqrt{u}$, то

$$f(x) = g(u(x)).$$

У такому випадку кажуть, що $f(x)$ – *складена функція*, а $u(x)$ – *її внутрішня функція* (або *проміжний аргумент*).

Наприклад, для функції $g(x) = \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$ внутрішньою функцією є $u(x) = \frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}$; а для функції $t(x) = \sin^3 x$ (яку ще можна записати так: $t(x) = (\sin x)^3$) внутрішньою функцією є $u(x) = \sin x$.

2. Похідна складеної функції

Т Теорема 1 (похідна складеної функції). **Якщо функція $u(x)$ має похідну в точці x, а функція $f(u)$ має похідну в точці $u = u(x)$, то складена функція $y = f(u(x))$ має похідну в точці x, причому**

$$y' = f'_u \cdot u'_x.$$

Доведення. Оскільки за умовою функція $u(x)$ має похідну в точці x_0, то вона неперервна в цій точці. Тобто для незначної зміни аргументу в точці x_0 відповідне значення функції $u(x)$ також майже не змінюється, тобто при $\Delta x \to 0$ маємо: $\Delta u \to 0$.

З рівності $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$ отримаємо: $u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \Delta u = u_0 + \Delta u$. Тоді $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = f(u(x_0 + \Delta x)) - f(u(x_0)) = f(u_0 + \Delta x) - f(u_0) = \Delta f$.

Нехай $\Delta u \neq 0$ в деякому околі точки x_0. Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можна записати так:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ матимемо: $\frac{\Delta u}{\Delta x}\to u'(x_0)=u'_x$, а при $\Delta u \to 0$ матимемо: $\frac{\Delta f}{\Delta u} \to f'(u_0) = f'_u$.

Отже, при $\Delta x \to 0$ (й відповідно $\Delta u \to 0$) маємо:

$$y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=f'_u\cdot u'_x. \blacksquare$$

Приклад 1. Знайти похідну функції:

1) $y = \sqrt{4x+11}$; 2) $y = \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$; 3) $y = \frac{1}{(3x-7)^5}$.

Розв'язання.

1) $y' = (\sqrt{4x+11})' = \frac{(4x+11)'}{2\sqrt{4x+11}} = \frac{4}{2\sqrt{4x+11}} = \frac{2}{\sqrt{4x+11}}$.

2) $y' = \left(\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right)' = \left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)' \cdot \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$.

3) $y' = \left(\frac{1}{(3x-7)^5}\right)' = ((3x-7)^{-5})' = (-5)\cdot(3x-7)^{-6}\cdot 3 = -\frac{15}{(3x-7)^6}.$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = (x^2 + 4x)^8$.

Розв'язання. Це складена функція $y = u^8$, де $u = x^2 + 4x$. Тоді $y' = 8u^7 \cdot u' = 8(x^2 + 4x)^7 \cdot (x^2 + 4x)' = 8(x^2 + 4x)^7 \cdot (2x + 4) = 16(x + 2)(x^2 + 4x)^7$.

Можна записувати коротко:

$y' = ((x^2 + 4x)^8)' = 8(x^2 + 4x)^7 \cdot (x^2 + 4x)' = 8(x^2 + 4x)^7 \cdot (2x + 4) = 16(x + 2)(x^2 + 4x)^7$.

Відповідь. $16(x + 2)(x^2 + 4x)^7$.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = (x^5 - 1)^{-4}$.

Розв'язання. Це складена функція $y = u^{-4}$, де $u = x^5 - 1$. Тоді $y' = -4u^{-5} \cdot u' = -4 \cdot (x^5 - 1)^{-5} \cdot (x^5 - 1)' =$

$= -\frac{4}{(x^5-1)^5}\cdot 5x^4 = \frac{20x^4}{(1-x^5)^5}.$

Відповідь. $\frac{20x^4}{(1-x^5)^5}.$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = \sin^2 x$.

Розв'язання. $y = (\sin x)^2$, тобто $y = u^2$, де $u = \sin x$. Отже, $y' = 2u \cdot u' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$.

Відповідь. $\sin 2x$.

Приклад 5. На графіку функції $y(x) = \frac{1}{(0,5x-1)^2}$ знайти точку, у якій дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 45°.

Розв'язання. 1) $y(x) = (0,5x - 1)^{-2}$ – складена функція.

Тоді $y' = -2(0,5x - 1)^{-3} \cdot (0,5x - 1)' = -\frac{2}{(0,5x-1)^3}\cdot 0,5 =$

$= -\frac{1}{(0,5x-1)^3} = \frac{1}{(1-0,5x)^3}.$

2) Нехай x_0 – абсциса шуканої точки, тоді $y'(x_0) = \text{tg}\,45° = 1$, тобто $\frac{1}{(1-0,5x_0)^3} = 1$. Маємо: $(1 - 0,5x_0)^3 = 1$, звідки $x_0 = 0$, тоді $y(x_0) = y(0) = \frac{1}{(0,5\cdot 0-1)^2} = 1$, отже, $(0; 1)$ – шукана точка.

Відповідь. $(0; 1)$.

● Поясніть на прикладах, які функції називають складеними, та назвіть внутрішню функцію для кожного з прикладів. ● Сформулюйте теорему про похідну складеної функції.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **Які з функцій є складеними (37.1–37.2):**

37.1. 1) $y = \sin 2x$; 2) $y = x^9$; 3) $y = \sqrt{4x-7}$; 4) $y = x^3 + x$?

37.2. 1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = (4x-7)^9$; 3) $y = \cos 8x$; 4) $y = x^2 - 1$?

Чи правильно знайдено похідну (37.3–37.4):

37.3. 1) $(\sin x)' = \cos x$; 2) $(\sin 8x)' = \cos 8x$; 3) $(\cos x)' = \sin x$; 4) $(\cos 4x)' = -4\sin 4x$?

37.4. 1) $(\cos x)' = -\sin x$; 2) $(\cos 5x)' = -\sin 5x$; 3) $(\sin x)' = -\cos x$; 4) $(\sin 6x)' = 6\cos 6x$?

2 **Знайдіть похідну функції (37.5–37.8):**

37.5. 1) $f(x) = (x-1)^5$; 2) $g(x) = (2x+1)^6$; 3) $t(x) = \left(\frac{1}{2}x - 5\right)^3$; 4) $\varphi(x) = \sqrt{4x-1}$.

37.6. 1) $g(x) = (x+3)^4$; 2) $\varphi(x) = (3x-2)^7$; 3) $f(x) = \sqrt{2x+5}$; 4) $\psi(x) = \left(\frac{1}{4}x + 10\right)^{10}$.

37.7. 1) $y = \cos 2x$; 2) $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$; 3) $y = \mathrm{tg}\, 8x$; 4) $y = \mathrm{ctg}\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$.

37.8. 1) $y = \sin 4x$; 2) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = \mathrm{ctg}\, 5x$; 4) $y = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{6} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Знайдіть $f'(x_0)$, якщо (37.9–37.10):

37.9. 1) $f(x) = (2x-1)^8$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = 0$.

37.10. 1) $f(x) = (3x+2)^7$, $x_0 = -1$; 2) $f(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = 0$.

37.11. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $g(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^{10}$ у точці з абсцисою $x_0 = 4$.

37.12. Знайдіть тангенс кута нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції $f(x) = \left(\frac{1}{4}x + 5\right)^{3}$ у точці з абсцисою $x_0 = -16$.

3 За формулою похідної складеної функції знайдіть похідну функції **(37.13–37.14)**:

37.13. 1) $y = \sqrt{x^2 + 2}$; 2) $y = (x^3 + 5)^4$;

3) $y = (x^2 - 2x)^{-2}$; 4) $y = \frac{1}{(x^7 - 2)^5}$.

37.14. 1) $y = \sqrt{3 - x^2}$; 2) $y = (x^4 - 2)^3$;

3) $y = (x^2 + x)^{-4}$; 4) $y = \frac{1}{(x^3 + 3)^6}$.

37.15. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = (x^2 - 4x)^6$.

37.16. Розв'яжіть рівняння $g'(x) = 0$, якщо $g(x) = (x^2 + 6x)^7$.

Знайдіть похідну функції **(37.17–37.18)**:

37.17. 1) $y = \sqrt{\cos x}$; 2) $y = \sin^3 x$.

37.18. 1) $y = \sqrt{\sin x}$; 2) $y = \cos^5 x$.

Знайдіть $g'(x_0)$, якщо **(37.19–37.20)**:

37.19. 1) $g(x) = \sin 4x + \cos 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

2) $g(x) = 2\operatorname{tg} x - \sqrt{x^2 + 2x + 1}$, $x_0 = 0$.

37.20. 1) $g(x) = \cos 3x + \sin 6x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

2) $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 4\operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$.

Складіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 **(37.21–37.22)**:

37.21. 1) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$, $x_0 = \pi$.

37.22. 1) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$; 2) $f(x) = \sin\frac{x}{4}$, $x_0 = 0$.

Знайдіть похідну функції, попередньо спростивши її формулу **(37.23–37.24)**:

37.23. 1) $f(x) = 2\sin\frac{x}{6}\cos\frac{x}{6}$; 2) $f(x) = \cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x$.

37.24. 1) $f(x) = \cos^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{x}{4}$;

2) $f(x) = \sin 8x \cos 2x + \cos 8x \sin 2x$.

37.25. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$.

37.26. Розв'яжіть рівняння $g'(x) = 0$, якщо $g(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

4 **37.27.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$ у точці його перетину з віссю ординат.

37.28. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ у точці його перетину з віссю ординат.

Знайдіть кут між віссю абсцис і дотичною до графіка функції $f(x)$ у точці x_0 (37.29–37.30):

37.29. 1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6}$, $x_0 = -\sqrt{3}$; 2) $f(x) = x\sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

37.30. 1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6}$, $x_0 = -3$; 2) $f(x) = x\cos 4x$, $x_0 = 0$.

Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо (37.31–37.32):

37.31. $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$. **37.32.** $f(x) = \frac{1}{4}\cos 2x - \cos x$.

37.33. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{4x - 3}$, якщо її кутовий коефіцієнт $k = 2$.

37.34. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{6x - 11}$, якщо її кутовий коефіцієнт $k = 3$.

37.35. Знайдіть площу трикутника, обмеженого осями координат і дотичною до графіка функції $y(x) = \sqrt{2x^2 - 4}$, проведеною в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

37.36. Обчисліть площу трикутника, обмеженого осями координат і дотичною до графіка функції $y(x) = \sqrt{\frac{x^2}{3} + 1}$, проведеною в точці з абсцисою $x_0 = 3$.

Знайдіть похідну функції (37.37–37.38):

37.37. 1) $y = \sqrt{\sin^5 x + x^3}$; 2) $y = \operatorname{ctg}^4(5x - 2)$.

37.38. 1) $y = \sqrt{\cos^2 x - x}$; 2) $y = \operatorname{tg}^3(2x + 1)$.

37.39. *Задача-дослідження.* Відомо, що похідні деяких парних функцій є функціями непарними, наприклад, $(x^2)' = 2x$; $(\cos x)' = -\sin x$; а похідні деяких непарних функцій є функціями парними, наприклад, $(x^3)' = 3x^2$;

$(\sin x)' = \cos x$. Чи можна дійти висновку про те, що: *похідна парної функції є функцією непарною, а похідна непарної функції є функцією парною*?

37.40. Знайдіть координати точки перетину двох дотичних до графіка функції $y(x) = \cos \pi x$, перша з яких проведена в точці з абсцисою $x = \frac{1}{6}$, а друга – у точці з абсцисою $x = \frac{7}{6}$.

37.41. Знайдіть координати точки перетину двох дотичних до графіка функції $y(x) = \sin 3x$, перша з яких проведена в точці з абсцисою $x = \frac{\pi}{18}$, а друга – у точці з абсцисою $x = \frac{5\pi}{18}$.

37.42. Студент Олексій отримав свій перший гонорар за виконаний переклад в розмірі 1000 гривень. Він вирішив на всю суму купити букет троянд для своєї вчительки англійської мови Марини Едуардівни. Яку найбільшу кількість троянд зможе купити студент, якщо утриманий з нього податок на доходи та військовий збір склали відповідно 18 % і 1,5 % від гонорару, одна троянда коштує 50 грн, а букет має містити непарну кількість квітів?

37.43. (*Національна олімпіада Чехословаччини, 1962 р.*). Знайдіть усі цілі значення x, при яких многочлен $2x^2 - x - 36$ набуває значень, що дорівнюють квадратам простих чисел.

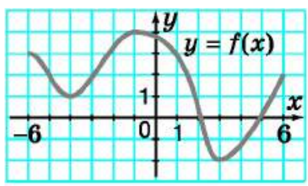
Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

37.44. Функцію $y = f(x)$ задано на проміжку $[-6; 6]$ (мал. 37.1). Укажіть проміжки зростання та проміжки спадання функції $f(x)$.

37.45. Схематично зобразивши графік функції, знайдіть її проміжки зростання і проміжки спадання.

1) $y = 3$; 2) $y = 2x - 3$;

3) $y = x^2$; 4) $y = -\frac{8}{x}$.



Мал. 37.1

§ 38. ОЗНАКИ СТАЛОСТІ, ЗРОСТАННЯ ТА СПАДАННЯ ФУНКЦІЇ

З усіх способів задання функції найбільш наочним є графік. У попередніх класах ви навчилися «читати» графіки, тобто визначати властивості функції за її графіком.

За допомогою похідної можна розв'язувати обернену задачу: будувати графік функції, знаючи її властивості.

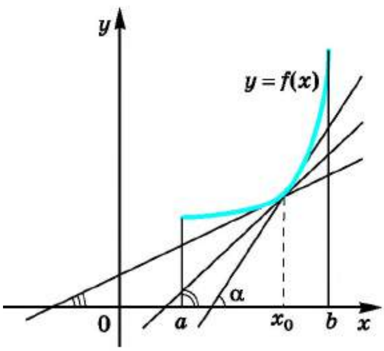
Одне з основних завдань під час дослідження функції і побудови її графіка – це знаходження проміжків зростання, спадання та сталості функції. Таке дослідження можна провести за допомогою похідної.

Нагадаємо, що

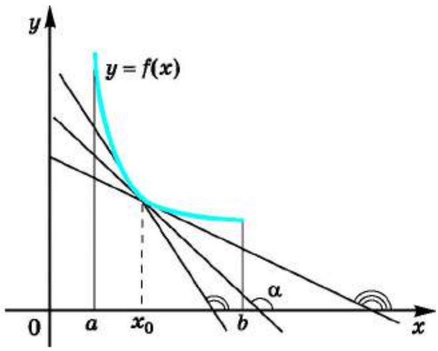
функцію називають *зростаючою* на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає більше значення функції;
функцію називають *спадною* на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає менше значення функції.

Проміжки, на яких функція зростає чи спадає, ще називають *проміжками монотонності*.

На малюнку 38.1 зображено графік зростаючої на проміжку $(a; b)$ функції $y = f(x)$. У якій би точці цього проміжку ми не провели дотичну до графіка функції, кут α, який вона утворюватиме з додатним напрямом осі абсцис, буде гострий. Оскільки α – гострий, то $\operatorname{tg}\alpha > 0$. Але $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, де x_0 – абсциса точки дотику, тому для будь-якої точки $x_0 \in (a; b)$ справджується нерівність $f'(x_0) > 0$.



Мал. 38.1



Мал. 38.2

На малюнку 38.2 зображено графік спадної на проміжку $(a; b)$ функції $y = f(x)$. У кожній точці цього проміжку дотична до графіка функції утворюватиме з додатним напрямом осі абсцис кут α, що є тупим. Оскільки α – тупий, то $\operatorname{tg}\alpha < 0$ і тому $f'(x_0) < 0$ для кожної точки $x_0 \in (a; b)$.

Отже, знаючи, зростає чи спадає функція на певному проміжку, можна визначити знак похідної на цьому проміжку. А можна і навпаки: за знаком похідної функції на проміжку визначити, зростає ця функція, спадає чи є сталою на цьому проміжку.

Теорема 1 (ознака сталості функції). **Функція $y = f(x)$ є сталою на проміжку $(a; b)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x) = 0$ для кожного x із цього проміжку.**

Теорема 2 (ознака зростання, спадання функції). **Якщо $f'(x) > 0$ у кожній точці проміжку $(a; b)$, то функція $y = f(x)$ зростає на $(a; b)$. Якщо $f'(x) < 0$ у кожній точці проміжку $(a; b)$, то функція $y = f(x)$ спадає на $(a; b)$.**

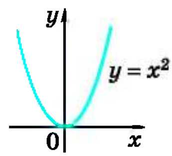
Строгі доведення цих теорем є досить громіздкими, тому ми їх не наводимо. Зауважимо лише, що теорему 1 ще називають необхідною і достатньою умовою сталості функції, а теорему 2 – достатньою умовою зростання або спадання функції.

Приклад 1. Знайти проміжки зростання і спадання функції: 1) $f(x) = x^3 + 2x$; 2) $f(x) = \cos x - 1{,}5x$.

Розв'язання. 1) За теоремою 2, щоб знайти проміжки зростання функції, треба розв'язати нерівність $f'(x) > 0$. Маємо: $f'(x) = 3x^2 + 2$. Оскільки $3x^2 + 2 > 0$ для всіх значень x, то $f'(x) > 0$ для всіх значень x. Отже, функція $f(x) = x^3 + 2x$ зростає на всій області визначення, тобто на R.
2) Маємо: $f'(x) = -\sin x - 1{,}5$. Але $-1 \leqslant -\sin x \leqslant 1$, тому $-\sin x - 1{,}5 < 0$ для всіх значень x, тобто $f'(x) < 0$ для всіх значень x. Отже, функція $f(x) = \cos x - 1{,}5x$ спадає на всій області визначення, тобто на R.

Відповідь. 1) Зростає на R; 2) спадає на R.

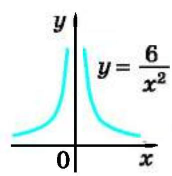
На малюнку 38.3 схематично зображено графік функції $y = x^2$.



Мал. 38.3

Оскільки $y' = 2x$, то $y' > 0$, коли $2x > 0$, тобто при $x > 0$, і $y' < 0$, коли $2x < 0$, тобто при $x < 0$. Отже, на $(-\infty; 0)$ функція спадає, на $(0; +\infty)$ функція зростає, що підтверджується графіком. У точці $x = 0$, що розділяє два проміжки, на одному з яких функція спадає, а на іншому зростає, похідна дорівнює нулю: $y'(0) = 0$.

На малюнку 38.4 схематично зображено графік функції $y = \frac{6}{x^2}$. Оскільки $y' = 6 \cdot (x^{-2})' = 6 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{12}{x^3}$, то $y' > 0$, коли $-\frac{12}{x^3} > 0$, тобто коли $x^3 < 0$, а значить, при $x < 0$, і $y' < 0$, коли $x > 0$. Отже, на $(-\infty; 0)$ функція зростає, на $(0; +\infty)$ спадає, що підтверджується графіком. У точці $x = 0$, що розділяє ці два проміжки, похідна не існує.



Мал. 38.4

Отже, можемо припустити, що два сусідніх проміжки, на одному з яких функція зростає, а на іншому спадає, можуть розділятися точкою, у якій похідна або не існує, або дорівнює нулю. Якщо така точка належить області визначення функції, то її називають *критичною*.

Критичними точками **функції називають внутрішні точки області визначення, для яких похідна функції не існує або дорівнює нулю.**

Для функції $y = x^2$ точка $x = 0$ є критичною, а для $y = \dfrac{6}{x^2}$ – ні, оскільки не належить області визначення. Отже, точки, які не належать області визначення, також можуть ділити графік на проміжки, на одному з яких функція зростає, а на іншому спадає.

Виходячи з наведених міркувань, можна сформулювати алгоритм *дослідження функції $y = f(x)$ на зростання і спадання*:

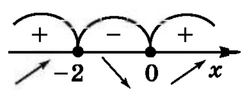
1) Знайти область визначення функції.
2) Знайти похідну функції.
3) Знайти критичні точки функції.
4) Поділити знайденими критичними точками область визначення функції на проміжки та з'ясувати знак похідної на кожному з них (для цього достатньо визначити знак похідної $f'(x)$ в одній довільній точці проміжку).
5) За знаком похідної визначити проміжки зростання і спадання функції.

Зауважимо, що якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці, що є кінцем проміжку зростання чи спадання, то цю точку приєднують до цього проміжку. Таким чином, можна стверджувати, що функція $y = x^2$ зростає на проміжку $[0; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, оскільки в точці $x = 0$ функція $y = x^2$ неперервна. Проміжки зростання і спадання функції $y = \dfrac{6}{x^2}$ залишаються без змін, оскільки в точці $x = 0$ ця функція не є неперервною (має розрив, адже $x = 0$ не належить області визначення функції).

Розглянемо вправи на знаходження проміжків зростання і спадання функції, використовуючи вищенаведений алгоритм. Критичні точки будемо позначати зафарбованими (їх будемо приєднувати до проміжків монотонності), а точки, які не належать області визначення функції, зображатимемо «порожніми» (вони не можуть бути приєднані до проміжків монотонності). Символом ↗ будемо позначати зростання, а символом ↘ – спадання функції на проміжку.

Приклад 2. Знайти проміжки зростання і спадання функції
$$y = 2x^3 + 6x^2 + 3.$$

Розв'язання. 1) $D(y)$: $x \in R$.
2) $y' = 6x^2 + 12x = 6x(x + 2)$.
3) Похідна існує для усіх $x \in R$. Щоб знайти критичні точки, розв'яжемо рівняння $y' = 0$. Маємо: $6x(x + 2) = 0$, звідки $x_1 = 0$; $x_2 = -2$.



Мал. 38.5

4) Позначимо критичні точки на області визначення функції і визначимо знак похідної на кожному з отриманих проміжків (мал. 38.5). На проміжку $(-\infty; -2)$ виберемо, наприклад, точку $x = -3$, маємо: $y'(-3) = 6 \cdot (-3) \cdot (-1) > 0$. На проміжку $(-2; 0)$ виберемо, наприклад, $x = -1$, тоді

$y'(-1) = 6 \cdot (-1) \cdot 1 < 0$. На проміжку $(0; +\infty)$ виберемо точку $x = 2$. Маємо: $y'(2) = 6 \cdot 2 \cdot 4 > 0$.
5) Отже, функція зростає на проміжках $(-\infty; -2]$ та $[0; +\infty)$ і спадає на проміжку $[-2; 0]$.

Відповідь. Зростає на проміжках $(-\infty; -2]$ і $[0; +\infty)$; спадає на проміжку $[-2; 0]$.

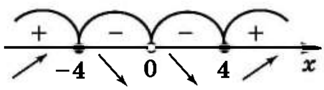
Приклад 3. Знайти проміжки монотонності функції

$$f(x) = x + \frac{16}{x}.$$

Розв'язання. 1) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) $f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{x^2} = \frac{(x-4)(x+4)}{x^2}$.

3) $f'(x) = 0$, тобто $\frac{(x-4)(x+4)}{x^2} = 0$, тоді $x_1 = 4$, $x_2 = -4$ – критичні точки.
4) Позначимо ці точки на області визначення функції та з'ясуємо знак похідної $f'(x)$ (мал. 38.6) на кожному з проміжків (зробіть це самостійно).



Мал. 38.6

5) Функція зростає на проміжках $(-\infty; -4]$ і $[4; +\infty)$, спадає на проміжках $[-4; 0)$ і $(0; 4]$.

Відповідь. $(-\infty; -4]$ і $[4; +\infty)$ – проміжки зростання; $[-4; 0)$ і $(0; 4]$ – проміжки спадання.

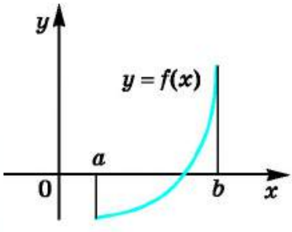
Знаючи проміжки монотонності, можна розв'язувати деякі задачі, пов'язані зі знаходженням коренів рівняння (їхньої кількості; наближеного значення кореня).

Приклад 4. Довести, що рівняння $x^5 + 2x^3 + x = 0$ має тільки один корінь.

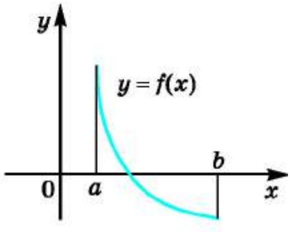
Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = x^5 + 2x^3 + x$ і знайдемо її похідну: $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$. Очевидно, що $f'(x) > 0$ для всіх x, тобто $f(x)$ зростає на R.
Тоді графік функції $f(x) = x^5 + 2x^3 + x$ може перетинати вісь абсцис не більше ніж в одній точці, відповідно і рівняння матиме не більше одного кореня. Легко помітити, що $x = 0$ – корінь рівняння, адже $0^5 + 2 \cdot 0^3 + 0 = 0$. ■

Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою (спадною) на проміжку $[a; b]$ і на кінцях цього проміжку набуває числових значень різних знаків, це означає, що графік функції $y = f(x)$

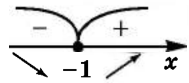
на проміжку $[a; b]$ перетинає вісь абсцис лише в одній точці (мал. 38.7 і мал. 38.8).



Мал. 38.7



Мал. 38.8



Мал. 38.9

Приклад 5. Чи має рівняння $2x^4 + 8x - 3 = 0$ корінь на проміжку $[0; 1]$?

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = 2x^4 + 8x - 3$ та знайдемо її проміжки монотонності. Маємо: $f'(x) = 8x^3 + 8$. Розв'яжемо рівняння: $8x^3 + 8 = 0$, тобто $x^3 = -1$, звідки $x = -1$ – критична точка. Функція $f(x)$ зростає на проміжку $[-1; +\infty)$ (мал. 38.9), а тому зростає і на проміжку $[0; 1]$, що є його підмножиною. На кінцях проміжку $[0; 1]$ значення функції $f(x)$ мають різні знаки: $f(0) = -3$; $f(1) = 7$, отже, графік функції на проміжку $[0; 1]$ перетинає вісь x, і тому на цьому проміжку рівняння має корінь.

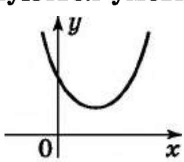
Відповідь. Так.

Приклад 6. Знайти всі значення параметра m, при яких функція $f(x) = mx^3 + 3mx^2 + 6x - 11$ є зростаючою для всіх значень x.

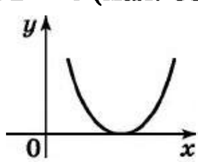
Розв'язання. $D(f) = (-\infty; +\infty)$; $f'(x) = 3mx^2 + 6mx + 6$. Щоб функція $f(x)$ зростала на $(-\infty; +\infty)$, для всіх значень x має справджуватися нерівність $f'(x) > 0$. Проте цього недостатньо. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на $(-\infty; +\infty)$, то множині значень x, на якій функція зростає (спадає), можуть також належати і критичні точки цієї функції. Таким чином, задача зводиться до відшукання таких значень m, при яких нерівність $f'(x) \geqslant 0$ справджується для всіх значень x.

Оскільки $f'(x) = 3mx^2 + 6mx + 6$, спочатку розглянемо випадок, коли $m = 0$. Для $m = 0$ маємо, що $f'(x) = 6 > 0$ для всіх значень x. Отже, $m = 0$ – задовольняє умову задачі, тобто є її розв'язком.

Якщо $m \neq 0$, то $f'(x) = 3mx^2 + 6mx + 6$ – квадратична функція. Для $x \in R$ вона набуває невід'ємних значень, якщо одночасно виконуються умови $m > 0$ і $D \leqslant 0$ (мал. 38.10 і 38.11).



Мал. 38.10



Мал. 38.11

Маємо: $D = (6m)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3m = 36m^2 - 72m = 36(m^2 - 2m)$.

Отже, $\begin{cases} m > 0, \\ m^2 - 2m \leqslant 0; \end{cases}$ звідки отримаємо, що $0 < m \leqslant 2$.

Ураховуючи розв'язок $m = 0$, маємо: $0 \leqslant m \leqslant 2$.

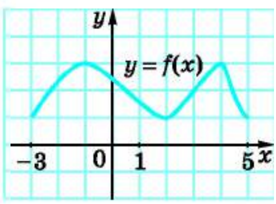
Відповідь. $0 \leqslant m \leqslant 2$.

? Яку функцію називають зростаючою (спадною) на деякому проміжку? Що таке проміжок монотонності? Сформулюйте ознаку зростання, спадання функції. Які точки називають критичними точками функції? Запам'ятайте алгоритм дослідження функції на зростання і спадання.

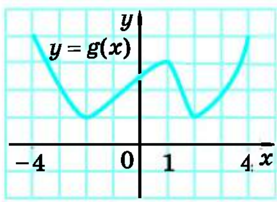
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **38.1.** На малюнку 38.12 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-3; 5]$. На яких проміжках ця функція зростає, а на яких – спадає?

38.2. На малюнку 38.13 зображено графік функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 4]$. На яких проміжках ця функція зростає, а на яких – спадає?



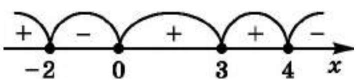
Мал. 38.12



Мал. 38.13

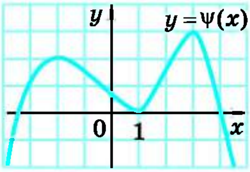
38.3. Функція $y = g(x)$ визначена на проміжку $[0; 8]$, причому $f'(x) < 0$ на проміжку $[0; 5)$ і $f'(x) > 0$ на проміжку $(5; 8]$. Укажіть проміжки зростання і спадання функції на проміжку $[0; 8]$.

38.4. Знак похідної функції $y = f(x)$, визначеної на R, змінюється за схемою, зображеною на малюнку 38.14. Визначте, на яких проміжках функція зростає, а на яких – спадає.

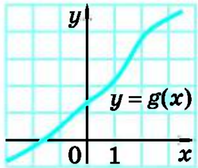


Мал. 38.14

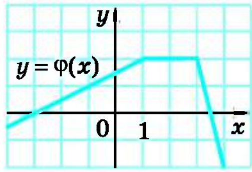
2 **38.5.** На малюнках 38.15–38.17 зображено графіки функцій, визначених на R. Укажіть, на яких проміжках похідна функції додатна, а на яких – від'ємна.



Мал. 38.15



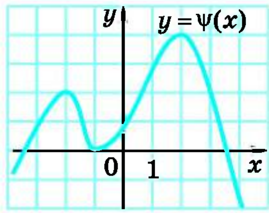
Мал. 38.16



Мал. 38.17

38.6. На малюнку 38.18 зображено графік функції $y = \psi(x)$. Визначте знак похідної функції $y = \psi(x)$ на проміжку:

1) $(-\infty; -2)$; 2) $(-2; -1)$;
3) $(-1; 2)$; 4) $(2; +\infty)$.



Мал. 38.18

Знайдіть критичні точки функції (38.7–38.8):

38.7. 1) $y = x^2 - 2x$; 2) $y = x^3 + 3x^2$.

38.8. 1) $y = 4x - x^2$; 2) $y = 6x^2 + x^3$.

Знайдіть проміжки зростання та проміжки спадання функції (38.9–38.10):

38.9. 1) $f(x) = 5x - 7$; 2) $g(x) = 7 - 9x$;
3) $t(x) = 2x^2 - 4x + 7$; 4) $p(x) = -x^2 + 2x$;
5) $\varphi(x) = x^3 - 9x^2 + 5$; 6) $\psi(x) = 12x - x^3$.

38.10. 1) $m(x) = 4 - x$; 2) $f(x) = 2x - 11$;
3) $g(x) = x^2 + 2x - 11$; 4) $t(x) = 4 - 6x - x^2$;
5) $\varphi(x) = x^3 + 3x^2$; 6) $\psi(x) = x^3 - 3x$.

Доведіть, що функція (38.11–38.12):

38.11. 1) $f(x) = 3x^3 + x - 7$ зростає на R;
2) $g(x) = -x - x^3$ спадає на R.

38.12. 1) $g(x) = x^3 + 2x - 5$ зростає на R;
2) $f(x) = -2x^3 - x$ спадає на R.

3 **Знайдіть критичні точки функції (38.13–38.14):**

38.13. 1) $f(x) = 2\sin x + x$; 2) $g(x) = \dfrac{3 - x^2}{x - 2}$.

38.14. 1) $g(x) = x + 2\cos x$; 2) $f(x) = \dfrac{3 + x^2}{x + 1}$.

Знайдіть проміжки монотонності функції (38.15–38.16):

38.15. 1) $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 5$;
2) $g(x) = x^5 + 3x^3 + x - 17$;
3) $\varphi(x) = -4x - x^7$; 4) $\psi(x) = x + \dfrac{25}{x}$.

38.16. 1) $g(x) = x^3 + x^2 - x + 7$; 2) $f(x) = 2 + 5x^3 + x^7 + x$;
3) $t(x) = -x^5 - 2x$; 4) $p(x) = \dfrac{1}{x} + x$.

Доведіть, що функція (38.17–38.18):

38.17. 1) $f(x) = x^3 - x^2 + 7x - \sqrt{3}$ зростає на R;

2) $g(x) = \sin 4x - 5x$ спадає на R.

38.18. 1) $f(x) = 7x + \cos 2x$ зростає на R;

2) $g(x) = 4 - 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ спадає на R.

Знайдіть критичні точки функції (38.19–38.20):

38.19. 1) $f(x) = (x - 1)^2(x + 3)^2$; 2) $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$.

38.20. 1) $g(x) = (x + 2)^2(x - 4)^2$; 2) $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$.

Знайдіть проміжки зростання і спадання функції (38.21–38.22):

38.21. 1) $f(x) = \frac{3x-5}{2x+7}$; 2) $g(x) = \frac{3x+x^2}{4+x}$;

3) $t(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$; 4) $\varphi(x) = \cos x + \frac{1}{2}x$.

38.22. 1) $p(x) = \frac{1-2x}{3x+1}$; 2) $f(x) = \frac{x^2-3x}{4-x}$;

3) $\varphi(x) = (x-3)\sqrt{x}$; 4) $g(x) = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

4

38.23. При яких значеннях a функція $f(x)$ зростає на R:

1) $f(x) = ax^2 + 3x + 5$; 2) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} + x + 7$?

38.24. При яких значеннях a функція $g(x) = 2x^3 + 3ax^2 + 24x - 8$ зростає на R?

Доведіть, що рівняння має лише один корінь (38.25–38.26):

38.25. 1) $x^7 + 3x^5 + 2x = 0$; 2) $\sin x - x = 0$.

38.26. $x^9 + x + 3 = 0$.

38.27. Чи має рівняння $x^4 + 4x - 2 = 0$ корінь на проміжку:
1) $[-1; 0]$; 2) $[0; 1]$?

38.28. Чи має рівняння $x^6 - 6x + 1 = 0$ корінь на проміжку:
1) $[-1; 0]$; 2) $[0; 1]$?

38.29. *Задача-дослідження.* Відомо, що рівняння $x^8 + 8x - 5 = 0$ має два корені. 1) Знайдіть проміжки, яким належать ці корені. 2) Побудуйте графік функції $y = x^8 + 8x - 5$ за допомогою деякої комп'ютерної програми та перевірте отриманий у пункті 1 результат.

Знайдіть критичні точки функції (38.30–38.31):

38.30. 1) $y(x) = 5x + \sin 2x - 4\sqrt{3}\sin x$;

2) $g(x) = \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\cos 2x - \sin x$.

38.31. 1) $y(x) = 4\sqrt{3}\cos x + 5x - \sin 2x$;

2) $g(x) = \sin x + \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{2}{3}\sin 3x$.

Знайдіть усі критичні точки функції (38.32–38.33):

38.32. $f(x) = \cos x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x\right)$, що належать проміжку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

38.33. $f(x) = \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x\right)$, що належать проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

38.34. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких функція $g(x) = \sin 2x - 8(2a + 1)\cos x - (16a^2 + 16a - 18)x$ є спадною для будь-якого x і при цьому не має критичних точок.

38.35. Знайдіть усі значення параметра b, при кожному з яких функція $g(x) = 8(b + 2)\cos x - \sin 2x + (4b^2 + 16b + 6)x$ є зростаючою для будь-якого x і при цьому не має критичних точок.

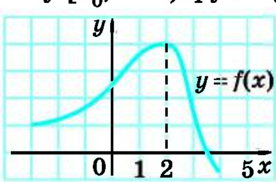
38.36. Заробітна плата оператора кол-центру пропорційна кількості відпрацьованих годин. За місяць було відпрацьовано 170 год і за них нараховано 4590 грн. Скільки годин треба відпрацювати оператору наступного місяця, щоб отримати 4860 грн?

38.37. Доведіть, що для $x > -1$ при всіх натуральних значеннях n справджується *нерівність Бернуллі*: $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$.

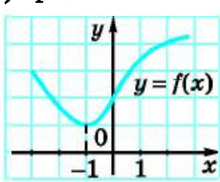
Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

38.38. Використовуючи малюнок 38.19, укажіть таку точку x_0, щоб на проміжку $(-\infty; x_0]$ функція $f(x)$ зростала, а на проміжку $[x_0; +\infty)$ функція $f(x)$ спадала.

38.39. Використовуючи малюнок 38.20, укажіть таку точку x_0, щоб на проміжку $(-\infty; x_0]$ функція $g(x)$ спадала, а на проміжку $[x_0; +\infty)$ функція $g(x)$ зростала.



Мал. 38.19



Мал. 38.20

§ 39. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ

Для дослідження функції та побудови її графіка важливо знати *точки екстремуму* та *екстремуми функції*.

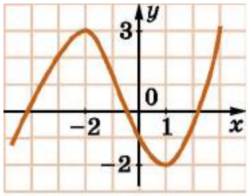
1. Екстремуми функції

Досліджуючи поведінку функції поблизу деякої точки, зручно користуватися поняттям *околу точки*.

! ***Околом точки*** x_0 **називають будь-який проміжок, що містить цю точку.**

Наприклад, околом точки 2 може бути як проміжок (1,9; 2,1), так і проміжок (1,5; 2,5); околом точки –3 – проміжок (–3,8; –2,2).

Розглянемо графік функції $y = f(x)$, зображений на малюнку 39.1. Бачимо, що існує такий окіл точки –2, що для всіх точок із цього околу функція $y = f(x)$ набуває найбільшого значення саме в точці –2. Таку точку називають *точкою максимуму* функції, а значення функції у цій точці – *максимумом функції*.



Мал. 39.1

! **Точку** x_0 **називають *точкою максимуму* функції** $y = f(x)$**, якщо для всіх** x **з деякого околу точки** x_0 **справджується нерівність** $f(x_0) > f(x)$**. Значення функції в точці максимуму називають *максимумом функції*.**

Будемо позначати точки максимуму через x_{max}, а максимуми функції через f_{max} або y_{max}. Отже, у вищезгаданому прикладі: $x_{max} = -2$; $y_{max} = y(-2) = 3$.

Повертаючись до малюнка 39.1, помічаємо, що існує деякий окіл точки 1, що для всіх точок із цього околу функція $y = f(x)$ набуває найменшого значення саме в точці 1. Таку точку називають *точкою мінімуму*, а значення функції в цій точці – *мінімумом функції*.

! **Точку** x_0 **називають *точкою мінімуму* функції** $y = f(x)$**, якщо для всіх** x **з деякого околу точки** x_0 **справджується нерівність** $f(x_0) < f(x)$**. Значення функції в точці мінімуму називають *мінімумом функції*.**

Через x_{min} позначають точки мінімуму, а через f_{min} або y_{min} – мінімуми функції. У нашому прикладі: $x_{min} = 1$, а $y_{min} = y(1) = -2$.

Точки максимуму і мінімуму разом називають *точками екстремуму* (від лат. *extremum* – крайній), а значення функції у цих точках – *екстремумами функції*.

Зауважимо, що оскільки в точці максимуму (мінімуму) функція набуває найбільшого (найменшого) значення порівняно зі значеннями цієї функції в точках деякого околу, то точки максимуму (мінімуму) називають ще *локальними* екстремумами.

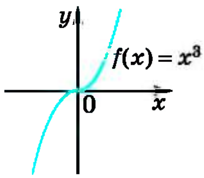
2. Необхідна умова екстремуму

Сформулюємо важливу теорему, яку називають *теоремою Ферма* (на честь французького математика П'єра Ферма), у якій стверджується, що точками екстремуму можуть бути лише критичні точки функції.

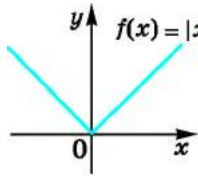
Т Теорема Ферма (необхідна умова екстремуму). **Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна, то вона дорівнює нулю: $f'(x_0) = 0$.**

Приймемо цей факт без доведення і зауважимо, що теорема Ферма є лише необхідною умовою екстремуму. Умова $f'(x_0) = 0$ необов'язково означає, що x_0 – точка екстремуму функції.

Приклад 1. Зокрема, для функції $f(x) = x^3$ (мал. 39.2) $f'(x) = 3x^2$ і $f'(0) = 0$, але $x_0 = 0$ – не є точкою екстремуму.



Мал. 39.2



Мал. 39.3

Приклад 2. Розглянемо функцію $f(x) = |x|$ (мал. 39.3), для якої $x_0 = 0$ – точка мінімуму. З'ясуємо, чи має функція $f(x) = |x|$ похідну в точці x_0. Для цього знайдемо $\frac{\Delta f}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{якщо } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отже, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ не існує, а тому функція $f(x) = |x|$ похідної в точці $x_0 = 0$ не має.

З теореми Ферма та прикладу 2 дійдемо висновку, що

! точками екстремуму функції можуть бути тільки її критичні точки.

Тому, шукаючи точки екстремуму функції, у першу чергу треба знайти її критичні точки. Але пам'ятати, що не кожна критична точка є точкою екстремуму (приклад 1).

3. Достатня умова екстремуму

З'ясувати, чи є критична точка точкою екстремуму, можна за допомогою теореми – *достатньої умови існування екстремуму*.

Теорема (достатня умова екстремуму). **Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 та:**
1) $f'(x) > 0$ на проміжку $(a;\ x_0)$ і $f'(x) < 0$ на проміжку $(x_0;\ b)$, то x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$;
2) $f'(x) < 0$ на проміжку $(a;\ x_0)$ і $f'(x) > 0$ на проміжку $(x_0;\ b)$, то x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.

Доведення. 1) Функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, $f'(x) > 0$ на інтервалі $(a;\ x_0)$, тому функція $f(x)$ зростає на $(a;\ x_0]$ і $f(x) < f(x_0)$ для всіх $x \in (a;\ x_0)$.

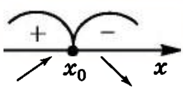
На проміжку $[x_0;\ b)$ функція $f(x)$ спадає (доведення аналогічне), тому $f(x) < f(x_0)$ для всіх $x \in (x_0;\ b)$.

Отже, $f(x) < f(x_0)$ для всіх $x \neq x_0$ з проміжку $(a;\ b)$, тому x_0 – точка максимуму функції $f(x)$.

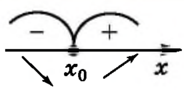
2) Доведення аналогічне до пункту 1).

Коротко цю теорему можна переформулювати так.

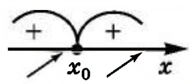
Якщо в точці x_0 похідна змінює знак з «+» на «–» (рухаючись у напрямі зростання x), то x_0 – точка максимуму (мал. 39.4), а якщо з «–» на «+», то точка x_0 – точка мінімуму (мал. 39.5).



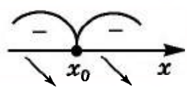
Мал. 39.4



Мал. 39.5



Мал. 39.6



Мал. 39.7

Якщо зміни знаків не відбулося (мал. 39.6 і 39.7), то x_0 не є точкою екстремуму.

Таким чином, можна дійти висновку, що задачі на знаходження проміжків зростання, спадання функції та отриманих екстремумів пов'язані між собою. Тому *для знаходження екстремумів функції $y = f(x)$ можна застосувати такий алгоритм.*

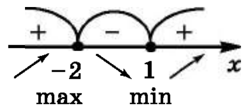
1) Знайти область визначення функції.
2) Знайти похідну функції.
3) Знайти критичні точки функції.
4) Позначити знайдені критичні точки на області визначення та з'ясувати знак похідної на кожному з отриманих проміжків.
5) Для кожної критичної точки за знаком похідної на проміжках зліва і справа від неї визначити, чи є вона точкою екстремуму і якою саме, максимуму чи мінімуму. Записати результат.

4. Задачі на пошук точок екстремуму та екстремумів функції

Розглянемо кілька задач.

Приклад 3. Знайти точки екстремуму функції $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3.$

Розв'язання. Скористаємося вищезгаданим алгоритмом.
1) $D(y) = R$.
2) $y' = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$.
3) $D(y') = R$, $y' = 0$, маємо рівняння: $(x - 1)(x + 2) = 0$, звідки $x_1 = 1$; $x_2 = -2$ – критичні точки.
4) Позначимо критичні точки на числовій осі і визначимо знак похідної на кожному з отриманих проміжків (мал. 39.8):
$y' > 0$ на $(-\infty; -2)$;
$y' < 0$ на $(-2; 1)$;
$y' > 0$ на $(1; +\infty)$.
5) Отже, $x_{max} = -2$; $x_{min} = 1$.



Мал. 39.8

Відповідь. $x_{max} = -2$; $x_{min} = 1$.

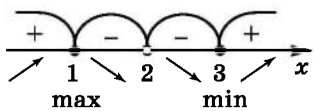
Приклад 4. Знайти точки екстремуму та екстремуми функції $y = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$.

Розв'язання. 1) $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

2) $y' = \dfrac{2x(x-2) - 1(x^2 - 3)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.

3) $y' = 0$, тобто $\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} = 0$; звідки $x_1 = 1$; $x_2 = 3$ – критичні точки.

4) Позначимо критичні точки на області визначення функції та з'ясуємо знак похідної на кожному з отриманих проміжків (мал. 39.9).
5) Отже, $x_{max} = 1$, $x_{min} = 3$ – точки екстремуму.



Мал. 39.9

Тоді $y_{max} = y(1) = \dfrac{1^2 - 3}{1 - 2} = 2$; $y_{min} = y(3) = \dfrac{3^2 - 3}{3 - 1} = 3$.

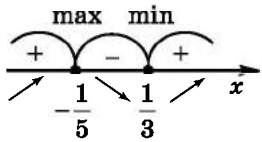
Відповідь. $x_{max} = 1$, $y_{max} = y(1) = 2$; $x_{min} = 3$, $y_{min} = y(3) = 3$.

Приклад 5. Знайти точки екстремуму функції
$$f(x) = 5x^3 - x|x + 1|.$$

Розв'язання. 1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
Далі розглянемо функцію окремо для $x < -1$ і для $x \geqslant -1$.
а) Якщо $x < -1$, то $|x + 1| = -(x + 1)$, тоді $f(x) = 5x^3 + x^2 + x$.
2) $f'(x) = 15x^2 + 2x + 1$.
3) Рівняння $f'(x) = 0$ розв'язків не має. Для всіх x таких, що $x < -1$, маємо: $f'(x) > 0$.
б) Якщо $x \geqslant -1$, то $|x + 1| = x + 1$, тоді $f(x) = 5x^3 - x^2 - x$.
2) $f'(x) = 15x^2 - 2x - 1$.

3) Рівняння $f'(x) = 0$ має корені $x_1 = -\frac{1}{5}$; $x_2 = \frac{1}{3}$. Обидва корені задовольняють умову $x \geqslant -1$. Отже, $x_1 = -\frac{1}{5}$; $x_2 = \frac{1}{3}$ – критичні точки.

4) Знаки похідної зображено на малюнку 39.10.



Мал. 39.10

5) Маємо: $x_{max} = -\frac{1}{5}$; $x_{min} = \frac{1}{3}$.

Відповідь. $x_{max} = -\frac{1}{5}$; $x_{min} = \frac{1}{3}$.

Приклад 6. Знайти точки максимуму функції

$$f(x) = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x + \frac{9+x}{2}.$$

Розв'язання. 1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

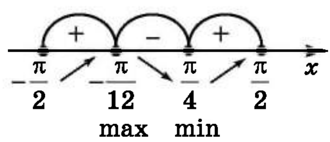
2) $f'(x) = -\frac{1}{4} \cdot 2\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2 \cdot \cos 2x + \frac{1}{2} =$

$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) = \frac{1}{2} - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$

Похідна існує в усіх точках області визначення функції.

3) Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$. Маємо: $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, звідки $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$ або $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z$ – критичні точки.

4) Функція $f'(x)$ є періодичною з періодом $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Дослідимо знак похідної на деякому проміжку завдовжки π, наприклад на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Цьому проміжку належать дві з критичних точок: $x = -\frac{\pi}{12}$ і $x = \frac{\pi}{4}$. Знаки похідної на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ зображено на малюнку 39.11. Враховуючи періодичність функції, матимемо, що $x_{max} = -\frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z$.



Мал. 39.11

Відповідь. $-\frac{\pi}{12} + \pi k,\ k \in Z$.

А ще раніше...

Латинською терміни «maximum» і «minimum» означають відповідно «найбільше» і «найменше» значення.

Задачею знаходження максимумів і мінімумів функції вчені почали займатися в середньовіччі. У 1615 році Кеплер висловив ідею про те, що поблизу максимуму величини зміна її є непомітною, передбачивши таким чином ідею прирівнювання похідної до нуля під час знаходження максимуму функції.

Уперше системний підхід до знаходження екстремумів виклав П. Ферма у своїй праці «Метод дослідження максимумів і мінімумів» (праця вийшла друком частково у 1642–1644 рр., а повністю – у 1779 р. після смерті автора). Листи ж Ферма кажуть про те, що цим методом він володів уже в 1629 р.

У подальшому цей метод вдосконалили Ньютон у праці «Метод флюксій» (1671 р.) і Лейбніц у своєму «Новому методі» (1684 р.).

● Що називають околом точки x_0? ● Яку точку називають точкою максимуму функції, а яку – точкою мінімуму? ● Що називають максимумом функції, а що – мінімумом? ● Які точки називають точками екстремуму, а що – екстремумом функції? ● Сформулюйте теорему Ферма (необхідну умову екстремуму). ● Сформулюйте і доведіть достатню умову екстремуму. ● Яким формулюванням цієї теореми зручно користуватися? ● Сформулюйте алгоритм дослідження функції на екстремум.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

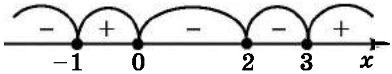
39.1. На малюнку 38.13 зображено графік функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 4]$. Знайдіть точки екстремуму та екстремуми цієї функції.

39.2. На малюнку 38.12 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-3; 5]$. Знайдіть точки екстремуму та екстремуми цієї функції.

39.3. (*Усно*). Функція $y = f(x)$ неперервна в точці $x_0 = 2$, причому $f'(x) < 0$ на проміжку $(1; 2)$ і $f'(x) > 0$ на проміжку $(2; 3)$. Чи є точка $x_0 = 2$ точкою мінімуму або максимуму?

39.4. (*Усно*). Функція $y = t(x)$ неперервна в точці $x_0 = -1$, причому $t'(x) > 0$ на проміжку $(-2; -1)$ і $t'(x) < 0$ на проміжку $(-1; 0)$. Чи є точка $x_0 = -1$ точкою мінімуму або максимуму?

39.5. Знак похідної функції $y = g(x)$, визначеної на R, змінюється за схемою, зображеною на малюнку 39.12. Визначте точки мінімуму і максимуму цієї функції.



Мал. 39.12

2 **39.6.** Зобразіть схематично графіки функцій і впевніться в тому, що вони не мають точок екстремуму:

1) $y=\frac{6}{x}$; 2) $y = 4$; 3) $y = \operatorname{tg} x$; 4) $y = \operatorname{ctg} x$.

Знайдіть точки екстремуму функції $y = f(x)$. Які з них є точками максимуму, а які – точками мінімуму (39.7–39.8)?

39.7. 1) $f(x) = 2x - 7$; 2) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$;
3) $f(x) = 6 - 12x - x^2$; 4) $f(x) = 3x^2 - x^3$.

39.8. 1) $f(x) = 4 - 2x$; 2) $f(x) = x^2 + 6x - 8$;
3) $f(x) = 3 + 8x - 2x^2$; 4) $f(x) = x^3 - 6x^2$.

Знайдіть точки екстремуму та екстремуми функції (39.9–39.10):

39.9. 1) $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 3$; 2) $y = 1 + 18x + 15x^2 - 4x^3$;
3) $y = x - 3x^3$; 4) $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2$.

39.10. 1) $y = 2x^3 + 6x^2 - 18x$; 2) $y = 2 + 12x + 9x^2 - 10x^3$;
3) $y = x^3 - 3x$; 4) $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

3 Знайдіть точки максимуму і точки мінімуму функції (39.11–39.12):

39.11. 1) $f(x)=\frac{3x+1}{x-1}$; 2) $g(x)=\frac{x}{9}+\frac{9}{x}$;
3) $t(x)=\frac{2x}{x^2+1}$; 4) $\varphi(x)=4\sqrt{x}-x$.

39.12. 1) $f(x)=\frac{2x}{x+2}$; 2) $\varphi(x)=\frac{x}{9}+\frac{4}{x}$;
3) $\psi(x)=\frac{x}{x^2+4}$; 4) $p(x)=x-2\sqrt{x}$.

Знайдіть точки екстремуму та екстремуми функції (39.13–39.14):

39.13. 1) $f(x) = x^2(x - 4)^2$; 2) $g(x)=-\frac{1}{x^2-4x+5}$;
3) $t(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}$; 4) $\psi(x)=\frac{x+2}{x^2-9}$.

39.14. 1) $\varphi(x) = x^2(x + 2)^2$; 2) $g(x)=\frac{1}{x^2+6x+8}$;
3) $\psi(x)=\frac{x^2}{9-x^2}$; 4) $t(x)=\frac{x+1}{x^2-7}$.

4 Знайдіть точки мінімуму функції (39.15–39.16):

39.15. $y(x) = 4x^3 - x|x - 2|$, що задана на проміжку $[0;3]$.

39.16. $y(x) = 3x|x - 3| - x^3$, що задана на проміжку $[0;4]$.

Знайдіть точки екстремуму функції (39.17–39.18):

39.17. $f(x)=\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}x.$ **39.18.** $g(x)=\cos x+\frac{1}{2}x.$

Знайдіть точки екстремуму та екстремуми функції (39.19–39.20):

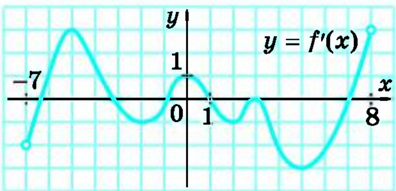
39.19. 1) $f(x) = 15x^3 - x^5$; 2) $g(x) = \sqrt{x^2-2x+5}.$

39.20. 1) $f(x) = 7x^5 - 5x^7$; 2) $p(x) = \sqrt{x^2+4x+5}.$

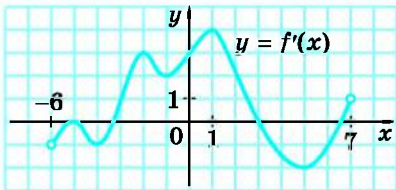
39.21. При яких значеннях a функція $f(x) = 2x^3 + 3ax^2 + 6x - 2$ не має точок екстремуму?

39.22. При яких значеннях b функція $q(x) = -x^3 + 3bx^2 - 3x + 9$ не має точок екстремуму?

39.23. На малюнку 39.13 зображено графік похідної $f'(x)$ функції $f(x)$, визначеної на проміжку $(-7; 8)$. Знайдіть кількість точок екстремуму функції $f(x)$ та вкажіть, скільки серед них точок максимуму і скільки точок мінімуму.



Мал. 39.13



Мал. 39.14

39.24. На малюнку 39.14 зображено графік похідної $f'(x)$ функції $f(x)$, визначеної на проміжку $(-6; 7)$. Знайдіть кількість точок екстремуму функції $f(x)$ та вкажіть, скільки серед них точок мінімуму і скільки точок максимуму.

39.25. Знайдіть точки максимуму функції

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}.$$

39.26. Знайдіть точки мінімуму функції

$$g(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

39.27. Знайдіть усі точки мінімуму функції

$$f(x) = x^2(45\sin 3x - 9\cos 3x) + x(30\cos 3x + 6\sin 3x) + 80\sin 3x - 16\cos 3x.$$

39.28. Знайдіть усі точки максимуму функції

$$f(x) = x^2(6\sin 2x - 8\cos 2x) + x(6\cos 2x + 8\sin 2x) + 3\sin 2x - 4\cos 2x.$$

39.29. Відстань l (у км) від спостерігача, що перебуває на невеликій висоті h м над землею, до лінії горизонту, за якою він спостерігає, обчислюється за формулою $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, де $R = 6400$ км – радіус Землі. На якій найменшій висоті слід розташуватися спостерігачеві, щоб він бачив горизонт на відстані не менше ніж 4 кілометри?

39.30. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 4x\cos xy + 4 = 0$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

39.31. 1) Знайдіть координати вершини параболи $f(x) = x^2 - 2x + 3$, визначте напрям гілок параболи та побудуйте схематично її графік.

2) Знайдіть точку екстремуму функції $f(x) = x^2 - 2x + 3$, екстремум функції, проміжки зростання і спадання функції. Побудуйте графік цієї функції.

3) Порівняйте побудовані у пунктах 1) і 2) графіки функцій.

§ 40. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ПОБУДОВИ ЇХ ГРАФІКІВ

Раніше нам вже траплялися функції, вигляд графіків яких на той час ми не знали. У таких випадках ми будували їх графіки по точках. Так було побудовано, наприклад, графіки функцій $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$; $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, тощо.

Проте, застосовуючи такий спосіб побудови для більш складних функцій, можна втратити важливі особливості графіка функції. Щоб уникнути подібних помилок, треба спочатку дослідити поведінку функції, виявити її особливості і тільки потім будувати графік. До особливостей поведінки функції відносять і її зростання, спадання та екстремуми. Тому для побудови графіка будемо використовувати похідну.

Досліджувати функцію $y = f(x)$ та будувати її графік можна за таким алгоритмом:

1) Знайти область визначення функції.
2) Дослідити функцію на парність, непарність та періодичність (для тригонометричних функцій).
3) Знайти точки перетину графіка функції з осями координат (якщо це можливо).
4) Знайти похідну та критичні точки функції.

5) Знайти проміжки зростання, спадання та екстремуми функції.
6) Дослідити поведінку функції на кінцях проміжків області визначення, якщо це можливо.
7) За потреби знайти ще кілька точок графіка та, використовуючи отримані результати, побудувати графік функції.

Застосовуючи цей алгоритм, слід пам'ятати, що методами, які нам відомі, не завжди вдається розв'язати рівняння $f(x) = 0$, тобто знайти точки перетину графіка з віссю абсцис. Також іноді важко дослідити поведінку функції на кінцях проміжків області визначення чи поблизу точок розриву. У такому разі доцільно знайти кілька точок графіка, абсциси яких є дуже близькими до абсцис згаданих точок.

Результати дослідження по пункту 5 зручно подавати у вигляді таблиці.

Розглянемо приклади дослідження функції та побудови її графіка за вказаним алгоритмом.

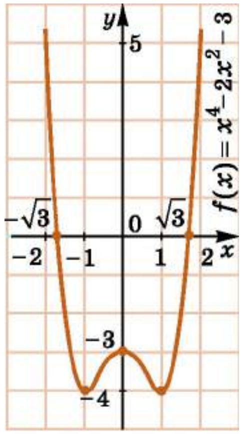
Приклад 1. Дослідити функцію $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ та побудувати її графік.

Р о з в ' я з а н н я. 1) $D(f) = R$.
2) $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 3 = x^4 - 2x^2 - 3 = f(x)$; функція парна, її графік симетричний відносно осі ординат.
3) $f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 - 3 = -3$, тобто $(0; -3)$ – точка перетину з віссю y. Нехай $y = 0$, тоді маємо: $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$, звідки $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, отже, $(\sqrt{3}; 0)$, $(-\sqrt{3}; 0)$ – точки перетину з віссю x.
4) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$; тоді $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$ – критичні точки.
5) Складемо таблицю, у якій зазначимо проміжки зростання, спадання, критичні точки функції та висновки щодо поведінки функції:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$
Висновок	функція спадає	min	функція зростає	max	функція спадає	min	функція зростає

6) Оскільки $D(f) = R$, то область визначення не має кінців.
7) Будуємо графік функції, використовуючи результати дослідження та значення функції ще у двох додаткових точках: $f(-2) = f(2) = 5$.
Графік зображено на малюнку 40.1.

Побудова графіка функції за допомогою похідної значно розширює коло задач, які доцільно розв'язувати графічно (з'ясування кількості коренів рівняння, пошук наближених значень коренів тощо).



Мал. 40.1

Приклад 2. 1) Дослідити функцію $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$ та побудувати її графік.

2) Скільки коренів залежно від значень параметра a має рівняння $\dfrac{x^2-3x}{x+1}=a$?

Розв'язання.
1) $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.
2) Оскільки область визначення функції не симетрична відносно нуля, то функція ні парна, ні непарна.

3) Точка перетину з віссю y: $f(0) = \dfrac{0^2-3\cdot 0}{0+1} = 0$; точки перетину з віссю Ox: $y = 0$; $y = \dfrac{x^2-3x}{x+1} = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 3$.

Отже, (0; 0), (3; 0) – точки перетину з осями координат.

4) $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x+1)-1\cdot(x^2-3x)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$;

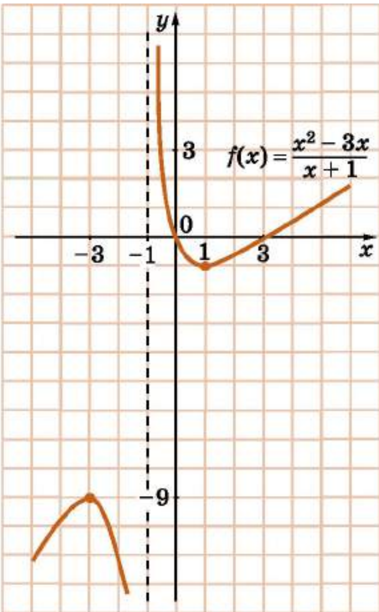
тоді $x_1 = 1$; $x_2 = -3$ – критичні точки.

5) Дослідимо функцію на монотонність та екстремуми:

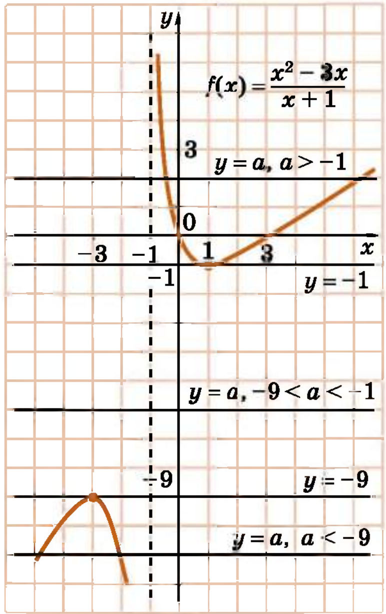
x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	Не існує	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	−9	$\searrow$	Не існує	$\searrow$	−1	$\nearrow$
Висновок	зростає	max	спадає	точка розриву	спадає	min	зростає

6) Точка $x = -1$ не належить області визначення функції. Дослідимо поведінку функції в околі точки -1.
Нехай спочатку $x \to -1$, але $x < -1$ (кажуть: зліва від -1). Тоді $x + 1 \to 0$ і $x + 1 < 0$. Зауважимо, що $x^2 - 3x \to 4$ при $x \to -1$. Що ближче x до числа -1, то більшим за модулем стає значення дробу $\dfrac{x^2-3x}{x+1}$ і є від'ємним. Можна сказати,

що при $x \to -1$, за умови, що $x < -1$, значення функції прямує до $-\infty$.
Аналогічно досліджуємо у випадку $x \to -1$, де $x > -1$: значення функції прямує до $+\infty$.
Проведемо (пунктиром) пряму $x = -1$, тоді зліва від прямої $x = -1$ графік буде прямувати вниз, а справа від прямої $x = -1$ буде прямувати вгору.
Пряму $x = -1$ у такому випадку називають *асимптотою* (докладніше про асимптоти йтиметься у § 43).
Графік функції зображено на малюнку 40.2.



Мал. 40.2



Мал. 40.3

Тепер з'ясуємо, скільки коренів має рівняння $\frac{x^2-3x}{x+1} = a$ залежно від значень a, графічно. Розглянемо графіки функцій $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$ та $y = a$, де a – число (мал. 40.3) та знайдемо кількість точок їх перетину, це й буде кількість коренів рівняння. Для різних значень a їх кількість буде різною.
За малюнком 40.3 маємо, що коли $a < -9$, то графіки перетинаються у двох точках, а тому рівняння має два корені. Якщо $a = -9$, то графіки перетинаються в одній точці, а тому рівняння має один корінь. Якщо $-9 < a < -1$ графіки не перетинаються, а тому рівняння не має коренів. При $a = -1$ графіки перетинаються в одній точці, тому рівняння

має один корінь; а якщо $a > -1$, то графіки перетинаються у двох точках і рівняння має два корені.

Відповідь. Якщо $a < -9$ або $a > -1$, то рівняння має два корені; якщо $a = -9$ або $a = -1$, то рівняння має один корінь; якщо $-9 < a < -1$, то рівняння не має коренів.

Приклад 3. Знайти множину значень функції $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$ та з'ясувати, при яких значеннях параметра a рівняння $(x-3)\sqrt{x} = a^2 + a - 2$ має корені?

Розв'язання. Розв'яжемо задачу графічно, тобто знайдемо множину значень функції за її графіком. Для цього дослідимо поведінку функції.

1) $D(f) = [0; +\infty)$.

2) Функція ні парна, ні непарна, бо її область визначення не симетрична відносно нуля.

3) Точка перетину з віссю Oy: $x = 0$; $y = f(0) = 0$; точки перетину з віссю Ox: $f(x) = 0$, тобто $(x-3)\sqrt{x} = 0$; звідки $x_1 = 3$; $x_2 = 0$. Отже, (0; 0), (3; 0) – точки перетину з осями координат.

4) $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x} + (x-3) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2x + x - 3}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$.

Тоді $x = 1$ – критична точка.

5)

x	0	(0; 1)	1	(1; $+\infty$)
$f'(x)$	Не існує	–	0	+
$f(x)$	0	$\searrow$	–2	$\nearrow$
Висновок	не є критичною точкою	функція спадає	min	функція зростає

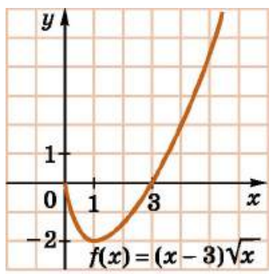
6) Точка (0; 0) належить графіку функції.

Графік зображено на малюнку 40.4.

За графіком легко встановити, що $y \geqslant -2$ на області визначення функції, тобто множиною значень є проміжок $[-2; +\infty)$.

Щоб рівняння $(x-3)\sqrt{x} = a^2 + a - 2$ мало корені, треба, щоб значення виразу $a^2 + a - 2$ належало множині значень функції $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$, тобто, щоб справджувалася умова $a^2 + a - 2 \geqslant -2$, звідки $a^2 + a \geqslant 0$. Розв'яжемо нерівність відносно a, отримаємо, що $a \leqslant -1$ або $a \geqslant 0$ (розв'яжіть нерівність самостійно).

Відповідь. $[-2; +\infty)$; $a \leqslant -1$ або $a \geqslant 0$.



Мал. 40.4

Сформулюйте алгоритм дослідження функції та побудови її графіка. Поясніть на прикладі 2, як можна використовувати графік функції для дослідження кількості коренів рівняння. Поясніть, як за графіком функції знайти множину її значень.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2 Дослідіть функцію та побудуйте її графік (40.1–40.2):

40.1. 1) $f(x) = x^2 + 3x - 4$; 2) $f(x) = -x^2 + 5x - 4$;

3) $f(x) = -0{,}5x^2 - x + 1{,}5$; 4) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$.

40.2. 1) $f(x) = x^2 - 4x$; 2) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$;

3) $f(x) = -0{,}5x^2 - 2x + 2{,}5$; 4) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x$.

40.3. Побудуйте схематично графік функції $g(x)$ та знайдіть множину її значень:

1) $g(x) = 3x - \frac{1}{4}x^2$; 2) $g(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2}$.

40.4. Побудуйте схематично графік функції $\varphi(x)$ та знайдіть множину її значень:

1) $\varphi(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 5x$; 2) $\varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$.

3 Дослідіть функцію та побудуйте її графік (40.5–40.6):

40.5. 1) $f(x) = x^3 - 3x$; 2) $f(x) = 1{,}5x^2 - x^3$;

3) $f(x) = \frac{16}{3}x^3 - 4x^4$; 4) $f(x) = \frac{1}{2}x - x^4$.

40.6. 1) $f(x) = x^3 - 3x^2$; 2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$;

3) $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3$; 4) $f(x) = 2x + 4x^4$.

40.7. 1) Дослідіть функцію $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1{,}5$ та побудуйте її графік.

2) Скільки коренів має рівняння $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1{,}5 = 0$?

40.8. 1) Дослідіть функцію $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - 1$ та побудуйте її графік.

2) Скільки коренів має рівняння $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$?

40.9. 1) Дослідіть функцію $f(x) = \frac{30x - 30}{x^2 + 15}$ та побудуйте її графік.

2) Знайдіть множину значень функції $f(x) = \frac{30x - 30}{x^2 + 15}$.

40.10. 1) Дослідіть функцію $g(x)=\frac{24x-24}{x^2+8}$ та побудуйте схематично її графік.

2) Знайдіть множину значень функції $g(x)=\frac{24x-24}{x^2+8}$.

4 Дослідіть функцію та побудуйте її графік (40.11–40.12):

40.11. 1) $f(x)=\frac{3-2x}{x-5}$; 2) $g(x)=\frac{x^2+3x}{1-x}$.

40.12. 1) $f(x)=\frac{12-3x}{x-2}$; 2) $g(x)=\frac{8x-x^2}{1+x}$.

40.13. Дослідіть функцію $f(x) = 2\sqrt{x}-x$ та побудуйте її графік. Знайдіть множину значень функції $f(x) = 2\sqrt{x}-x$.

40.14. Дослідіть функцію $g(x) = x-4\sqrt{x}$ та побудуйте її графік. Знайдіть множину значень функції $g(x) = x-4\sqrt{x}$.

40.15. 1) Дослідіть функцію $g(x) = -x\sqrt{4-x}$ та побудуйте її графік.

2) При яких значеннях параметра a рівняння $-x\sqrt{4-x} = a$ має лише один корінь?

40.16. 1) Дослідіть функцію $f(x)=x^2\sqrt{x+1}$ та побудуйте її графік.

2) При яких значеннях параметра a рівняння $x^2\sqrt{x+1} = a$ має єдиний розв'язок?

40.17. 1) Дослідіть функцію $f(x) = \frac{7x}{2x^2-3x+2}$ та побудуйте її графік.

2) Скільки коренів має рівняння $\frac{7x}{2x^2-3x+2} = a$ залежно від значень параметра a?

40.18. 1) Знайдіть множину значень функції $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$.

2) Чи має розв'язки рівняння $(x-1)\sqrt{x}=-0,5$?

40.19. 1) Дослідіть функцію $f(x) = x(\sqrt{x}-6)$ та побудуйте її графік.

2) Знайдіть множину значень функції $f(x) = x(\sqrt{x}-6)$.

3) При яких значеннях a рівняння $x(\sqrt{x}-6) = a - 20$ має розв'язки?

40.20. Придбавши товар, ви сплатили 50 грн податку на додану вартість (ПДВ). Знайдіть вартість товару, якщо ПДВ складає 20 % від вартості товару.

40.21. (*Олімпіада Нью-Йорка, 1976 р.*). Знайдіть усі многочлени $P(x)$, для яких тотожністю є рівність $(x-1)P(x+1) - (x+2)P(x) = 0$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

40.22. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^2 - 4x$ на проміжку:
1) $[-2; 1]$; 2) $[-1; 3]$; 3) $[-3; 3]$; 4) $[4; 5]$.

§ 41. НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ПРОМІЖКУ

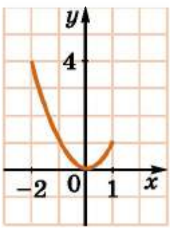
Розв'язування багатьох прикладних задач часто зводиться до знаходження найбільшого і (або) найменшого значення неперервної на деякому проміжку функції. Тому задачу можна розв'язати за допомогою похідної.

1. Найбільше і найменше значення функції

Розглянемо функцію $f(x) = x^2$, яку задано на проміжку $[-2; 1]$. Її графік зображено на малюнку 41.1.

Найбільшим значенням цієї функції на заданому проміжку буде $f(-2) = 4$, а найменшим – $f(0) = 0$. Це записують так:

$$\max_{[-2;\,1]} f(x) = f(-2) = 4; \quad \min_{[-2;\,1]} f(x) = f(0) = 0.$$



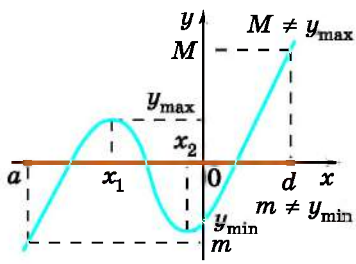
Мал. 41.1

Зауважимо, що на заданому проміжку функція має точку мінімуму: $x_{min} = 0$, але не має точок максимуму.

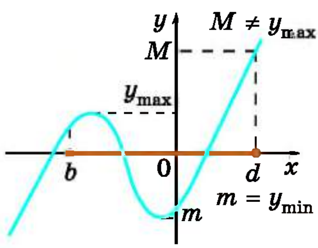
Від найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на проміжку, залежить її множина значень на цьому проміжку. Так, множиною значень функції $f(x) = x^2$, заданої на проміжку $[-2; 1]$, є множина $[0; 4]$.

Тобто якщо m – найменше значення неперервної на проміжку $[a; b]$ функції $y = f(x)$, а M – її найбільше значення, то множиною значень функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$ буде множина $[m; M]$.

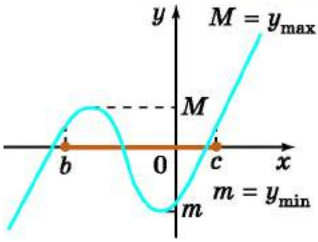
Якщо на проміжку $[a; b]$ функція має екстремуми, це ще не означає, що найбільшого або найменшого значення функція набуває саме в точках екстремуму. Розглянемо функцію $y = f(x)$, визначену на R, графік якої зображено на малюнках 41.2–41.4.



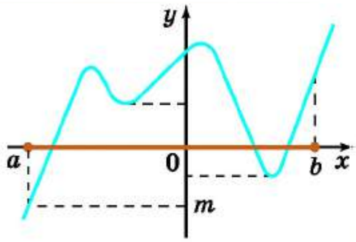
Мал. 41.2



Мал. 41.3



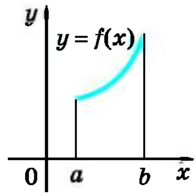
Мал. 41.4



Мал. 41.5

Наприклад, на відрізку [a; d] найменшого і найбільшого значень функція набуває на кінцях проміжка [a; d], хоча має на цьому проміжку точки максимуму і мінімуму (мал. 41.2).

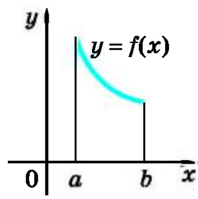
Натомість на проміжку [b; d] найменшого значення функція досягає в точці мінімуму (мал. 41.3), а на проміжку [b; c] – найбільшого значення в точці максимуму (мал. 41.4). Якщо ж розглядатимемо проміжок [b; 0], то найбільшого і найменшого значень функція досягає відповідно в точках максимуму і мінімуму (мал. 41.4). На малюнку 41.5 функція має аж дві точки мінімуму на проміжку [a; b], але в жодній з них не набуває найменшого на цьому проміжку значення.



Мал. 41.6

Можна дійти висновку, що коли функція $y = f(x)$ неперервна і монотонна (тобто або зростає, або спадає) на проміжку [a; b], то найбільшого і найменшого значень ця функція набуватиме саме на його кінцях (мал. 41.6 і 41.7).

Якщо ж функція є неперервною на деякому проміжку і має на ньому лише одну точку екстремуму, то саме в цій точці функція набуватиме найбільшого (якщо ця точка – точка максимуму) або найменшого (якщо ця точка – точка мінімуму) значення на цьому проміжку.



Мал. 41.7

Отже, найбільшого значення на проміжку функція може набувати або в точці максимуму, що належить цьому проміжку, або на його кінцях. Так само найменшого значення на проміжку функція може набувати або в точці мінімуму, що належить цьому проміжку, або на його кінцях. Зрозуміло, що ці значення залежать виключно від заданого проміжку та поведінки функції (її монотонності) на ньому.

Для знаходження найбільшого і найменшого значень функції $f(x)$ на заданому проміжку можна використовувати такий алгоритм:

1) Перевірити, що проміжок належить області визначення функції.
2) Знайти похідну функції.
3) Знайти критичні точки функції.

4) Вибрати ті критичні точки, що належать даному проміжку.
5) Обчислити значення функції у вибраних критичних точках та на кінцях проміжку.
6) Порівняти одержані значення та вибрати з них найбільше і найменше.
7) Записати результат.

2. Знаходження найбільшого і найменшого значення функції на проміжку

Розглянемо, як знайти найбільше і найменше значення функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$ за допомогою згаданого алгоритму.

Приклад 1. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ на проміжку $[0; 3]$.

Розв'язання. 1) $D(f) = R$; $[0; 3] \subset R$.
2) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$.
3) Розв'яжемо рівняння $x^2 - x - 2 = 0$, тоді $x_1 = -1$; $x_2 = 2$ – критичні точки.
4) $-1 \notin [0; 3]$; $2 \in [0; 3]$.
5) $f(2) = -19$; $f(0) = 1$; $f(3) = -8$.
6) Отже, $\max\limits_{[0;\,3]} f(x) = f(0) = 1$; $\min\limits_{[0;\,3]} f(x) = f(2) = -19$.

Відповідь. $\max\limits_{[0;\,3]} f(x) = f(0) = 1$; $\min\limits_{[0;\,3]} f(x) = f(2) = -19$.

Приклад 2. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ на проміжку $[0; \pi]$.

Розв'язання. 1) $D(f) = R$; $[0; \pi] \subset R$.
2) $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x - 4\sin x\cos x =$
$= 2\cos x(1 - 2\sin x)$.
3) Похідна існує в усіх точках $x \in D(f)$. Розв'яжемо рівняння: $2\cos x(1 - 2\sin x) = 0$ (розв'яжіть самостійно).
Маємо розв'язки: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.
4) Для $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, маємо, що $\frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$; а для $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$, маємо, що $\frac{\pi}{6} \in [0; \pi]$ та $\frac{5\pi}{6} \in [0; \pi]$.
5) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1{,}5$; $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1{,}5$; $f(0) = 1$; $f(\pi) = 1$.
6) Отже,
$\max\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1{,}5$, а $\min\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) = 1$.

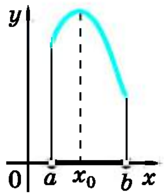
Відповідь. $\max\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1{,}5;$

$$\min\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) = 1.$$

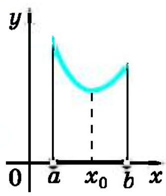
3. Практичний зміст найбільшого або найменшого значення деякої величини

Розв'язуючи прикладні задачі, пов'язані з найбільшим або найменшим значеннями деякої величини, використовують *математичне моделювання* так само, як для розв'язування текстових задач.

Зауважимо, що для розв'язування деяких прикладних задач треба знати найбільше або найменше значення неперервної функції не на проміжку $[a; b]$, а на проміжку $(a; b)$. Як правило, у таких випадках на проміжку $(a; b)$ функція має лише одну критичну точку. Якщо це точка максимуму, то саме в цій точці на проміжку $(a; b)$ функція набуватиме найбільшого значення (мал. 41.8), а якщо це точка мінімуму – то найменшого (мал. 41.9).



Мал. 41.8



Мал. 41.9

Приклад 3. Парканом завдовжки 80 м треба огородити з трьох сторін ділянку прямокутної форми якомога більшої площі. Знайдіть розміри такої ділянки (мал. 41.10).

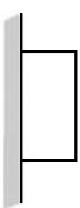
Розв'язання. 1) Позначимо через x (у м) довжину однієї з двох паралельних сторін паркана (мал. 41.11), тоді сусідня сторона буде мати довжину $80 - 2x$, де $0 < x < 40$.

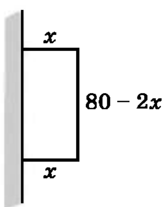
2) Складемо функцію залежності площі ділянки від довжини її сторони x: $S(x) = x(80 - 2x) = 80x - 2x^2$.

Ця функція є математичною моделлю задачі. Тому задача знаходження розмірів ділянки зводиться до знаходження значення x, при якому функція $S(x)$ на проміжку $(0; 40)$ набуватиме найбільшого значення.

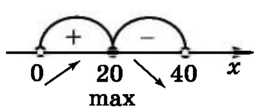
3) Знайдемо найбільше значення функції $S(x)$, за умови $x \in (0; 40)$.

$S'(x) = 80 - 4x = 0$, тоді $x = 20$. Маємо, що $x_{max} = 20$ (мал. 41.12).


Мал. 41.10



Мал. 41.11



Мал. 41.12

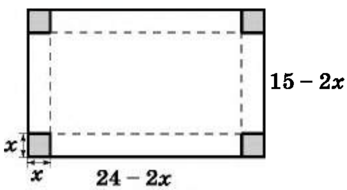
4) Оскільки $S(x) = 80x - 2x^2$ неперервна на (0; 40) і має єдину точку екстремуму – точку максимуму $x_{max} = 20$, то саме в цій точці $S(x)$ набуває найбільшого значення. Отже, розміри ділянки будуть 20 м і $80 - 2 \cdot 20 = 40$ м.

Відповідь. 20 м і 40 м.

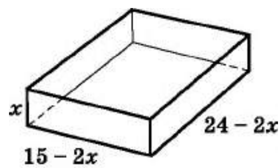
Отже, *розв'язувати прикладні задачі на знаходження найбільшого або найменшого значень деякої величини,* можна за таким алгоритмом:

1) Одну з невідомих величин позначити через x та знайти межі значення x. Інші величини виразити через x.
2) Скласти функцію – математичну модель задачі.
3) Знайти найбільше чи найменше значення отриманої функції на проміжку для значень x.
4) Проаналізувати отриманий результат та записати відповідь до задачі.

Приклад 5. З листа картону прямокутної форми, розміри якого 15×24 см, вирізавши у його кутах квадрати так, як показано на малюнку 41.13, виготовили відкриту коробку найбільшого об'єму. Знайдіть об'єм цієї коробки.

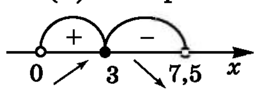


Мал. 41.13



Мал. 41.14

Розв'язання. 1) Позначимо довжину сторони вирізаного квадратика через x (см), тоді кожна зі сторін прямокутника, який буде дном коробки, зменшаться на $2x$ і дорівнюватиме $24 - 2x$ (см) і $15 - 2x$ (см), $0 < x < 7{,}5$.
2) Складемо функцію залежності об'єму коробки від довжини сторони вирізаних квадратів (мал. 41.14):
$V(x) = x(15 - 2x)(24 - 2x)$, тобто $V(x) = 360x - 78x^2 + 4x^3$.
3) Знайдемо найбільше значення функції $V(x)$ на проміжку (0; 7,5).
Маємо: $V'(x) = 360 - 156x + 12x^2$.
$V'(x) = 0$, коли $x_1 = 3$; $x_2 = 10$.
Значення $x_2 = 10$ – не належить проміжку (0; 7,5), маємо: $x_{max} = 3$ (мал. 41.15).



Мал. 41.15

4) Оскільки $V(x) = 360x - 78x^2 + 4x^3$ неперервна на (0; 7,5) і має точку максимуму $x_{max} = 3$, то саме в ній $V(x)$ набуватиме найбільшого значення. Знайдемо його:
$$\max_{(0;\,7,5)} V(x) = V(3) = 3 \cdot 9 \cdot 18 = 486 \text{ (см}^3\text{)}.$$
Відповідь. 486 см³.

4. Знаходження найбільшого або найменшого значення деякої величини на координатній площині

Приклад 6. На графіку функції $y = x^2 + 0,5$ знайти точку, найближчу до точки $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$.

Розв'язання. 1) Нехай $A(x; y)$ – шукана точка, тоді $A(x; x^2 + 0,5)$. За формулою відстані між двома точками на координатній площині запишемо відстань між точками A і M:

$$AM = \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (x^2 + 0,5 - 1)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (x^2 - 0,5)^2}.$$

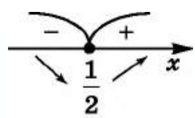
Очевидно, що AM набуватиме найменшого значення тоді, коли найменшого значення набуватиме підкореневий вираз $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (x^2 - 0,5)^2$, де $x \in (-\infty; +\infty)$.

Позначимо підкореневий вираз через $f(x)$ і знайдемо його найменше значення.

2) Маємо: $f'(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right) + 2(x^2 - 0,5) \cdot 2x = 4x^3 - 0,5.$

3) Нехай $f'(x) = 0$, маємо рівняння: $4x^3 - 0,5 = 0$, звідки $x = 0,5$, причому це точка мінімуму: $x_{\min} = 0,5$ (мал. 41.15).

4) Оскільки $f(x)$ – неперервна на $(-\infty; +\infty)$ і має єдину точку мінімуму $x_{\min} = 0,5$, то саме в цій точці функція $f(x)$ набуває найменшого значення.



Мал. 41.15

5) Якщо $x = 0,5$, то $y = (0,5)^2 + 0,5 = 0,75$. Отже, $A(0,5; 0,75)$ – шукана точка.

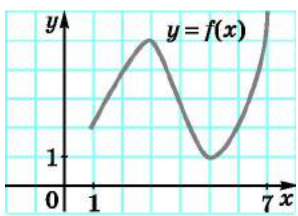
Відповідь. (0,5; 0,75).

● Сформулюйте алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$. ● Сформулюйте алгоритм розв'язування прикладних задач на знаходження найбільшого або найменшого значень деякої величини.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

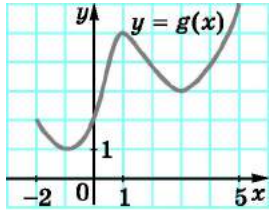
1

41.1. На малюнку 41.16 зображено графік функції $y = f(x)$, заданої на проміжку [1; 7]. Назвіть її найбільше і найменше значення на цьому проміжку. Запишіть відповідні рівності.



Мал. 41.16

41.2. На малюнку 41.17 зображено графік функції $y = g(x)$, заданої на проміжку $[-2; 5]$. Назвіть її найбільше і найменше значення на цьому проміжку. Запишіть відповідні рівності.



Мал. 41.17

2 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на заданому проміжку (**41.3–41.4**):

41.3. 1) $f(x) = 3x - 7$, $[0; 2]$; 2) $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $[2; 3]$;

3) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$, $[1; 4]$; 4) $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3$, $[-2; 0]$.

41.4. 1) $f(x) = -2x + 3$, $[0; 3]$; 2) $f(x) = x^2 - 4x$, $[0; 1]$;

3) $f(x) = -x^2 + 6x - 1$, $[2; 4]$; 4) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$, $[1; 3]$.

41.5. Поділіть відрізок завдовжки 12 см на два відрізки так, щоб прямокутник, сторонами якого будуть ці два відрізки, мав найбільшу площу.

41.6. Поділіть відрізок завдовжки 8 см на два відрізки так, щоб прямокутний трикутник, катетами якого будуть ці відрізки, мав найбільшу площу.

41.7. Подайте число 16 у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб сума квадратів цих доданків була найменшою.

41.8. Подайте число 10 у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб добуток цих доданків був найбільшим.

3 Знайдіть найбільше і найменше значення функції на заданому проміжку (**41.9–41.10**):

41.9. 1) $g(x) = 0{,}25x^4 - 2x^2$, $[-2; 1]$;

2) $g(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 5$, $[-3; 0]$;

3) $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $[-1; 3]$;

4) $g(x) = x^3 + 3x^2 + 1$, $[-3; 1]$.

41.10. 1) $f(x) = 8x^2 - x^4$, $[-1; 2]$;

2) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 5$, $[0; 4]$;

3) $f(x) = 2x^2 - x^4 + 3$, $[-3; 1]$;

4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, $[-1; 3]$.

41.11. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 2t + 4$ (x вимірюється в метрах, t – у секундах). Якими будуть найбільше і найменше значення $x(t)$ за перші 4 секунди руху?

41.12. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 3t + 2$ (s вимірюється в метрах, t – у секундах). Якими будуть найбільше і найменше значення $s(t)$ за перші 3 секунди руху?

41.13. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2 - x^2 + 3|x - 1|$ на проміжку $[-2; 2]$.

41.14. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $g(x) = x^2 - 2 - 5|x + 1|$ на проміжку $[-3; 3]$.

Знайдіть (41.15–41.16):

41.15. 1) найбільше значення функції $f(x) = \sin^2 x + \frac{x}{2}$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) найменше значення функції $g(x) = \cos^2 x - x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$.

41.16. 1) найбільше значення функції $f(x) = \sin^2 x - x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$;

2) найменше значення функції $f(x) = -\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}x$ на проміжку $[0; \pi]$.

41.17. Число 24 подайте у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб добуток куба одного з них на другий був найбільшим.

41.18. Число 18 подайте у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб добуток квадрата одного з них на другий був найбільшим.

41.19. Площа прямокутної земельної ділянки дорівнює 16 а. Які розміри мають бути в цієї ділянки, щоб довжина паркану, що її огороджує, була найменшою?

41.20. Площа прямокутного трикутника дорівнює 18 см^2. Якої довжини мають бути його катети, щоб їх сума була найменшою?

41.21. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на проміжку:

1) $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}$, $[2; 4]$; 2) $f(x) = x\sqrt{x + 3}$, $[-3; 1]$.

41.22. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $g(x)$ на проміжку:

1) $g(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$, $[0; 2]$; 2) $g(x) = \sqrt{x}(x - 3)$, $[0; 4]$.

41.23. Тіло рухається за законом $s(t) = 6t^2 - \frac{1}{3}t^3$ (s вимірюється в метрах, t – у секундах). У який момент часу з проміжку $[3; 8]$ швидкість тіла буде найбільшою, а в який – найменшою?

41.24. Матеріальна точка рухається за законом $x(t)=3t^2-\frac{2}{3}t^3$ (x – вимірюється в метрах, t – у секундах). У який момент часу з проміжку [0; 3] швидкість тіла буде найбільшою, а в який – найменшою?

41.25. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x - \cos x$ на проміжку: 1) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $[-\pi; 0]$.

41.26. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = \sin x - x$ на проміжку: 1) $[-\pi; 0]$; 2) $[0; \pi]$.

4 Знайдіть (41.27–41.28):

41.27. 1) найбільше значення функції $f(x) = x^3 - 2x|x-2|$ на проміжку [0; 3];
2) найменше значення функції $g(x) = x|x-1| - 5x^3$ на проміжку [0; 2].

41.28. 1) найбільше значення функції $g(x) = 4x^3 - x|x-2|$ на проміжку [0; 3];
2) найменше значення функції $f(x) = 3x|x-3| - x^3$ на проміжку [0; 4].

41.29. На проміжку $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right]$ порівняйте найбільше значення функції $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ із числом 2,5.

41.30. На проміжку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ порівняйте найбільше значення функції $f(x) = 5\sin x - \sin 5x$ із числом 5.

41.31. Знайдіть точку графіка функції $y = 1 - 2x^2$, найближчу до точки $A\left(1; \frac{3}{4}\right)$.

41.32. Знайдіть точку графіка функції $y = x^2 - \frac{3}{2}$, найближчу до точки $B(2; -1)$.

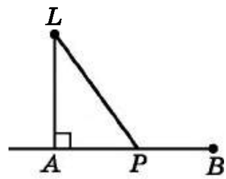
41.33. Бічні сторони і менша основа трапеції мають однакові довжини – по 5 см. Знайдіть довжину більшої основи, при якій площа трапеції буде найбільшою.

41.34. Відкритий бак має форму прямокутного паралелепіпеда з квадратною основою і вміщає 4 м^3. За яких розмірів бака на його виготовлення витратять найменшу кількість металу?

41.35. Розглядають всі можливі прямокутні паралелепіпеди, у яких одна з бічних граней є квадратом, а периметр основи дорівнює 12 дм. Серед них знайдіть прямокутний паралелепіпед з найбільшим об'ємом та знайдіть цей об'єм.

41.36. Розглядають усі можливі прямокутні паралелепіпеди, об'єм кожного з яких дорівнює 4 дм^3, а основою є квадрат. Серед них знайдіть прямокутний паралелепіпед з найменшим периметром бічної грані та обчисліть цей периметр.

41.37. Човен L розташувався на відстані 3 км до найближчої на березі точки A. Чоловік, що веслує у цьому човні, хоче потрапити в село B, яке знаходиться на відстані 5 км від точки A (мал. 41.18). Човен рухається зі швидкістю 4 км/год, а чоловік іде зі швидкістю 5 км/год. До якого пункту P берега має пристати човен, щоб чоловік досяг села якнайшвидше?



Мал. 41.18

41.38. Доведіть, що для функції:

1) $f(x)=\cos x\sin 2x$ справджується нерівність $\min\limits_{[-\pi;\,\pi]} f(x) > -\frac{7}{9}$;

2) $g(x)=\cos x\sin^2 x$ справджується нерівність $\max\limits_{[-\pi;\,\pi]} g(x) < 0{,}39$.

41.39. Доведіть, що для функції:

1) $f(x)=\sin x\sin 2x$ справджується нерівність $\max\limits_{[-\pi;\,\pi]} f(x) < 0{,}77$;

2) $g(x)=\cos^2 x\sin x$ справджується нерівність $\min\limits_{[-\pi;\,\pi]} g(x) > -\frac{7}{18}$.

Знайдіть множину значень функції (41.40–41.41):

41.40. $y(x)=|x^2-3x+2|+|x^2+x|$, де $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$.

41.41. $y(x)=|x^2-x|+|x^2-5x+6|$, де $x\in\left[\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]$.

41.42. На координатній площині розглядають прямокутник $ABCD$, у якого AB лежить на осі ординат, вершина C лежить на параболі $y=2x^2-3x+5$, вершина D лежить на параболі $y=x^2+3x-6$, а абсциса вершини C належить проміжку $\left[\frac{3}{2};\frac{8}{3}\right]$. Яке значення повинна мати абсциса вершини C, щоб площа прямокутника $ABCD$ була найбільшою?

41.43. На координатній площині розглядають прямокутник $ABCD$, у якого сторона AB лежить на осі ординат, вершина C лежить на параболі $y=x^2-4x+3$, вершина D лежить на параболі $y=-x^2+2x-2$, а абсциса вершини D належить проміжку $\left[\frac{4}{5};\frac{3}{2}\right]$. Яке значення повинна мати абсциса вершини D, щоб площа прямокутника $ABCD$ була найбільшою?

41.44. До графіка функції $y = x^2 + 4x + 4$ проведено дотичну в точці з абсцисою x_0, де $-1 \leqslant x_0 \leqslant 0$. При якому значенні x_0 площа трикутника, що відтинається цією дотичною від другої координатної чверті, буде найбільшою?

41.45. До графіка функції $y = -x^2 + 6x - 9$ проведено дотичну в точці з абсцисою x_0, де $0 \leqslant x_0 \leqslant 2{,}5$. При якому значенні x_0 площа трикутника, що відтинається цією дотичною від четвертої координатної чверті, буде найбільшою?

41.46. Шоколадка коштує 16 грн. У вихідні в супермаркеті діє спеціальна пропозиція: заплативши за три шоколадки, покупець отримує четверту в подарунок. Скільки шоколадок можна придбати в суботу, якщо покупець планує на них витратити не більше ніж 100 грн?

41.47. *(Міжнародна математична олімпіада «Кенгуру»).* Велосипедист рухається зі швидкістю 5 м/с. Довжина ободу колеса його велосипеда дорівнює 125 см. Скільки повних обертів зробить кожне колесо за 5 с руху велосипедиста?

Українці у світі

У 2018 році команда українських школярів вдало виступила на Міжнародній математичній олімпіаді. 59-та Міжнародна математична олімпіада відбулася 3–14 липня в м. Клуж-Напока (Румунія). Шестеро українських старшокласників (на фото) здобули 4 золоті та 2 срібні медалі.

У загальному рейтингу українська команда посіла 4 місце з понад 100 країн світу, після США, Росії і Китаю. Це найбільше досягнення української команди за усі 26 років її виступів на цих престижних змаганнях. Досі найкращим результатом України на Міжнародній математичній олімпіаді було 6-те місце (у 2014, 2007 і 1997 роках). Науковим керівником української команди вже багато років є професор кафедри обчислювальної математики КНУ імені Тараса Шевченка Богдан Владиславович Рубльов.

§ 42. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ ТА ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Розглянемо, як певні властивості функцій, у тому числі і ті, які зазвичай з'ясовують за допомогою похідної, можна використовувати для розв'язування рівнянь і нерівностей, а також розглянемо застосування похідної для доведення нерівностей.

1. Використання оцінювання лівої і правої частин рівняння або нерівності

Неважко зрозуміти, що *якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ для всіх значень x із ОДЗ рівняння справджуються нерівності $f(x) \geqslant a$, $g(x) < a$, де $a \in R$, то рівняння не матиме розв'язків. Якщо ж справджуються нерівності $f(x) \geqslant a$, $g(x) \leqslant a$, де $a \in R$, то рівняння на своїй ОДЗ рівносильне системі:* $\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}$

Розглянемо це на прикладах.

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 2.$

Розв'язання. ОДЗ рівняння: $x \in [0; 2]$.
Розглянемо неперервну на $[0; 2]$ функцію $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$.
Функція $f(x)$ на інтервалі $(0; 2)$ має похідну

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{2-x}} \cdot (-1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2-x}}\right).$$

$f'(x) = 0$, коли $\sqrt{x} = \sqrt{2-x}$, тобто $x = 1$ – критична точка функції.
$f(x)$ неперервна на $[0; 2]$, тому своїх найбільшого і найменшого значень вона може набувати в точках 1; 0 або 2.
Маємо: $f(0) = \sqrt{2}$; $f(1) = 1 + 1 = 2$; $f(2) = \sqrt{2}$.
Отже, найбільшого значення, що дорівнює 2, функція набуває при $x = 1$, тому коренем рівняння $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 2$ є число 1.
Відповідь. 1.

Зауважимо, що це рівняння можна було розв'язати і раніше вивченими методами.

Приклад 2. Розв'язати нерівність:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} \geqslant 2$; 2) $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} \leqslant 2$; 3) $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} > 2$.

Розв'язання. Ліва і права частини нерівностей – ті самі, що й у прикладі 1, тому скористаємося їх оцінюванням та міркуваннями, проведеними у прикладі 1.
Нехай $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$, $D(f) = [0; 2]$.
1) Оскільки найбільшим значенням $f(x)$ є число 2, то нерівність справджується лише, коли $f(x) = 2$, тобто при $x = 1$. Отже, число 1 – єдиний розв'язок нерівності.

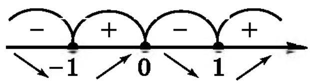
2) Оскільки $f(x) \leqslant 2$ для будь-якого $x \in D(f)$, то нерівність справджується для всіх $x \in D(f)$, тобто множиною розв'язків нерівності є проміжок $[0; 2]$.
3) Оскільки $f(x) \leqslant 2$ для будь-якого $x \in D(f)$, то нерівність розв'язків не має.

Відповідь. 1) 1; 2) $[0; 2]$; 3) $\varnothing$.

Отже, оцінюванням лівої і правої частин можна розв'язувати як деякі рівняння, так і деякі нерівності.

Приклад 3. Розв'язати рівняння: $x^4 - 2x^2 = \sin\frac{\pi x}{2} - 2.$

Розв'язання. ОДЗ рівняння: $x \in R$. Розглянемо функцію $f(x) = x^4 - 2x^2$, визначену на R.
$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$.
$f'(x) = 0$ для $x = 0$; $x = 1$; $x = -1$, тобто маємо три критичні точки функції. Визначимо знак похідної на отриманих проміжках (мал. 42.1).



Мал. 42.1

Враховуючи неперервність функції і те, що $f(-1) = f(1) = 1 - 2 = -1$, дійдемо висновку, що найменшим значенням функції на R є число -1.

Оскільки $-1 \leqslant \sin\frac{\pi x}{2} \leqslant 1$, то $-3 \leqslant \sin\frac{\pi x}{2} - 2 \leqslant -1$.

Отже, $x^4 - 2x^2 \geqslant -1$, а $\sin\frac{\pi x}{2} - 2 \leqslant -1$.

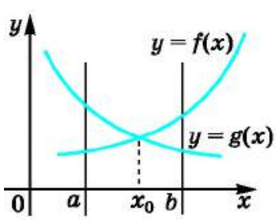
Тоді рівняння рівносильне системі: $\begin{cases} x^4 - 2x^2 = -1, \\ \sin\frac{\pi x}{2} - 2 = -1. \end{cases}$

Корені першого рівняння: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$, причому $x_1 = 1$ задовольняє і друге рівняння. Отже, $x = 1$ – єдиний корінь початкового рівняння.

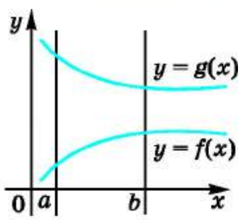
Відповідь. 1.

2. Використання монотонності функцій

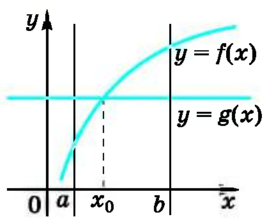
За допомогою графічної інтерпретації неважко пересвідчитися, що коли функції $f(x)$ і $g(x)$ монотонні на $[a; b]$ або одна з них є сталою, то їх графіки на $[a; b]$ або перетинаються в одній точці (мал. 42.2 і 42.4), або не мають спільних точок взагалі (мал. 42.3).



Мал. 42.2



Мал. 42.3



Мал. 42.4

Це означає, що рівняння вигляду $f(x) = g(x)$, якщо $x \in [a; b]$, матиме не більше ніж один розв'язок.

Приклад 4. Розв'язати рівняння: $4-\sqrt{x}=x^5+x^3+1$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння: $x \geqslant 0$.

Функція $f(x) = 4-\sqrt{x}$ є спадною на своїй області визначення, оскільки спадною є функція $y=-\sqrt{x}$.

Розглянемо функцію $g(x) = x^5 + x^3 + 1$. Оскільки $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 \geqslant 0$ для $x \in R$, то $g(x)$ зростає на R.

Отже, рівняння $4-\sqrt{x}=x^5+x^3+1$ на $[0; +\infty)$ має не більше як один корінь. Очевидно, що $x = 1$ – єдиний корінь рівняння.

Відповідь. 1.

Монотонність функцій іноді допомагає розв'язувати і системи рівнянь.

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 2(|x|-|y|)=\cos y-\cos x, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=6. \end{cases}$

Розв'язання. Оскільки областю допустимих значень системи є $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, то $|x| = x$, $|y| = y$.

Перепишемо систему у вигляді: $\begin{cases} 2x+\cos x = 2y+\cos y, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=6. \end{cases}$

Розглянемо функцію $f(t) = 2t + \cos t$. Тоді перше рівняння системи можна записати у вигляді $f(x) = f(y)$.

Маємо: $f'(t) = 2 - \sin t$. Оскільки $f'(t) > 0$ для будь-якого t, зокрема і для $t \geqslant 0$, то функція $f(t) = 2t + \cos t$ зростає на проміжку $[0; +\infty)$, а тому з рівності $f(x) = f(y)$ отримаємо, що $x = y$.

Підставимо у друге рівняння замість змінної y змінну x, отримаємо: $\sqrt{x}+\sqrt{x}=6$, тобто $\sqrt{x}=3$, звідси $x = 9$. Тому $y = 9$.

Відповідь. (9; 9).

Приклад 6. Розв'язати нерівність: $4x^5 - x^3 > 4 - x$.

Розв'язання. Перепишемо нерівність у вигляді: $4x^5 - x^3 + x - 4 > 0$ та розглянемо функцію

$$f(x) = 4x^5 - x^3 + x - 4.$$

Маємо: $f'(x) = 20x^4 - 3x^2 + 1$.

Рівняння $20x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ не має коренів, тому $f'(x) > 0$ для всіх $x \in R$, тобто функція $f(x) = 4x^5 - x^3 + x - 4$ зростає на $(-\infty; +\infty)$.

Крім того, $f(1) = 4 - 1 + 1 - 4 = 0$. Тому для всіх $x > 1$ матимемо, що $f(x) > 0$, а для всіх $x < 0$ матимемо, що $f(x) < 0$. Отже, розв'язком нерівності є проміжок $(1; +\infty)$.

Відповідь. $(1; +\infty)$.

3. Доведення нерівностей за допомогою похідної

Похідну використовують і для доведення деяких нерівностей. Розглянемо це на прикладі.

Приклад 7. Довести, що $\sin x > x$, якщо $x < 0$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = \sin x - x$. Оскільки $f'(x) = \cos x - 1 \leqslant 0$ для всіх x, то функція $f(x)$ монотонно спадає на R. Тому для всіх $x < 0$ справджується нерівність: $f(x) > f(0)$. Оскільки $f(0) = 0$, то $f(x) > 0$, тобто $\sin x - x > 0$ для всіх $x < 0$. Отже, $\sin x > x$ для всіх $x < 0$. ■

○ Як оцінювання лівої і правої частин рівняння допомагає його розв'язанню? ○ Як можна використовувати монотонність функції для розв'язування рівнянь, систем рівнянь, нерівностей?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

3 Розв'яжіть рівняння (42.1–42.2):

42.1. 1) $3-\sqrt{x}=x^3+x$; 2) $\sqrt{x+1}=1-x-3x^3$.

42.2. 1) $1-\sqrt{x+1}=x^5+x$; 2) $\sqrt{x}=3-x-x^7$.

Доведіть, що (42.3–42.4):

42.3. 1) $\sin x < x$ для всіх $x > 0$; 2) $\operatorname{tg} x > x$ для всіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

42.4. $\cos x > x + 1$, якщо $x < 0$.

Розв'яжіть рівняння (42.5–42.6):

42.5. 1) $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}=x^2-8x+18$; 2) $2x^2-x^4=\cos \pi x+2$;

3) $x^7-x^4+3x=3$; 4) $x^3+4x=\frac{128}{x^3}$.

42.6. 1) $\sqrt{x}+\sqrt{8-x}=x^2-8x+20$; 2) $x^4+2x^2=\cos \pi x-1$;

3) $x^5-x^3+2x=2$; 4) $x^3+2x=\frac{3}{x^5}$.

Розв'яжіть систему рівнянь (42.7–42.8):

42.7. $\begin{cases} x-y=\sin x-\sin y, \\ 5x+9y=28. \end{cases}$ **42.8.** $\begin{cases} 3x+\cos x=3y+\cos y, \\ x^2+y=2. \end{cases}$

Розв'яжіть нерівність (42.9–42.10):

42.9. $2x^9-x^5 \leqslant 2-x$. **42.10.** $x^7+4x>x^4$.

42.11. Доведіть, що $\sin x > x-\frac{x^3}{6}$ для всіх $x > 0$.

42.12. Доведіть, що $\cos x \geqslant 1-\frac{x^2}{2}$ для всіх $x \in R$.

42.13. У магазині всі меблі продають у розібраному вигляді. Вартість збору меблів складає 12 % від вартості меблів. Шафа коштує 3650 грн. Скільки грошей заощадить родина Сидорчуків, придбавши цю шафу, якщо збере шафу самостійно?

42.14. Розв'яжіть рівняння: $x^4 + (x+2)^4 = 82$.

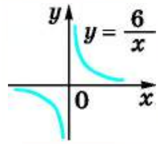
§ 43. АСИМПТОТИ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

Поняття асимптоти графіка функції вже траплялося нам у § 40 (приклад 2, мал. 40.2), це була вертикальна пряма. У цьому параграфі детально розберемося, яку пряму називають асимптотою графіка функції і як знайти її рівняння.

Пряму називають *асимптотою графіка функції*, якщо відстань між цією прямою і точкою графіка прямує до нуля при віддаленні цієї точки від початку координат.

Асимптоти бувають вертикальними, горизонтальними та похилими.

Наприклад, функція $y = \dfrac{6}{x}$ (мал. 43.1) має дві асимптоти, вертикальну ($x = 0$) та горизонтальну ($y = 0$).



Мал. 43.1

1. Вертикальна асимптота

Якщо існує таке число a, що $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $x = a$ – вертикальна асимптота графіка функції $y = f(x)$.

Виходячи з поняття неперервності функції, можна дійти висновку, що вертикальна асимптота, якщо вона існує, може бути лише в точці розриву функції.

Приклад 1. Чи має вертикальну асимптоту графік функції

$$f(x) = \frac{1}{x-3}?$$

Р о з в ' я з а н н я. $D(f)$: $x \neq 3$. Оскільки в точці $x = 3$ функція має розрив, то пряма $x = 3$ може виявитися вертикальною асимптотою. Маємо: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3} = \infty$, отже, $x = 3$ – вертикальна асимптота.

В і д п о в і д ь. Має.

Приклад 2. Чи має вертикальну асимптоту графік функції

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}?$$

Розв'язання. $D(f)$: $x \neq 3$. У точці $x = 3$ функція має розрив, тому $x = 3$ – єдина пряма, яка може бути вертикальною асимптотою. Але

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6 \neq \infty,$$

тому $x = 3$ – не є асимптотою графіка даної функції.

Відповідь. Ні.

2. Похилі та горизонтальні асимптоти

Оскільки асимптота графіка – це пряма, то рівняння похилої асимптоти має вигляд $y = kx + l$.

Якщо маємо функцію $y = f(x)$, для якої існують $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ і $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$, причому $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ і $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = l$, то пряма $y = kx + l$ при $k \neq 0$ є *похилою асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, а при $k = 0$ – *горизонтальною асимптотою*, рівняння якої $y = l$.

Приймемо це твердження без доведення.

Якщо $k = 0$, то матимемо $y = l$ – горизонтальну асимптоту.

Приклад 3. Знайти асимптоти графіка функції $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$.

Розв'язання. Оскільки $x = 0$ – точка розриву функції і $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x - \frac{1}{x}\right) = \infty$, то $x = 0$ – вертикальна асимптота.

Маємо далі: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x^2}\right) = 2 - 0 = 2.$

Отже, $k = 2$, тобто існує похила асимптота.

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2x - \frac{1}{x} - 2x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$, тобто $l = 0$,

отже, $y = 2x$ – похила асимптота.

Відповідь. $x = 0$ та $y = 2x$.

Приклад 4. Знайти похилі асимптоти графіка функції

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}.$$

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\frac{1}{x}}{x} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = \infty,$$ то похилих асимптот немає.

Відповідь. Похилих асимптот немає.

Приклад 5. Знайти похилі асимптоти графіка функції

$$f(x) = \frac{5-3x}{x+7}.$$

Розв'язання. Маємо: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{5-3x}{x+7}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-3x}{x^2+7x} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5-3x}{x^2}}{\frac{x^2+7x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x^2}-\frac{3x}{x^2}}{1+\frac{7}{x}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Оскільки $k = 0$, то якщо асимптота існує, то вона буде горизонтальною асимптотою.

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5-3x}{x+7} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{5-3x}{x+7} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5-3x}{x}}{\frac{x+7}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}-3}{1+\frac{7}{x}} = \frac{-3}{1} = -3$$

Отже, маємо рівняння горизонтальної асимптоти: $y = -3$.

Відповідь. $y = -3$.

Зауважимо, що графік функції або будь-яка крива не може мати більше двох похилих асимптот. Функція, яка має границю на нескінченності, при $x \to +\infty$ та при $x \to -\infty$ не може мати різних значень кожної з цих границь, тому й похилих асимптот може бути не більше ніж дві. Якщо ж значення цих границь збігаються, то функція має тільки одну похилу асимптоту.

? ○ Що називають асимптотою графіка функції? ○ У якому випадку пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою графіка функції? ○ Як знайти похилу асимптоту графіка функції?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Чи має асимптоти графік функції (43.1–43.2):

43.1. 1) $y = \frac{8}{x}$; 2) $y = 2x - 7$; 3) $y = x^2$; 4) $y = -\frac{4}{x}$?

43.2. 1) $y = 4x$; 2) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = -\frac{9}{x}$?

2 Знайдіть вертикальну асимптоту графіка функції (якщо вона існує) (43.3–43.4):

43.3. 1) $f(x)=\frac{1}{x+2}$; 2) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$.

43.4. 1) $f(x)=\frac{4-x^2}{2+x}$; 2) $f(x)=\frac{5}{x-4}$.

3 Знайдіть похилу асимптоту графіка функції (якщо вона існує) (43.5–43.6):

43.5. 1) $f(x)=\frac{4-x}{x+2}$; 2) $f(x)=\frac{4x^2-3x}{x+1}$;

3) $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$; 4) $f(x)=x^3-\frac{1}{x}$.

43.6. 1) $f(x)=\frac{x+7}{3-x}$; 2) $f(x)=\frac{2x^2+5x}{x-2}$;

3) $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$; 4) $f(x)=x^2+\frac{7}{x}$.

43.7. Зобразіть схематично графік функції $y = f(x)$, областю визначення якої є множина всіх дійсних чисел, крім чисел 2 і 5, якщо відомо, що графік функції має єдину асимптоту $x = 2$.

43.8. Зобразіть схематично графік функції $y = f(x)$, областю визначення якої є множина всіх дійсних чисел, крім чисел 0 і 3, якщо відомо, що графік функції має дві асимптоти $x = 0$ і $x = 3$.

4 Знайдіть усі асимптоти графіка функції (43.9–43.10):

43.9. 1) $f(x)=3+\frac{x}{x+5}$; 2) $f(x)=\frac{2x^2}{x-2}$.

43.10. 1) $f(x)=5-\frac{x}{x-4}$; 2) $f(x)=\frac{3x^2}{x-1}$.

43.11. 1) У сільських районах щорічно споживають 840 м^3 води на одну особу. Яка щорічна потреба у воді в селі з населенням 3000 осіб?

2) *Проектна діяльність.* Дізнайтеся, скільки населення мешкає у вашому селі або селі, де проживають ваші родичі, та розрахуйте щорічну потребу цього села у воді.

43.12. (*Національна олімпіада Болгарії, 1980 р.*). Доведіть, що для коренів x_1 і x_2 многочлена $x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$, де $p \in R$, $p \neq 0$, справджується нерівність: $x_1^4 + x_2^4 \geqslant 2 + \sqrt{2}$.

§ 44. ДРУГА ПОХІДНА. ОПУКЛІСТЬ ФУНКЦІЇ ТА ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ. ЗАСТОСУВАННЯ ДРУГОЇ ПОХІДНОЇ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ПОБУДОВИ ЇХ ГРАФІКІВ

1. Друга похідна функції

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$ в усіх точках деякого проміжку. Тоді її можна розглядати як функцію агрументу x. Якщо функція $f'(x)$ є диференційовною на деякому проміжку, то її похідну називають *другою похідною* функції $f(x)$ (або *похідною другого порядку*) і позначають так: $f''(x)$ або y''.

Приклад 1. Знайти похідну другого порядку для функції

$$f(x) = x^3 - \sin x.$$

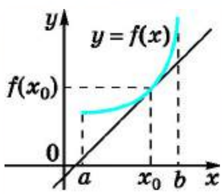
Розв'язання. $f'(x) = (x^3 - \sin x)' = 3x^2 - \cos x$.
$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 - \cos x)' = 6x + \sin x$.

Відповідь. $f''(x) = 6x + \sin x$.

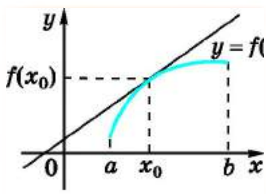
2. Поняття опуклості функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(a; b)$ і в точці $x_0 \in (a; b)$ має похідну. Тоді в цій точці існує дотична до графіка функції.

Функцію $f(x)$ називають *опуклою вниз* на проміжку $(a; b)$, якщо для будь-якої точки $x \in (a; b)$, де $x \neq x_0$, графік функції лежить вище дотичної до цього графіка, проведеної в точці $(x_0; f(x_0))$ (мал. 44.1).



Мал. 44.1

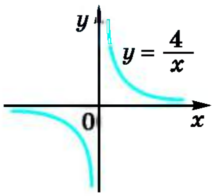


Мал. 44.2

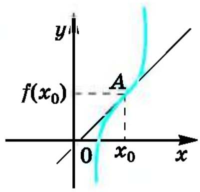
Функцію $f(x)$ називають *опуклою вгору* на проміжку $(a; b)$, якщо для будь-якої точки $x \in (a; b)$, де $x \neq x_0$, графік функції лежить нижче дотичної до цього графіка, проведеної в точці $(x_0; f(x_0))$ (мал. 44.2).

Приклад 2. Функція $y = \frac{4}{x}$, графік якої зображено на малюнку 44.3, на проміжку $(0; +\infty)$ є опуклою вниз, а на проміжку $(-\infty; 0)$ – опуклою вгору.

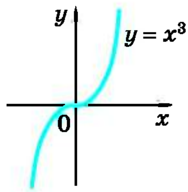
Точку A графіка неперервної функції $f(x)$, у якій існує дотична до цього графіка і при переході через яку крива, що є графіком функції, змінює вид опуклості, називають *точкою перегину* функції.



Мал. 44.3



Мал. 44.4



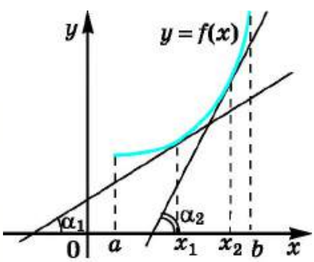
Мал. 44.5

На малюнку 44.4 точка A – точка перегину графіка функції.

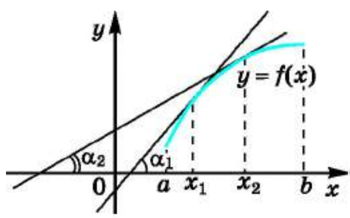
Приклад 3. Для функції $y = x^3$, графік якої зображено на малюнку 44.5, $(0; 0)$ – точка перегину.

3. Знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину

Розглянемо функцію $f(x)$, яка є опуклою вниз на проміжку $(a; b)$ (мал. 44.6). При зростанні аргументу x міра кута α, який утворює дотична до графіка функції з додатним напрямом осі абсцис, зростає: при $x_2 > x_1$ маємо, що $\alpha_2 > \alpha_1$. Оскільки $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то зростає і $\operatorname{tg}\alpha$, але $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$, тому зростає і функція $f'(x)$. Оскільки $f'(x)$ зростає на $(a; b)$, то $f''(x) > 0$ на $(a; b)$.



Мал. 44.6



Мал. 44.7

Міркуючи аналогічно (мал. 44.7, на якому для $x_2 > x_1$ маємо, що $\alpha_2 < \alpha_1$), дійдемо висновку, що коли функція $f(x)$ на проміжку $(a; b)$ є опуклою вгору, то $f''(x) < 0$ на $(a; b)$.

Можна довести й обернені твердження:

якщо на проміжку $(a; b)$ двічі диференційовна функція $f(x)$ має додатну другу похідну, тобто $f''(x) > 0$ для всіх $x \in (a; b)$, то графік цієї функції на $(a; b)$ є опуклим униз;

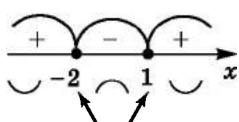
якщо на проміжку $(a; b)$ удвічі диференційовна функція $f(x)$ має від'ємну другу похідну, тобто $f''(x) < 0$ для всіх $x \in (a; b)$, то графік цієї функції на $(a; b)$ є опуклим угору.

Отже, *алгоритм дослідження функції $y = f(x)$ на опуклість та точки перегину* може бути таким:

1) Знайти область визначення функції $y = f(x)$.
2) Знайти другу похідну $f''(x)$.
3) Знайти внутрішні точки області визначення, у яких друга похідна дорівнює нулю або не існує.
4) Позначити знайдені точки на області визначення функції $y = f(x)$ та з'ясувати знак другої похідної $f''(x)$ на кожному з отриманих проміжків.
5) За отриманими знаками дійти висновку про опуклість функції та абсциси точок перегину і записати відповідь.

Приклад 4. Дослідити функцію $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + x$ на опуклість і точки перегину.

Розв'язання. 1) $D(y) = R$.
2) $y' = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 1$; $y'' = 12x^2 + 12x - 24 = 12(x^2 + x - 2)$.
3) Друга похідна існує в усіх точках. Розв'яжемо рівняння $y'' = 0$, тобто $x^2 + x - 2 = 0$, звідки $x_1 = 1$; $x_2 = -2$.
4) Позначимо числа 1 і −2 на області визначення функції та з'ясуємо знак другої похідної y'' на кожному з проміжків (мал. 44.8).



Мал. 44.8

5) На проміжках $(-\infty; -2)$ та $(1; +\infty)$ графік функції опуклий униз, а на $(-2; 1)$ – вгору, тому $x = -2$ і $x = 1$ – абсциси точок перегину. Маємо: $y(-2) = -50$; $y(1) = -8$. Отже, $(-2; -50)$ та $(1; -8)$ – точки перегину.

Відповідь. $(-\infty; -2)$ і $(1; +\infty)$ – проміжки опуклості вниз, $(-2; 1)$ – проміжок опуклості вгору; $(-2; -50)$ і $(1; -8)$ – точки перегину.

4. Застосування другої похідної до дослідження функцій і побудови їх графіків

Ми вже розглядали застосування першої похідної до дослідження функцій і побудови їх графіків (див. § 40). Тому, для більш точної побудови, алгоритм дослідження функції і побудови її графіка, який було сформульовано у § 40, можна доповнити пошуком асимптот графіка та дослідженням функції на опуклість і точки перегину.

Отже, дослідити функцію і побудувати її графік можна за таким алгоритмом:

1) Знайти область визначення функції.
2) Дослідити функцію на парність, непарність та періодичність (для тригонометричних функцій).
3) Знайти точки перетину графіка функції з осями координат (якщо це можливо).
4) Дослідити поведінку функції на кінцях проміжків її області визначення (якщо це можливо) та знайти всі асимптоти її графіка (якщо вони існують).
5) Знайти похідну та критичні точки функції.
6) Знайти проміжки зростання, спадання та екстремуми функції.
7) Дослідити функцію на опуклість і точки перегину.
8) За потреби знайти ще кілька точок графіка та, використовуючи отримані результати, побудувати графік функції.

Приклад 5. Дослідити функцію $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ та побудувати її графік.

Розв'язання. 1) $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2) $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=-\dfrac{x^3}{x^2-1}=-f(x)$. Функція непарна.

3) Якщо $x=0$, то $y=0$, отже $(0;0)$ – точка перетину з віссю y. Якщо $y=0$, тобто $\dfrac{x^3}{x^2-1}=0$, то $x=0$, знову маємо точку $(0;0)$ – точка перетину з віссю x.
Отже, $(0;0)$ – єдина точка перетину графіка функції з осями координат.

4) Оскільки $x=1$ та $x=-1$ – точки розриву функції і $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\infty$ та $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\infty$, то $x=1$ і $x=-1$ – вертикальні асимптоти.
Якщо $x\to-1$, $x<-1$, то $y\to-\infty$; якщо $x\to-1$, $x>-1$, то $y\to+\infty$;
Якщо $x\to1$, $x<1$, то $y\to-\infty$; якщо $x\to1$, $x>1$, то $y\to+\infty$.
Знайдемо похилі асимптоти ($y=kx+l$):

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1-0}=1.$$

$$l=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Отже, $y = x$ – похила асимптота.

5) $f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$

З рівняння $\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0$ маємо критичні точки функції:

$x_1 = -\sqrt{3};\ x_2 = \sqrt{3};\ x_3 = 0.$

6) Заповнюємо таблицю:

x	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0
$f'(x)$	+	0	–	не існує	–	0
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	не існує	$\searrow$	0
Висновок	Функція зростає	max	Функція спадає	Асимптота	Функція спадає	–

x	$(0; 1)$	1	$(1; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; +\infty)$
$f'(x)$	–	не існує	–	0	+
$f(x)$	$\searrow$	не існує	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$
Висновок	Функція спадає	Асимптота	Функція спадає	min	Функція зростає

7) $y'' = \left(\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - 2(x^2-1) \cdot 2x(x^4 - 3x^2)}{(x^2-1)^4} =$

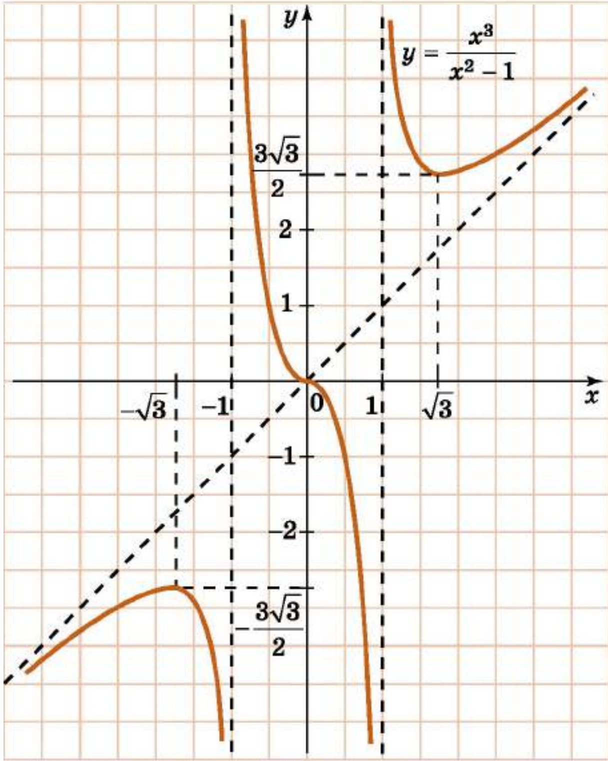
$= \frac{(x^2-1)((4x^3-6x)(x^2-1) - 4x(x^4-3x^2))}{(x^2-1)^4} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3};$

$y'' = 0$, якщо $x = 0$.

Систематизуємо дані, отримані за другою похідною, у таблиці.

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
$f''(x)$	–	+	0	–	+
$f(x)$	$\frown$	$\smile$	0	$\frown$	$\smile$
Висновок	Опукла вгору	Опукла вниз	Точка перегину	Опукла вгору	Опукла вниз

8) Графік функції $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ зображено на малюнку 44.9.



Мал. 44.9

- Як знайти другу похідну функції? • Яку функцію називають опуклою вниз? • Яку функцію називають опуклою вгору? • Яку точку називають точкою перегину? • Сформулюйте алгоритм дослідження функції на опуклість і точки перегину. • Сформулюйте алгоритм дослідження функції та побудови її графіка.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **Знайдіть другу похідну функції (44.1–44.4):**

44.1. 1) $f(x) = x$; 2) $q(x) = 7$; 3) $t(x) = x^9$; 4) $p(x) = \cos x$.

44.2. 1) $f(x) = -3$; 2) $q(x) = x^2$; 3) $\varphi(x) = \sin x$; 4) $t(x) = x^6$.

2 **44.3.** 1) $f(x) = x^2 - 4x + 7$; 2) $f(x) = x^5 + \sin x$.

44.4. 1) $f(x) = 5x - 9 - x^2$; 2) $f(x) = \cos x - x^4$.

Знайдіть абсциси точок перегину функції (44.5–44.6):

44.5. 1) $y = x^2 - 3x$; 2) $y = x^3 + 8x$.

44.6. 1) $y = x + x^2$; 2) $y = 6x - x^3$.

3 Знайдіть другу похідну функції (44.7–44.8):

44.7. 1) $f(x) = \operatorname{ctg} x$; 2) $f(x) = \dfrac{1-2x}{3x+1}$.

44.8. 1) $f(x) = \operatorname{tg} x$; 2) $f(x) = \dfrac{5x-1}{1+6x}$.

Дослідіть функцію на опуклість і точки перегину (44.9–44.10):

44.9. 1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 7$; 2) $f(x) = \cos x$, $x \in [0; 2\pi]$.

44.10. 1) $f(x) = 6x^2 - x^3 + x$; 2) $f(x) = \sin x$, $x \in [0; 2\pi]$.

44.11. Дослідіть функцію $f(x) = x^4 - 6x^2$ за допомогою першої та другої похідних і побудуйте її графік.

44.12. Дослідіть функцію $f(x) = 3x^2 - x^3$ за допомогою першої та другої похідних і побудуйте її графік.

4 Дослідіть функцію на опуклість і точки перегину (44.13–44.14):

44.13. 1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} x$, якщо $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

44.14. 1) $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$; 2) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, якщо $x \in (0; \pi)$.

44.15. Дослідіть функцію $f(x) = \dfrac{x-3}{(x-2)^2}$ за допомогою першої та другої похідних та побудуйте її графік.

44.16. Дослідіть функцію $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$ за допомогою першої та другої похідних та побудуйте її графік.

44.17. *Практичне завдання.* Дослідіть функцію $f(x) = \dfrac{32}{4x^2 - x^3}$ за допомогою першої і другої похідних та побудуйте її графік на міліметровому папері.

44.18. У школі 600 учнів, з них 30 % – учні початкової школи. Серед учнів середньої та старшої школи 20 % вивчають німецьку мову. Скільки учнів у школі вивчають німецьку мову, якщо в початковій школі німецька мова не вивчається?

44.19. Розв'яжіть рівняння: $x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$.

Розділ 1. **§ 1.** **1.30.** 1) $A \cup B = B$; $A \cap B = A$; 2) $A \cup B = B$; $A \cap B = A = \varnothing$. **1.31.** 1), 4) Ні; 2), 3) так. **1.35.** 1) $A \cup B$; 3) $B \cap C$. **1.36.** 2) $A \cap C$. **1.37.** 12,2 км. **1.38.** Корінь. **§ 2.** **2.19.** 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; 6) $[0; 1) \cup (1; +\infty)$; 7) $(0; 5) \cup (5; +\infty)$; 8) $[-1; 0]$; 9) $[2; 3) \cup (3; +\infty)$. **2.20.** 1) $(-\infty; -7) \cup (-7; 7) \cup (7; +\infty)$; 2) $(-3; 3)$; 4) $[-3; 2) \cup (2; +\infty)$; 6) $[2; 4]$. **2.28.** 2) $[-3; +\infty)$; 3) $[4; +\infty)$; 5) $[-2; +\infty)$. **2.29.** 2) $[5; +\infty)$; 3) $[-3; +\infty)$. **2.31.** 1) $(-1; 1) \cup (1; 2]$; 3) $\{1\} \cup [2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1] \cup \{2\}$. **2.32.** 2) $(-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$; 3) $\{0\} \cup [7; +\infty)$; 4) $\{-3\} \cup [0; +\infty)$. **2.33.** 2) $\{0\}$; 3) $[0; 2]$; 4) $(0; 2]$; 5) $[1; +\infty)$; 6) $[-9; +\infty)$; 7) $[-0,5; +\infty)$; 8) $\left(0; \frac{1}{2}\right]$. **2.34.** 1) $\{0\}$; 4) $[-27; +\infty)$. **2.35.** 1) $[3; 12) \cup (12; +\infty)$; 2) $[1; -2]$. **2.36.** 5 пляшечок. **2.37.** $\frac{2a^3 + 5a^2b}{3ab + 9bc}$. **§ 3.** **3.20.** 1) 3; 2) −1. **3.21.** 1) −1; 2) 2. **3.22.** 1) $y > 0$, якщо $x > 3$; $y < 0$, якщо $x < 3$. **3.23.** 2) $y > 0$, якщо $x < 0,8$; $y < 0$, якщо $x > 0,8$. **3.26.** 1), 5) Непарна; 2), 4), 6), 8) ні парна, ні непарна; 3), 7), 9) парна. **3.27.** 1), 3) Ні; 2), 4) так. **3.28.** 1), 4) Так; 2), 3) ні. **3.30.** 2) найбільше дорівнює 3, найменшого не існує. **3.31.** 1) Найменше дорівнює 1, найбільшого не існує. **3.32.** 1) Три; 2) два. **3.33.** 1) Три; 2) два. **3.34.** −5. **3.35.** 17. **3.36.** 1) Непарна; 2) ні парна, ні непарна; 3) парна; 4) непарна. **3.37.** 1), 4) Парна; 2) ні парна, ні непарна; 3) непарна. **3.38.** 1), 3), 4) Непарна; 2) парна. **3.39.** Найбільше значення 2, найменше значення −7. **3.40.** Найбільше значення 3, найменше значення −1. **3.41.** Непарна. **3.42.** Парна. **3.44.** *Вказівка.* Використати задачу 3.43. **3.46.** 11 880 грн. **3.47.** 0; 1. **§ 4.** **4.16.** $E(y) = [2; +\infty)$. **4.19.** 2) $t = 2$; 3) зростає на $[0; 1]$, спадає на $[1; 2]$; 4) 4 м. **4.24.** $m < -2$. **4.25.** $p > 4$. **4.26.** 8. **4.27.** 16. **4.28.** 1), 3), 4), 5). **4.29.** 1) $y = (x + 3)^2$, $x \geqslant -3$; 2) $y = (x - 1)^2$, $x \leqslant 1$. **4.30.** 1) $y = (x - 2)^2$, $x \geqslant 2$; 2) $y = (x + 3)^2$, $x \leqslant -3$. **4.34.** Спадає на $(-\infty; 0]$ і $[2; +\infty)$, зростає на $[0; 2]$. **4.39.** 1) $y = \sqrt{x - 3}$; 2) $y = -\sqrt{x + 2}$; 4) $y = x^2 - 1$, $x \in [2; 3]$. **4.40.** 1) $y = \sqrt{x + 5}$; 3) $y = \frac{x}{x + 1}$; 4) $y = x^2 + 3$, $x \in [1; 3]$. **4.41.** *Вказівка.* Після спрощень отримаємо $y = 3 - \left||x| - 1\right|$. **4.42.** ≈27 776 грн. **4.43.** 68, 42, 16 та 17, 34, 68 або 17, 42, 67 та 68, 34, 17. **§ 5.** **5.15.** 1) 6; −3; 2) $-\frac{1}{3}$. **5.16.** 1) 4; −3; 2) 3. **5.17.** −2. **5.18.** 19. **5.19.** 1) $a < \frac{1}{2}$; 2) $a > -\frac{1}{3}$. **5.20.** 1) $b < 2$; 2) $b > -3$. **5.21.** 1) Якщо $a = 0$, то розв'язків немає; якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{5a}{3}$; 2) якщо $a = 0$, то розв'язків немає; якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{a}{4}$. **5.22.** 1) Якщо $a = 0$, то розв'язків немає; якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{a}{3}$; 2) якщо $a = 0$, то розв'язків немає; якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{3a}{2}$. **5.23.** 2) якщо $a = -2$, то $x \in R$; якщо $a \neq -2$, то $x = 1$; 4) якщо $a = 2$, то $x \in R$; якщо $a \neq 2$, то $x = a + 2$. **5.24.** 1) Якщо $a = -1$, то коренів немає; якщо $a \neq -1$, то $x = \frac{7}{a+1}$; 3) якщо $a = -3$, то $x \in R$; якщо $a = -3$, то $x = a - 3$. **5.25.** 1) 0; 2) 4; 3) $\varnothing$; 4) 4. **5.26.** 1) 1; 2) −4; 3) $\varnothing$; 4) 6. **5.27.** 1) −1; 2) −2. **5.28.** 1) −1; 2) 4. **5.29.** 2) $\left(-\infty; \frac{4-2\sqrt{13}}{3}\right) \cup \{-1\} \cup \left(\frac{4+2\sqrt{13}}{3}; +\infty\right)$. **5.30.** 1) $\left(\frac{6-2\sqrt{23}}{7}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{6+2\sqrt{23}}{7}\right)$. **5.31.** 1), 4) Так; 2), 3) ні. **5.32.** 1), 3) Ні; 2), 4) так. **5.33.** 2) якщо $a = 0$, то $x = 0{,}5$; якщо $-2 \leqslant a < 0$ або $a > 0$, то $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+2a}}{a}$; якщо $a < -2$, то $\varnothing$. **5.34.** 1) Якщо $a = 0$, то $\varnothing$; якщо $a \neq 0$, то $x_1 = \frac{5}{a}$, $x_2 = -\frac{1}{a}$. **5.35.** 0; 2; 4. **5.36.** −5; 1; 7. **5.37.** Якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a = 0$ або $a > 4$, то 2 корені; якщо $a = 4$, то 3 корені; якщо $0 < a < 4$, то 4 корені. **5.38.** 1) Якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a = 0$ або $a > 1$, то 2 корені; якщо $a = 1$, то 3 корені; якщо $0 < a < 1$, то 4 корені. **5.40.** $m \geqslant 1$. **5.41.** $m < -1$. **5.42.** На 20 %. **5.43.** 1) 550 і 803.

§ 6. **6.15.** 1) $(-\infty; 1) \cup \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$; 3) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$; 5) $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. **6.16.** 2) $(-\infty; -2) \cup \left[-\frac{5}{3}; +\infty\right)$; 4) $\left(-\infty; -\frac{2}{17}\right] \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 6) $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$. **6.17.** 1) 6; 2) −1. **6.18.** 1) 0; 2) 1. **6.19.** 2) $(-\infty; -7) \cup (-2; 2)$; 4) $(-\infty; 5]$. **6.20.** 1) $(-2; 0) \cup (5; +\infty)$; 3) $(0; +\infty)$. **6.21.** 1) $(-7; -3) \cup (3; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3) \cup [0; 4]$. **6.22.** 1) $[-1; 1] \cup (3; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3) \cup (0; 5)$. **6.23.** 1) Якщо $a < 0$, то $x < \frac{7}{a}$; якщо $a = 0$, то розв'язків немає; якщо $a > 0$, то $x > \frac{7}{a}$; 2) якщо $a < 0$, то $x \leqslant 0$; якщо $a = 0$, то $x \in R$; якщо $a > 0$, то $x \geqslant 0$; 4) якщо $a < 0$, то $x > \frac{3}{a}$; якщо $a = 0$, то $x \in R$; якщо $a > 0$, то $x < \frac{3}{a}$. **6.24.** 1) Якщо $a < 0$, то $x \leqslant 1$; якщо $a = 0$, то $x \in R$; якщо $a > 0$, то $x \geqslant 1$; 2) якщо $a < -2$, то $x > 0$; якщо $a = -2$, то розв'язків немає; якщо $a > -2$, то $x < 0$. **6.25.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $\left(0; \frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3] \cup (0; 3]$; 5) $[-2; 2) \cup [3; +\infty)$. **6.26.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup [1; 2)$; 4) $(-\infty; -2) \cup (-1; 1)$; 6) $(-1; 1) \cup (1; +\infty)$. **6.27.** 1) 3; 2) 2. **6.28.** 1) 3; 2) 0. **6.29.** 1. **6.30.** Жодного. **6.31.** 1) $(1; 3-\sqrt{3}) \cup (3+\sqrt{3}; +\infty)$; 4) $[-3-\sqrt{13}; -3+\sqrt{13}]$.

6.32. 4) $[-3-\sqrt{11};\ -3+\sqrt{11}]$. **6.33.** 1) $\{-3\}\cup[-1;\ 3]$; 3) $(-4;\ 1)\cup(-1;\ 0)$; 4) $(-\infty;\ 0)\cup\{-3\}\cup(4;\ +\infty)$. **6.34.** 1) $(-1;\ 3)\cup(3;\ 6)$; 2) $(-\infty;\ -3]\cup\cup\{-1\}\cup[5;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 0)\cup(3;\ +\infty)$. **6.35.** $(-1;\ 0)\cup(1;\ 2]$. **6.36.** 1) Якщо $a<-2$, то $6<x<3a$; якщо $a=-2$, то розв'язків немає; якщо $a>-2$, то $-3a<x<6$; 2) якщо $a<3$, то $x\leqslant 2+a$ або $x\geqslant 5$; якщо $a=3$, то $x\in R$; якщо $a>3$, то $x\leqslant 5$ або $x\geqslant 2+a$. **6.37.** 1) Якщо $a<4$, то $x<2a$ або $x>8$; якщо $a=4$, то $x<8$ або $x>8$; якщо $a>4$, то $x<8$ або $x>2a$; 2) якщо $a<5$, то $a-2\leqslant x\leqslant 3$, якщо $a=5$, то $x=5$; якщо $a>5$, то $3\leqslant x\leqslant a-2$. **6.38.** 1) $-\frac{1}{3}\leqslant b\leqslant\frac{1}{3}$; 2) $-7<b<5$. **6.39.** 7 пігулок. **§ 7.** **7.9.** 1) Так; 2) ні. **7.10.** 1) Ні; 2) так. **7.11.** -1; -16. **7.12.** 0; 32. **7.13.** -3. **7.14.** 13. **7.15.** 0. **7.16.** 9. **7.17.** 2) $x+10+\frac{25x-9}{x^2-3x+1}$. **7.18.** 1) $x^3-6x^2-4x-8+\frac{3}{x-1}$. **7.21.** $a=5$; $b=-7$. **7.22.** $a=2$; $b=1$. **7.23.** 2) $(x-1)^2(x+2)(x-3)$. **7.24.** 1) $(x+3)(x-1)(x-4)$; 2) $(x+1)^2(x+4)(x-2)$. **7.25.** 1) 2; 2) -5; -1; 3; 3) 1; -2; 4) -2; 3; $1\pm\sqrt{6}$. **7.26.** 1) -3; 2) -4; -2; 1; 3) -1; 2; 4) -2; 2; $-1\pm2\sqrt{2}$. **7.27.** 1) $(-2;\ 1)\cup\cup(3;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -4]\cup[1;\ 2]$. **7.28.** 1) $[-1;\ 2]\cup[4;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -3)\cup(-1;\ 2)$. **7.29.** $a=15$; $b=8$. **7.30.** $a=-2$; $b=-1$. **7.31.** 1) $x(x-2)^2(x^2-3x+7)$. **7.32.** 2) $(x+1)^2(x-3)(x^2-x+2)$. **7.33.** 1) 0,25. **7.34.** 2) 0,5; $-2\pm\sqrt{5}$. **7.35.** $3x-2$. **7.36.** 2. **7.37.** $(-\infty;\ -2]\cup\{1\}$. **7.38.** $\{-1\}\cup[3;\ +\infty)$. **7.39.** 7500 кг. **7.40.** 1) $f(x)=\frac{C}{A-B}\cdot x^{2k-1}$; 2) $f(x)=\frac{C}{A+B}\cdot x^{2k}$. **§ 8.** **8.13.** $\frac{1+2n}{1-2n}$. **8.14.** $\frac{n}{n+1}$. **8.29.** *Вказівка.* $243=3^5$, провести індукцію за числами з 3^n одиницями. **8.32.** 16 %.

Розділ 2. **§ 9.** **9.22.** 1) 1; 2) -5. **9.23.** 1) 0,05; 2) 4. **9.24.** 1) 40; 4) -125. **9.25.** 2) 80; 3) -486. **9.26.** 1) $0\leqslant x\leqslant 2$; 3) $x\leqslant-4$, $x\geqslant 2$. **9.27.** 1) $x\leqslant-3$, $x\geqslant 0$; 2) $x\in R$; 4) $-1\leqslant x\leqslant 1$. **9.28.** 1) 2; -2; 2) -2; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 3; 1. **9.29.** 1) 2; -2; 2) -3; 3) $\varnothing$; 4) -7; 5) 6; 0; 6) $\sqrt[5]{2}-1$. **9.30.** 1) $f(4)<f(7)$; 3) $f(0)<f(18)$; 4) $f(3)>f(-3)$. **9.31.** 2) $g(-9)<g(-8)$; 3) $g(1,7)>g(0)$. **9.32.** 2) $g(-7)<g(-11)$; 3) $g(-7)=g(7)$. **9.33.** 1) $f(9)>f(7)$; 4) $f(9)>f(-7)$. **9.34.** 1) 1 і 2; 3) 2 і 3; 4) -1 і 0. **9.35.** 1) 1 і 2; 2) -1 і 0; 3) 2 і 3. **9.36.** 1,4 м; 1,96 м^2. **9.37.** 20 %. **9.38.** 10 %. **9.39.** 1) 2; 2) 1; 3) 1; 4) 0. **9.40.** 1) 0; 2) 3; 3) 1; 4) 2. **9.43.** 1) ±2; 2) 2; -1; 3) коренів немає; 4) 2; -2; $\sqrt[8]{3}$; $-\sqrt[8]{3}$. **9.44.** 1) ±1; 2) 1; -3; 3) коренів немає; 4) 1; -1; $\sqrt[6]{5}$; $-\sqrt[6]{5}$. **9.45.** $(-3;\ -1]\cup[5;\ +\infty)$. **9.46.** $[-3;\ 2)$. **9.49.** 1) $(-\infty;\ -4)\cup[-1;\ 1]$. **9.50.** 2) $(-5;\ 0]\cup[2;\ 5)$. **9.51.** 1) Якщо $a\geqslant 1$, то $x_{1,2}=\pm\sqrt[8]{a-1}$; якщо $a<1$, то коренів немає; 2) $x=\sqrt[5]{a+7}$ для $a\in R$. **9.52.** 3) Якщо $a=0$, то $x\in R$; якщо $a\neq 0$, то $x_{1,2}=\pm1$;

4) якщо $a \leqslant 0$, то коренів немає; якщо $a > 0$, то $x_1 = \sqrt[10]{\frac{2}{a}}$, $x_2 = -\sqrt[10]{\frac{2}{a}}$.
9.53. 10 °С. **9.54.** Ні. *Вказівка.* При виконанні вказаної процедури не змінюється сума квадратів трьох чисел. **§ 10.** **10.17.** 1) 45; 2) 108; 3) $\frac{5}{9}$; 4) $\frac{2}{27}$. **10.18.** 1) 98; 2) 72; 3) $\frac{5}{16}$; 4) $\frac{48}{125}$. **10.19.** 1) 6; 2) 6; 3) 245; 4) 28. **10.20.** 1) 15; 2) 6; 3) 36; 4) 18. **10.21.** 1) 5; 2) 2; 3) 2; 4) 2. **10.22.** 1) 3; 2) 3. **10.23.** 1) $8a$; 2) $4p^2$; 3) $5a^2b^3$; 4) $\frac{2}{3}p^4x^3$. **10.24.** 1) $5m^2$; 2) $2b$; 3) $4t^2m^5$; 4) $\frac{2}{3}xm^6$. **10.25.** 2) $a \leqslant 0$; 3) $a \in R$; 4) $a = 0$; 5) $a \geqslant -1$; 6) $a \leqslant -1$; 7) $a \in R$; 8) $a = 2$. **10.26.** 1) $b \geqslant 0$; 3) $b \in R$; 4) $b = 0$; 6) $b \leqslant 3$; 7) $b \in R$; 8) $b = -1$. **10.27.** 2) $x < 0$, $y < 0$; 3) $x > 0$, $y > 0$. **10.28.** 1) $c > 0$, $t > 0$; 4) $c < 0$, $t < 0$. **10.29.** 1) $|t + 2|$; 2) $(a + 1)^2$; 3) $x - 1$; 4) $5 - b$. **10.30.** 1) $5 - \sqrt{2}$; 2) $3 - \sqrt{7}$. **10.31.** 3) $5 - \sqrt{2}$; 4) 2. **10.32.** 1) $|p|$; 2) c; 3) $-b$; 4) m^4; 7) $2m^3$; 9) $-0{,}2ab^2$; 10) $-c^3p^5$. **10.33.** 2) $|t|$; 3) $-c$; 5) $2a^3$; 6) $-10t$; 8) c^7m^{10}; 9) $-0{,}3mp^4$. **10.34.** 1) $\sqrt[12]{7}$; 2) $\sqrt[10]{3}$; 6) $\sqrt[5]{x}$. **10.35.** 3) $\sqrt[4]{5}$; 4) $\sqrt[15]{m^4}$; 5) $\sqrt[20]{x^7}$. **10.36.** 1) $\sqrt[6]{m^5}$; 2) $\sqrt{|b|}$; 4) $\sqrt[3]{|a^7|b^4}$. **10.37.** 1) $\sqrt[5]{c^3}$; 4) $\sqrt[3]{p^4|a^5|}$. **10.38.** 1) 49; 2) 8; 3) 121; 4) −8; 5) 2; 6) 9. **10.39.** 1) 100; 2) 4; 3) 25; 4) −27; 5) 3; 6) 4. **10.40.** 1) 1; 2) −1. **10.41.** 1) 2; 2) −1. **10.44.** 2320 грн. **10.45.** Для 4-х. **§ 11.** **11.19.** 1) $4a^2\sqrt{2}$; 4) $3c^2\sqrt[3]{2c^2}$; 5) $a^2b\sqrt[6]{ab^2}$; 6) $-2xy\sqrt[4]{2x^2}$. **11.20.** 1) $5a^3\sqrt{3}$; 2) $2p^4\sqrt[4]{3}$; 3) $12m^3\sqrt[6]{2}$; 4) $5x\sqrt[3]{2x}$. **11.21.** 2) $\sqrt{3x^2}$; 3) $-\sqrt[4]{7y^4}$; 5) $-\sqrt[8]{-p^9}$; 6) $-\sqrt[4]{2x^4y^4}$. **11.22.** 1) $\sqrt[5]{3b^5}$; 3) $-\sqrt{at^2}$; 4) $\sqrt[5]{c^9}$. **11.23.** 1) $\sqrt{13} + 1$; 4) $3(\sqrt[3]{4} - 1)$. **11.24.** 1) $\sqrt{11} - 2$; 2) $\frac{3(\sqrt{15} - \sqrt{2})}{3}$. **11.25.** 1) $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}$; 2) $\frac{1}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[3]{b}}$. **11.26.** 1) $\frac{1}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$; 2) $\sqrt[5]{m} - \sqrt[4]{n}$. **11.27.** 1) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$; 3) $\sqrt[3]{a} + 2$; 4) $-(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$. **11.28.** 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{a} - 3}$. **11.29.** 1) $18\sqrt[5]{3a}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}$. **11.30.** 1) $3\sqrt[4]{2p}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt[6]{ab}}$. **11.32.** 3) $\sqrt[4]{ab}$; 4) 2, якщо $1 \leqslant x \leqslant 2$; $2\sqrt{x - 1}$, якщо $x > 2$. **11.33.** 1) $-\sqrt[4]{a}$; 2) $-2x$, якщо $x \leqslant -\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$, якщо $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$; $2x$, якщо $x \geqslant \sqrt{2}$. **11.34.** 1) 1; 2) 0,6. **11.35.** $-\frac{\sqrt{x + 1}}{x + 3}$, якщо $-1 < x < 1$; $\frac{\sqrt{x + 1}}{x + 3}$, якщо $x > 1$. **11.36.** 1) $\frac{\sqrt[4]{(a - 1)^3}}{a + 2}$. **11.37.** $\sqrt{6x}$; 1. **11.38.** 1) −1, якщо $0 < a < 1$; 1, якщо $a > 1$. **11.39.** 1) $a(\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b})$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x + 1}}$. **11.40.** 1) $3\sqrt{5}$; 2) −1; 3) $\frac{63}{65}$. **11.41.** 1) 2018; 2) 4; 3) $\frac{1}{3}$. **11.43.** 4.

11.44. 2) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30}}{2}$. **11.45.** 1) $7\sqrt{2}+5\sqrt{3}-12-\sqrt{6}$. **11.48.** 12 л; 360 л. **11.49.** (0; 1), (0; –1). **§ 12.** **12.9.** 1) Так; 2) ні. **12.10.** 1) Так; 2) так. **12.11.** 3) $\sqrt[4]{5}<\sqrt[8]{26}$; 4) $\sqrt[6]{3}>\sqrt[18]{26}$. **12.12.** 3) $\sqrt[3]{7}>\sqrt[6]{48}$; 4) $\sqrt[5]{4}<\sqrt[15]{65}$. **12.15.** 2) $[-2;\ +\infty)$. **12.16.** 2) $(-\infty;\ +\infty)$. **12.17.** 1) $-1\leqslant\sqrt[3]{x}\leqslant 3$; 2) $0<\sqrt[3]{x}\leqslant 10$. **12.18.** 1) $0\leqslant\sqrt[4]{x}<2$; 2) $1<\sqrt[4]{x}<3$. **12.21.** 1) 2 і 3; 3) 0 і 1; 5) –3 і –2; 6) –3 і –2. **12.22.** 2) 1 і 2; 4) –2 і –1; 6) –1 і 0. **12.23.** 1) 1; 2; 2) –3; –2; –1; 0; 1. **12.24.** 1) –1; 0; 1; 2; 2) 2; 3; 4; 5. **12.25.** 2) $(-7;\ 0]\cup[4;\ +\infty)$. **12.26.** 1) $(-\infty;\ -2)\cup(1;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 0]\cup[2;\ 3)$. **12.27.** 1) $\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[8]{10}<\sqrt[5]{3\sqrt[4]{3}}$. **12.28.** 1) $\sqrt[3]{3}<\sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[9]{7}<\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$. **12.29.** 1) 2; 2) 1. **12.30.** 1) 0; 2) 1. **12.33.** 1200 грн; треба замовити у фірми *B* 30 скляних прямокутників на суму 1200 грн, тоді різка буде безкоштовною, та ще й 2 скла залишиться. **§ 13.** **13.10.** 1) 4; 2) немає коренів; 3) 1; –1; 4) 2. **13.11.** 1) 5; 2) немає коренів; 3) 1; –1; 4) 3. **13.12.** 1) 1; 2) –8; 64. **13.13.** 1) 1; –32; 2) 81. **13.14.** 1) –6; 6; 2) –4; 4. **13.15.** 1) –7; 7; 2) –5; 5. **13.16.** 1) –1; 2) –2. **13.17.** 1) –1; 2) 1. **13.18.** 1) 52; 2) 15. **13.19.** 1) 3; 2) 2. **13.20.** 1) $1\pm 2\sqrt{2}$; 2) 0; –1. **13.21.** 1) $-1\pm\sqrt{6}$; 2) 0; 2. **13.22.** 1) 81; 2) 65; 730. **13.23.** 1) 256; 2) 0. **13.24.** 1) 0; 2; 2) 7,5; 4. **13.25.** 1) 9; 2) 8; 6. **13.26.** 1) 3; 2) 1; 4; 3) 8; 4) 2. **13.27.** 1) 2; 2) 1; 9; 3) 2; 4) 1. **13.28.** 2) –2; 0; 1; 3) –3; 2. **13.29.** 1) 1; –3; 4) –7; 8. **13.30.** 2) $-\sqrt{2}$. **13.31.** 1) $-\sqrt{5}$. **13.32.** 1) 1; 2) 0,5; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) $\frac{22}{19}$. **13.33.** 1) 1; –2; 2) –0,5; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 0. **13.34.** 3) Якщо $a=3$, то $x\geqslant 0$; якщо $a\neq 3$, то $x=1$. **13.35.** 2) Якщо $a=-1$, то $x\geqslant 1$; якщо $a\neq -1$, то $x=1$. **13.36.** 1) –0,5; 2) 1; 3) 1; 4) 4. **13.37.** 1) –3; 2) 2; 3) 3; 4) 2. **13.38.** 1) Якщо $a<-2$ або $-1<a<1$ або $a>2$, то 3 корені; якщо $-2\leqslant a\leqslant -1$ або $1\leqslant a\leqslant 2$, то 2 корені. **13.39.** 1) Якщо $a<-1$ або $a>4$, то 3 корені; якщо $-1\leqslant a\leqslant 4$, то 2 корені. **13.40.** Якщо $a<3$, то $x=3$; якщо $a\geqslant 3$, то $x=2+\left(\frac{a^2-3}{2a}\right)^2$. **13.41.** Якщо $a<4$, то $x=1$; якщо $a\geqslant 4$, то $x=\left(\frac{a^2-8}{2a}\right)^2$. **13.42.** 2. **13.44.** Найнижчий – *A*, найвищий – *B*. **§ 14.** **14.7.** 1) $(-\infty;\ 0]\cup[10;\ +\infty)$. **14.8.** 2) $[0;\ 1]\cup[4;\ 5]$. **14.9.** 1) $(-0{,}2;\ 0{,}5)$; 2) $(2;\ +\infty)$. **14.10.** 1) $(0;\ 3)$; 2) $[3;\ +\infty)$. **14.11.** 2. **14.12.** –1. **14.13.** 2) $[1;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$; 3) $\left[0;\ \frac{1}{11}\right)\cup(4;\ +\infty)$. **14.14.** 1) $x\geqslant 9$; 2) $x>5$; 4) $[0;\ 2]\cup[4;\ 20)$. **14.15.** 2) $x<1$; 3) $(-\infty;\ -7)\cup[2;\ +\infty)$. **14.16.** 1) $0\leqslant x\leqslant 4$; 4) $(-\infty;\ 5]\cup\left[-\frac{4}{3};\ 4\right)$. **14.17.** 5. **14.18.** 5. **14.19.** $0\leqslant x\leqslant 9$. **14.20.** $0\leqslant x\leqslant 1$. **14.21.** 1) $\left[\frac{1}{4};\ 4\right]$; 2) $(-\infty;\ -64)\cup$

∪ (1; +∞). **14.22.** 1) $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$; 2) [0; 1). **14.23.** 1) (2; 5); 2) [2; +∞).

14.24. 1) [2; 3] ∪ [6; 7]; 2) [0; 1). **14.27.** $c = -7$; $d = 3$. **14.28.** $a = 6$; $b = -1,5$. **14.29.** −1; 3; 4; 5. **14.30.** −2; 5; 6. **14.31.** 1) $\{-4\} \cup [-3; +\infty)$; 2) $[1; 1,25] \cup \{2\}$. **14.32.** 2) $\{0,2\} \cup [0,6; 1)$; 3) $\{-3\} \cup [-2; 4]$. **14.33.** 1) $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup [1; 2]$; 3) $\left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{5}{2}\right]$.

14.34. 1) $[-8; 3]$; 3) $[-1,5; -1) \cup (1; 2]$; 4) $(-\infty; -7] \cup (-5; -3] \cup [2; +\infty)$. **14.35.** Якщо $a < -1$, то розв'язків немає; якщо $-1 \leqslant a \leqslant 0$, то $x \in [1 - \sqrt{1+a}; 1 + \sqrt{1+a}]$; якщо $a > 0$, то $x \in \left[-0,5a; 1 + \sqrt{1+a}\right]$.

14.36. −2; 2. **14.37.** $-\frac{1}{4}$. **14.38.** 1440 осіб. **14.39.** 1) $x = 6$, $y = 2$, $z = 1$; 2) $x = 6$, $y = 1$, $z = 2$; 3) $x = 8$, $y = 3$, $z = 1$; 4) $x = 8$, $y = 1$, $z = 3$.

§ 15. **15.20.** 1) 16; 2) 0,5; 4) −1475. **15.21.** 1) 32; 3) 63,5; 4) 36. **15.22.** 1) $[0; +\infty)$; 2) $(0; +\infty)$; 3) $(2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$. **15.23.** 2) $p > 0$; 3) $a \geqslant -2$; 4) $0 < x < 4$. **15.24.** 1) x^{-8}; 2) x^{7}. **15.25.** 1) a^{-3}; 2) a^{-11}. **15.26.** 3) 2; 6) 1,2. **15.27.** 1) 1; 5) 0,25; 6) 1,5. **15.28.** 1) $27b^{-1}$; 4) $0,5a^{-0,3}$. **15.29.** 2) $0,5a$; 3) $0,008b^{-3}$. **15.30.** 1) $16 + x$; 4) $a - 1$.

15.31. 1) $4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; 2) $9a^{5} + a$. **15.32.** $2a^{\frac{3}{2}}$; 16. **15.37.** 1) $x^{\frac{1}{2}}$; 3) $a^{0,5} + b^{0,5}$; 6) $\frac{x^{0,5}}{2x - y^{0,5}}$. **15.38.** 1) $m^{\frac{1}{3}}$; 2) $\frac{1}{x^{0,5} - y^{0,5}}$; 6) $x^{\frac{1}{3}} + 2$. **15.39.** 1) $3^{\frac{1}{2}} > 5^{\frac{1}{3}}$; 2) $2^{-\frac{1}{6}} > 3^{-\frac{1}{8}}$. **15.40.** 1) $2^{\frac{1}{4}} < 3^{\frac{1}{5}}$; 2) $3^{-\frac{1}{2}} < 4^{-\frac{1}{3}}$. **15.43.** 1) $a + 1$; 2) $\frac{9}{x - 9}$.

15.44. 1) $x + y$; 2) $\frac{1}{m - 1}$. **15.47.** $\frac{ab}{a + b}$; 1,2. **15.52.** $2b + 2a$. **15.53.** $\frac{b}{a}$.

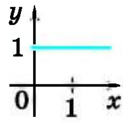
15.54. $\frac{m^2}{n^2}$. **15.55.** 150 000 грн. **15.56.** Ні. **§ 16.** **16.18.** 2) −1; 3) коренів немає; 4) ±3; 5) 9; −3; 6) 1; −2. **16.19.** 1) 62; 2) 4; 4) −1; 3. **16.20.** 1) $7^{1,2} < 7,2^{1,2}$. **16.21.** 2) $5^{-6} < 4,8^{-6}$. **16.22.** 2) $f(-5) > f(-5,1)$; 4) $f(-2,7) > f(2,8)$. **16.23.** 2) $g(1,7) < g(1,6)$; 4) $g(7,9) = g(-7,9)$. **16.26.** 1) −1,7; 2) ±5. **16.27.** 1) 2; −8; 2) ±11. **16.28.** 16. **16.29.** 1. **16.30.** 1) 2; 2) 1. **16.31.** 1) 1; 2) 2. **16.34.** 1) Непарним; 2), 4) парним; 3) встановити неможливо. **16.35.** 1), 3) Парним; 2) встановити неможливо; 4) непарним. **16.37.** 2520 грн. **16.38.** −1.

Розділ 3. **§ 17.** **17.21.** 1) −310°; 770°; 2) 520°; −560°. **17.22.** 1) 120°; 2) 290°; 3) 70°; 4) 50°. **17.23.** 1) 450°; 2) 450°; 630°; 3) 360°; 540°; 720°; 4) 540°. **17.24.** 1) −90°; 2) 0°; 360°. **17.27.** 1) 0,75; 4) −4. **17.28.** 2) 0,5; 4) 2. **17.29.** 1) $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$; 2) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) −1. **17.30.** 1) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$; 2) 1.

17.31. 1) (0; 1); 3) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **17.32.** 2) (0; 1); 4) $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **17.33.** $\pm\frac{1}{2}$.

17.34. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. **17.35.** 1) -2; 2) 1. **17.36.** 1) -2; 2) 1. **17.37.** $P_{-\alpha}(a; -b)$; $P_{\alpha+180^\circ}(-a; -b)$. **17.38.** 2) $(-1; 0)$, $(1; 0)$; 3) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $(0; -1)$, $(0; 1)$. **17.39.** 1) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $(1; 0)$, $(-1; 0)$; 3) $(1; 0)$. **17.40.** 28 упаковок. **17.41.** $\frac{125}{62}$. **§ 18.** **18.20.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{4\pi}{5}$; 6) $\frac{9\pi}{10}$. **18.21.** $\frac{\pi}{10}$; $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{\pi}{2}$. **18.22.** 4) $-2\pi < -6$. **18.23.** 2) $2\pi < 6{,}3$; 3) $-\pi > -3{,}2$. **18.24.** 1) 0,75; 4) 0. **18.25.** 2) 0,25; 3) 0. **18.26.** 2) 2; $2\sqrt{3}-2$. **18.27.** 1) 2; 1,5; 2; 2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}-1$; 1,5; 1. **18.28.** 1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $(0; 1)$. **18.29.** 2) $(-1; 0)$; 3) $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **18.30.** 1) 8; 2) 16. **18.31.** 1) 0,4; 2) $-0{,}25$. **18.32.** 1) 0,5; 2) 1. **18.33.** 1) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}+\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} < -2$; 2) $\sin\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{5\pi}{6} > \sqrt[3]{4}$. **18.34.** 1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} > 2$; 2) $\cos\frac{3\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4} < -\sqrt[5]{5}$. **18.37.** 1) $(1; 0)$; 2) $(0; -1)$; 4) $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$. **18.38.** 2) $(1; 0)$, $(-1; 0)$. **18.39.** 7000 грн. **18.40.** -1. **§ 19.** **19.20.** 1) 0; 2; 4) -3; -2. **19.21.** 2) -2; 0; 3) 1; 2. **19.22.** 1) Ні; 2) так. **19.23.** 1) IV; 2) II; 3) III; 4) IV. **19.24.** 1) II; 2) I; 3) III; 4) IV. **19.25.** 1) $-\frac{2}{3}$; 2) 21. **19.26.** 1) 4,5; 2) 7. **19.29.** 1) $[-7; 1]$; 4) $[1{,}5; +\infty)$. **19.30.** 2) $[-1; 9]$; 3) $[1; 2]$; 4) $[6; +\infty)$. **19.31.** 1) Ні парна, ні непарна; 2) непарна; 3), 4) парна. **19.32.** 1), 4) Парна; 2) ні парна, ні непарна; 3) непарна. **19.33.** 1) 0; 4) $-3\operatorname{ctg}\beta$. **19.34.** 2) $2\sin x$; 3) $2\operatorname{tg}x$. **19.35.** 1) $0 \leqslant b \leqslant 1$; 2) $b \leqslant -1$ або $b \geqslant 1$. **19.36.** 1) $-1 \leqslant a \leqslant 1$; 2) $1 \leqslant a \leqslant 2$. **19.37.** 1) I або III; 2) III або IV; 3) I або IV; 4) II або IV. **19.41.** $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. **19.42.** $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$. **19.43.** $a > 3$. **19.44.** $a > 1$. **19.45.** $(0; 0)$, $(1; 0)$. **19.46.** $12\pi - 1$. **19.47.** $12\pi - 1$. **19.48.** $-1{,}25 \leqslant a \leqslant -1$. **19.49.** $-0{,}25 \leqslant a \leqslant 0$. **19.50.** 1) $a = \frac{1}{16}$. **19.51.** 6000 грн. **19.52.** $f(x) = 1$. **§ 20.** **20.24.** 1) $\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\frac{2}{\cos x}$; 5) $-\frac{1}{\sin 2x}$; 6) $\cos^2\frac{x}{4}$. **20.25.** 1) $\operatorname{ctg}\beta$; 3) $-2\operatorname{tg}\alpha$; 4) $-\frac{1}{\sin x}$; 6) $\sin^2\frac{x}{3}$. **20.28.** 1) $\sin^2 2x$; 2) 0. **20.29.** 2) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. **20.30.** 1) $\sin\beta = \frac{5}{13}$; $\cos\beta = \frac{12}{13}$. **20.31.** 1) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$. **20.32.** 2) $\operatorname{tg}\beta = 2$; $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

20.33. 1) $\cos 3\alpha - \sin 3\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^2 \alpha$. **20.34.** 1) $\sin 2\beta + \cos 2\beta$; 2) $\operatorname{ctg}^2 x$. **20.37.** 1) 2; 2) 1,5; 3) 4. **20.38.** 1) −19; 2) −0,5; 3) 1,325. **20.40.** 0. **20.41.** 1) −3; 4; 2) не існують. **20.42.** [3; 7]. **20.43.** 1) $-2\operatorname{tg}\alpha$; 2) $2\operatorname{tg}\alpha$. **20.44.** 1) $-2\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $2\operatorname{ctg}\alpha$. **20.45.** 1) $\cos\alpha - \sin\alpha$; 2) 1. **20.46.** 1) $-\sin\alpha - \cos\alpha$; 2) 1. **20.47.** Рівні між собою. *Вказівка*. Розгляньте різницю виразів та доведіть, що вона дорівнює 0. **20.48.** Рівні між собою (див. вказівку до 20.47). **20.49.** 3) 0,5392; 6) 1,4 або −1,4. **20.50.** 1) −0,48; 4) 0,3088; 5) $-2\frac{1}{12}$; 6) 1,4 або −1,4. **20.51.** 1) 7; 2) 18; 3) 47; 4) 322; 5) $\frac{1}{3}$; 6) $\sqrt{5}$ або $-\sqrt{5}$. **20.52.** 1) 3; 2) 4; 3) 7; 4) $\sqrt{5}$ або $-\sqrt{5}$. **20.53.** 2) Мал. 1; 3) пряма $y = 1$ з «порожніми» точками вигляду $(\pi k;\ 1)$, $k \in Z$. **20.54.** 1) Відрізок з кінцями (−2; 1) і (2; 1); 2) парабола $y = x^2$, у якої «порожні» точки з абсцисами $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **20.55.** 1. **20.56.** 1) 3780 Вт. **20.57.** $x = \sqrt[3]{\frac{a^3}{27} - c} - \frac{a}{3}$.



Мал. 1

§ 21. **21.15.** 1) −2; 2) $-\sqrt{3}$. **21.16.** 1) −1; 2) −1,25. **21.17.** 2) 0; 4) 1. **21.18.** 1) 1; 3) −1. **21.19.** 1) $\sin^2\alpha$; 2) 1; 3) −1; 4) $\cos^2\alpha$. **21.20.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) 0. **21.23.** 1) 0,8; 4) 0,6 або −0,6. **21.24.** 1) −0,6; 2) −0,8. **21.25.** $\cos\beta = \frac{5}{13}$; $\sin\beta = \frac{12}{13}$. **21.26.** $\sin\alpha = \frac{8}{17}$; $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$. **21.29.** $-\frac{15}{17}$. **21.30.** 1) $-\frac{2}{3}$; 2) тупокутний. **21.31.** 1) 1; 2) 0; 3) 0; 4) 2. **21.32.** 1) 1; 2) 0; 3) 0; 4) 2. **21.33.** 1. **21.34.** 1. **21.35.** 1) 1; 2) 0. **21.36.** 1) 1; 2) 0. **21.37.** 1) $\cos^2\alpha$; 3) $0{,}5\operatorname{ctg}^2\alpha$. **21.38.** $0{,}5\operatorname{ctg}^2\alpha$. **21.39.** 14 пачок. **21.40.** $p = 3$. **§ 22.** **22.19.** 1) $f(t) = 2{,}5\sin\left(3\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$. **22.20.** 1) $f(t) = 4\sin\left(4t + \frac{\pi}{8}\right)$. **22.21.** 1), 2), 4) Ні; 3) так. **22.22.** 1) 2π; 4) 4. **22.23.** 2) 30π; 3) 18. **22.24.** 2) $\frac{\pi}{2} + 3\pi k$, $k \in Z$. **22.25.** 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **22.26.** 1) $\sin 0{,}7\pi > \sin 0{,}8\pi$; 2) $\cos 2 > \cos 3$. **22.27.** 3) $\operatorname{tg} 0{,}2\pi < \operatorname{tg} 0{,}3\pi$; 4) $\operatorname{ctg}(-3) > \operatorname{ctg}(-2)$. **22.28.** 1) $\left(-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$. **22.29.** 2) $\frac{3\pi}{4} + 6\pi k < x < \frac{15\pi}{4} + 6\pi k$, $k \in Z$. **22.32.** 1) $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 4) $x \neq \pi k$, $k \in Z$. **22.33.** 2) $x \neq -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$; 3) $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$. **22.34.** 2) 2, якщо $x = 0$ або $x = 2\pi$; 4, якщо $x = \pi$.

22.35. 2) 0, якщо $x = \frac{\pi}{2}$; 2, якщо $x = \frac{3\pi}{2}$. **22.36.** 2) $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ або $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in N$. **22.37.** 1) $\frac{2\pi k}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$; 2) $2,5 \leqslant x \leqslant \pi$ або $2\pi k \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi k$, $k \in N$. **22.42.** −2; 2. **22.43.** −1; 1. **22.46.** 12. **22.47.** 15. **22.49.** 845 грн. **22.50.** (3; 7), (7; 3). **§ 23.** **23.23.** 2) $\sin\alpha$; 3) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$. **23.24.** 1) $-\sqrt{3}\cos\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} y$. **23.27.** 1) 1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **23.28.** 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$. **23.29.** 1) $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$; 2) $-\frac{7\sqrt{2}}{26}$. **23.30.** 1) $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$; 2) $\frac{8-15\sqrt{3}}{34}$. **23.31.** 1) 0,6; 2) 0,352. **23.32.** 1) 0,6; 2) −0,352. **23.34.** 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) 1. **23.36.** $\frac{21}{220}$. **23.37.** $1\frac{23}{33}$. **23.38.** 0. **23.41.** 1) ±1; 2) ±2; 4) $-\sqrt{13}$; $\sqrt{13}$. **23.42.** 3) [−13; 13]; 4) $[-\sqrt{10}; \sqrt{10}]$. **23.45.** $\frac{\pi}{4}$. **23.46.** 135°. **23.49.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **23.50.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **23.51.** 1) −1; 2) 2. **23.52.** 1. **23.55.** 1; 2; 3; 4. **23.56.** $-7 \leqslant b \leqslant 13$. **23.57.** 6. **23.59.** $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta < 1$. **23.60.** 400 К. **§ 24.** **24.26.** 1) $\frac{1-\cos(\alpha-32^\circ)}{2}$; 3) $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$. **24.27.** $-\frac{24}{25}$. **24.28.** 0,96. **24.29.** 1) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 4) $2\sin^2 7^\circ 30'$; 6) $2\sin^2 35^\circ$. **24.30.** 2) $2\cos^2\frac{\alpha}{4}$; 3) $2\sin^2 10^\circ$; 5) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **24.31.** 1) 2; 2) $\sin 2x$. **24.32.** 1) $\cos 3\alpha$; 2) $\sin 2x$. **24.33.** 1) $\frac{3}{5}$; 4) $-1\frac{1}{3}$. **24.34.** 2) $\frac{3}{5}$; 3) $1\frac{1}{3}$. **24.35.** 1) Так; 2) ні. **24.36.** 1) Ні; 2) так. **24.37.** −0,5. **24.38.** 1. **24.39.** 1) $\sin 2\alpha$; 2) 4; 3) 2; 4) $\operatorname{tg}\alpha$. **24.40.** 1) 2; 2) $\operatorname{tg} 2x$. **24.43.** $\frac{3}{4}\sin 4\alpha$; $\frac{3}{8}$. **24.44.** $\operatorname{ctg}\alpha$. **24.45.** 0,84. **24.46.** −0,96. **24.47.** 1) $\left|\sin\frac{\alpha}{8}\right|$; 2) $-\operatorname{tg} 2\alpha$. **24.48.** 1) $-\cos 2\alpha$; 2) $\left|\operatorname{ctg}\frac{3\alpha}{2}\right|$. **24.49.** $\cos\beta = -0,28$; $\sin\beta = 0,96$. **24.50.** 1) −0,96; 2) 0,936. **24.51.** 1) −0,28; 2) 0,936. **24.53.** 1) $\frac{3}{16}$; 2) $\sqrt{3}$. **24.54.** 1) $\frac{1}{16}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **24.56.** $\frac{7}{9}$. **24.57.** $\frac{1}{2}$. **24.58.** $\frac{1}{4}$. **24.59.** 1) $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$; 2) $\pm\sqrt{7}$. **24.60.** 1) $-\frac{8}{15}$; 2) $\pm\sqrt{\frac{5}{8}}$. **24.61.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $-\frac{1}{8}$. **24.62.** 0,104. **24.63.** 0,37. **24.64.** $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$. **24.65.** $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 15^\circ$. **24.66.** 1) $\cos\alpha$;

2) $-2\cos\frac{\alpha}{4}$. **24.67.** 28 грн. **§ 25. 25.15.** 1) $\operatorname{tg}5\alpha$; 2) $-\operatorname{ctg}5\alpha$. **25.16.** 1) $-\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\operatorname{tg}6\alpha$. **25.22.** 1) $-\frac{1}{\sin 2x}$. **25.23.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2\sin 50^\circ \sin 5^\circ}$. **25.24.** *Вказівка.* Спочатку понизити степінь. **25.35.** 1) $\operatorname{tg}2\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}5{,}5\alpha$. **25.36.** 1) $-\operatorname{ctg}3\alpha$; 2) $\operatorname{tg}4{,}5\alpha$. **25.37.** 2) 2. **25.38.** 1) 0,5; 2) 2. **25.39.** 1) 1; 4) $\sin 2\alpha$. **25.40.** 1) 1; 2) $4\operatorname{tg}\alpha$. **25.41.** 1) -2; 4) 0,5. **25.42.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{8}$; 3) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; 4) $-0{,}5$. **25.47.** $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{7}{\sqrt{130}}$; $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{9}{\sqrt{130}}$. **25.48.** $\frac{27}{7\sqrt{130}}$. **25.49.** 3. **25.54.** 21 480 грн. **25.55.** $-\frac{65}{63}$.

Розділ 4. § 26. 26.15. 1) 0; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **26.16.** 1) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $-\sqrt{3}$. **26.17.** 1) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; 2) $\left[-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}\right]$. **26.18.** 1) $[1; 4]$; 2) $[-1; 0{,}5]$. **26.19.** 1) Непарна; 2) ні парна, ні непарна. **26.20.** 1) Непарна; 2) ні парна, ні непарна. **26.21.** 1) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$; 2) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. **26.22.** 1) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; 2) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. **26.23.** 1) 1; 7; 2) 0; 1. **26.24.** 1) 0; 1,5; 2) -2; -3. **26.25.** 2) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; 3) $-\frac{1}{5}$. **26.26.** 1) 0,96; 4) 5. **26.29.** 1) $6-2\pi$; 4) $\frac{2\pi}{3}$. **26.30.** 2) $6\pi-16$; 3) $-\frac{2\pi}{7}$. **26.31.** 1) 1; 2) $\frac{\pi}{4}$. **26.32.** 1; 2) $\frac{\pi}{4}$. **26.33.** 1) $[-2; 1]$; 2) $[-6; 2)\cup(3; 8]$. **26.34.** 1) $[-0{,}4; 1]$; 2) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{3}; 5\right]$. **26.37.** 1) $-\frac{16}{65}$; 2) $-0{,}28$. **26.38.** 1) $\frac{36}{325}$; 2) 0,28. **26.41.** $[0; 2\pi]$. **26.42.** $[\pi; 3\pi]$. **26.43.** 1) $\frac{9\pi}{14}$; 4) $\frac{5\pi}{2}-5$. **26.44.** 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $-\frac{7\pi}{18}$. **26.45.** 1) $\pi-1$; 2) 0. **26.46.** 1) 1; 2) $8\pi-25$. **26.47.** $\pi(x^2+x+0{,}5)$. **26.48.** 3) $[0; \pi]$; 4) $\left[\frac{\pi^2}{8}; \frac{5\pi^2}{4}\right]$. **26.49.** 1) $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right)$; 2) $\left[-\frac{\pi^2}{2}; \frac{\pi^2}{16}\right]$. **26.50.** ≈158 см. **26.51.** 5, 4 та 7 рибалок. **§ 27. 27.7.** 2) коренів немає; 3) 1; 3; 4) $\pm\sqrt{6}$. **27.8.** 1) $-\frac{6+\sqrt{3}}{4}$; 2) 3; 1; 3) 0; $-\frac{1}{3}$; 4) -1; 4. **27.9.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 0. **27.10.** 1) -1; 2) 1. **27.11.** 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 1; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\sin 0{,}5$; 4) $\frac{1}{2}$. **27.12.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\varnothing$; 3) $-\sin 1{,}5$; 4) 1. **27.13.** 1) $(-\infty; 3]$; 2) $[-1; 0)$.

27.14. 1) $(-\infty;\ -3]$; 2) $[0;\ 0{,}5)$. **27.15.** 1) $[-1;\ 1]$; 4) $(-\infty;\ \text{ctg}\,2)$. **27.16.** 2) $\left[-1;\ \dfrac{1}{12}\right)$; 3) $\left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right]$. **27.17.** 1) $[-\pi;\ 0]$; 2) $(2\pi;\ 3\pi)$. **27.18.** 1) $[\pi;\ 2\pi]$; 2) $(-2\pi;\ -\pi)$. **27.19.** 2. **27.20.** 2,5. **27.21.** 1) $\varnothing$; 2) 1; 3) $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **27.22.** 1) 0,5; 2) 1. **27.23.** 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\pm\sqrt{2}$; 3) $-0{,}6$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **27.24.** 1) 0,5; 2) -1; 3) $\varnothing$; 4) 0; -1. **27.25.** 1) $\left[-2;\ \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2};\ 1\right]$; 2) $(-\infty;\ \text{tg}\,1)$; 4) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right]$. **27.26.** 2) $[\cos 1;\ 1]$; 3) $\varnothing$; 4) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right]$. **27.27.** 1) Якщо $a = 1$, то $x \in [-1;\ 1]$; якщо $a \neq 1$, то $x = -\sin 1$. **27.28.** 1) Якщо $a = -2$, то $x \in [-1;\ 1]$; якщо $a \neq -2$, то $x = \cos 1$. **27.29.** 1) $\sin\dfrac{\pi - \sqrt{\pi^2+16}}{4}$; 2) $\varnothing$. **27.30.** $3\,\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}(1-\sqrt{7})\right)$. **27.31.** 1) 0; -1; 1; 2) 0,5; 1; 3) $\pm 0{,}5$; 0. **27.32.** 1) $\pm 0{,}5$; 0; 2) 0; 0,5; 3) 1. **27.33.** 1) $(-1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$. **27.34.** $(2;\ -1)$, $(-2;\ -1)$. **27.35.** $\left(-\dfrac{\pi^2}{2};\ \dfrac{\pi^2}{16}\right]$. **27.36.** Якщо $a \in (0;\ \pi]$, то $x = \cos a$; якщо $a \in [-2\pi;\ 0)$, то $x = \cos\dfrac{a}{2}$; якщо $a \in (-\infty;\ -2\pi) \cup \{0\} \cup (\pi;\ +\infty)$, то коренів немає. **27.37.** Якщо $a \in (0;\ 2\pi]$, то $x = \cos\dfrac{a}{2}$; якщо $a \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ 0\right)$, то $x = \cos 2a$; якщо $a \in \left(-\infty;\ -\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \{0\} \cup (2\pi;\ +\infty)$, то коренів немає. **27.38.** Якщо $a < 0$, то $\dfrac{1}{a} \leqslant x < -\dfrac{1}{2a}$; якщо $a = 0$, то $x \in R$; якщо $a > 0$, то $-\dfrac{1}{2a} < x \leqslant \dfrac{1}{a}$. **27.41.** 5000 км/с^2. **27.42.** $(3;\ -2)$, $(5;\ 2)$, $(-3;\ 2)$, $(-5;\ -2)$. **§ 28.** **28.11.** 1) $x \neq -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 2) $x \neq \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; 3) $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; 4) $x \neq \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **28.12.** 1) $x \neq -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; 2) $x \neq \pi + 6\pi k$, $k \in Z$. **28.13.** 1) $75° + 180°k$, $k \in Z$; 2) $180° + 720°k$, $k \in Z$. **28.14.** 1) $50° + 180°k$, $k \in Z$; 2) $200° + 360°k$, $k \in Z$. **28.15.** 1) $-\dfrac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in Z$; 2) $4\pi k$ або $-\dfrac{2\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in Z$. **28.16.** 1) $\dfrac{\pi k}{4}$, $k \in Z$; 2) $4\pi + 4\pi k$, $k \in Z$. **28.17.** 1) $\dfrac{\pi}{2} + 6\pi k$, $k \in Z$; 2) $-\dfrac{3\pi}{16} + \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **28.19.** 4) $\pm\pi + 3\pi k$,

$k \in Z$. **28.20.** 3) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{32}+\frac{\pi k}{8}$, $k \in Z$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$. **28.21.** 1) πk, $k \in Z$; 3) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 4) $2\pi k$, $k \in Z$. **28.22.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$; 2) $\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in Z$; 4) $2\pi k$, $k \in Z$. **28.23.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$; 2) $45°+180°k$, $k \in Z$. **28.24.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$; 2) $135°+180°k$, $k \in Z$. **28.25.** 2) $\frac{6}{3\pi k-\pi}$, $k \in Z$. **28.26.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)^2$, $k = 0; 1; 2; \ldots$ **28.27.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{4\pi}{3}$. **28.28.** 1) -2π; 2) $-\frac{\pi}{6}$. **28.29.** $\frac{11\pi}{16}$; $-\frac{5\pi}{16}$. **28.30.** 1) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$; $-\frac{5\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{12}$. **28.31.** 1) $-5 \leqslant a \leqslant -4$; 2) $a = 1$ і $-2 \leqslant a \leqslant 0$. **28.32.** 1) $3 \leqslant b \leqslant 4$; 2) $b = -2$; $1 \leqslant b \leqslant 3$. **28.33.** 1) $\varnothing$; 3) πk, $k \in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$. **28.34.** 1) $\varnothing$; 2) $2\pi k$, $k \in Z$; 4) πk, $k \in Z$. **28.35.** 1) $-1,5$; πk, $k \in Z$; 2) $-0,5$; $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$. **28.36.** 1) 1; $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$; 2) 5; πk, $k \in Z$. **28.37.** $-\pi$. **28.38.** $-\frac{\pi}{2}$. **28.39.** $\frac{\pi^2}{9}(1+6n)^2$, $n \in Z$. **28.40.** $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)^2$, $n \in Z$. **28.41.** $\frac{3\pi}{4}$. **28.42.** π. **28.43.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{6}+2\pi m$, $m \in Z$. **28.44.** $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$; $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$. **28.45.** $\frac{19}{6}$. **28.46.** 4. **28.47.** Якщо $a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $a > 1$, то коренів немає; якщо $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant a < \frac{1}{2}$ або $a = 1$, то 1 корінь; якщо $\frac{1}{2} \leqslant a < 1$, то 2 корені. **28.48.** Якщо $a < \frac{1}{2}$ або $a > 1$, то коренів немає; якщо $\frac{1}{2} \leqslant a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ або $a = 1$, то 1 корінь; якщо $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant a < 1$, то 2 корені. **28.49.** 1) Якщо $a = 0$, то коренів немає; якщо $a \neq 0$, то $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{a}+\pi k$, $k \in Z$; 4) якщо $a = 1$, то $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$; якщо $a \neq 1$, то $x = \frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$. **28.50.** 2) Якщо $a = 0$, то $x \in R$; якщо $a \neq 0$, то $x = \pi k$, $k \in Z$; 3) якщо $-1 < a < 1$, то коренів немає; якщо $a \leqslant -1$ або $a \geqslant 1$, то $x = \pm\arccos\frac{1}{a}+2\pi k$, $k \in Z$. **28.51.** -7; -13. **28.52.** -3; -21. **28.53.** 1) $(-1)^n \arcsin\frac{2}{\pm\pi+8\pi k}+\pi n$,

$n \in Z$, $k \in Z$. **28.54.** 2) $\pm\arccos\left(-\frac{10}{11}\right)+2\pi m$, $m \in Z$, $\pm\arccos\frac{2}{11}+2\pi k$, $k \in Z$; $\pm\arccos\frac{6}{11}+2\pi n$, $n \in Z$. **28.55.** $-\pi-\arccos\frac{\pi}{4}$; $\arccos\frac{\pi}{12}-2\pi$. **28.56.** $-\pi-\arcsin\frac{\pi}{12}$; $\arcsin\frac{\pi}{4}-\pi$. **28.57.** 1060 грн.

§ 29. **29.5.** 1) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$; 2) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in Z$. **29.6.** 1) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$. **29.7.** 3) $(-1)^k\arcsin(2-\sqrt{3})+\pi k$, $k \in Z$. **29.8.** 1) $2\pi k$, $k \in Z$; 4) $(-1)^k\arcsin(1-\sqrt{3})+\pi k$, $k \in Z$. **29.10.** 1) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in Z$; 3) $\pm\arccos\frac{\sqrt{10}-1}{3}+2\pi k$, $k \in Z$. **29.11.** 1) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$; 2) $\pm\arccos\frac{\sqrt{19}-2}{5}+2\pi k$, $k \in Z$; 4) πk, $k \in Z$. **29.12.** 1) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k \in Z$; 3) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in Z$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$; 4) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$. **29.13.** 3) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$; 4) $\pi+\frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$. **29.14.** 2) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k \in Z$. **29.15.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$; $(-1)^n\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in Z$; 2) $2\pi k$, $k \in Z$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$. **29.16.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$; 2) $2\pi k$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$. **29.17.** 1) $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi k$, $k \in Z$; 4) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in Z$. **29.18.** 2) $\pm\arccos\frac{3\pm\sqrt{7}}{6}+2\pi k$, $k \in Z$; 3) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in Z$. **29.19.** 2) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in Z$. **29.20.** 1) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k \in Z$. **29.22.** $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k \in Z$. **29.23.** $\frac{5\pi}{6}$. **29.24.** $\frac{5\pi}{3}$. **29.25.** $\frac{\pi}{12}$. **29.26.** $\frac{\pi}{3}$. **29.27.** 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$. **29.28.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$. **29.29.** 1) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$; 2) πk, $k \in Z$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in Z$. **29.30.** 3) $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$; 4) $\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$. **29.31.** 3. **29.32.** 3. **29.33.** $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k \in Z$. **29.34.** $\frac{7\pi}{6}+2\pi k$, $k \in Z$. **29.35.** $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k \in Z$. **29.36.** $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k \in Z$. **29.38.** $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{\sqrt{20}}{5}+\pi k$, $k \in Z$. **29.39.** 1) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in Z$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$,

$k \in Z$; $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **29.40.** 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in Z$; 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **29.41.** За 8 год. **§ 30.** **30.7.** 1) πk, $k \in Z$; $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $\pi + 2\pi k$, $k \in Z$; $(-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; 5) $\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; $\frac{\pi m}{5}$, $m \in Z$. **30.8.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $4\pi k$, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in Z$; 6) $\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. **30.9.** 1) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $-\operatorname{arctg} 10 + \pi m$, $m \in Z$; 2) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$; $-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{6} + \frac{\pi m}{6}$, $m \in Z$. **30.10.** 1) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{6} + \pi m$, $m \in Z$; 2) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$. **30.12.** 1) $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; 2) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$. **30.13.** 2) $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}$, $k \in Z$; 4) $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$; $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 5) $2\pi k$, $k \in Z$; 8) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. **30.14.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; 4) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 5) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $\frac{1}{2}(-1)^n \arcsin\frac{3}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $k \in Z$; 10) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $\frac{\pi m}{5}$, $m \in Z$. **30.15.** $-\frac{3\pi}{8}$. **30.16.** $\frac{3\pi}{8}$. **30.17.** 2) $\operatorname{arctg}\left(1 \pm \sqrt{2}\right) + \pi k$, $k \in Z$; 4) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; $-2\operatorname{arctg}\frac{1}{9} + 2\pi m$, $m \in Z$. **30.18.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi m$, $m \in Z$; 4) $2\pi k$, $k \in Z$; $2\operatorname{arctg}\frac{5}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$. **30.19.** 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) πk, $k \in Z$; $-\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **30.20.** 1) πk, $k \in Z$; $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **30.21.** $-5 \leqslant a \leqslant 5$. **30.22.** $-13 \leqslant b \leqslant 13$. **30.23.** 1) $-\frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$; $\frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in Z$. **30.24.** 2) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$; $-\frac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in Z$. **30.25.** 2) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; $(-1)^m \cdot \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{17} - 1}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$; 5) πk, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. **30.26.** 1) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$; 4) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **30.27.** $\frac{\pi}{4}$. **30.28.** $\frac{\pi}{4}$. **30.29.** 2) πk, $k \in Z$; $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in Z$. **30.30.** 1) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$;

2) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$. **30.31.** $\pi k,\ k\in Z$; $\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in Z$. **30.32.** $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$; $\pi+2\pi n,\ n\in Z$. **30.33.** $-\frac{\pi}{24}$; 0. **30.34.** $-\frac{2\pi}{9}$; $-\frac{\pi}{6}$. **30.35.** $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{4}$. **30.36.** $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$. **30.37.** 2) $\pi+4\pi k,\ k\in Z$; 4) $x=\pi k,\ k\in Z$; $y=\frac{\pi m}{2},\ m\in Z$; $z=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z$. **30.38.** 1) $8\pi n,\ n\in Z$; 3) $x=\pi n,\ n\in Z$; $y=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in Z$. **30.39.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **30.40.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **30.41.** $a\leqslant -1$ або $3\leqslant a\leqslant 3{,}5$. **30.42.** $a\leqslant -\frac{10}{3}$ або $-3<a<-2$. **30.43.** $\frac{\pi}{18}$. **30.44.** $\frac{\pi}{12}$. **30.45.** ±1; 0. **30.46.** 0; 1; 2. **30.47.** 1 доба 1 год 13 хв. **30.48.** $x<y<z$.

§ 31. **31.8.** 1) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ 2\pi+2\pi k\right],\ k\in Z$; 2) $\left(-\pi+\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+\pi k\right],\ k\in Z$. **31.9.** 1) $\left(2\pi k;\ \frac{4\pi}{3}+2\pi k\right),\ k\in Z$; 2) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{\pi}{3}+\pi k\right],\ k\in Z$. **31.11.** Ні. **31.12.** 1) $\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2};\ \frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}\right),\ k\in Z$; 3) $\left[\frac{\pi k}{4};\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}\right],\ k\in Z$. **31.13.** 2) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in Z$; 4) $\left[-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4};\ \frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}\right],\ k\in Z$. **31.14.** 1) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k\right],\ k\in Z$. **31.15.** 2) $\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ -\arccos\frac{2}{3}+2\pi k\right)\cup\left(\arccos\frac{2}{3}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right],\ k\in Z$. **31.17.** 2) $\left[\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+\pi k\right],\ k\in Z$. **31.18.** 1) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right),\ k\in Z$; 2) $\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{7\pi}{4}+2\pi k\right],\ k\in Z$. **31.19.** 1) $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi k\right],\ k\in Z$; 2) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi k\right),\ k\in Z$. **31.20.** 1) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right],\ k\in Z$; 2) $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+\pi k;\ \pi+\pi k\right),\ k\in Z$. **31.21.** 1) $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\right],\ k\in Z$; 2) $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\pi k\right),\ k\in Z$. **31.22.** 1) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right),\ k\in Z$. **31.23.** 2) $(2\pi k;\ \pi+2\pi k],\ k\in Z$. **31.24.** 4) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right),\ k\in Z$.

31.25. 1) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in Z$; 2) $\left[2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k \in Z$.

31.26. 1) $\left\{\frac{\pi k}{2}\right\} \cup \left[\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}; \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right]$, $k \in Z$; 3) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k; \frac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $k \in Z$; 4) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{3\pi}{4}+\pi k\right)$, $k \in Z$. **31.28.** 2) $\{\pi+2\pi k\} \cup \left[2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right] \cup$ $\cup \left[\frac{3\pi}{2}+2\pi k; 2\pi+2\pi k\right]$, $k \in Z$. **31.29.** $a < -2-\sqrt{6}$ або $a > \sqrt{2}$. **31.30.** $a < -2-\sqrt{2}$ або $a > 2$. **31.31.** 660 грн. **31.32.** Перший гравець.

Розділ 5. **§ 32.** **32.11.** 1) 4; 2) 0. **32.12.** 1) 0; 2) 3. **32.13.** 1) 0,5; 2) −1; 3) −4; 4) 0. **32.14.** 1) −0,5; 2) −1; 3) −3; 4) 0. **32.15.** 0,2. **32.16.** 0,5. **32.17.** 1) 0,25; 2) 4. **32.18.** 1) 1; 2) 0,25. **32.19.** 1) 0; 2) 0,25. **32.20.** 1) 0; 2) −0,5. **32.21.** $\frac{1}{6}$. **32.22.** $\frac{1}{5}$. **32.23.** 6 міс. **§ 33.** **33.19.** 1) ∞; 2) ∞. **33.20.** 1) ∞; 2) ∞. **33.21.** 1) 12; 4) 1. **33.22.** 2) 48; 3) 85. **33.23.** 2) 2; 3) 3. **33.24.** 1) −5; 4) 2. **33.27.** 1) −4,5; 2) 0,5. **33.28.** 1) 1,6; 2) 1,5. **33.29.** 0,25. **33.30.** $\frac{1}{6}$. **33.31.** 1) ∞; 2) ∞. **33.32.** 1) ∞; 2) ∞. **33.33.** 30 грн. **33.34.** 3; 8. **§ 34.** **34.11.** 1) $2\Delta x$; 2) 1. **34.12.** 1) $-3\Delta x$; 2) −1,5. **34.13.** 1) 5; 2) −4. **34.14.** 1) −9; 5. **34.15.** $\Delta f(x_0) < \Delta g(x_0)$. **34.16.** 1) $3x^2 = x^3$; 0; 3. **34.17.** 2) $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{8}$; 16. **34.18.** $2x \geqslant 3x^2$; $0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$. **34.20.** $g'\left(\frac{1}{4}\right) < g'\left(\frac{1}{9}\right)$. **34.21.** 1) −2; 2) 0,25. **34.22.** 1) 0; 2) 0,25. **34.23.** 2) $g'(x) = 3 + 2x$. **34.24.** 1) $f'(x) = 2$. **34.25.** $2x + 3x^2 - 5 > 0$; $x < -1\frac{2}{3}$ або $x > 1$. **34.26.** $|2x| = x^2$; 0; 2; −2. **34.27.** Так; $f'(1) = 2$. **34.28.** $f'(2) = 4$. **34.29.** 1,2 с. **§ 35.** **35.13.** −0,25. **35.14.** −0,25. **35.15.** 3 с. **35.16.** 4 с. **35.17.** $f'(x_1) = 0$; $f'(x_2) = -\sqrt{3}$. **35.18.** $f'(x_1) = \sqrt{3}$; $f'(x_2) = 0$. **35.19.** ±2. **35.20.** ±3. **35.21.** $\frac{2}{3}$ с. **35.22.** $\frac{3}{7}$. **35.23.** $\frac{4}{5}$. **35.24.** 1) −4; −1; 3; 2) $f'(1) < f'(5)$. **35.25.** 1) −3; 1; 3; 2) $g'(2) < g'(0)$. **35.26.** $y = \frac{1}{6}x + 1{,}5$. **35.27.** $y = -2x - 1$. **35.28.** 1) $y = -x - 2$; 3) 2 од^2. **35.29.** 1) $y = 3x + 2$; 3) $\frac{2}{3}$ од^2. **35.30.** (−0,5; −2). **35.31.** На 709 грн, на 450 грн. **§ 36.** **36.25.** 1) πk, $k \in Z$; 2) 3. **36.26.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; 2) −4. **36.27.** $x > -2$. **36.28.** $x \leqslant 5$. **36.31.** 18. **36.32.** 10. **36.39.** 1) −3; −1; 2) ±0,5. **36.40.** 1) −1; 5; 2) $\pm\frac{1}{3}$. **36.41.** 1) 5 с; 2) 2 с. **36.42.** 1) 7 с;

2) 4 с. **36.43.** (2; 5). **36.44.** (–3; –15). **36.45.** $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k \in Z$. **36.46.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in Z$. **36.48.** 1; $-\frac{7}{3}$. **36.49.** 1; –2. **36.50.** $y = -2x + 4$. **36.51.** $y = 2x - 3$. **36.53.** $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k \in Z$. **36.54.** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$. **36.55.** $\frac{4}{25}$. **36.56.** $-\frac{8}{25}$. **36.57.** $y = 31 - 5x$. **36.58.** $y = 6x - 7$. **36.61.** $\arccos\frac{2}{\pi}$. **36.62.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **36.63.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **36.64.** $\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi k; \frac{13\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k \in Z$. **36.65.** $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k \in Z$. **36.66.** $y = -\sqrt{3}x$. **36.67.** (–10,75; 4,75). **36.68.** (5,5; 3,5). **36.69.** (0; 47); (0; 11), $\left(-\frac{47}{9}; 0\right)$, $\left(-\frac{11}{9}; 0\right)$. **36.70.** (0; –2), (0; 14), (0,5; 0), (–3,5; 0). **36.71.** $y = 2x+1$. **36.72.** $y = x - 0,25$. **36.73.** 8. **36.74.** 6. **36.76.** Ні.

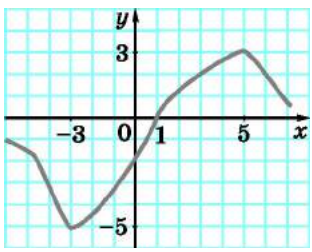
§ 37. **37.13.** 2) $12x^2(x^3+5)^3$; 4) $-\frac{35x^6}{(x^7-2)^6}$. **37.14.** 3) $-\frac{8x+4}{(x^2+x)^5}$. **37.15.** 0; 4; 2. **37.16.** 0; –6; –3. **37.17.** 1) $-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$; 2) $3\sin^2 x\cos x$. **37.18.** 1) $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$; 2) $-5\cos^2 x\sin x$. **37.19.** 1) 4; 2) 1. **37.20.** 1) 6; 2) –5. **37.21.** 1) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}x$; 2) $y = -\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}$. **37.22.** 1) $y = -x+\frac{\pi}{3}x$; 2) $y = \frac{1}{4}x$. **37.23.** 1) $y' = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}$; 2) $y' = -7\sin 7x$. **37.24.** 1) $y' = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$; 2) $y' = 10\cos 10x$. **37.25.** $x = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$. **37.26.** $x = -\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **37.27.** $y = 8x - 1$. **37.28.** $y = 1 - 4x$. **37.29.** 1) 30°; 2) 45°. **37.30.** 1) 60°; 2) 45°. **37.31.** $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$. **37.32.** πk, $k \in Z$. **37.33.** $y = 2x - 1$. **37.34.** $y = 3x - 5$. **37.35.** 1. **37.36.** 0,25. **37.37.** 2) $-\frac{20\operatorname{ctg}^3(5x-2)}{\sin^2(5x-2)}$. **37.38.** 1) $\frac{-\sin 2x-1}{2\sqrt{\cos^2 x - x}}$. **37.39.** Так. **37.42.** 15. **37.43.** 5; 13.

§ 38. **38.13.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$; 2) $x_1 = 1$; $x_2 = 3$. **38.14.** 1) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in Z$; 2) 1; –3. **38.19.** 1) 1; –3; –1; 2) немає критичних точок. **38.20.** 1) –2; 4; 1; 2) 2. **38.21.** 3) зростає на [0; 1], спадає на [1; +∞). **38.22.** 4) зростає на $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$,

$k \in Z$; спадає на $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{11\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k \in Z$. **38.23.** 1) 0; 2) $[-2; 2]$. **38.24.** $[-4; 4]$. **38.27.** 1) Ні; 2) так. **38.28.** 1) Ні; 2) так. **38.30.** 1) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in Z$; 2) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$. **38.31.** 2) πk, $k \in Z$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. **38.33.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}$; $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}$. **38.34.** $a < -1-\frac{\sqrt{6}}{2}$ або $a > \sqrt{1,5}$. **38.35.** $b < -3-\sqrt{3}$ або $b > \sqrt{3}-1$. **38.36.** 180 год.

§ 39. **39.11.** 3) $x_{min} = -1$; $x_{max} = 1$; 4) $x_{max} = 4$. **39.12.** 1) Немає точок екстремуму; 2) $x_{max} = -6$; $x_{min} = 6$. **39.15.** $x_{min} = \frac{1}{3}$. **39.16.** $x_{max} = 1$. **39.17.** $x_{max} = \frac{\pi}{4}+2\pi k$; $x_{min} = -\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k \in Z$. **39.18.** $x_{max} = \frac{\pi}{6}+2\pi k$; $x_{min} = \frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k \in Z$. **39.19.** 1) $x_{min} = -3$; $y_{min} = -162$; $x_{max} = 3$; $y_{max} = y(3) = 162$. **39.20.** 2) $x_{min} = -2$; $y_{min} = 1$. **39.21.** $[-2; 2]$. **39.22.** $[-1; 1]$. **39.23.** 5 точок екстремуму, 3 точки мінімуму, 2 точки максимуму. **39.24.** 3 точки екстремуму, 1 точка максимуму, 2 точки мінімуму. **39.25.** $2\pi + 4\pi n$, $n \in Z$. **39.26.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$. **39.27.** $x_{min} = \frac{2\pi k}{3}-\frac{1}{3}\arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$, $k \in Z$. **39.28.** $x_{max} = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}+\pi k$, $k \in Z$. **39.29.** 1,25 м. **39.30.** $\left(2; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $(-2; \pi k)$, $k \in Z$.

§ 40. **40.7.** 2) Один. **40.8.** 2) Три. **40.9.** 1) Мал. 2; 2) $[-5; 3]$. **40.10.** 2) $[-6; 3]$. **40.13.** 2) $(-\infty; 1]$. **40.14.** 2) $[-4; +\infty]$. **40.15.** 2) $a = -\frac{16\sqrt{3}}{9}$. **40.16.** 2) $a > 0{,}64\sqrt{0{,}2}$. **40.17.** 2) Якщо $a < -1$ або $a > 7$, то коренів немає; якщо $a = -1$, $a = 0$ або $a = 7$, то 1 корінь; якщо $-1 < a < 0$ або $0 < a < 7$ – 2 корені. **40.18.** 1) $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{9}; +\infty\right)$; 2) ні. **40.19.** 2) $[-32; +\infty)$; 3) $a \geqslant -12$. **40.20.** 300 грн. **40.21.** $P(x) = a(x^3 - x)$, де a – деяке число.



Мал. 2

§ 41. **41.7.** 8 + 8. **41.8.** 5 + 5. **41.9.** 1) $\min\limits_{[-2;\,1]} g(x) = g(-2) = -4$; $\max\limits_{[-2;\,1]} g(x) = g(0) = 0$; 3) $\min\limits_{[-1;\,3]} g(x) = g(-1) = 4$; $\max\limits_{[-1;\,3]} g(x) = g(3) = 68$. **41.10.** 4) $\min\limits_{[-1;\,3]} f(x) = f(2) = f(-1) = 0$; $\max\limits_{[-1;\,3]} f(x) = f(0) = f(3) = 4$. **41.11.** $\min\limits_{[0;\,4]} x(t) = x(2) = \frac{2}{3}$ (м); $\max\limits_{[0;\,4]} x(t) = x(4) = 9\frac{1}{3}$ (м). **41.12.** $\min\limits_{[0;\,3]} s(t) =$

$= s(1) = \frac{1}{3}$ (м); $\max\limits_{[0;\,3]} s(t) = s(3) = 11$ (м). **41.13.** $\max\limits_{[-2;\,2]} f(x) = f(-1{,}5) = 7{,}25$; $\min\limits_{[-2;\,2]} f(x) = f(1) = f(2) = 1$. **41.14.** $\max\limits_{[-3;\,3]} g(x) = g(-1) = -1$; $\min\limits_{[-3;\,3]} g(x) = g(2{,}5) = -13{,}25$. **41.15.** 1) $1+\frac{\pi}{4}$; 2) $1-\pi$. **41.16.** 1) π; 2) $-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$. **41.17.** 18 + 6. **41.18.** 12 + 6. **41.19.** Квадрат зі стороною 40 м. **41.20.** Обидва катети по 6 см. **41.21.** 1) $\min\limits_{[2;\,4]} f(x) = f(3) = 10$; $\max\limits_{[2;\,4]} f(x) = f(2) = 11$. **41.22.** 2) $\min\limits_{[0;\,4]} g(x) = g(1) = -2$; $\max\limits_{[0;\,4]} g(x) = g(4) = 2$. **41.23.** $\min\limits_{[3;\,8]} v(t) = v(3) = 27$ (м/с), $\max\limits_{[3;\,8]} v(t) = v(6) = 36$ (м/с). **41.24.** $\min\limits_{[0;\,3]} v(t) = v(3) = -9$ (м/с), $\max\limits_{[0;\,3]} v(t) = v(1) = 3$ (м/с). **41.27.** 1) 21; 2) −38. **41.28.** 1) 105; 2) −52. **41.29.** $\max\limits_{\left[0;\,\frac{5\pi}{4}\right]} f(x) > 2{,}5$. **41.30.** $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{4};\,\frac{3\pi}{4}\right]} f(x) > 5$. **41.31.** (0,5; 0,5). **41.32.** (1; −0,5). **41.33.** 10 см. **41.34.** Сторона основи – 2 м, висота – 1 м. **41.35.** Сторони основи – 4 дм і 2 дм; об'єм – 32 дм^3. **41.36.** Сторона основи – 2 дм, бічне ребро – 1 дм, периметр бічної грані – 6 дм. **41.37.** $AP = 4$ км. **41.40.** [1,5; 4]. **41.41.** [1,5; 4]. **41.42.** 1,5. **41.43.** 0,8. **41.45.** 1. **41.46.** 8 шок. **41.47.** 20 обертів. **§ 42.** **42.1.** 1) 1; 2) 0. **42.2.** 1) 0; 2) 1. **42.5.** 1) 4; 2) −1; 1; 3) 1; 4) 2; −2. **42.6.** 1) 4; 2) 0; 3) 1; 4) 1; −1. **42.7.** (2; 2). **42.8.** (1; 1), (−2; −2). **42.9.** (−∞; 1]. **42.10.** (0; +∞). **42.13.** 438 грн. **42.14.** −3; 1. *Вказівка*. Заміна: $t = x + 1$. **§ 43.** **43.3.** 1) $x = -2$; 2) не існує. **43.4.** 1) Не існує; 2) $x = 4$. **43.5.** 1) $y = -1$; 2) $y = 4x - 7$; 3) $y = x + 2$; 4) не існує. **43.6.** 1) $y = -1$; 2) $y = 2x + 9$; 3) $y = x - 1$; 4) не існує. **43.9.** 1) $x = -5$; $y = 4$; 2) $x = 2$; $y = 2x + 4$. **43.10.** 1) $x = 4$; $y = 4$; 2) $x = 1$; $y = 3x + 3$. **§ 44.** **44.7.** 1) $\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$; 2) $\frac{30}{(3x+1)^3}$. **44.8.** 1) $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$; 2) $-\frac{132}{(6x+1)^3}$. **44.9.** 1) На (−∞; −1] – опуклий вгору; на [−1; +∞) – опуклий вниз; (−1; −5) – точка перегину. **44.10.** 2) На [0; π] – опуклий вгору; на [π; 2π] – опуклий вниз; (π; 0) – точка перегину. **44.18.** 84 учні. **44.19.** $1;\ 1+\sqrt{2}$. *Вказівка*. Розгляньте вектори $\vec{a}(x;\ 1)$ і $\vec{b}(\sqrt{1+x};\ \sqrt{3-x})$ та використайте той факт, що $\vec{a}\cdot\vec{b} \leqslant |\vec{a}||\vec{b}|$.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович
ЄРГІНА Оксана Володимирівна

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

(профільний рівень)

Підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Головний редактор *Наталія Заблоцька*

Редактори *Наталія Дашко, Оксана Єргіна*
Обкладинка і художнє оформлення *Тетяни Кущ*
Комп'ютерна верстка і технічні малюнки *Юрія Лебедєва*
Коректор *Любов Федоренко*

Формат 60×90/16. Ум. друк. арк. 28,0. Обл.-вид. арк. 26,33.
Тираж 17807 пр. Вид. № 1948. Зам. №

Видавництво «Генеза», вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 5088 від 27.04.2016.

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ», вул. Ольмінського, 17, м. Харків, 61024.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4526 від 18.04.2013.