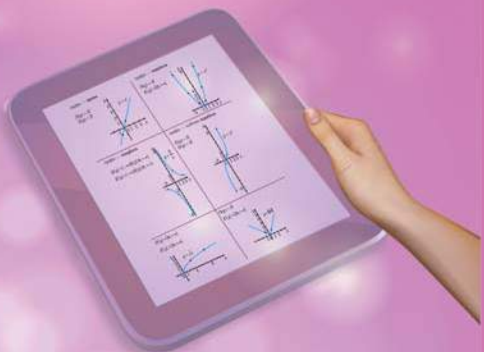
Видавничий дім Освіта



Г. П. Бевз
В. Г. Бевз
Н. Г. Владімірова

Алгебра
і початки аналізу

Профільний рівень

10 клас

УДК 512*кл10(075.3)
Б36

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(*наказ Міністерства освіти і науки України від 31.05.2018 № 551*)

ВИДАНО ЗА ДЕРЖАВНІ КОШТИ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Умовні позначки

«Екологічна безпека і сталий розвиток»

«Здоров'я і безпека»

«Громадянська відповідальність»

«Підприємливість та фінансова грамотність»

Бевз Г. П.
Б36 Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. — 336 с.
ISBN 978-617-656-897-1.

УДК 512*кл10(075.3)

ISBN 978-617-656-897-1

© Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г., 2018
© Видавничий дім «Освіта», 2018

ШАНОВНІ ДЕСЯТИКЛАСНИКИ І ДЕСЯТИКЛАСНИЦІ!

«Ви талановиті діти! Коли-небудь ви самі приємно здивуєтесь, які ви розумні, як багато вмієте, якщо будете постійно працювати над собою, ставити перед собою мету і намагатися її досягти».

Ж. Ж. Руссо

Алгебра і початки аналізу — навчальний предмет, який розкриває найважливіші теми з алгебри, математичного аналізу, теорії функцій і теорії ймовірностей. У 10 класі ви ознайомитеся з елементами теорії множин, алгебраїчними й деякими неалгебраїчними виразами, функціями та їх графіками, рівняннями, нерівностями та способами їх розв'язування, похідною та її застосуваннями тощо. Значну увагу слід приділити вивченню математичної мови — відповідного математичного апарату, який застосовують для дослідження реальних явищ і процесів. Такі відомості сучасної математики використовують у багатьох галузях науки і техніки.

Підручник адресовано учням, які вивчають математику на профільному рівні. Для вас математика є одним із основних предметів. Її вивчення сприятиме свідомому й міцному оволодінню системою математичних знань, навичок і умінь, потрібних у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, у вивченні інших шкільних дисциплін та продовженні навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями зі значною математичною складовою.

У кожному параграфі підручника викладено теоретичні відомості і вміщено задачі на їх засвоєння і застосування. Читаючи теорію, основну увагу звертайте на слова, надруковані *курсивом* і **жирним шрифтом**. Їх треба розуміти і застосовувати до розв'язування задач. Майже у всіх параграфах підручника є рубрика «Хочете знати ще більше?», в якій містяться додаткові відомості для зацікавлених учнів. Відповідаючи на запитання рубрики «Перевірте себе», ви можете краще закріпити, узагальнити і систематизувати нові знання.

Кожний розділ підручника розпочинається короткими відомостями про зміст навчального матеріалу і компетентності, яких бажано набути в процесі навчання.

А наприкінці кожного розділу наведено «Скарбничку досягнень», за допомогою якої можна проаналізувати, усвідомити та повторити набуті знання.

Знати математику – це насамперед уміти користуватися нею. А для цього слід розв'язувати багато задач. У підручнику є задачі різних рівнів складності: «Виконайте усно», група А, група Б, група В і «Задачі для повторення». Порівняно важкі задачі позначено зірочкою (*). Їх призначено учням, які особливо цікавляться математикою. Домашні завдання виділено синім кольором.

Окремі задачі, що запропоновано у підручнику, — це задачі з реальними даними, що стосуються використання, збереження та примноження природних ресурсів, безпеки й охорони здоров'я громадян, кількісних показників розвитку суспільства і планування господарської діяльності, складання сімейного бюджету та реальної оцінки власних можливостей тощо. Для цих задач зроблено спеціальні позначення (дивись табличку на звороті титульної сторінки).

У кожному параграфі підручника є рубрика «Виконаємо разом», у якій подається декілька задач із розв'язаннями. Радимо проглянути їх, перш ніж виконувати домашнє завдання.

Перевірити, як ви засвоїли новий матеріал, і добре підготуватися до зовнішнього незалежного оцінювання ви можете, розв'язуючи задачі та виконуючи завдання з рубрик «Тестові завдання» і «Типові задачі для контрольної роботи».

Сподіваємося, що вивчення алгебри і початків аналізу за цим підручником буде для вас цікавим і нескладним. Успіху вам!

Автори

Розділ 1

ФУНКЦІЇ, МНОГОЧЛЕНИ, РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

Functions, Polynomials, Equations and Inequalities

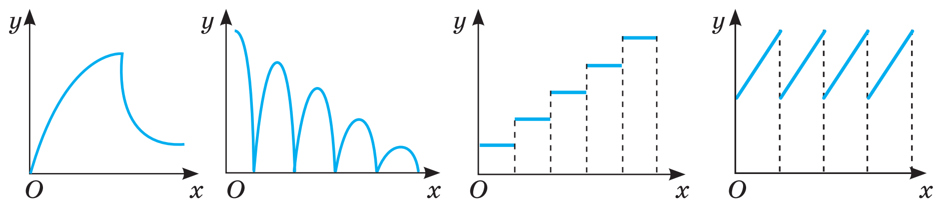
Михайло Пилипович КРАВЧУК
(1892–1942)

Всесвітньо відомий математик, академік, педагог, громадський діяч. Його ім'ям названо терміни: «многочлени Кравчука», «формули Кравчука», «q-функції Кравчука — Мейкснера» та ін. Співавтор першого словника української математичної термінології. Організатор першої в Україні математичної олімпіади школярів (1935).

«Хочете навчитися математики, беріться за завдання. Кожне розв'язання є своєрідним мистецтвом пошуку».

«Немає у світі машин, які йшли не від математики, немає повнокровного життя творця техніки без цієї науки... Ніякої достовірності немає в науках там, де не можна застосувати математику. Тим-то вона, математика, для вас має стати душевною потребою, якщо хочете, хлібом і піснею».

М. П. Кравчук



НАБУВАЄМО ДОСВІДУ ТА КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ

- Множини і операції над ними
- Числові функції, їх графіки та властивості
- Ділення многочленів
- Метод інтервалів
- Задачі з параметрами
- Метод математичної індукції

- Виконувати операції над множинами
- Розуміти суть функціональних залежностей, їх задання та використання
- Зображувати графіки та встановлювати властивості функції
- Розв'язувати рівняння і нерівності та доводити твердження
- Моделювати реальні процеси за допомогою функцій і рівнянь

Навчальний проект № 1. **РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ІКТ**

§ 1 Множини та операції над ними

Sets and Set Operations

Сукупність тих чи інших об'єктів називають різними словами, наприклад: бригада (робітників), клас (учнів), рій (бджіл), табун (коней), зібрання (творів), набір (олівців), комплект (деталей) тощо. У математиці в таких випадках використовують одне слово — множина. Можна говорити про множину робітників, множину учнів, множину бджіл, множину олівців, множину деталей і т. ін. Множина — поняття неозначуване.

Об'єкти, які входять до множини, називають її *елементами*. Наприклад, одним із елементів множини зір, які входять до сузір'я Велика Ведмедиця, є зірка Дубхе (з арабської — ведмідь) (мал. 1).

Мал. 1

Щоб записати множину, використовують фігурні дужки. Наприклад:

- $\{2; 3; 5; 7\}$ — множина чисел 2, 3, 5, 7;
- {○, ●, ■} — множина, що складається з кола ○, круга ● і квадрата ■.

Вважають, що всі елементи множини різні. Наприклад, не прийнято записувати $\{5; 5; 7\}$. Цю множину можна записати так: $\{5; 7\}$ або $\{7; 5\}$. Порядок елементів у записі множини значення не має. Наприклад, записи $\{2; 3; 5; 7\}$ і $\{3; 5; 2; 7\}$ означають одну й ту саму множину. Можна також сказати, що ці множини рівні.

Дві множини називаються *рівними*, якщо вони складаються з тих самих елементів.

Рівними є також множини розв'язків рівнянь $2x + 3 = 0$ і $\sqrt{x+2,5}=1$. Перевірте.

Множини часто позначають великими буквами латинського алфавіту: A, B, C,..., а їхні елементи — малими: a, b, c,....

Якщо елемент a належить множині M, то записують $a \in M$; якщо не належить, то пишуть: $a \notin M$. Наприклад, $5 \in \{1, 3, 4, 5\}$, $2 \notin \{1, 3, 4, 5\}$.

Множину, що складається зі скінченної кількості елементів, називають *скінченною*. Такими є: множина всіх двоцифрових чисел, множина вершин шестикутника, множина його діагоналей тощо.

Множину, яка містить нескінченну кількість елементів, називають *нескінченною*. Нескінченною є, наприклад, множина всіх натуральних чисел, множина всіх точок деякого відрізка, множина розв'язків рівняння $x^2 - 4 = (2 + x)(x - 2)$.

Якщо множина містить дуже багато або безліч елементів і перерахувати їх важко або й неможливо, такі множини записують інакше, *використовуючи характеристичну властивість*.

Наприклад:

$\{x|x>5\}$ — множина всіх чисел, більших від 5;

$\{p|p$ — просте і $p<120\}$ — множина всіх простих чисел, менших від 120.

Отже, множину можна задати переліком усіх її елементів або описом їх характеристичної властивості.

Розглядають множини, що містять тільки по одному елементу або не мають жодного елемента. Наприклад, множина коренів рівняння $x + 3 = 15$ містить одне число 12. Цю множину записують так: $\{12\}$. Рівняння $\sqrt{x}+3=0$ коренів не має. Кажуть, що множина його коренів — порожня.

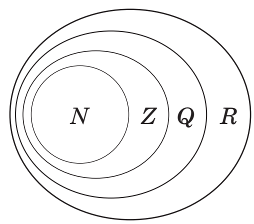
Порожньою називають множину, яка не містить елементів. Її позначають символом $\varnothing$.

У математиці найчастіше розглядають *числові множини* (елементами яких є тільки числа) і *точкові множини* (елементами яких є точки). Проте нерідко доводиться говорити і про множини виразів, рівнянь, нерівностей, функцій, відображень, відношень, переміщень, векторів тощо.

Математичний термін *множина* (і пов'язані з ним *множення, множник, многочлен* та ін.) походить від давньоукраїнського слова *много*. І. Франко писав: «Якби ти знав, як много важить слово...»

Для деяких числових множин існують усталені позначення. Їх ви знаєте з попередніх класів.

N — множина натуральних чисел;
Z — множина цілих чисел;
Q — множина раціональних чисел;
R — множина дійсних чисел.



Мал. 2

Ці множини пов'язані такими співвідношеннями:

$N\subset Z\subset Q\subset R$ (мал. 2).

Знак $\subset$ означає «є підмножиною»: кожна множина N, Z, Q є частиною (підмножиною) наступної множини.

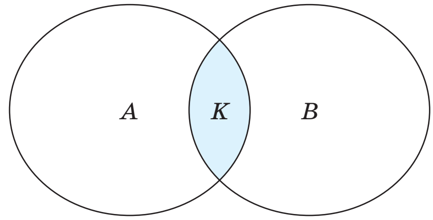
Якщо кожний елемент множини *A* є елементом множини *B*, то множину *A* називають *підмножиною* множини *B*.

Наприклад, множина дівчаток з якогось класу є підмножиною множини всіх учнів цього класу. Множина $\{1, 2, 3, 5\}$ є підмножиною множини $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Записують це так: $\{1,2,3,5\}\subset\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Взагалі, якщо A — підмножина B, то пишуть $A\subset B$, або $B\supset A$. Підмножиною множини B вважають також порожню множину і саму множину B.

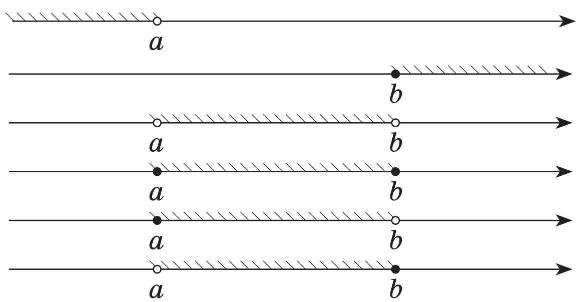
Не обов'язково одна з двох множин є підмножиною іншої. Наприклад, множини квадратів K і трикутників T не мають жодного спільного елемента, а множини прямокутників A і ромбів B мають спільну частину — множину квадратів K, але ні A не є підмножиною B, ні B не є підмножиною A (мал. 3).

У цьому випадку множина K є підмножиною множини A і множини B.

Відомі вам *числові проміжки* є підмножинами множини дійсних чисел. Якщо a і b — довільні дійсні числа, то використовують такі позначення і відповідні зображення (мал. 4):



Мал. 3

$(-\infty; a)$		$x < a$
$[b; +\infty)$		$x \geq b$
$(a; b)$		$a < x < b$
$[a; b]$		$a \leq x \leq b$
$[a; b)$		$a \leq x < b$
$(a; b]$		$a < x \leq b$
$(-\infty; +\infty)$		R

Мал. 4

Розглянемо основні операції, які можна виконувати над множинами.

Перерізом двох множин називають таку множину, яка складається з усіх їх спільних елементів і тільки з них.

Переріз множин позначають знаком $\cap$. Наприклад, якщо $M = \{a, b, c, d\}$, $P = \{b, c, p\}$, то $M \cap P = \{b, c\}$.

У загальному вигляді (мал. 5):

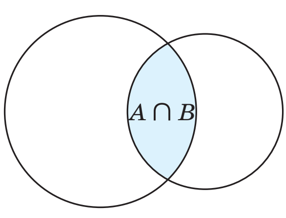
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Об'єднанням **двох множин називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать принаймні одній із цих множин і тільки з них.**

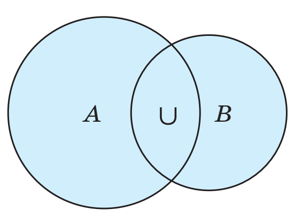
Об'єднання множин позначають знаком $\cup$.

Наприклад, якщо $M = \{a, b, c, d\}$, $P = \{b, c, p\}$, то $M \cup P = \{a, b, c, d, p\}$.

У загальному вигляді (мал. 6): $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$.



Мал. 5



Мал. 6

Для операцій «об'єднання» і «переріз» правильними є такі рівності:

	Переріз	**Об'єднання**
1	$A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \cup \varnothing = A$
2	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
3	Якщо $B \subset A$, то $A \cap B = B$	Якщо $B \subset A$, то $A \cup B = A$

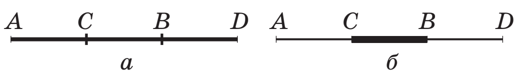
Поняття «переріз» чи «об'єднання» можна застосовувати до будь-яких множин. Щоб краще запам'ятати, який із символів $\cap$ або $\cup$ писати, зверніть увагу на записи «$\cap$**еперіз**», «$\cup$**nion**».

Приклади.

1. На малюнках 7, *а* і 7, *б* зображено об'єднання та переріз відрізків AB і CD відповідно:

а) $[AB] \cup [CD] = [AD]$;

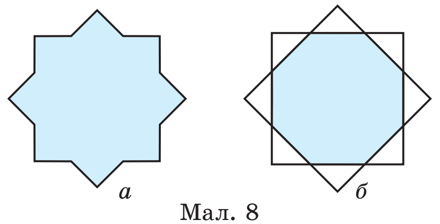
б) $[AB] \cap [CD] = [CB]$.



Мал. 7

Примітка. Якщо відрізки, промені, прямі розглядають як множини точок, то їх позначають різними символами: $[AB]$, $[AB)$, (AB).

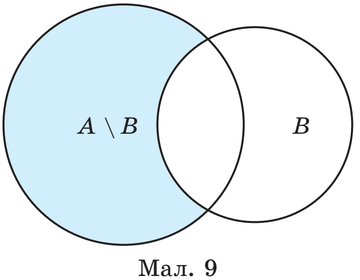
2. Об'єднанням двох квадратів на малюнку 8 є неопуклий 16-кутник (мал. 8, *а*), а їх перерізом — опуклий восьмикутник (мал. 8, *б*).



Мал. 8

Хочете знати ще більше?

Різницею множин A і B називають множину, яка складається з усіх тих елементів множини A, які не належать множині B.



Мал. 9

Позначають різницю множин A і B символом $A \setminus B$, а зображають схематично так, як показано на малюнку 9.

Приклади.

1. Якщо $A = \{a, b, c, k\}$, $B = \{b, c, p\}$, то $A \setminus B = \{a, k\}$.

2. Якщо $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, то $B \setminus A = \{2, 4, 6\}$.

Якщо $A \subset B$, причому $A \neq \varnothing$ і $A \neq B$, то різниця $B \setminus A$ називається також *доповненням множини* A до множини B. Наприклад, доповненням множини раціональних чисел до множини дійсних чисел є множина ірраціональних чисел.

Нескінченні множини бувають зчисленні і незчисленні (мал. 10). Кожна нескінченна множина називається *зчисленною*, якщо її елементи можна пронумерувати. Наприклад, множина натуральних чисел, множина квадратів натуральних чисел, множина парних чисел — усе це множини зчисленні. Нескінченна множина, яка не є зчисленною, називається *незчисленною*. Такою, наприклад, є множина всіх точок деякого відрізка, множина дійсних чисел тощо.

Мал. 10

Зверніть увагу! У підручнику всі математичні об'єкти розглядають на множині дійсних чисел або її підмножинах.

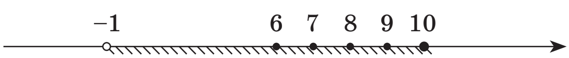
Перевірте себе

1. Наведіть приклад множини. Які бувають множини?
2. Як позначають множини та їх елементи?
3. Як можна задавати множини?
4. Які множини називають рівними?
5. Що таке підмножина?
6. Що називають об'єднанням двох множин?
7. Що називають перерізом двох множин?

Виконаємо разом

1 Запишіть усі підмножини множини $M = \{c, d, k\}$.
Розв'язання. Підмножинами даної множини є множини:
$\{c\}$, $\{d\}$, $\{k\}$, $\{c, d\}$, $\{c, k)$, $\{d, k\}$, $\{c, d, k\}$, $\varnothing$.

2 Знайдіть об'єднання і переріз множин A і B, якщо
$A = \{x | x \in N \text{ і } 5 < x \le 10\}$, $B = \{x | x \in R \text{ і } -1 < x \le 10\}$.
Розв'язання. Множину A можна задати переліком: $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, а B — це проміжок $(-1; 10]$ (мал. 11). Оскільки $A \subset B$, то $A \cup B = B = (-1; 10]$, а $A \cap B = A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.



Мал. 11

3 Анкетування учнів 10 класу показало, що 8 із них мають вдома собаку, а 15 — кішку. Скільки учнів навчаються в цьому класі, якщо п'ятеро не мають тварин, а двоє мають і кішку, і собаку?
Розв'язання.
Спосіб 1. Розглянемо підмножини учнів 10 класу:
A — множина учнів, які мають лише кішок. Вона має 13 елементів $(15 - 2 = 13)$.

B — множина учнів, які мають лише собак. Вона має 6 елементів ($8 - 2 = 6$).

C — множина учнів, які мають і кішку, і собаку. Вона має 2 елементи.

D — множина учнів, які не мають тварин. Ця множина має 5 елементів.

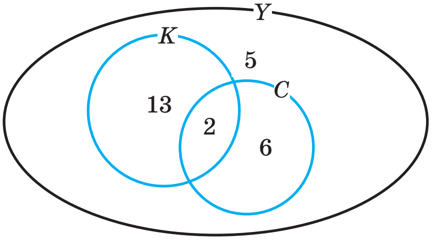
Оскільки множина всіх учнів 10 класу — це об'єднання множин A, B, C і D, то в 10 класі навчається:

$$13 + 6 + 2 + 5 = 26 \text{ (осіб)}.$$

Спосіб 2. Собаку або кішку мають: $8 + 15 - 2 = 21$ (учень).

Усього учнів $21 + 5 = 26$.

Подібні задачі зручно розв'язувати на малюнках (мал. 12).



Мал. 12

Виконайте усно

1. Провідміняйте слово *множина, множини*.
2. Скільки елементів має множина двоцифрових чисел, кратних 10? Назвіть її елементи.
3. Скільки елементів має множина коренів рівняння:
   а) $x^2 = 2$; б) $x^2 + 17 = 8$; в) $\sqrt{x^2} - |x| = 0$?
4. Знайдіть множину цілих чисел, які задовольняють умову:
   а) $11 < x < 15$; б) $|2x| \le 5$; в) $|x + 3| < 1$.
5. Нехай P — множина парних цілих чисел, а H — непарних. Чому дорівнюють переріз і об'єднання цих множин?
6. Знайдіть переріз і об'єднання множин букв:
   а) $\{р, у, к, а\}$ і $\{к, р, у, г\}$; б) $\{к, о, р, а, л\}$ і $\{р, а, н, о, к\}$.
7. Яким може бути переріз і об'єднання множин точок:
   а) двох відрізків; б) двох площин; в) двох півплощин?
8. Чим є переріз і об'єднання множин: а) натуральних чисел і цілих чисел; б) раціональних чисел та ірраціональних чисел?
9. Як називається:
   а) множина корів; б) множина людей, яких обслуговує банк; в) множина квітів у вазі; г) множина тварин, які населяють певну територію; ґ) множина музикантів, які виступають разом?
10. Розгадайте ребуси (мал. 13).

Мал. 13

Рівень А

11. Випишіть усі елементи кожної з поданих нижче множин: A — множина назв днів тижня, B — множина кольорів світлофора, C — множина назв материків, D — множина цифр, E — множина кольорів веселки.

12. Наведіть приклади множини, яка має:
а) два елементи; б) п'ять елементів; в) один елемент.

13. Запишіть множину букв, якими записують ваше ім'я та прізвище.

14. Запишіть множину цифр, якими записують дату вашого народження (день, місяць і рік).

15. Задайте переліком елементів множину одноцифрових чисел, які діляться:
а) на 3; б) на 5; в) на 15.

16. Випишіть усі підмножини для кожної з множин:
а) {●; ■}; б) {*, Δ, #}.

17. Випишіть усі підмножини для кожної з множин вправи 15.

18. **Практичне завдання.** Намалюйте два квадрати так, щоб їх перерізом і об'єднанням також був квадрат.

Зобразіть на числовій прямій множини (19–21).

19. а) $(-\infty; 5)$; б) $(1; 3)$; в) $[0; 2]$; г) $(7; +\infty)$.

20. а) $(-\infty; -1]$; б) $[0; 3)$; в) $[1; 2)$; г) $[4; +\infty)$.

21. а) $(-3; 5)$; б) $[5; +\infty)$; в) $(1; 2{,}5]$; г) $(-\infty; 0)$.

Знайдіть об'єднання множин A і B (22–23).

22. а) $A = \{1, 2, 3, 7\}$, $B = \{5, 7, 3, 1\}$; в) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, -2, -3\}$;
б) $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{7, 6, 5, 4\}$; г) $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

23. а) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, a\}$; в) $A = \{a, m, n, k\}$, $B = \{a, b, c, m\}$;
б) $A = \{$є, ї$\}$, $B = \{f, s\}$; г) $A = \{$а, б, в, г, д$\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

Знайдіть переріз множин M і P (24–25).

24. а) $M = \{1, 3, 5, 7\}$, $P = \{2, 4, 6, 8\}$; в) $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P = \{2, 4\}$;
б) $M = \{-1, 2, -3, 4\}$, $P = \{1, 2, 3\}$; г) $M = \{0, 1, -2\}$, $P = \{-2, 1, 0\}$.

25. а) $M = \{a, b, c\}$, $P = \{a, b, d\}$; в) $M = \{a, m, n)$, $P = \{b, c, m\}$;
б) M = {■, ●, ♥}, P = {♥, ○, ♦}; г) M = {□, ☼, ♪}, P = {☼, ♬, □}.

Рівень Б

26. Серед наведених нижче множин укажіть скінченні й нескінченні:
а) множина від'ємних чисел;
б) множина цифр у записі числа p;
в) множина коренів рівняння $x^{100} - 1 = 0$;
г) множина дійсних чисел, які належать відрізку $[0; 1]$;
ґ) множина розв'язків рівняння $2x + 3y = 5$;
д) множина розв'язків нерівності $x^2 - 2x + 1 \le 0$.

27. Випишіть усі підмножини множини {▲, ○, ■, Δ}.

28. Скільки підмножин має множина, яка містить: а) один елемент; б) два елементи; в) три елементи; г) чотири елементи; ґ) п'ять елементів?

29. Перевірте твердження «Множина, що складається з n елементів, містить 2^n підмножин» для n, що дорівнює: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Знайдіть $A \cap B$ і $A \cup B$ (30–31).

30. а) $A = \{2, 3, 7\}$, $B = \{5, 7, 3\}$; в) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, -1, 2, -3\}$;
б) A = {♦, ▲, ●}, P = {▲, ○, ■}; г) B = {□, ☼, ▲}, P = {☼, Δ, □}.

31. а) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d\}$; в) A = {б, в, г}, В = {*б*, *в*, b, g, *г*};
б) $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{7, 6, 5,4\}$; г) $A = \{2, 3\}$, $B = \{22, 33\}$.

32. Із 100 опитаних студентів 48 щодня користуються метро, 55 — тролейбусом. Відомо, що 45 студентів не користуються жодним видом транспорту. Скільки осіб користується лише тролейбусом?

33. Множини задано за допомогою характеристичної властивості. Випишіть їхні елементи, якщо:
$A = \{x \mid x \in Z \text{ і } |x| < 3\}$; $B = \{x \mid x \in Z \text{ і } -1 < x < 5\}$; $C = \{x \mid x \in N \text{ і } |x| < 1\}$.

34. Множини A, B і C задано переліком елементів. Запишіть їх за допомогою характеристичної властивості, якщо:
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$.

35. Запишіть переліком множину:
а) спільних дільників чисел 60 і 126;
б) спільних кратних чисел 12 і 18 з першої сотні;
в) простих чисел з першої сотні;
г) множину розв'язків рівняння $x^2 + y^2 = 0$.

Знайдіть об'єднання і переріз числових проміжків (36–38).

36. а) $(-\infty; 5]$ і $(1; +\infty)$; б) $(1; 3)$ і $[1; +\infty)$; в) $[0; 2]$ і $(-\infty; +\infty)$.

37. а) $(-7; 7)$ і $(-\infty; -1]$; б) $[0; 3)$ і $[-3; 0]$; в) $[4; +\infty)$ і $[1; 2)$.

38. а) $[0; 2]$ і $(-3; 5)$; б) $(5; +\infty)$ і $[-5; +\infty)$; в) $(1; 50]$ і $(-\infty; 2)$.

39. Нехай X — множина операцій, які ліцензовані у банку M, а Y — множина операцій, які ліцензовані у банку H. Перелік операцій ліцензії в банку M: 1) касове обслуговування клієнтів; 2) надання кредитів юридичним особам; 3) надання кредитів фізичним особам; 4) валютні операції на внутрішньому валютному ринку; 5) валютні операції на міжнародних грошових ринках; 6) ведення валютних рахунків клієнтів; 7) випуск цінних паперів (облігацій, ощадних сертифікатів тощо). Перелік операцій ліцензії у банку H: 1) надання консультаційних послуг; 2) касове обслуговування клієнтів; 3) надання кредитів фізичним особам; 4) залучення депозитів фізичних осіб; 5) випуск цінних паперів (облігацій, ощадних сертифікатів тощо); 6) валютні операції на внутрішньому валютному ринку; 7) відкриття філій банку на території України. Знайдіть, які операції може здійснювати банк K, якщо перелік операцій у його ліцензії: а) $X \cup Y$; б) $X \cap Y$; в) $X \setminus Y$; г) $Y \setminus X$.

Рівень В

40. Нехай A — множина всіх коренів рівняння $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 1 = 0$. Які з чисел −1; −0,5; 0; 0,5; 1 — є елементами цієї множини?

41. Для множин $A = \{2, 3, 7\}$, $B = \{5, 7, 3\}$ і $C = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ знайдіть:

а) $(A\cup B)\cup C$; в) $(A\cup B)\cap C$; ґ) $A\cup(B\cup C)$; е) $A\cap(B\cap C)$;
б) $(A\cap B)\cup C$; г) $(A\cap B)\cap C$; д) $(A\cup B)\cap(A\cup C)$; є) $(A\cap B)(A\cap C)$.

Знайдіть $A\cap B$ і $A\cup B$ (42–45).

42. $A=\{x|\,x\in R \text{ і } (x^2-1)(x^2-4x-5)=0\}$; $B=\{x|\,x\in R \text{ і } (x^2-1)^2+(x^2-4x-5)^2=0\}$.

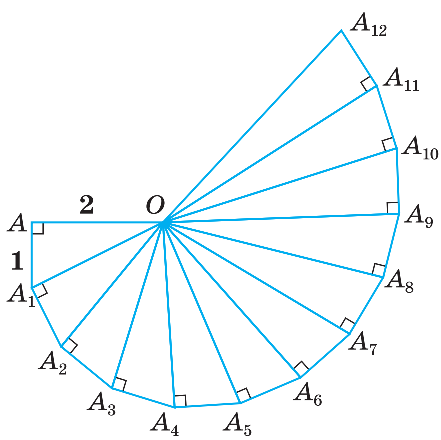
43. $A=\{x|\,x\in R \text{ і } (x^2-1)(x^2+2x-3)=0\}$; $B=\{x|\,x\in R \text{ і } (x^2-1)^2-(x^2-4x-5)^2=0\}$.

44. $A=\{x|\,x\in R \text{ і } x^2-6x+8>0\}$; $B=\{x|\,x\in R \text{ і } x^2-4x-5<0\}$.

45. $A=\{x|\,x\in R \text{ і } x^2(x^2+2x-3)\geq 0\}$; $B=\{x|\,x\in R \text{ і } x(x^2-4x-5)^2\leq 0\}$.

46. Знайдіть $A \setminus B$, $B \setminus C$, $C \setminus A$, $C \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus C$ для множин, наведених у вправі 41.

47. На малюнку 14 зображено 12 прямокутних трикутників, у яких $OA = 2$, $AA_1 = A_1A_2 = \ldots A_{11}A_{12} = 1$. Запишіть множину довжин гіпотенуз утворених трикутників. Скільки ця множина містить ірраціональних чисел?



Мал. 14

48. Скільки дітей у родині, якщо семеро з них залюбки їдять яблука, шестеро — груші, п'ятеро — сливи? Четверо дітей люблять їсти яблука і груші, троє — яблука і сливи, двоє — груші і сливи. Відомо, що одна дитина любить усі фрукти, а решта — принаймні один з перелічених.

49. На канікулах учні 10 класу відвідали дискотеку, театр і цирк. На дискотеці було 25 учнів, у театрі — 11, а в цирку — 17, на дискотеці і в театрі — 6, в цирку і на дискотеці — 10, а в театрі і цирку — 4. Скільки десятикласників побували і на дискотеці, і в театрі, і в цирку, якщо в класі навчаються 36 учнів і лише двоє не були ні на дискотеці, ні в театрі, ні в цирку?

50. Зобразіть множини A, B, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, якщо:

а) $A = \{(x, y)\ |(x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$ і $B = \{(x, y)\ |(x+1)^2 + (y+2)^2 \leq 25\}$;

б) $A = \{(x, y)\ |x^2 + y^2 < 4\}$ і $B = \{(x, y)\ |\ |x| + |y| \leq 2\}$;

в) $A = \{(x, y)\ |x^2 + (y-3)^2 \leq 16\}$ і $B = \{(x, y)\ |\ |x-2| \leq 1\}$;

г) $A = \{(x, y)\ |x^2 + y^2 \leq 9\}$ і $B = \{(x, y)\ |\ (|x|-3)^2+(|y|-3)^2 \leq 9\}$.

51. Зобразіть множини A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ і знайдіть площі утворених фігур, якщо:

а) $A = \{(x,\ y)\ |(x-1)^2 + y^2 \le 1\}$ і $B = \{(x,\ y)\ |\ |x| + |y| \le 1\}$;

б) $B = \{(x,\ y)\ |\ |x-y|+|x+y|=2\}$ і $B = \{(x,\ y)\ |\ |x| + |y| \le 1\}$.

52. *Відкрита задача.* Зобразіть множини A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ і знайдіть площі утворених фігур, якщо: $A=\left\{(x,\ y)\middle|x^2-y^2\le 0\right\}$ і B … .

53. Для кожного значення параметра a знайдіть $A \cap B$, якщо $A = \{x\ |x^2 \ge 16\}$ і $B = \{x\,|\,x^2 \le a^2\}$.

54. Задано множини $A = \{(x,\ y)\ |x^2 + y^2 = 4\}$ і $B = \{(x,\ y)\ |\ |x| + |y| = a\}$. Залежно від значень параметра a знайдіть кількість елементів множини C, якщо $C = A \cap B$.

Вправи для повторення

55. Обчисліть значення виразу:

а) $4:6,25+\dfrac{1}{7}\cdot 1,96$;

б) $\left(6\dfrac{2}{3}+5\dfrac{1}{2}+2\dfrac{4}{15}\right):\dfrac{1}{15}$;

в) $\sqrt{28}\cdot\sqrt{63}$;

г) $\sqrt{0,8}\cdot\sqrt{0,018}$;

ґ) $(3+2\sqrt{3})(2\sqrt{3}-3)$;

д) $\left(\dfrac{1}{2}-0,375\right):0,125$;

е) $\dfrac{20,88\cdot 18+45:0,36}{11,94+19,6}$;

є) $\sqrt{0,7}\cdot\sqrt{2,8}$;

ж) $(1+\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}$;

з) $(3\sqrt{5}-2)(2+3\sqrt{5})$;

і) $\left(\dfrac{5}{6}-\dfrac{7}{12}\right):(0,35-0,1)$;

к) $\dfrac{8,03+5,47}{(8,77+7,97):3,72}$.

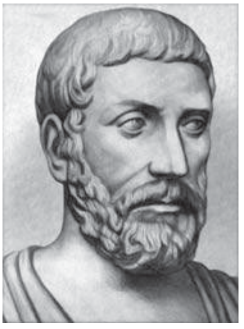
56. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{a}{a+2}-\left(\dfrac{a}{a^2-4}+\dfrac{a}{(a-2)^2}\right):\dfrac{a}{(2-a)^2}$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\dfrac{(b-a)^2}{\sqrt{ab}}$;

в) $\left(\dfrac{x}{x^2-y^2}-\dfrac{x}{(x-y)^2}\right)\cdot\dfrac{(y-x)^2}{2x}+\dfrac{y}{y+x}$;

г) $\left(\dfrac{x}{x+x\sqrt{y}}+\dfrac{x}{x-x\sqrt{y}}\right):\dfrac{2}{y-1}$.



«Людина своїми звичками приводить у рух сили, які, зрештою, її й гублять».
Піфагор

57. Курець випалює 4 цигарки за добу. Після випалювання першої цигарки в легенях осідає 0,0002 г нікотину. З кожною наступною цигаркою ця кількість збільшується на 0,000001 г. Яка кількість шкідливих речовин осідає в легенях курця за тиждень? А за рік?

58. Розв’яжіть нерівність:

а) $2(x + 3) - 1 \le x - 3(3x - 1)$; б) $x^2 + 6x + 6 < x$.

§ 2 Числові функції

Numerical Functions

Функція — одне з найважливіших понять математики і зручна математична модель реальних об'єктів, процесів і явищ. Її використовують у різних галузях знань.

У *фізиці* — це висота, на якій перебуває тіло або на яку підняте тіло, кинуте вертикально вгору; залежить від початкової швидкості та часу руху й у будь-який момент часу визначається формулою $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, де v_0 — початкова швидкість, g — прискорення вільного падіння, t — час руху.

У *хімії* — молярна концентрація C_B розчиненої речовини B залежить від кількості розчиненої величини та об'єму розчину і задається формулою $C_B = \frac{n_B}{V}$, де n_B — число молів, V — об'єм розчину.

В *астрономії* — роздільна здатність телескопа залежить від діаметра об'єктива і визначається формулою $r = \frac{140}{D}$, де r — кутова роздільна здатність телескопа у секундах, D — діаметр об'єктива у міліметрах.

Повторимо відомості про функцію, які ви знаєте з попередніх класів.

Якщо кожному значенню змінної *x* з деякої множини *D* відповідає єдине значення змінної *y*, то таку відповідність називають *функцією*.

При цьому x називають ***незалежною змінною***, або ***аргументом***, y — ***залежною змінною***, або ***функцією***.

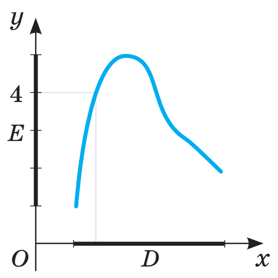
Усі значення, які може набувати аргумент функції, називають ***областю визначення*** даної функції і позначають буквою D.

Множину всіх значень y, яких може набувати функція, називають її ***областю значень*** і позначають буквою E (мал. 15). Якщо області визначення і області значень функцій є числовими множинами, то такі функції називають *числовими функціями*. Щоб задати функцію, досить зазначити її область визначення і правило відповідності.

Задавати функції можна різними способами. Часто їх задають *формулами*. Наприклад.

• Відповідність між довжиною a ребра куба і його об'ємом V можна задати формулою $V = a^3$.

• Відповідність між силою F притягання тіла до Землі і його масою m можна задати формулою $F = mg$.



Мал. 15

• Відповідність між значеннями змінної x і значеннями виразу $x^2 - 1$ можна задати формулою $y = x^2 - 1$.

Задання функції формулою зручне тим, що дає можливість знаходити значення функції для довільного значення аргументу. Якщо функцію задають формулою і нічого не говорять про область її визначення, то вважають, що ця область — множина всіх значень змінної, при яких формула має зміст. Наприклад, область визначення функції $y = x^2 + x - 1$ — множина R, а функції $y=\dfrac{x}{x-1}$ — множина $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Задавати функції можна і у вигляді *таблиці*. Наприклад, функцію $y = x^2 - 1$ для перших десяти натуральних значень x можна задати у вигляді такої таблиці:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	3	8	15	24	35	48	63	80	99

Тут: $D(y) = \{1, 2, 3, 5, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
$E(y) = \{0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99\}$.

Табличний спосіб задання функції зручний тим, що для певних значень аргументу до таблиці вже занесено відповідні значення функції, тому не треба робити будь-яких обчислень. Незручний він тим, що таблиця займає більше місця. До того ж, як правило, містить значення функції не для всіх значень аргументу, а тільки для деяких.

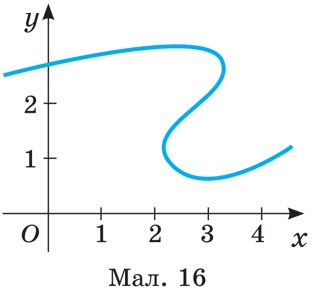
Функцію можна задавати і *словесно*. Наприклад, якщо кожному цілому числу поставити у відповідність його квадрат, то одержимо функцію, областю визначення якої є множина цілих чисел, а областю значень — множина квадратів натуральних чисел і число нуль.

Часто функції задають у вигляді графіків, побудованих у декартовій системі координат.

Графіком функції називається множина всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, ординати — відповідним значенням функції.

Маючи графік функції, можна для будь-якого значення аргументу (з області визначення) вказати відповідне значення функції, тобто графік задає функцію. *Графічний спосіб* задання функції зручний своєю наочністю. Дивлячись на графік, одразу можна з'ясувати властивості функції, яку він задає.

Чи задає функцію графік, зображений на малюнку 16? Ні, бо на цьому графіку одному значенню аргументу x (наприклад, $x = 3$) відповідає три різних значення y. А згідно з означенням функцією вважається тільки така відповідність, при якій одному значенню аргументу x з області визначення відповідає єдине значення функції y.

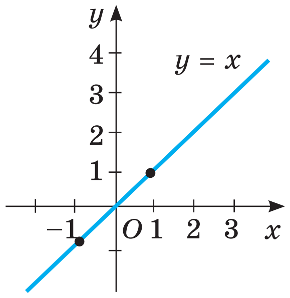
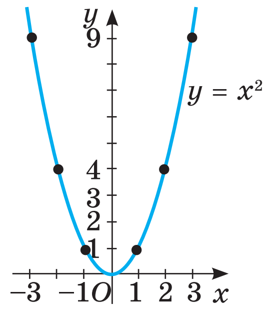
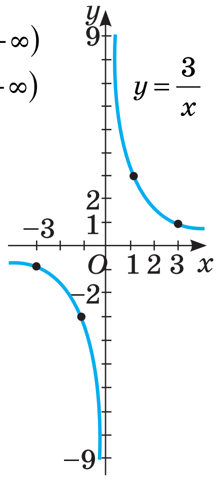
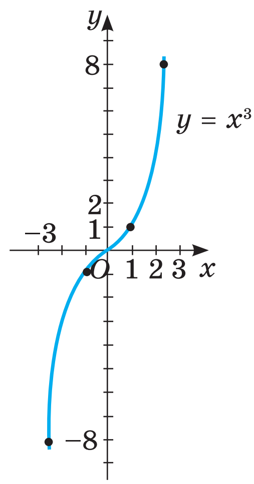
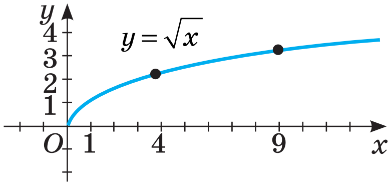
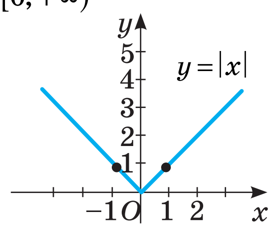


Мал. 16

Існує багато різних видів функцій. Деякі з них ви вже знаєте.

- $y = kx$ — пряма пропорційність $(k \neq 0)$;
- $y = ax + b$ — лінійна функція;
- $y = \dfrac{k}{x}$ — обернена пропорційність $(k \neq 0)$;
- $y = ax^2 + bx + c$ — квадратична функція $(a \neq 0)$.

Графіки найуживаніших функцій подано в таблиці.

Графік — **пряма** $D(y) = R$ $E(y) = R$ 	Графік — **парабола** $D(y) = R$ $E(y) = [0; +\infty)$ 
Графік — **гіпербола** $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ 	Графік — кубічна **парабола** $E(y) = R$ $D(y) = R$ 
$D(y) = [0; +\infty)$ $E(y) = [0; +\infty)$ 	$D(y) = R$ $E(y) = [0; +\infty)$ 

Щоб будувати графіки складніших функцій (як ви вже знаєте з курсу алгебри 9 класу), використовують такі правила.

1. Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі x.

2. Щоб побудувати графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, треба графік функції $y = f(x)$ розтягнути від осі x у k разів, якщо $k > 1$, або стиснути його в $\frac{1}{k}$ разів до осі x, якщо $0 < k < 1$.

3. Щоб одержати графік функції $y = f(x) + n$, треба графік функції $y = f(x)$ перенести на n одиниць у напрямку осі y, якщо $n > 0$, або на $-n$ одиниць у протилежному напрямку, якщо $n < 0$.

4. Щоб одержати графік функції $y = f(x - m)$, досить графік функції $y = f(x)$ перенести на m одиниць у напрямку осі x, якщо $m > 0$, або на $-m$ одиниць у протилежному напрямку, якщо $m < 0$.

Приклади побудови графіків $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = -2x^2$, $y = -0{,}5x^2$ подано на малюнку 17, а графіків $y = x^2$, $y = (x - 3{,}5)^2$, $y = (x - 3{,}5)^2 + 3$ — на малюнку 18.

Розглянемо детальніше, як будують графіки функцій за допомогою інших перетворень.

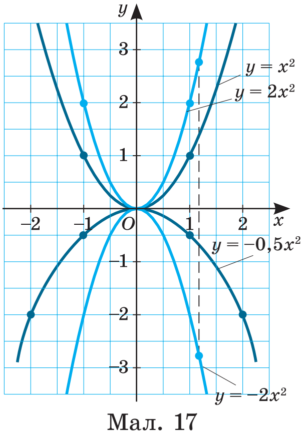
5. Щоб за допомогою графіка функції $y = f(x)$ побудувати графік функції $y = f(kx)$, $(k > 0)$, потрібно:

— стиснути графік функції $y = f(x)$ у k разів до осі y, якщо $k > 1$;

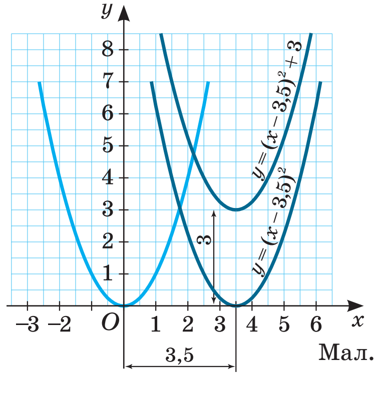
— розтягнути графік функції $y = f(x)$ у $\frac{1}{k}$ разів від осі y, якщо $0 < k < 1$.

Наприклад, на малюнку 19 подано графіки трьох функцій: 1) $y = f(x)$ (синя лінія); 2) $y = f(2x)$ (зелена лінія) — отриманий стисненням у 2 рази синьої лінії до осі y; 3) $y = f(0{,}5x)$ (червона лінія) — отриманий розтягом у 2 рази синьої лінії від осі y.

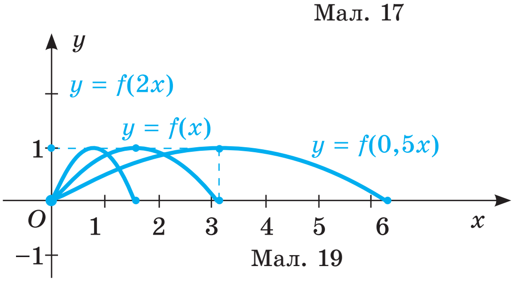
Зверніть увагу на послідовність кроків під час побудови графіків функцій, що потребують здійснення кількох геометричних перетворень. Побудову, наприклад, графіка функції $y = 0{,}5\sqrt{2x - 3}$ виконують у такій послідовності (мал. 20):



Мал. 17



Мал. 18



Мал. 19

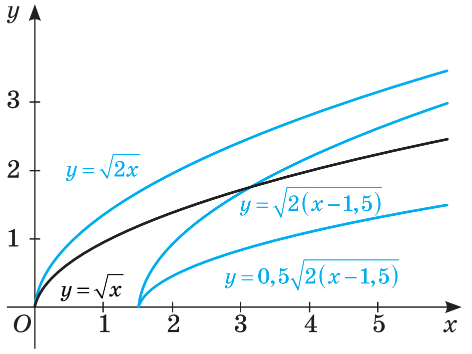
1) Записати функцію у вигляді $y = 0{,}5\sqrt{2(x-1{,}5)}$.

2) Побудувати графік функції $y = \sqrt{x}$.

3) Стиснути у 2 рази побудований графік $y = \sqrt{x}$ до осі y $\left(y = \sqrt{2x}\right)$.

4) Перенести отриманий графік уздовж осі x паралельно на 1,5 одиниці праворуч $\left(y = \sqrt{2(x-1{,}5)}\right)$.

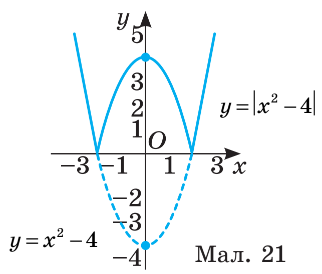
5) Стиснути у 2 рази (1 : 0,5 = 2) побудований графік до осі x $\left(y = 0{,}5\sqrt{2(x-1{,}5)}\right)$.



Мал. 20

6. Щоб за допомогою графіка функції $y = f(x)$ побудувати графік функції $y = |f(x)|$, скористаємося означенням модуля: $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0, \\ -f(x), f(x) < 0. \end{cases}$

Як бачимо, значення функції $y = |f(x)|$ і $y = f(x)$ однакові за умови, що $f(x) \geq 0$ і протилежні, якщо $f(x) < 0$. Оскільки графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі x, то щоб побудувати графік функції $y = |f(x)|$, досить ті частини графіка функції $y = f(x)$, які лежать нижче від осі x, замінити симетричними їм відносно цієї осі, а все інше залишити без змін. Наприклад, маючи графік функції $y = x^2 - 4$, можна одразу побудувати графік функції $y = |x^2 - 4|$ (мал. 21).

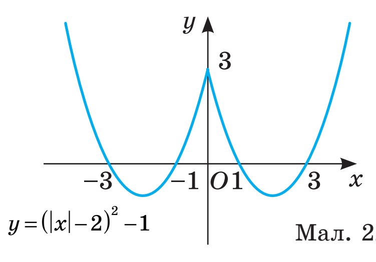


Мал. 21

7. Розглянемо функцію $y = f(|x|)$. За означенням модуля:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), x \geq 0; & (1) \\ f(-x), x < 0. & (2) \end{cases}$$

Як бачимо, графік функції $y = f(|x|)$ складається з двох частин (1) і (2). Для побудови першої частини потрібно побудувати графік функції $y = f(x)$ для $x \geq 0$. Для побудови другої частини слід відобразити побудований графік (1) симетрично відносно осі y. Графіком функції $y = f(|x|)$ буде об’єднання обох побудованих частин. Наприклад, маючи графік функції $y = (x-2)^2 - 1$, ($x \geq 0$), можна одразу побудувати графік функції $y = (|x|-2)^2 - 1$ (мал. 22).



Мал. 22

Хочете знати ще більше?

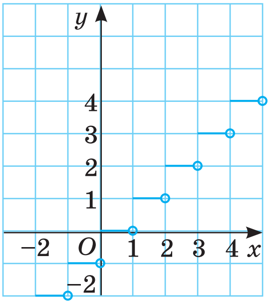
Розглянемо ще дві цікаві функції:

1) $y = [x]$, де $[x]$ — ціла частина числа x (найбільше ціле число $[x]$, яке не більше від x).

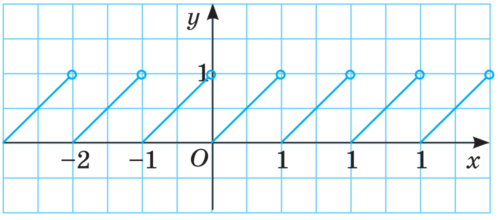
Графік функції $y = [x]$ — на малюнку 23.

2) $y = \{x\}$, де $\{x\}$ — дробова частина дійсного числа x ($\{x\} = x - [x]$) — різниця між даним числом і його цілою частиною.

Графік функції $y = \{x\}$ — на малюнку 24.



Мал. 23



Мал. 24

Перевірте себе

1. Що таке функція? Як позначають функції?
2. Що таке аргумент функції?
3. Що таке область визначення функції?
4. Що таке область значень функції?
5. Як можна задавати функцію?
6. Що таке графік функції?
7. Назвіть основні види функцій. Які їх графіки?
8. Задано графік функції $y = f(x)$. Як побудувати графік функції: а) $y = f(x - m)$; б) $y = f(x) + n$; в) $y = kf(x)$; г) $y = f(kx)$?
9. Задано графік функції $y = f(x)$. Як побудувати графік функції: а) $y = |f(x)|$; б) $y = f(|x|)$?

Виконаємо разом

1 Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \dfrac{x+3}{9-x^2}$; б) $y = \sqrt{1-2x+x^2}$.

Розв'язання. а) Проаналізуємо функцію $y = \dfrac{x+3}{9-x^2}$.

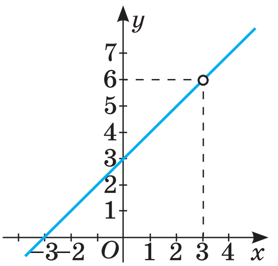
Змінна x може набувати будь-яких значень, крім тих, при яких знаменник дробу $\frac{x+3}{9-x^2}$ дорівнює нулю. Щоб їх знайти, розв'яжемо рівняння $9 - x^2 = 0$, $(3 - x)(3 + x) = 0$, звідси $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Отже, область визначення функції — множина всіх дійсних чисел, крім $x = \pm 3$.

$D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$.

б) Розглянемо функцію $y = \sqrt{1-2x+x^2}$. Виконаємо тотожні перетворення: $y = \sqrt{1-2x+x^2} = \sqrt{(1-x)^2} = |1-x|$. При будь-яких значеннях змінної x вираз $|1-x| \geq 0$, а тому область визначення функції — уся множина дійсних чисел. $D(y) = R$.

2 Чим різняться графіки функцій $y = x + 3$ і $y = \frac{x^2-9}{x-3}$?

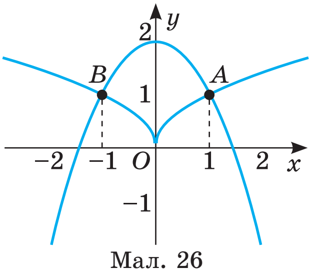
Розв'язання. Праві частини даних рівностей тотожно рівні, оскільки $\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$. Але перший вираз має числові значення при всіх дійсних значеннях x, а другий — при всіх, крім $x = 3$. Тому графік першої функції — пряма, а другої — пряма без однієї точки (мал. 25).



Мал. 25

3 Розв'яжіть графічно рівняння $2 - x^2 = \sqrt{|x|}$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = 2 - x^2$ і $y = \sqrt{|x|}$ (мал. 26). Графіком першої функції є парабола, вітки якої напрямлені донизу, піднята на 2 одиниці у напрямі осі y (червона лінія). Друга функція містить змінну під знаком модуля. Її графік складається з двох частин: із графіка функції $y = \sqrt{x}$ і графіка, симетричного йому відносно осі y (зелена лінія). Побудовані графіки перетинаються в точках, абсциси яких дорівнюють (можливо наближено) — 1 і -1. Перевірка переконує, що це — точні корені.



Мал. 26

Виконайте усно

59. Знайдіть область визначення функції:
а) $y = 3x^2 - 2$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = 2{,}5$; г) $y = 4 - x$.

60. Як називається графік функції, заданої формулою:
а) $y = 3x + 1$; б) $y = x^2$; в) $y = 3$; г) $y = x^{-1}$?

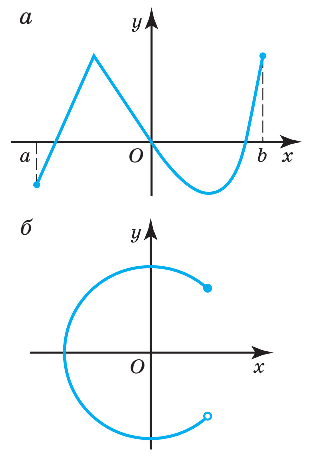
61. Графік якої з функцій проходить через початок координат:
а) $y = -5x$; б) $y = 3x - 2$; в) $y = 2x^2$; г) $y = x(x - 2)$?

62. Які з функцій, заданих формулами $y = 15 - x$, $y = |x|$, $y = 3(x - 2)$, $y = x^2 + 5$, не можуть набувати від'ємних значень?

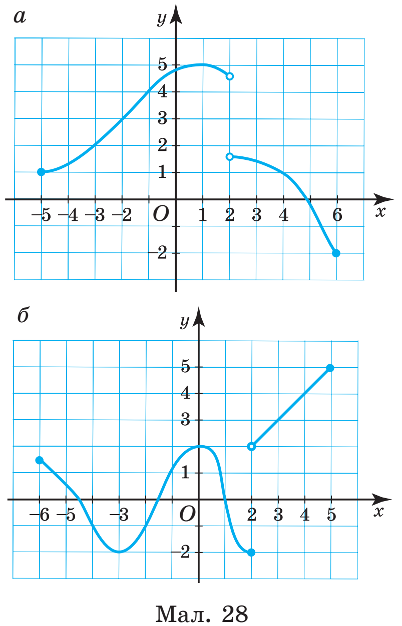
63. Чи є площа круга функцією його радіуса? А його діаметра?

64. Чи є графіком функції фігура, зображена на малюнку 27?

65. Укажіть область визначення і область значень функцій, зображених на малюнку 28.



Мал. 27



Мал. 28

Рівень А

66. Задайте формулою функцію, яка виражає площу квадрата через його периметр P.

67. Побудуйте графік функції, яка виражає залежність:

а) периметра правильного шестикутника від довжини його сторони;

б) периметра квадрата від його площі.

68. Знайдіть $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, якщо функцію задано формулою:

а) $f(x) = 3x - 1$; б) $f(x) = 2x^2 + 3$;

в) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$.

69. Функцію задано формулою $y = -0,5x + 2$. Знайдіть значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює -24; -10; 0; 5. При якому значенні аргументу значення функції дорівнює -6; 0; 5; $7,5$?

70. Знайдіть значення функції, заданої формулою:

а) $y = 8x - 5$, якщо значення аргументу дорівнює -2; 0; $1,5$; 12; 25;

б) $y = -\dfrac{x}{2} + 1$, якщо значення аргументу дорівнює -8; -1; 0; 1; 20.

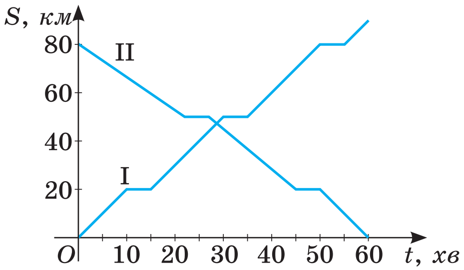
71. Знайдіть значення аргументу, при якому:

а) значення функції $y = -3x + 2$ дорівнює -7; 0; 5;

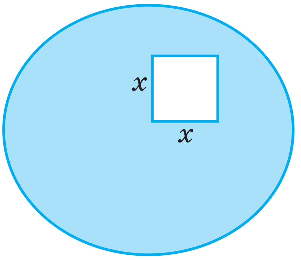
б) значення функції $y = x(x - 3)$ дорівнює -2; 0; 10.

72. На малюнку 29 зображено графіки руху двох електропоїздів. Проаналізуйте ці рухи: скільки зупинок робив кожен поїзд; коли вони зустрілися; скільки часу тривала кожна зупинка? Знайдіть швидкість кожного поїзда до першої зупинки.

73. На малюнку 30 зображено частину круга радіуса 4 см, з якого вирізано квадрат зі стороною x. Задайте функцію залежності площі частини круга від сторони вирізаного квадрата x. Обчисліть з точністю до десятих значення цієї функції, якщо $x = 2$ і $x = 4$.



Мал. 29



Мал. 30

74. Функцію задано формулою $y = 0{,}25x - 1$. Заповніть таблицю.

x	–10	–5							
y			–2	–1	0	1	1,5	4	25

75. Функцію задано формулою $y=\sqrt{x+5}$ при області визначення $D = \{-4;\ -2{,}75;\ -1;\ 1{,}25;\ 4;\ 11\}$. Задайте її таблично і графічно.

76. Функцію задано таблицею.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Задайте її формулою. Укажіть її область визначення й область значень.

77. У яких точках графік функції $y = x^2 - 3x$ перетинає: а) вісь y; б) вісь x?

78. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = 2x - 7$;   в) $y=2-\sqrt{x}$;   ґ) $y=\sqrt{x+1}$;

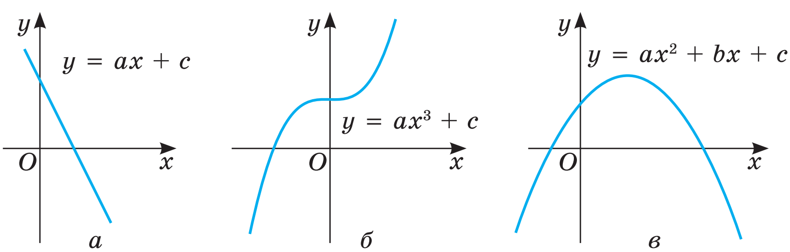
б) $y=\dfrac{x+3}{x^2-9}$;   г) $y=\dfrac{1}{x-1}$;   д) $y=\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{3}{x^2}$.

79. Побудуйте графіки функцій і знайдіть їх області значень:

а) $y = x^2,\ x\in[-2;3]$;   в) $y = x^3,\ x\in[-3;2]$;

б) $y=|x|,\ x\in[-1;2]$;   г) $y=\dfrac{1}{x},\ x\in[-2;\ 0)\cup(0;\ 2]$.

80. Яких значень (додатних чи від'ємних) набувають параметри a, b, c для графіків, зображених на малюнку 31?



Мал. 31

81. Відомо, що графік лінійної функції проходить через точки $A(-2; 1)$ і $B(3; 6)$. Задайте цю функцію формулою.

82. Задайте формулою обернену пропорційність, графік якої проходить через точку $A(3; 4)$.

83. Чи проходить графік функції $y = x^2 - 5x + 6$ через точку $A(0; 5)$? А через точку $B(5; 6)$?

84. Функцію задано формулою $y=\dfrac{4}{1-x}$, де $-7 < x < 1$. Заповніть таблицю.

x	–7	–3	–2	–1	–0,5	0	0,5
y							

Побудуйте графік цієї функції.

85. Функцію задано формулою $y=\dfrac{6}{x}+3$, де $1 < x < 6$. Побудуйте графік цієї функції, склавши спочатку таблицю її значень.

Побудуйте графік функції. Для кожної функції знайдіть область визначення та область значень (86–87).

86. а) $y = -4x$; б) $y = 0{,}5x^2$; в) $y=\sqrt{x+2}$; г) $y=\dfrac{4}{x}$; ґ) $y=|x|-3$.

87. а) $y = 2x - 5$; б) $y = -2x^2$; в) $y=\dfrac{6}{x}+2$; г) $y=\sqrt{x}-2$; ґ) $y=|x-3|$.

Рівень Б

88. Спростіть функцію і побудуйте її графік:
а) $y = x^2 - 4x + 4$; б) $y = x^2 + 6x + 9$.

89. Чим відрізняються графіки функцій:
а) $y = x - 1$ і $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$; б) $y = 3 - x$ і $y=\dfrac{x^2-6x+9}{3-x}$?

Побудуйте графіки цих функцій.

Побудуйте в одній системі координат графіки функцій (90–92).

90. а) $y = x^3$, $y = -x^3$, $y = -x^3 + 1$; б) $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x}+2$, $y=\sqrt{x-1}$.

91. а) $y = -3x$, $y = -3x + 2$, $y = -3x - 0{,}5$; б) $y=-\dfrac{12}{x}$, $y=-\dfrac{12}{x}+3$, $y=-\dfrac{12}{x}$.

92. а) $y=2\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}-3$, $y=2\sqrt{x+2}$; б) $y = -x^2$, $y = -(x + 2)^2$, $y = -x^2 + 3$.

93. Розв'яжіть графічно рівняння:
а) $2x-6=\sqrt{x}$; б) $x^2 = x + 2$; в) $x = x^3$; г) $\dfrac{3}{x}=3x$.

94. Маса порожньої бочки — 40 кг, а маса 1 л бензину — 0,8 кг. Виразіть формулою залежність маси m бочки з бензином від об'єму V бензину в ній. Чи є ця залежність лінійною функцією?

95. Прямокутний паралелепіпед зі сторонами основи a см, b см і висотою 6 см має об'єм, що дорівнює 72 см^3. Задайте залежність b від a.

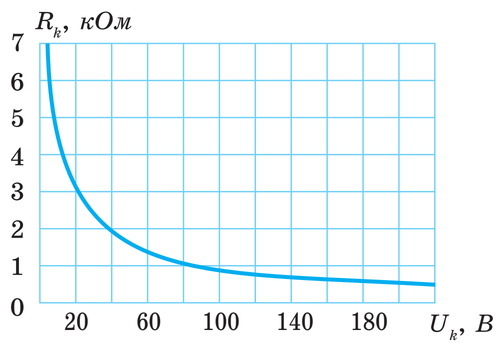
96. У таблиці подано обсяг споживання електроенергії (у кВт·год) родиною у першому півріччі 2012 і 2017 років. Складіть таблицю про споживання електроенергії за минулий рік у вашій родині. Побудуйте в одній системі координат:

а) графік споживання електроенергії за перше півріччя минулого року у вашій родині;

б) графік споживання електроенергії за перше півріччя 2017 року в родині Рахувальників. Зробіть висновки.

Місяць	1	2	3	4	5	6
2012	150	130	145	120	125	110
2017	105	100	90	90	95	70

97. Під дією електричного струму в тілі людини виникають достатньо складні біохімічні й фізіологічні процеси, які знижують опір її тіла. Залежність опору тіла людини від *напруги електричної мережі* наведено на малюнку 32. Використовуючи графік, установіть:



Мал. 32

а) чому дорівнює опір тіла людини, якщо напруга дорівнює 20 В;

б) починаючи з якої напруги, опір тіла людини не перевищує 1 кОм;

в) зростаючою чи спадною є задана функція;

г) які чинники впливають на зміну опору тіла людини.

Що означає знак на малюнку 33?


Мал. 33

98. Задано функцію $y = f(x)$. Установіть відповідність між геометричними перетвореннями **(1–4)**, які потрібно виконати, щоб із графіка функції $y = f(x)$ отримати графік іншої функції **(А–Д)**.

1	Симетрія відносно осі x	**А**	$y = f(x - c)$
2	Паралельне перенесення вздовж осі x	**Б**	$y = kf(x)\ (k > 1)$
3	Паралельне перенесення вздовж осі y	**В**	$y = f(kx)\ (k > 1)$
4	Розтягнення від осі x	**Г**	$y = -f(x)$
		Д	$y = f(x) + c$

99. Ательє виготовляє та продає вишиванки, вартість кожної з яких 750 грн. Щоб пошити одну таку сорочку, потрібно 2,4 м тканини. Запишіть формулу для обчислення залишку тканини після пошиття x сорочок, якщо в сувої 50 м тканини. Яких значень може набувати x? Скільки тканини залишиться в сувої, якщо пошиють 15 сорочок? Який дохід матиме ательє від продажу цих 15 сорочок? Який дохід матиме ательє, якщо продасть усі сорочки, виготовлені з одного сувою?

Побудуйте графік функції (100–103).

100. а) $y=\begin{cases}4, & x\le -2,\\ x^2, \text{ якщо} & -2<x<1,\\ 1, & x\ge 1;\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}-1, & x\le -2,\\ \dfrac{2}{x}, \text{ якщо} & -2\le x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

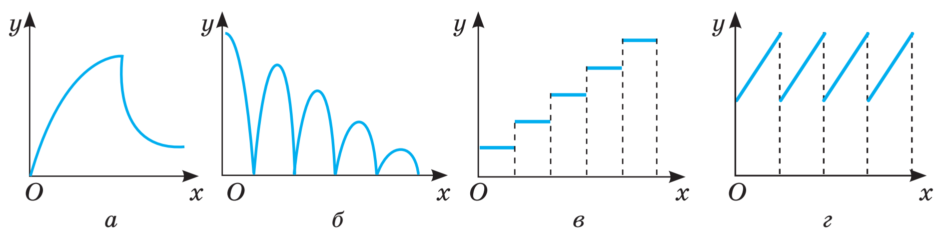
101. а) $y = x^2 - 2x - 1$; б) $y = 1 + 4x - x^2$; в) $y = 4x^2 - 4x + 5$.

102. а) $y=|x^2+4x+3|$; б) $y=x^2-4|x|+3$; в) $y=\sqrt{|x|}+1$.

103. а) $y=|x^2-6x+8|$; б) $y=x^2-2|x|-3$; в) $y=\sqrt{|x|}-2$.

104. Установіть, який із графіків (мал. 34) відповідає кожній з описаних нижче ситуацій:

1) на газоні росте трава, яку регулярно скошують (x — час, y — висота трави);
2) груша росте, потім її зривають і висушують (x — час, y — маса груші);
3) м'яч падає з деякої висоти на підлогу (x — час, y — відстань від м'яча до підлоги);
4) через кожну годину робочого часу на склад здають однакову кількість виготовлених деталей (x — час, y — кількість деталей на складі).



Мал. 34

105. Практичне завдання. Складіть завдання, аналогічне завданню № 104, і запропонуйте його для розв'язання однокласникам.

Розв'яжіть графічно рівняння (106–107).

106. а) $1-x^2=\sqrt{x}$; б) $2-x^2=x$; в) $2x+3=x^2-4|x|+3$.

107. а) $\dfrac{3}{x}=x+2$; б) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{1}{x-2}$; в) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{2}{|x|}$.

108. Транспортні витрати (в умовних грошових одиницях) на перевезення одиниці вантажу залізничним транспортом виражаються функцією $y = 2x + 100$, а автомобільним — функцією $y = x + 200$, де x вимірюється у кілометрах. Установіть, на які відстані вигідніше перевозити вантаж залізничним транспортом, а на які — автомобільним.

Рівень В

109. Вважають, що в разі заглиблення на кожні 30,5 м внутрішня температура Землі підвищується на 1 °C. На глибині 5 м вона дорівнює 15 °C. Задайте залежність температури t від глибини h. Яка температура на глибині 1 км? А на глибині 3 км?

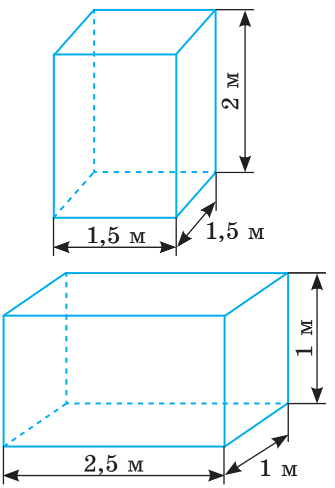
110. Для кожного значення параметра a вкажіть кількість розв'язків рівняння:

а) $4 - x^2 = a$; б) $2\sqrt{x} = a$; в) $|x| - 3 = a$; г) $\frac{2}{x} = a$.

111. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \frac{\sqrt{x-6}}{x^2-1}$; б) $y = \frac{\sqrt{12+x-x^2}}{|x|-2}$; в) $y = \frac{3}{\sqrt{x^2-4x+3}} + \frac{\sqrt{4x-x^2}}{2x^2-7x}$.

112. На малюнку 35 зображено два резервуари, що мають форму прямокутного паралелепіпеда, і подано їх розміри. Перший резервуар наповнено водою на $\frac{3}{5}$ об'єму, а другий — на $\frac{2}{5}$ об'єму. З першого резервуара щодня беруть 35 л води, а з другого — 25 л. Запишіть функцію, яка показує, у скільки разів через x днів у першому резервуарі залишиться води більше, ніж у другому. Обчисліть, у скільки разів у першому резервуарі залишиться води більше, ніж у другому через 15 днів. Що означає рівність $\frac{2700-35x}{1000-25x} = 4$? Розв'яжіть це рівняння і зробіть висновок.



Мал. 35

Побудуйте графіки функцій (113–120).

113. а) $y = 2\sqrt{x^2+4x+4} + 3$; б) $y = 5 - \sqrt{4x^2-4x+1}$.

114. а) $y = ||x|-5|$; б) $y = |4x^2-4|x|+3|$; в) $y = |x^2+|x|-6|$; г) $y = |3\sqrt{|x|-3}-2|$.

115. а) $y = \frac{2}{|x|}$; б) $y = 1 - \sqrt{|x|}$; в) $y = \frac{6}{|x|-3}$; г) $y = \left|\frac{-8}{|x|-4}\right|$.

116. а) $y=|x+1|+|x-3|$; в) $y=|x-2|-|x+4|$;

б) $y=\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{4x^2-4x+1}$; г) $y=\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+4x+4}$.

117. а) $y=2\sqrt{4-x}$; б) $y=0{,}5\sqrt{2x-4}$; в) $y=3\sqrt{|x|-2}$; г) $y=-2\sqrt{6-2|x|}$.

118. а) $y=\left|(2x-4)^2-4\right|$; б) $y=-0{,}5(x+2)^2+2$; в) $y=\left|2-(0{,}5|x|-2)^2\right|$.

119. а) $y=-2[x]$; б) $y=0{,}5\{x\}$; в) $y=[x-1]$; г) $y=\{x-0{,}25\}$.

120. *Відкрита задача.* Побудуйте графік функції $y=2|x|+\ldots$ і знайдіть її область значень.

121. Знайдіть область значень функції:

а) $y=2x^2+3$; б) $y=\sqrt{x}-5$; в) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$; г) $y=2|x+4|+7$.

122. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $|x^3|=x$; б) $\sqrt{|x|+2}=4-|x|$; в) $4-x^2=|x-2|$; г) $\dfrac{2}{x}=|3-x^2|$.

Скільки спільних точок мають графіки заданих функцій залежно від значень параметра a (123–124)?

123. а) $y=\big||x|-2\big|$ і $y=a$; б) $y=|x^2-2x-3|$ і $y=a$.

124. а) $y=|x^2-4x|$ і $y=a-2$; б) $y=|x+2|+|x-3|$ і $y=a$.

125. При яких значеннях параметра a рівняння $\big||x-3|-2\big|=x-a$ має безліч коренів?

126. При яких значеннях параметра a рівняння $\big|3|x-4|-2\big|=a-x$ має три корені?

127. Для кожного значення параметра a знайдіть кількість коренів рівняння $\big|2|x+2|-4\big|=x-a$.

Вправи для повторення

128. У перший день робітник виконав $\dfrac{1}{5}$ всього замовлення, а у другий $\dfrac{2}{3}$. У скільки разів робота, виконана за два дні, більша за невиконану?

129. Скоротіть дроби: а) $\dfrac{m^2+m}{m^2-1}$; б) $\dfrac{m^2-6m+9}{m^2-9}$; в) $\dfrac{m^2-7m+10}{m^2-m-2}$.

130. Розв'яжіть нерівність:

а) $5x+6<18-3x$; в) $-2(x+15)<-30$; ґ) $|x-3|<6$;

б) $x^2-x(3+x)>2(x-1)$; г) $(x+2)^2\le(x-3)^2$; д) $|15+3x|>30$.

131. Головними чинниками негативного впливу на тваринний світ є знищення та трансформація природних екосистем, надмірне комерційне використання тваринного світу та браконьєрство. Особливої охорони та відновлення потребують різні види тварин, занесені до Червоної книги України: ракоподібні (31 тип), комахи (226), молюски (20), риби (69), птахи (87), ссавці (68), інші (41). Побудуйте стовпчасту і секторну діаграми, які відображають співвідношення між цими видами тварин.

§ 3 Властивості функції

Function Properties

Для того, щоб вивчати процеси і явища навколишнього світу, потрібно вміти досліджувати відповідні математичні моделі, зокрема і функції. *Дослідити функцію* — означає виявити її найважливіші властивості:

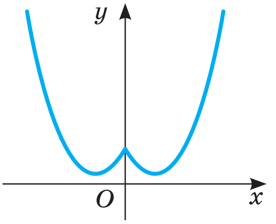
1) вказати область визначення;
2) вказати область значень;
3) з'ясувати, чи є дана функція парною або непарною;
4) знайти точку перетину графіка функції з віссю y;
5) знайти нулі функції та проміжки знакосталості;
6) визначити проміжки зростання чи спадання;
7) з'ясувати, чи має функція найбільше і найменше значення;
8) побудувати графік функції.

Область визначення і область значень. Встановлюючи область визначення функції, вказують усі значення, яких може набувати аргумент. Якщо функцію задано формулою, а про її область визначення нічого не сказано, то розуміють, що вона така сама, як і область допустимих значень змінної, яка входить до цієї формули.

Якщо функцію задано графічно, то область визначення функції — проекція її графіка на вісь x; область значень функції — проекція її графіка на вісь y (мал. 15). Наприклад, область визначення функції $y = x^2$ — множина всіх дійсних чисел R, область її значень — проміжок $[0; +\infty)$.

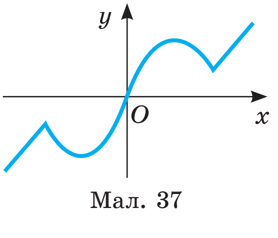
Парність чи непарність функцій. Функцію $y = f(x)$ називають **парною**, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $f(-x) = f(x)$.

Функцію $y = f(x)$ називають ***непарною***, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $f(-x) = -f(x)$.



Мал. 36

Існують функції ні парні, ні непарні. Це такі функції, в яких або область визначення не симетрична відносно нуля, або для яких не виконується жодна з умов $f(-x) = \pm f(x)$.



Мал. 37

Якщо функцію задано графічно, то дослідити її на парність або непарність досить просто, оскільки графік парної функції симетричний відносно осі y (мал. 36), а непарної — відносно початку координат (мал. 37).

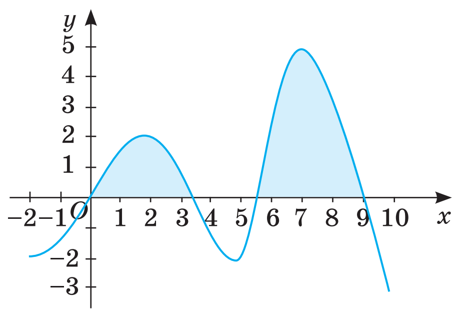
Наприклад, з функцій, заданих на R, $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = |x| - 3$ — парні, $y = x^3$, $y = x^3 + x$ — непарні, а $y = 2x + 3$, $y = x^2 + x$ — ні парні, ні непарні. Побудуйте їхні графіки та переконайтеся в цьому.

Нулі функції та проміжки знакосталості. Значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю, називають ***нулями функції***. Проміжки області визначення функції, на яких функція не змінює знака (тобто має тільки додатні або тільки від'ємні значення), називають *проміжками **знакосталості*** (йдеться про проміжки найбільшої довжини).

Щоб знайти нулі функції $y = f(x)$, потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$. Корені цього рівняння є нулями функції.

Щоб знайти проміжки знакосталості, потрібно розв'язати нерівності $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$.

Наприклад, нулями функції $f(x) = x^2 - 9$ є числа 3 і −3, бо $f(3) = 0$ і $f(-3) = 0$. Функція набуває від'ємних значень, якщо $x^2 - 9 < 0$, тобто коли $x \in (-3;\ 3)$.



Мал. 38

Для знаходження проміжків знакосталості та нулів функції можна скористатися її графіком. На проміжках області визначення, де $f(x) > 0$, графік функції $y = f(x)$ розташований вище осі абсцис. Графік функції $y = f(x)$ розташований нижче осі абсцис на проміжках області визначення, де $f(x) < 0$. Абсциси точок перетину графіка функції з віссю x — це нулі функції. Для прикладу розглянемо графік функції $y = f(x)$, де $x \in [-2; 10]$ (мал. 38). На проміжках (0; 3,5) і (5,5; 9) — функція набуває лише додатних значень, а на проміжках (−2; 0), (3,5; 5,5) і (9; 10) — лише від'ємних. Нулями функції $f(x)$ є числа 0; 3,5; 5,5 і 9.

Монотонність. Функцію називають ***зростаючою*** на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає більше значення функції.

Якщо для будь-яких x_1 і x_2 з проміжку X, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$, то функція $f(x)$ — *зростаюча* на проміжку X.

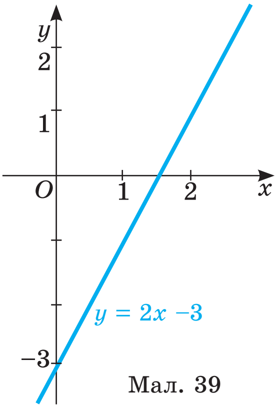
Функцію називають ***спадною*** на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає менше значення функції.

Якщо для будь-яких x_1 і x_2 з проміжку X, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$, то функція $f(x)$ — *спадна* на проміжку X.

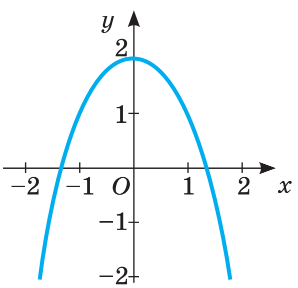
Якщо функція на всій області визначення зростає або на всій області визначення спадає, її називають *монотонною*. Якщо ж функція зростає на деякому проміжку або спадає на ньому, то говорять, що вона монотонна на даному проміжку (проміжки найбільшої довжини). Наприклад, монотонною є функція $y = 2x - 3$, бо вона на всій області визначення зростає (мал. 39).

Функція $y = 2 - x^2$ монотонна на проміжку $(-\infty; 0)$, на якому зростає, і на проміжку $(0; +\infty)$, на якому спадає. На всій області визначення вона не монотонна (мал. 40).

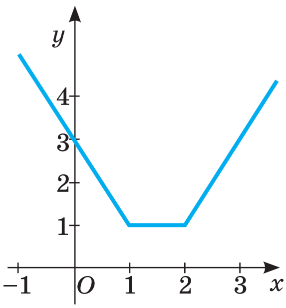
Проміжок, на якому функція не змінює свого значення, називають проміжком *сталості* функції. Наприклад, функція $y = |x-1| + |x-2|$ на проміжку $(-\infty; 1)$ спадає, на проміжку [1; 2] набуває значення $y = 1$, а на проміжку $(2; +\infty)$ — зростає (мал. 41). Отже, проміжок [1; 2] — проміжок сталості цієї функції.



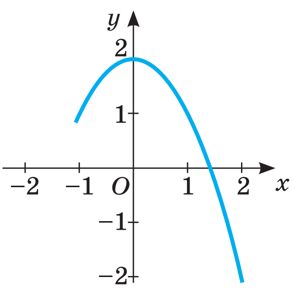
Мал. 39



Мал. 40



Мал. 41



Мал. 42

Найбільше і найменше значення функції. Характеризуючи властивості функції, часто відмічають також, у яких точках вона набуває *найбільшого значення*, а у яких — *найменшого*.

Найбільше (найменше) значення функції $f(x)$ на деякому проміжку X — це саме велике (мале) серед усіх значень, яких функція $f(x)$ набуває на цьому проміжку X.

Наприклад, найбільше значення функції $y = 2 - x^2$ дорівнює 2 (мал. 40), а найменше значення функції $y = |x-1| + |x-2|$ дорівнює 1 (мал. 41).

Залежно від проміжку X та властивостей функції $f(x)$ вона може мати і найбільше і найменше значення, може мати тільки одне з них, а може не мати жодного. Наприклад, функція $y = 2 - x^2$, задана на проміжку [−1; 2], у точці $x = 0$ має найбільше значення 2, а в точці $x = 2$ — найменше значення, яке дорівнює −2 (мал. 42).

У загальному вигляді квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$, визначена на R, набуває найбільшого або найменшого значення у точці, що відповідає вершині параболи. Якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору, і в абсцисі вершини параболи функція набуває найменшого значення. Якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз, і у точці, що відповідає абсцисі вершини параболи, функція набуватиме найбільшого значення. Вершина параболи має координати $\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-D}{4a}\right)$. Отже, квадратична функція

$y = ax^2 + bx + c$, визначена на R, має найбільше або найменше значення у точці з абсцисою $x = \frac{-b}{2a}$ і воно дорівнює $y = \frac{-D}{4a}$.

Деякі з властивостей функцій досить просто з'ясувати, дивлячись на її графік. Наприклад, функція, графік якої зображено на малюнку 43, має такі властивості.

1. Область визначення $D(y) = [-2;\ 24]$.

2. Область значень $E(y) = [-2;\ 4]$.

3. Функція ні парна, ні непарна.

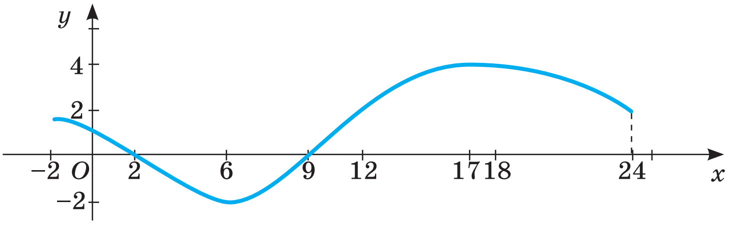
4. Графік функції з віссю y перетинається в одній точці — $(0;\ 1)$.

5. Функція має два нулі: $x_1 = 2$ і $x_2 = 9$.

$f(x) > 0$, якщо $x \in (-2; 2) \cup (9; 24)$, а $f(x) < 0$, якщо $x \in (2; 9)$.

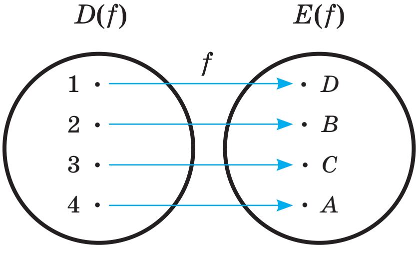
6. Функція спадає на двох проміжках $x \in (-2;\ 6)$ і $x \in (17;\ 24)$; зростає функція на одному проміжку $x \in (6;\ 17)$.

7. Функція має найбільше значення $y = 4$ при $x = 17$ і найменше значення $y = -2$ при $x = 6$.

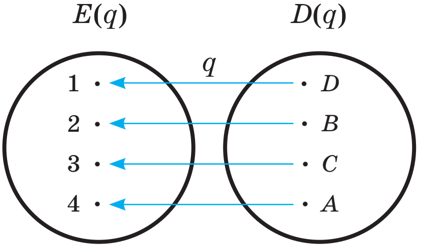


Мал. 43

Функції оборотні і необоротні. Нехай задано функцію $y = f(x)$ (мал. 44), тобто деяку відповідність між множинами $D(f)$ і $E(f)$. Якщо обернена відповідність q (мал. 45) є функцією, то її називають функцією, *оберненою* до f.



Мал. 44



Мал. 45

Функцію, яка має обернену, називають *оборотною*, а функцію, яка не має оберненої, — *необоротною*.

Функція оборотна тоді і тільки тоді, коли кожне своє значення вона набуває тільки один раз. Графічна інтерпретація: функція $y = f(x)$ є оборотною тоді і тільки тоді, коли будь-яка пряма, що паралельна осі x, і сама вісь x

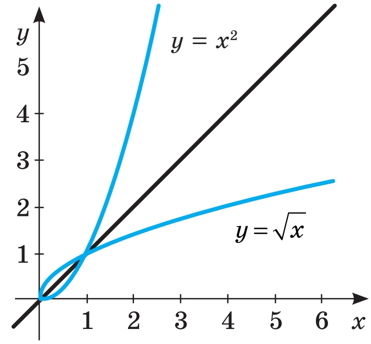
перетинають графік функції не більше, ніж в одній точці. Наприклад, функція $y = x^3$ — оборотна, а $y = x^2$ — необоротна.

Якщо функція q обернена до f, то і f — обернена до q. Такі дві функції називають взаємно оберненими.

З означення оберненої функції випливає, що область визначення прямої функції f є областю значень оберненої функції q, і навпаки. Тобто: $D(f) = E(q)$ і $D(q) = E(f)$.

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

На малюнку 46 зображено графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = x^2$, визначені на множині $[0; +\infty)$. Ці функції взаємно обернені на множині $[0; +\infty)$. Їх графіки симетричні відносно прямої $y = x$.



Мал. 46

Теорема (*про обернену функцію*). *Якщо функція монотонна на деякому проміжку, то вона оборотна.*

Наприклад, функція, графік якої зображено на малюнку 39, має обернену, оскільки вона монотонна (зростаюча). А функції, графіки яких зображено на малюнках 36 і 37, — не мають обернених, оскільки на множині R вони не монотонні.

Зверніть увагу! Якщо функція $y = f(x)$ — зростає (спадає) на деякому проміжку, то обернена до неї функція також зростає (спадає).

Щоб знайти функцію f, обернену до функції q, що задана графічно, досить побудувати графік, симетричний графіку функції q відносно прямої $y = x$. А як знайти функцію, обернену до функції, що задана формулою? Розглянемо конкретний приклад.

Нехай дано функцію $y = 5x + 2$. Якщо виразити x через y, матимемо $x = \frac{y-2}{5}$. Якщо в отриманій рівності замість x написати y, а замість y написати x, дістанемо: $y = \frac{x-2}{5}$. Це функція, обернена до даної. Дану функцію можна також назвати оберненою до здобутої.

Хочете знати ще більше?

Властивості монотонності (зростання і спадання) є важливими характеристиками функцій, що часто використовують для розв'язування задач. Під час розв'язування рівнянь користуються такими твердженнями:

1. Якщо функції $y = f(x)$ і $y = q(x)$ – зростаючі (спадні) на деякому проміжку M, то функція $y = f(x) + q(x)$ також зростаюча (спадна) на цьому проміжку M.

2. Якщо функція $y = f(x)$ — зростаюча (спадна) на деякому проміжку M, то рівняння $f(x) = a$, де a — деяке число, має не більше одного кореня.

3. Якщо на деякому проміжку M функція $y = f(x)$ — зростаюча, а $y = q(x)$ — спадна, то на цьому проміжку рівняння $f(x) = q(x)$ має не більше одного кореня.

На основі останнього твердження можна встановити, що рівняння $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$ має лише один корінь $x = 4$, який легко знаходять випробуванням.

Перевірте себе

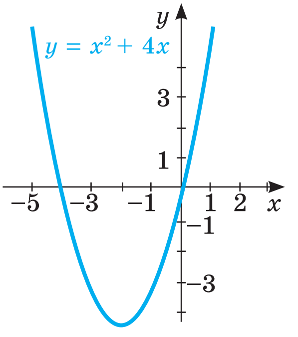
1. Що таке область визначення і область значень функції? Як їх знайти за допомогою графіка?
2. Що називають нулями функції? А проміжками знакосталості?
3. Які функції називають зростаючими? А спадними?
4. Чи може функція на одному проміжку спадати, а на іншому — зростати?
5. Які функції називають парними? Наведіть приклади парних функцій.
6. Які функції називають непарними? Наведіть приклади.
7. Чи правильно, що кожна функція є парною або непарною?
8. Чи існують функції, які одночасно є і парними, і непарними?
9. Які функції називають оборотними?

Виконаємо разом

1 Побудуйте графік функції $y = x^2 + 4x$ і визначте проміжки, на яких задана функція спадає, а на яких — зростає. При якому значенні x значення даної функції найменше?

Розв'язання. Дана функція квадратична, її графік — парабола, вітки якої напрямлені вгору, а вершина має координати: $x = -2$ і $y = -4$. Знайдемо нулі функції: $x^2 + 4x = 0$, або $x(x + 4) = 0$, звідки $x = 0$, $x = -4$.

За знайденими координатами будуємо параболу (мал. 47).



Мал. 47

Як видно з графіка, дана функція спадає на проміжку $(-\infty; -2)$, зростає на проміжку $(-2; +\infty)$, а найменше значення дорівнює -4, якщо $x = -2$.

2 Парною чи непарною є функція:

а) $y = 5x^2 + 3$; б) $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$; в) $y = \frac{x^2 - x}{x - 1}$?

Розв'язання. а) Область визначення $D(y)$ функції $y = 5x^2 + 3$ — множина всіх дійсних чисел R, симетрична відносно 0. Знайдемо $f(-x)$:

$f(-x) = 5(-x)^2 + 3 = 5x^2 + 3 = f(x)$. Отже, функція $y = 5x^2 + 3$ — парна.

б) Область визначення функції $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$: $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$ є симетричною відносно 0. $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{1-(-x)^2}=-\dfrac{x^3}{1-x^2}=-f(x)$. Отже, функція $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$ — непарна.

в) $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. Отже, область визначення не симетрична відносно нуля, тобто функція загального виду — ні парна, ні непарна. Хоча, якщо перетворити дану функцію, то отримаємо $y=\dfrac{x^2-x}{x-1}=\dfrac{x(x-1)}{x-1}=x$, а функція $y = x$ — непарна. Тому умова про симетричність області визначення відносно нуля так само важлива, як і друга умова про $f(-x)$.

3 Доведіть, що функція $f(x) = 0,5x^3 + 1$ зростає на всій області визначення.

Розв'язання. Нехай $x_1 < x_2$. Тоді $f(x_1)=0,5x_1^3+1$, а $f(x_2)=0,5x_2^3+1$. Порівняємо значення $f(x_2)$ і $f(x_1)$. Знайдемо їхню різницю:

$$f(x_1)-f(x_2)=0,5x_1^3+1-0,5x_2^3-1=0,5(x_1^3-x_2^3)=0,5(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2).$$

Перший множник від'ємний за припущенням, а другий — додатний при всіх значеннях x_1 і x_2. Маємо: $f(x_1) - f(x_2) < 0$, тобто $f(x_1) < f(x_2)$. Оскільки меншому значенню аргументу відповідає менше значення функції, то функція $f(x) = 0,5x^3 + 1$ зростає на всій області визначення.

Виконайте усно

132. Які з функцій визначені на всій числовій осі:

а) $y = 3x - 5$; б) $y = x^2 + 10$; в) $y = x^{-1} + 1$; г) $\dfrac{1}{x^2+1}$?

133. Функція $y = f(x)$ має найменше значення, що дорівнює 4. Яке найменше значення має функція:

а) $y = f(x) + 5$; б) $y = f(x) - 7$?

134. Функція $f(x)$ має найбільше значення в точці $x = 7$. У якій точці має найбільше значення функція:

а) $y = f(x) - 5$; б) $y = f(x) + 7$?

135. Функція $f(x)$ має найбільше значення в точці $x = 7$. У якій точці має найбільше значення функція:

а) $y = f(x - 5)$; б) $y = f(x + 7)$?

136. Які з функцій зростаючі, а які — спадні:

а) $y = 2x + 3$; б) $y = 7 - x$; в) $y=\dfrac{1}{x}$; г) $y=\sqrt{x}$?

137. На яких проміжках зростає і на яких спадає функція:

а) $y = x^2$; б) $y = -x^2$; в) $y = 1 + x^2$; г) $y = (x + 3)^2$?

138. Функція $y = f(x)$ — парна. Чи буде парною функція:
а) $y = -f(x)$; б) $y = f(x) + b$; в) $y = f(x + a)$, якщо $a \neq 0$?

139. Які з функцій оборотні, а які — ні:
а) $y = 2x - 3$; б) $y = 7 - 0,5x$; в) $y = 2x^2$; г) $y = \sqrt{x}$?

Рівень А

140. Побудуйте графік функції $y = 0,5x + 3$ і визначте проміжки знакосталості та нулі функції. Чи має функція найбільше та найменше значення?

141. Побудуйте графіки функцій $y = 0,1x - 2$ і $y = 1 - 2x$. Знайдіть область визначення і область значень цих функцій. Яка з цих функцій зростаюча, а яка — спадна?

142. Знайдіть область визначення функцій.
а) $y = \frac{x-2}{5}$; б) $y = 2 - \frac{1}{x}$; в) $y = \sqrt{x} + 1$; г) $y = \frac{1}{x-2}$.

143. Знайдіть область визначення функцій.
а) $y = x^2 - 4$; б) $y = \frac{x-2}{x}$; в) $y = \sqrt{2x-3}$; г) $y = \frac{x}{x^2+1}$.

144. Знайдіть область значень функції $y = x + 3$, заданої на проміжку:
а) $[-3; 3]$; б) $[1; 7)$; в) $[0; +\infty)$.

145. Знайдіть область значень функції $y = 4 - x$, заданої на проміжку:
а) $[-3; 0]$; б) $[1; 5)$; в) $(-\infty; 0)$.

146. Покажіть, що функція:
а) $f(x) = 3x + 1$ ні парна, ні непарна;
б) $f(x) = 0$; $x \in [-3; 1]$;
в) $y = 0$, $x \in [-1; 1]$ — парна і непарна.

Спробуйте навести приклади інших функцій, які водночас є парними і непарними.

147. Доведіть, що дана функція парна:
а) $y = x^2 + 3$; б) $y = 4 : x^2$; в) $y = -x^2 + 1$; г) $y = 2 + x^4$.

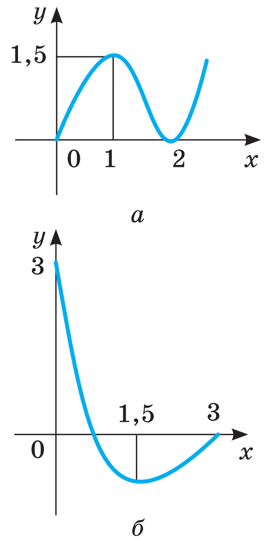
148. Доведіть, що дана функція непарна:
а) $y = -x^3$; б) $y = x + x^3$; в) $y = 5x$; г) $y = x^5$.

149. Покажіть, що дана функція ні парна, ні непарна:
а) $y = x^3 + 2$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = x^2 + 3x$; г) $y = (x - 3)^2$.

150. Які з функцій парні, які — непарні, які — ні парні, ні непарні:
а) $y = 3x$; б) $y = x^3 - 1$; в) $y = x^2 + 3$; г) $y = x(1 - x)$; ґ) $y = \sqrt{x}$?

151. Перемалюйте графіки з малюнка 48 у зошит. Кожний із графіків добудуйте так, щоб одержана функція була парною. Для побудованих графіків установіть:
а) нулі функції; б) проміжки знакосталості; в) інтервали зростання і спадання; г) найбільше і найменше значення функції.

152. Перемалюйте графіки з мал. 48 у зошит. Кожний з графіків добудуйте так, щоб одержана функція стала непарною. Для побудованих графіків установіть:
а) нулі функції; б) проміжки знакосталості; в) проміжки зростання і спадання; г) найбільше і найменше значення функції.



Мал. 48

153. Скільки нулів має функція:
а) $y = x + 3$; в) $y = x^2 - 1$;
б) $y = 6x$; г) $y = x^2 - 7x$?

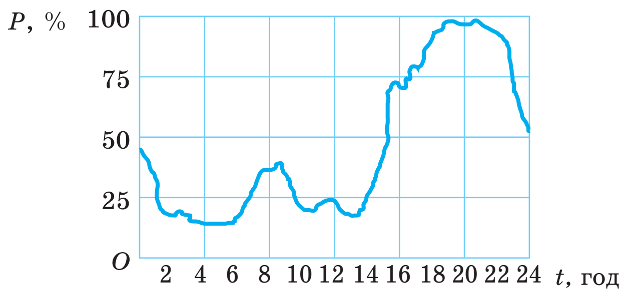
154. Знайдіть нулі функції:
а) $y = 12x - 3$; в) $y = \sqrt{x} - 5$;
б) $y = x^2 - 4$; г) $y = x^2 - 4x$.

155. Запишіть проміжки знакосталості функції:
а) $y = x + 3$; в) $y = x^2 - 25$;
б) $y = 3x$; г) $y = -x^2 + 9$.

156. Які з функцій зростаючі, а які — спадні:
а) $y = 2x$; б) $y = -x - 2$; в) $y = x^3$; г) $y = x$?

157. Побудуйте графік функції та встановіть, при яких значеннях x вона зростає, а при яких — спадає:
а) $y = 5x$; б) $y = -x^2 + 4$; в) $y = (x + 1)(x - 1)$; г) $y = x^3 + 2$.

158. На малюнку 49 подано графік електричного навантаження житлового будинку за одну добу взимку (залежність електроспоживання від часу доби). Встановіть:
а) проміжки спадання і зростання заданої функції; б) протягом якого часу мешканці споживають найбільшу кількість електроенергії; в) в які години електричне навантаження житлового будинку не перевищує 25 %. Дізнайтеся, що таке двотарифний лічильник, як він функціонує і за яких умов його доцільно використовувати для житлових будинків.



Мал. 49

159. Побудуйте графік функції та запишіть її властивості:
а) $y = 5x - 1$; б) $y = -2x$; в) $y = 0{,}5x^2$; г) $y = x^3 - 1$.

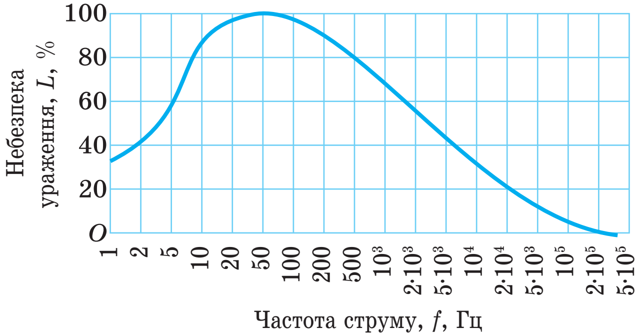
160. Які з даних функцій оборотні, які — необоротні?
а) $y = -x + 3$; б) $y = 6x^3$; в) $y = x^2 - 1$; г) $y = x^2 - 7x$?

161. На наслідки ураження людини електричним струмом впливає вид та частота струму, що проходить через тіло людини. На малюнку 50 зображено залежність ураження людини змінним струмом від його частоти. Використовуючи графік, установіть:

а) зростаючою чи спадною є задана функція;

б) за якої частоти небезпека ураження не перевищує 50 %;

в) яка частота змінного струму небезпечніша.



Мал. 50

162. Знайдіть область визначення і область значень функції $g(x)$, оберненої до функції $f(x)$, якщо:

а) $D(f) = R$, $E(f) = [-5;\ 12]$; б) $D(f) = (1;\ 6)$, $E(f) = R$.

Рівень Б

Знайдіть область визначення функції, заданої формулою (163–164).

163. а) $y=\dfrac{x+7}{x^2-36}$; б) $y=\dfrac{2x}{1-25x^2}$; в) $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$; г) $y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-2}$; ґ) $y=\dfrac{3}{x(x+1)}$.

164. а) $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|-2}$; в) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-6x+5}}$; г) $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$; ґ) $y=2\sqrt{5+x^2}$.

165. Які з функцій парні, які — непарні, які — ні парні, ні непарні:

а) $y = x^3 - x$; б) $y = -x^2 + 3$; в) $y = 2x(1 - x)$; г) $y=\sqrt{x}$; ґ) $y=5\cdot x^{-2}$.

166. Функція $y = f(x)$ — непарна. На проміжку $(-\infty;-2)$ вона зростає, а на проміжку $(-2;\ 0)$ — спадає. Якою вона є на решті області визначення?

167. Функція $y = f(x)$ — парна. На проміжку $(-\infty;-3)$ вона спадає, а на проміжку $(-3;\ 0)$ — зростає. Якою вона є на решті області визначення?

168. Намалюйте схематично графік непарної функції, яка на проміжку $[-4;\ -2]$ зростає від 1 до 5, а на проміжку $[-2;\ 0]$ — спадає від 5 до -1.

169. Намалюйте схематично графік парної функції, яка на проміжку $[-4;\ -1]$ спадає від 3 до -3, а на проміжку $[-1;\ 0]$ — зростає від -3 до 0.

170. Знайдіть нулі функції y та проміжки її знакосталості, якщо:

а) $y = x^2 + 10x - 11$; в) $y = 6x^4 - 5x^2 - 1$;

б) $y = x^4 - 18x^2 + 81$; г) $y = 2x^2 + 3x - 9$.

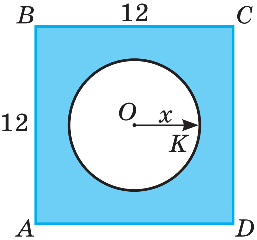
171. За яких значень x дана функція має найменше значення:
а) $y = x^2 - 6x + 9$; в) $y = 4x^2 - 12x - 3$;
б) $y = x^2 + 4x + 7$; г) $y = 4x^2 - 4x + 1$?

172. Знайдіть найбільше значення функції:
а) $y = 3 - (x - 2)^2$; в) $y = 6x - x^2 - 10$;
б) $y = -0,25(x + 5)^2$; г) $y = -5x^2 + 4x + 1$.

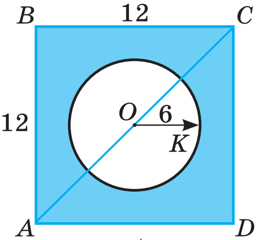
173. Не будуючи графіка функції y, установіть, за яких значень x вона набуває додатних значень:
а) $y = 2x + 5$; в) $y = -x + 4$; ґ) $y = x^2 - 4$; е) $y = 4x^2 - 1$;
б) $y = 0,5x - 3$; г) $y = -3x - 2$; д) $y = \sqrt{x} - 5$; є) $y = x^2 - 7x$.

174. Побудуйте графік функції та встановіть, за яких значень x вона зростає або спадає:
а) $y = 5x$; в) $y = (x + 1)(1 - x)$; ґ) $y = x^2 - 3$; е) $y = \sqrt{x}$;
б) $y = -x^2 + 4$; г) $y = x^3 + 2$; д) $y = 4 : x^2$; є) $y = x^2 + 3x$.

175. Задайте формулою функцію, що виражає залежність площі зафарбованого квадрата від: а) радіуса вирізаного круга (мал. 51, *а*); б) діагоналі квадрата (мал. 51, *б*). Для кожної функції укажіть область визначення та область значень. Установіть, зростаючою чи спадною є кожна з цих функцій.



а

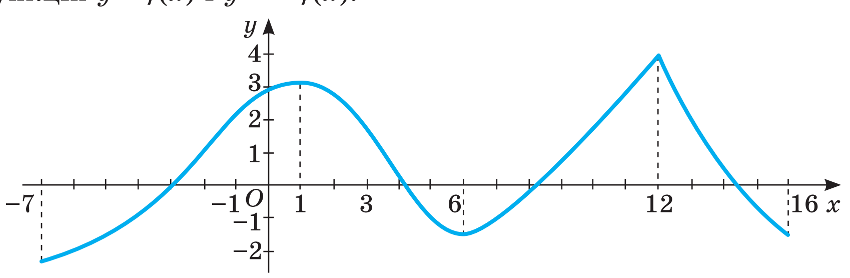


б

Мал. 51

176. Доведіть, що функція:
а) $y = 3x + 5$ зростає на R;
б) $y = 1 - \sqrt{x}$ спадає на $[0; +\infty)$;
в) $y = -x$ спадає на R;
г) $y = 2x^2$ зростає на $[0; +\infty)$.

177. На малюнку 52 зображено графік функції $y = f(x)$. Знайдіть: а) область визначення і область значень функції; б) нулі функції; в) проміжки знакосталості; г) проміжки, на яких функція зростає; ґ) проміжки, на яких функція спадає; д) найбільше і найменше значення функції. Побудуйте графік функції $y = -f(x)$. Порівняйте властивості функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$.



Мал. 52

178. Виведіть формулу, яка задає функцію $g(x)$, обернену до функції $f(x)$:
а) $f(x) = 2x - 5$; б) $f(x) = 3 - 5x$; в) $f(x) = x^3 - 3$; г) $f(x)=\sqrt{x+5}$.

179. Задайте функцію, обернену до даної, та побудуйте її графік:
а) $f(x) = 4x - 3$; б) $f(x) = 4 - x$; в) $f(x)=\sqrt{x+1}$.

180. Побудуйте графік функції та запишіть її властивості:
а) $y=|x^2-2x-8|$; б) $y=x^2-4|x|+3$; в) $y=\sqrt{|x|}$; г) $y=||x|-1|$.

181. Установіть відповідність між функціями **(1–4)** та їх властивостями **(А–Д)**.

1	$y = x^2 - 4x + 1$	**А**	$E(y)=(-\infty;2]$
2	$y=2-\sqrt{x+2}$	**Б**	Парна
3	$y=\dfrac{12}{|x|+2}$	**В**	$D(y)=(2;+\infty)$
4	$y=\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{|x|-2}}$	**Г**	Найменше значення дорівнює –3
		Д	Зростає на *R*

Рівень В

182. Знайдіть:
а) найбільше значення функції $y=\dfrac{3}{x^2-2x+5}$;
б) найменше значення функції $y=\dfrac{1}{1-4x-x^2}$.

183. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y=|3-|x||$ на відрізку $[-2;\ 5]$.

184. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y=x^2-4|x|$ на відрізку $[-1;\ 3]$.

185. Задайте функцію, обернену до даної, та побудуйте їх графіки:
а) $y=\begin{cases}2x, x\le 0,\\ 4x, x>0;\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}2x-1, x\le -1,\\ x-2, x>-1;\end{cases}$ в) $y=\begin{cases}0{,}5x+1, x\le 0,\\ x^2+1, x>0;\end{cases}$

186. За якого значення параметра a найменше значення функції $y = x^2 - 4ax + a$ дорівнює $3a$?

187. За якого значення параметра a:
а) найменше значення функції $f(x) = x^2 - 2ax + 3$ належить проміжку $[-5;\ 1]$;
б) найбільше значення функції $f(x) = -2x^2 - 4x + a$ належить проміжку $(-3;\ 10)$?

188. Відомо, що функція $y = f(x)$, визначена на множині всіх дійсних чисел, має нулі в точках -2 та 5, зростає на проміжках $x\in(-\infty;-4]$ і $[3;+\infty]$

та спадає на проміжку [−4; 3]. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції: а) $y = f(x - 4)$; б) $y = -f(x)$; в) $y = |f(x)|$; г) $y = f(|x|)$.

189. Відомо, що функція $y = f(x)$, визначена на множині всіх дійсних чисел, має нулі в точках −5 та 4 і $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$.
Знайдіть нулі та проміжки знакосталості функції:
а) $y = f(x + 3)$; б) $y = -2f(x)$; в) $y = |f(x)|$; г) $y = f(|x|)$.

190. При яких значеннях параметра a має один нуль функція:
а) $y = x^2 + (3a + 1)x + 2a^2 + 3a - 2$; б) $y = (a + 1)x^2 - 3ax + 4a$?

191. При яких значеннях параметра a всі нулі функції додатні:
а) $y = x^2 + 2(2a - 1)x + 3a^2 - 8a - 3$; б) $y = ax^2 - (2 + 3a)x + 6$?

192. За якого значення параметра c функція $y = 2x^2 - cx + 5c$ спадає на проміжку $(-\infty; 2]$?

193. За якого значення параметра a функція $y = ax^2 + (a + 1)x + 1$ зростає на проміжку $[-1; +\infty)$?

Розв'яжіть рівняння (194–195).

194. а) $\sqrt{x-2} = 4 - x^2$; б) $2(x-3)^3 = 5 - \sqrt{2x+1}$.

195. а) $\sqrt{x+2} - 1 = -x^2 - 4x - 5$; б) $|x+1| + |x-3| = x^2 - 2x + 5$.

196. Доведіть, що спільні точки графіків зростаючих взаємно обернених функцій лежать на прямій $y = x$.

197. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ зростаючі і взаємно обернені, то рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильно кожному з рівнянь $f(x) = x$ або $g(x) = x$. Доведіть.

198. Розв'яжіть рівняння: а) $2\sqrt{x-1} = \dfrac{x^2}{4} + 1$; б) $(x-2)^2 = \sqrt{x} + 2$ при $x \geq 2$.

199. При яких значеннях параметра a графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$ мають єдину спільну точку:
а) $f(x) = 3 - |x|$ і $g(x) = x^2 + a$; б) $f(x) = a - (x - 2)^2$ і $g(x) = |x - 2| - 3$?

200. При яких значеннях параметра a має єдиний корінь рівняння:
а) $2x^2 + a|x| = a^2 - 4$; б) $(2a-1)^2|x| - 3ax^2 + 1 = a^2$?

Вправи для повторення

201. Розв'яжіть систему рівнянь:
а) $\begin{cases} 15y - 8z = 29, \\ 3y + 2z = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 8y = 59, \\ 6x + 5y = 107. \end{cases}$

202. Які значення змінних задовольняють пропорцію:
а) $(x + 1) : 2 = 4 : (x - 1)$; б) $(x - 4) : 3 = 3 : (x + 4)$?

203. Розкладіть на множники квадратний тричлен:
а) $x^2 - 5x + 6$; б) $9a^2 + 3a - 2$; в) $2x^2 - 12x + 16$; г) $2x^2 + 5x - 3$.

204. Порівняйте значення виразів:
а) $3\sqrt{10}$ і $2\sqrt{22}$; б) $-5\sqrt{10}$ і $-2\sqrt{50}$; в) $0{,}2\sqrt{0{,}1}$ і $0{,}1\sqrt{0{,}2}$.

§ 4 Ділення многочленів

Polynomials Division

З курсу математики основної школи ви знаєте, що *многочлен* — це сума кількох одночленів. У загальному випадку $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ (де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — дійсні числа і $a_0 \neq 0$) — многочлен n-го степеня ($n \in N$) з однією змінною x.

У попередніх класах ви виконували з многочленами дії додавання, віднімання і множення. У цьому параграфі розглянемо ділення многочленів.

Багато в чому ділення многочленів нагадує ділення натуральних чисел.

Нехай $F(x)$ та $P(x)$ — деякі многочлени, причому степінь многочлена $F(x)$ не менший за степінь многочлена $P(x)$ і $P(x)$ — тотожно не дорівнює нулю. Якщо існує такий многочлен $Q(x)$, що для будь-якого $x \in R$ виконується рівність $F(x) = P(x) \cdot Q(x)$, то кажуть, що многочлен $F(x)$ *ділиться* на многочлен $P(x)$ без остачі. Позначають: $F(x) \vdots P(x)$.

Наприклад, многочлен $F(x) = x^3 - 8$ ділиться без остачі на многочлен $P(x) = x^2 + 2x + 4$, бо $F(x) = P(x) \cdot (x - 2)$.

Многочлен $F(x)$ називають *діленим*, многочлен $P(x)$ — *дільником*, а многочлен $Q(x)$ — *часткою*.

Якщо один многочлен не ділиться націло на інший, то розглядається ділення з остачею.

Поділити многочлен $F(x)$ на многочлен $P(x)$ з остачею — означає подати многочлен $F(x)$ у вигляді $F(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$, де степінь многочлена $R(x)$ менший від степеня многочлена $P(x)$. Многочлен $R(x)$ називають остачею.

Розглянемо, як можна виконувати ділення многочлена на многочлен за допомогою алгоритму ділення «кутом» (пригадайте аналогічне правило для ділення чисел).

Приклад 1. Розділіть многочлен:

а) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$ на многочлен $x^2 - x - 1$;

б) $-3x^5 + 5x^4 - 1$ на многочлен $3x^3 - 2x^2 + x - 1$.

Розв'язання.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 & x^2 - x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 - x^3 - x^2} & x^2 - x + 3 \\
\quad -x^3 + 4x^2 - 2x & \\
\quad \underline{-x^3 + x^2 + x} & \\
\qquad 3x^2 - 3x - 3 & \\
\qquad \underline{3x^2 - 3x - 3} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
-3x^5 + 5x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 3x - 2 & 3x^3 - 2x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2} & -x^2 + x + 1 \\
\quad 3x^4 + x^3 - x^2 + 3x & \\
\quad \underline{3x^4 - 2x^3 + x^2 - x} & \\
\qquad 3x^3 - 2x^2 + 4x - 2 & \\
\qquad \underline{3x^3 - 2x^2 + x - 1} & \\
\qquad\qquad 3x - 1 &
\end{array}
$$

Відповідь. 1) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x^2 - x - 1)(x^2 - x + 3)$;

2) $-3x^5 + 5x^4 - 1 = (3x^3 - 2x^2 + x - 1)(-x^2 + x + 1) + 3x - 1$.

У першому випадку многочлени поділилися націло, що дало можливість розкласти многочлен вищого степеня (ділене) на множники. Такий підхід часто використовують під час розв'язування рівнянь виду $F(x) = 0$, де $F(x)$ — многочлен, оскільки рівняння $F(x) = 0$ і многочлен $F(x)$ мають одні й ті самі корені.

Коренем многочлена $F(x)$ називають число a, якщо виконується умова $F(a) = 0$.

З деякими властивостями коренів рівнянь і многочленів ви ознайомилися в процесі вивчення теореми Вієта. Ще одну цікаву властивість коренів рівнянь і многочленів розкриває теорема Безу.

Теорема Безу. *Остача від ділення многочлена $F(x)$ на двочлен $x - a$ дорівнює $F(a)$.*

Доведення. На основі ділення многочленів з остачею для будь-якого $x \in R$ виконується рівність $F(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$, де степінь многочлена $R(x)$ менший від степеня многочлена $P(x)$. За умовою теореми $P(x) = x - a$ (має степінь 1), тому $R(x)$ — многочлен нульового степеня або деяке число. Тобто $F(x) = (x - a) \cdot Q(x) + r$, де r — деяке число.

Якщо в цю рівність підставити значення $x = a$, матимемо $F(a) = 0 + r = r$, що й потрібно було довести.

Наслідки з теореми Безу:

1) Многочлен $F(x)$ ділиться на $x - a$ без остачі тоді й тільки тоді, коли число a є коренем многочлена $F(x)$.

2) Якщо $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ — різні корені многочлена $F(x)$ ($F(x) \not\equiv 0$), то $F(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3) \cdot \ldots \cdot (x - a_k) \cdot Q(x)$, де $Q(x)$ — деякий многочлен.

3) Остача від ділення многочлена $F(x)$ на двочлен $ax + b$ дорівнює значенню цього многочлена при $x = -\dfrac{b}{a}$, тобто $r = F\left(-\dfrac{b}{a}\right)$.

Приклад 2. Знайдіть остачу від ділення многочлена:

а) $P(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ на $x - 1$;

б) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 7$ на $2x - 1$.

Розв'язання. а) За теоремою Безу маємо: $r = P(1) = 1 + 1 + 3 + 2 + 2 = 9$;

б) за наслідком з теореми Безу маємо:

$r = P(0{,}5) = 0{,}5^3 - 3 \cdot 0{,}5^2 + 5 \cdot 0{,}5 + 7 = 8{,}875$.

Приклад 3. Доведіть, що многочлен $F(x) = x^7 - 15x^6 + 37x^4 - 16x^2 - 7$ ділиться націло на $x - 1$, але не ділиться без остачі на $x + 1$.

Розв'язання. Оскільки $F(1) = 1 - 15 + 37 - 16 - 7 = 0$, тобто $x = 1$ — корінь многочлена $F(x)$, то за наслідком 1 многочлен $F(x)$ ділиться на $x - 1$. Оскільки $F(-1) = -1 - 15 + 37 - 16 - 7 = -2$, то многочлен $F(x)$ не ділиться без остачі на $x + 1$.

Теорема Безу дає змогу знайти остачу від ділення многочлена $F(x)$ на двочлен, не виконуючи самого ділення. Але вона не дає можливості знайти частку від цього ділення. Ділення многочлена на двочлен, що замінює ділення «кутом», можна здійснити за схемою, яка називається *схемою Горнера* (детальніше про це в рубриці «Хочете знати більше»).

Ділення многочленів і розкладання їх на множники використовують під час розв'язування цілих раціональних рівнянь і нерівностей. Для розв'язування окремих видів рівнянь зручно користуватися таким правилом.

Якщо ціле раціональне рівняння з цілими коефіцієнтами має цілі корені, то вони є дільниками вільного члена.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 6x^2 + 10x + 5 = 0$.

Розв'язання. Дільниками його вільного члена є числа -5, -1, 1 і 5. Додатні числа не можуть бути коренями цього рівняння, бо всі його члени мають додатні коефіцієнти, а сума додатних чисел — число додатне.

Залишилось перевірити два числа: -5 і -1.

Якщо $x = -1$, то $(-1)^3 + 6(-1)^2 + 10(-1) + 5 = -1 + 6 - 10 + 5 = 0$.

Отже, $x = -1$ — корінь рівняння $x^3 + 6x^2 + 10x + 5 = 0$.

У цьому випадку многочлен $x^3 + 6x^2 + 10x + 5$ можна поділити на многочлен $x - (-1) = x + 1$ без остачі.

Маємо: $x^3 + 6x^2 + 10x + 5 = (x + 1)(x^2 + 5x + 5)$, тобто рівняння $x^3 + 6x^2 + 10x + 5 = 0$ і $(x + 1)(x^2 + 5x + 5) = 0$ рівносильні. Останнє рівняння рівносильне сукупності рівнянь $x + 1 = 0$ і $x^2 + 5x + 5 = 0$.

1) $x + 1 = 0$, $x_1 = -1$;

2) $x^2 + 5x + 5 = 0$, $x_2 = \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$.

Відповідь. $\left\{1; \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3+6x^2+10x+5 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+\;x^2\qquad\qquad} & x^2+5x+5 \\
-\,5x^2+10x\quad & \\
\underline{5x^2+\;5x}\quad & \\
-\,5x+5 & \\
\underline{5x+5} & \\
0 &
\end{array}
$$

Це рівняння можна розв'язати, розклавши ліву частину на множники іншим способом. Зробіть це самостійно.

Хочете знати ще більше?

Якщо многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ поділити на $x - a$, то для будь-якого $x \in R$ правильною буде рівність

$P_n(x) = Q_{n-1}(x)(x - a) + r$. Тобто:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = \left(a_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}\right)(x-a) + r\text{, або } a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n =$$

$$= a_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x - a_0ax^{n-1} - b_1ax^{n-2} - \ldots - b_{n-2}ax - b_{n-1}a + r.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, отримаємо співвідношення між a_n і b_n і внесемо їх у таблицю.

	a_0	a_1	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
a	$b_0 = a_0$	$b_1 = a \cdot b_0 + a_1$	$\ldots$	$b_{n-1} = a \cdot b_{n-2} + a_{n-2}$	$r_0 = a \cdot b_{n-1} + a_n$

Такий алгоритм визначення частки й остачі при діленні многочлена на двочлен називають схемою Горнера (на честь англійського математика Вільяма Джорджа Горнера).

Приклад. Поділити многочлен $-x^5 + 4x^3 + 32 - 8x^2$ на $x + 2$ за схемою Горнера. Запишемо коефіцієнти діленого в перший рядок таблиці. Дільник подамо у вигляді $x + 2 = x - (-2)$. Число -2 запишемо в першому стовпчику. Виконаємо дії, зазначені в таблиці.

	–1	0	4	–8	0	32
–2	–1	2	0	–8	16	0

Отримали частку $-x^4 + 2x^3 - 8x + 16$. Цей многочлен ділиться на $x - 2$. Виконайте це ділення самостійно, склавши аналогічну таблицю або продовживши попередню.

Перевірте себе

1. Що таке многочлен?
2. Що називають коренем многочлена?
3. Сформулюйте теорему Безу.
4. Сформулюйте наслідки з теореми Безу.
5. Яку властивість мають цілі корені цілого раціонального рівняння з цілими коефіцієнтами?

Виконаємо разом

1 Розв'яжіть рівняння $x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 9 = 0$.

Розв'язання. Дільниками вільного члена рівняння є числа: ±1; ±3; ±9. Додатні числа не можуть бути коренями цього рівняння (перевірте). Підстановкою переконуємося, що числа -1 і -3 є коренями цього рівняння, а тому многочлен $x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 9$ ділиться націло на многочлен $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$. Виконаємо ділення кутом або почергово схемою Горнера.

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 9 & x^2 + 4x + 3 \\
\underline{x^4 + 4x^3 + 3x^2\qquad\qquad} & \overline{x^2 - 6x + 3} \\
-\;-6x^3 - 21x^2 - 6x\quad & \\
\underline{-6x^3 - 24x^2 - 18x}\quad & \\
-\;3x^2 - 12x + 9 & \\
\underline{3x^2 + 12x + 9} & \\
0 &
\end{array}$$

	1	–2	–18	–6	9
–1	1	–3	–15	9	0
–3	1	–6	3	0	

Маємо: $x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 9 = (x + 1)(x + 3)(x^2 - 6x + 3)$.

Рівняння $x^2 - 6x + 3 = 0$ має корені $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{6}$.

Відповідь. $\{-3;\ -1;\ 3-\sqrt{6};\ 3+\sqrt{6}\}$.

2 Знайдіть усі цілі значення a і b, при яких многочлен

$$F(x) = x^3 + ax^2 - x + b \text{ ділиться на } x^2 - 1.$$

Розв'язання. Якщо многочлен $F(x)$ ділиться на $x^2 - 1$, то ділиться на $x - 1$ і на $x + 1$. Тому $F(1) = 0$ і $F(-1) = 0$. Для цілих a і b маємо:

$$\begin{cases} 0=1+a-1+b, \\ 0=-1+a+1+b \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a+b=0, \\ a+b=0, \end{cases} \text{ звідси } \begin{cases} a\in Z, \\ b=-a. \end{cases}$$

Відповідь. $b = -a$, $a \in Z$.

3 Знайдіть за схемою Горнера неповну частку і остачу від ділення многочлена $x^5 - x^3 + x - 3$ на двочлен $x + 1$.

Розв'язання.

	1	0	–1	0	1	–3
–1	1	–1	0	0	1	–4

Відповідь. $x^5 - x^3 + x - 3 = (x + 1)(x^4 - x^3 + 1) - 4$.

Виконайте усно

205. На який із двочленів ділиться многочлен $x^3 + 8$? А $x^3 - 8$?
а) $x + 8$; б) $x - 4$; в) $x + 4$; г) $x + 2$; ґ) $x - 2$.

206. На який многочлен ділиться многочлен $x^3 + 2x^2 + x$?
а) $x + 2$; б) $x - 2$; в) $x + 1$; г) x; ґ) $x - 1$; д) $x^2 + 2x + 1$.

207. Знайдіть частку від ділення многочлена $P(x)$ на $Q(x)$, якщо:
а) $P(x) = x^3 + 1$, $Q(x) = x + 1$;
б) $P(x) = x^4 - 1$, $Q(x) = x^2 - 2x + 1$;
в) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x^2 + x + 1$;
г) $P(x) = x^4 - 1$, $Q(x) = x - 1$.

208. Назвіть дільники вільного члена многочлена $x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 12$.

209. Чи ділиться многочлен $x^5 + 6x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 12$ на двочлен $x - 5$?

Рівень А

210. Знайдіть остачу від ділення многочлена $x^4 + x^3 - 3x^2 - 7x - 6$ на двочлен:
а) $x + 1$; б) $x - 2$; в) $x + 3$; г) $x - 4$.

211. Знайдіть остачу від ділення многочлена $3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 5x - 2$ на двочлен:
а) $x + 1$; б) $x - 2$; в) $x + 3$; г) $x - 4$.

212. Доведіть, що многочлен $F(x)$ ділиться націло на двочлен $P(x)$, якщо:
а) $F(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$, а $P(x) = x - 2$;
б) $F(x) = x^3 + 4x^2 - x - 6$, а $P(x) = x + 3$.

213. Доведіть, що многочлен $F(x)$ ділиться націло на многочлен $P(x)$, якщо:
а) $F(x) = 2x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 2x + 20$, а $P(x) = x + 2$;
б) $F(x) = 3x^3 + 4x^2 - x - 6$, а $P(x) = x - 3$.

214. Доведіть, що многочлен $F(x)$ не ділиться націло на двочлен $P(x)$, якщо:
а) $F(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$, а $P(x) = x - 2$;
б) $F(x) = 4x^3 + x^2 - x - 6$, а $P(x) = x + 3$.

215. Знайдіть неповну частку та остачу від ділення многочлена $x^2 - 4x - 6$ на многочлен:
а) $x + 1$; б) $x - 2$; в) $x + 3$; г) $x - 4$.

216. Знайдіть неповну частку та остачу від ділення многочлена $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ на многочлен:
а) $x - 1$; б) $x + 1$; в) $x - 3$; г) $x + 4$.

217. Виконайте ділення «кутом»:
а) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ на $x + 1$; $x - 3$; $x - 5$;
б) $2x^3 + x^2 - 13x + 6$ на $x + 3$; $x - 2$; $2x - 1$.

218. Доберіть цілий корінь рівняння:
а) $x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 8 = 0$; б) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5x - 1 = 0$.

Розв'яжіть рівняння (219–221).

219. а) $x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = 0$; б) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$.

220. а) $2x^3 + 3x^2 + 6x + 5 = 0$; б) $x^4 + 2x^3 - 8x - 16 = 0$.

221. а) $x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$; б) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x = 0$.

Рівень Б

222. Знайдіть остачу від ділення многочлена $3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 5x - 2$ на двочлен: а) $3x + 1$; б) $3x - 1$; в) $3x + 2$; г) $3x - 2$.

223. Знайдіть остачу від ділення многочлена $5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8$ на многочлен:
а) $x^2 + 2x - 2$; б) $5x^2 + x + 4$; в) $2x + 5$; г) $3x - 2$.

Виконайте ділення «кутом» (224–225).

224. $4x^4 + 12x^3 - 47x^2 + 12x + 4$ на:
а) $2x^2 - 5x + 2$; б) $2x^2 + 11x + 2$; в) $4x^3 + 20x^2 - 7x - 2$.

225. $5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8$ на: а) $x^2 + x - 2$; б) $5x^2 + 4x + 4$; в) $5x^3 - x^2 - 4$.

226. Знайдіть кратність кореня $x = 2$ для многочлена $P(x)$, якщо:
а) $P(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12$; б) $P(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$.

Розкладіть многочлен на множники (227–228).

227. а) $x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x$; б) $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50$.

228. а) $x^4 + 9x^3 + 23x^2 + 15x$; б) $x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 24x^2 - 27x - 108 = 0$.

Розв'яжіть рівняння (229–232).

229. а) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$; б) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$;
в) $x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x - 3 = 0$.

230. а) $x^4 + x^3 - x^2 - x = 0$; б) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$;
в) $x^5 - 2x^4 + x^3 - 8x^2 + 16x - 8 = 0$.

231. а) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 - x = 0$; б) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$;
в) $x^6 - 4x^4 - x^3 + 4x = 0$.

232. а) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x = 0$; б) $x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8 = 0$;
в) $x^6 - x^4 - 8x^3 + 8x = 0$.

233. Доведіть, що многочлен $x^n - a^n$ ділиться на $x - a$ без остачі при будь-якому n, $n \in N$.

Рівень В

234. Доведіть тотожність:

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + x^{m-2}a + x^{m-3}a^2 + \ldots + a^{m-1}, \ m \in N.$$

Розв'яжіть рівняння (235–236).

235. а) $\dfrac{2x^3 - 7x^2 + 3x + 6}{x^2 - 3x + 2} = 2x;$ б) $\dfrac{x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 16x + 11}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{x+5}{x^2 - 3x + 2}.$

236. а) $\dfrac{2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + 4}{x^3 + x^2 - x - 1} = 2x;$ б) $\dfrac{2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 2}{x(x-1)} = \dfrac{3x-2}{x - x^2}.$

237. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 15}}{x^3 - 8x^2 + 19x - 12};$ б) $y = \dfrac{\sqrt{3 - |x-2|}}{x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12}.$

238. Побудуйте графік функції:

а) $y = \left|\dfrac{x^4 + x^3 - 3x^2 + 7x - 6}{x^2 + 2x - 3} - 4\right|;$ б) $y = \left|2 - \sqrt{\dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 4x + 3}}\right|.$

239. При яких значеннях a і b многочлен:
$x^4 + ax^3 + bx^2 + 3x - 9$ ділиться без остачі на $x^2 - 4x + 3$?

240. При яких значеннях a і b многочлен $2x^3 + ax^2 - 8x + b$ ділиться без остачі на $x^2 - 5x + 6$?

241. При якому значенні a многочлен:

а) $x^3 - 2x^2 - ax - 6$ ділиться без остачі на $x^2 + x + 2;$

б) $x^3 + 6x^2 + ax + 5$ ділиться без остачі на $x^2 + x + 1$?

242. При яких значеннях a і b многочлен $x^3 + ax^2 + 2bx + a + b$ при діленні на $x - 1$ дає в остачі 4, а при діленні на $x - 2$ дає в остачі 3?

243. Остачі від ділення многочлена $P(x)$ на двочлени $x - 2$ і $x - 4$ відповідно дорівнюють 3 і 5. Знайдіть остачу від ділення многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2 - 6x + 8$.

Вправи для повторення

244. Побудуйте графік функції $y = (x + 3)^2 + 2$. Знайдіть проміжки знакосталості та монотонності. Чи має функція найменше значення? А найбільше?

245. Обчисліть: а) $\left(\sqrt{12} - \sqrt{75}\right) \cdot \sqrt{3};$ б) $\left(\sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{4 + \sqrt{7}}\right)^2.$

246. Розв'яжіть нерівність: $6(x - 1) - 4(x + 2) > -9(x + 1) + x$.

247. Волонтерство — добровільна безкорисна суспільно корисна діяльність. В Україні 80 % волонтерів складає молодь, з яких 72 % – жінки. Який відсоток усіх волонтерів становлять молоді чоловіки? Чи займалися ви чи хто-небудь з вашої родини волонтерством?

§ 5 Метод інтервалів

Intervals Method

Деякі види нерівностей (лінійні, квадратні) ви навчилися розв'язувати в попередніх класах. Розглянемо більш загальний метод розв'язування нерівностей — *метод інтервалів*.

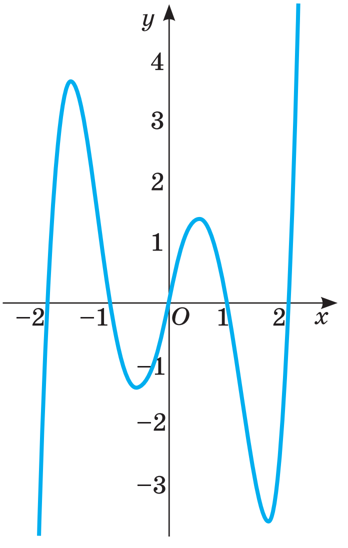
Для початку розв'яжемо одну з нерівностей графічно.

Приклад 1. Розв'яжіть графічно нерівність

$$x(x-2)(x-1)(x+1)(x+2) > 0.$$

Розв'язання. Графік функції $y = x(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$ зображений на малюнку 54. Це неперервна (суцільна) крива, що перетинає вісь x у точках -2, -1, 0, 1 і 2. На графіку добре видно проміжки знакосталості. Якщо аргумент x належить проміжкам $(-2; -1)$, $(0; 1)$ і $(2; \infty)$, то функція набуває додатних значень. В інших точках значення функції від'ємні або дорівнюють 0.

Отже, розв'язком нерівності $x(x-2)(x-1)(x+1)(x+2) > 0$ є множина $(-2; -1) \cup (0; 1) \cup (2; \infty)$ (мал. 53).



Мал. 53

Чи завжди потрібно будувати графік, щоб встановити проміжки знакосталості для функції, що задається многочленом чи добутком кількох многочленів? Ні. Використовують таку властивість: *Якщо функція $f(x)$ неперервна і не дорівнює нулю в жодній точці проміжку $(a; b)$, то вона на цьому проміжку зберігає знак.* Тобто її значення на всьому проміжку тільки додатні або тільки від'ємні. Доведення цієї властивості є в курсах математичного аналізу. Ми ж обмежимося тільки наочним поясненням. Якщо графік неперервної функції на проміжку $(a; b)$ не перетинає вісь Ox, то весь він на цьому проміжку розміщується вище від осі Ox або нижче від неї.

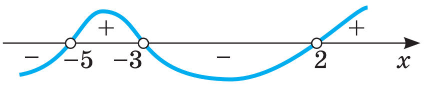
На цій властивості неперервних функцій ґрунтується і *метод інтервалів*, яким зручно розв'язувати нерівності.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $(x-2)(x+3)(x+5) < 0$.

Розв'язання. Функція $f(x) = (x-2)(x+3)(x+5)$ визначена на R.

Її значення дорівнюють нулю в трьох точках: $x = -5$, $x = -3$ і $x = 2$. Ці точки числову вісь R розбивають на 4 проміжки: $(-\infty; -5)$, $(-5; -3)$, $(-3; 2)$, $(2; \infty)$. У кожному з цих проміжків значення функції $f(x)$ не дорівнює 0, тому на кожному з цих проміжків функція $f(x)$ зберігає знак. Які саме знаки, неважко визначити й усно: $f(-10) < 0$, $f(-4) > 0$, $f(0) < 0$, $f(10) > 0$. Отже, схематично графік функції $y = f(x)$ можна зобразити, як показано на малюнку 54. Дивлячись на малюнок, відразу можна написати відповідь:

$$(-\infty; -5) \cup (-3; 2).$$



Мал. 54

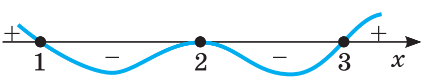
Зауваження. Не треба думати, що знаки неперервної функції $f(x)$ в сусідніх (суміжних) проміжках завжди різні. Інколи в таких проміжках знаки функції однакові. Подібне трапляється, коли функція містить парні степені множників чи їх модулі. Адже вони невід'ємні і на знак функції не впливають.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність $(x - 1)(x - 2)^2(x - 3) \geq 0$.

Розв'язання. Функція $f(x) = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3)$ визначена на R.

Її значення дорівнюють нулю в трьох точках: $x = 1$, $x = 2$ і $x = 3$. Ці точки числову вісь R розбивають на 4 проміжки: $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; \infty)$. На кожному з цих проміжків функція $f(x)$ зберігає знак: $f(0) > 0$, $f(1{,}5) < 0$, $f(2{,}5) < 0$, $f(4) > 0$.

Отже, схематично графік функції $y = f(x)$ можна зобразити, як показано на малюнку 55, дивлячись на який відразу можна написати відповідь: $(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$.



Мал. 55

Описаний спосіб розв'язування нерівності називають *методом інтервалів*.

За допомогою методу інтервалів розв'язують нерівності, у яких одна частина є неперервною функцією, а інша — нулем. Насамперед це стосується цілих раціональних нерівностей, оскільки їх можна звести до вигляду $P(x) < 0$ або $P(x) > 0$, де $P(x)$ — ціла раціональна функція, яка завжди неперервна на множині R.

Щоб розв'язати цілу раціональну нерівність $P(x) < 0$, користуються таким алгоритмом:

1) знайти точки, у яких функція $P(x)$ дорівнює нулю (тобто розв'язати рівняння $P(x) = 0$);

2) на числову вісь нанести знайдені точки, які розбивають її на проміжки, на кожному з яких функція $P(x)$ зберігає знак;

3) на кожному з проміжків вибрати по одній точці, визначити знак функції $P(x)$ у цих точках, а отже, і на відповідному проміжку;

4) вибрати проміжки, на яких $P(x) < 0$, і записати відповідь у вигляді об'єднання цих проміжків.

Аналогічно розв'язують нерівності виду $P(x) > 0$, $P(x) \leq 0$ або $P(x) \geq 0$.

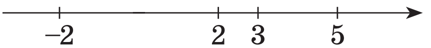
Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність $(x^2 - 4)(x^2 - 8x + 15) < 0$.

Розв'язання. 1) Знайдемо корені рівняння $(x^2 - 4)(x^2 - 8x + 15) = 0$ як корені сукупності рівнянь $x^2 - 4 = 0$ або $x^2 - 8x + 15 = 0$. Маємо:

$$x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 5.$$

2) Нанесемо знайдені точки на числову вісь: утворилося п'ять проміжків (мал. 56).

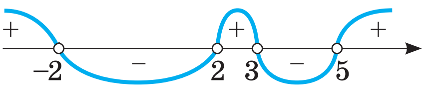


Мал. 56

3) Виберемо по одній точці на кожному з проміжків і визначимо знак функції $y = (x^2 - 4)(x^2 - 8x + 15)$ у цих точках: $-3 \in (-\infty; -2)$, $y(-3) = 5 \cdot 48 > 0$; $0 \in (-2; 2)$, $y(0) = -4 \cdot 15 < 0$; $2{,}5 \in (2; 3)$, $y(2{,}5) = 2{,}25 \cdot 1{,}25 > 0$; $4 \in (3; 5)$, $y(4) = 12 \cdot (-1) < 0$; $6 \in (5; +\infty)$, $y(6) = 32 \cdot 3 > 0$.

Поставимо відповідні знаки на кожному із проміжків (мал. 57).

4) Виберемо проміжки, на яких функція $y = (x^2 - 4)(x^2 - 8x + 15)$ має знак «–», і запишемо відповідь як об'єднання відповідних проміжків.



Мал. 57

Відповідь. $(-2; 2) \cup (3; 5)$.

Примітка. Множина розв'язків нерівності $(x^2 - 4)(x^2 - 8x + 15) \le 0$ містить точки $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, а тому має вигляд: $[-2; 2] \cup [3; 5]$.

За допомогою малюнка 57 легко записати множини розв'язків нерівностей $(x^2 - 4)(x^2 - 8x + 15) > 0$ і $(x^2 - 4)(x^2 - 8x + 15) \ge 0$.

Це множини: $(-\infty; -2) \cup (2; 3) \cup (5; +\infty)$ і $(-\infty; -2] \cup [2; 3] \cup [5 + \infty)$.

Оскільки дробово-раціональна функція не завжди визначена на всій множині R, то для розв'язування дробових нерівностей (особливо нестрогих) зручно користуватися рівносильним переходом до змішаної системи, яка містить цілу нерівність і умову нерівності знаменника нулю. З цією метою обидві частини дробово-раціональної нерівності $\frac{P(x)}{Q(x)} \le 0$ домножують (усно) на квадрат знаменника. Маємо: $\begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \le 0, \\ Q(x) \ne 0. \end{cases}$

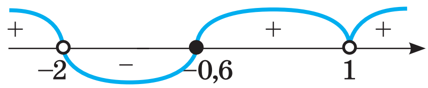
Приклад 5. Розв'яжіть нерівність $\frac{5x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} \ge 0$.

Розв'язання. $\left(\frac{5x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} \ge 0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} (5x^2 - 2x - 3) \cdot (x^2 + x - 2) \ge 0, \\ x^2 + x - 2 \ne 0. \end{cases}$

Спростимо ліву частину нерівності $(5x^2 - 2x - 3)(x^2 + x - 2) \ge 0$, розклавши на множники многочлени $5x^2 - 2x - 3 = (x - 1)(5x + 3)$ і $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Отримаємо рівносильну їй нерівність $(x - 1)^2(x + 2)(5x + 3) \ge 0$. Розв'яжемо її за вище описаним алгоритмом.

Рівняння $(x - 1)^2(x + 2)(5x + 3) = 0$ має корені $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -0{,}6$. Відкладемо їх на числовій прямій у вигляді зафарбованих і порожніх кружечків, урахувавши умову нерівності знаменника нулю. За допомогою окремих точок знайдемо знак функції $y = (x - 1)^2(x + 2)(5x + 3)$ на кожному з утворених проміжків (мал. 58).

Вибираємо проміжки, на яких функція $y = (x - 1)^2(x + 2)(5x + 3)$ має знак «+», і записуємо відповідь як об'єднання відповідних проміжків і чисел, які відповідають зафарбованим кружечкам.



Мал. 58

Відповідь. $(-\infty; -2) \cup [-0{,}6; 1) \cup (1; +\infty)$.

Примітка. Якщо праву частину нерівності $\dfrac{5x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} \geq 0$ скоротити на $x - 1$, то одержимо нерівність $\dfrac{5x + 3}{x + 2} > 0$, яка не рівносильна даній.

Перевірте себе

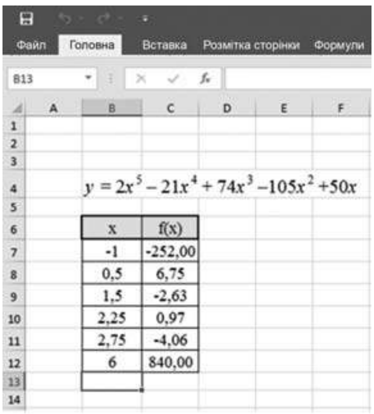
1. У чому полягає сутність методу інтервалів?
2. Як розв'язати цілу нерівність методом інтервалів?
3. Як розв'язати методом інтервалів дробову нерівність?

Виконаємо разом

1 Розв'яжіть нерівність $2x^5 - 21x^4 + 74x^3 - 105x^2 + 50x > 0$.

Розв'язання. Винесемо змінну x за дужки у многочлені в лівій частині. Маємо: $2x^5 - 21x^4 + 74x^3 - 105x^2 + 50x = x(2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50)$. Випишемо дільники вільного члена многочлена, що у дужках, і знайдемо його корені: ± 1; ± 2; ± 5; ± 10....

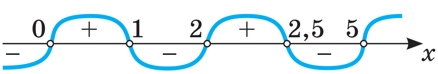
Від'ємні числа не можуть бути коренями цього многочлена (обґрунтуйте). Перевіркою встановлюємо, що коренями є числа 1 і 2. Ще 2 корені (5 і 2,5) знаходимо, скориставшись схемою Горнера чи діленням кутом. Отже, многочлен, що стоїть у лівій частині, має 5 коренів (0; 1; 2; 2,5; 5). Відкладемо їх на числовій прямій у вигляді порожніх кружечків. За допомогою окремих точок знайдемо знак функції $y = 2x^5 - 21x^4 + 74x^3 - 105x^2 + 50x$ на кожному з утворених проміжків, скориставшись EXCEL (мал. 59).



Мал. 59

Маємо: $f(-1) < 0$, $f(0{,}5) > 0$; $f(1{,}5) < 0$, $f(2{,}25) > 0$, $f(2{,}75) < 0$, $f(6) > 0$.

Використовуючи малюнок 60, можемо записати розв'язки нерівності $(0; 1) \cup (2; 2{,}5) \cup (5; \infty)$.



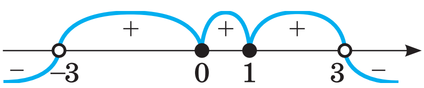
Мал. 60

Відповідь. $(0; 1) \cup (2; 2{,}5) \cup (5; \infty)$.

2 Розв'яжіть нерівність $\frac{x^4-2x^3+9}{9-x^2}\le 1.$

Розв'язання. Перенесемо всі члени нерівності в ліву частину і зведемо їх до спільного знаменника. Отримаємо рівносильну нерівність $\frac{x^4-2x^3+x^2}{9-x^2}\le 0$ або $\frac{x^2\left(x^2-2x+1\right)}{(3-x)(3+x)}\le 0,$ $\frac{x^2(x-1)^2}{(3-x)(3+x)}\le 0.$ Остання нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x^2(x-1)^2(3-x)(3+x)\le 0, \\ (3-x)(3+x)\ne 0. \end{cases}$

Позначимо на числовій осі точки 0, 1, 3 і –3 і визначимо знак лівої частини нерівності на кожному з утворених інтервалів (мал. 61).



Мал. 61

Вибираємо проміжки зі знаком «–» і записуємо відповідь як об'єднання відповідних проміжків і чисел, які відповідають зафарбованим кружечкам.

Відповідь. $(-\infty;-3)\cup\{0;1\}\cup(3;+\infty).$

Виконайте усно

248. Чи є розв'язком нерівності $3x - 2 > 5x + 1$ число:
а) 0; б) –10; в) 10; г) $(-2)^2$; ґ) -2^2?

249. Чи має розв'язки нерівність:
а) $x^4 \le 0$; б) $|x|\ge -10$; в) $x^2 < 0$; г) $x^2 > -1$; ґ) $|x-1|<-1$?

Розв'яжіть нерівність (250–252).

250. а) $2x \le 5$; б) $15 \ge 3x$; в) $-5x < 10$; г) $-0{,}5x > 1$.

251. а) $x + 2 \le 5$; б) $15 \ge 3 + x$; в) $-5 + x < 10$; г) $x - 1 > 1$.

252. а) $x^2 < 1$; б) $x^2 > 4$; в) $x^3 \ge 8$; г) $x^3 < -1$.

253. Чи рівносильні нерівності:
а) $x^2 - 4 \le 0$ і $x \le 2$; б) $-0{,}5x > 1$ і $4x + 8 < 0$; в) $x^2 - 5 < 0$ і $(x - 5)^2 < 0$?

Рівень А

254. Які з чисел –3; –2; –1; 0,1; 2; 3 задовольняють нерівність:
а) $3x > 7$; б) $-2x < 5$; в) $x + 2 \ge 0$; г) $5 - x < 0$?

255. Які з чисел –2; $-\sqrt{3}$; –1; 0; 1 задовольняють нерівність:
а) $7x - 5 > 2x + 3$; б) $5 - 3x \ge x - 1$; в) $x^2 < 3x + 1$?

256. Яке найменше натуральне число є розв'язком нерівності:
а) $4(x - 1) < 7x + 2$; в) $2(3x - 5) \ge 5(2x - 3)$;
б) $4x - 9 \ge 3(x - 2)$; г) $5(x - 2) + 2 > 3x$?

257. Яке найбільше натуральне число є розв'язком нерівності:

а) $4(x + 2) > 5(x - 1)$; в) $3(2x - 4) \geq 9x - 17$;

б) $7(x - 1) \leq 17 + 5x$; г) $0,3(x - 2) > 0,5(x - 3)$?

Розв'яжіть нерівність (258–261).

258. а) $x^2 + 2x > 0$; б) $x^2 - x \geq 0$; в) $2x^2 + 5x \leq 0$; г) $3x^2 - x < 0$.

259. а) $x^2 - 3x + 2 > 0$; в) $x^2 + 5x + 6 < 0$;

б) $x^2 - x - 2 < 0$; г) $x^2 + 2x - 15 \geq 0$.

260. а) $3x^2 - x - 4 \geq 0$; в) $5x^2 - 2x - 3 > 0$;

б) $6x^2 + 5x + 1 < 0$; г) $10x^2 - 9x + 2 \leq 0$.

261. а) $x^2 + 10x + 25 \geq 0$; в) $9x^2 + 6x + 1 \leq 0$;

б) $4x^2 - 12x + 9 < 0$; г) $x^2 - 4x + 4 > 0$.

Знайдіть розв'язки нерівності (262–265).

262. а) $(2x + 1)(x + 1) > 0$; в) $(3x - 2)(2x + 3) > 0$;

б) $(x - 7)(3x + 1) < 0$; г) $(2x - 5)(3x - 6) > 0$.

263. а) $(x - 1)(2 - x) > 0$; в) $(3 + x)(x + 7) < 0$;

б) $(3 - x)(5 + x) \leq 0$; г) $(5 - x)(1 - x) \geq 0$.

264. а) $\dfrac{x+3}{x-7}>0$; б) $\dfrac{x}{x+2}>0$; в) $\dfrac{2+x}{x+3}<0$; г) $\dfrac{2+x}{x+3}<2$; ґ) $\dfrac{x}{x+2}>2$.

265. а) $\dfrac{7x}{2x+5}>1$; б) $\dfrac{x^2}{x+5}<0$; в) $\dfrac{x^2+1}{x-7}>0$; г) $\dfrac{x+3}{x-7}>1$; ґ) $\dfrac{3x-4}{x}<1$.

Розв'яжіть нерівність методом інтервалів (266–269).

266. а) $(5 + x)(x - 7)(x + 3) > 0$; в) $(x + 2)(x + 1)(x - 5) \leq 0$.

б) $(x - 7)(x + 3)(x - 1) < 0$;

267. а) $(x + 1)(x - 2)(x + 3) \leq 0$; в) $(x - 2)(x + 1)(x - 11) < 0$.

б) $(x + 1)(x - 3)(x + 6) > 0$;

268. а) $x(x - 3)(x + 2) < 0$; в) $(x - 4)(x - 5)(x - 6) \geq 0$.

б) $(x - 2)(x + 1)(x - 1) \geq 0$;

269. а) $(2x - 3)(3x - 5)(x + 6) \leq 0$; в) $(3x - 4)(2x + 3)(x - 7) \geq 0$.

б) $x(x + 4)(x^2 + 2) < 0$;

Рівень Б

270. Які натуральні значення x задовольняють нерівність:

а) $2(x + 7) + 3(1 - 2x) \geq 1$; в) $2(x + 1) \geq 3 - (1 - 2x)$?

б) $3(3x - 2) - 4(x + 1) < 2x$;

271. Чи рівносильні нерівності:

а) $\dfrac{x-1}{2x+3}\leq 0$ і $(x - 1)(2x + 3) \leq 0$; б) $\dfrac{3-x}{x}\geq 1$ і $3 - x \geq x$?

Розв'яжіть нерівність (272–273).

272. а) $(x - 1)(x^2 - 2x - 4) > 0$; в) $(2x^2 - 6x + 3)(x - 1) < 0$;

б) $(x + 1)(1 - 4x - 5x^2) \geq 0$; г) $(-3x^2 + 5x + 2)(x + 1) < 0$.

273. а) $(x + 2)(x^2 - 10x + 35) < 0$; в) $(3x^2 + 3x + 5)(x + 2) > 0$;

б) $(x - 2)(-x^2 + 2x - 1) < 0$; г) $(3x - 7x^2 - 5)(x - 2) \leq 0$.

Розв'яжіть нерівність методом інтервалів (274–279).

274. а) $(5 + x)^2(x - 7)(x + 3) > 0$; в) $x^3(x - 7)(x + 3)(x - 1) \le 0$;
б) $(x + 2)(x + 1)(x - 5)^3 < 0$; г) $x^2(x + 3)(2x - 4)(x - 6) \ge 0$.

275. а) $(x + 1)(x^2 - 2x + 3) \le 0$; в) $(x - 2)(3x^2 + x - 2)^2 \ge 0$;
б) $(x^2 - x - 2)(x - 1{,}5) < 0$; г) $(5x^2 + 2x - 3)(x + 6)^2 \ge 0$.

276. а) $(5 - x)(x - 7)^3(x + 1) > 0$; в) $(x - x^2)(x + 3)(x - 1) \le 0$;
б) $(2 - x)^3(x + 1)(x - 5) < 0$; г) $(x^2 - 4)(x + 3)(2x - 4) \ge 0$.

277. а) $(1 - x)^2(x + 7)(x + 3) > 0$; в) $x(x - 4)(x + 5)(x - 1) \le 0$;
б) $(x + 3)(x + 1)(x - 5)^3 < 0$; г) $x^2(x + 3)(x - 4)(x - 6) \ge 0$.

278. а) $(x - 1)(x^2 - 2x + 3) \le 0$; в) $(x - 2)(5x^2 - x - 4)^2 \ge 0$;
б) $(x^2 - x - 1)(x - 1{,}5) < 0$; г) $(5x^2 + 2x - 3)(x + 6)^2 \ge 0$.

279. а) $(5 - x)(x - 3)^3(x + 1) > 0$; в) $(x - x^2)(x + 3)(x - 1) \le 0$;
б) $(3 - x)^3(x + 1)(x - 5) < 0$; г) $(x^2 - 4)(x + 3)(2x - 4) \ge 0$.

Розв'яжіть нерівність (280–281) і встановіть кількість її цілих розв'язків з проміжку [–5; 5].

280. а) $\frac{x(x-1)(x+2)}{(x+3)(1-x)} > 0$; б) $\frac{(x-2)(x-3)}{x(x^2+x+1)} > 0$; в) $\frac{x^2-3x+2}{x(x-2)(x+3)} \le 0$.

281. а) $\frac{(x-1)(x+2)}{(x+3)} > 0$; б) $\frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+5)} > 0$; в) $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+3)} \le 0$.

Розв'яжіть дробово-раціональну нерівність (282–285).

282. а) $\frac{x(x-1)(x+2)}{(x+3)(x-1)} \le 0$; б) $\frac{(x-2)(x-3)}{x(x^2+x+1)} > 0$; в) $\frac{(x-2)(x-3)}{(2+x-x^2)(x+5)} \ge 0$.

283. а) $x + \frac{2}{x} > 3$; б) $x + 3 < \frac{4}{x}$; в) $\frac{3x^2+x-14}{x+1} \ge -5$; г) $\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x-1} < \frac{2}{x^2-1}$.

284. а) $\frac{1}{x-1} < 1$; б) $\frac{1}{x} \ge 2$; в) $\frac{3x+2}{2x-1} \ge \frac{1}{2}$; г) $\frac{4}{1+x} - \frac{x}{1-x} \le \frac{2}{x^2-1}$.

285. а) $\frac{6}{x^2} + 2 \le \frac{7}{x}$; б) $\frac{4}{x} + \frac{3}{x+3} \ge 1$; в) $\frac{5}{x+3} - 2 \le \frac{x}{x-1}$; г) $\frac{2x+2}{x-5} + \frac{4x+5}{x+2} \ge 1$.

Рівень В

Розв'яжіть нерівність (286–287).

286. а) $(x + 1)^2(4x + 5) \ge (2x - 1)^2 (x + 5)$;
б) $x^2(8x - 2) - (2x + 3)(2x - 1)^2 \le 1$.

287. а) $(x - 1)^3 - x(x + 2)^2 \ge -7$; б) $(x + 1)^2(2x + 5) \le 2x^2 + 2$.

Розв'яжіть нерівність методом інтервалів (288–292).

288. а) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 < 0$; в) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 < 0$;
б) $x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12 > 0$; г) $2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 2x \ge 0$.

289. а) $\frac{x^2-3x+2}{x(x-2)(x+3)} \le 0$; б) $\frac{(x^2-9)(x+3)}{(2x^2+6x)(1-x)} \ge 0$; в) $\frac{(x-2)(x-3)}{(2+x-x^2)(x+5)} \ge 1$.

290. а) $\frac{(x^2-1)(x^2-4x+4)}{2x^2-x-1} \ge 0$; б) $\frac{(x-2)(x+7)}{x+8} \ge 1$; в) $\frac{x(3+x)(x+3)}{(x-1)^2(x^2+4x+3)} \ge 0$.

291. а) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4x+4}<1$; б) $\dfrac{1}{x^2-6x+8}<\dfrac{1}{8}$; в) $\dfrac{x^2+5x+5}{2x^2+5x}\le 1$.

292. а) $\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-4x+4}\ge\dfrac{10x+1}{(x-2)^2}$; б) $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}\ge\dfrac{2(x^2-x)}{x^2-2x-2}$.

Розв'яжіть нерівність з модулем (293–294).

293. а) $\left|\dfrac{2x^2+8x-6}{x^2+4x+3}\right|\ge 2$; б) $\left|\dfrac{x^2-10x+9}{x^2-9}\right|\le 1$; в) $\dfrac{x^2-|2x-3|}{x^2-|2-x|}\le 1$.

294. а) $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+5x+4}\right|\le 1$; б) $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x-4}\right|\ge 1$; в) $\dfrac{|x^2+2x|+4}{x^2+|x+2|}\ge 1$.

Знайдіть область визначення функції (295–296).

295. а) $y=\sqrt{\dfrac{(x+1)(x+2)^2}{(x^2-4)(x^2-2x-3)}}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4x-5}}+\dfrac{1}{\sqrt{4x^2-1}}$.

296. а) $y=\sqrt{\dfrac{x^2(x-2)}{(x-3)^2(x^2+3x+2)}}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{(x^2-4x+4)(4-x^2)}{x^2+2x-8}}+\sqrt{25-x^2}$.

Розв'яжіть систему нерівностей (297–298).

297. а) $\begin{cases}\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{1}{x+3}\le\dfrac{2x}{x^2-9},\\ x^4-3x^2-4\ge 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{x+8}{x^2-16}+\dfrac{1}{x}\le\dfrac{2}{x-4},\\ \dfrac{13-6x}{x+2}\le 2-x.\end{cases}$

298. а) $\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+3x+2}\ge\dfrac{x}{x^2+7x+12},\\ \dfrac{x^2-3x+1}{x^2-2}\ge 1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x}>-2,\\ (2x^2-x+3)(x^2-9)(x^2-3x)\le 0.\end{cases}$

Для кожного значення a розв'яжіть нерівність (299–300).

299. а) $(x-2)(x-a)\ge 0$; в) $(x+3)^2(x-a)>0$; ґ) $(x+3)(x-a)^2>0$;
б) $(x-2)(x+a)\le 0$; г) $(x-2)^2(x-a)\ge 0$; д) $(x-2)(x-a)^2\ge 0$.

300. а) $(x+3)^2(x-a)<0$; в) $(x+3)(x-a)^2<0$; ґ) $(x-2)^2(x-a)\le 0$;
б) $(x-2)(x-a)^2\le 0$; г) $\dfrac{x-a}{x+3}\le 0$; д) $\dfrac{x+3}{x-a}\ge 0$.

Розв'яжіть нерівність (301–305).

301. а) $(x^2+2x+1)(x^2+2x+4)>10$; в) $(3x+1)^2<3x+1$;
б) $(2x^2-5x-4)(2x^2-5x)<21$; г) $(3x+1)^2\ge(6x+2)$.

302. а) $x(x+1)(x+2)(x+3)<24$; б) $(x-2)(x+1)(x+2)(x+5)+20>0$.

303. а) $x^4-7x^2+12\ge 0$; в) $4x^4-5x^2+1\le 0$;
б) $x^4+5x^2-36<0$; г) $16x^4-15x^2-1>0$.

304. а) $(x+3)^4-(x+3)^2-2>0$; в) $(2x-1)^4-10(2x-1)^2+9<0$;
б) $x^2+2x+2(x+1)-23\le 0$; г) $4x^2-12x+2(2x-3)-6\ge 0$.

305. а) $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x<6$; в) $\frac{x(x-1)}{(x^2-x+1)^2}\le\frac{2}{9}$;

б) $\frac{x}{x^2-3x+2}\le\frac{x}{x^2+3x+2}$; г) $\frac{x^2-13x+15}{x^2-14x+15}\le\frac{3x}{x^2-6x+15}$.

Вправи для повторення

306. Знайдіть переріз та об'єднання множин A і B, якщо:

а) $A=\{0, 2, 4, 6\}$, $B=\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$; б) $A=(-7; 7)$, $B=(-\infty; -1]\cup[3; 5)$.

307. ***Задача Леонардо Пізанського.*** Знайдіть число, $\frac{19}{20}$ якого дорівнюють квадрату самого числа.

308. Розв'яжіть рівняння:

а) $|2x|=5$; б) $|2x+3|=5$; в) $|2-x|=-1^2$; г) $|2x|=(-2)^2$.

§ 6 Задачі з параметрами

Tasks with Parameters

Фахівцям часто доводиться мати справу з рівняннями, які, крім невідомих змінних і відомих чисел, містять і параметри. Параметр у рівнянні чи нерівності — це стала, значення якої при потребі можна змінювати. Рівняння може мати кілька змінних і кілька параметрів, які позначаються різними буквами, але в цьому параграфі розглянемо задачі, які містять одну змінну і один параметр.

Наприклад, у рівнянні $(a^2-4)x=a^2+a-2$ буквами позначено: x — змінну, a — параметр.

Розв'язати рівняння (нерівність чи систему) з параметром — означає для кожного значення параметра вказати, чи має рівняння (нерівність чи система) розв'язки, скільки їх і які вони.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $(a^2-4)x=a^2+a-2$.

Розв'язання. Задано лінійне рівняння відносно змінної x. Йому рівносильне рівняння $(a-2)(a+2)x=(a-1)(a+2)$.

Якщо $(a-2)(a+2)\ne 0$, тобто $a\ne 2$ і $a\ne -2$, то рівняння має єдиний корінь $x=\frac{(a-1)(a+2)}{(a-2)(a+2)}=\frac{a-1}{a-2}$.

Якщо $a=2$, то рівняння має вигляд $0x=4$, а тому коренів не має.

Якщо $a=-2$, то рівняння має вигляд $0x=0$, розв'язком якого є будь-яке число.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$, то $x = \frac{a-1}{a-2}$; якщо $a=-2$, то коренем рівняння є кожне дійсне число; якщо $a=2$, то рівняння коренів не має.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $ax^2+4x+a+3=0$.

Розв'язання. Якщо $a=0$, то рівняння має вигляд $4x+3=0$ і має єдиний корінь $x = -\frac{3}{4} = -0{,}75$.

Якщо $a \neq 0$, то $ax^2+4x+a+3=0$ — квадратне рівняння відносно змінної x. Знайдемо його дискримінант.

$$D = 16 - 4 \cdot a \cdot (a+3) = -4a^2 - 12a + 16.$$

Дане рівняння має корені $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{D}}{2a}$, якщо $D \geq 0$, тобто якщо $-4a^2 - 12a + 16 \geq 0$, $a^2 + 3a - 4 \leq 0$.

Множина розв'язків останньої нерівності, за умови $a \neq 0$, $[-4; 0) \cup (0; 1]$.

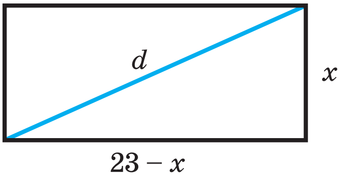
Розглянемо два випадки. Якщо $D=0$, то $x = \frac{-2}{a}$. У цьому випадку при $a=-4$ $x=0{,}5$, а при $a=1$ $x=-2$.

Якщо $D>0$, тобто $a \in (-4; 0) \cup (0; 1)$, рівняння має два корені $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3a-a^2}}{a}$.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$, то дійсних коренів немає; якщо $a=-4$, то $x=0{,}5$; якщо $a=0$, то $x=-0{,}75$; якщо $a=1$, то $x=-2$; якщо $a \in (-4; 0) \cup (0; 1)$, то $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3a-a^2}}{a}$.

Розглядають і текстові задачі з параметром.

Приклад 3. Периметр прямокутника дорівнює 46, а діагональ — d. Знайдіть довжини сторін прямокутника. Яким може бути значення d?



Мал. 62

Розв'язання. Нехай одна сторона прямокутника має довжину x. Тоді друга дорівнює $23-x$ (мал. 62). За теоремою Піфагора, $x^2+(23-x)^2=d^2$, звідси $2x^2-46x+23^2-d^2=0$. Отримали рівняння з параметром d. Розв'яжемо його відносно x:

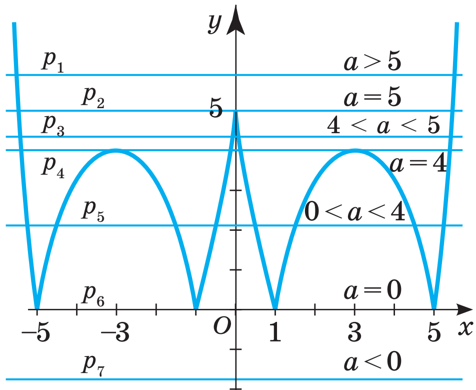
$$D = 46^2 - 4 \cdot 2 \cdot (23^2 - d^2) = 4(2d^2 - 23^2).$$

$$x_1 = 0{,}5\left(23 - \sqrt{2d^2 - 23^2}\right), \quad x_2 = 0{,}5\left(23 + \sqrt{2d^2 - 23^2}\right) = 23 - x_1.$$

Щоб розв'язок був числом дійсним і додатним, необхідно, щоб виконувалася умова $2d^2 - 23^2 \geq 0$, тобто $\sqrt{2}d \geq 23$, $d \geq 11{,}5\sqrt{2}$. Оскільки сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін, то $d < 23$. Отже, $11{,}5\sqrt{5} \le d < 23$.

Відповідь. Якщо $11{,}5\sqrt{2} \le d < 23$, то сторони прямокутника дорівнюють $0{,}5\left(23 \pm \sqrt{2d^2 - 23^2}\right)$.

Якщо вимагається визначити кількість коренів рівняння при певних значеннях параметра, то доцільно використовувати графічний метод.



Мал. 63

Приклад 4. При якому значенні параметра a рівняння $\left|x^2 - 6|x| + 5\right| = a$ має найбільшу кількість коренів? Чи може кількість коренів бути непарною?

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \left|x^2 - 6|x| + 5\right|$ і $y = a$ (мал. 63).

Бачимо, що рівняння може мати:

1) 2 корені (пряма p_1), якщо $a > 5$;
2) 3 корені (пряма p_2), якщо $a = 5$;
3) 4 корені (пряма p_3), якщо $4 < a < 5$;
4) 6 коренів (пряма p_4), якщо $a = 4$;
5) 8 коренів (пряма p_5), якщо $0 < a < 4$;
6) 4 корені (пряма p_6), якщо $a = 0$;
7) 0 коренів (пряма p_7), якщо $a < 0$.

Відповідь. При $0 < a < 4$ рівняння має найбільшу кількість коренів: 8. При $a = 5$ рівняння має непарну кількість коренів: 3.

Приклад 5. Розв'яжіть нерівність $3(2a - x) < a(x + 1)$.

Розв'язання. Розкриємо дужки і перенесемо всі члени нерівності в одну частину: $6a - 3x - ax - a < 0$ або $(3 + a)x > 5a$.

Якщо $3 + a = 0$, то нерівність має вигляд $0x > -15$. Вона правильна при будь-якому значенні x.

Якщо $3 + a > 0$, тобто $a > -3$, то $x > \dfrac{5a}{3+a}$.

Якщо $3 + a < 0$, тобто $a < -3$, то $x < \dfrac{5a}{3+a}$.

Відповідь. Якщо $a = -3$, $x \in R$; якщо $a > -3$, то $x > \dfrac{5a}{3+a}$; якщо $a < -3$, то $x < \dfrac{5a}{3+a}$.

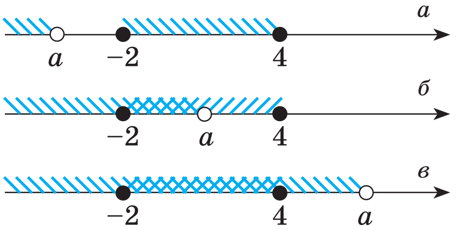
Приклад 6. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \le 0, \\ x < a. \end{cases}$

Розв'язання. Множина розв'язків першої нерівності $[-2; 4]$ (розв'яжіть самостійно). Щоб розв'язати задану систему нерівностей, потрібно розглянути різні випадки розміщення точки $x = a$ на числовій прямій відносно відрізка $[-2;\ 4]$.

Якщо $a \le -2$ (мал. 64, *а*), то система розв'язків не має.

Якщо $a \in (-2; 4]$, то $x \in [-2; a)$ (мал. 64, *б*).

Якщо $a > 4$, то $x \in [-2; 4]$ (мал. 64, *в*).



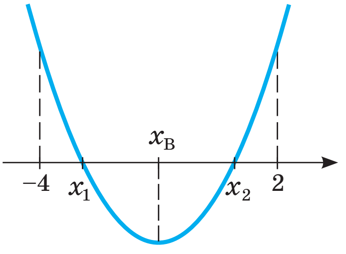
Мал. 64

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; -2]$, то $x \in \varnothing$; якщо $a \in (-2; 4]$, то $x \in [-2; a)$; якщо $a \in (4; +\infty)$, то $x \in [-2; 4]$.

Хочете знати ще більше?

Задача. При яких значеннях параметра c корені рівняння $x^2 + (c - 1)x + c + 2 = 0$ належать проміжку $(-4;\ 2)$?

Розв'язання. Щоб дане рівняння мало дійсні корені, необхідно, щоб його дискримінант був невід'ємним, тобто $(c - 1)^2 - 4(c + 2) \ge 0$. Щоб нулі функції $f(x) = x^2 + (c - 1)x + c + 2$ належали проміжку $(-4;\ 2)$, треба, щоб значення $f(-4)$ і $f(2)$ були додатними, а абсциса вершини параболи лежала між кінцями даного проміжку (мал. 65). Отже, шукані значення параметра c мають задовольняти систему нерівностей:



Мал. 65

$$\begin{cases} (c-1)^2 - 4(c+2) \ge 0, \\ f(-4) > 0, \\ f(2) > 0, \\ -4 < 0{,}5(1-c) < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} c^2 - 6c - 7 \ge 0, \\ 22 - 3c > 0, \\ 3c + 4 > 0, \\ -3 < c < 9; \end{cases} \quad \begin{cases} (c+1)(c-7) \ge 0, \\ c < 7\frac{1}{3}, \\ c > -1\frac{1}{3}, \\ -3 < c < 9. \end{cases}$$

Відповідь. $c \in \left(-1\frac{1}{3}; -1\right] \cup \left[7; 7\frac{1}{3}\right)$.

Перевірте себе

1. Яке рівняння називають рівнянням з параметром?
2. Наведіть приклад рівняння з параметром.
3. Наведіть приклад нерівності з параметром.
4. Що означає розв'язати рівняння (нерівність) з параметром?
5. Як розв'язують задачі з параметром, у яких вимагається визначити кількість чи наявність коренів?

Виконаємо разом

1 Знайдіть усі значення параметра a, при яких нерівність $x^2 - 2(a^2 - 2)x + a^4 > 0$ правильна для всіх $x \in R$.

Розв'язання. Перший коефіцієнт квадратного тричлена $x^2 - 2(a^2 - 2)x + a^4$ додатний, тому множина розв'язків нерівності залежить тільки від знака дискримінанта тричлена. $\frac{D}{4} = (a^2 - 2)^2 - a^4 = -4a^2 + 4$.

Квадратний тричлен набуває тільки додатних значень, коли графік функції не перетинає вісь абсцис, тобто при $D < 0$. Тому потрібно розв'язати нерівність $-4a^2 + 4 < 0$, звідси $a^2 > 1$, тобто $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Отже, якщо $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то множиною розв'язків нерівності $x^2 - 2(a^2 - 2)x + a^4 > 0$ є вся числова пряма.

Відповідь. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

2 Розв'яжіть рівняння $|x+1| + |x-3| = a$.

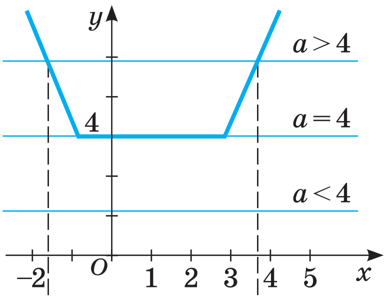
Розв'язання. *Спосіб 1*. Розв'яжемо дане рівняння графічно. Побудуємо графік функції $y = |x+1| + |x-3|$.

Якщо $x < -1$, то $y = -x - 1 - x + 3 = -2x + 2$.

Якщо $-1 \le x \le 3$, то $y = x + 1 - x + 3 = 4$.

Якщо $x > 3$, то $y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$.

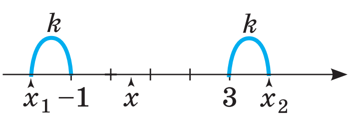
Графік функції зображено на малюнку 66.



Мал. 66

З малюнка видно, що при $a < 4$ рівняння розв'язків не має, при $a = 4$ — рівняння має безліч розв'язків $x \in [-1; 3]$. При $a > 4$ рівняння матиме два розв'язки, які можна знайти, розв'язавши рівняння $-2x + 2 = a$ і $2x - 2 = a$, звідси $x = \frac{2-a}{2}$ і $x = \frac{2+a}{2}$.

Отже, якщо $a < 4$, то $x \in \varnothing$; якщо $a = 4$, то $x \in [-1;\ 3]$; якщо $a > 4$, то $x_1 = \frac{2-a}{2}$, $x_2 = \frac{2+a}{2}$.



Мал. 67

Спосіб 2. Дане рівняння $|x+1| + |x-3| = a$ можна розв'язати, користуючись координатною прямою. Ліва частина рівняння — це сума відстаней від точки з координатою x до точок -1 і 3 (мал. 67). З малюнка видно, що коли $x \in [-1;\ 3]$, то сума $|x+1| + |x-3|$ дорівнює 4. Тому при $a = 4$ рівняння має безліч розв'язків $x \in [-1; 3]$. При $a < 4$ рівняння розв'язків не має. При $a > 4$ рівняння має два розв'язки: $x_1 = -1 - k$, $x_2 = 3 + k$, де $k = \frac{a-4}{2}$, бо з малюнка видно, що $a = 2k + 4$. Тоді $x_1 = -1 - \frac{a-4}{2} = \frac{2-a}{2}$, $x_2 = 3 + \frac{a-4}{2} = \frac{2+a}{2}$.

Відповідь. Якщо $a < 4$, то $x \in \varnothing$; якщо $a = 4$, то $x \in [-1; 3]$; якщо $a > 4$, то $x_1 = \frac{2-a}{2}$, $x_2 = \frac{2+a}{2}$.

Можна розв'язати дане рівняння і методом інтервалів. Спробуйте зробити це самостійно.

«Усе пізнаване має число. Бо без нього неможливо нічого ні зрозуміти, ні пізнати».

Піфагор

Виконайте усно

309. Розв'яжіть рівняння:

а) $|x-2| = a$; б) $|x-a| = 2$; в) $|x-a| = -2$.

310. Розв'яжіть нерівність:

а) $2x < a$; б) $ax < 1$; в) $\frac{x}{a} < 2$.

311. При яких значеннях параметра b рівняння не має розв'язків:

а) $|x-3| = b+2$; б) $\frac{x-1}{b} = 2b$; в) $x^2 - x + b = 0$?

312. При яких значеннях параметра a число 2 є коренем рівняння:

а) $x^2 - 2x + a = 0$; б) $x^2 - 2a + 4 = 0$; в) $ax^2 + 2x + 4 = 0$?

313. При яких значеннях параметра m рівняння $mx^2 + x + m = 0$:

а) має єдиний розв'язок; б) не має розв'язків?

Рівень А

314. Розв'яжіть рівняння:

а) $(a-1)x = a^2 - 1$; б) $(a^2 - 9)x = a^2 - a - 6$; в) $(a^2 - 3a + 2)x = 8 - 2a - a^2$.

315. Розв'яжіть нерівність:

а) $(a-2)x < a^2 - 4$; б) $(a^2 - 9)x \geq a^2 + 2a - 3$; в) $(a^2 - 2a)x \leq 8 - 2a - a^2$.

316. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 - ax - 2a^2 = 0$; б) $ax^2 - (a+2)x + 2 = 0$; в) $x^2 - 2a + a^2 - 1 = 0$.

317. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} 2x - 3 < 3(x+4), \\ x \leq a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 7x + 10 \geq 0, \\ x \geq a. \end{cases}$

318. Розв'яжіть нерівність:

а) $(x-4)(x-a) < 0$; в) $(x-1)(x-a) \geq 0$;

б) $(x^2 - 4)(x-a) < 0$; г) $(x-2)^2(x-a) \geq 0$.

319. При якому значенні параметра c рівняння $\frac{x^2 - (c+1)x + c}{x^2 - 4x} = 0$ має тільки один корінь?

320. При якому значенні параметра m рівняння $m(3x - m) = 3x - 1$ має єдиний додатний корінь?

321. При якому значенні параметра a нерівність виконується для всіх дійсних значень x:

а) $x^2 - (a - 2)x + 4 > 0$; б) $x^2 - 2x + a^2 > 0$?

322. При яких значеннях параметра b функція $y = x^2 + 2(b - 1)x + 4 - b - b^2$ набуває додатних значень для всіх дійсних значень x?

323. Для кожного значення параметра a визначте кількість коренів рівняння:

а) $\left|x^2 - 2x - 3\right| = a$; б) $\left|5 + 4x - x^2\right| = a$; в) $\left||x - 2| - 3\right| = a$; г) $\left|3 - |x|\right| = a$.

Рівень Б

324. При якому значенні параметра b рівняння $x^2 - (2b - 1)x + b^2 - b - 2 = 0$ має: а) два додатні корені; б) корені різного знака?

325. При якому значенні параметра p рівняння $x^4 - (2p - 1)x^2 + p^2 - p = 0$ має тільки два корені?

326. При якому значенні параметра a корені рівняння $x^2 - (3a + 1)x + 2a(a + 1) = 0$ належать відрізку $[-1; 6]$?

327. При якому значенні параметра a розв'язком нерівності $|x - 2a| \le a + 1$ є відрізок $[1; 7]$?

328. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{x^2 - (a + 3)x + 3a}$.

329. При якому значенні m сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (m - 2)x - m + 1 = 0$ є найменшою? Знайдіть ці корені.

330. При якому значенні a функція $y = 2ax^2 - (a^2 + 7a - 4)x + 5$ досягає найбільшого значення в точці $x = 1$?

331. При якому значенні a найменше значення функції $y = x^2 - 2(a + 2)x + a^2 + 4$ дорівнює $5 - a^2$?

332. Скільки спільних точок мають графіки функцій залежно від значень параметра a:

а) $y = \left|x^2 - 8|x| - 7\right|$ і $y = a$; в) $y = |x + 1| + |x - 4|$ і $y = a$;

б) $y = |x + 2| - |x - 3|$ і $y = a$; г) $y = \dfrac{6}{|x|}$ і $y = a^2 - 4$?

333. Знайдіть усі значення параметра m, при якому:

а) найменше значення функції $y = x^2 - 2x + m$ дорівнює найбільшому значенню функції $y = -|x| + 2 - 2m$;

б) найбільше значення функції $y = -x^2 - 2m + 1$ дорівнює найменшому значенню функції $y = |x - 2| + |x - 4| + m$.

334. Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь:

а) $\begin{cases} ax + 4y = 6 + a, \\ 2x + (2 + a)y = 8 \end{cases}$ має безліч розв'язків;

б) $\begin{cases} (a + 1)x + 2y = a + 4, \\ 4x + (a - 1)y = 7 \end{cases}$ не має розв'язків.

335. Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь має єдиний розв'язок:

а) $\begin{cases} x^2+(y-a)^2=9, \\ y=-6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x^2+a; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ (x-4)^2+y^2=1. \end{cases}$

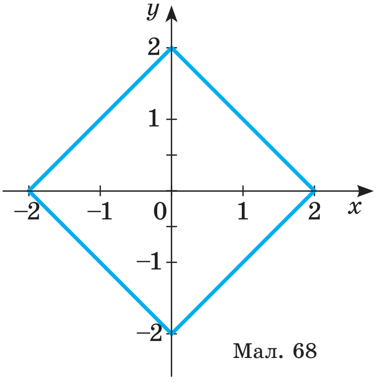
336. На малюнку 68 зображено графік рівняння $|x|+|y|=2$. Користуючись малюнком, знайдіть усі значення параметра a, при якому система рівнянь:

а) $\begin{cases} |x|+|y|=2, \\ (x-a)^2+y^2=16 \end{cases}$ має єдиний розв'язок;

б) $\begin{cases} |x|+|y|=2, \\ x^2+(y-a)^2=9 \end{cases}$ має єдиний розв'язок;

в) $\begin{cases} |x|+|y|=2, \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$ має чотири розв'язки;

г) $\begin{cases} |x|+|y|=2, \\ y=x^2+a \end{cases}$ має п'ять розв'язків.



Мал. 68

337. Знайдіть найбільше ціле значення параметра p, при якому система рівнянь $\begin{cases} y-x=p, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ має два розв'язки.

Рівень В

338. Розв'яжіть рівняння $x^2-4x\dfrac{x+a}{|x+a|}+3=0.$

339. При якому значенні параметра a рівняння $x^4-3ax^2+3a-a^2=0$ має три корені?

340. *Відкрита задача.* При якому значенні параметра a рівняння $\sqrt{x-a}\left(x^2-(a+5)x+6+5a-6a^2\right)=0$ має … коренів? Знайдіть ці корені.

341. При якому значенні параметра a рівняння $\dfrac{x^2-ax}{3(x+12)}-\dfrac{ax-a^2}{x+12}=0$ має один корінь?

342. При якому значенні параметра a має рівно чотири корені система рівнянь $\begin{cases} |x+y|+|x-y|=2, \\ x^2+y^2=(a-1)^2 \text{ ?} \end{cases}$

343. Для кожного значення параметра a розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ |y+x|=2. \end{cases}$

344. При яких значеннях a нерівність не має розв'язків:
а) $(a-1)x^2+(a-2)x+a+1<0$; б) $(a+1)x^2-2(a-1)x+3(a-1)>0$?

345. Знайдіть усі значення параметра p, при якому подвійна нерівність $-7<\dfrac{x^2+(p+1)x-5}{x^2-x+1}<3$ виконується для всіх $x \in R$.

346. Доведіть, що квадратний тричлен $ax^2+bx+c=f(x)$ має дійсні корені, кожен із яких більший від заданого числа m тоді і тільки тоді, коли:
$$\begin{cases} D\ge 0, \\ af(m)>0, \\ m<\dfrac{-b}{2a}. \end{cases}$$

347. При яких значеннях параметра a корені рівняння $ax^2-4x+3a+1=0$ додатні?

348. Для того щоб число p містилося між дійсними коренями квадратного тричлена $ax^2+bx+c=f(x)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова $af(p)<0$. Доведіть.

349. При яких значеннях параметра a має корені різного знака рівняння $(a+1)x^2-2(a-1)x+a-4=0$?

350. Інвестор має можливість розмістити капітал у 10 млн грн у банк під 40 % річних або вкласти у виробництво з очікуваною ефективністю у розмірі 150 %. Втрати виробництва (y, грн) описуються квадратичною залежністю $y=0{,}05x^2$, де x — розмір вкладеного капіталу (грн). Прибуток обкладається податком у p %. При яких значеннях p вклад у виробництво буде ефективнішим, ніж просте розміщення капіталу в банку?

Вправи для повторення

351. Розв'яжіть рівняння: а) $x^3+2x^2+3x+6=0$; б) $x^2+2|x-1|-6=0$.

352. Розв'яжіть сукупність нерівностей
$$\left[\begin{array}{l} x^2-2x\le 3, \\ (x-1)^2-2(x+2)>15-x. \end{array}\right.$$

353. Знайдіть $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, якщо $A=[-2;\ 6]$, $B=(-4;\ 5)$.

354. Унаслідок скидання стічних вод у Київське водосховище спостерігалася загибель риби на площі 0,5 га. Середня маса однієї дорослої рибини: лящ — 1,2 кг; судак — 1,9 кг; окунь — 0,25 кг. Установіть прямі збитки рибного господарства, якщо концентрація загиблої риби становить: лящ — 0,1 шт./м²; судак — 0,05 шт./м²; окунь — 2 шт./м². Прямий збиток визначається за формулою $N=PSM$, де: N — величина збитків у натуральному вираженні, кг; P — середня кількість загиблої риби, шт./м²; S — площа негативного впливу пошкодження, м²; M — середня маса дорослої рибини, кг.

§ 7 Математична індукція

Mathematical Induction

Індукція (від лат. *induction* — наведення) — це перехід від часткових тверджень до загальних. *Дедукція* (від лат. *deductio* — висновок) — перехід від загальних тверджень до часткових. При дедукції з істинних загальних тверджень отримують істинні часткові твердження.

Приклад 1. Будь-який рівнобедрений трикутник має вісь симетрії. (1)

ΔABC — рівнобедрений. (2)

ΔABC має вісь симетрії. (3)

Із загального твердження (1) за допомогою твердження (2) отримали правильне часткове твердження (3).

На відміну від дедукції, індукція може привести як до істинних тверджень, так і до хибних.

Приклад 2. Число 140 ділиться на 5. (1)

Усі числа, які закінчуються нулем, діляться на 5. (2)

Приклад 3. Число 140 ділиться на 5. (1)

Усі тризначні числа діляться на 5. (2)

У прикладі 2 із правильного часткового твердження (1) отримали загальне твердження (2). Твердження (2) — правильне. У прикладі 3 з правильного часткового твердження (1) отримали загальне твердження (2). Твердження (2) — хибне.

Приклад 4. Якщо у тричлен $n^2 + n + 41$ послідовно підставляти числа 0, 1, 2, 3,..., 10, то щоразу отримуватимемо просте число 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151. На підставі отриманих результатів виникає гіпотеза, що при підстановці в тричлен замість n будь-якого цілого невід'ємного числа завжди в результаті будемо отримувати просте число. Насправді, якщо $n = 40$, цей тричлен дорівнює 41^2, тобто числу складеному. У цьому прикладі ми зустрілися з твердженням, істинним у 40 окремих випадках, і все-таки воно виявилося хибним у загальному.

Отже, твердження може бути правильним у певній (інколи і дуже великій) кількості часткових випадків і водночас неправильним узагалі.

Щоб дізнатися, чи істинне твердження у загальному випадку, використовують принцип математичної індукції.

Якщо деяке твердження істинне для $n = 1$ і з припущення, що воно істинне для довільно вибраного натурального числа $n = k$, випливає його істинність і для $n = k + 1$, то це твердження істинне для всіх натуральних n.

Метод доведення, заснований на принципі математичної індукції, називають методом математичної індукції. Таке доведення складається з трьох етапів.

1. Твердження правильне для $n = 1$. Доведіть.

2. Якщо твердження правильне для $n = k$, де k – довільне натуральне число, то воно правильне для $n = k + 1$. Доведіть.

3. Якщо обидва твердження доведені, то на підставі принципу математичної індукції робимо висновок: твердження правильне (істинне) для будь-якого натурального n.

Метод математичної індукції — один з унікальних методів доведення математичних тверджень, що стосуються довільного натурального n. За допомогою цього твердження доводять тотожності та нерівності, які розглядаються на множині натуральних чисел, розв'язують задачі на подільність і на знаходження сум, логічні та комбінаторні задачі, доводять геометричні теореми та інші твердження.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Доведіть, що при будь-якому натуральному n число $a_n = 2n^3 + 3n^2 + 7n$ ділиться на 6.

Розв'язання. 1) Якщо $n = 1$, то $a_1 = 12$, а тому ділиться на 6.

2) Припустимо, що твердження істинне при $n = k$, тобто $a_k = 2k^3 + 3k^2 + 7k$ ділиться на 6, і доведемо, що при $n = k + 1$ число $a_{k+1} = 2(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 7(k+1)$ також ділиться на 6. Перетворимо вираз a_{k+1}:

$$a_{k+1} = 2(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 7(k+1) = 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 + 3k^2 + 6k + 3 + 7k + 7 =$$
$$= (2k^3 + 3k^2 + 7k) + 6(k^2 + 2k + 2) = a_k + 6(k^2 + 2k + 2).$$

Оскільки кожний доданок ділиться на 6, то і їх сума також ділиться на 6. Отже, при $n = k + 1$ твердження істинне.

3) Умови 1 і 2 виконуються, тому за принципом математичної індукції доведено, що для всіх натуральних n a_n ділиться на 6.

Приклад 2. *Задача Архімеда.* Доведіть, що сума n перших чисел натурального ряду дорівнює $\frac{n(n+1)}{2}$, тобто $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Розв'язання. 1) При $n = 1$ твердження правильне, бо $S_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$.

2) Припустимо, що твердження правильне при $n = k$, тобто

$S_k = 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Доведемо справедливість твердження при $n = k + 1$, тобто що

$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Дійсно,

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

3) Умови 1 і 2 виконуються, тому за принципом математичної індукції, твердження правильне для всіх натуральних чисел.

Приклад 3. Обчисліть суму $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Розв'язання. Легко перевірити, що: $S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$; $S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$; $S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$; $S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}$.

На основі отриманих результатів формулюємо гіпотезу (припущення), що $S_n = \frac{n}{n+1}$ при довільному натуральному n. Для перевірки гіпотези скористаємося методом математичної індукції.

1) Для $n = 1$ гіпотеза правильна, тому що $S_1 = \frac{1}{2}$.

2) Припустимо, що гіпотеза правильна для $n = k$, тобто що

$S_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$, де k — деяке натуральне число.

Доведемо, що тоді гіпотеза є правильною і для $n = k + 1$, тобто що $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$. Дійсно, $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$, тому

$$S_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

3) Умови 1 і 2 виконуються, тому на підставі принципу математичної індукції можемо стверджувати, що $S_n = \frac{n}{n+1}$ при довільному $n \in N$.

Приклад 4. Доведіть, що при будь-якому натуральному $n > 1$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

Розв'язання. Позначимо ліву частину нерівності через S_n.

1) $S_2 = \frac{7}{12} = \frac{14}{24}$, отже, при $n = 2$ нерівність правильна.

2) Нехай $S_k > \frac{13}{24}$ при деякому k. Доведемо, що тоді і $S_{k+1} > \frac{13}{24}$.

Маємо: $S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k}$, $S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$.

Порівнюючи S_k і S_{k+1}, маємо: $S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}$, тобто

$$S_{k+1} - S_k = \frac{2k+2+2k+1-4k-2}{2(k+1)(2k+1)} = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)}.$$

При будь-якому натуральному k права частина останньої рівності додатна. Тому $S_{k+1} > S_k$. Але $S_k > \frac{13}{24}$, виходить і $S_{k+1} > \frac{13}{24}$.

3) Отже, на підставі принципу математичної індукції нерівність виконується для всіх $n > 1$, $n \in N$.

Деякі твердження правильні не для всіх натуральних n, а лише для натуральних n, починаючи з деякого числа p. Такі твердження інколи можна довести методом, який дещо відрізняється від загального методу математичної індукції, але подібний до нього. Полягає він ось у чому.

Твердження правильне при всіх натуральних значеннях $n \geq p$, якщо:

1) воно правильне при $n = p$ (а не при $n = 1$, як було раніше);

2) із того, що твердження правильне при $n = k$, де $k \geq p$ (а не $k \geq 1$), випливає, що воно правильне і при $n = k + 1$;

3) якщо обидва твердження доведені, то робимо висновок на підставі принципу математичної індукції: твердження правильне для будь-якого натурального n, $n \geq p$.

Приклад 5. Доведіть, що $2^n \geq 2n + 1$ при $n \geq 3$.

Розв'язання. Перевіримо, чи виконуються умови 1 і 2.

1) Якщо $n = 3$, нерівність набирає вигляду $2^3 \geq 2 \cdot 3 + 1$ або $8 \geq 7$.

Тому при $n = 3$ твердження виконується.

2) Нехай ця нерівність правильна при $n = k$, тобто $2^k \geq 2k + 1$, де $k \geq 3$. Доведемо, що в такому випадку має місце нерівність $2^{k+1} \geq 2(k + 1) + 1$. Оскільки $2^k \geq 2$ при довільному натуральному k, то, додавши нерівності $2^k \geq 2k + 1$ і $2^k \geq 2$, отримаємо правильну нерівність $2^k + 2^k \geq 2k + 1 + 2$ або $2^{k+1} \geq 2(k+1) + 1$.

3) Умови 1 і 2 виконуються, тому на підставі принципу математичної індукції можемо зробити висновок, що нерівність правильна для будь-якого натурального n, $n \geq 3$.

Хочете знати ще більше?

Краса методу математичної індукції полягає в тому, що його використання дає змогу за *скінченну* кількість кроків завершити доведення властивості, характерної для *нескінченної* множини натуральних чисел. Під час доведення тверджень методом математичної індукції яскраво проявляється взаємозв'язок індукції та дедукції.

Метод математичної індукції складається з трьох етапів, кожен з яких є однаково важливим і має своє особливе значення. Перший етап (доведення істинності твердження для $n = 1$) створює базу для проведення індукції. Другий етап надає право необмеженого розширення цієї бази, право переходу від даного часткового випадку до наступного, від n до $n + 1$.

Якщо не доведено першу вимогу, а доведено лише другу, тобто не створено бази для проведення індукції, то немає сенсу доводити другу, оскільки немає чого розширювати.

Якщо не доведено умову 2, то хоча базу для проведення індукції і створено (довели першу умову), право розширення цієї бази відсутнє.

На третьому етапі робиться висновок, що обидві умови принципу математичної індукції виконуються, а тому твердження є істинним для будь-якого натурального n.

Перевірте себе

1. Що таке індукція? Що таке дедукція?
2. Сформулюйте принцип математичної індукції.
3. Поясніть сутність методу математичної індукції.
4. Скільки етапів містить метод математичної індукції?
5. Які задачі розв'язують методом математичної індукції?

Виконаємо разом

1 Доведіть, що при будь-якому натуральному n число $n^3 + 35n$ ділиться на 6.

Розв'язання. 1) При $n=1$ маємо $1^3 + 35 \cdot 1 = 36$. Тобто $\left(1^3+35\right)\vdots 6$.

2) Припустимо, що умова задачі виконується при $n=k$, тобто $\left(k^3+35k\right)\vdots 6$.

Доведемо, що твердження виконується при $n=k+1$, тобто $\left((k+1)^3+35(k+1)\right)\vdots 6$. Перетворимо отриманий вираз:

$$(k+1)^3+35(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+35k+35=\left(\underbrace{k^3+35k}_{\vdots 6}+\underbrace{3k(k+1)}_{\vdots 6}+\underbrace{36}_{\vdots 6}\right)\vdots 6.$$

Оскільки кожен доданок ділиться на 6, то і сума $\left((k+1)^3+35(k+1)\right)\vdots 6$.

3) На підставі принципу математичної індукції робимо висновок, що нерівність правильна для будь-якого натурального n.

2 Доведіть, що для будь-якого $n \in N$ число $3^{2n+1}+2^{n+2}$ ділиться на 7.

Розв'язання. Доведемо дане твердження методом математичної індукції. Позначимо $a_n=3^{2n+1}+2^{n+2}$.

1) Якщо $n = 1$, то $a_1=35\vdots 7$.

2) Припустимо, що a_k ділиться на 7. Доведемо, що a_{k+1} ділиться на 7.

$$a_{k+1}=3^{2(k+1)+1}+2^{(k+1)+2}=3^{2k+1}\cdot 9+2^{k+2}\cdot 2=(3^{2k+1}+2^{k+2})\cdot 9-7\cdot 2^{k+2}=9a_k-7\cdot 2^{k+2}.$$

Останнє число ділиться на 7, оскільки є різницею двох цілих чисел, які діляться на 7.

3) На підставі принципу математичної індукції робимо висновок, що для будь-яких $n \in N$ число $3^{2n+1}+2^{n+2}$ ділиться на 7.

3 Доведіть, що сума квадратів n перших чисел натурального ряду дорівнює $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Розв'язання. Нехай $S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots n^2$. Тоді

1) $S_1=1^2=\dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=\dfrac{2\cdot 3}{6}=1.$

2) Припустимо, що рівність виконується для $n=k$, тобто $S_k=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Доведемо, що тоді рівність виконується і для $n = k + 1$, тобто $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Маємо: $S_{k+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

3) Умови 1 і 2 виконуються, тому за принципом математичної індукції рівність істинна для будь-якого натурального n.

4 Доведіть, що $2^n > n^2$ для всіх натуральних $n \geq 5$.

Розв'язання. 1) При $n = 5$ отримуємо нерівність $2^5 > 25$, або $32 > 25$, яка правильна. 2) Припустимо, що ця нерівність правильна при деякому натуральному числі $n = k$, $k \geq 5$, тобто виконується нерівність $2^k > k^2$. Користуючись цим припущенням, покажемо, що правильною є також нерівність $2^{k+1} > (k+1)^2$.

Маємо $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2$. Оскільки $2k^2 - (k+1)^2 = k^2 - 2k - 1 > 0$, при $k \geq 5$, то $2k^2 > (k+1)^2$, тобто $2^{k+1} > 2k^2 > (k+1)^2$.

3) На основі принципу математичної індукції стверджуємо, що задана в умові нерівність правильна для всіх натуральних $n \geq 5$.

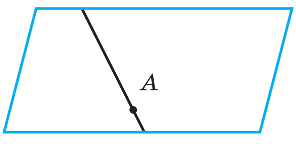
5 Доведіть, що n різних прямих, які лежать у площині і проходять через одну точку, поділяють площину на $2n$ частин.

Розв'язання. Скористаємося індукцією по кількості прямих. Нехай n — кількість прямих, що лежать у площині і проходять через одну точку. Тоді за умовою задачі ці прямі поділяють площину на $2n$ частин.

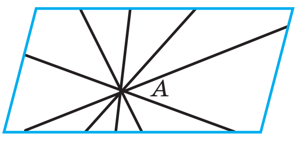
1) Перевіримо істинність твердження при $n = 1$. Якщо пряма одна, то вона ділить площину на дві частини (мал. 69) — твердження задачі істинне.

2) Припустимо істинність твердження при $n = k$, тобто k прямих поділяють площину на $2k$ частин (мал.70). Покажемо, що дане твердження істинне і при $n = k + 1$, тобто $k + 1$ пряма поділяє площину на $2(k + 1)$ частин.

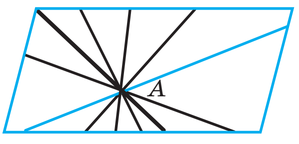
Проведемо на площині через задану точку ще одну пряму. Вона пройде між двома іншими прямими, які утворюють вертикальні кути (мал. 71) і поділить ці кути на дві частини. При цьому загальна кількість частин збільшиться на 2. Тобто якщо k прямих поділяють площину на $2k$ частин, то $k + 1$ прямих поділяють площину на $2k + 2 = 2(k + 1)$ частин.



Мал. 69



Мал. 70



Мал. 71

Виконайте усно

355. Які з тверджень правильні при $n = 1$.

а) $(n^3 - n) \vdots 6$; б) $2^n > (n + 1)^2$; в) $(n^7 - n) \vdots 42$; г) $2n + 1 < 2^n$.

356. Для яких з чисел $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ правильним є твердження «Множина, що складається з n елементів, містить 2^n підмножин?»

357. Трицифрові числа 111, 222, 333, 444, ..., 999 діляться на 3. Чи правильним є твердження:

а) усі трицифрові числа діляться на 3;

б) усі числа, що складаються з однакових цифр, діляться на 3;

в) усі числа, записані одними трійками, діляться на 3.

358. Дано твердження «Якщо n непарне число, то $7^n + 9$ ділиться на 8». Перевірте твердження для: а) $n = 0$; б) $n = 1$; в) $n = 2$; г) $n = 3$.

Рівень А

359. Німецький математик Г. Лейбніц довів, що $(n^3 - n) \vdots 3$, $(n^5 - n) \vdots 5$, $(n^7 - n) \vdots 7$. Чи правильним є твердження: а) для будь-якого натурального n і будь-якого непарного натурального k вираз $(n^k - n)$ ділиться на k; б) для будь-якого натурального n і будь-якого парного натурального k вираз $(n^k - n)$ не ділиться на k?

360. На скільки частин поділяють пряму n різних точок, що лежать на ній? Сформулюйте гіпотезу і перевірте її, зобразивши на прямій: а) 3 точки; б) 5 точок; в) 10 точок.

361. Скільки діагоналей має опуклий n-кутник? Сформулюйте гіпотезу і перевірте її, зобразивши діагоналі в: а) чотирикутнику; б) шестикутнику; в) десятикутнику.

362. Доведіть, що число $n^3 + 3n^2 + 2n$ ділиться на 6, якщо $n \in N$.

363. Доведіть, що число $a_n = 2n^3 + 3n^2 + 7n$ ділиться на 6, якщо $n \in N$.

Доведіть рівність, де $n \in N$, методом математичної індукції (364–366).

364. а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + ... + n \cdot (3n - 1) = n^2 (n + 1)$;

б) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + ... + n \cdot (3n + 1) = n \cdot (n + 1)^2$.

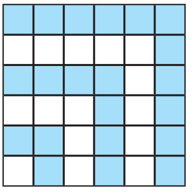
365. а) $3 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + ... + (n + 2) \cdot 2^n = (n + 1) \cdot 2^{n+1} - 2$;

б) $1^3 + 3^3 + ... + (2n - 1)^3 = n^2 \cdot (2n^2 - 1)$.

366. а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n \cdot (n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

б) $0 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 + ... + (n - 1) \cdot n^2 = \dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

367. Обчисліть суму n перших непарних чисел. Сформулюйте гіпотезу і перевірте її, використавши малюнок 72.



Мал. 72

368. Якщо n — натуральне число, то $n^2 - n$ — парне число. Доведіть.

Рівень Б

369. Доведіть, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 9.

Доведіть, що для будь-якого $n \in N$ правильним є твердження (370–372).

370. а) $4^n + 15n - 1$ кратне 9; б) $3^{2n+2} - 8n - 9$ кратне 64.

371. а) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ кратне 11; б) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ кратне 133.

372. а) $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ кратне 19;
б) $3^{2n+2} \cdot 5^{2n} - 3^{3n+2} \cdot 2^{2n}$ кратне 1053.

Доведіть, що для будь-якого $n \in N$ виконуються рівності (373–374).

373. а) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n^2}{(2n+1)}$;

б) $\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}+\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+1)}{n+2}$.

374. а) $1+18+75+\ldots+n(2n-1)^2=\frac{n(n+1)(6n^2-2n-1)}{6}$;

б) $1+12+45+\ldots+n^2(2n-1)=\frac{n(n+1)(3n^2+n-1)}{6}$.

Доведіть нерівність методом математичної індукції (375–377).

375. а) $2^n > n(n+4)$, $n \in N$, $n > 5$; б) $2^n > n^2 + n + 1$, $n \in N$, $n > 4$.

376. а) $3^n > 5n^2$, $n \in N$, $n > 3$; б) $2^n > n^3$, $n \in N$, $n > 9$.

377. а) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$; б) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$.

378. Доведіть методом математичної індукції, що сума S_n внутрішніх кутів будь-якого опуклого многокутника дорівнює $180^0\cdot(n-2)$, де n — число сторін цього многокутника.

379. На скільки трикутників можна розбити n-кутник його діагоналями, що не перетинаються?

Рівень В

380. Доведіть, що для будь-якого $n \in N$ правильним є твердження:
а) $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ кратне 24; б) $n\ (2n^3 - 3n^2 + n)$ кратне 6.

381. Доведіть, що для будь-якого $n \in N$ виконуються рівності:

а) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}$;

б) $\frac{1}{2\cdot 5\cdot 8}+\frac{1}{5\cdot 8\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)(3k+5)}=\frac{3k^2+7k}{20(3k+2)(3k+5)}$.

Доведіть нерівність методом математичної індукції (382–383).

382. а) $\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$, $n \in N$, $n \ge 2$; б) $2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! > ((n+1)!)^n$, $n \ge 2$.

383. а) $\left|a_1+a_2+\ldots+a_n\right| \le \left|a_1\right|+\left|a_2\right|+\ldots+\left|a_n\right|$; б) $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n}$;

в) $(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\cdot(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2) \ge \left(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\right)^2$.

Знайдіть суму (384–385).

384. а) $2^2 + 4^2 + 6^2 +\ldots+ (2n)^2$; б) $1\cdot2 + 2\cdot5 + 3\cdot8 +\ldots+ n(3n - 1)$.

385. а) $\dfrac{1}{5\cdot11}+\dfrac{1}{11\cdot17}+\ldots+\dfrac{1}{(6k-1)(6k+5)}$; б) $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}\ldots+\dfrac{1}{n!}$.

Знайдіть добуток (386–387).

386. а) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot\ldots\cdot (2n - 1)$; б) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}$.

387. а) $\left(1-\dfrac{4}{1}\right)\left(1-\dfrac{4}{9}\right)\left(1-\dfrac{4}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{4}{(2n-1)^2}\right)$;

б) $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{2}{3}\right)\left(1+\dfrac{3}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{n}{n+1}\right)$.

388. Доведіть, що число $2^{3^n}+1$ ділиться на 3^{n+1} і не ділиться на 3^{n+2} при будь-якому $n\in N$.

389. Число $a+\dfrac{1}{a}$ — ціле. Доведіть, що для всіх натуральних n число $a^n+\dfrac{1}{a^n}$ — теж ціле.

390. Доведіть нерівність $\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+\ldots+\sqrt{c}}}} < \dfrac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$ (n коренів).

391. У площині проведено n прямих, з яких жодні дві не є паралельними і жодні три не проходять через одну точку. Доведіть, що ці прямі розбивають площину на $1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$ частин.

392. У просторі проведено n площин, що проходять через одну точку так, що жодні три з них не проходять через одну пряму. Доведіть, що ці площини розбивають простір на $2 + n(n - 1)$ частин.

Вправи для повторення

393. Розв'яжіть рівняння: а) $x^5 + 4x^3 - 5x = 0$; б) $x^3 + x - 2 = 0$.

394. Розв'яжіть нерівність:

а) $x^2 - 4 > 0$;

б) $x^2 + 3x - 18 \le 0$;

в) $x^2 + 10x \ge 0$;

г) $(x - 1)^2(x + 3)(x - 2) \ge 0$.

395. Побудуйте графік функції:

а) $y = (x - 2)^2 - 3$;

б) $y=\dfrac{6}{x+4}+2$;

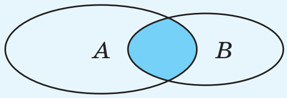
в) $y=(x+2)^2+3$;

г) $y=\dfrac{6}{x-4}-2$.

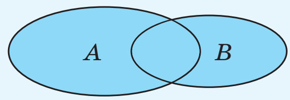
Скарбничка досягнень

✓ Можу пояснити, що таке переріз і об'єднання множин.

Переріз множин $A \cap B$



Об'єднання множин $A \cup B$



✓ Умію будувати графіки функцій та за їх допомогою знаходити:
область визначення функції як проекцію її графіка на вісь x;
область значень функції як проекцію її графіка на вісь y

✓ Знаю, що таке:

нулі функції $y = f(x)$:	$f(x) = 0$
проміжки знакосталості функції $y = f(x)$:	$f(x) > 0$ або $f(x) < 0$

✓ Знаю, які функції називають:

зростаючими ↗	спадними ↘
$x_1 < x_2$	$x_1 < x_2$
$f(x_1) < f(x_2)$	$f(x_1) > f(x_2)$

✓ Можу визначити за графіком найбільше і найменше значення функції.

✓ Знаю, що існують функції парні, непарні і ні парні, ні непарні.
Якщо областю визначення функції є множина, симетрична відносно 0 і:
1) $f(-x) = f(x)$, то функція $y = f(x)$ — *парна*;
2) $f(-x) = -f(x)$, то функція $y = f(x)$ — *непарна*

✓ Знаю і вмію використовувати:

Теорему Безу

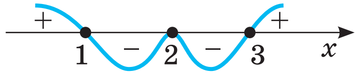
Остача від ділення многочлена $F(x)$ на двочлен $x - a$ дорівнює $F(a)$

Властивість

Якщо ціле раціональне рівняння з цілими коефіцієнтами має цілі корені, то вони є дільниками вільного члена

✓ Умію розв'язувати нерівності методом інтервалів:

$$(x-1)(x-2)^2(x-3) \geq 0$$



✓ Знаю і вмію використовувати *принцип математичної індукції*.

Якщо деяке твердження істинне для $n = 1$ і з припущення, що воно істинне для довільно вибраного натурального числа $n = k$, випливає його істинність і для $n = k + 1$, то це твердження істинне для всіх натуральних n

✓ Умію розв'язувати простіші задачі з параметрами

Перевіряємо набуті компетентності

Тестові завдання № 1

1 A — множина цілих чисел, які належать проміжку $[-1; 2]$, B — множина цілих чисел, які належать проміжку $(-2; 1)$. Знайдіть $A \cap B$.

А	Б	В	Г
$\{-1; 0; 1\}$	$\{-1; 0\}$	$\{-2; -1; 0; 1; 2\}$	$[-1; 1)$

2 Скільки цілих розв'язків має нерівність $(x^2-1)(x^2+1)\le 0$?

А	Б	В	Г
один	два	три	чотири

3 Яка з функцій є парною?

А	Б	В	Г
$y = x^2 + x$	$y = x^2 - 2x$	$y = x^4 - 2x^2$	$y = x^3 - x$

4 Знайдіть найбільше значення функції $y = -x^2 - 2x + 5$.

А	Б	В	Г
2	4	6	8

5 На якому проміжку зростає функція $y = x^2 + 4$?

А	Б	В	Г
$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$(4; +\infty)$	$(-\infty; 4)$

6 Знайдіть область визначення функції $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$.

А	Б	В	Г
$(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$	$[-2; 2]$	$(-2; 2)$	$[-2; 0)\cup(0; 2]$

7 На який двочлен ділиться націло многочлен $x^6 - x^5 - x^4 - 7x^3 - 8$?

А	Б	В	Г
$x - 3$	$x - 1$	$x + 3$	$x + 1$

8 Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності
$(x + 1)(x - 2)(x - 3)^2 \le 0$.

А	Б	В	Г
$[-1; 2]$	2	$(-\infty; -1)\cup[2; 3]$	3

9 Знайдіть остачу від ділення многочлена $x^5 - 2x^4 + 7x^3 - 8$ на двочлен $x - 2$.

А	Б	В	Г
44	48	39	56

10 При яких значеннях параметра a рівняння $|x^2-3x-5|=a-2$ не має розв'язків?

А	Б	В	Г
$a = 2$	$a > 2$	$a < 2$	$a \ne \pm 2$

Типові завдання до контрольної роботи № 1

1 Побудуйте круг радіуса 1,5 см і квадрат зі стороною 2 см, одна з вершин якого лежить у центрі круга. Нехай A — множина точок площини, які належать кругу, а B — множина точок площини, які належать квадрату. Зобразіть:

а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$.

2 Розв'яжіть рівняння:

а) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$;

б) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$.

3 Розв'яжіть нерівність:

а) $(x - 1)(x + 3)(x - 5) > 0$; б) $\dfrac{x^2-2x-3}{x+2} \le 0$.

4 Знайдіть область визначення функції

а) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+4x-5}}{8-x^3}$;

б) $y = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+4x+3}} + \dfrac{4x+x^2}{2x^2+7x}$.

5 Побудуйте графік функції $y = (x - 3)^2 - 4$. Для даної функції знайдіть:

а) область визначення;

б) множину значень;

в) нулі та проміжки знакосталості;

г) проміжки монотонності;

ґ) найбільше та найменше значення.

6 Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{x^4-5x^3+5x^2+5x-6}{(x^3-6x^2+3x+10)(x^2-4x+3)}$;

б) $\dfrac{(x^2-3x+2)(x^5+2x^3-x^2-2)}{(x^4-5x^2+4)\ (x^2+x+1)}$.

7 Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності:

а) $\dfrac{4x-1}{2x-3} \ge 3$; б) $(x^2 - 4)(x^2 - 6x + 8) < 0$.

8 Доведіть, що для будь-якого $n \in N$ виконується рівність:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

9 При яких значеннях параметра a нерівність $x^2 - (a + 2)x + 4 > 0$ виконується для всіх $x \in R$?

10 Скільки коренів залежно від параметра a має рівняння $\sqrt{2x-a}(x^2-(3a-4)x+2a^2-9a-5)=0$? Знайдіть ці корені.

Розділ 2

СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

Degree Function

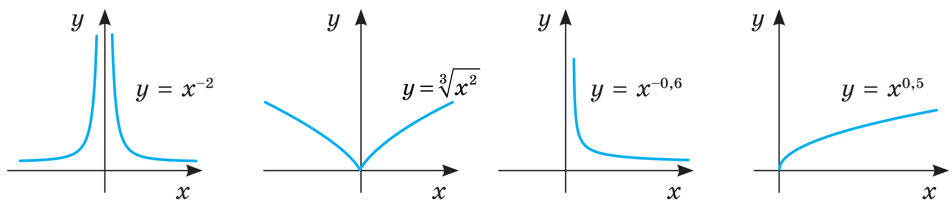
Стефан БАНАХ
(1892–1945)

Видатний український та польський математик, професор Львівського університету та Львівської політехніки, співзасновник Львівської математичної школи, президент польського математичного товариства. Один із творців сучасного функціонального аналізу.

Його ім'ям названо низку математичних теорем і понять: «банахів простір», «банахова алгебра», «інтеграл Банаха». Наукові відкриття Банаха з функціонального аналізу і теорії функцій — золотий фонд математики XX ст.

«Математик — це той, хто вміє знаходити аналогії між твердженнями; кращий математик — той, хто встановлює аналогії доведень; сильніший математик — той, хто помічає аналогії теорій; але можна собі уявити й такого, хто між аналогіями бачить аналогії».

С. Банах



НАБУВАЄМО ДОСВІДУ ТА КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ

- Корінь n-го степеня та його властивості. Перетворення виразів з коренями
- Функція $y = \sqrt[n]{x}$ та її графік.
- Степінь з раціональним показником, його властивості. Перетворення виразів, які містять степінь
- Степенева функція та її властивості
- Ірраціональні рівняння
- Ірраціональні нерівності

- Формулювати означення та властивості кореня n-го степеня і степеня з раціональним показником
- Обчислювати, оцінювати та порівнювати значення виразів, які містять корені та степені з раціональними показниками
- Зображувати графік степеневої функції
- Розв'язувати ірраціональні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами
- Застосовувати властивості функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей

Навчальний проект № 2. **МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ СТЕПЕНЕВИМИ ФУНКЦІЯМИ**

§ 8 Корені *n*-го степеня

Nth Degree Roots

Пригадаємо, що таке квадратний корінь і його арифметичне значення. *Квадратним коренем з числа a* називають число, квадрат якого дорівнює a. З додатного числа квадратних коренів існує два. Наприклад, числа 7 і −7 — квадратні корені з числа 49, оскільки $7^2 = 49$ і $(-7)^2 = 49$. Невід'ємне значення квадратного кореня з числа a називають арифметичним значенням квадратного кореня з числа a і позначають символом $\sqrt{a}$. Друге значення квадратного кореня з числа a дорівнює $-\sqrt{a}$. Квадратний корінь з числа 0 дорівнює 0. Квадратного кореня з від'ємного числа не існує.

Квадратний корінь називають ще *коренем другого степеня*.

Подібно до коренів другого степеня існують також корені третього, четвертого, ..., n-го степеня.

Коренем n-го степеня з числа a **називають число, n-й степінь якого дорівнює a.**

Наприклад, корінь третього степеня з числа 8 дорівнює 2, бо $2^3 = 8$.

Числа 2 і −2 — корені 4-го степеня з числа 16, бо $2^4 = 16$ і $(-2)^4 = 16$.

Невід'ємний корінь n-го степеня з невід'ємного числа a називають *арифметичним коренем n-го степеня з числа a* і позначають $\sqrt[n]{a}$.

У виразі $\sqrt[n]{a}$. a — підкореневий вираз, $\sqrt{}$ — знак кореня, n — показник кореня. Залежно від показників корені бувають другого, третього і вищих степенів. Показник кореня — завжди число натуральне; замість $\sqrt[2]{a}$ пишуть $\sqrt{2}$.

Якщо показник кореня n — число непарне, то при кожному значенні a значення кореня n-го степеня з числа a існує, і його також позначають $\sqrt[n]{a}$.

Якщо n — число парне, то: 1) при від'ємних значеннях a значення $\sqrt[n]{a}$. не існує; 2) при додатних значеннях a коренів n-го степеня з числа a існує два: $\sqrt[n]{a}$ і $-\sqrt[n]{a}$.

Зверніть увагу! Символ $\sqrt[n]{a}$ використовують тільки для позначення арифметичного кореня та кореня непарного степеня з числа a.

Якщо $\sqrt[n]{a}$ існує, то згідно з означенням $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Приклади. $\sqrt[3]{64} = 4$, бо $4^3 = 64$; $\sqrt[3]{-64} = -4$, бо $(-4)^3 = -64$; $\sqrt[4]{81} = 3$, бо $3^4 = 81$, $\sqrt[4]{-81}$ — не існує.

Обчислення значень коренів n-го степеня з чисел називають *добуванням коренів* із цих чисел. З деяких чисел корені можна добувати усно, з інших — користуючись калькулятором або таблицями.

Якщо натуральне число n парне, то $\sqrt[n]{x}$ — це *арифметичний корінь* з числа $x \geq 0$, тобто невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює x. У цьому випадку область визначення виразу $\sqrt[n]{x}$ — множина всіх невід'ємних дійсних чисел. При непарному натуральному n вираз $\sqrt[n]{x}$ має зміст і тоді, коли число x від'ємне. Знайдемо, наприклад, якою є область визначення виразу: а) $\sqrt[3]{x-5}$; б) $\sqrt[4]{x+7}$.

а) Показник кореня 3 — число непарне, тому підкореневий вираз $x - 5$ може бути будь-яким дійсним числом. Отже, $x \in R$;

б) показник кореня 4 — число парне, тому даний вираз має значення тільки тоді, коли підкореневий вираз невід'ємний: $x + 7 \geq 0$, звідси $x \geq -7$. Отже, $x \in [-7; +\infty)$.

Для арифметичних коренів і довільних натуральних показників коренів n і k справджуються властивості, подібні до властивостей квадратних коренів:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; 2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; 3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$; 4) $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$; 5) $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$

Довести ці властивості коренів n-них степенів можна подібно до того, як у 8 класі доводили відповідні властивості квадратних коренів. Доведемо першу властивість (її називають *основною властивістю коренів*).

1. Якщо a і b — довільні невід'ємні числа, то числа $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{ab}$, і $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ також невід'ємні. Крім того,

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab.$$

Отже, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ — невід'ємне число, n-ний степінь якого дорівнює ab, тобто $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Подібним способом можна довести і другу властивість.

Властивості 2–5 доведіть самостійно.

Теорему про корінь із добутку можна поширити на три і більше множників. Справді, якщо числа a, b і c невід'ємні, то

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{(ab) \cdot c} = \sqrt[n]{ab} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}.$$

Властивості 1 і 2 при непарних n мають місце і для від'ємних чисел a і b.

Якщо в доведених тотожностях поміняти місцями їх ліві й праві частини, дістанемо: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.

Ці тотожності показують, як можна виконувати дії з коренями.

Зверніть увагу! $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$; $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$.

Приклади.

$$\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 6; \quad \frac{5\sqrt[3]{16}}{6\sqrt[3]{250}} = \frac{5}{6} \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{250}} = \frac{5}{6} \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{3};$$

$$\left(2\sqrt[4]{9}\right)^6 = 2^6 \cdot \left(\sqrt[4]{9}\right)^6 = 64 \cdot \left(\sqrt{9}\right)^3 = 64 \cdot 3^3 = 1728.$$

Якщо треба перемножити вирази з різними показниками, то їх зводять до одного показника, користуючись формулою $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$ $(a \geq 0)$.

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[3\cdot4]{2^4}\cdot\sqrt[4\cdot3]{3^3}=\sqrt[12]{2^4\cdot3^3}=\sqrt[12]{432}.$$

Дії додавання і віднімання виконують з *подібними коренями* (у яких показники коренів і підкореневі вирази однакові).

Наприклад: а) $2\sqrt[3]{17}+3\sqrt[3]{17}=5\sqrt[3]{17}$; б) $a\sqrt[4]{17}-2a\sqrt[4]{17}+3a\sqrt[4]{17}=2a\sqrt[4]{17}$.

Розглянемо ще деякі перетворення виразів з коренями (за умови, що $a>0$, $b>0$).

Винесення множника за знак кореня. У загальному вигляді (при додатних значеннях a і b) це перетворення виконують у такий спосіб:

$$\sqrt[n]{a^n b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=a\sqrt[n]{b}.$$

Приклади.

$$\sqrt[4]{810}=\sqrt[4]{81\cdot10}=\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{10}=3\sqrt[4]{10};$$

$$\sqrt[5]{64a^7b^{10}}=\sqrt[5]{32\cdot a^5\cdot(b^2)^5\cdot2\cdot a^2}=\sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{a^5}\cdot\sqrt[5]{(b^2)^5}\cdot\sqrt[5]{2a^2}=$$
$$=2\cdot a\cdot b^2\cdot\sqrt[5]{2a^2}=2ab^2\cdot\sqrt[5]{2a^2}.$$

Внесення множника під знак кореня. Це перетворення обернене до попереднього. При додатних значеннях a і b маємо:

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}.$$

Приклади.

$$5\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{5^3\cdot4}=\sqrt[3]{500};$$

$$2a^3b\sqrt[4]{ab^3}=\sqrt[4]{(2a^3b)^4}\cdot\sqrt[4]{ab^3}=\sqrt[4]{16a^{12}\cdot b^4\cdot a\cdot b^3}=\sqrt[4]{16a^{13}\cdot b^7};$$

$$a\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{a}}=\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{a}}=\sqrt[3]{\frac{2\cdot a^3}{a}}=\sqrt[3]{2a^2}.$$

Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу. У загальному вигляді ($a>0$, $m<n$) це перетворення виконують так:

$$\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}}=\frac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}.$$

Щоб звільнитися від ірраціональності, іноді доцільно скористатися такими тотожностями:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b;$$

$$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a+b;$$

$$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a-b.$$

Приклади.

$$\frac{15}{\sqrt[4]{3}}=\frac{15\cdot\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{3^3}}=\frac{15\cdot\sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{3^4}}=\frac{15\cdot\sqrt[4]{27}}{3}=5\sqrt[4]{27};$$

$$\frac{b}{\sqrt[3]{2ab^2}}=\frac{b\cdot\sqrt[3]{2^2\cdot a^2b}}{\sqrt[3]{2ab^2}\cdot\sqrt[3]{2^2a^2b}}=\frac{b\sqrt[3]{4a^2b}}{\sqrt[3]{2ab^2\cdot4a^2b}}=\frac{b\sqrt[3]{4a^2b}}{2ab}=\frac{\sqrt[3]{4a^2b}}{2a};$$

Перетворюючи ірраціональні вирази зі змінними, слід бути досить обережним, розглядаючи окремо випадки, коли основи степенів підкореневих виразів можуть бути від'ємними.

Приклади.

1. Спрощуючи вираз $\sqrt[8]{(5-x)^2}$, не можна формально скоротити показники степеня і кореня і замінити його виразом $\sqrt[4]{(5-x)}$. Адже перший з цих виразів визначений при всіх дійсних значеннях x, а другий — тільки при $x \le 5$. Треба писати $\sqrt[8]{(5-x)^2} = \sqrt[4]{|5-x|} = \begin{cases} \sqrt[4]{5-x}, \text{якщо } x \le 5, \\ \sqrt[4]{x-5}, \text{якщо } x > 5. \end{cases}$

2. Нехай у виразі $\frac{x}{c^2}\sqrt[4]{\frac{c}{x}}$ треба внести під знак кореня множник, що стоїть перед ним. Вважають, що даний вираз має зміст, тому можливі два випадки.

1) Якщо $x > 0$ і $c > 0$, то даний вираз додатний, отже,

$$\frac{x}{c^2}\cdot\sqrt[4]{\frac{c}{x}} = \sqrt[4]{\frac{x^4}{c^8}\cdot\frac{c}{x}} = \sqrt[4]{\frac{x^3}{c^7}}.$$

2) Якщо $x < 0$ і $c < 0$, то даний вираз від'ємний, тому

$$\frac{x}{c^2}\cdot\sqrt[4]{\frac{c}{x}} = -\sqrt[4]{\frac{x^4}{c^8}\cdot\frac{c}{x}} = -\sqrt[4]{\frac{x^3}{c^7}}.$$

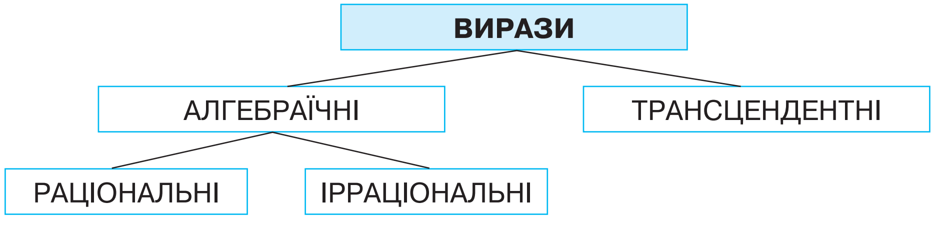
Хочете знати ще більше?

Вводячи символи $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, ... $\sqrt[n]{\ }$, ми тим самим розширюємо множину відомих вам виразів.

Тому є потреба ввести кілька нових назв. Якщо вираз, крім чисел, змінних, дужок і знаків дій додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня з раціональним показником або добування кореня, не містить нічого іншого, його називають *алгебраїчним виразом*. Алгебраїчний вираз, який містить корені, називається *ірраціональним виразом*. Усі інші відомі вам алгебраїчні вирази — *раціональні*.

Вирази з числами або змінними, які не є алгебраїчними, називаються *трансцендентними*.

Зв'язки між названими видами виразів показано на малюнку 73.



Мал. 73

Перевірте себе

1. Що називають коренем n-го степеня з числа a?
2. Що називають коренем п'ятого степеня з числа a?
3. Який знак має корінь непарного степеня:
   а) з додатного числа; б) з від'ємного числа?
4. Яким правилом треба скористатися при визначенні знака кореня непарного степеня?
5. Що називають арифметичним значенням кореня (або арифметичним коренем)?
6. Сформулюйте властивості кореня n-го степеня.

Виконаємо разом

1 Обчисліть значення виразу: а) $2\sqrt{64}+5\sqrt[3]{64}$; б) $\sqrt[6]{2\frac{1}{4}}:\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$; в) $\sqrt[3]{(-2)^6}$.

Розв'язання. а) $2\sqrt{64}+5\sqrt[3]{64}=2\cdot 8+5\cdot 4=36$;

$$\text{б) } \sqrt[6]{2\frac{1}{4}}:\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=\sqrt[6]{\frac{9}{4}}:\sqrt[6]{\left(\frac{4}{9}\right)^2}=\sqrt[6]{\frac{9}{4}}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{9}{4}\right)^2}=\sqrt[6]{\left(\frac{9}{4}\right)^3}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2};$$

$$\text{в) } \sqrt[3]{(-2)^6}=\sqrt[3]{(-2)^{2\cdot 3}}=\sqrt[3]{4^3}=4.$$

2 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу: а) $\frac{n}{\sqrt[5]{n^2}}$; б) $\frac{a+x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. а) $\frac{n}{\sqrt[5]{n^2}}=\frac{n\cdot\sqrt[5]{n^3}}{\sqrt[5]{n^2}\cdot\sqrt[5]{n^3}}=\frac{n\sqrt[5]{n^3}}{\sqrt[5]{n^5}}=\frac{n\sqrt[5]{n^3}}{n}=\sqrt[5]{n^3}$;

$$\text{б) } \frac{a+x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}}=\frac{(a+x)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{a+x}=\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}.$$

3 Спростіть вираз $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

Розв'язання. Спробуємо вираз $11-6\sqrt{2}$ записати у вигляді квадрата двочлена.

Запишемо $6\sqrt{2}$ як подвоєний добуток двох чисел, сума квадратів яких дорівнює 11. Отримаємо:

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{9-2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+2}=\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}=\left|3-\sqrt{2}\right|=3-\sqrt{2}.$$

4 Скоротіть дріб $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}$.

Розв'язання. Вираз у чисельнику запишемо як різницю квадратів чисел $\sqrt[4]{a}$ і $\sqrt[4]{b}$, а у знаменнику — як квадрат суми цих чисел.

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2}=\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}.$$

Виконайте усно

Обчисліть (396–398).

396. а) $\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[4]{0,0016}$; в) $\sqrt[5]{32}$; г) $\sqrt[3]{-125}$; ґ) $\sqrt[5]{32^{-5}}$; д) $-\sqrt[3]{-0,008}$.

397. а) $\sqrt[3]{8000}$; б) $\sqrt[4]{625}$; в) $\sqrt[3]{-1000}$; г) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{8}}$; ґ) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{8}}$; д) $\sqrt[5]{-0,00001}$.

398. а) $\left(\sqrt[3]{12}\right)^3$; б) $\sqrt[6]{7^6}$; в) $\sqrt[8]{9^4}$; г) $\left(\sqrt{13}\right)^2$; ґ) $-\sqrt[4]{9^4}$; д) $\sqrt[4]{(-9)^4}$.

399. Що більше: а) $\left(\sqrt[8]{90}\right)^8$ чи $\left(\sqrt[9]{85}\right)^9$; б) $\sqrt[6]{11^2}$ чи $\left(\sqrt[6]{11}\right)^2$; в) $\sqrt[9]{6}$ чи $\sqrt[18]{36}$?

400. Знайдіть ребро куба, якщо його об'єм дорівнює:
а) 1 дм^3; б) 27 см^3; в) 64 мм^3; г) 0,008 м^3; ґ) 0,216 м^3.

401. Обчисліть значення виразу:
а) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[4]{7^5}:\sqrt[4]{7}$; в) $\left(\sqrt[6]{9}\right)^3$; г) $\sqrt[3]{(-3)^6}$.

Рівень А

402. Чому дорівнює арифметичний квадратний корінь з числа:
а) 0,81; б) 0,25; в) 2,25; г) 1,21; ґ) $\dfrac{36}{169}$; д) $\dfrac{144}{289}$; е) $\dfrac{169}{100}$; є) $\dfrac{81}{256}$?

403. Знайдіть арифметичний корінь четвертого степеня з числа:
а) 0; б) 1; в) 16; г) 0,0016; ґ) $\dfrac{16}{81}$; д) $\dfrac{256}{625}$; е) 0,0001; є) 0,1296.

404. Чому дорівнює кубічний корінь з числа:
а) 216; б) 64; в) 343; г) 8; ґ) $\dfrac{1}{27}$; д) 0,027; е) 0,001; є) $\dfrac{64}{125}$?

Обчисліть (405–409).

405. а) $\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[3]{64}$; в) $\sqrt[3]{-125}$; г) $\sqrt[3]{0,008}$; ґ) $\sqrt[3]{0,000216}$; д) $\sqrt[4]{625}$; е) $\sqrt[4]{2401}$.

406. а) $\sqrt[5]{32}$; б) $\sqrt[5]{1024}$; в) $\sqrt[5]{243}$; г) $\sqrt[5]{0,03125}$;
ґ) $\sqrt[5]{100\,000}$; д) $\sqrt[5]{0,00001}$; е) $\sqrt[6]{0,046656}$.

407. а) $\sqrt[3]{-1000}$; б) $\sqrt[5]{-3125}$; в) $\sqrt[3]{-64}$; г) $\sqrt[5]{-1024}$; ґ) $\sqrt[5]{-0,00032}$; д) $\sqrt[3]{-64}$.

408. а) $3\sqrt[4]{16}-4\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[4]{81}-2\sqrt[3]{1}$; в) $3\sqrt{16}+\sqrt[7]{0}$; г) $\sqrt[4]{16^{-1}}-\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}}$.

409. а) $\sqrt[3]{(-2)^6}$; б) $\sqrt[3]{(-4)^9}$; в) $\left(\sqrt[5]{12}\right)^{10}$; г) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^{12}$; ґ) $\left(\sqrt{3}\right)^4$; д) $\left(\sqrt[4]{5}\right)^8$.

Спростіть вираз (410–412).

410. а) $\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$; б) $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)$; в) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$; г) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)^2$.

411. а) $\left(2\sqrt{3}+4\right)\left(2\sqrt{3}-4\right)$; б) $\left(3\sqrt{5}-2\right)\left(3\sqrt{5}+2\right)$; в) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2$; г) $\left(1-\sqrt{3}\right)^2$.

412. а) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$; в) $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$; ґ) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}$; е) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{4}}$;
б) $\sqrt{\sqrt{a}}$; г) $\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}$; д) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{m^2}}$; є) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{y^4}}$.

413. Установіть відповідність між виразами з коренями **(1–4)** та їхніми значеннями **(А–Д)**.

1	$\sqrt[3]{27}+\sqrt[5]{32}$	**А**	6
2	$\sqrt[4]{144}\cdot\sqrt{3}$	**Б**	4
3	$\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}}-\sqrt[4]{\dfrac{1}{625}}$	**В**	$-\dfrac{1}{2}$
4	$\sqrt[3]{2\dfrac{10}{27}}\cdot\sqrt[3]{-3\dfrac{3}{8}}+\sqrt{2,25}$	**Г**	$\dfrac{1}{5}$
		Д	5

414. Винесіть множник з-під знака кореня ($a \geq 0$, $b \geq 0$):

а) $\sqrt[3]{3000}$; в) $\sqrt[4]{48}$; ґ) $\sqrt[5]{486}$; е) $\sqrt[4]{324}$;

б) $\sqrt[4]{162a^6}$; г) $\sqrt[3]{32a^5b^3}$; д) $\sqrt[6]{a^6b^7}$; є) $\sqrt[5]{a^{11}b^8}$.

415. Внесіть множник під знак кореня ($a \geq 0$, $b \geq 0$):

а) $3\sqrt[3]{3}$; в) $2\sqrt[4]{3}$; ґ) $2\sqrt[5]{0,25}$; е) $a\sqrt[8]{2}$;

б) $ab\sqrt[4]{5a}$; г) $a^2\sqrt[3]{ab}$; д) $3a\sqrt[4]{2b}$; є) $0,5b\sqrt[5]{(2b)^3}$.

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу (416–418).

416. а) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$; б) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$; в) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{8}}$; г) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9}}$.

417. а) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$; б) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9a}}$; в) $\dfrac{10a}{\sqrt[5]{a^2}}$; г) $\dfrac{6ab^2}{\sqrt[5]{8b}}$.

418. а) $\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{12}{3-\sqrt{3}}$; в) $\dfrac{18}{\sqrt{7}-1}$; г) $\dfrac{8}{\sqrt{5}+1}$.

Розв'яжіть рівняння (419–420).

419. а) $x^2 = 64$; б) $x^2 = 0,49$; в) $x^2 = 121$; г) $x^3 = 125$; ґ) $x^3 = 0,008$.

420. а) $x^3 = -1$; б) $x^3 = -64\,000$; в) $x^4 = 256$; г) $x^5 = 32$; ґ) $x^4 = -16$.

Рівень Б

421. Обчисліть:

а) $\sqrt[4]{1296}$; б) $\sqrt[4]{2401}$; в) $\sqrt[6]{15\,625}$; г) $\sqrt[12]{4096}$.

Обчисліть значення виразу (422–427).

422. а) $\sqrt[5]{32}+\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[4]{625}-\sqrt[3]{-125}$; в) $12-6\sqrt[3]{0,125}$; г) $1+10\sqrt[4]{0,0081}$.

423. а) $\sqrt{9}+\sqrt{4}-\sqrt[6]{64}$; б) $\sqrt{36}-\sqrt[4]{16}$; в) $\sqrt{0,81}+\sqrt[3]{0,001}$; г) $\sqrt[3]{0,027}-\sqrt{0,04}$.

424. а) $1-\sqrt[4]{256}$; б) $7+\sqrt[3]{8}-\sqrt[7]{128}$; в) $\sqrt[3]{-27}$; г) $\sqrt[3]{-27}+\sqrt[4]{81}$.

425. а) $\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[4]{4}$; б) $\sqrt[3]{0,09}\cdot\sqrt[3]{0,3}$; в) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}$; г) $\sqrt[5]{2^3\cdot5^4}\cdot\sqrt[5]{2^2\cdot5^6}$.

426. а) $\sqrt[3]{27\cdot 64}$; б) $\sqrt[4]{625\cdot 16}$; в) $\sqrt[5]{32\cdot 5^{10}}$; г) $\sqrt[3]{0{,}027\cdot 343}$.

427. а) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{135}}$; б) $\dfrac{\sqrt[6]{2^{10}\cdot 3^{15}}}{\sqrt[6]{2^4\cdot 3^3}}$; в) $\sqrt[4]{\dfrac{3^{10}\cdot 125}{5^7\cdot 9^3}}$; г) $\sqrt[6]{\dfrac{2^{20}\cdot 5^{10}}{5^2\cdot 10^2}}$; ґ) $\sqrt[7]{6^3\cdot 5^5}\cdot\sqrt[7]{36\cdot 5^2}\cdot\sqrt[7]{6^2\cdot 128}$.

Спростіть вираз (428–430).

428. а) $\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{4}$; в) $\left(2-\sqrt[4]{3}\right)^2+4\sqrt[4]{3}$;

б) $\left(2+\sqrt[3]{3}\right)^2+\left(2-\sqrt[3]{3}\right)^2$; г) $\left(\sqrt{5}-1\right)^3-\left(\sqrt{5}+1\right)^3$.

429. а) $\sqrt[4]{ab}\left(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3}\right)$; в) $\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^4}\right)$;

б) $\left(2+\sqrt[3]{3}\right)^2+\left(2-\sqrt[3]{3}\right)^2$; г) $\left(\sqrt[4]{a^2x}-\sqrt[4]{ax^2}\right):\sqrt[4]{ax}$.

430. а) $\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{8}\right)\cdot\sqrt{2}+2\left(\sqrt[6]{2}-1\right)$; б) $\left(3\sqrt{10}-2\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{25}\right)\cdot\sqrt[4]{25}-15\sqrt{2}$.

Винесіть множник за знак кореня ($a > 0$, $x < 0$, $y < 0$) (431–432).

431. а) $\sqrt[3]{81x^7a^9}$; б) $\sqrt[4]{320a^5x^{16}y^{10}}$; в) $\sqrt[5]{320a^5x^6y^{19}}$.

432. а) $\sqrt[6]{a^6x^7y^9}$; б) $\sqrt[4]{405a^{15}x^5y^7}$; в) $\sqrt[5]{96a^{15}x^6y^{19}}$.

Внесіть множник під знак кореня ($a > 0$, $x < 0$, $y < 0$) (433–434).

433. а) $2a^2x\sqrt[3]{0{,}25ax^2}$; б) $3x^3y\sqrt[4]{2a^5xy}$; в) $ax\sqrt[8]{a^5x^6y^4}$.

434. а) $3x^2y^5\sqrt[6]{a^4xy^3}$; б) $-2ay^3\sqrt[4]{5a^2x^3y}$; в) $a^3y\sqrt[5]{6a^3xy}$.

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу (435–437).

435. а) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{ab^2}}$; б) $\dfrac{m}{n\sqrt[5]{m^3n}}$; в) $\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x-1}}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$.

436. а) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}+2}$; б) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1}$; в) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}-6\sqrt[3]{a}+9}$.

437. а) $\dfrac{25}{\sqrt[3]{17}+2}$; б) $\dfrac{30}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$; в) $\dfrac{30}{\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}}$.

Розв'яжіть рівняння (438–439).

438. а) $x^2=11$; б) $x^4=19$; в) $x^8=27$; г) $x^3=25$; ґ) $x^7=27$; д) $x^9=-2$.

439. а) $\sqrt{x}=0$; б) $\sqrt[3]{x}=1$; в) $\sqrt[4]{x}=2$; г) $\sqrt[5]{x}=3$; ґ) $\sqrt[4]{x}=-3$; д) $\sqrt[3]{x}=-2$.

Спростіть вираз (440–446).

440. а) $\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$; б) $\sqrt[3]{\left(3-2\sqrt{7}\right)^3}$; в) $\sqrt[6]{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^6}$; г) $\sqrt[4]{\left(4-3\sqrt{2}\right)^4}$.

441. а) $\sqrt[3]{\left(3-\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$; б) $\sqrt[4]{\left(3-\sqrt{7}\right)^4}-\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}$.

442. а) $\left(\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2$; б) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$.

443. а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{17-6\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$.

444. а) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{18-8\sqrt{2}}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}$.

445. а) $\sqrt[4]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+1}$; б) $\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[10]{7-4\sqrt{3}}$.

446. а) $\left(\sqrt{4-\sqrt[6]{8}}-\sqrt{4+\sqrt[6]{8}}\right)^2$; б) $\left(\sqrt[4]{\left(2\sqrt{10}+7\right)^2}+\sqrt[4]{\left(2\sqrt{10}-7\right)^2}\right)^2$.

Розкладіть на множники (447–448).

447. а) $x-\sqrt{x}$; б) $\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}$; в) $\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}$; г) $\sqrt[5]{y^2}-\sqrt[5]{x^2}$.

448. а) $m+\sqrt[3]{m}$; б) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; в) $\sqrt[3]{x}-2\sqrt[6]{xy}+\sqrt[3]{y}$; г) $\sqrt{p^3}+\sqrt{q^3}$.

Скоротіть дріб (449–450).

449. а) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; б) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; в) $\dfrac{\sqrt{m}-4}{\sqrt[4]{m}+2}$; г) $\dfrac{\sqrt[5]{a^2b}-\sqrt[5]{ab^2}}{\sqrt[5]{ab}}$.

450. а) $\dfrac{\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$; б) $\dfrac{a-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}$; в) $\dfrac{\sqrt{p}+2\sqrt[4]{p}+1}{\sqrt[4]{p}+1}$; г) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}$.

451. ***Задача Паччіолі.*** Обчисліть значення виразу:

а) $\left(\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{3}\right)$; б) $\left(\sqrt{\sqrt{40}+6}+\sqrt{\sqrt{40}-6}\right)^2$.

452. ***Задача Штіфеля.*** Доведіть, що $\sqrt{16}+\sqrt[3]{8}=\sqrt{\sqrt[3]{4096}}+\sqrt{\sqrt[3]{64}}$.

Рівень В

453. При яких значеннях a виконується рівність:

а) $\sqrt[5]{a^5}=a$; б) $\sqrt[5]{a^5}=-a$; в) $\sqrt[6]{a^6}=a$; г) $\sqrt[6]{(a-2)^4}\cdot\sqrt[6]{(a-2)^2}=a-2$;

г) $\sqrt[6]{a^6}=-a$; д) $\sqrt[16]{(a-7)^{16}}=\left(\sqrt[16]{(a-7)}\right)^{16}$; е) $\sqrt[13]{(a-7)^{13}}=\left(\sqrt[13]{(a-7)}\right)^{13}$?

454. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt[4]{(x-4)^4}=x+4$; в) $\sqrt[6]{(x-3)^6}=2\left(\sqrt[4]{2x+3}\right)^4$;

б) $\sqrt[7]{(x+2)^7}=\sqrt[3]{\left(2-x^2\right)^3}$; г) $\sqrt[8]{\left(x^2-2x-3\right)^8}=\sqrt[3]{(2x+2)^3}$.

455. ***Задача Ньютона.*** Перемножте вирази $\dfrac{2ax}{c}-\sqrt{\dfrac{a^3}{c}}$ і $3a+\sqrt{\dfrac{ab^2}{c}}$.

Спростіть вираз (456–458).

456. а) $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2$; в) $\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$;

б) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{b}$; г) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):\dfrac{1}{a-b}$.

457. а) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{b}$; б) $\left(\dfrac{8}{\sqrt[4]{a}+2}+\dfrac{a-8\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}-4}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a}+4}$.

458. а) $\left(\dfrac{4\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}-4}+\dfrac{\sqrt[4]{a}}{6-3\sqrt[4]{a}}+\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}+2}\right):\dfrac{2\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}-2}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-1}{a+1}:\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}-\dfrac{3\sqrt[3]{a}-1}{a+1}\right)$.

459. Доведіть, що:

а) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}=4$; б) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=2$.

460. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

а) $(x-a)\sqrt[6]{x^2-2x}=0$; б) $(x-2)\sqrt[4]{x-a}=0$.

461. Доведіть тотожність:

а) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}\right)^2+\left(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}\right)^2}{2(m-n)}:\dfrac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}=\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2$;

б) $\left(\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}+\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}=2$;

в) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}+\dfrac{1-\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}}{1+\sqrt[4]{a^3b^3}}-\dfrac{1-\sqrt[4]{ab}-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=2$;

г) $\left(\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2}\right):\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}-\dfrac{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=1$;

ґ) $\left(\dfrac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}-\dfrac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}}-\dfrac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):\dfrac{a-b}{4\sqrt{ab}}-\dfrac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=0$.

Вправи для повторення

462. Знайдіть 2,5 % від числа: а) 10; б) 250; в) $3\cdot10^7$.

463. Розв'яжіть нерівність:

а) $\dfrac{4,2+2x}{3}>1,5x-1,1$; в) $2,3a+0,8<\dfrac{5,8a+3,4}{2}$;

б) $\dfrac{1,3a-0,7}{4}-\dfrac{0,9a+0,3}{3}>0$; г) $\dfrac{0,6m+1,2}{12}\le\dfrac{1,5m-2,5}{15}$.

464. Побудуйте графік функції:

а) $y=x$; б) $y=x^2$; в) $y=x^3$; г) $y=\sqrt{x}$.

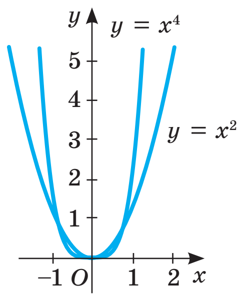
465. Справжньою екологічною проблемою сьогодні є «цвітіння» водойм, що спричинене скупченням біля поверхні води ціанобактерій. Вода забарвлюється в синьо-зелений або коричневий колір і набуває болотного запаху, викликаного процесами гниття. У воді з'являються отруйні речовини, зменшується кількість кисню, внаслідок чого гине риба й інші водні мешканці. Уявіть, що ви перебували біля водойми протягом 3 годин. Скільки бактерій утвориться за цей час зі 100 таких бактерій, якщо за сприятливих умов кожна ціанобактерія ділиться на дві ідентичні дочірні кожні 20 хвилин?

Дізнайтеся, чи мають якусь користь ціанобактерії для людини.

§ 9 Функція $y=\sqrt[n]{x}$ та її графік

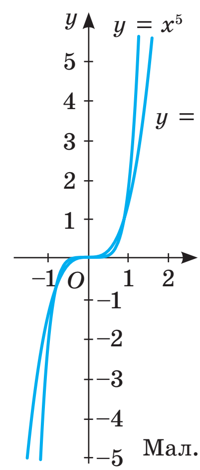
Function $y=\sqrt[n]{x}$ and its Graph

З означення арифметичного кореня випливає, що для $a \geq 0$ виконуються рівності $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$ і $\sqrt[n]{a^n}=a$. Це означає, що дії добування кореня n-го степеня з додатного числа a і піднесення цього числа до n-го степеня є взаємно оберненими. Аналогічну властивість мають і функції $y = x^n$ і $y=\sqrt[n]{x}$, де $n \in N$, $x \geq 0$.



Мал. 74

Розглянемо функцію $y = x^n$. Оскільки $x \geq 0$, то $x^n \geq 0$ і $y \geq 0$. За означенням арифметичного кореня n-го степеня $x=\sqrt[n]{y}$. В отриманій рівності поміняємо місцями x і y. Маємо: $y=\sqrt[n]{x}$. Отже, функція $y=\sqrt[n]{x}$ обернена до функції $y = x^n$ ($n \in N$, $x \geq 0$).



Мал. 75

Деякі функції виду $y = x^n$ ви розглядали в попередніх класах. Це функції $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$. Їх графіки і властивості залежать від n. На малюнку 74 зображено графіки функцій $y = x^n$, якщо n — число парне ($n = 2k$, $k \in N$), а на малюнку 75 — графіки функцій $y = x^n$, якщо n — число непарне ($n = 2k + 1$, $k \in N$). Усі графіки — суцільні лінії, які проходять через точки (0; 0) і (1; 1).

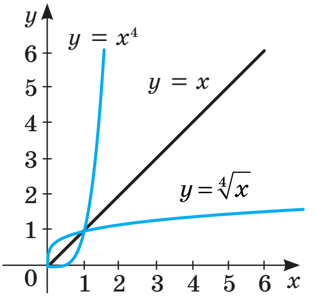
Скористаємося графіками і визначимо ще кілька властивостей цих функцій.

Властивості функції $y = x^n$, $n \in N$.

Властивості	Функція	
	$y=x^{2k}$	$y=x^{2k+1}$
$D(y)$	R	R
$E(y)$	$[0;+\infty)$	R
Парність	Парна	Непарна
Нулі	$x=0$	$x=0$
$y>0$	$x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$	$x\in(0;+\infty)$
$y<0$	—	$x\in(-\infty;0)$
Спадна	$x\in(-\infty;0)$	—
Зростаюча	$x\in(0;+\infty)$	$x\in R$

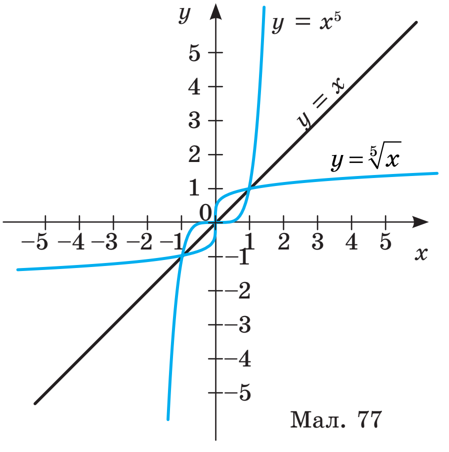
Щоб з'ясувати властивості функції $y=\sqrt[n]{x}$, де $n\in N$, і вигляд її графіка, розглянемо два випадки: 1) $n = 2k$, $k\in N$; 2) $n = 2k + 1$, $k\in N$.

1) Якщо $n = 2k$, $k\in N$, то функція $y = x^{2k}$ на проміжку $[0;+\infty)$ є зростаючою, а тому вона на цьому проміжку оборотна. Обернена до неї функція $y=\sqrt[2k]{x}$, $x\in[0;+\infty)$. Графіки обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. На малюнку 76 подано графіки функцій $y = x^4$ і $y=\sqrt[4]{x}$. Графіки функцій $y=\sqrt[2k]{x}$, $x\in[0;+\infty)$ при інших значеннях k подібні до графіків функцій $y=\sqrt{x}$ і $y=\sqrt[4]{x}$. Вони розташовані в першій чверті і є частинами відповідних парабол.



Мал. 76

2) Якщо $n = 2k + 1$, $k\in N$, то функція $y = x^{2k+1}$ зростає на всій множині R, тому вона оборотна для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$. Обернена до неї функція $y=\sqrt[2k+1]{x}$, $x\in(-\infty;+\infty)$. Графік її симетричний графіку функції $y = x^{2k+1}$ відносно прямої $y = x$. На малюнку 77 подано графіки функцій $y = x^5$ і $y=\sqrt[5]{x}$. Графіки функцій $y=\sqrt[2k+1]{x}$, $x\in(-\infty;+\infty)$ при інших значеннях k подібні до графіків функцій $y=\sqrt[3]{x}$ і $y=\sqrt[5]{x}$. Вони розташовані в першій і третій чвертях і є частинами відповідних парабол. Побудуйте графіки функцій $y=\sqrt[6]{x}$ і $y=\sqrt[7]{x}$ у ІКТ або на міліметровому папері (використавши калькулятор).



Мал. 77

Властивості функції $y=\sqrt[n]{x}$, $n\in N$.

Властивість	**Функція**	
	$y=\sqrt[2k]{x}$	$y=\sqrt[2k+1]{x}$
$D(y)$	$[0;+\infty)$	R
$E(y)$	$[0;+\infty)$	R
Парність	ні парна, ні непарна	непарна
Нулі	$x=0$	$x=0$
$y>0$	$x\in(0;+\infty)$	$x\in(0;+\infty)$
$y<0$	—	$x\in(-\infty;0)$
Зростання	$x\in(0;+\infty)$	$x\in R$

Хочете знати ще більше?

Зображення в одній системі координат графіків функцій $y = x^n$ для різних натуральних значень n дає можливість встановити, що для $x \in (0;1)$ графік функції тим ближче розміщений до осі x, чим більшим є показник n, а для $x \in (1;+\infty)$ зі збільшенням n графік повільно віддаляється від прямої $x = 1$.

Якщо в одній системі координат побудувати графіки функцій $y = \sqrt[n]{x}$, $x \in (0;\ +\infty)$ для різних натуральних значень n, то побачимо, що на проміжку (0; 1) графік функції тим ближче розміщений до осі y, чим більшим є показник n. На проміжку $(1;+\infty)$ графіки функцій $y = \sqrt[n]{x}$ зі збільшенням n повільно віддаляються від прямої $y = 1$. Тобто для великих значень x значення функції $y = x^n$ зростають дуже швидко, а функції $y = \sqrt[n]{x}$ — повільно. Наприклад:

$1^5 = 1,\ 10^5 = 100\ 000,\ 100^5 = 10\ 000\ 000\ 000.$

$\sqrt[6]{1} = 1,\ \sqrt[6]{1\ 000\ 000} = 10,\ \sqrt[6]{1\ 000\ 000\ 000\ 000} = 100.$

Перевірте себе

1. Який графік при $n = 2k$ має функція: а) $y = x^n$; б) $y = \sqrt[n]{x}$?
2. Який графік при $n = 2k + 1$ має функція: а) $y = x^n$; б) $y = \sqrt[n]{x}$?
3. За якої умови функція $y = \sqrt[n]{x}$ є непарною?
4. У яких точках перетинаються графіки функцій $y = x^n$ і $y = \sqrt[n]{x}$?
5. У яких чвертях розташований графік функції: а) $y = x^n$; б) $y = \sqrt[n]{x}$?

Виконаємо разом

1 Порівняйте числа:

а) $\sqrt[5]{1,7}$ і $\sqrt[5]{2}$; б) $\sqrt[4]{12}$ і 2; в) $(-0,8)^6$ і $(-0,4)^6$; г) $\sqrt[3]{0,1}$ і $\sqrt[7]{0,1}$.

Розв'язання. а) Оскільки $1,7 < 2$ і функція $y = \sqrt[5]{x}$ — зростає для всіх $x \in R$, то $\sqrt[5]{1,7} < \sqrt[5]{2}$.

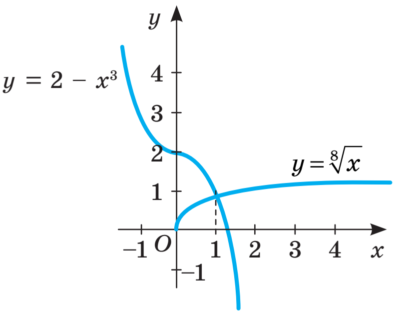
б) Число 2 можна записати у вигляді $2 = \sqrt[4]{16}$. Тоді зі зростання функції $y = \sqrt[4]{x}$ випливає, що $\sqrt[4]{12} < \sqrt[4]{16}$, тобто $\sqrt[4]{12} < 2$.

в) Оскільки функція $y = x^6$ при $x < 0$ спадна і $-0,8 < -0,4$, то $(-0,8)^6 > (-0,4)^6$.

г) Графік функції $y = \sqrt[3]{x}$ при $0 < x < 1$ лежить нижче, ніж графік функції $y = \sqrt[7]{x}$, тому $\sqrt[3]{0,1} < \sqrt[7]{0,1}$.

2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt[8]{x} = 2 - x^3$.

Розв'язання. *Спосіб 1.* Розв'яжемо дане рівняння графічно. Для цього в одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = \sqrt[8]{x}$ і $y = 2 - x^3$ (мал. 78). Із малюнка можна припустити, що ці графіки перетинаються в точці (1; 1). Перевіркою встановлюємо, що точка (1; 1) належить і графіку функції $y = \sqrt[8]{x}$, і графіку функції $y = 2 - x^3$. Отже, рівняння має один корінь $x = 1$.



Мал. 78

Спосіб 2. Ви вже знаєте, що якщо функція $y = f(x)$ зростає, а функція $y = g(x)$ — спадає, то рівняння $f(x) = g(x)$ може мати тільки один корінь. Оскільки функція $y = \sqrt[8]{x}$ зростає, а функція $2 - x^3$ — спадає, то дане рівняння може мати тільки один корінь. Випробуванням установлюємо, що $x = 1$.

Відповідь. 1.

Виконайте усно

466. Зростаючою чи спадною є функція:

а) $y = x^3$; б) $y = 3 - x^5$; в) $y = \sqrt[3]{x} + 1$; г) $y = -\sqrt[6]{x}$?

467. Порівняйте числа:

а) $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[4]{1{,}7}$ і $\sqrt[4]{2{,}7}$; в) $\sqrt[5]{-4}$ і $\sqrt[5]{-7}$; г) $\sqrt[7]{-2}$ і $\sqrt[7]{2}$; ґ) $(-2{,}3)^6$ і $(2{,}3)^6$.

Знайдіть область визначення функції (468–469).

468. а) $y = \sqrt[4]{x-2}$; б) $y = \sqrt[13]{x+3}$; в) $y = \sqrt[6]{-x}$; г) $y = \sqrt[10]{x^2+1}$.

469. а) $y = \sqrt[4]{-x}$; б) $y = \sqrt[4]{x} + \sqrt[6]{-x}$; в) $y = \sqrt{x} + \sqrt[5]{-x}$; г) $y = \dfrac{3x}{\sqrt[6]{-x}}$.

Рівень А

470. Чи проходить графік функції $y = \sqrt[4]{x} + 1$ через точки $A(1;\ 1)$, $B(16;\ 3)$, $C\left(\dfrac{1}{81};\ \dfrac{4}{3}\right)$, $D(0;\ 2)$, $E(-16;\ -3)$, $F(625;\ 6)$?

471. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt[4]{x-8}$;
б) $y = \sqrt[6]{x^2 - 4x + 4}$;
в) $y = \sqrt[5]{x^2 - 4}$;
г) $\dfrac{\sqrt[6]{x^2+4}}{x-2}$;
ґ) $y = \sqrt[10]{x^2 - 2x - 3}$;
д) $\sqrt[7]{\dfrac{x}{x^2-1}}$.

Побудуйте графік функції (472–473).

472. а) $y = \sqrt[3]{x}$; б) $y = \sqrt[3]{x-4}$; в) $y = \sqrt[3]{x} - 4$; г) $y = \sqrt[3]{x+2} - 3$; ґ) $y = -\sqrt[3]{x-2} + 3$.

473. а) $y = \sqrt[4]{x}$; б) $y = \sqrt[4]{x+2}$; в) $y = \sqrt[4]{x} + 2$; г) $y = -\sqrt[4]{x} + 2$; ґ) $y = \sqrt[4]{x-3} - 2$.

474. Порівняйте числа:

а) $\sqrt[6]{8}$ і $\sqrt[6]{10}$; в) $\sqrt[9]{-7}$ і $\sqrt[9]{-6}$; ґ) $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[5]{2}$;

б) $\sqrt[4]{16}$ і 2; г) $\sqrt[4]{\frac{3}{7}}$ і $\sqrt[4]{\frac{5}{9}}$; д) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$ і $\sqrt[3]{-0{,}13}$.

475. Оцініть значення функції $y=\sqrt[5]{x}$, якщо:

а) $0 < x < 1$; б) $-32 \le x \le -1$; в) $-1 \le x < \frac{1}{32}$; г) $-243 < x \le 1$.

476. Запишіть функції у три колонки: 1) парні; 2) непарні; 3) ні парні, ні непарні: $y=\sqrt[4]{x}$; $y=\sqrt[5]{x}$, $y=\sqrt[3]{x^3}$; $y=\sqrt[6]{x^6}$; $y=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3$; $y=\left(\sqrt[8]{x}\right)^8$; $y=\sqrt[7]{(x+2)^7}$; $y=\sqrt[8]{(x-3)^8}$; $y=\frac{\sqrt[7]{x}}{x}$; $y=\frac{\sqrt[8]{x}}{2x}$.

477. Зростаючою чи спадною є функція: $y=\sqrt[3]{x}$; $y=x^5$; $y=-\sqrt[7]{x}$; $y=2-\sqrt[4]{x}$; $y=\sqrt[5]{x-3}$; $y=(5-x)^7$; $y=\sqrt[6]{x+3}$; $y=\sqrt[13]{x}-1$; $y=(x+1)^9$?

478. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $x^7=-\sqrt{x}+2$; б) $\sqrt{x+2}=-x^3$; в) $x^6=-\sqrt{x}+2$; г) $\sqrt[4]{1-x}=\sqrt[6]{x+1}$.

479. Розв'яжіть графічно нерівність:

а) $\sqrt[4]{x}>1$; б) $\sqrt{x}\le 2$; в) $\sqrt{x}\ge 2$; г) $\sqrt[3]{x}\le -1$; ґ) $\sqrt[5]{x}>x^4$; д) $\sqrt[4]{x}\le x^3$.

480. За яких значень параметра a рівняння має один корінь:

а) $\sqrt[3]{x}=a$; б) $\sqrt[4]{x}=a$; в) $x^4+2=a$; г) $3-\sqrt[8]{x}=a$?

Рівень Б

481. Знайдіть n, при якому графік функції $y=\sqrt[n]{x}$ проходить через точки:

а) $A(16;\,2)$; б) $(27;\,3)$; в) $\left(\frac{1}{64};\,\frac{1}{2}\right)$; г) $\left(\frac{1}{64};\,\frac{1}{8}\right)$.

Знайдіть область визначення функції (482–483).

482. а) $y=\left(\frac{x^2-3x+2}{x^3-4}\right)^2$; б) $y=\left(\frac{3\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x^2}-x}\right)^6$; в) $y=\frac{x^2-1}{\sqrt[6]{x^2+4x-5}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{x^2-4}{15+2x-x^2}}$.

483. а) $y=\frac{\sqrt[4]{x^2-2x+1}}{\sqrt[3]{x^2-16}}$; б) $y=\frac{3x-7}{\sqrt[7]{x^2-5x+4}}$; в) $y=\frac{4\sqrt{9-x^2}}{x\sqrt[4]{x^2-2x}}$; г) $y=\sqrt[8]{\frac{8-2|x+3|}{\sqrt[6]{x}+2}}$.

484. Побудуйте графік функції та вкажіть: область її визначення, область значень, проміжки монотонності.

а) $y=1+\sqrt[8]{-x}$; в) $y=2\sqrt[3]{x+3}$; ґ) $y=\sqrt[5]{|x|}$;

б) $y=2-\sqrt[4]{|x|}$; г) $y=4-\sqrt[3]{x-2}$; д) $y=\sqrt[4]{\frac{x+4}{16}}$.

485. Додатним чи від'ємним є значення виразу:

а) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[5]{2}$; б) $\sqrt[4]{5}-\sqrt[8]{5}$; в) $\sqrt[4]{0{,}3}-\sqrt[6]{0{,}3}$; г) $\sqrt[5]{-0{,}5}-\sqrt[7]{-0{,}5}$?

486. Чи збігаються графіки функцій:

а) $y = x$ і $y=\sqrt{x^2}$; в) $y=\sqrt[4]{x}-\left(2+\sqrt[4]{x}\right)$ і $y = -2$;

б) $y = x$ і $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$; г) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ і $y=\sqrt[4]{x}+1$?

487. Яких значень набуває функція $y=\sqrt[3]{-x}$, якщо:

а) $0\le x\le\dfrac{1}{27}$; б) $-\dfrac{1}{8}<x<0{,}001$; в) $x^2 \le 64$; г) $|x|>10\dfrac{1}{8}$?

488. Оцініть значення x, якщо:

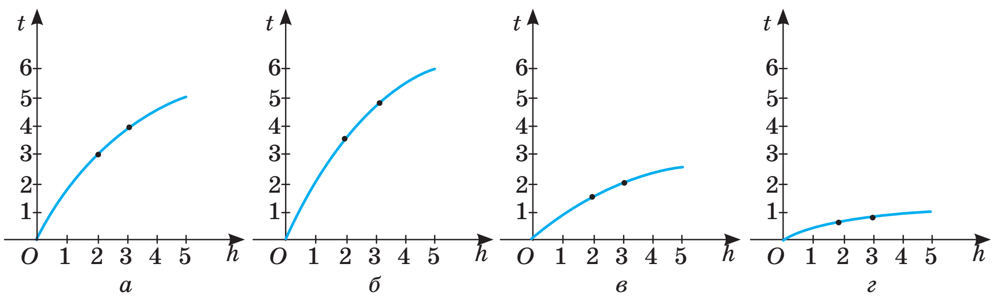
а) $2\le\sqrt[3]{x}\le 3$; б) $1<\sqrt[4]{x}<2$; в) $-1\le\sqrt[7]{x}\le 2$; г) $0\le\sqrt[6]{x}\le\dfrac{1}{2}$.

489. Побудуйте графік функції:

а) $y=\sqrt[8]{(x+2)^8}$; в) $y=\left(\sqrt[8]{x+2}\right)^8$; ґ) $y=\sqrt[8]{(x+2)^4}$;

б) $y=\left(\sqrt[8]{x+2}\right)^4$; г) $y=\left(\sqrt[4]{x+2}\right)^8$; д) $y=\sqrt[4]{(x+2)^8}$.

490. **Практичне завдання.** З літака, що рухається на висоті 1025 м над землею, стрибає парашутист і пролітає в умовах вільного падіння (до розкриття парашута) 45 м. Його шлях h (у метрах), пройдений в умовах вільного падіння, визначається формулою $h = \dfrac{1}{2}gt^2$, де t – час (у секундах), а g — стале число, $g \approx 10$ м/с^2. 1) На якій відстані від землі розкрився парашут? 2) Скільки часу парашутист летів без парашута? Задайте формулою залежність часу вільного падіння парашутиста від пройденого шляху. 3) На якому графіку (мал. 79) подано залежність часу t руху тіла при вільному падінні від довжини шляху h?



Мал. 79

Рівень В

Побудуйте графік функції (491–493).

491. а) $y=\sqrt[4]{|x|}$; б) $y=\sqrt[4]{|x|}-4$; в) $y=\sqrt[4]{|x|-4}$; г) $y=\sqrt[4]{|x-4|}$; ґ) $y=\left|3\sqrt[4]{|x|}-2\right|$.

492. а) $y=\sqrt[3]{|x|}$; б) $y=\sqrt[3]{|x|}-3$; в) $y=\sqrt[3]{|x|-3}$; г) $y=\sqrt[3]{|x-3|}$; ґ) $y=\left|2\sqrt[3]{|x|-3}\right|$.

493. а) $y=\begin{cases}\sqrt[3]{x+1}+1, \text{якщо } x<-1,\\ x^2, \text{ якщо } -1\le x\le 2,\\ -\sqrt[3]{x-2}+4, \text{ якщо } x>2;\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}(x+4)^4, \text{ якщо } x<-3,\\ \sqrt{|x-1|}, \text{ якщо } -3\le x\le 2,\\ -\sqrt[3]{x-1}+1, \text{ якщо } x>2.\end{cases}$

Знайдіть область значень функції (494–495).

494. а) $y=\sqrt[4]{x}+2$; б) $y=\sqrt[3]{x}+2$; в) $y=\sqrt[5]{x}-3$; г) $y=\sqrt[6]{x}-4$.

495. а) $y=\sqrt[3]{x}+1$; б) $y=\sqrt[3]{|x-2|}$; в) $y=\sqrt[3]{|x|}-2$; г) $y=\left|\sqrt[3]{x}+2\right|$.

496. Розв'яжіть рівняння, використовуючи властивість монотонності функцій:
а) $x^3=2-\sqrt{x}$; б) $\sqrt[4]{x+2}=-x^5$; в) $(x-2)^5=-\sqrt[4]{x}$; г) $(x+1)^4=2-\sqrt{x+1}$.

497. Використовуючи властивість функції, розв'яжіть нерівність:
а) $\sqrt[4]{x}<2$; б) $\sqrt[3]{x}\ge 3$; в) $\sqrt[5]{x+1}\le -2$; г) $\sqrt[4]{x}>-1$.

498. Знайдіть кількість цілих розв'язків нерівності:
а) $x^4\le\sqrt[3]{x}+2$; б) $3-x^6\ge\sqrt[5]{x}$.

499. Для кожного значення параметра a знайдіть кількість коренів рівняння:
а) $\sqrt[3]{x}=a$; б) $\sqrt[6]{x}=a$; в) $\sqrt[4]{|x|}=a$; г) $\left|\sqrt[4]{x^4}-4\right|=a$; ґ) $\left|\sqrt[4]{x}-2\right|=a$.

500. Скільки коренів має рівняння залежно від значення параметра a:
а) $\sqrt[4]{x-1}=a-x$; б) $\sqrt[6]{3-x}=x-a$?

501. Для кожного значення параметра a визначте кількість коренів рівняння:
а) $\sqrt[6]{x^6}-x=a$; б) $\sqrt[8]{\left(x^2-6x+5\right)^8}=a$.

502. При яких значеннях параметра a нерівність має три цілих розв'язки:
а) $x^2+1\le\sqrt[3]{x}+a$; б) $3-\sqrt[4]{x+2}\le a-x^4$?

Вправи для повторення

503. Обчисліть:
а) $\sqrt[3]{125}-\sqrt[5]{32}$; б) $\left(\sqrt[4]{16}-\sqrt[4]{9}\right)\left(\sqrt[4]{16}+\sqrt[4]{9}\right)$.

504. У Румунії доба проживання в готелі коштуватиме на 20 % дешевше, ніж у готелі в Польщі. В Угорщині доба проживання в готелі коштує в перерахунку на гривні 1050 грн, що на 5 % дорожче, ніж у Польщі. Яка вартість проживання в гривнях у кожній країні окремо?

505. Катер пройшов за течією річки 80 км і повернувся назад, витративши на весь шлях 8 год 20 хв. Скільки часу катер рухався за течією річки, якщо швидкість течії річки — 4 км/год?

506. Кидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що на них випадуть очки, сума яких дорівнює:
а) 3; б) 4; в) 5; г) 6; ґ) 7; д) 8?

§ 10 Ірраціональні рівняння

Irrational Equations

Рівняння називається *алгебраїчним*, якщо обидві його частини — алгебраїчні вирази.

Алгебраїчне рівняння, яке містить змінні під знаком кореня, називається *ірраціональним рівнянням*.

Приклади ірраціональних рівнянь:

$$\sqrt[3]{x}-5x+4=0, \quad \sqrt{x-1}=3-x, \quad \sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5.$$

Більшість ірраціональних рівнянь розв'язують піднесенням обох їх частин до степеня з тим самим натуральним показником. При цьому можуть з'явитися сторонні розв'язки, їх відкидають у результаті перевірки.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3x^2+x+11}=2x+1$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$$3x^2 + x + 11 = 4x^2 + 4x + 1 \text{ або } x^2 + 3x - 10 = 0.$$

Корені утвореного квадратного рівняння: -5 і 2.

Якщо $x = -5$, то $\sqrt{75-5+11} \neq -10+1$, бо $\sqrt{81} \neq -9$;

якщо $x = 2$, то $\sqrt{12+2+11}=4+1$, $\sqrt{25}=5$.

Відповідь. 2.

Чи завжди при піднесенні обох частин рівняння до того самого степеня з'являються сторонні розв'язки? Ні.

Теорема. *Рівняння $f(x) = g(x)$ і $f^n(x) = g^n(x)$ рівносильні, якщо натуральне число n непарне або функції $f(x)$ і $g(x)$ можуть набувати тільки невід'ємних значень.*

Доведення. Якщо при деякому значенні x виконується рівність $f(x) = g(x)$, то за однозначністю дії піднесення до степеня і $f^n(x) = g^n(x)$. Це означає, що кожний розв'язок першого рівняння є також розв'язком другого рівняння.

Якщо вирази $f(x)$ і $g(x)$ можуть набувати тільки невід'ємних значень або якщо число n — непарне, то з рівності $f^n(x) = g^n(x)$ завжди випливає рівність $f(x) = g(x)$, бо за таких умов якщо $f(x) \neq g(x)$, то і $f^n(x) \neq g^n(x)$. Останнє випливає з тотожності

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

А це означає, що за зазначених умов кожний розв'язок рівняння $f^n(x) = g^n(x)$ є також розв'язком рівняння $f(x) = g(x)$.

Отже, множини розв'язків розглядуваних рівнянь збігаються, тому ці рівняння — рівносильні.

Маємо: 1) $\left(\sqrt[2k+1]{f(x)}=g(x)\right)\Leftrightarrow(f(x) = g^{2k+1}(x))$;

2) якщо $g(x) \geq 0$, то $\left(\sqrt[2k]{f(x)}=g(x)\right)\Leftrightarrow(f(x) = g^{2k}(x))$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{2x^2-14x-15}=-3$.

Розв'язання. Якщо обидві частини рівняння піднести до куба, то отримаємо рівняння, рівносильне даному:

$$2x^2 - 14x - 15 = -27 \text{ або } 2x^2 - 14x + 12 = 0,\ x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Його корені $x_1 = 1$, $x_2 = 6$.

Такі самі корені має і задане рівняння. Перевірте.

Відповідь. 1; 6.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+6}=x-1$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата, маємо: $x + 6 = x^2 - 2x + 1$, або $x^2 - 3x - 5 = 0$. Коренями цього рівняння є числа $x_1=\frac{3+\sqrt{29}}{2}$ і $x_2=\frac{3-\sqrt{29}}{2}$. Очевидно, що у цьому випадку виконувати перевірку складно. Доцільно використати метод рівносильних перетворень.

Зверніть увагу!

Рівняння виду $\sqrt{f(x)}=g(x)$ рівносильне системі:

$$\begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)=g^2(x). \end{cases}$$

У нашому випадку (для рівняння $\sqrt{x+6}=x-1$) маємо: $g(x) = x - 1$, а $x - 1 \geq 0$, якщо $x \geq 1$.

Оскільки $x_1=\frac{3+\sqrt{29}}{2}>1$, а $x_2=\frac{3-\sqrt{29}}{2}<1$, то рівняння має лише один корінь — $x_1=\frac{3+\sqrt{29}}{2}$.

Відповідь. $\frac{3+\sqrt{29}}{2}$.

Зверніть увагу! **Рівняння виду $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ рівносильне системі:**

$$\begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)=g(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ f(x)=g(x). \end{cases}$$

Обирають ту із систем, у якій нерівність розв'язати простіше.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\left(-x^2-16x-3\right)}=\sqrt{-8x-3}$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата, маємо: $-x^2 - 16x - 3 = -8x - 3$, або $x^2 + 8x = 0$. Звідки $x_1 = 0$, $x_2 = -8$.

Оскільки $g(x) = -8x - 3$, а $-8x - 3 \geq 0$, якщо $x \leq -0{,}375$, то $x = 0$ не є коренем рівняння.

Відповідь. -8.

Деякі ірраціональні рівняння та їх системи розв'язують заміною змінної і зведенням їх у такий спосіб до раціональних. Це, зокрема, рівняння і системи такого виду:

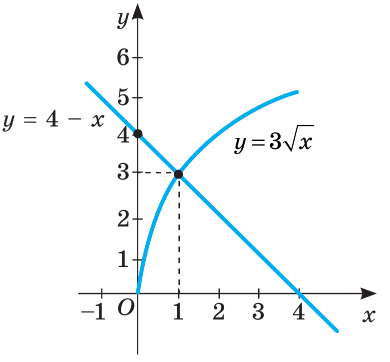
$$x+3\sqrt{x}-4=0,\quad \sqrt[3]{x+2}+2\sqrt[6]{x+2}=3,\quad \sqrt[5]{\frac{3x+2}{2x-3}}+\sqrt[5]{\frac{2x-3}{3x+2}}=2,\quad \begin{cases}\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=3,\\ \sqrt{xy}=4.\end{cases}$$

Поміркуйте, яку заміну доцільно зробити в кожному з рівнянь, щоб розв'язати його. Деякі ірраціональні рівняння можна розв'язувати різними способами.

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $x+3\sqrt{x}-4=0$.

Розв'язання. *Спосіб 1* (метод заміни). Заміною $\sqrt{x}=t$, $t \geq 0$ зведемо дане рівняння до рівняння $t^2 + 3t - 4 = 0$, корені якого $t_1 = -4$, $t_2 = 1$. Оскільки $t_1 < 0$, то залишилося розв'язати рівняння $\sqrt{x}=1$, звідси $x = 1$.

Спосіб 2 (графічний). Розв'яжемо рівняння $x+3\sqrt{x}-4=0$ графічно. Для цього запишемо його у вигляді $3\sqrt{x}=4-x$ і побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y=3\sqrt{x}$ і $y = 4 - x$ (мал. 80).



Мал. 80

З малюнка видно, що графіки перетинаються в точці з абсцисою $x = 1$.

Спосіб 3 (з використанням властивостей функцій). Запишемо рівняння у вигляді $3\sqrt{x}=4-x$. Для всіх $x \geq 0$ функція $y=3\sqrt{x}$ є зростаючою, а функція $y = 4 - x$ — спадною. Отже, рівняння може мати тільки один корінь. Випробуванням установлюємо, що $x = 1$.

Відповідь. 1.

Перевірте себе

1. Які рівняння називають алгебраїчними?
2. Наведіть приклад алгебраїчного рівняння.
3. Які рівняння називають ірраціональними?
4. Наведіть приклад ірраціонального рівняння.
5. Як можна розв'язувати ірраціональні рівняння?
6. У яких випадках при розв'язуванні ірраціональних рівнянь слід робити перевірку?
7. У чому полягає метод рівносильних перетворень при розв'язуванні ірраціональних рівнянь?
8. Як використовують властивості функцій для розв'язування ірраціональних рівнянь?

Виконаємо разом

1 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-13}-\sqrt{8+x}+3=0$.

Розв'язання. В одній частині рівняння містяться два квадратних корені. Відокремимо їх і обидві частини утвореного рівняння піднесемо до квадрата. Маємо: $\sqrt{x-13}=\sqrt{8+x}-3$, $\left(\sqrt{x-13}\right)^2=\left(\sqrt{8+x}-3\right)^2$.

Спростимо його: $x-13=8+x-6\sqrt{8+x}+9$, $-30=-6\sqrt{8+x}$, або $5=\sqrt{8+x}$.

Піднесемо обидві частини останнього рівняння до квадрата:

$$8 + x = 25, \text{ звідси } x = 17.$$

Перевірка. $x = 17$: $\sqrt{17-13}-\sqrt{8+17}+3=2-5+3=0$; $0 = 0$.

Відповідь. 17.

2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{x+5}=2$.

Розв'язання. Значення виразу $\sqrt{x-3}$ не може бути від'ємним, тому $\sqrt[3]{x+5}\le 2$.

Дане рівняння не можуть задовольняти числа, менші від 3. Тому воно рівносильне системі $\begin{cases}\sqrt[3]{x+5}\le 2,\\ x\ge 3\end{cases}$ або $\begin{cases}x\le 3,\\ x\ge 3.\end{cases}$

Цю систему задовольняє єдине значення $x = 3$.

Перевірка. $\sqrt{0}+\sqrt[3]{8}=2$.

Дане рівняння можна розв'язати і заміною змінної. Якщо покладемо $\sqrt{x-3}=a$, $\sqrt[3]{x+5}=b$, то отримаємо систему рівнянь $\begin{cases}a+b=2,\\ a^2-b^3=-8,\end{cases}$ розв'язком якої є числа $a = 0$, $b = 2$. Повертаючись до заміни $\sqrt{x-3}=0$, $\sqrt[3]{x+5}=2$, отримаємо, що $x = 3$.

Відповідь. 3.

3 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4x^2+4x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}=6$.

Розв'язання. Подамо дане рівняння у вигляді $\sqrt{(2x+1)^2}+\sqrt{(x-1)^2}=6$, яке рівносильне рівнянню $|2x+1|+|x-1|=6$. Розв'яжемо його методом інтервалів, розкривши модулі на проміжках: $(-\infty; -0{,}5)$, $[-0{,}5; 1]$, $(1; +\infty)$.

Якщо $x < -0{,}5$, то $-(2x + 1) - (x - 1) = 6$, звідси $x = -2$.

Якщо $-0{,}5 \le x \le 1$, то $2x + 1 - (x - 1) = 6$, звідси $x = 4$ — сторонній корінь.

Якщо $x > 1$, то $2x + 1 + x - 1 = 6$, звідси $x = 2$.

Відповідь. -2; 2.

4 Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1,\\ x-y=7.\end{cases}$

Розв'язання. Нехай $\sqrt[3]{x}=u$ і $\sqrt[3]{y}=v$, тоді $u - v = 1$ і $u^3 - v^3 = 7$. З першого рівняння знаходимо: $u = v + 1$. Підставивши у друге рівняння $v + 1$ замість u, дістанемо: $v^3 + 3v^2 + 3v + 1 - v^3 = 7$, або $v^2 + v - 2 = 0$.

Корені утвореного квадратного рівняння: –2 і 1. Отже, $\sqrt[3]{y}=-2$ або $\sqrt[3]{y}=1$, звідси y = –8 або y = 1. Відповідні значення x: –1 і 8.

Відповідь. (–1; –8); (8; 1).

Виконайте усно

507. Які з рівнянь є алгебраїчними, які — ірраціональними:

а) $\sqrt{x}=\operatorname{tg}x$; б) $\sqrt[5]{2}=x-3$; в) $\sqrt{x-3}=x^3$; г) $x+\sqrt{x}=\sqrt[3]{x}$; ґ) $\sqrt[4]{(x-2)^4}=3$?

Розв'яжіть рівняння (508–511).

508. а) $\sqrt{x}=9$; б) $\sqrt[3]{x}=2$; в) $\sqrt[3]{x}=-2$.

509. а) $\sqrt{2x+5}=0$; б) $\sqrt{2x-5}=1$; в) $\sqrt{5x-1}=2$.

510. а) $\sqrt[3]{x+3}=0$; б) $\sqrt[3]{x-3}=-1$; в) $\sqrt[3]{5x}=2$.

511. а) $\sqrt[3]{x+3}=-2$; б) $\sqrt[4]{x+1}=3$; в) $\sqrt[4]{x+3}=-1$.

512. Скільки розв'язків має рівняння:

а) $\sqrt[4]{2x}+\sqrt{x}=0$; б) $\sqrt{x^2-5}=0$; в) $\sqrt[5]{3x+1}=-10$?

Рівень А

513. Скільки цілих розв'язків має рівняння:

а) $\sqrt{x-5}+\sqrt{6-x}=1$; б) $1-\sqrt{x-2}=\sqrt{2-x}-1$; в) $\sqrt[4]{2x-8}=\sqrt[6]{4-x}$?

514. Знайдіть суму коренів рівняння: $\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}\sqrt{x+3}=0$.

Розв'яжіть рівняння (515–523).

515. а) $\sqrt[3]{5x+3}=2$; б) $\sqrt[5]{2x+3}=-1$; в) $\sqrt[3]{5x+3}=2$.

516. а) $\sqrt[3]{5x-7}=-3$; б) $\sqrt[5]{2x+3}=-1$; в) $\sqrt[3]{5x+3}=2$.

517. а) $\sqrt{2x+5}=\sqrt{x-15}$; в) $\sqrt[5]{3x+1}=\sqrt[5]{1-x}$;

б) $\sqrt{2x+5}=\sqrt{5x-1}$; г) $\sqrt[4]{7x+2}=\sqrt[4]{4x-7}$.

518. а) $\sqrt[3]{5x+3}=\sqrt[3]{2x-3}$; в) $\sqrt[4]{2x+1}=\sqrt[4]{2x-3}$;

б) $\sqrt[3]{5x+3}=\sqrt[3]{2x+1}$; г) $\sqrt[4]{x+12}=\sqrt[4]{4x+3}$.

519. а) $\sqrt{x^2+2x-2}=1$; в) $\sqrt[3]{x^2+4}=5$;

б) $\sqrt{x^2-5x+10}=2$; г) $\sqrt[3]{9-x^2}=-3$.

520. а) $\sqrt[3]{x^3+x^2+8x-9}=x$; б) $\sqrt[3]{-x^3+x^2-4x-12}=-x$.

521. а) $\sqrt[4]{x^4+x^2+2x-24}=x$; б) $\sqrt[4]{16x^4+x^2-8x+7}=2x$.

522. а) $\sqrt{x^2-1}=x+2$; в) $\sqrt{x^2+2x}=x-3$;

б) $\sqrt{x^2-2x+11}=x-3$; г) $\sqrt{x^2-5x+1}=4-x$.

523. а) $\sqrt{x^2-x}=x-2$; в) $\sqrt{x^2+1}=x+3$;

б) $\sqrt{x^2-2x+9}=x-5$; г) $\sqrt{x^2-5x+1}=2-x$.

Розв'яжіть рівняння заміною змінної (524–526).

524. а) $x-2\sqrt{x}-8=0$; б) $z+5\sqrt{z}+4=0$; в) $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}=18$; г) $2\sqrt[8]{x}=3-\sqrt[4]{x}$.

525. а) $\sqrt{x}-3=2\sqrt[4]{x}$; б) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-6=0$; в) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-2=0$; г) $9-8\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}=0$.

526. а) $x^2+8x-\sqrt{x^2+8x}=6$; в) $\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{x-2}=3$;

б) $x^2+5-2\sqrt{x^2+5}=3$; г) $\sqrt[3]{x^2-3}+\sqrt[6]{x^2-3}=2$.

Розв'яжіть графічно рівняння (527–528).

527. а) $x^2=\sqrt{x}$; б) $x^2-7=\sqrt{x+1}$; в) $x^3-1=\sqrt{x-1}$.

528. а) $2\sqrt{x}=8-x$; б) $1-\sqrt{x}=\sqrt{x+1}$; в) $2-x^2=\sqrt{x}$.

529. Установіть відповідність між системами рівнянь **(1–4)** і сумами $a+b$ **(А–Д)**, отриманими з розв'язків цих систем.

1	$\begin{cases} 5\sqrt{a}-\sqrt{b}=4, \\ 2\sqrt{a}+\sqrt{b}=3 \end{cases}$	**А**	5
2	$\begin{cases} 3\sqrt{a}-\sqrt{b}=5, \\ 2\sqrt{a}+\sqrt{b}=5 \end{cases}$	**Б**	12
3	$\begin{cases} 2\sqrt{b+1}=4+\sqrt{a}, \\ 2\sqrt{a}=\sqrt{b+1}+1 \end{cases}$	**В**	16
4	$\begin{cases} 2\sqrt{5-a}-\sqrt{b}=3, \\ \sqrt{5-a}+3\sqrt{b}=19 \end{cases}$	**Г**	2
		Д	14

Рівень Б

Розв'яжіть рівняння (530–538).

530. а) $\sqrt{2x^2-1}=3x+2$; в) $\sqrt{-x^2+2x}=x+1$;

б) $\sqrt{x^2-2x+5}=5x-3$; г) $\sqrt{x^2-5x+5}=5x-4$.

531. а) $\sqrt{x^2-x+1}=x+1$; в) $\sqrt{x^2+15}=7x+3$;

б) $\sqrt{x^2-2x+9}=1-2x$; г) $\sqrt{x^2-5x+1}=2-3x$.

532. а) $\sqrt{x^2+2+\sqrt[3]{2x+3}}=x$; в) $\sqrt[3]{2x^2+5x-8}=x-2$;

б) $\sqrt[3]{x^3-2+\sqrt{x^2-4x}}=x$; г) $\sqrt[3]{7x^2+21x-1}=x+2$.

533. а) $\sqrt[3]{x^2-3x-1}=x-1$; в) $\sqrt{2+\sqrt{x+5}}=\sqrt{x+1}$;

б) $\sqrt[3]{x^2+2x-1}=x+1$; г) $\sqrt[3]{2+\sqrt{3x^2-x}}=\sqrt[3]{x+1}$.

534. а) $\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=1$; в) $\sqrt{2x+4}-\sqrt{7-x}=3$;

б) $\sqrt{4+3x-x^2}-\sqrt{x+5}=-3$; г) $\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}=3$.

535. а) $1+\sqrt{x}=\sqrt{3x-3}$; в) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8$;

б) $7-\sqrt{3x}=\sqrt{3x+7}$; г) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$.

536. а) $3\sqrt{x}+\sqrt{11x-2}=6$; в) $\sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}+3$;

б) $2\sqrt{3x+2}-\sqrt{6x}=2$; г) $\sqrt{x-13}=\sqrt{8+x}-3$.

537. а) $(x^2-5x)\sqrt{x-3}=0$; в) $(x-4)\sqrt{x+4}=x-4$;

б) $(x^2-16)\sqrt{2-x}=0$; г) $(x-1)\sqrt{5-x}=x^2-1$.

538. а) $(x^2-4x)\sqrt{x^2-7x+10}=0$; в) $\sqrt[3]{x^2-6x-16}\cdot\sqrt[6]{x^2+6x-27}=0$;

б) $(x^2-2x-3)\sqrt{6-x-x^2}=0$; г) $\sqrt[7]{x^2-4x-12}\cdot\sqrt{x^2-49}=0$.

Використовуючи метод заміни, розв'яжіть рівняння (539–540).

539. а) $\sqrt{x^2+12x}+\sqrt{x^2+12x+4}=2$; в) $\sqrt{2x^2-3x+7}+\sqrt{2x^2-3x+2}=5$;

б) $(x+2)(x+1)-4\sqrt{x^2+3x+5}=-6$; г) $5x^2+35x+2\sqrt{x^2+7x+1}=46$.

540. а) $\dfrac{x+1}{x}-2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=3$; в) $x^2-4x-\sqrt{2x^2-8x+12}=6$;

б) $\sqrt{\dfrac{x+5}{2x}}-3\sqrt{\dfrac{2x}{x+5}}=-2$; г) $3x^2-3x+2\sqrt{x^2-x-5}=20$.

541. При якому значенні x значення функції $y=\sqrt{x-1}$ дорівнює значенню функції $y=\sqrt{2}-\sqrt{x-1}$?

542. При якому значенні x значення функції $y=\sqrt{x+3}$ на 1 більше від значення функції $y=0,5\sqrt{x+3}$?

543. *Відкрита задача.* Знайдіть корені рівняння:

а) $(x-4)\sqrt{x^2-2x-3}=\ldots$; б) $(\ldots)\sqrt{2x-4}=x^2+3x-4$.

544. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2-8x+16}=3$; б) $\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{4x^2-4x+1}=x+4$.

Розв'яжіть систему рівнянь (545–549).

545. а) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ x+y=13;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28.\end{cases}$

546. а) $\begin{cases}\sqrt{3x+1}+\sqrt{2y-4}=6,\\ \sqrt{3x+1}-\sqrt{2y-4}=-2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{2x}-\sqrt{3y}=5,\\ \sqrt[4]{2x}-\sqrt[4]{3y}=1.\end{cases}$

547. а) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=1,\\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{3}{2},\\ x+y+xy=9.\end{cases}$

548. а) $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{4}{3},\\ xy=9;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2\sqrt{\dfrac{2x-y}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{2x-y}}=1,\\ x^2+3y^2=16.\end{cases}$

549. а) $\begin{cases}\sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5,\\ x^2+y^2=13;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{x+3y+1}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6.\end{cases}$

550. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x-5}=a+1$; б) $\sqrt{x}-1=a+5$; в) $(a+1)\sqrt{x-5}=0$; г) $(\sqrt{x}-1)(a+5)=0$.

551. При яких значеннях параметра a рівняння має один розв'язок:

а) $\sqrt{x}=x-a$; в) $(x-a)\left(\sqrt{x+3}-1\right)=0$;

б) $\left(\sqrt{x}-1\right)\left(a^2-x\right)=0$; г) $\sqrt{4x+a}=2x+1$?

Рівень В

Розв'яжіть рівняння (552–560).

552. а) $\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$;

б) $\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{3x^2+3x+19}$.

553. а) $\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}+\sqrt{x+9-4\sqrt{x+5}}=4$;

б) $\sqrt{x-4+4\sqrt{x-8}}-\sqrt{x-4-4\sqrt{x-8}}=2$.

554. а) $\sqrt[3]{x-7}+\sqrt{8-x}=1$; б) $\sqrt{x-1}=1-\sqrt[3]{2-x}$.

555. а) $\sqrt[3]{2x+4}+\sqrt[3]{x-3}=1$; б) $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{3x+7}=\sqrt[3]{x+1}$.

556. а) $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{x+15}=2$; б) $\sqrt[3]{13-x}+\sqrt[3]{22+x}=5$.

557. а) $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}-2\sqrt{x^2-5x}=2x-25$;

б) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$.

558. а) $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$;

б) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-6x+8}=\sqrt{x^2-11x+18}$.

559. а) $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$; б) $\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+6}=\sqrt{2x+3}+\sqrt{6x-2}$.

560. а) $x+4-\sqrt{\dfrac{x+4}{x-4}}=\dfrac{12}{x-4}$; б) $x+5-\sqrt{\dfrac{x+5}{x-3}}=\dfrac{6}{x-3}$.

561. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}x-y+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{20}{x+y},\\ x^2+y^2=34;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y-\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{6}{x-y},\\ x^2+y^2=41.\end{cases}$

562. При яких значеннях параметра a рівняння має розв'язки:

а) $\sqrt{x^2+4}=a-1$; б) $\sqrt{x-3}=\dfrac{5-a}{a+4}$?

563. Знайдіть кількість коренів рівняння залежно від значень параметра a.

а) $(x+3)\sqrt{x^2-2x+1}=a$; б) $\sqrt{x+3}=2x-a$.

Вправи для повторення

564. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

а) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$; в) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$; ґ) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$; е) $\frac{x}{\sqrt[4]{x^2}}$;

б) $\frac{5}{2\sqrt[3]{25}}$; г) $\frac{7}{5\sqrt[3]{49}}$; д) $\frac{m}{\sqrt[3]{m}}$; є) $\frac{n^2}{\sqrt[4]{n^3}}$.

565. Розв'яжіть нерівність:

а) $x^2 - x(3 + x) > 2(x - 1)$; б) $(x + 2)^2 \le (x - 3)^2$; в) $4x^2 + 6x > 9x^2 - 15x$.

566. Прочитайте вислів М. Амосова: *«У більшості хвороб винна сама людина. Найчастіше вона хворіє через лінощі й жадобу. Щоб бути здоровим, потрібні власні зусилля, постійні й значні»*. Підрахуйте частоту використання у цьому вислові літери «й».

567. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 13 см, а периметр — 30 см.

§ 11 Ірраціональні нерівності

Irrational Inequalities

Нерівність, яка містить змінну під знаком кореня, — ірраціональна. Наприклад, ірраціональними є нерівності:

$$\sqrt{x+1} > 4,\quad \sqrt[3]{x^2-6} \ge 3,\quad \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 2 < 0.$$

Розв'язують ірраціональні нерівності найчастіше методом піднесення обох її частин до одного і того самого степеня. При цьому можна користуватися теоремою, подібною до теореми на с. 96.

Теорема. *Нерівності $f(x) > g(x)$ і $f^n(x) > g^n(x)$ рівносильні, якщо натуральне число n непарне або функції $f(x)$ і $g(x)$ можуть набувати тільки невід'ємних значень.*

(Доведіть теорему самостійно за аналогією до доведення теореми на с. 96).

Наприклад.

1) Нерівність $\sqrt[3]{2-x} > x$ рівносильна нерівності $2 - x > x^3$. Її неважко розв'язати графічно. Зробіть це самостійно. Отримаємо: $x \in (-\infty; 1)$.

2) Нерівність $\sqrt{x-1} > 3$ рівносильна нерівності $x - 1 > 9$.

Розв'язавши її, отримаємо: $x \in (10; +\infty)$.

Розглянемо ірраціональну нерівність виду $\sqrt{f(x)} < g(x)$. Цю нерівність задовольняють тільки такі значення x, при яких:

1) $f(x) \geq 0$, бо підкореневий вираз не може бути від'ємним;

2) $g(x) > 0$, бо невід'ємне число $f(x)$ не може бути менше за від'ємне;

3) $f(x) < g^2(x)$, бо якщо обидві частини нерівності невід'ємні, то їх можна підносити до квадрата.

Отже, нерівність $\sqrt{f(x)} < g(x)$ рівносильна системі нерівностей:

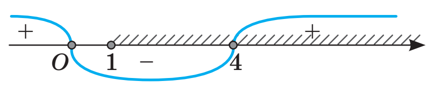
$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x+1} < x-1$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0, \\ x-1 > 0, \\ 2x+1 < x^2 - 2x + 1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \geq -0,5, \\ x > 1, \\ x^2 - 4x > 0, \end{cases} \quad \text{звідси} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x(x-4) > 0. \end{cases}$$

Розв'язавши останню систему (мал. 81), отримаємо: $x > 4$.



Мал. 81

Відповідь. $(4; +\infty)$.

Розглянемо тепер нерівність виду $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

Зрозуміло, що розв'язки даної нерівності мають задовольняти умову $f(x) \geq 0$. Очевидно, що при $g(x) < 0$ дана нерівність (на множині розв'язків нерівності $f(x) \geq 0$) виконується завжди. Якщо ж $g(x) \geq 0$, то обидві частини нерівності будуть невід'ємними, і їх можна піднести до квадрата. Отже, дана нерівність рівносильна сукупності двох систем: $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$

У другій системі перша нерівність є наслідком третьої, тому її можна не враховувати. Тоді отримаємо сукупність таких двох систем:

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$$

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x+1} > x-1$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 < 0, \\ 2x+1 \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 2x+1 > x^2 - 2x + 1 \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 1, \\ x \geq -0,5; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 1, \\ x(x-4) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

З першої системи $x \in [-0,5; 1)$, а з другої — $x \in [1; 4)$. Об'єднуючи ці розв'язки, отримаємо: $x \in [-0,5; 4)$.

Відповідь. $[-0,5; 4)$.

Хочете знати ще більше?

Інколи потрібно не розв'язати ірраціональну нерівність, а довести її. До ірраціональних належать нерівності, пов'язані із середнім квадратичним і середнім геометричним, які часто використовують у сучасній математиці та прикладних науках.

Вирази $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$, $\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$ називають відповідно середнім арифметичним, середнім геометричним і середнім квадратичним чисел a_1, a_2, ..., a_n і позначають відповідно літерами A_n, $Г_n$, $К_n$. Можна довести, що для додатних чисел a_1, a_2, ..., a_n завжди $Г_n \le A_n \le К_n$.

Запишіть такі твердження для $n = 3$ і $n = 4$ і спробуйте їх довести.

Нерівність $Г_n \le A_n$ для n додатних чисел називають *нерівністю Коші*:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Розглянемо ще одну нерівність.

Приклад 3. Доведіть, що для невід'ємних чисел a, b, c, d виконується нерівність

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \ge \sqrt{ab} + \sqrt{cd}. \qquad (*)$$

Скористаємося методом від супротивного. Припустимо, що існують невід'ємні числа a, b, c, d, для яких виконується нерівність $\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$. Оскільки обидві частини невід'ємні, то можемо піднести їх до квадрата. Отримаємо:

$(a+c)(b+d) < ab + 2\sqrt{abcd} + cd$ або $ab + ad + cb + cd < ab + 2\sqrt{abcd} + cd$, звідси $ad + cb < 2\sqrt{abcd}$, тобто $\left(\sqrt{ad} + \sqrt{cb}\right)^2 < 0$, чого не може бути. Отже, наше припущення неправильне, тобто має місце нерівність (*).

Перевірте себе

1. Яка нерівність називається ірраціональною?
2. Наведіть кілька прикладів ірраціональних нерівностей.
3. За яких умов можна підносити обидві частини нерівності до парного степеня?
4. Як розв'язувати нерівність виду $\sqrt{f(x)} < g(x)$?
5. Як розв'язувати нерівність виду $\sqrt{f(x)} > g(x)$?

Виконаємо разом

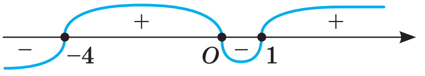
1 Розв'яжіть нерівність $\sqrt[3]{7x+1} \le x+1$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини нерівності до куба. Отримаємо рівносильну нерівність $7x + 1 \le x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. Розв'яжемо її:

$$x^3 + 3x^2 - 4x \ge 0,$$
$$x(x^2 + 3x - 4) \ge 0,$$
$$x(x + 4)(x - 1) \ge 0.$$

З малюнка 82 видно, що

$$x \in [-4;\ 0] \cup [1;\ +\infty).$$



Мал. 82

Відповідь: $[-4;\ 0] \cup [1;\ +\infty)$.

2 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x+3} > \sqrt{x-1}$.

Розв'язання. *Спосіб 1*. Нерівність $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі нерівностей $\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$

Отже, $\left(\sqrt{2x+3} > \sqrt{x-1}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0, \\ 2x+3 > x-1. \end{cases}$ Маємо: $\begin{cases} x \ge 1, \\ x > -4, \end{cases}$ звідси $x \in [1; +\infty)$.

Спосіб 2. Вираз $\sqrt{x-1}$ має зміст тільки при $x \ge 1$. При кожному з таких значень x значення підкореневих виразів невід'ємні і перше більше за друге. Отже, кожне значення $x \ge 1$ задовольняє дану нерівність.

Відповідь. $[1; +\infty)$.

3 Розв'яжіть нерівність $(x-1)(x-2) + 3\sqrt{x^2-3x} \ge 12$.

Розв'язання. Розкриємо дужки і запишемо дану нерівність у вигляді $x^2 - 3x + 2 + 3\sqrt{x^2-3x} - 12 \ge 0$ або $x^2 - 3x + 3\sqrt{x^2-3x} - 10 \ge 0$. Зробимо заміну: $\sqrt{x^2-3x} = t$, $t \ge 0$. Отримаємо нерівність $t^2 + 3t - 10 \ge 0$, звідси $t \le -5$, що неможливо, бо $t \ge 0$ або $t \ge 2$. Повертаючись до заміни, отримаємо нерівність $\sqrt{x^2-3x} \ge 2$, звідси $x^2 - 3x \ge 4$ або $x^2 - 3x - 4 \ge 0$. Розв'язавши останню нерівність, отримаємо: $x \in (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

Можна було робити заміну $x^2 - 3x = t$. Але тоді нерівність залишилася б ірраціональною, що ускладнило б її розв'язування.

Відповідь: $x \in (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

Виконайте усно

Розв'яжіть нерівність (568–571).

568. а) $\sqrt{x} > 3$; б) $\sqrt{2x} \ge 4$; в) $\sqrt[3]{x} > 2$; г) $\sqrt[4]{x} \ge 1$.

569. а) $\sqrt{x} < 5$; б) $\sqrt{3x} \le 3$; в) $\sqrt[3]{x} \le 4$; г) $\sqrt[6]{x} < 2$.

570. а) $\sqrt{x} > \sqrt{5}$; б) $\sqrt{x} > -\sqrt{5}$; в) $\sqrt[4]{x} \ge \sqrt{2}$; г) $\sqrt[3]{x} \ge \sqrt[6]{3}$.

571. а) $\sqrt{x} \le \sqrt{5}$; б) $\sqrt{x} < -\sqrt{5}$; в) $\sqrt[4]{x} < \sqrt{2}$; г) $\sqrt[3]{x} \le \sqrt[6]{3}$.

572. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

а) $2\sqrt[3]{x} \le 4$; б) $\sqrt{-x} \ge -\sqrt{3}$; в) $\sqrt[3]{x} < 3$; г) $\sqrt{2-x} > 0$.

Рівень А

Розв'яжіть нерівність (573–575).

573. а) $\sqrt{x-1} > 2$; б) $\sqrt{x+1} \ge 2$; в) $\sqrt[4]{x+2} \ge 3$; г) $\sqrt[3]{x-5} > 3$.

574. а) $\sqrt{x-1} < 2$; б) $\sqrt{x+1} \le 2$; в) $\sqrt[3]{x-3} < 3$; г) $\sqrt[4]{x+2} \le 1$.

575. а) $\sqrt{x-3} > -4$; б) $\sqrt{x-3} < -4$; в) $\sqrt[3]{x-3} < -2$; г) $\sqrt[4]{x-3} \ge -2$.

576. Множиною розв'язків якої з нерівностей є проміжок $[-3; 0]$:

а) $\sqrt{-x} \ge -\sqrt{3}$; б) $\sqrt{-x} \ge \sqrt{3}$; в) $\sqrt{x} \le -\sqrt{3}$; г) $\sqrt{-x} \le \sqrt{3}$?

577. Множиною розв'язків якої з нерівностей є відрізок, завдовжки 3:

а) $\sqrt{x} \le \sqrt{3}$; б) $\sqrt{-x} \le -\sqrt{3}$; в) $\sqrt{-x} \ge \sqrt{3}$; г) $\sqrt{x} \le -\sqrt{3}$?

Розв'яжіть нерівності (578–581).

578. а) $\sqrt{2x} \le x$; б) $\sqrt{x-1} < x$; в) $\sqrt{x^2+2x} \le x$; г) $\sqrt[3]{4x} \ge x$; ґ) $\sqrt{x+1} \ge x$.

579. а) $\sqrt{3x+1} < 3-x$; б) $\sqrt{x+5} \ge x-1$; в) $\sqrt{4x+5} \le 5-2x$; г) $\sqrt{5-4x} > 4x+1$.

580. а) $\sqrt{x^2-2x} < 5-x$; б) $\sqrt{x^2-3x} > 4-x$; в) $\sqrt{x^2-3x-10} \le 8-x$.

581. а) $\sqrt{2x+3} < \sqrt{x+5}$; б) $\sqrt{7-4x} \ge \sqrt{4-x^2}$; в) $\sqrt{x^2-4x} \le \sqrt{2x^2-x-6}$.

582. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

а) $\sqrt{x-1} < 1$; б) $\sqrt{x+5} \le 5$; в) $\sqrt[3]{x+2} < 3$; г) $\sqrt[3]{7-x} \ge 2$.

583. Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності:

а) $\sqrt{x+2} < 3$; б) $\sqrt{x+2} \ge x$; в) $\sqrt{3x-1} < \sqrt{x+5}$; г) $\sqrt{2x-1} \ge \sqrt{2-x}$.

Розв'яжіть нерівність, використовуючи метод заміни (584–585).

584. а) $\sqrt{x} - 17\sqrt[4]{x} + 16 < 0$; б) $\sqrt[3]{x-2} + 2\sqrt[6]{x-2} \ge 3$.

585. а) $\sqrt[3]{x^2} + 7\sqrt[3]{x} \ge 8$; б) $2\sqrt[4]{x+3} - 3\sqrt[8]{x+3} < 2$.

Рівень Б

Розв'яжіть нерівність (586–587).

586. а) $\sqrt{x^2-5x} > x$; б) $\sqrt{2x^2-7x+5} \ge 1-x$; в) $\sqrt{x^2+5x} > \sqrt{x^2-x-2}$.

587. а) $(x-1)\sqrt{x} \le 0$; б) $x\sqrt{x-1} \le 0$; в) $(x-1)\sqrt{x} \ge 0$; г) $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1} \le 0$.

Розв'яжіть нерівність, використовуючи метод заміни (588–589).

588. а) $\sqrt{x^2-3x+5} + x^2 - 3x - 7 \le 0$; б) $x^2 + 5x - 5\sqrt{x^2+5x+28} < -4$.

589. а) $\dfrac{8}{\sqrt{10-2x}} - \sqrt{10-2x} < 2$; б) $\dfrac{x+1}{x} - 2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}} > 3$.

Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності (590–592).

590. а) $(x-3)\cdot\sqrt[4]{x+2}\le 0$; б) $\sqrt{x+2}\cdot\sqrt[5]{x-1}\sqrt[8]{3-x}\ge 0$; в) $\sqrt[3]{x-2}\cdot\sqrt{x+3}\le 0$.

591. а) $\sqrt[4]{2x-x^2}>-1$; б) $\sqrt[6]{6-x-x^2}\ge -5$; в) $\sqrt{x-4}\cdot\sqrt[3]{x-3}\cdot\sqrt[5]{7-x}\ge 0$.

592. а) $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\le 0$; б) $\dfrac{\sqrt{5x}}{9-x^2}\ge 0$; в) $\dfrac{3}{\sqrt{x+5}}>1$; г) $\dfrac{2}{\sqrt{3-x}}<1$.

593. Знайдіть кількість цілих розв'язків нерівності:

а) $\sqrt{\dfrac{x+2}{4-x}}\ge 2$; б) $\sqrt{\dfrac{5x-1}{3x-2}}\le 1$; в) $\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x+2}\le 0$; г) $(x^2-9)\sqrt{x^2-x-2}\le 0$.

Розв'яжіть нерівність (594–596).

594. а) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\le 1$; б) $\sqrt{x+11}-\sqrt{x+3}\ge 2$; в) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\le 1$.

595. а) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}\le 5$; б) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}>3+x$.

596. а) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}\le\sqrt{4x+5}$; б) $\sqrt{\dfrac{3x^2+2x-1}{4+3x-x^2}}<1$; в) $\sqrt{\dfrac{3+x-2x^2}{5x^2+x-4}}>1$.

597. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{x+3}<2a$; б) $\sqrt{2|x|-3}\le a$; в) $\sqrt{x}\ge x-a$.

Рівень В

Розв'яжіть нерівність (598–601).

598. а) $\dfrac{\sqrt{5+4x-x^2}}{x+8}\le\dfrac{\sqrt{5+4x-x^2}}{2x+5}$; б) $\dfrac{\sqrt{7+6x-x^2}}{x+7}\ge\dfrac{\sqrt{7+6x-x^2}}{2x+1}$.

599. а) $(x-2)\sqrt{x^2+3x+2}\ge 0$; б) $(x-5)\sqrt{x^2-7x+6}\le 0$.

600. а) $\dfrac{\sqrt{x^2-2x-3}}{1-x}\ge 0$; б) $\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2-x-2}}\le 0$; в) $\dfrac{\sqrt{10-3x-x^2}}{x-3}\ge 0$.

601. а) $(x+2)\sqrt{x-3}\le x+2$; в) $(x-3)\sqrt{x^2-1}\le x^2-9$;

б) $(x-3)\sqrt{x+2}>x-3$; г) $(x-1)\sqrt{x^2+5}\le x^2-1$.

602. Розв'яжіть нерівність, використовуючи метод заміни:

а) $2x^2-13x<\sqrt{(x-3)(2x-7)}+9$; в) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-2x+13}\ge 6$;

б) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}-2\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}\ge -1$; г) $\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+2x-8}\le 2$.

Розв'яжіть нерівність (603–605).

603. а) $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}<\sqrt{x+1}$;

б) $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}\ge 2\sqrt{x-1}$.

604. а) $\sqrt{\dfrac{x^2-8x-20}{x-5}}\ge x-2$; б) $\sqrt{\dfrac{x^2+4x-32}{x-2}}\ge x-4$.

605. а) $\left|\sqrt{x^2-16}-2\right|\ge\left|\sqrt{x^2-16}-3\right|+1$; б) $\left|2-\sqrt{x^2-3x}\right|+2\left|\sqrt{x^2-3x}-1\right|\ge x^2-3x$.

606. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} < \dfrac{3}{2}, \\ \sqrt[5]{2x+1} \le \sqrt[5]{x^2-7}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x} < x+3, \\ \sqrt{\dfrac{2x-3}{4x-1}} \ge \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}. \end{cases}$

607. Розв'яжіть графічно систему нерівностей:

а) $\begin{cases} \sqrt{9-|x|} < 2, \\ \sqrt{x^2-2x+1} \ge 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{|x|-1} \ge 1, \\ \sqrt{x^2-6x+9} \le 7. \end{cases}$

608. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1} \le a$; б) $2\sqrt{x+a} > x+1$; в) $\sqrt{1-x^2} < a-x$.

609. При яких значеннях параметра a не має розв'язків нерівність:

а) $3\sqrt{1-4x^2}+a > x$; б) $\sqrt{a^2-x^2}+2x > 0$; в) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6} \le a$?

Вправи для повторення

610. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x^2-6x} = \sqrt{10-3x}$; б) $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-6} = 5$.

611. Обчисліть: а) $\dfrac{(-2)^{-10} \cdot 22^6}{44^{-3} \cdot 11^9}$; б) $\dfrac{3^4 \cdot (-6)^{10}}{81^{-2} \cdot 16^{-3}}$; в) $\dfrac{256 \cdot (-36)^{-3} \cdot 3^9}{(-1)^{26} \cdot 6^{18} \cdot 216^{-5}}$.

612. Побудуйте графіки функцій $y = \sqrt[3]{x-1}$ і $y = \sqrt[3]{x}-1$.

§ 12 Степені з раціональними показниками

Degrees with Rational Indicators

Повторимо і дещо розширимо відомості про степені.

1. Степенем числа a з натуральним показником $n > 1$ називають добуток n множників, кожен з яких дорівнює a, тобто $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}$.

2. Степенем числа a з показником 1 називають число a.

3. Будь-яке відмінне від нуля число в степені 0 дорівнює 1, тобто якщо $a \ne 0$, то $a^0 = 1$.

4. Якщо n — довільне натуральне число, а $a \ne 0$, то $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Ці означення повністю розкривають зміст поняття ***степеня з цілим показником***.

Наприклад, $(\sqrt{2})^0 = 1$, $3^{-1} = \frac{1}{3}$, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, $(2x)^{-4} = \frac{1}{(2x)^4}$, якщо $x \neq 0$.

Степінь a^n має зміст при кожному цілому n і дійсному $a \neq 0$. А, наприклад, вирази 0^0, 0^{-1}, 0^{-2} і т. п. не мають змісту, це не числа.

Розв'язування деяких прикладних задач потребує використання степенів з дробовими показниками.

Задача. У банк поклали 20 000 грн під 15 складних відсотків. Яку суму грошей отримає вкладник через 3 роки і 6 місяців?

Розв'язання. Використаємо формулу складних відсотків: $P_n = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$, де P — початкова сума грошей; r — кількість відсотків, яку банк нараховує за рік; n — кількість років, упродовж яких гроші були в банку.

За умовою задачі P = 20 000 грн, r = 15, n = 3,5, тому

$$P_{3,5} = 20\,000 \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right)^{3,5} = 20\,000 \cdot 1{,}15^{3,5}.$$

Дотепер ви не вміли обчислювати значення таких виразів, бо не розглядали степені з дробовим показником. Далі розглядатимемо степені вигляду $a^{\frac{m}{n}}$, де $m \in Z$, $n \in N$, $a > 0$.

Степенем числа a з показником $\frac{m}{n}$ називають корінь n-го степеня з числа a^m: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Для степенів додатних чисел a, b з дробовими (раціональними) показниками r і s справджуються такі самі властивості, як і для степенів із цілими показниками:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
2) $a^r : a^s = a^{r-s}$
3) $(a^r)^s = a^{rs}$
4) $(ab)^r = a^r b^r$
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

Ці властивості випливають із доведених на с. 80 властивостей коренів n-го степеня. Для прикладу доведемо першу властивість.

Нехай $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{t}$. Зведемо ці дроби до спільного знаменника: $r = \frac{mt}{nt}$, $s = \frac{pn}{tn}$.

Тоді $a^r \cdot a^s = a^{\frac{mt}{nt}} \cdot a^{\frac{pn}{tn}} = \sqrt[nt]{a^{mt}} \cdot \sqrt[nt]{a^{pn}} = \sqrt[nt]{a^{mt+pn}} = a^{\frac{mt+pn}{nt}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{t}} = a^{r+s}$.

Таке трактування степеня з дробовим показником відповідає введеному раніше поняттю степеня з цілим показником. Тому їх можна об'єднати і говорити про *степені з раціональними показниками*.

Обчислюючи степені з раціональними показниками, можна користуватися тотожностями $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ і $a^{\frac{m \cdot k}{n \cdot k}} = a^{\frac{m}{n}}$ (доведіть їх самостійно).

Наприклад, $32^{\frac{4}{5}} = \left(32^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 2^4 = 16;$ $2^{\frac{9}{3}} = 2^3 = 8.$

При будь-яких додатних основах значення степенів із дробовими показниками (здебільшого наближені) можна обчислювати, користуючись калькулятором.

Зверніть увагу! Степені з від'ємними основами і дробовими показниками не розглядаються.

Приклади. Обчисліть значення: а) $0{,}2^{-3}$; б) $5^{0{,}41}$.

Розв'язання.

а) [0] [,] [2] [xʸ] [(] [–] [3] [)] [=] 125. Отже, $0{,}2^{-3} = 125$.

б) [5] [xʸ] [0] [,] [4] [1] [=] 1,9345; $5^{0{,}41} \approx 1{,}9$.

З поданих вище властивостей 1)–5) випливає, що *вирази з дробовими показниками степенів і додатними основами можна перетворювати, як і вирази з цілими показниками*. Наприклад,

$$a^{\frac{1}{2}} + a = a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\left(1 + a^{\frac{1}{2}}\right);$$

$$\left(x^{\frac{3}{2}} - c\right)\left(x^{\frac{3}{2}} + c\right) = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 - c^2 = x^3 - c^2;$$

$$\frac{x^{0{,}75} - 25x^{0{,}25}}{x^{0{,}5} + 5x^{0{,}25}} = \frac{x^{0{,}25}\left(x^{0{,}5} - 25\right)}{x^{0{,}25}\left(x^{0{,}25} + 5\right)} = \frac{\left(x^{0{,}25} - 5\right)\left(x^{0{,}25} + 5\right)}{x^{0{,}25} + 5} = x^{0{,}25} - 5.$$

Хочете знати ще більше?

Чому розглядають тільки такі степені з дробовими показниками, основи яких — додатні числа? Тобто чому рівність

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

правильна тільки при $a > 0$? Бо якщо цю рівність поширили б і на від'ємні значення a, то мали б чимало неузгодженостей.

Розглянемо для прикладу вирази $(-4)^{\frac{1}{2}}$ і $(-4)^{\frac{2}{4}}$. Їх основи і показники степенів рівні, тому й значення виразів мали б бути рівними. А згідно з останньою рівністю

$$(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} \text{ — не існує;}$$

$$(-4)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

Ось чому **степені з дробовими показниками розглядають тільки за умови, що їх основи — додатні числа**. І значення степенів з дробовими показниками — числа додатні.

Наприклад, вирази $0^{-0,5}$, $(-2)^{\frac{2}{3}}$, $(-\pi)^{1,3}$ не мають змісту. Це записи, які не позначають ніяких чисел.

Перевірте себе

1. Що таке n-й степінь числа a?
2. Що розуміють під степенем числа з цілим від'ємним показником?
3. Чи можна підносити число 0 до степеня з цілим від'ємним показником?
4. Що розуміють під степенем числа з дробовим показником?
5. Які властивості мають степені додатних чисел із раціональними показниками?

Виконаємо разом

1 Обчисліть: а) $3^{0,5} \cdot 9^{0,75}$; б) $\left(81^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[5]{4}\right) : \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-3,6}\right)$.

Розв'язання. а) $3^{0,5} \cdot 9^{0,75} = 3^{0,5} \cdot 3^{2 \cdot 0,75} = 3^{0,5} \cdot 3^{1,5} = 3^2 = 9$;

б) $\left(81^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[5]{4}\right) : \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-3,6}\right) = \dfrac{81^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[5]{4}}{3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-3,6}} = \left(\dfrac{81}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \dfrac{2^{\frac{2}{5}}}{2^{-3,6}} = 27^{\frac{1}{3}}\left(2^{0,4} : 2^{-3,6}\right) =$

$= \sqrt[3]{27} \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48.$

Відповідь. а) 9; б) 48.

2 Розв'яжіть рівняння: а) $4 = x^{\frac{2}{7}}$; б) $x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} = 3$.

Розв'язання. а) ОДЗ: $(0; +\infty)$. Піднесемо обидві частини рівняння до степеня 7. Маємо: $\left(x^{\frac{2}{7}}\right)^7 = 4^7$ або $x^2 = 2^{14}$. Корені цього рівняння $x_1 = -2^7$, $x_2 = 2^7 = 128$. Від'ємний корінь відкидаємо.

б) ОДЗ: $(0; +\infty)$. Нехай $x^{\frac{1}{3}} = y$, тоді $x^{\frac{2}{3}} = y^2$. Маємо рівняння: $y^2 + 2y - 3 = 0$.

Його корені $y_1 = -3$, $y_2 = 1$. Від'ємний корінь відкидаємо. А якщо $x^{\frac{1}{3}} = 1$, то $x = 1$.

Зверніть увагу! Якби рівняння було записане у вигляді $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} = 3$, то воно мало б іншу ОДЗ і ще один корінь: $x = -27$.

Відповідь. а) 128; б) 1.

3 Спростіть вираз $\frac{m-n}{m^{0,5}-n^{0,5}}-\frac{m^{1,5}-n^{1,5}}{m-n}$.

Розв'язання. Зведемо дроби до спільного знаменника і виконаємо дії:

$$\frac{m-n}{m^{0,5}-n^{0,5}}-\frac{m^{1,5}-n^{1,5}}{m-n}=\frac{(m-n)(m^{0,5}+n^{0,5})}{(m^{0,5}-n^{0,5})(m^{0,5}+n^{0,5})}-\frac{m^{1,5}-n^{1,5}}{m-n}=$$

$$=\frac{m^{1,5}+mn^{0,5}-nm^{0,5}-n^{1,5}-m^{1,5}+n^{1,5}}{m-n}=\frac{mn^{0,5}-nm^{0,5}}{m-n}=$$

$$=\frac{m^{0,5}n^{0,5}(m^{0,5}-n^{0,5})}{(m^{0,5}-n^{0,5})(m^{0,5}+n^{0,5})}=\frac{m^{0,5}n^{0,5}}{m^{0,5}+n^{0,5}}.$$

Виконайте усно

Обчисліть (613–616).

613. а) $25^{\frac{1}{2}}$; б) $16^{\frac{1}{4}}$; в) $27^{\frac{1}{3}}$; г) $625^{\frac{1}{4}}$.

614. а) $8^{\frac{1}{3}}$; б) $81^{\frac{1}{4}}$; в) $32^{\frac{1}{5}}$; г) $0,16^{\frac{1}{2}}$.

615. а) $5\cdot16^{\frac{1}{4}}$; б) $-2\cdot8^{\frac{1}{3}}$; в) $0,5\cdot64^{\frac{1}{6}}$; г) $3^{-2}\cdot81^{\frac{1}{4}}$.

616. а) $27^{\frac{2}{3}}$; б) $9^{-\frac{3}{2}}$; в) $0,001^{-\frac{2}{3}}$; г) $0,0016^{\frac{3}{4}}$.

617. Знайдіть значення виразу:

а) $x\cdot x^{-2}$, якщо $x=-4$; б) $a\cdot a^{0,5}$, якщо $a=9$;

в) $\left(c^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(c^{\frac{1}{2}}+1\right)$, якщо $c=5$.

618. Які з виразів не мають змісту:

$2^{\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt{-4}$; $(-8)^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[5]{-32}$; $-8^{\frac{1}{3}}$; $(-32)^{\frac{3}{5}}$?

619. Яке з чисел є найбільшим, а яке — найменшим:

$\sqrt[5]{32}$; $-8^{\frac{1}{3}}$; $81^{\frac{3}{4}}$; $1000^{-\frac{2}{3}}$; $\sqrt[3]{-1}$?

Рівень А

Спростіть вираз (620–623).

620. а) $8^{\frac{2}{3}}\cdot7^0$; б) $81^{-\frac{4}{3}}\cdot3^4$; в) $49^{\frac{3}{2}}\cdot49^0$; г) $2^{-1}\cdot64^{\frac{2}{3}}$; д) $3^{-2}\cdot81^{\frac{1}{4}}$.

621. а) $2^{\frac{1}{2}}\cdot8^{\frac{5}{3}}\cdot4^{-2}$; б) $3^{0,5}\cdot9^{\frac{2}{4}}\cdot3^{-3}$; в) $0,4^{-\frac{2}{3}}\cdot0,4^{-\frac{1}{3}}\cdot0,4$.

622. а) $81^{-\frac{3}{4}}$; б) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$; в) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$; г) $100^{-\frac{1}{2}}$.

623. а) $64^{-\frac{2}{3}}$; б) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$; в) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$; г) $(0,008)^{-\frac{2}{3}}$.

Обчисліть, не користуючись калькулятором (624–627).

624. а) $2^{-3} - 0{,}5^3$; б) $8 \cdot 2^{-4}$; в) $1{,}2^0 - 2^{-4} \cdot 8$; г) $3^{\frac{2}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{0{,}1}$; ґ) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-0{,}7} \cdot 2^{1{,}4}$.

625. а) $2^{1{,}3} \cdot 2^{-0{,}7} \cdot 2^{1{,}4}$; б) $4^{0{,}7} \cdot 2^{-0{,}4}$; в) $2 \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$; г) $25^{0{,}3} \cdot 5^{1{,}4}$; ґ) $\sqrt[4]{9} \cdot 3^{-1{,}5}$.

626. а) $10^{\frac{2}{5}} \cdot 10^{-\frac{1}{2}} \cdot 10^{0{,}1}$; в) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{1\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{9}}$; ґ) $3 \cdot 9^{0{,}4} \cdot \sqrt[5]{3}$;

б) $8^{-\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}$; г) $\left(\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{2\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$; д) $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(64^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

627. а) $\left(5^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(5^{\frac{1}{2}} + 1\right)$; б) $\left(2^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{2}}\right)^2$; в) $2^{\frac{1}{2}} \cdot \left(8^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\right)$.

628. Яке з чисел більше:

а) $\left(64^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$ чи $\left(0{,}64^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$; б) $\left(32^{\frac{4}{5}}\right)^{-\frac{1}{4}}$ чи $\left(\sqrt{2}\right)^{-2}$?

629. Обчисліть за допомогою калькулятора:

а) $3{,}2^{0{,}2}$; б) $0{,}52^{-1{,}3}$; в) $13^{2{,}7} \cdot 2{,}5$; г) $3{,}5^{-4} \cdot 6^{2{,}3}$.

630. Запишіть за допомогою коренів вираз:

а) $x^{\frac{1}{5}}$; б) $(x-3)^{\frac{1}{3}}$; в) $ax^{\frac{4}{3}}$; г) $(c-2)^{\frac{3}{4}}$; ґ) $\left(x^2 - x + 5\right)^{\frac{3}{2}}$; д) $c(1-b)^{-\frac{2}{3}}$.

631. Запишіть без знаків кореня вираз:

а) $\sqrt[7]{x}$; б) $\sqrt[5]{(x-2)}$; в) $a^2\sqrt{x-a}$; г) $\sqrt[4]{3a^2 + c^2}$; ґ) $3 : \sqrt[5]{x+2}$; д) $\sqrt[4]{x + \sqrt{x}}$.

Замініть вирази з коренями тотожними їм степенями з дробовими показниками і виконайте відповідні дії (632–633).

632. а) $\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[15]{x^4}$; б) $\sqrt[12]{x^5} \cdot \sqrt[4]{x^3}$; в) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x}$; г) $\sqrt[4]{x} \cdot x^{-\frac{1}{4}}$.

633. а) $\sqrt[6]{a^5} : \sqrt[3]{a^2}$; б) $\sqrt[a]{a} : \sqrt[4]{a^3}$; в) $\sqrt[5]{a^4} : \sqrt[10]{a^7} : \sqrt[10]{a}$; г) $\sqrt{a^5} \cdot \sqrt[4]{a^3} : \sqrt{a^7}$.

Спростіть вираз (634–637).

634. а) $\left(3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\right)\left(3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\right)$; б) $\left(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)$; в) $(x - 4) : (x^{0{,}5} + 2)$.

635. а) $(a + x^{0{,}5})(a + x^{0{,}5})$; б) $\left(c^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{4}}\right)\left(c^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}}\right)$; в) $(a-b) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$.

636. а) $\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1\right)$; б) $\left(n^{\frac{1}{3}} + 2\right)\left(n^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{1}{3}} + 4\right)$; в) $(a-8) : \left(a^{\frac{1}{3}} - 2\right)$.

637. а) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2(ab)^{\frac{1}{2}}$; б) $\left(x + y^{\frac{1}{2}}\right)\left(y^{\frac{1}{2}} + x\right) + y$; в) $(1-x) : \left(1 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right) - 1$.

Розв'яжіть рівняння (638–640).

638. а) $x^{\frac{1}{3}} = 4$; б) $x^{\frac{1}{4}} = 3$; в) $x^{-0{,}5} = -3$; г) $x^{\frac{1}{6}} = 2$.

639. а) $x^{\frac{5}{2}} = 32$; б) $x^{\frac{4}{3}} = 81$; в) $x^{\frac{3}{2}} = 8$; г) $x^{\frac{6}{5}} = 64$.

640. а) $(x-1)^{\frac{2}{3}} = 9$; б) $(x+3)^{\frac{1}{4}} = 3$; в) $\left(x^2 - 1\right)^{\frac{2}{3}} = 4$; г) $\left(x^2 + 19\right)^{\frac{1}{2}} = 10$.

Рівень Б

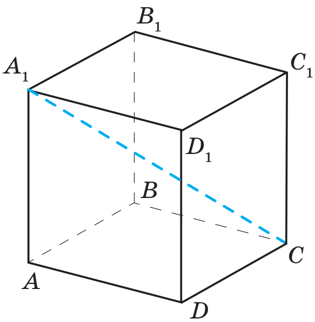
641. Розкладіть на множники:

а) $x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}$; б) $x^{\frac{2}{5}}-2x^{\frac{1}{5}}+1$; в) $ax^{\frac{2}{3}}-ax^{\frac{2}{3}}$; г) $a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1$.

642. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; в) $\dfrac{a^{1,5}+b^{1,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}$; г) $\dfrac{3a^{0,5}+a^{0,75}}{a\ -9a^{0,5}}$.

643. V, S і d — об'єм, площа поверхні і діагональ куба (мал. 83). Виразіть кожну з цих величин через кожну з інших.



Мал. 83

644. Запишіть за допомогою коренів вираз:

а) $c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{5}}$; б) $(a+b)^{\frac{2}{3}}$; в) $a^{\frac{1}{2}}-ax^{\frac{2}{3}}$; г) $(m^{0,5}+x^{1,5})^{0,5}$.

645. Спростіть вираз:

а) $\left(x^{0,4}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x^{0,8}$; в) $\left(c^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{5}}\cdot c^{1,6}$; ґ) $\left(x^{0,8}\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(x^{-\frac{2}{5}}\right)^{-1,5}$;

б) $x\left(x^{-1,2}\right)^{\frac{3}{4}}$; г) $\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{5}}\cdot x^{1,6}$; д) $c^{\frac{5}{3}}\left(c^{-\frac{1}{3}}\right)^{4}$.

646. Подайте у вигляді степеня:

а) $(a^{0,8})^{0,5}\cdot a^{0,6}$; б) $x^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{x}$; в) $y^{1,7}y^{2,8}y^{-1,5}$; г) $(m^{0,3})^{1,2}\cdot(m^{-0,4})^{0,4}$; ґ) $\sqrt[4]{c^3}\,\sqrt[5]{c}$.

Обчисліть (647–649).

647. а) $(27\cdot125)^{\frac{1}{3}}$; б) $\left(\dfrac{1}{36}\cdot0,04\right)^{\frac{1}{2}}$; в) $\left(\dfrac{1}{16}\cdot81^{-1}\right)^{-\frac{1}{4}}$; г) $\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}:\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

648. а) $(0,0001)^{-\frac{3}{4}}$; б) $3^{\frac{4}{3}}\cdot9^{2}\cdot27^{-\frac{5}{6}}\cdot3^{-\frac{3}{2}}$; в) $5^{\frac{4}{5}}\cdot125\cdot25^{-0,4}\cdot5^{-2}$; г) $27^{\frac{2}{3}}:(0,064)^{-\frac{1}{3}}$.

649. а) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75}+27^{\frac{2}{3}}-25^{0,5}$; б) $100^{\frac{1}{3}}\cdot0,2^{\frac{5}{3}}\cdot(\sqrt{2})^{\frac{8}{3}}$; в) $\left(\dfrac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}+81^{-0,75}-\left(\dfrac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$.

650. При тривалості теплового впливу 30 с і щільності теплового потоку 12 кВт/м^2 відбувається загоряння дерев'яних конструкцій; при 10,5 кВт/м^2 — обгоряє фарба на пофарбованих металевих конструкціях, обвуглюються дерев'яні конструкції. Людина відчуває сильний біль, коли температура верхнього шару шкірного покриву (~ 0,1 мм) підвищується до 45 °С. Час досягнення «порога болю» τ (с), пов'язаний зі щільністю теплового потоку q (кВт/м^2) співвідношенням $\tau=\left(\dfrac{35}{q}\right)^{1,33}$.

За допомогою калькулятора встановіть час досягнення «порога болю» в умовах: а) загоряння дерев'яних конструкцій; б) обвуглення дерев'яних конструкцій.

Розв'яжіть рівняння (651–652).

651. а) $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}-2=0$; б) $x^{\frac{1}{2}}-4x^{\frac{1}{4}}+3=0$; в) $x^{\frac{4}{5}}-13x^{\frac{2}{5}}+36=0$.

652. а) $\dfrac{x}{x^{0.5}+1}=1$; б) $\dfrac{x^3-1}{x^{1,5}-1}=9$; в) $(x+5)^{\frac{1}{2}}-(x-3)^{\frac{1}{2}}=2$.

Розв'яжіть систему рівнянь (653–655).

653. а) $\begin{cases} x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}=1, \\ x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=8, \\ x^{\frac{1}{2}}-2y^{\frac{1}{2}}=5. \end{cases}$

654. а) $\begin{cases} 2x^{\frac{1}{2}}-y=5, \\ x^{\frac{1}{2}}y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+3z^{\frac{1}{2}}=10, \\ xz^{\frac{1}{2}}=8. \end{cases}$

655. а) $\begin{cases} x-y=16, \\ x^{0,5}+y^{0,5}=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (5x+1)^{\frac{1}{2}}+2(y-2)^{\frac{1}{2}}=8, \\ 2(5x+1)^{\frac{1}{2}}-3(y-2)^{\frac{1}{2}}=2. \end{cases}$

Спростіть вираз (656–657).

656. а) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1}$; б) $\dfrac{x+c}{x^{\frac{2}{3}}-(xc)^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}}$; в) $\dfrac{c-x}{(cx)^{0,5}+x}$; г) $\dfrac{a^{1,3}x+a^{0,3}}{ax^{1,3}+x^{0,3}}$.

657. а) $\dfrac{a-1}{a^{0,75}+a^{0,5}}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}$; в) $\dfrac{c-1}{c+\sqrt{c}+1}:\dfrac{c^{0,5}+1}{c^{1,5}-1}+2c^{\frac{1}{2}}$;

б) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-\dfrac{ab}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$; г) $\dfrac{2\left(x^{0,25}-y^{0,25}\right)}{x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}}-x-y$.

Рівень В

658. Знайдіть область визначення, область значень і нулі функції:

а) $y=\left(3-x^{\frac{1}{4}}\right)\left(3+x^{\frac{1}{4}}\right)$; б) $y=(1-x):\left(1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)$; в) $y=\left(1+4x-4x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Розв'яжіть рівняння (659–660).

659. а) $(x-1)^{\frac{2}{3}}=2(x-1)^{\frac{1}{3}}+3$; б) $(x+2)^{\frac{1}{2}}=2+(x-6)^{\frac{1}{2}}$; в) $x^2+8x-6=\left(x^2+8x\right)^{\frac{1}{2}}$.

660. а) $(x+3)^{\frac{1}{2}}-3(x+3)^{\frac{1}{4}}=2$; б) $\left(9x^3+7\right)^{\frac{1}{4}}+\left(9x^3+7\right)^{\frac{1}{2}}=6$; в) $(x-4):\left(x^{\frac{1}{2}}+2\right)=2x$.

Спростіть вираз (661–662).

661. а) $\dfrac{a^{0,5}}{a^{0,5}b^{0,5}+b}-\dfrac{b^{0,5}}{a^{0,5}b^{0,5}+a}$; б) $\dfrac{a-x}{a^{0,5}-x^{0,5}}-\dfrac{a^{1,5}-x^{1,5}}{a-x}$;

в) $\dfrac{x^{0,5}}{x^{0,5}-6}-\dfrac{3}{x^{0,5}+6}+\dfrac{x}{36-x}$; г) $\dfrac{1-c^{-0,5}}{1+\sqrt{c}}-\dfrac{\sqrt{c}+c^{-0,5}}{c-1}$.

662. а) $\left(\sqrt{1-x^2}+1\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right)$; б) $\dfrac{a^{1,5}-1}{a^{0,5}+1}\cdot\dfrac{a-1}{a+a^{0,5}+1}+2a^{0,5}$;

в) $\left(\dfrac{1}{a-(xa)^{0,5}}+\dfrac{1}{a+(xa)^{0,5}}\right):\dfrac{a^2+ax+x^2}{a^3-x^3}$; г) $\dfrac{a-x}{a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a+a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}}+(ax)^{\frac{1}{4}}$.

663. Доведіть тотожність:

а) $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(a^{-\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}\right)^2}{a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}$; б) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}}{\left(a^{\frac{4}{3}}-8ba^{\frac{1}{3}}\right)a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}\cdot\left(2-a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\right)=-1$.

664. Знайдіть область визначення і спростіть вираз:

а) $4x^{-1}+(x+4)^{0,5}+\dfrac{1+2(x+4)^{-0,5}}{2-(x+4)^{0,5}}+4(x+4)^{-0,5}-\dfrac{x+7}{(x+4)^{0,5}}$;

б) $\left(\dfrac{(x+4)^{2,7}+27}{(x+4)^{0,9}+3}-3(x+4)^{0,9}\right):\left((x+4)^{1,8}-9\right)+\dfrac{6}{(x+4)^{0,9}+3}-\left((x+4)^{0,9}-3\right)^{-1}$.

665. Знайдіть значення виразу $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$, якщо

$$\left(x^2+(x^4y^2)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(y^2+(x^2y^4)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a.$$

Вправи для повторення

666. Узагальнюючим показником стану повітряного басейну є обсяг забруднювальних речовин у розрахунку на одного мешканця. У 2015 р. в Житомирській області найбільше навантаження від стаціонарних джерел забруднення на душу населення (у кг/особу) спостерігалося в Бердичівському — 41,6 кг/особу, Попільнянському — 28,5 кг/особу, Новоград-Волинському — 15,4 кг/особу районах області при середньому по області 7,2 кг/особу. Установіть, на скільки відсотків обсяг забруднювальних речовин у кожному з наведених районів перевищував середній по області. Дізнайтеся про обсяг забруднювальних речовин у вашому районі.

667. Зобразіть за допомогою кругів Ейлера співвідношення між поняттями «функції», «парні функції», «непарні функції».

668. Знайдіть значення виразу:

а) $\left(\sqrt[3]{5-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{5+\sqrt{17}}\right)^{-2}$; б) $\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$.

669. Побудуйте графік функції:

а) $y=x$; б) $y=x^2$; в) $y=x^3$.

§ 13 Степеневі функції

Degree Functions

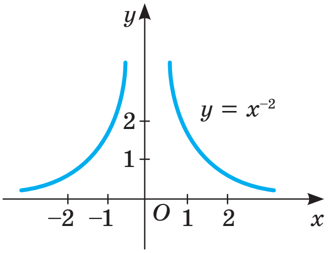
Сучасна людина живе у світі, що постійно змінюється. І ці зміни дуже зручно відображати за допомогою функцій та їх графіків. У цьому параграфі ми розглянемо широкий клас функцій, які описують процеси рельного світу.

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^{\alpha}$, де x — аргумент, α — дане число, називають *степеневою*.

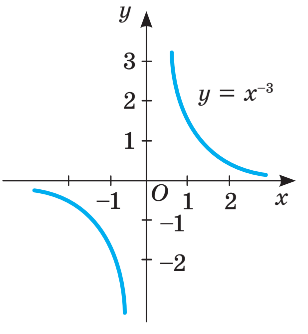
Уже відомі вам функції $y = x^2$ і $y = x^3$ (див. таблицю на с. 17) — приклади степеневих функцій. Подібні властивості мають також усі інші степеневі функції з натуральними показниками α. На малюнках 74 і 75 подано графіки степеневих функцій $y = x^4$ і $y = x^5$. Кожна степенева функція з натуральним показником степеня визначена на множині всіх дійсних чисел R.

Властивості функції $y = x^{2k}$, $k \in N$, схожі на властивості функції $y = x^2$, а функції $y = x^{2k+1}$, $k \in N$, подібні до властивостей функції $y = x^3$ (див. таблицю на с. 89).

Якщо показник α степеневої функції — ціле від'ємне число, то вона визначена на множині всіх дійсних значень аргументу x, крім $x = 0$. Наприклад, функція $y = x^{-1}$ — це вже відома нам обернена пропорційність $y = \dfrac{1}{x}$ (див. таблицю на с. 17). На малюнках 84 і 85 зображено графіки функцій $y = x^{-2}$ і $y = x^{-3}$.



Мал. 84



Мал. 85

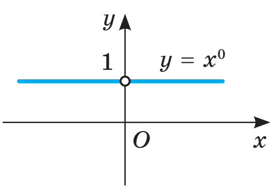
Якщо α — від'ємне парне ціле число, то графік функції $y = x^{\alpha}$ симетричний відносно осі ординат, а якщо α — від'ємне непарне, то графік симетричний відносно початку координат. Узагалі, при кожному цілому показнику степеня α функція $y = x^{\alpha}$ парна, якщо α — парне число, і непарна при непарному α.

Скористаємося графіками, зображеними на малюнках 85 і 86, і визначимо ще кілька властивостей цих функцій.

Важливіші властивості функції $y = x^{\alpha}$ із цілим від'ємним показником перелічені в таблиці.

Властивість	**Функція** $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \in Z, \alpha < 0)$	
	$\alpha = 2k$	$\alpha = 2k + 1$
$D(y)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
$E(y)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
$y > 0$	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$x \in (0; +\infty)$
$y < 0$	—	$x \in (-\infty; 0)$
Спадна	$x \in (0; +\infty)$	$x \in (-\infty; 0)$; $x \in (0; +\infty)$
Зростаюча	$x \in (-\infty; 0)$	—

На малюнку 86 зображено графік функції $y = x^0$. Опишіть її властивості самостійно.



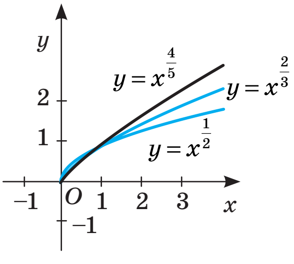
Мал. 86

Якщо число α дробове, то степенева функція $y = x^{\alpha}$ зазвичай розглядається лише на множині додатних значень аргументу або на множині невід'ємних значень, якщо $\alpha > 0$.

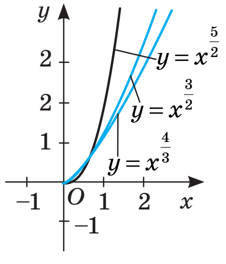
Такою, зокрема, є функція $y = x^{\frac{1}{2}}$, яку можна записати також у такому вигляді: $y = \sqrt{x}$.

Властивість	**Функція** $y = x^{\alpha}$ (α — дробове)	
	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
$D(y)$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
$E(y)$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
$y = 0$	$x = 0$	—
$y > 0$	$x \in (0; +\infty)$	$x \in (0; +\infty)$
Спадна	—	$x \in (0; +\infty)$
Зростаюча	$x \in (0; +\infty)$	—

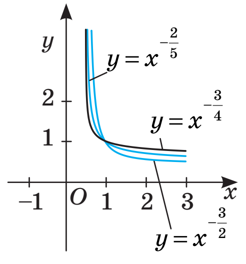
Графіки функцій з різними дробовими показниками зображено на малюнках 87–89.



Мал. 87

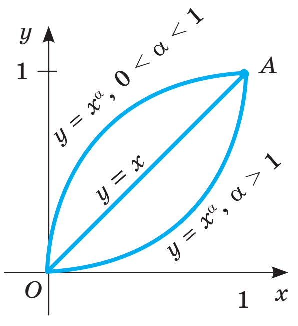


Мал. 88



Мал. 89

Скориставшись графіками, зображеними на цих малюнках, визначимо ще кілька властивостей функцій з дробовими показниками і внесемо їх до таблиці. Властивості функції $y = x^\alpha$ з дробовим показником наведено в другій таблиці на с. 120.



Мал. 90

Зверніть увагу на те, який вигляд має графік степеневої функції з додатним показником степеня α на проміжку [0; 1]. На цьому проміжку (мал. 90) графіком функції $y = x^\alpha$ є:

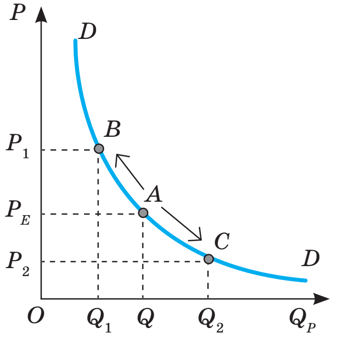
1) відрізок OA, якщо $\alpha = 1$;

2) крива, напрямлена опуклістю вниз, якщо $\alpha > 1$;

3) крива, напрямлена опуклістю вгору, якщо $0 < \alpha < 1$.

Чим більше додатне значення α ($\alpha > 1$), тим нижче від відрізка OA розміщується графік функції $y = x^\alpha$.

На практиці степеневі функції використовують для опису різних економічних процесів, зокрема, їх застосовують для опису кривих байдужості, а також попиту і пропозиції стосовно товарів різних категорій. Попит і пропозиція — важливі елементи ринкової економіки, оскільки їх співвідношення формує ціни на товари та послуги.



Мал. 91

Крива попиту (мал. 91) показує можливу кількість товару, який вдається продати за певний час за цінами даного рівня, зокрема, і те, що при підвищенні ціни ($P_1 > P_2$) величина попиту зменшується ($Q_1 < Q_2$).

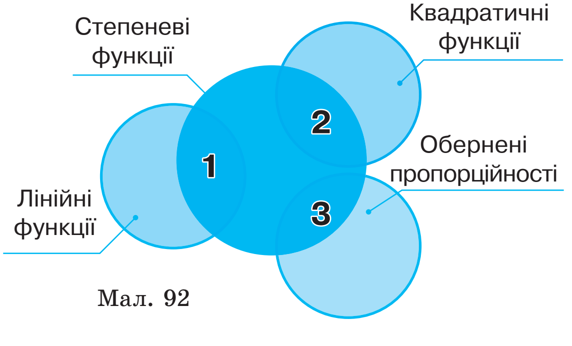
Хочете знати ще більше?

Оскільки досі вам були відомі тільки степені з раціональними показниками, то й степеневі функції розглядаємо тільки з раціональними показниками. Згодом поняття степеня буде розширено: розглядатимемо також степені з довільними дійсними показниками. Відповідно і поняття степеневої функції буде розширено. Науковці тепер степеневою називають функцію $y = x^\alpha$, де α — довільне дійсне число.

Іноді поняття степеневої функції ще більш узагальнюють. Так називають кожну функцію, яку можна задати формулою $y = kx^\alpha$.

Степенева функція поєднує кілька різних видів функцій.

На малюнку 92 схематично зображено співвідношення між деякими видами функцій.



Мал. 92

Цифрами 1, 2 і 3 позначено:

1 — функція, яка водночас є лінійною і степеневою (тільки $y = x$); 2 — функція, яка водночас є квадратичною і степеневою (тільки одна: $y = x^2$); 3 — функція, яка водночас є і степеневою, і оберненою пропорційністю (тільки одна: $y = x^{-1}$).

Перевірте себе

1. Сформулюйте означення степеневої функції з натуральним показником.
2. Які обмеження накладають на аргумент x функції $y = x^n$, якщо $n < 0$?
3. Які види степеневої функції вам відомі?
4. Як розміщений на координатній площині графік функції $y = x^n$, $n \in N$, якщо: а) n — непарне число; б) n — парне число?
5. Сформулюйте загальні властивості степеневих функцій.

Виконаємо разом

1 Чи проходить графік функції $y = x^{0,75}$ через точку (16; 8)?

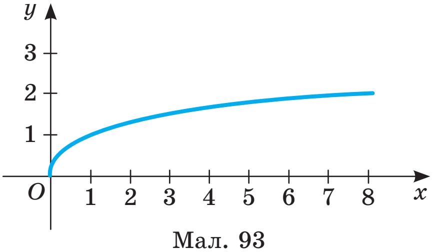
Розв'язання. Якщо $x = 16$, то $y = 16^{0,75} = 16^{\frac{3}{4}} = 8$.

Відповідь. Проходить.

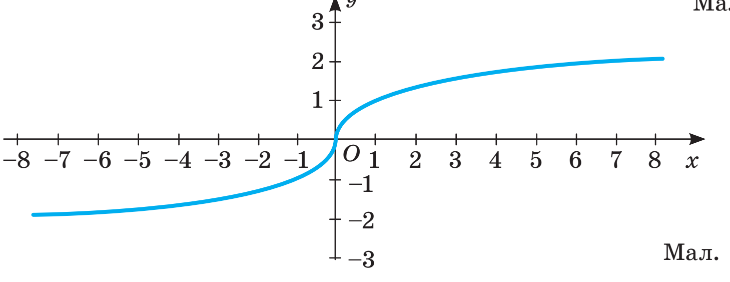
2 Побудуйте графіки функцій $y = x^{\frac{1}{3}}$ і $y = \sqrt[3]{x}$. Що є спільного у графіків цих функцій і чим вони різняться?

Розв'язання. $y = x^{\frac{1}{3}}$ — степенева функція з дробовим показником. Її область визначення $D = [0 + \infty)$. Графік розташований у I чверті (мал. 93).

Область визначення функції $y = \sqrt[3]{x}$ — множина всіх дійсних чисел R. Її графік розташований у I і III чвертях (мал. 94).



Мал. 93



Мал. 94

Для $x \geq 0$ графіки функцій $y = x^{\frac{1}{3}}$ і $y = \sqrt[3]{x}$ однакові.

Виконайте усно

670. Які з наведених функцій є степеневими:
а) $y = x^2$; б) $y = x^{-1}$; в) $y = x^{0,3}$;
г) $y = 3x^{-1}$; ґ) $y = x^2 + x$; д) $y = \frac{1}{x^2}$; е) $y = (2x)^{-1}$?

671. Чи може графік степеневої функції проходити через початок координат? Якщо може, то наведіть приклад.

672. Чи є степеневою функція $y = \frac{-1}{x}$? А функція $y = (-x)^{-2}$?

673. Чи проходить графік функції $y = x^{\frac{2}{3}}$ через точку (27; 9)?

674. Чи проходить графік функції $y = x^{\frac{3}{4}}$ через точку (16; –8)?

675. Що більше: а) $0,1^{\frac{2}{3}}$ чи $0,1^{\frac{3}{4}}$; б) $10^{\frac{2}{3}}$ чи $10^{\frac{3}{4}}$?

Рівень А

676. Побудуйте графік функції $y = x^2$ на проміжку:
а) [–3; 3]; б) [–2; 0]; в) [2; 3].

677. Дано функцію $y = x^3$ на проміжку [–2; 1]. Побудуйте її графік. Чи є дана функція парною або непарною?

678. Відомо, що функція $y = x^8$ при $x = c$ має значення p. Чому дорівнює значення цієї функції при $x = -c$?

679. Функція $y = x^7$ при $x = c$ має значення m. Чому дорівнює значення цієї функції при $x = -c$?

680. Доведіть, що графік кожної степеневої функції проходить через точку $A(1; 1)$.

681. Чи проходить графік функції $y = x^{0,25}$ через точку $M(16; 8)$? А через точку $M_1(16; 2)$?

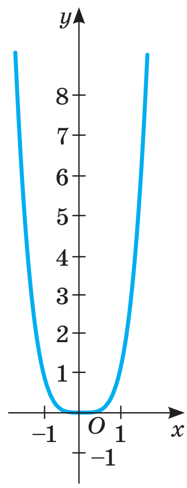
682. Які з точок належать графіку функції: а) $y = x^2$; б) $y = \sqrt{x}$:
а) (0,1; 0,01); б) (0,16; –0,4); в) (–10; 100);
г) $D\left(-\frac{4}{9}; -\frac{2}{3}\right)$; ґ) $E\left(2\frac{7}{9}; 1\frac{2}{3}\right)$; д) $F\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{9}\right)$?

683. Зіставте властивості функцій $y = (-x)^2$, $y = -x^2$, $y = x^{-2}$. Які з них степеневі? Побудуйте ескізи їхніх графіків.

684. Степенева функція задана таблицею. Якою формулою її можна задати?

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4
y	64	27	8	1	$\frac{8}{27}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{64}$

685. За графіком функції $y = x^4$ (мал. 95) опишіть її властивості: яка область визначення цієї функції; на яких проміжках вона зростає; на яких — спадає; при якому значенні x функція має найменше значення; чи має вона найбільше значення; чи є дана функція або парною, або непарною, або періодичною.



Мал. 95

686. За графіком функції $y = x^5$ (див. мал. 75), опишіть її властивості.

687. Побудуйте графік функції: а) $y = x^4 + 1$; б) $y = x^4 - 1$.

688. Відомо, що графік функції $y = x^\alpha$ проходить через точку $P\left(2; \dfrac{1}{4}\right)$. Чому дорівнює α?

689. Функцію задано формулою $y = x^\alpha$. Знайдіть α, якщо графік функції проходить через точку:
а) $A(7;\ 49)$; в) $B(13;\ 169)$; ґ) $C(144;\ 12)$;
б) $D(81;\ 9)$; г) $M(-64;\ -4)$; д) $N(-216;\ -6)$.

690. При якому значенні α графік функції $y = x^\alpha$ проходить через точку $K\left(-2; \dfrac{1}{4}\right)$?

691. Знайдіть значення функції $f(x)$ в точці x_0, якщо:

а) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $x_0 = 4$; в) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $x_0 = 4$;

б) $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$, $x_0 = 8$; г) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$, $x_0 = 16$.

692. Для функції $y = x^{\frac{2}{3}}$ знайдіть: $f(0)$, $f(1)$, $f(8)$, $f(27)$, $f(64)$.

693. Для функції $y = x^{-\frac{3}{2}}$ знайдіть: $f(1)$, $f(4)$, $f(16)$, $f(25)$.

694. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = (x+2)^{\frac{1}{2}}$; в) $y = (4-x)^{\frac{1}{5}}$; ґ) $y = \sqrt[5]{x-4}$;

б) $y = \left(\dfrac{x+3}{x-4}\right)^{\frac{1}{6}}$; г) $y = (2 + x - x^2)^{0,25}$; д) $y = \left(x^2 + 4x - 5\right)^{-\frac{1}{3}}$.

695. Побудуйте і порівняйте графіки функцій:

а) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ і $g(x) = x^{\frac{1}{5}}$; б) $f(x) = \sqrt{x}$ і $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$.

696. Побудуйте схематично графіки функцій:
а) $y = x^{-2}$; б) $y = x^{2,5}$; в) $y = x^{-5}$.

697. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = x^4$; б) $y = x^{\frac{1}{4}}$; в) $y = x^{-4}$; г) $y = x^{-\frac{1}{4}}$.

698. Розв'яжіть графічно рівняння:
а) $x^4 = x$; б) $x^{0,5} = 2 - x$; в) $2x^5 = 3 - x$.

Рівень Б

699. Порівняйте вирази, якщо $\alpha > 0$:

а) $0{,}15^{\alpha}$ і $0{,}34^{\alpha}$; б) $0{,}17^{\alpha}$ і $0{,}23^{\alpha}$; в) $3{,}1^{\alpha}$ і $4{,}52^{\alpha}$; г) $2{,}78^{\alpha}$ і $6{,}9^{\alpha}$.

700. Порівняйте вирази, якщо $0 < q < 1$:

а) $0{,}47^{q}$ і $0{,}51^{q}$; б) $0{,}39^{q}$ і $0{,}42^{q}$; в) $3{,}14^{q}$ і $4{,}73^{q}$; г) $9{,}2^{q}$ і $11{,}38^{q}$.

701. Порівняйте числа:

а) $5^{\frac{1}{2}}$ і $7^{\frac{1}{2}}$; б) $5^{\frac{1}{3}}$ і $7^{\frac{1}{3}}$; в) $5^{-\frac{1}{2}}$ і $7^{-\frac{1}{2}}$; г) $5^{\frac{3}{2}}$ і $7^{\frac{3}{2}}$.

702. Порівняйте числа:

а) $3^{\frac{1}{4}}$ і $3^{\frac{1}{6}}$; б) $3^{-\frac{1}{4}}$ і $3^{-\frac{1}{6}}$; в) $(0{,}2)^{\frac{3}{2}}$ і $(0{,}2)^{\frac{3}{2}}$; г) $(0{,}2)^{-\frac{5}{2}}$ і $(0{,}2)^{-\frac{3}{2}}$.

703. Функцію задано формулою $y = x^{q}$. Знайдіть q, якщо графік функції проходить через точку:

а) $B(16;\ 0{,}25)$; б) $C\left(27;\ \frac{1}{9}\right)$; в) $K\left(625;\ \frac{1}{5}\right)$; г) $P\left(1024;\ \frac{1}{4}\right)$; ґ) $T\left(243;\ \frac{1}{3}\right)$.

704. Для поданих нижче функцій вкажіть нулі функції (якщо такі є) та проміжки зростання чи спадання:

а) $y = x^{9}$; б) $y = x^{20}$; в) $y = x^{\frac{13}{3}}$; г) $y = x^{-7}$; ґ) $y = x^{-24}$; д) $y = x^{-\frac{17}{4}}$.

Побудуйте схематично графік функції (705–706).

705. а) $y = x^{-9} - 2$; б) $y = x^{-7} + 1$; в) $y = x^{-20} + 3$.

706. а) $y = x^{-12} - 1$; б) $y = x^{-0{,}9} + 2$; в) $y = x^{-2{,}5} - 3$.

707. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = (x-3)^{\frac{1}{2}} + 2$; б) $y = (x+4)^{\frac{2}{3}} + 1$; в) $y = (x-1)^{\frac{3}{2}} - 2$; г) $y = (x+3)^{-\frac{1}{2}} + 4$.

708. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $x^{\frac{1}{2}} = 6 - x$; б) $x^{\frac{3}{2}} = x^{-2}$; в) $x^{\frac{1}{4}} = x^{3}$; г) $x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$.

709. Знайдіть значення функцій $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = x^{\frac{5}{2}}$, $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $y = x^{-\frac{3}{2}}$, $y = x^{-\frac{5}{2}}$ у точці $x = 3$, якщо відомо, що $3^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}73$. Результати запишіть у таблицю.

$3^{\frac{1}{2}}$	$3^{\frac{3}{2}}$	$3^{\frac{5}{2}}$	$3^{-\frac{1}{2}}$	$3^{-\frac{3}{2}}$	$3^{-\frac{5}{2}}$

Яка з функцій у точці 3 має найбільше значення, а яка — найменше?

Рівень В

710. Оцініть значення функції $y = x^{\frac{5}{3}}$, якщо:

а) $0 \le x \le \frac{1}{27}$; б) $0{,}001 < x < 0{,}125$; в) $x \le 64$; г) $x \ge 3\frac{3}{8}$.

711. Оцініть значення x, якщо:

а) $0{,}001 < x^{-\frac{4}{3}} < 0{,}008$; б) $32 \le x^{\frac{2}{5}} \le 243$; в) $\frac{1}{64} \le x^{-\frac{4}{3}} < \frac{27}{64}$; г) $0 \le x^{\frac{3}{4}} \le \frac{1}{64}$.

Знайдіть найбільше і найменше значення функції (712–714).

712. $y = x^{\frac{3}{2}}$ на проміжках $[0;\ 1]$, $[1;\ 9]$, $[16; +\infty)$.

713. $y = x^{-\frac{3}{2}}$ на проміжках $[1;\ 9]$, $[0{,}25;\ 4]$, $[25; +\infty)$.

714. $y = x^{\frac{4}{3}}$ на проміжках $[0;\ 1]$, $[1;\ 8]$, $[0;\ 8]$.

715. Запишіть рівняння степеневої функції $y = f(x)$, якщо:

а) $f(-2) = 4$, $f(3) = 9$; б) $f(-1) = -1$, $f(2) = 8$.

716. Зіставте властивості функцій $y = x^{\frac{2}{3}}$ і $y = x^{\frac{3}{2}}$. Складіть порівняльну таблицю.

717. Використовуючи властивість функції, розв'яжіть рівняння:

а) $x^{\frac{3}{2}} = 12 - x$; б) $x^{\frac{1}{3}} = 10 - x$; в) $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{8}$; г) $x^{\frac{3}{2}} = 16x^{-\frac{1}{2}}$.

Розв'яжіть графічно рівняння (718–719).

718. а) $|x-2|^{\frac{1}{3}} = 2$; б) $(x-2)^{\frac{1}{3}} = 2$; в) $(|x|-2)^{\frac{1}{3}} = 2$.

719. а) $(x - 5)^2 = |x-5|^{\frac{1}{3}}$; б) $|x-5|^2 = (x-5)^{\frac{1}{3}}$; в) $(|x|-5)^2 = (|x|-5)^{\frac{1}{3}}$.

720. Знайдіть кількість цілих розв'язків нерівності:

а) $x^4 \le 2 + x^{\frac{2}{3}}$; б) $10 - x^3 > x^{\frac{2}{5}}$; в) $(x - 7)^5 < x^{-\frac{4}{3}}$.

721. Для кожного значення параметра a визначте кількість коренів рівняння:

а) $x^{\frac{2}{3}} - 1 = x^2 + a$; б) $a - (x - 5)^4 = x^{\frac{3}{4}}$.

Вправи для повторення

722. Обчисліть значення виразу:

а) $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}} \cdot \sqrt[4]{9+\sqrt{65}}$; б) $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}}$.

723. Якою цифрою закінчується число $a = 123^6 + 111^{12}$?

724. Морська вода містить 5 % солі. Скільки кілограмів прісної води треба додати до 40 кг морської води для того, щоб вміст солі в ній становив 2 %?

725. Щомісячна плата за оренду приміщення становить 2500 грн. Запишіть у вигляді формули залежність загальної суми коштів, витраченої на оренду приміщення протягом року, від кількості місяців. Побудуйте графік отриманої функції. Встановіть область визначення і область значень цієї функції.

Скарбничка досягнень

- ✓ Знаю, що коренем n-го степеня з числа a називають число, n-й степінь якого дорівнює a:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

- ✓ Умію використовувати властивості арифметичних коренів ($b \neq 0$, $n \in N$ і $k \in N$):

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; 2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; 3) $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$;

4) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$; 5) $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$; 6) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

- ✓ Для винесення множника за знак кореня використовую такі формули:

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|; \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$$

- ✓ Знаю, що $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ і вмію використовувати властивості степеня: ($a > 0$, $b > 0$, $r \in Q$, $s \in Q$):

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; 2) $a^r : a^s = a^{r-s}$; 3) $(a^r)^s = a^{rs}$;

4) $(ab)^r = a^r b^r$; 5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$; 6) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-r} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^r$

Графік кожної степеневої функції $y = x^a$ проходить через точку (1; 1).

- ✓ Умію розв'язувати ірраціональне рівняння, використовуючи зокрема такі системи:

1) $\left(\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = q(x); \end{cases}$

2) $\left(\sqrt[2k]{f(x)} = g(x)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^{2k}(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$

3) $\left(\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x)\right) \Leftrightarrow (f(x) = g^{2k+1}(x))$

- ✓ Умію розв'язувати ірраціональні нерівності:

$$1)\left(\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < \left(g(x)\right)^{2n}; \end{cases}$$

$$2)\left(\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > \left(g(x)\right)^{2n}; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \end{array} \right.$$

$$3)\ \left(\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x)\right) \Leftrightarrow (f(x) < (g(x))^{2n+1})$$

Перевіряємо набуті компетентності

Тестові завдання № 2

1 Обчисліть $\sqrt[6]{64}$.

А	Б	В	Г
4	2	± 4	± 2

2 Знайдіть область визначення функції $u=\sqrt{4-x^2}$.

А	Б	В	Г
$(-\infty;-2]\cup[2;+\infty);$	$x\neq\pm 2;$	$[-2;\ 2]$	$(-2;\ 2)$

3 Знайдіть корені рівняння $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.

А	Б	В	Г
± 3	± 2	3	$\pm\sqrt{7}$

4 Який з виразів не має змісту.

А	Б	В	Г
$\sqrt[5]{0}$	$2^{-\frac{1}{3}}$	$(-2)^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{-2}$

5 Обчисліть $7^0+\sqrt{32^{0,4}}$.

А	Б	В	Г
2	-4	3	-15

6 Яке з чисел найменше?

А	Б	В	Г
$\sqrt{0,01}$	$\sqrt[3]{-8}$	2^{-3}	$-27^{\frac{1}{3}}$

7 Скільки цілих коренів має рівняння $\sqrt{x-10}\cdot\sqrt[3]{x-5}\cdot\sqrt[4]{12-x}=0$?

А	Б	В	Г
один	два	три	жодного

8 Розкладіть на множники вираз $x^{\frac{3}{4}}-y^{\frac{3}{4}}$.

А	$\left(x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}\right)$	**В**	$\left(x^{\frac{3}{8}}-y^{\frac{3}{8}}\right)\left(x^{\frac{3}{8}}+y^{\frac{3}{8}}\right)$
Б	$\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}\right)$	**Г**	$\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)^3$

9 Знайдіть суму коренів рівняння $\left(x^2-2x-3\right)\cdot\sqrt[4]{2-x}=0$.

А	Б	В	Г
-2	2	1	5

10 Знайдіть значення виразу $\sqrt[5]{x^2\sqrt[4]{x^{-3}}}$ при $x = 4$.

А	Б	В	Г
4	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt[4]{2}$

Типові завдання до контрольної роботи № 2

1 Запишіть у вигляді степеня:

а) $a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-2}$; б) $\left(p^{0,1}\right)^2 \cdot p^{\frac{2}{5}} \cdot p^{-0,4}$; в) $\sqrt[4]{c^{12}} \cdot c^{1,5} : c^{0,5}$; г) $\left(\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^2$.

2 Знайдіть значення виразу:

а) $2\sqrt[3]{-27} + \sqrt[6]{64} + \sqrt[4]{81}$;

б) $\sqrt[4]{16 \cdot 625 \cdot 0,0001}$;

в) $25^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{16} \cdot (0,001)^{-\frac{1}{3}}$;

г) $\left((27)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \left((64)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}$.

3 Знайдіть область визначення функції:

а) $y = (x+2)^{\frac{1}{5}}$; б) $y = \sqrt[4]{x^2 - 3x}$.

4 Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt[3]{x^2 + 2} = 3$; б) $\sqrt{x+2} = x$.

5 Побудуйте графік функції $y = \sqrt[4]{x+3} - 1$. Знайдіть: область визначення, область значень, нулі функції та проміжки монотонності.

6 Обчисліть:

а) $\sqrt[5]{6 - 2\sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{6 + 2\sqrt{17}}$;

б) $\left(1 + \sqrt[4]{5}\right)\left(1 - \sqrt[4]{5}\right)\left(1 + \sqrt{5}\right)$;

в) $\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^2$.

7 Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}}$; б) $\dfrac{a - a^{\frac{1}{2}}}{a - 2a^{\frac{1}{2}} + 1}$; в) $\dfrac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{a + \sqrt{ab} + b}$.

8 Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{8 + 7x - x^2} = x + 1$; б) $\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1} - 6 = 0$.

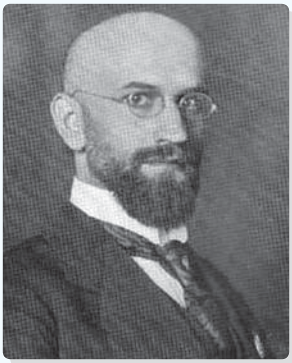
9 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{4 - 3x - x^2} > x + 1$.

10 Спростіть вираз $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{b}{a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right) : \dfrac{2a^{\frac{1}{2}}}{a - b}$.

Розділ 3

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Trigonometric Functions

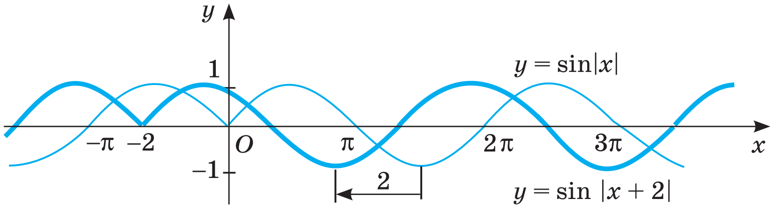


Микола Андрійович ЧАЙКОВСЬКИЙ
(1887–1970)

Український математик, педагог, письменник. Мав значні наукові здобутки в галузі математики. Автор понад 60 наукових праць. Серед них підручники «Тригонометрія» (1921), «Чотирицифрові таблиці логарифмів і тригонометричних функцій» (1917, 1931). Значний внесок зробив у справу створення української математичної термінології та впорядкування української математичної бібліографії.

«Одні кажуть, що всі наукові терміни треба вживати так, як вони прийнялися в інших європейських мовах; зате другі раді б конче кожне слово за всяку ціну перекласти на українське. Ми далекі від того, щоб підписатися під другою крайністю: ...багато чужих слів здобуло собі в іншій мові право громадянства, й ми зовсім не маємо потреби їх викидати...»

М. А. Чайковський



НАБУВАЄМО ДОСВІДУ ТА КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ

- Радіанне вимірювання кутів
- Тригонометричні функції числового аргументу
- Періодичність функцій
- Властивості та графіки тригонометричних функцій
- Тригонометричні формули

- Встановлювати відповідність між дійсними числами і точками на одиничному колі
- Виконувати перехід від радіанної міри кута до градусної і навпаки
- Формулювати означення і властивості тригонометричних функцій
- Будувати графіки періодичних функцій та ілюструвати їхні властивості
- Перетворювати тригонометричні вирази та обчислювати їхні значення

Навчальний проект № 3. **ПЕРІОДИЧНІ ПРОЦЕСИ У ТЕХНІЦІ ТА ПЕРІОДИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ У МИСТЕЦТВІ**

§ 14 Синус, косинус, тангенс і котангенс кута

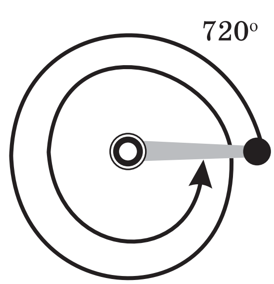
Sinus, Cosine, Tangent and Cotangent of Angles

У житті ми часто стикаємося з процесами, які відбуваються з певною періодичністю. Скажімо, на зміну зимі приходить весна, на зміну весні — літо, на зміну літу — осінь, на зміну осені — зима, знову весна і все повторюється з року в рік. Так само змінюються ранок, день, вечір і ніч. Періодичні процеси відбуваються в багатьох механізмах (рух поршня, маятника) і живих організмах (пульсація серця, дихання).

Мати справу з процесами, які періодично повторюються, доводиться багатьом фахівцям. Моделювати такі процеси найзручніше за допомогою синуса, косинуса, тангенса і котангенса. Їх разом називають тригонометричними функціями. Ця назва походить від назви давньої науки «тригонометрія». Раніше тригонометрію найчастіше використовували для розв'язування трикутників, а за їх допомогою — розв'язування багатьох геометричних і геодезичних задач. У XX ст. такі задачі навчилися розв'язувати іншими способами і засобами, навіть простішими і точнішими, тому тепер тригонометрія втратила попередню цінність і її не відносять до сучасних наук. Але поняття *синус*, *косинус*, *тангенс* і *котангенс* у різних науках продовжують відігравати важливу роль. Особливо, коли йдеться про різні обертальні рухи, періодичні процеси та явища.

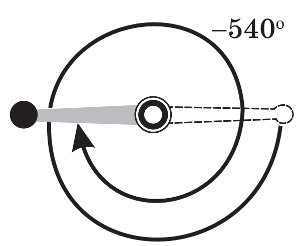
Дещо про ці функції ви вже знаєте з уроків геометрії. Згадаймо, наприклад, теореми косинусів і синусів.

Зверніть увагу! У геометрії розглядають $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ за умови, що α — кут трикутника або опуклого многокутника, тобто коли $0° < \alpha < 180°$. Досліджуючи періодичні процеси, під α розуміють кут повороту (обертання). А він може бути як завгодно великим і як завгодно малим — додатним і від'ємним.



Мал. 96

Повороти в напрямку руху годинникової стрілки домовилися вважати від'ємними, а в протилежному — додатними. Наприклад, повернути корбу на 720°, на −540° — це означає повернути її, як показано на малюнках 96 і 97.



Мал. 97

Одному, двом, трьом, ..., n обертам відповідають кути 360°, 720°, 1080°, ..., 360° n.

Введемо поняття синуса, косинуса, тангенса і котангенса будь-якого кута. Зробимо це за допомогою одиничного кола.

Якщо центром кола є початок координат, а його радіус дорівнює 1, то таке коло називають одиничним колом.

Нехай на координатній площині дано одиничне коло і його початковий радіус OP (мал. 98). Говорять, що точка A одиничного кола відповідає куту α, якщо $\angle POA = \alpha$. Зображені на малюнку 99 точки P, A, B, C, D, E, F, P відповідають кутам $0°$, $60°$, $90°$, $135°$, $180°$, $270°$, $300°$, $360°$.

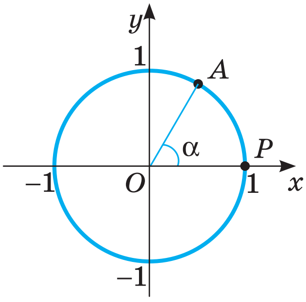
Синусом кута α називають ординату точки одиничного кола, яка відповідає куту α.

Косинусом кута α називають абсцису точки одиничного кола, яка відповідає куту α.

Тангенсом кута α називають відношення синуса кута α до його косинуса.

Котангенсом кута α називають відношення косинуса кута α до його синуса.

Синус, косинус, тангенс і котангенс кута α позначають відповідно символами $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$.



Мал. 98

Приклади.

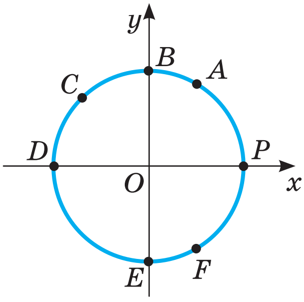
1. Куту $135°$ на одиничному колі відповідає точка C з абсцисою $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ і ординатою $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (мал. 99).

Тому $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{tg}\,135° = -1$, $\mathrm{ctg}\,135° = -1$.

2. Куту $-90°$ на одиничному колі відповідає точка $E(0; -1)$. Тому

$\cos(-90°) = 0$, $\sin(-90°) = -1$,

$\mathrm{ctg}(-90°) = 0$, $\mathrm{tg}(-90°)$ не існує.



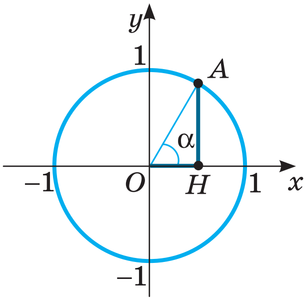
Мал. 99

Тангенс кута α має значення (тобто існує) тоді і тільки тоді, коли $\cos\alpha \neq 0$, адже ділити на 0 не можна. Котангенс кута α має значення тільки за умови, що $\sin\alpha \neq 0$.

Значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ деяких кутів α наведено в таблиці на форзаці.

Наближені значення тригонометричних функцій будь-яких кутів можна знаходити за допомогою калькулятора або спеціальних таблиць (див. форзац 4).

Кожному значенню кута α відповідає єдине значення $\sin\alpha$. Значення $\sin\alpha$ залежить від значення α. Тому $\sin\alpha$ — функція від α. Функціями від α є також $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$. Усі ці чотири функції докладніше розглянемо далі, а тут звернемо увагу тільки на їх найважливіші властивості.



Мал. 100

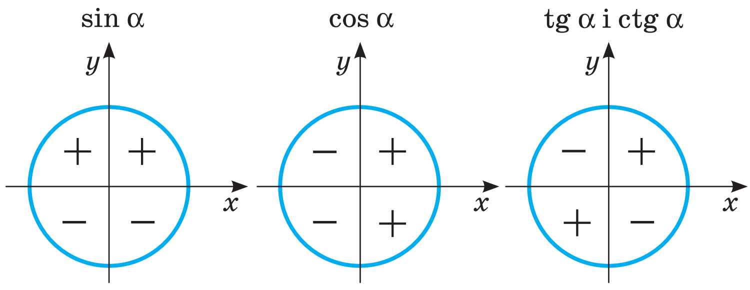
Нагадаємо, що $\sin\alpha$ — це ордината точки A одиничного кола, яка відповідає куту α (мал. 100).

Якщо AH — перпендикуляр, опущений з точки A на вісь x, то довжина відрізка AH — це синус кута α, а OH — косинус кута α.

Якщо точка A розміщується у I або II координатній чверті, то її ордината — додатна. Ординати точок, які розміщуються у III або IV чверті — від'ємні. Говорять, що у I і II чвертях синус кута α додатний, а в III і IV — від'ємний.

Згадайте означення косинуса, тангенса і котангенса кута α і поясніть, які знаки мають ці функції в кожній із чотирьох чвертей.

На малюнку 101 показано знаки тригонометричних функцій кутів різних координатних чвертей.



Мал. 101

Якщо кут α збільшується від 0° до 90°, то значення $\sin\alpha$ збільшується від 0 до 1. Якщо α збільшується від 90° до 180°, то значення $\sin\alpha$ зменшується від 1 до 0. Якщо α збільшується від 180° до 270°, то значення $\sin\alpha$ зменшується від 0 до −1. Якщо α збільшується від 270° до 360°, то значення $\sin\alpha$ збільшується від −1 до 0. Отже, для будь-якого значення α:

$$-1 \le \sin\alpha \le 1 \qquad -1 \le \cos\alpha \le 1$$

Якщо кут α продовжувати збільшувати, то всі ці властивості повторяться, тобто завжди:

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 360°) = \sin(\alpha - 360°) = \sin(\alpha + 720°).$$

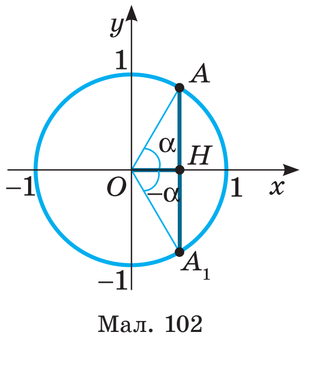
Взагалі, яким би не був кут α і ціле число n, то:

$$\sin(\alpha + 360° \cdot n) = \sin\alpha \qquad \cos(\alpha + 360° \cdot n) = \cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}(\alpha + 360° \cdot n) = \mathrm{tg}\,\alpha \qquad \mathrm{ctg}(\alpha + 360° \cdot n) = \mathrm{ctg}\,\alpha$$

Ці співвідношення дають можливість звести знаходження значень синуса, косинуса, тангенса і котангенса будь-якого кута до знаходження їх значень для невід'ємного кута, меншого від 360°.

Наприклад, треба обчислити $\cos 1860°$. Поділивши 1860 на 360, дістанемо частку 5 і остачу 60. Отже, $\cos 1860° = \cos(360° \cdot 5 + 60°) = \cos 60° = 0{,}5$.

На одиничному колі точки A і A_1, які відповідають кутам α і $-\alpha$, розміщені симетрично відносно осі x (мал. 102), а тому мають однакові абсциси і протилежні ординати.



Мал. 102

Отже, яким би не був кут α, правильні тотожності:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

Користуючись ними, можна порівняно легко обчислювати значення тригонометричних функцій від'ємних кутів.

Приклади.

1. $\sin(-30°) = -\sin 30° = -0{,}5$;

2. $\cos(-405°) = \cos 405° = \cos(45° + 360°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Перевірте себе

1. Що таке синус кута α? Чому він може дорівнювати?
2. Яких значень у виразі $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ може набувати α?
3. Сформулюйте означення косинуса кута.
4. За яких умов косинус кута є додатним? За яких — від'ємним?
5. Що таке тангенс кута? А котангенс?
6. При яких значеннях α його тангенс не існує? А котангенс?
7. Як змінюється синус (косинус) кута, якщо кут збільшується: а) від 0° до 90°; б) від 90° до 180°?

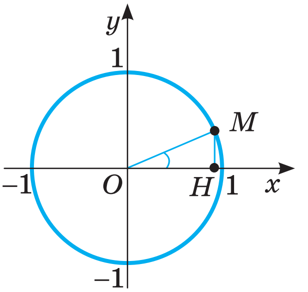
Виконаємо разом

1 Обчисліть:

$$\sqrt{3}\sin 60° - 2\sin 90° \cdot \cos 60° + 0{,}5\operatorname{tg} 45°.$$

Розв'язання. Відповідні значення синуса і косинуса знаходимо в таблиці (форзац 2). Маємо:

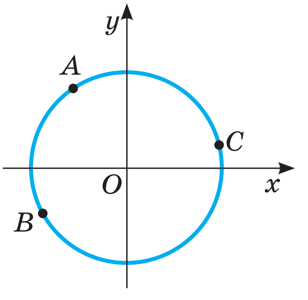
$$\sqrt{3}\sin 60° - 2\sin 90° \cdot \cos 60° + 0{,}5\operatorname{tg} 45° =$$
$$= \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + 0{,}5\cdot 1 = \frac{3}{2} - 1 + 0{,}5 = 1.$$



Мал. 103

2 Що більше: $\sin 20°$ чи $\cos 20°$?

Розв'язання. Якщо $\angle MOH = 20°$, то $\angle OMH = 70°$ (мал. 103). Оскільки в трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона, то $OH > MH$. Отже, $\cos 20° > \sin 20°$.



Мал. 104

3 Знайдіть знак виразу

$$P = \sin 130° \cos 210° \operatorname{tg} 380°.$$

Розв'язання. Куту 130° відповідає точка A одиничного кола, яка розміщується в II чверті (мал. 104), тому $\sin 130° > 0$. Куту 210° відповідає точка B III чверті, тому $\cos 210° < 0$. Куту 380°

відповідає точка C, яка лежить у I чверті, тому $\mathrm{tg}\,380° > 0$. Добуток двох додатних чисел і від'ємного — число від'ємне. Тому $P < 0$.

Відповідь. $P < 0$.

4 Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $2\sin\alpha + 3$.

Розв'язання. Оскільки $-1 \le \sin\alpha \le 1$, то $-2 \le 2\sin\alpha \le 2$, тоді $-2 + 3 \le$ $\le 2\sin\alpha + 3 \le 2 + 3$, тобто $1 \le 2\sin\alpha + 3 \le 5$. Отже, найменше значення виразу дорівнює 1, а його найбільше значення дорівнює 5.

5 Користуючись калькулятором, обчисліть $\mathrm{ctg}\,42°13'$.

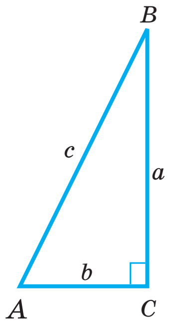
Розв'язання. Обираємо градуси

а) [1] [3] [÷] [6] [0] [+] [4] [2] [=] [tan] [↑] [$\frac{1}{x}$] = 1,1022016.

Відповідь. $\mathrm{ctg}\,42°13' \approx 1{,}1022$.

Виконайте усно

726. Дивлячись на прямокутний трикутник ABC (мал. 105), скажіть, чому дорівнюють синус, косинус, тангенс і котангенс кутів A, B і C.



Мал. 105

727. Чи може абсциса або ордината точки одиничного кола дорівнювати 2?

728. Чи може синус або косинус кута дорівнювати 2? А -2?

729. Чи може синус кута, меншого від 180°, бути числом від'ємним? А косинус?

730. Тангенс якого кута дорівнює 1? А -1?

731. Чому дорівнюють синус, косинус, тангенс і котангенс прямого кута? А кута 45°?

732. Якій чверті належить кут у 100°, 150°, 200°, 250°, 300°, 350°?

733. Знайдіть міру гострого кута x, якщо: а) $\sin x = 0{,}5$; б) $2\cos x = \sqrt{3}$.

Рівень А

734. На скільки градусів повертається годинникова стрілка протягом півдоби? А хвилинна стрілка?

735. Накресліть одиничне коло і позначте на ньому точки, які відповідають кутам: 30°, 90°, 120°, 180°, 270°, 360°, $-30°$, $-300°$.

736. Куту α на одиничному колі відповідає точка $M\left(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{8}}{3}\right)$. Чому дорівнюють значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$?

737. Куту β на одиничному колі відповідає точка з абсцисою 0,6. Чому дорівнюють значення $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\mathrm{tg}\,\beta$, $\mathrm{ctg}\,\beta$?

738. У якій чверті розміщується точка, яка відповідає куту:
а) 120°; б) 73°; в) 186°; г) 394°; ґ) 295°; д) 765°; е) 3730°; є) 5430°?

739. У якій чверті розміщується точка, яка відповідає куту:
а) $-50°$; б) $-126°$; в) $-291°$; г) $-250°$; ґ) $-400°$; д) $-456°$; е) $-1070°$?

740. Який знак мають $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо:
а) $\alpha = 53°$; б) $\alpha = 126°$; в) $\alpha = 293°$; г) $\alpha = -65°$; ґ) $\alpha = -96°$?

741. Визначте знак числа:
а) $\sin 98°$; в) $\sin 298°$; ґ) $\cos 38°$; е) $\cos 194°$;
б) $\operatorname{tg} 140°$; г) $\operatorname{tg} 390°$; д) $\operatorname{ctg} 33°$; є) $\operatorname{ctg} 100°$.

742. Визначте знак добутку:
а) $\sin 20° \cdot \cos 46°$; в) $\cos 123° \cdot \operatorname{tg} 195°$;
б) $\sin 350° \cdot \operatorname{ctg} 65°$; г) $\operatorname{tg} 179° \cdot \operatorname{ctg} 279°$.

743. Визначте знак добутку:
а) $\sin 120° \cdot \cos 155° \cdot \operatorname{tg} 85°$; в) $\operatorname{ctg} 124° \cdot \cos 115° \cdot \operatorname{tg} 35°$;
б) $\sin 320° \cdot \cos 55° \cdot \operatorname{ctg} 85°$; г) $\operatorname{ctg} 125° \cdot \cos 77° \cdot \operatorname{tg} 305°$.

744. Кутом якої чверті є кут α, якщо:
а) $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$; в) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$;
б) $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$; г) $\operatorname{ctg}\alpha < 0$, $\sin\alpha > 0$?

745. Замість * поставте знаки > або <:
а) $\cos 5° * \cos 7°$; в) $\sin 82° * \sin 79°$; ґ) $\sin 178° * \sin 108°$;
б) $\cos 113° * \cos 115°$; г) $\operatorname{tg} 29° * \operatorname{tg} 32°$; д) $\operatorname{tg} 97° * \operatorname{tg} 107°$.

746. Як змінюється $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо α збільшується від 0° до 360°? Заповніть порожні клітинки таблиці.

α	(0°; 90°)	(90°; 180°)	(180°; 270°)	(270°; 360°)
	I чверть	II чверть	III чверть	IV чверть
$\sin\alpha$			$\searrow$	
$\cos\alpha$	$\searrow$			

747. Що більше:
а) $\sin 20°$ чи $\sin 50°$; в) $\sin 20°$ чи $\sin 160°$;
б) $\cos 40°$ чи $\cos 10°$; г) $\cos 10°$ чи $\cos 100°$?

748. Обчисліть:
а) $\sin 30° + \cos 30°$; в) $\sin 45° \cdot \cos 45°$;
б) $\cos 60° - \sin 45°$; г) $2\sin 60° \cdot \cos 60°$.

749. Обчисліть значення виразу:
а) $\sin 45° - \cos 60° \cdot \cos 90° + \sin 60°$;
б) $\sin 30° \cdot \cos 30° - \sin^2 45° \cdot \operatorname{tg} 60°$;
в) $\cos 30° \cdot \sin 60° - \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{ctg} 45° \cdot \sin 30°$;
г) $\operatorname{tg} 30° \cdot \sin 60° + \sin 30° \cdot \operatorname{tg} 45° + \sin 90°$.

Знайдіть значення виразу (750–751).

750. а) $\cos\alpha + 3\sin\alpha$, якщо $\alpha = 45°$;
б) $\sin\beta + \sin 2\beta + \sin 3\beta$, якщо $\beta = 60°$.

751. а) $\sin\gamma + 2\cos\gamma + 3\operatorname{tg}\gamma$, якщо $\gamma = 30°$;
б) $\sin\alpha + \cos(\alpha - \beta)$, якщо $\alpha = 90°$ і $\beta = 30°$.

752. Яке найбільше і найменше значення може мати вираз:

а) $3\sin x$; б) $-\frac{1}{2}\sin x$; в) $1+\sin x$; г) $\sin x - 1$?

753. Установіть вид ΔABC, якщо:

а) $\sin A = \cos B = 0,5$; в) $\sin A = \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{ctg} B = \sqrt{3}$; г) $\operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B = 1$.

754. Чому дорівнює синус, косинус, тангенс, котангенс кута правильного: а) трикутника, б) чотирикутника, в) шестикутника?

755. Обчисліть значення тригонометричних функцій за допомогою таблиці і перевірте результат, використовуючи калькулятор:

а) $\sin 12°$; $\sin 33°$; $\sin 72°$; $\sin 50°$; б) $\cos 12°$; $\cos 33°$; $\cos 72°$; $\cos 50°$;

в) $\operatorname{tg} 12°$; $\operatorname{tg} 33°$; $\operatorname{tg} 72°$; $\operatorname{tg} 50°$; г) $\operatorname{ctg} 12°$; $\operatorname{ctg} 33°$; $\operatorname{ctg} 72°$; $\operatorname{ctg} 50°$.

Користуючись калькулятором чи таблицями, обчисліть (756–758).

756. а) $\sin 17°$; б) $\cos 35,7°$; в) $\operatorname{tg} 39,8°$; г) $3\cos 25°$.

757. а) $\operatorname{ctg} 37,8°$; б) $2,7\operatorname{ctg} 63,7°$; в) $2 : \sin 36,3°$; г) $2 + \cos 49°$.

758. а) $1 + \sin 25°$; б) $\sin 20° - \cos 70°$; в) $2\sin 15° \cos 15°$; г) $3 + \sin 47°$.

Рівень Б

759. Чи може синус або косинус кута дорівнювати:

а) $\sqrt{2}$; б) $2-\sqrt{2}$; в) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; г) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$?

760. На малюнку 106 зображено промисловий вітрогенератор — пристрій для перетворення кінетичної енергії вітру на електричну.

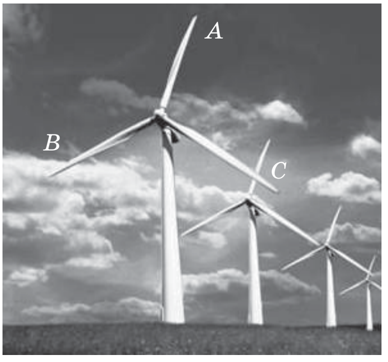
1) Установіть, на який із поданих нижче кутів може повернутися лопать A вітрогенератора, щоб перейти на місце лопаті B:

а) 3360°; б) – 4440°; в) 6240°; г) – 8720°.

2) Дізнайтеся більше про: а) історію вітряків та їх використання;

б) розвиток вітроенергетики в Україні;

в) «зелені» тарифи на електричну енергію.



Мал. 106

761. Кутом якої чверті є кут α, якщо:

а) $\alpha = 394°$; б) $\alpha = 728°$; в) $\alpha = -390°$; г) $\alpha = -999°$?

762. Знайдіть знак числа:

а) $\cos 167°$; в) $\sin 785°$; ґ) $\operatorname{tg}(-386°)$; е) $\operatorname{ctg} 2765°$;

б) $\cos(-1329°)$; г) $\sin 2354°$; д) $\operatorname{tg} 3817°$; є) $\operatorname{ctg}(-2643°)$.

Знайдіть знак виразу (763–764).

763. а) $\sin(-100°)\ \mathrm{tg}\,250°\ \mathrm{ctg}\,365°$; в) $\sin(-170°)\cos(-221°)\ \mathrm{ctg}\,126°$;
б) $\cos(-321°)\ \mathrm{ctg}\,18°\ \mathrm{ctg}\,1829°$; г) $\mathrm{tg}\,176°\cos(-398°)\sin(-543°)$.

764. а) $\cos(-30°)\sin 15°\cos(-125°)\ \mathrm{tg}\,35°$;
б) $\sin(-137°)\cos(-150°)\ \mathrm{tg}\,22°\cos 35°$;
в) $\mathrm{tg}\,143°\sin(-165°)\ \mathrm{tg}(-87°)\cos(-126°)$;
г) $\cos(-32°)\sin 132°\cos 135°\ \mathrm{tg}(-92°)$.

765. Обчисліть:
а) $\sin 30°\cos 60° - \cos^2 60° + \sin 405°\cos 90°$;
б) $(\mathrm{tg}\,390°\ \mathrm{tg}\,60° - \mathrm{tg}^2\,45° + 2\cos 45°\sin 45°)^2$;
в) $\sin 420°\cos 30° - \cos 60°\sin 30° - 2\mathrm{tg}\,30°\ \mathrm{ctg}\,765°$;
г) $(\mathrm{tg}\,30°\ \mathrm{ctg}\,30° + \sin 45°\sin 60°\cos 450°)^6 - 3\sin 90°\ \mathrm{tg}\,750°$.

766. Знайдіть значення виразу:
а) $\sin 3\alpha$, якщо $\alpha = 30°$; в) $\cos\frac{\alpha}{2}$, якщо $\alpha = -120°$;
б) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$, якщо $\alpha = 45°$; г) $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^3\alpha$, якщо $\alpha = -60°$.

767. Дано: $\alpha = 45°$, $\beta = 15°$. Знайдіть: а) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;
б) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$; в) $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)\ \mathrm{ctg}(\alpha+\beta)$.

768. Розв'яжіть попередню задачу, якщо $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

769. Перевірте, чи правильна рівність:

а) $\dfrac{\cos 45°\sin 45°+\sin 30°-2\,\mathrm{tg}^2\,45°}{4\cos 30°-\mathrm{tg}\,60°+\sin 90°}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$;

б) $\sin 45°-\sin 90°+\mathrm{tg}\,45°+\dfrac{\sin 30°+\mathrm{tg}\,45°}{\sin 30°-\mathrm{tg}\,45°}=\dfrac{\sqrt{2}+3}{2}$;

в) $\dfrac{\mathrm{tg}\,30°\,\mathrm{ctg}\,30°-\mathrm{tg}\,60°}{\mathrm{tg}\,60°\,\mathrm{ctg}\,60°+\mathrm{ctg}\,30°}=\dfrac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{2}$;

г) $\dfrac{\sin 30°+\cos 30°}{\cos 60°+\cos 90°}-\dfrac{\cos 60°-\sin 60°}{\sin 45°\cos 45°}=2\sqrt{3}$.

770. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$, $\alpha\in[0°;90°]$; $\alpha \in [180°; 270]$.

771. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\mathrm{tg}\,\alpha$, якщо $\cos\alpha = 0{,}5$, $\alpha\in[0°;90°]$; $\alpha\in[270°;360°]$.

772. Знайдіть, користуючись одиничним колом:
$\sin 0°$, $\sin 90°$, $\cos 90°$, $\sin 180°$, $\cos 180°$, $\sin 270°$, $\cos 270°$.

773. **Практичне завдання.** Накресліть на міліметровому папері чверть кола радіуса 10 см, поділіть його на 30 рівних частин і складіть таблицю наближених значень синуса і косинуса кутів 3°, 6°, ..., 90°.

Рівень В

774. Яких значень при різних значеннях α може набувати вираз:
$\sin^2\alpha$, $1-\sin^2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $2\sin\alpha$?

775. Яких значень може набувати вираз: $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}^2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$, $2\operatorname{tg}\alpha$, $1+\operatorname{tg}\alpha$?

776. Куту α на одиничному колі відповідає точка $A\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Знайдіть α, якщо: а) $\alpha\in[0;\ 90°]$; б) $\alpha\in[360°;\ 540°]$; в) $\alpha\in[-270°;\ -360°]$.

777. Куту β на одиничному колі відповідає точка $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Укажіть три можливих значення кута β.

778. На одиничному колі зобразіть точки, для яких:

а) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; в) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$; ґ) $\sin\alpha=1$; е) $\cos\alpha=1$;

б) $\sin\alpha=-1$; г) $\cos\alpha=-1$; д) $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$; є) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.

779. Знайдіть знак виразу:

а) $\sin 95°+\operatorname{tg}186°$; в) $\cos 197°+\cos 128°$;

б) $\operatorname{tg}382°-\operatorname{tg}(-33°)$; г) $\sin 421°-\sin(-168°)$.

780. Який із гострих кутів більший: α чи β, якщо:

а) $\sin\alpha=0{,}75$, $\sin\beta=0{,}93$; б) $\cos\alpha=0{,}5$, $\cos\beta=0{,}6$?

781. При яких значеннях c можлива рівність:

а) $\sin\alpha=c-2$; в) $\cos\alpha=3-2c$;

б) $2\sin\alpha=c^2-2c-1$; г) $\cos\alpha=c^2+5c+3$.

782. При яких значеннях m можлива рівність:

а) $\sin\alpha=4-5m$; в) $\cos\alpha=5+m$;

б) $3\sin\alpha=m^2-3m-1$; г) $0{,}5\cos\alpha=m^2+m$.

Знайдіть найменше і найбільше значення виразу (783–784).

783. а) $3\cos\alpha-5$; б) $1-2\sin^2\alpha$; в) $\frac{1}{3\sin\alpha+4}$; г) $\frac{1}{3\cos^2\alpha+2}$.

784. а) $2\sin\alpha-3$; б) $\cos^2\alpha-5$; в) $\frac{1}{3\sin\alpha+5}$; г) $\frac{1}{4-2\cos^2\alpha}$.

785. Знайдіть область значень функції:

а) $\frac{5}{2\sin\alpha+2}$; в) $\frac{1}{0{,}5\cos\alpha-0{,}5}$; ґ) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}$;

б) $\frac{1}{3\cos\alpha-3}$; г) $\frac{5}{0{,}3-0{,}3\sin\alpha}$; д) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Вправи для повторення

786. Знайдіть довжину кола і площу круга, радіус якого дорівнює:

а) 2 м; б) 12 см; в) 2,5 дм.

787. ***Задача Сунь-Цзи.*** Знайдіть число, яке від ділення на 3 має в остачі 2, а від ділення на 5 — в остачі 3, нарешті, від ділення на 7 — в остачі 2.

788. Побудуйте графік функції:

а) $y=4x^{-2}$; б) $y=4x^{-2}+1$; в) $y=6x^{-1}$; г) $y=6x^{-1}-2$.

§ 15 Тригонометричні функції числових аргументів

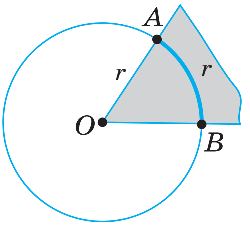
Numerical Arguments Trigonometric Functions

Досі ми розглядали тригонометричні функції кутів. При цьому вирази $x + \sin x$, $\cos x^2$ не мали змісту, бо не можна до градусної міри кута додавати число. Не має змісту і квадрат міри кута. А розв'язування багатьох задач приводить до аналізу подібних виразів. Тому математики часто мають справу з виразами $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$, де α — не міра кута, а абстрактне число. Що ж розуміють під синусом, косинусом, тангенсом і котангенсом дійсного числа?

Спочатку згадаємо дещо про вимірювання кутів. Кути можна вимірювати в градусах та їх менших частках: мінутах і секундах. А ще можна вимірювати кути в радіанах.

Міра кута AOB дорівнює одному радіану (1 рад), якщо на колі з центром у вершині цього кута він вирізає дугу AB, довжина якої дорівнює довжині радіуса кола (мал. 107).

1 рад $\approx 57°$



Мал. 107

Оскільки коло радіуса r має довжину $2\pi r$, то $360° = 2\pi$ рад. Звідси маємо: $180° = \pi$ рад, $90° = \frac{\pi}{2}$ рад, $60° = \frac{\pi}{3}$ рад, $45° = \frac{\pi}{4}$ рад, $30° = \frac{\pi}{6}$ рад.

Отже, градусна і радіанна міри кутів пов'язані такими залежностями:

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ рад}, \qquad n° = \frac{\pi}{180}\cdot n \text{ рад}.$$

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\cdot\alpha, \qquad \alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\cdot\alpha,$$

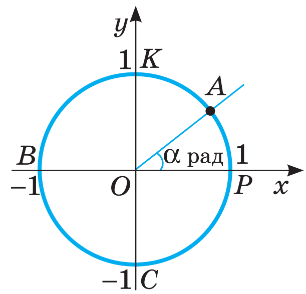
Зазначимо, що позначення градуса не можна пропускати в запису, а позначення радіана, коли йдеться про числа, а не кути, опускають.

Відповідність між деякими радіанними і градусними мірами кутів бажано пам'ятати.

Радіани	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
Градуси	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°

Використовуючи формулу 1 рад = $\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}\cdot\alpha$, можна встановити відповідність між множиною дійсних чисел і множиною кутів повороту. А оскільки кожному значенню деякого кута відповідає єдине значення $\sin\alpha$ ($\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$), то можна розглядати тригонометричні функції не лише кутового аргументу, а й числового.

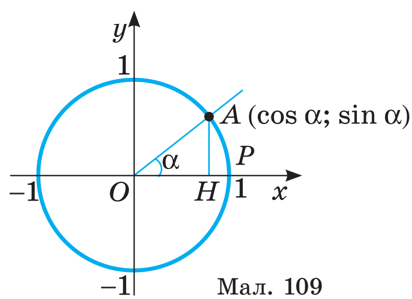
Нехай на координатній площині дано одиничне коло і його початковий радіус OP (мал. 108). Говорять, що точка A одиничного кола відповідає числу α, якщо кут POA дорівнює α рад. При цьому вважають, що кут α збільшується, якщо радіус OA рухається проти руху годинникової стрілки (кут α може бути як завгодно великим і як завгодно малим). Зображені на малюнку 108 точки P, K, B, C відповідають числам 0, $\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3\pi}{2}$.



Мал. 108

Синусом числа α називають ординату точки одиничного кола, яка відповідає числу α.

Косинусом числа α називають абсцису точки одиничного кола, яка відповідає числу α (мал. 109).



Мал. 109

Приклади.

1. Числу 1 відповідає точка A одиничного кола така, що довжина дуги PA дорівнює довжині радіуса OP (мал. 110). Абсциса і ордината точки A дорівнюють наближено 0,54 і 0,84. Отже, $\cos 1 \approx 0{,}54$, $\sin 1 \approx 0{,}84$.

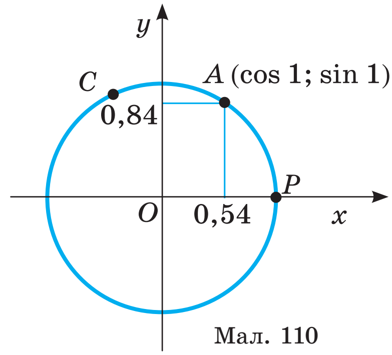
2. Числу 2 відповідає така точка C одиничного кола, що довжина дуги PC дорівнює $2 \cdot OP$. Абсциса і ордината точки C дорівнюють відповідно $-0{,}42$ і 0,91 (теж наближено). Тому $\cos 2 \approx -0{,}42$, $\sin 2 \approx 0{,}91$.

Якщо кожному дійсному числу x поставимо у відповідність його синус (косинус), то отримаємо функцію $y = \sin x$ ($y = \cos x$).

Розглянемо деякі властивості цих функцій.

Кожному дійсному числу x відповідає єдина точка одиничного кола, а їй — якісь певні ордината і абсциса. Тому область визначення функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ — уся множина R дійсних чисел.

Оскільки $\sin x$ — ордината, а $\cos x$ — абсциса деякої точки одиничного кола (його радіус дорівнює 1), то $-1 \le \sin x \le 1$ і $-1 \le \cos x \le 1$.



Мал. 110

Якщо значення аргументу x збільшувати від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то $\sin x$ збільшуватиметься від -1 до 1. При збільшенні x від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ значення $\sin x$ зменшується від 1 до -1. При подальшому збільшенні x усе повторюється. Як змінюється значення $\cos x$ із збільшенням x, дослідіть самостійно.

Оскільки числу 2π відповідає повний оберт точки одиничного кола, то числам x, $x + 2\pi$, $x + 4\pi$, ..., $x + 2\pi n$, де n — число ціле, на одиничному колі відповідає одна й та сама точка. Синуси усіх цих чисел рівні. Тому для кожного цілого значення n: $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$.

Так само

$$\cos(x + 2\pi n) = \cos x.$$

Відношення синуса числа до косинуса того самого числа називають *тангенсом* цього числа, а обернене відношення — його *котангенсом*:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Оскільки на 0 ділити не можна, то $\operatorname{tg}\alpha$ існує (має числове значення), коли $\cos\alpha \neq 0$, а $\operatorname{ctg}\alpha$ існує, коли $\sin\alpha \neq 0$. Зі зміною числа α значення $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ теж змінюються, тому $\operatorname{tg}x$ і $\operatorname{ctg}x$ — це також функції від числових аргументів x. Функції $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$ і $\operatorname{ctg}x$ називають тригонометричними функціями числових аргументів. Точні значення цих функцій при деяких значеннях аргументу (0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ і т. п.) можна визначати, користуючись одиничним колом. Їх наведено в таблиці.

α	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	Не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не існує

Наближені значення тригонометричних функцій можна знаходити, користуючись спеціальними таблицями або калькулятором. При цьому якщо значення аргументу x задано в градусах, то перемикач Г–Р ставлять на позначку Г, якщо ж x — абстрактне число або кут задано в радіанах, то — на позначку Р. Наприклад, значення $\sin 1{,}2$ знаходять за такою програмою:

[1] [,] [2] [sin] результат: 0,932039, тобто $\sin 1{,}2 \approx 0{,}932$.

Вважають, що синус, косинус, тангенс, котангенс числа α дорівнюють відповідно синусу, косинусу, тангенсу, котангенсу кута α радіанів. Отже, кожне твердження про тригонометричні функції числа α рівнозначне твердженню про тригонометричні функції кута α рад і навпаки. Зокрема, мають місце формули:

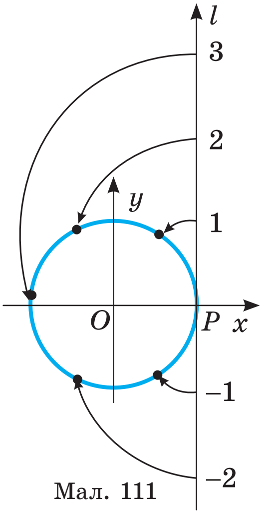
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

А оскільки область визначення кожної тригонометричної функції симетрична відносно початку координат, то це означає, що функція $y = \cos\alpha$ — парна, а функції $y = \sin\alpha$, $y = \operatorname{tg}\alpha$ і $y = \operatorname{ctg}\alpha$ — непарні.

Хочете знати ще більше?

Розглянемо, як іншим способом кожному дійсному числу α можна поставити у відповідність певну точку одиничного кола.

Накреслимо одиничне коло з початковим радіусом OP і проведемо через P перпендикулярно до OP координатну пряму l, одиничний відрізок якої дорівнює OP (мал. 111). Уявімо, що координатна пряма l намотується на одиничне коло. При цьому кожна точка координатної прямої l відобразиться на деяку точку одиничного кола: на кожну точку кола — безліч точок координатної прямої. У такий спосіб кожному дійсному числу α можна поставити у відповідність певну точку одиничного кола. Ця точка одиничного кола відповідає числу α.

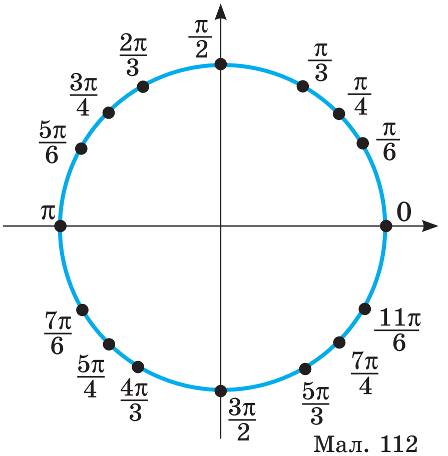


Мал. 111

Корисно запам'ятати, які точки одиничного кола відповідають деяким дробовим частинам числа π (мал. 112).

Перевірте себе

1. Що таке радіан? Скільки радіанів має прямий кут?
2. Що таке синус, косинус, тангенс і котангенс числа? Як їх позначають?
3. Яка область визначення кожної з тригонометричних функцій?
4. Яка область значень кожної з тригонометричних функцій?
5. Назвіть непарні тригонометричні функції.



Мал. 112

Виконаємо разом

1 Користуючись одиничним колом, знайдіть значення тригонометричних функцій чисел: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π.

Розв'язання. Даним числам на одиничному колі відповідають точки: P, K, B, C, P (див. мал. 108). Їх абсциси дорівнюють відповідно: 1, 0, –1, 0, 1. Отже,

$$\cos 0 = 1,\ \cos\frac{\pi}{2}=0,\ \cos\pi = -1,\ \cos\frac{3\pi}{2}=0,\ \cos 2\pi = 1.$$

Ординати вказаних точок дорівнюють: 0, 1, 0, –1, 0. Отже,

$$\sin 0 = 0,\ \sin\frac{\pi}{2}=1,\ \sin\pi = 0,\ \sin\frac{3\pi}{2}=-1,\ \sin 2\pi = 0;$$

$$\operatorname{tg} 0=\frac{0}{1}=0,\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{0}\text{ — не існує},\ \operatorname{tg}\pi=\frac{0}{-1}=0\text{ і т. д.}$$

2 Визначте знаки тригонометричних функцій на відрізку [2; 3].

Розв'язання. Оскільки $\pi \approx 3{,}14$, $\frac{\pi}{2}\approx 1{,}57$, то $[2;\ 3]\subset\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, тобто відрізок [2; 3] належить другій чверті. У цій чверті $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\operatorname{ctg}\alpha < 0$.

3 Обчисліть: $4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Відповідні значення синуса і косинуса знаходимо у таблиці на с. 142. Маємо: $4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=4\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=2{,}5.$

Виконайте усно

789. Назвіть у радіанах міри кутів: а) рівностороннього трикутника; б) рівнобедреного прямокутного трикутника; в) ромба, менша діагональ якого дорівнює стороні; г) правильного шестикутника.

790. Назвіть градусну міру кутів, заданих у радіанах.

$\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π.

791. Що більше: а) 1 чи $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{2}$ чи 1,5?

792. Що більше: а) $\sin 1$ чи $\sin 3$; б) $\sin 2$ чи $\cos 2$? Відповідь поясніть.

793. Які з чисел є від'ємними: $\sin 2$, $\sin 4$, $\sin 5$, $\cos 2$, $\cos 3$, $\cos 6$? Відповідь аргументуйте.

794. Для яких значень x виконується рівність $\sin x = 1$?

795. Для яких значень x: а) $\sin x = -1$; б) $\cos x = -1$?

796. Чи існують такі значення x, для яких $\cos x = 2{,}5$?

Рівень А

Запишіть у радіанній мірі кути (797–798).

797. а) 15°; б) 30°; в) 45°; г) 60°; ґ) 90°; д) 135°; е) 180°; є) 270°.

798. а) 40°; б) 120°; в) 105°; г) 150°; ґ) 75°; д) 32°; е) 100°; є) 140°.

Виразіть у градусах кут, радіанна міра якого дорівнює (799–800).

799. а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{18}$; в) $\frac{\pi}{5}$; г) $\frac{\pi}{6}$; ґ) $\frac{5\pi}{6}$; д) 2π.

800. а) 2; б) 3; в) 1,5; г) 0,36; ґ) 5; д) 31,4.

801. Позначте на одиничному колі точки, які відповідають числам:

$\pi,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{6},\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ -\pi,\ -2\pi,\ -3\pi.$

802. Накресліть у зошиті та заповніть таблицю.

α	$0{,}5\pi$	π	$1{,}5\pi$	2π	$2{,}5\pi$	3π	$3{,}5\pi$
$\sin\alpha$							
$\cos\alpha$							
$\operatorname{tg}\alpha$							

803. Покажіть на одиничному колі кути:

а) 420°; 540°; 670°; 730°; 890°; б) $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{5}$; $\frac{26\pi}{9}$ рад.

804. Який знак мають $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, якщо x дорівнює:

а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{5\pi}{6}$; г) $\frac{5\pi}{3}$?

805. Визначте знак виразу:

а) $\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$;

б) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$;

в) $\cos\frac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$;

г) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

806. Обчисліть за допомогою калькулятора:

а) $\sin 1{,}5$; б) $\sin 2{,}7$; в) $\cos 0{,}8$; г) $\operatorname{tg} 1{,}5$.

«Алгебра щедра, вона часто дає більше, ніж у неї просять».
Ж. Д'аламбер

Обчисліть (807–809).

807. а) $\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-\sin\pi$;

б) $2\sin\frac{\pi}{2}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;

в) $\sin 2\pi\cos\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\pi$;

г) $\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.

808. а) $\sin 2{,}5\pi$; б) $\cos 3\pi$; в) $\cos\frac{7\pi}{3}$; г) $\sin\frac{17\pi}{4}$.

809. а) $\sin^2\frac{\pi}{2}-\cos^2\pi$; б) $\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{3}$; в) $\cos^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{4}$; г) $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{3}$.

810. а) $\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{2}$; в) $\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2}$;

б) $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{6}$; г) $\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{6}+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{6}-2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}$.

811. Знайдіть значення виразу:

а) $\sin x \cdot \cos x$, якщо $x=\frac{\pi}{6}$, $x=-\frac{\pi}{6}$;

б) $\sin x + \cos x$, якщо $x=\frac{\pi}{4}$, $x=-\frac{\pi}{4}$.

812. На малюнку 113 зображено дерев'яний штурвал старовинного парусника. Запишіть радіанні міри кутів, які утворює вертикальна спиця цього штурвала з кожною іншою спицею (у додатному напрямі). Знайдіть: а) синуси і косинуси кожного з цих кутів; б) тангенси найбільшого і найменшого кутів. (Підказка. Уявіть, що штурвал — це одиничне коло).

Мал. 113

813. Колесо обертається з кутовою швидкістю $\frac{\pi}{3}$ рад/с. На який кут воно повернеться за 6 с, 12 с, 0,5 хв, 1 хв?

814. З якою кутовою швидкістю (у радіанах за секунду) обертається колесо, якщо за одну хвилину воно робить 90 обертів?

Рівень Б

815. Позначте на одиничному колі точки, які (наближено) відповідають числам 1; 2; 3; 4; –1; –2; –3; –4.

816. Збільшується чи зменшується значення $\sin x$ при збільшенні числа x від 0 до $\frac{\pi}{2}$? А при збільшенні x від $\frac{\pi}{2}$ до π?

817. Збільшується чи зменшується значення $\cos x$ при збільшенні числа x від 0 до 2? А при збільшенні x від 2 до π?

818. Збільшується чи зменшується значення $\mathrm{tg}\, x$ при збільшенні числа x від 0 до $\frac{\pi}{4}$; а при збільшенні від $-\frac{\pi}{4}$ до 0?

819. Що більше: а) $\sin 1°$ чи $\sin 8°$; б) $\sin 1$ чи $\sin 3$?

820. Які з чисел $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{2}$: а) менші за 1; б) більші за 2?

821. Які з чисел $\sin 2$, $\cos 2$, $\mathrm{tg}\, 2$, $\sin 3$, $\cos 3$ є від'ємними?

822. Розмістіть у порядку зростання числа:
$\sin 0$, $\cos 0$, $\sin 1$, $\cos 1$, $\sin 2$, $\cos 2$, $\sin 3$, $\cos 3$.

823. Який знак має:
$\sin 3$; $\sin 3{,}1$; $\sin 3{,}5$; $\sin 7{,}2$; $\sin(-2)$; $\cos 7$?

824. Які знаки мають $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, якщо α дорівнює:

а) $\frac{\pi}{5}$; б) $1{,}2\pi$; в) $\frac{7}{16}\pi$; г) $\frac{6}{17}\pi$; ґ) $\frac{16}{5}\pi$?

825. Визначте знак виразу:

826. а) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{7\pi}{10}$; в) $\sin\frac{2\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$;

б) $\sin 1 \cdot \operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{ctg} 2$; г) $\cos 0{,}5 \cdot \sin 3 \cdot \operatorname{tg}(-2)$.

827. Який знак мають $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, якщо:

а) $x \in \left(1; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $x \in (2; \pi)$; в) $x \in \left(4; \frac{3\pi}{2}\right)$; г) $x \in (-1; 0)$?

828. Знайдіть значення виразу (з точністю до тисячних):

а) $\sin\alpha + \cos\alpha$, якщо $\alpha = 2$; $\alpha = 0{,}3$; $\alpha = \sqrt{2}$;

б) $2\sin\alpha\cos\alpha$, якщо $\alpha = 1$; $\alpha = 2{,}7$; $\alpha = 13$;

в) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha$, якщо $\alpha = 0{,}7$; $\alpha = 12{,}5$; $\alpha = \sqrt{3}$.

829. Обчисліть за допомогою калькулятора (з точністю до тисячних):

$\sin 2$; $\operatorname{tg} 0{,}5$; $\cos 0{,}5$; $\sin 3{,}14$; $\sin\pi$; $\sin\frac{\pi}{5}$; $\operatorname{tg}\sqrt{2}$.

«Серед усіх наук, що відкривають шлях до пізнання природи, найвеличнішою є математика».

С. Ковалевська

Обчисліть значення виразу (830–833).

830. а) $2\cos\frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{3\pi}{2} + 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;

б) $\cos\frac{\pi}{4} + 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\pi + \operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

831. а) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 3\cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$;

б) $2\sin\frac{\pi}{6} + 3\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 4\operatorname{tg} 0 - 2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.

832. а) $\sin^2\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; в) $\sin^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{6}$;

б) $\sin 2{,}5\pi + \cos 2{,}5\pi$; г) $\operatorname{tg} 4\pi + \sin 3\pi$.

833. а) $\cos 2t + \sin 2t$, якщо $t = \frac{\pi}{4}$; в) $\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{3}$, якщо $t = -\pi$;

б) $\sin^2 t - \cos^2 t$, якщо $t = -\frac{\pi}{3}$; г) $2\sin^2 t - \cos^2\frac{t}{2}$, якщо $t = \frac{\pi}{3}$.

834. Доведіть тотожність:

а) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \cos\pi}{\sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{3\pi}{2} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{3}}{2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos 2\pi - \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = -3$.

Рівень В

Знайдіть координати точок одиничного кола, які відповідають числам (835–836).

835. а) $\alpha=\dfrac{\pi}{3}+\pi n$; б) $\alpha=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$; в) $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$; г) $\alpha=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$.

836. а) $\alpha=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$; б) $\alpha=-\dfrac{\pi}{2}+\pi n$; в) $\alpha=-\dfrac{\pi}{3}+\pi n$; г) $\alpha=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$.

Точка A одиничного кола відповідає числу α. Виконайте відповідні малюнки і вкажіть множину дійсних чисел, які відповідають точці A(837–838).

837. а) $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$; в) $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$; ґ) $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$; е) $\alpha=\dfrac{5\pi}{3}$;

б) $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$; г) $\alpha=-\dfrac{\pi}{2}$; д) $\alpha=-\dfrac{5\pi}{6}$; є) $\alpha=-\dfrac{2\pi}{3}$.

838. а) $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$; в) $\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$; ґ) $\alpha=\pi$; е) $\alpha=\dfrac{4\pi}{3}$;

б) $\alpha=-\dfrac{\pi}{3}$; г) $\alpha=-\dfrac{2\pi}{3}$; д) $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$; є) $\alpha=-\dfrac{7\pi}{6}$.

Знайдіть усі числа, які відповідають даним точкам (839–840).

839. а) $A\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $B\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $C(-1;\ 0)$; г) $D(0;\ -1)$.

840. а) $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ \dfrac{1}{2}\right)$; б) $B\left(-\dfrac{1}{2};\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $C(1;\ 0)$; г) $D(0;\ 1)$.

841. Побудуйте на одиничному колі точки **(1–4)**. Установіть відповідність між побудованими точками та множиною дійсних чисел **(А–Д)**, які цим точкам відповідають.

1	$A(0;\ 1)$	**А**	$-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n;\ n\in Z$
2	$B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	**Б**	$\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n;\ n\in Z$
3	$C\left(-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$	**В**	$\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\ n\in Z$
4	$D\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ -\dfrac{1}{2}\right)$	**Г**	$-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n;\ n\in Z$
		Д	$-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n;\ n\in Z$

842. На круглій клумбі чорнобривцями засадили сектор, довжина дуги якого дорівнює довжині радіуса. Знайдіть площу ділянки, засадженої чорнобривцями, якщо радіус клумби дорівнює 3 м.

843. Знайдіть величину рівнодійної двох сил, прикладених до точки M, якщо одна з них дорівнює 5 Н, друга — 8 Н, а кут між ними становить $\frac{2\pi}{3}$.

844. При повному обороті зубчастого колеса друге колесо робить три оберти в протилежному напрямку.

1) На який кут повернеться друге колесо, якщо перше повернеться на: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{13\pi}{6}$; г) $\frac{21\pi}{4}$ рад?

2) На який кут повернеться перше колесо, якщо друге повернеться на: а) $\frac{5\pi}{3}$; б) π; в) $\frac{10\pi}{3}$; г) $\frac{17\pi}{4}$ рад?

Вправи для повторення

845. Розв'яжіть рівняння: а) $x^3 = 10 - x$; б) $\sqrt{x+1} = 5 - x$.

846. Побудуйте графік функції: а) $y = \sqrt{x-3} + 2$; б) $y = \sqrt{|x-3|} + 2$.

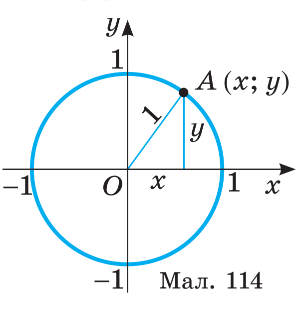
847. Знайдіть значення виразу $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

848. У Карпатському регіоні України розташовані найбільші площі пралісів Європи — територій, які впродовж сотень років залишалися практично недоторканими. Із 38 672 га пралісів букові карпатські ліси становлять 88,5 %, ялинові гірсько-карпатські ліси — 10,2 %, субальпійські й альпійські сланкі кущі й полонини — 0,9 %, дубово-букові і дубові передгірні закарпатські ліси — 0,4 %. Знайдіть площу кожного з видів пралісів Українських Карпат.

§ 16 Основні тригонометричні формули

Basic Trigonometric Identities

Відомо багато тотожностей, які пов'язують різні тригонометричні функції. Найважливіші з них — співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Пригадаємо рівняння кола. Якщо x і y — абсциса й ордината якої-небудь точки одиничного кола, то $x^2 + y^2 = 1$ (мал. 114). $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$ — абсциса і ордината деякої точки одиничного



Мал. 114

кола. Тому яке б не було дійсне число α, завжди $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Це *основна тригонометрична тотожність*. Приєднавши до неї ще формули, які випливають з означення тангенса і котангенса, дістанемо такі тотожності:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (2)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (3)$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \quad (4)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad (5)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad (6)$$

Формули (4) і (5) можна довести так:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Формула (6) доводиться аналогічно. Формули (2) – (6) правильні тільки за умови, що $\operatorname{tg}\alpha$ чи $\operatorname{ctg}\alpha$ існують. Користуючись цими формулами, можна числове значення будь-якої тригонометричної функції виразити через значення іншої тригонометричної функції такого самого аргументу. Але при цьому треба враховувати, якій чверті належить цей аргумент.

Приклади.

1) Знайдіть $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = 0,6$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Розв'язання. Оскільки $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, то $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$. Якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos\alpha < 0$. Тому $\cos\alpha = -\sqrt{1 - 0,6^2} = -0,8$.

Тоді $\operatorname{tg}\alpha = \frac{0,6}{-0,8} = -\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{-0,8}{0,6} = -\frac{4}{3}$.

2) Знайдіть $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$, $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Відомо, що $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ і α — кут третьої чверті, тому:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2}} = -\frac{5}{13};$$

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{13}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{5}{12}.$$

Хочете знати ще більше?

Крім функцій $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ до тригонометричних функцій раніше відносили ще $\sec\alpha$ (секанс) і $\operatorname{cosec}\alpha$ (косеканс):

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha};\quad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

Тепер ці функції використовують рідко.

Перевірте себе

1. Сформулюйте основну тригонометричну тотожність. Доведіть її.
2. Які формули пов'язують синус, косинус і тангенс або котангенс того самого числа?
3. Як пов'язані тангенс і котангенс того самого числа?
4. Чи правильно, що тангенс і котангенс того самого числа — числа одного знака?

Виконаємо разом

1 Чи правильно, що при будь-якому значенні x:
$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$; $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$?

Розв'язання. Якщо $\pi < x < 2\pi$, то $\sin x < 0$. У цих випадках $\sin x=-\sqrt{1-\cos^2 x}$. Якщо $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$, то $\cos x<0$, і, отже, $\cos x=-\sqrt{1-\sin^2 x}$. Тому наведені в задачі рівності не завжди є правильними.

2 Спростіть вираз $\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha$.

Розв'язання. $\sin\alpha-\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\alpha-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha=\sin\alpha-\sin\alpha=0.$

3 Знайдіть значення виразу $\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha+3\cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

Розв'язання. Винесемо в чисельнику і знаменнику $\cos\alpha$ за дужки:

$$\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha+3\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha\left(2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1\right)}{\cos\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+3\right)}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha+3}.$$

Підставимо значення $\operatorname{tg}\alpha = 2$ і отримаємо:

$$\frac{2\cdot2+1}{2+3}=\frac{5}{5}=1.$$

4 Доведіть тотожність $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Розв'язання. У лівій частині тотожності виділимо повний квадрат. Для цього додамо і віднімемо вираз $2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Тоді $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$
$= (\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$
$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$
Права частина тотожності дорівнює лівій. Отже, тотожність доведено.

Виконайте усно

Спростіть вираз (849–851).

849. а) $1 - \sin^2\alpha$; в) $1 - \cos^2\alpha$; ґ) $\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$;
б) $5 - 5\cos^2\beta$; г) $7\sin^2\beta - 7$; д) $\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\beta$.

850. а) $\dfrac{\cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha - 1}$; б) $\dfrac{1 - \sin^2\alpha}{\cos\alpha}$; в) $\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - 1}$.

851. а) $2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$; в) $-\sin^2 x - \cos^2 x$;
б) $\sin^2 3\alpha + \cos^2 3\alpha$; г) $1 - \sin^2 c - \cos^2 c$.

Рівень А

Спростіть вираз (852–855).

852. а) $1 - \sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$; г) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) - \cos^2\alpha$;
б) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha$; ґ) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$;
в) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha - \sin^2\alpha$; д) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

853. а) $1 - \sin^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha$; г) $\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;
б) $(\cos x - 1)(2 + 2\cos x)$; ґ) $2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;
в) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$; д) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha - \cos^2\alpha$.

854. а) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; в) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha - 1}$; ґ) $\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\cdot\operatorname{ctg} x$;
б) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}^2\alpha$; г) $\dfrac{\cos^2\alpha - \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha - \sin^4\alpha}$; д) $\dfrac{\sin^4 - \sin^6\beta}{\cos^4\beta - \cos^6\beta}$.

855. а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$; в) $1 - \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$;
б) $1 - (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$; г) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$.

Доведіть тотожність (856–858).

856. а) $(1 - \sin^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$; в) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$;
б) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\cos^2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$; г) $(1 - \cos^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \operatorname{tg}^2\alpha$.

857. а) $(1 - \sin^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha = \sin^2\alpha$; в) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = \sin^2\alpha$;
б) $1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0$; г) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

858. а) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$; в) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;
б) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$; г) $\dfrac{\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{tg}\beta - 1} = -\operatorname{ctg}\beta$.

859. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях α значення виразу не залежить від α:

а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha$; в) $(2\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - 2\cos\alpha)^2$;

б) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2$; г) $\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$.

860. Відомо, що кут α — гострий. Обчисліть значення:

а) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$; в) $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 4$.

861. Знаючи, що $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, обчисліть значення $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ за умови, що: а) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$; б) $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

862. Знаючи, що $\cos\alpha = 0{,}8$, обчисліть значення $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ за умови, що: а) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$; б) $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$.

Рівень Б

Спростіть вираз (863–867).

863. а) $\dfrac{\sin\beta+\operatorname{tg}\beta}{1+\cos\beta}$; в) $\operatorname{ctg}^2\beta - \cos^2\beta - \operatorname{ctg}^2\beta\cos^2\beta$;

б) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{ctg}\beta}$; г) $\dfrac{1}{2(1+\cos\beta)}+\dfrac{1}{2(1-\cos\beta)}-\operatorname{ctg}^2\beta$.

864. а) $(\cos(-\varphi) - \sin\varphi\operatorname{ctg}(-\varphi))^2 + 4\sin^2(-\varphi)$; в) $\operatorname{ctg}(-\varphi)+\dfrac{\cos(-\varphi)}{1+\sin\varphi}$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\varphi)}{\operatorname{ctg}(-\alpha)+\operatorname{ctg}\varphi}$; г) $\dfrac{(\cos\varphi-\sin(-\varphi))^2-1}{\operatorname{ctg}\varphi-\sin\varphi\cos(-\varphi)}$.

865. а) $\dfrac{(1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{(1-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha)}$; б) $\dfrac{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha}{(\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha)^2+(\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha)^2}$.

866. а) $\dfrac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\cos^3\alpha}{(1-\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha)}$; б) $\dfrac{(\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha)}{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\sin\alpha\cos\alpha}$.

867. а) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$; в) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

б) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha$; г) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha$.

Доведіть тотожність (868–869).

868. а) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha = (1 + \cos\alpha)(1 + \operatorname{tg}\alpha)$;

б) $(\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) = (1 + \sin\alpha)(1 + \cos\alpha)$.

в) $\sin^3\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$;
г) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha$.

869. а) $\dfrac{2\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha+3}{2\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha+3}=\operatorname{ctg}^2\alpha$; в) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$;

б) $1+\dfrac{\cos\alpha\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$; г) $\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=|\sin\alpha+\cos\alpha|$.

870. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях α значення виразу не залежать від α:

а) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}+\sin^2\alpha$; в) $1-\left(\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\dfrac{\sin\alpha}{2}$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}-\operatorname{ctg}^2\alpha$; г) $1-\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\right)\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\right)$.

За заданим значенням функції знайдіть значення всіх інших тригонометричних функцій (871–872).

871. а) $\sin\alpha=\dfrac{5}{13},\ \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; в) $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5},\ \pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{4},\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{8}{15},\ \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

872. а) $\sin\alpha=-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; в) $\cos\alpha=\dfrac{24}{25},\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha=-2,\ \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; г) $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{7}{24},\ 2\pi<\alpha<\dfrac{5\pi}{2}$.

873. Знайдіть значення виразу $\dfrac{5\cos\alpha+6\sin\alpha}{3\sin\alpha-7\cos\alpha}$, якщо:

а) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{3}$; б) $\operatorname{ctg}\alpha=2$.

874. Обчисліть $\operatorname{tg}\alpha$, якщо:

а) $\dfrac{\sin\alpha+3\cos\alpha}{\sin\alpha-3\cos\alpha}=4$; б) $\dfrac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{3\cos\alpha-2\sin\alpha}=3$.

Рівень В

875. Доведіть тотожність (875–876).

а) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$; в) $\dfrac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$;

б) $3\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)-2\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)=1$; г) $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\dfrac{2}{3}$.

876. а) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$;

б) $4\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)-3\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)^2=1$;

в) $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{2\sin^4\alpha}=-\operatorname{ctg}^2\alpha$; г) $\dfrac{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=-\operatorname{tg}^2\alpha$.

877. Відомо, що $\sin\alpha + \cos\alpha = 0,6$. Обчисліть:
а) $\sin\alpha\cos\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$; в) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$; г) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

878. Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2,4$. Обчисліть:
а) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\sin\alpha\cos\alpha$; в) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$; г) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$.

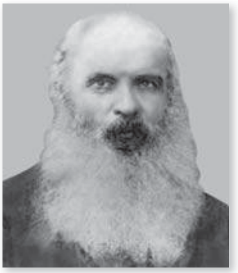
879. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}}$, якщо $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

б) $\dfrac{\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}-\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin\alpha}$, якщо $\dfrac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$;

в) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, якщо $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

г) $\sqrt{1+\dfrac{2}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}}$, якщо $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.



«У математиці слід пам'ятати не формули, а процеси мислення».

В. П. Єрмаков

880. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}}$, якщо $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

б) $\dfrac{\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}+\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}}{\cos\alpha}$, якщо $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3\pi}{4}$;

в) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$, якщо $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

г) $\sqrt{1-\dfrac{2}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}}$, якщо $\pi<\alpha<\dfrac{5\pi}{4}$.

881. Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

а) $y=(1+\sin x)^2+\cos^2 x$; в) $y=\sin^2 x-\sin x$;

б) $y=2\cos^2 x-2\sin x+1$; г) $y=\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x+2\cos^2 x$.

882. Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

а) $y=(1-\cos x)^2+\sin^2 x$; в) $y=\cos x-\cos^2 x$;

б) $y=2\sin^2 x+\cos x+1$; г) $y=5\sin^2 x+2\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x$.

Вправи для повторення

883. Побудуйте графік функції $y = 9 - x^2$. При яких значеннях x вона зростає, при яких — спадає? Знайдіть її нулі і найбільше значення.

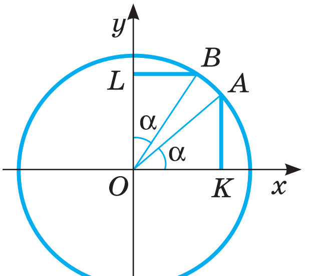
884. Спростіть вираз:

а) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2$; б) $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)^2$; в) $(2\sqrt{12}-\sqrt{3})^2$; г) $\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{18}+\dfrac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2$.

885. Розв'яжіть рівняння: а) $\dfrac{x+1}{6}-\dfrac{2x}{9}=5$; б) $\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{5x+1}{4}=\dfrac{11x}{2}$.

§ 17 Формули зведення

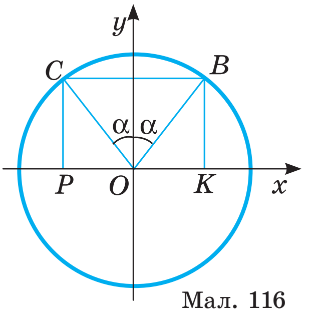
Reduction Formulas



Мал. 115

Кожну тригонометричну функцію кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$; $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ можна виразити через тригонометричну функцію кута α. Покажемо це спочатку для синусів і косинусів.

Нехай α — довільний кут, виражений у радіанах. На одиничному колі йому відповідає певна точка A, а куту $\frac{\pi}{2} - \alpha$ — точка B (мал. 115). Опустивши перпендикуляри AK на вісь x і BL — на вісь y, дістанемо два рівних трикутники AOK і BOL (бо $\angle AOK = \angle BOL$ і $OA = OB$). Тому $OL = OK$ і $BL = AK$, тобто $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = OL = OK = \cos\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = BL = AK = \sin\alpha$.

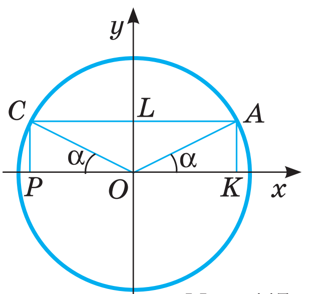


Мал. 116

Кутам $\frac{\pi}{2} + \alpha$ і $\frac{\pi}{2} - \alpha$ на одиничному колі відповідають точки, симетричні відносно осі y (мал. 116). Їх ординати рівні, абсциси — протилежні. Тому

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha.$$

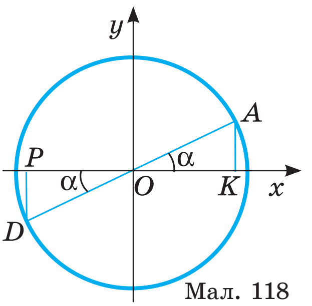


Мал. 117

Кутам $\pi - \alpha$ і α також відповідають точки одиничного кола, симетричні відносно осі y (мал. 117). Тому $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

Кутам $\pi + \alpha$ і α (а також $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ і $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ і $\frac{\pi}{2} + \alpha$) відповідають точки одиничного кола, симетричні відносно початку координат (мал. 118). Їх ординати і абсциси — протилежні. Тому

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \ \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha,$$



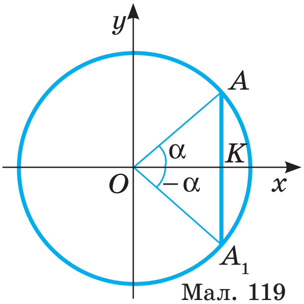
Мал. 118

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha,\ \ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,\ \ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha.$$

Кутам $2\pi - \alpha$ і α відповідають точки одиничного кола, симетричні відносно осі x (мал. 119). Їх абсциси рівні, а ординати — протилежні. Тому

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha.$$



Мал. 119

Кутам $2\pi + \alpha$ і α відповідає одна й та сама точка одиничного кола. Тому

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha.$$

З попередніх міркувань маємо 16 формул.

Ще 16 подібних формул можна довести для тангенса і котангенса:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right):\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha:\sin\alpha=\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right):\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha:\cos\alpha=\operatorname{tg}\alpha.$$

Отже,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha,\ \ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha.$$

Усі ці 32 формули називають *формулами зведення*, бо вони дають можливість кожну тригонометричну функцію довільного кута (а отже, і числа) звести до тригонометричної функції гострого кута. Запам'ятовувати кожну з цих формул немає потреби, краще користуватися загальним правилом.

Щоб зрозуміліше сформулювати правило, домовимося синус вважати кофункцією косинуса і навпаки, а тангенс — кофункцією котангенса і навпаки.

Будемо говорити також, що кут зводжуваної функції відкладається від горизонтального діаметра, якщо він має вигляд $\pi \pm \alpha$ або $2\pi \pm \alpha$, чи від вертикального діаметра, якщо він має вигляд $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ або $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$.

Правило зведення можна сформулювати так: *Якщо кут зводжуваної тригонометричної функції відкладається від вертикального діаметра, то її замінюють кофункцією, якщо ж — від горизонтального діаметра, то її назву не змінюють. Знак ставимо такий самий, як у значенні зводжуваної функції за умови, що кут α — гострий.*

Приклад. Нехай треба спростити вираз $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

Перед результатом треба поставити знак «мінус», бо коли кут α гострий, то кут $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ належить III чверті і його косинус — від'ємний. Кут $\frac{3\pi}{2}-\alpha$

відкладається від вертикального діаметра, тому назву функції косинус (cos) треба замінити на синус (sin). Отже, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$.

Примітка. Користуючись правилом зведення, ми тільки для зручності приймаємо, що кут α — гострий. Насправді ж у кожній із формул зведення під змінною α можна розуміти і міру довільного кута, зокрема й від'ємного, і будь-яке дійсне число.

Перевірте себе

1. Що таке формули зведення?
2. Сформулюйте правило зведення.
3. Які знаки мають тригонометричні функції в кожній із чвертей?
4. Яку функцію називають кофункцією для синуса? А тангенса?
5. Чи можна у формулу зведення підставляти значення $\alpha=-\frac{3}{2}$? А 120°?

Виконаємо разом

1 Доведіть тотожність:

а) $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; б) $\sin(\alpha-\pi)=\sin(\alpha+\pi)$.

Розв'язання. а) Перетворимо праву і ліву частини тотожності.

Враховуючи, що $\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$ — кут I чверті, а $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ — II чверті, отримаємо: $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ і $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$.

Отже, тотожність правильна.

б) Аналогічно до першої тотожності:

$\sin(\alpha-\pi)=-\sin(\pi-\alpha)=-\sin\alpha$ і $\sin(\alpha+\pi)=\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$.

Тотожність правильна.

2 Дану тригонометричну функцію зведіть до найменшого додатного аргументу:

а) $\sin 845°$; б) $\cos\frac{23\pi}{8}$; в) $\mathrm{tg}\left(-\frac{17\pi}{7}\right)$.

Розв'язання. а) $\sin 845° = \sin(9\cdot 90° + 35°) = \cos 35°$ або

$\sin 845° = \sin(2\cdot 360° + 125°) = \sin(125°) = \sin(90° + 35°) = \cos 35°$;

б) $\cos\frac{23\pi}{8}=\cos\left(3\pi-\frac{\pi}{8}\right)=-\cos\frac{\pi}{8}$;

в) $\mathrm{tg}\left(-\frac{17\pi}{7}\right)=-\mathrm{tg}\frac{17\pi}{7}=-\mathrm{tg}\left(2\pi+\frac{3\pi}{7}\right)=-\mathrm{tg}\frac{3\pi}{7}$.

3 Спростіть вираз: $\dfrac{1-\cos(\pi-\alpha)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}\cdot\dfrac{\sin^2\alpha+\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(4\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)}$.

Спрощення виразу зручно розпочинати із застосування формул зведення:

$$\frac{1-\cos(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\cdot\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(4\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)}=$$

$$=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1.$$

Виконайте усно

886. Які функції числа α мають бути в порожніх клітинах таблиці?

Кути / Функції	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
sin					
cos					
tg					

887. Зведіть до найменшого додатного аргументу функції:
а) $\sin 94°$; б) $\cos 105°$; в) $\mathrm{tg}\,192°$; г) $\cos 269°$; ґ) $\mathrm{ctg}\,79°$; д) $\sin 282°$.

Спростіть вираз (888–889).

888. а) $\sin(90° + \alpha)$; б) $\cos(90° + \alpha)$; в) $\mathrm{tg}(90° + \alpha)$; г) $\mathrm{ctg}(90° + \alpha)$.

889. а) $\sin(180° - \alpha)$; б) $\cos(180° - \alpha)$; в) $\mathrm{tg}(180° - \alpha)$; г) $\mathrm{ctg}(180° - \alpha)$.

Рівень А

Спростіть вираз (890–895).

890. а) $\sin(360° - \alpha)$; б) $\mathrm{tg}(360° - \alpha)$; в) $\cos(270° + \alpha)$; г) $\mathrm{tg}(270° - \alpha)$.

891. а) $\sin(270° - \alpha)$; б) $\cos(270° - \alpha)$; в) $\cos(360° + \alpha)$; г) $\mathrm{ctg}(360° - \alpha)$.

892. а) $\sin(90° - 2\alpha)$; б) $\cos(90° + 3\alpha)$; в) $\mathrm{tg}\,(180° - 2x)$; г) $\mathrm{ctg}\,(180° + 3x)$.

893. а) $\sin\left(90°+\dfrac{\alpha}{2}\right)$; б) $\cos\left(90°-\dfrac{\alpha}{2}\right)$; в) $\mathrm{tg}\left(90°+\dfrac{\alpha}{3}\right)$; г) $\mathrm{ctg}\left(270°-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

894. а) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)$; в) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$; ґ) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$;
б) $\sin(\pi - \alpha)$; г) $\sin(\alpha + \pi)$; д) $\sin(2\pi - \alpha)$.

895. а) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; в) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; ґ) $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)$; е) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)$;
б) $\mathrm{tg}(3\pi + \alpha)$; г) $\cos(\pi + \alpha)$; д) $\mathrm{ctg}(3\pi - \alpha)$; є) $\cos(\alpha + 5\pi)$.

Зведіть функцію до найменшого додатного аргументу (896–897).

896. а) $\sin 213°$; в) $\cos 111°$; ґ) $\operatorname{tg} 185°$; е) $\operatorname{ctg} 283°$;

б) $\sin\frac{25\pi}{8}$; г) $\cos\frac{17\pi}{8}$; д) $\operatorname{tg}\frac{28\pi}{9}$; є) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}$.

897. а) $\sin 199°$; в) $\cos 299°$; ґ) $\operatorname{tg} 399°$; е) $\operatorname{ctg} 499°$;

б) $\sin\frac{57\pi}{5}$; г) $\cos\frac{47\pi}{6}$; д) $\operatorname{tg}\frac{37\pi}{7}$; є) $\operatorname{ctg}\frac{27\pi}{8}$.

Спростіть вираз (898–900).

898. а) $\sin^2(\pi+\alpha)$; б) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; в) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

899. а) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; в) $\cos^2(\pi-\alpha)$.

900. а) $\sin(\pi-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$; б) $\cos(\pi+x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

Знайдіть значення виразу (901–903).

901. а) $\sin 300°$; б) $\cos 240°$; в) $\operatorname{tg} 225°$; г) $\operatorname{ctg} 330°$.

902. а) $\sin(-210°)$; б) $\cos(-225°)$; в) $\operatorname{tg}(-240°)$; г) $\operatorname{ctg}(-315°)$.

903. а) $\sin 405°$; б) $\cos 720°$; в) $\operatorname{tg} 750°$; г) $\operatorname{ctg} 1110°$.

Спростіть вираз (904–906).

904. а) $1-\sin^2(\pi+\alpha)$; б) $1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; в) $1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; г) $1+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

905. а) $\sin^2(\pi-x)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$; б) $\cos^2(\pi+x)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

906. а) $\operatorname{ctg}^2(27\pi-x)+\sin^2\frac{5\pi}{2}$; б) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^2 7\pi$.

Рівень Б

Спростіть вираз (907–908).

907. а) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$; б) $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$; в) $\operatorname{tg}(\varphi-\pi)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$.

908. а) $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$; б) $\cos(3\alpha-\pi)$; в) $\cos\left(\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)$.

Доведіть тотожність (909–910).

909. а) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=0$; б) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=0$;

в) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$.

910. а) $\frac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\sin(1,5\pi+\alpha)}{\operatorname{tg}(1,5\pi+\alpha)}=\operatorname{tg}^2\alpha$; б) $\frac{\sin(\alpha-1,5\pi)}{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)}\cdot\frac{\operatorname{ctg}(\alpha-0,5\pi)}{\operatorname{tg}(\alpha+0,5\pi)}=\sin\alpha$.

Зведіть функцію до найменшого додатного аргументу (911–914).

911. а) $\sin 3300°$; б) $\cos 1240°$; в) $\operatorname{tg} 2225°$; г) $\operatorname{ctg} 1330°$.

912. а) $\sin(-2109°)$; б) $\cos(-2250°)$; в) $\operatorname{tg}(-2900)°$; г) $\operatorname{ctg}(-8159)°$.

913. а) $\sin 5405°$; б) $\cos 3720°$; в) $\operatorname{tg} 1750°$; г) $\operatorname{ctg} 1110°$.

914. а) $\sin 3{,}5\pi$; б) $\cos 2{,}57\pi$; в) $\operatorname{tg} 0{,}3\pi$; г) $\operatorname{ctg} 1{,}4\pi$.

Спростіть вираз (915–916).

915. а) $\sin(\pi-\alpha)\cos(2\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\pi-\alpha)$;

б) $\cos^2(\pi+\alpha)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;

в) $\cos(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\sin^2(\pi-\alpha)\sin^2(\pi+\alpha)-\cos^2(\pi-\alpha)\sin^2\alpha$;

г) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\sin(\pi+\alpha)\left(\operatorname{tg}(\pi+\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)$.

916. а) $\dfrac{\operatorname{tg}(180°-\beta)\sin(270°-\beta)\operatorname{tg}(90°-\beta)}{\sin(180°-\beta)\operatorname{ctg}(180°-\beta)\operatorname{ctg}(90°-\beta)}$;

б) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;

в) $\dfrac{\sin^2(270°+\varphi)}{\operatorname{ctg}^2(\varphi-180°)}+\dfrac{\sin(180°+\varphi)}{\operatorname{tg}^2(180°-\varphi)}+\dfrac{\sin^2(180°+\varphi)}{\sin^2(270°-\varphi)}$;

г) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin^2(\pi-\alpha)}-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\pi-\alpha)$.

Доведіть тотожність (917–919).

917. а) $\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{10}\right)=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$;

б) $\cos\left(\alpha-\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{17\pi}{12}\right)$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{18}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{13\pi}{9}+\alpha\right)=0$.

918. а) $\cos\left(\frac{\pi}{12}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha\right)$; в) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$;

б) $\sin\left(\alpha-\frac{7\pi}{12}\right)=-\sin\left(\alpha+\frac{5\pi}{12}\right)$; г) $\sin\left(\frac{7\pi}{10}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}+\alpha\right)=0$.

919. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(2\pi+\alpha)=0$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(\alpha-\pi)+\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=2\cos\alpha$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(2\pi-\alpha)-\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=1$.

920. а) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\operatorname{tg}^2\alpha;$

б) $\sin(180°+\alpha)\cos(90°+\alpha)-\cos(360°+\alpha)\sin(270°-\alpha)=1;$

в) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{tg}(2\pi+\alpha)\cos(\alpha-2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi+\alpha)}=\sin\alpha;$

г) $\operatorname{tg}(180°+\alpha)\sin(270°+\alpha)+\operatorname{ctg}(270°-\alpha)+\cos(90°-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha.$

Рівень В

Зведіть функцію до найменшого додатного аргументу (921–922).

921. а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3\right)$; б) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$.

922. а) $\sin(3\pi+2)$; б) $\cos(5\pi-3)$; в) $\operatorname{tg}(0{,}5\pi+1)$.

923. Доведіть тотожність:

а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$; в) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

Обчисліть (924–925).

924. а) $\sin 20°\cos 70°-\sin 110°\cos 160°$;

б) $1+\cos 40°\cos 140°-\cos^2 50°$;

в) $\dfrac{\sin 5°\cos 95°+\cos 175°\sin 85°}{\sin 150°}$;

г) $\dfrac{\sin 77°\cos 13°-\sin 13°\cos 103°}{\cos 15°\cos 375°-\cos 75°\cos 105°}$.

925. а) $\operatorname{tg}41°\operatorname{tg}42°\operatorname{tg}43°\ldots\operatorname{tg}48°\operatorname{tg}49°$;

б) $\operatorname{ctg}10°+\operatorname{ctg}30°+\operatorname{ctg}50°+\ldots+\operatorname{ctg}150°+\operatorname{ctg}170°$;

в) $\sin 10°+\sin 20°+\sin 30°+\ldots+\sin 330°+\sin 340°+\sin 350°+\sin 360°$.

926. Знайдіть значення виразу:

а) $\sin^2\dfrac{\pi}{5}+\sin^2\dfrac{\pi}{8}+\sin^2\dfrac{3\pi}{10}+\sin^2\dfrac{3\pi}{8}$;

б) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{\pi}{10}+\sin^2\dfrac{7\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{5}$.

927. Доведіть, що коли α, β, γ — кути трикутника, то:

а) $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\cos\dfrac{\gamma}{2}$; б) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$.

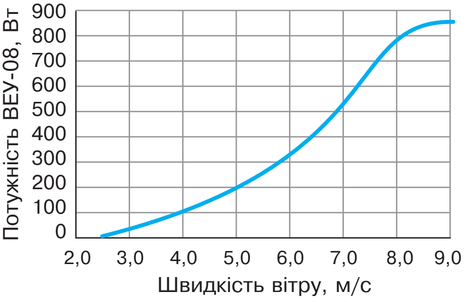
Вправи для повторення

928. У скільки разів і на скільки порядків число $4 \cdot 10^7$ більше за $8 \cdot 10^6$?

929. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{3x}{4}+\frac{2(x-1)}{5}=\frac{111}{10}$; б) $\frac{2x+3}{5}+\frac{15-3x}{3}=\frac{4}{5}$.

930. На малюнку 120 зображено графік залежності потужності одного з вітрогенераторів від швидкості вітру. Зростаючою чи спадною є ця функція? Знайдіть: а) потужність вітрогенератора, якщо швидкість вітру дорівнює 4 м/с; 8 м/с; б) швидкість вітру, при якому потужність вітрогенератора дорівнює 200 Вт; 700 Вт.



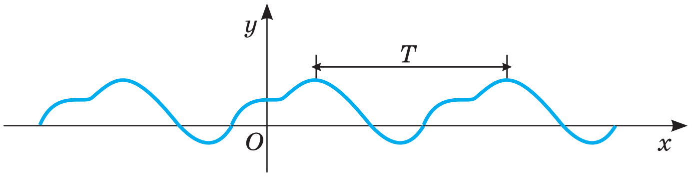
Мал. 120

§ 18 Властивості та графіки тригонометричних функцій

Trigonometric Functions Properties and Graphs

Одна з найважливіших властивостей тригонометричних функцій полягає в тому, що кожна з них — функція періодична. Функцію $y = f(x)$ називають *періодичною*, якщо існує таке дійсне число $T \neq 0$, що для всіх значень x з області її визначення $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.

Число T називають періодом даної функції. Якщо T — період деякої функції, то nT, де $n \in Z$ і $n \neq 0$, також є її періодом. Графік такої функції паралельним перенесенням уздовж осі x на T, $2T$, ..., nT одиниць уліво чи вправо відображається на себе (мал. 121).



Мал. 121

Покажемо, що функція $y = \sin x$ — періодична. Оскільки числу 2π відповідає повний оберт точки одиничного кола, то числам x, $x + 2\pi$, $x + 4\pi$, ..., $x + 2\pi n$, де n — число ціле, на одиничному колі відповідає одна й та сама точка. Синуси усіх цих чисел рівні. Тому для кожного цілого значення n:

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin x.$$

Звідси

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi),$$

тому за означенням 2π — період функції $y = \sin x$. А якщо б ця функція мала додатний період $l < 2\pi$, тоді правильною була б рівність $\sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + l\right)$. А за умови, що $0 < l < 2\pi$, ця рівність є неправильною (переконайтесь у цьому за допомогою одиничного кола). Отже, ***найменший додатний період функції $y = \sin x$ дорівнює 2π.***

Аналогічно, на області визначення функцій $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ мають місце рівності:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x = \cos(x - 2\pi),$$
$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x - \pi),\ \operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x - \pi).$$

Тоді з означення періодичних функцій випливає, що функція $y = \cos x$ є періодичною з періодом 2π, а функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ періодичні з періодом π. Можна довести, що ***найменший додатний період функції $y = \cos x$ дорівнює 2π, а функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ — π*** (доведіть самостійно).

Одну з властивостей періодичних функцій сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. *Якщо функція $y = f(x)$ періодична з періодом T, то функція $y = af(kx + b)$ теж періодична з періодом $\frac{T}{k}$ $(k \neq 0)$.*

Доведення. Для будь-якого x з області визначення функції $y = af(kx + b)$ маємо:

$$af(kx+b) = af(kx+b+T) = af\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)+b\right),$$
$$af(kx+b) = af(kx+b-T) = af\left(k\left(x-\frac{T}{k}\right)+b\right).$$

Отже, має місце рівність:

$$af\left(k\left(x-\frac{T}{k}\right)+b\right) = af(kx+b) = af\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)+b\right).$$

Отже, число $\frac{T}{k}$ є періодом функції $y = af(kx + b)$.

Зверніть увагу! Якщо потрібно знайти **найменший додатний період** функції $y = af(kx + b)$, то це буде число $\frac{T}{|k|}$ $(k \neq 0)$, де T — найменший додатний період функції $y = f(x)$.

Наприклад, найменшими додатними періодами для функції $y_1 = \sin 2x$, $y_2 = 5\cos\left(\frac{x}{2} + 3\right)$, $y_3 = 2\,\mathrm{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$, $y_4 = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{5} - 7x\right)$ будуть, відповідно, числа $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$, $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, $T_3 = \frac{\pi}{3}$, $T_4 = \frac{\pi}{|-7|} = \frac{\pi}{7}$.

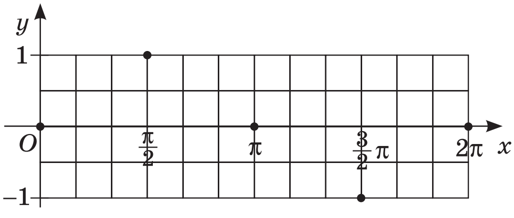
Розглянемо інші властивості тригонометричних функцій.

Функція $y = \sin x$. Щоб виявити важливіші властивості цієї функції, побудуємо її графік. Спочатку — тільки на проміжку $[0;\ 2\pi]$. Складемо таблицю значень:

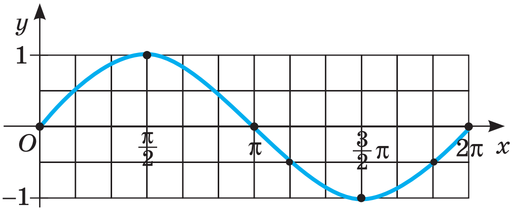
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	–1	0

Точки з відповідними координатами нанесемо на координатну площину (мал. 122).

Якщо обчислити значення $\sin x$ для всіх дійсних значень x і позначити на координатній площині всі відповідні їм точки, то дістанемо криву, зображену на малюнку 123. Це графік функції $y = \sin x$ на $[0;\ 2\pi]$. (Значення $\sin x$ можна не обчислювати, а визначати вимірюванням відповідних ліній синуса одиничного кола).



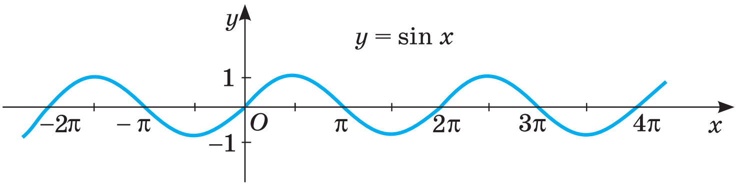
Мал. 122



Мал. 123

На побудованому графіку показано, як змінюється ордината точки одиничного кола, здійснюючи один повний обхід цього кола. На другому, третьому і наступних обходах усе повторюється. Це випливає також із тотожності $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$. Тому якщо криву, зображену на малюнку 123, перенести на кожний із проміжків $[2\pi n;\ 2(n + 1)\pi]$, де n — числа цілі, дістанемо весь графік (мал. 124). Криву, яка є графіком функції $y = \sin x$, називають *синусоїдою*.

Область визначення функції $y = \sin x$ — множина всіх дійсних чисел $\boldsymbol{R}$, а область значень — відрізок $[-1;\ 1]$. Функція непарна, періодична, її найменший додатний період дорівнює 2π. Графік функції зображено на малюнку 124.



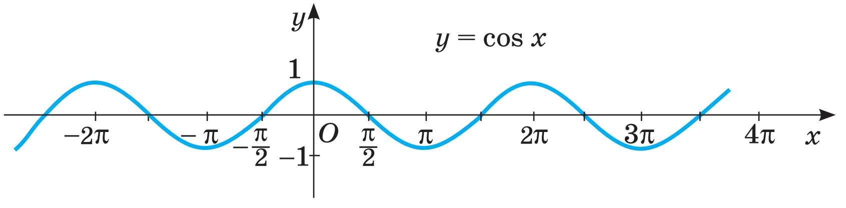
Мал. 124

Функція $y = \cos x$. Оскільки для кожного значення x є правильною рівність $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, то графік функції $y = \cos x$ — така сама синусоїда, тільки зміщена вздовж осі x на $\frac{\pi}{2}$ одиниць вліво (мал. 125).

Її називають *косинусоїдою*.

Зазначимо основні властивості функції $y = \cos x$.

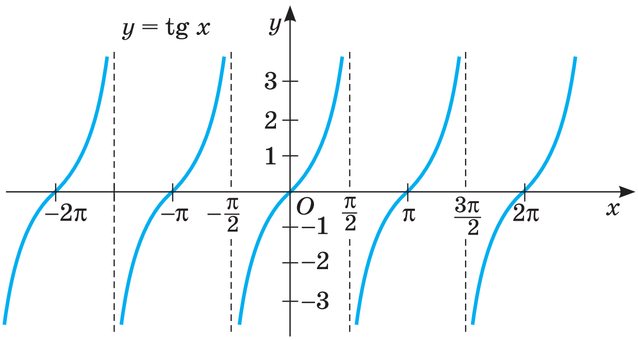
Її область визначення — множина всіх дійсних чисел $\boldsymbol{R}$, область значень — відрізок $[-1; 1]$. Функція парна, періодична, її найменший додатний період дорівнює 2π. Графік функції $y = \cos x$ зображено на малюнку 125.



Мал. 125

Функція $y = \operatorname{tg} x$. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ зображено на малюнку 126. Її область визначення — множина всіх дійсних чисел, за винятком чисел $\frac{\pi}{2} + \pi n$, де $n \in Z$. Область значень — множина всіх дійсних чисел $\boldsymbol{R}$.

Якщо x збільшувати від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то значення $\operatorname{tg} x$ збільшуватиметься від $-\infty$ до $+\infty$. При збільшенні x від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ все повторюється, бо при кожному x з області визначення і будь-якому цілому n $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi n)$. Функція $y = \operatorname{tg} x$ — періодична з найменшим додатним періодом π. Ця функція непарна, бо для кожного x з області визначення $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ називають *тангенсоїдою*, він складається з безлічі окремих віток. Кожна з цих віток — нескінченна крива, яку паралельним перенесенням можна відобразити на будь-яку іншу вітку даної тангенсоїди (мал. 126).

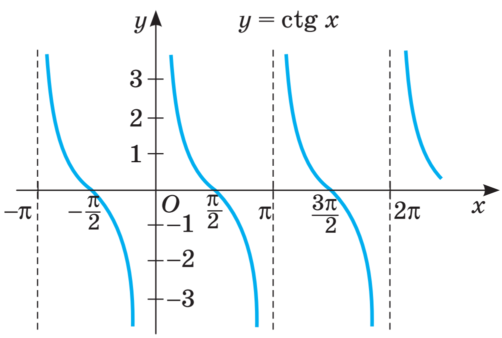


Мал. 126

Функція $y = \mathrm{ctg}\, x$. Графік функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ зображено на малюнку 127. Її область значень — множина $\boldsymbol{R}$, а область визначення — множина $\boldsymbol{R}$ за винятком чисел πn, де $n \in Z$. Функція $y = \mathrm{ctg}\, x$ також непарна:

$$\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x.$$

Її найменший додатний період дорівнює π. Графік функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ складається з безлічі рівних між собою нескінченних і центрально симетричних ліній (мал. 127).

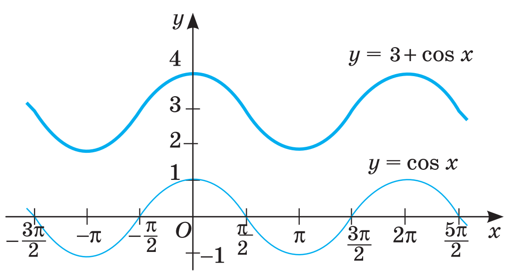


Мал. 127

Інші властивості тригонометричних функцій (нулі, проміжки знакосталості, зростання і спадання) можна прочитати за відповідними графіками. Спробуйте це зробити самостійно.

Досі йшлося про графіки найпростіших тригонометричних функцій. А як побудувати графіки складніших функцій? Для цього слід згадати правила перетворення графіків (с. 18, форзац 3).

Знаючи, який вигляд має, наприклад, графік функції $y = \cos x$, можна побудувати графік функції $y = 3 + \cos x$ (мал. 128).



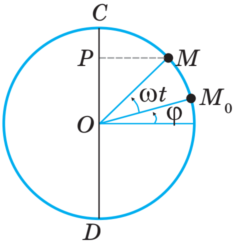
Мал. 128

А дивлячись на графік, можна вказати й основні властивості функції $y = 3 + \cos x$. Її область визначення — множина $\boldsymbol{R}$, область значень — відрізок $[2; 4]$. Функція парна, періодична з найменшим додатним періодом 2π. Побудову складніших графіків тригонометричних функцій розглянемо у наступному параграфі.

Для порівняння всі властивості тригонометричних функцій зведено в таблицю (с. 168). З часом всі вони будуть обґрунтовані, і ви навчитеся визначати їх й аналітично.

$f(x)$	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\operatorname{tg} x$	$y=\operatorname{ctg} x$
$D(y)$	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$	$x\neq\pi k$
$E(y)$	$[-1;\,1]$	$[-1;\,1]$	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$
	Непарна	Парна	Непарна	Непарна
T	2π	2π	π	π
$y=0$	πk	$\frac{\pi}{2}+\pi k$	πk	$\frac{\pi}{2}+\pi k$
$y>0$	$(2\pi k;\ \pi+2\pi k)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$	$\left(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$	$\left(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$
$y<0$	$(-\pi+2\pi k;\ 2\pi k)$	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\pi k\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\pi k\right)$
$y\uparrow$	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$	$(-\pi+2\pi k;\ 2\pi k)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$	—
$y\downarrow$	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$	$(2\pi k;\ \pi+2\pi k)$	—	$(\pi k;\ \pi+\pi k)$

Розглянемо застосування тригонометричних функцій у фізиці. Нехай точка M рухається по колу радіуса A в додатному напрямку зі сталою кутовою швидкістю ω рад/с (мал. 129). Якщо в початковий момент часу (тобто коли $t = 0$) точка M займала положення M_0, яке визначається кутом φ, то через час t вона займе деяке положення M, яке визначається кутом $\omega t + \varphi$. Ордината точки M дорівнює $A\sin(\omega t + \varphi)$.



Мал. 129

Формула $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ визначає змінну y як функцію часу t. Це — *формула гармонічного коливання*, де y — значення функції; t — аргумент; а числа A, ω і φ — сталі:

A — амплітуда коливання;
ω — кутова швидкість;
φ — початкова фаза;
$\omega t + \varphi$ — фаза коливання.

Амплітуда визначається в лінійних одиницях довжини, фаза і початкова фаза — у радіанах. Амплітуда — це величина найбільшого відхилення від положення рівноваги.

Число ω показує кількість повних коливань за 2π одиниці часу.

Період T гармонічного коливання — це найменший додатний період функції $y = A\sin(\omega t + \varphi)$, тобто $T=\frac{2\pi}{\omega}$ — час, протягом якого точка M здійснює один повний оберт по колу. За цей час точка M проходить ωT рад або 2π рад.

Частотою гармонічного коливання називають кількість коливань, здійснюваних за 1 с: $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. Її частіше позначають грецькою буквою ν (ню). Частоту визначають у герцах (1 Гц = 1 $с^{-1}$).

Приклади гармонічних коливань наведено на малюнках 130–132.

Хочете знати ще більше?

Якою може бути область визначення періодичної функції? Оскільки періодом періодичної функції є число, відмінне від нуля, то одне з чисел $x - T$ і $x + T$ є меншим від x, а друге — більшим від x. Тому якщо якась періодична функція визначена в якійсь точці x, то вона визначена також у кожній точці $x + nT$, де n — довільне ціле число, додатне чи від'ємне. З цього випливає, що область визначення періодичної функції — нескінченна в обидва боки осі x. Вона може бути: 1) всією множиною дійсних чисел; 2) нескінченною послідовністю рівномірно розташованих рівних проміжків; 3) нескінченною множиною точок.

Ця властивість області визначення періодичної функції використовується для розв'язування задач, наприклад, такого виду.

Задача. Областю визначення періодичної функції $y = f(x)$ із періодом $T = 9$ є множина всіх дійсних чисел. На проміжку $(-6; 3]$ цю функцію задано формулою $f(x) = 11 - x^3$. Обчисліть значення $f(5)$.

Розв'язання. Оскільки функція визначена на проміжку $(-6; 3]$ і має період 9, то вона визначена також у кожній точці $x + 9n$, де n — довільне ціле число, $x \in (-6; 3]$, зокрема й у точці 5. Знайдемо $f(5)$.

За означенням періодичної функції $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.

Маємо: $f(5) = f(-4 + 9) = f(-4) = 11 - (-4)^3 = 75$.

Перевірте себе

1. Яку функцію називають періодичною?
2. Назвіть область визначення і множину значень кожної з тригонометричних функцій.
3. Назвіть найменший додатний період кожної з тригонометричних функцій.
4. Чи мають нулі тригонометричні функції?
5. Як називають графіки основних тригонометричних функцій?

Виконаємо разом

1 Знайдіть період функції $y = \sin 5x + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$.

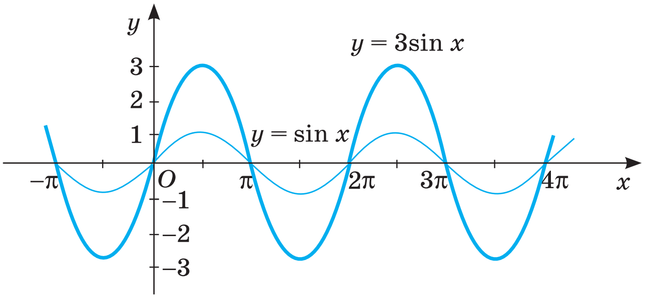
Розв'язання. Щоб знайти період даної функції, потрібно знайти спільний період функцій $y_1 = \sin 5x$ і $y_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$, тобто число, що ділиться націло на період кожної функції. Маємо: $T_1 = \frac{2\pi}{5}$, $T_2 = \frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$.

Очевидно, що спільним періодом буде число $T = 6\pi$.

2 Побудуйте графік функції:

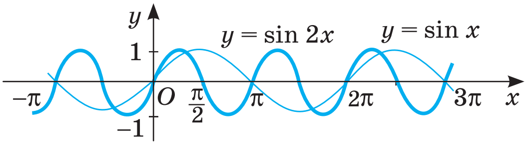
а) $y = 3\sin x$; б) $y = \sin 2x$; в) $y = \sin|x+2|$.

Розв'язання. а) Щоб побудувати графік функції $y = 3\sin x$, треба графік функції $y = \sin x$ «розтягнути» від осі x у 3 рази (мал. 130) (див. с. 18).



Мал. 130

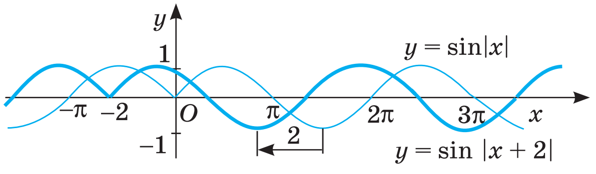
б) Щоб побудувати графік функції $y = \sin 2x$, треба графік функції $y = \sin x$ «стиснути» до осі y вдвічі (мал. 131).



Мал. 131

в) Щоб побудувати графік функції $y = \sin|x+2|$, треба побудувати графік функції:

1) $y = \sin x$; 2) $y = \sin|x|$; 3) $y = \sin|x+2|$ (мал. 132).



Мал. 132

3 Побудуйте графік функції $y = 3\cos(2x + 4)$.

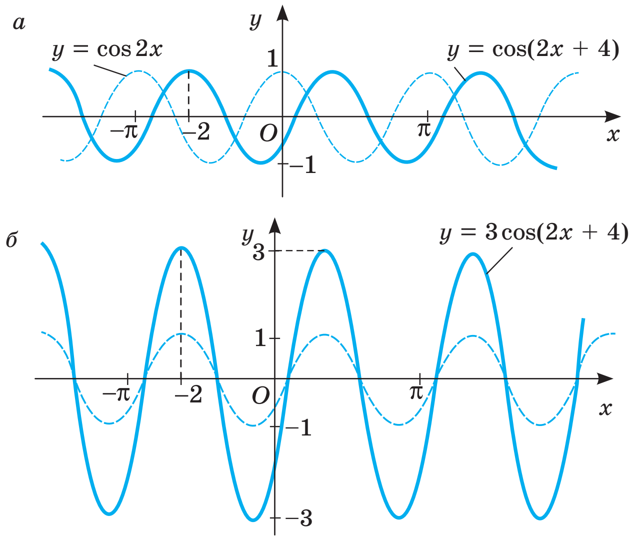
Розв'язання. Запишемо функцію у вигляді $y = 3\cos 2(x + 2)$. Побудову виконуємо в такій послідовності:

1) $y = \cos x$; 2) $y = \cos 2x$; 3) $y = \cos 2(x + 2)$; 4) $y = 3\cos(2x + 4)$.

1) Будуємо графік функції $y = \cos x$;

2) стискаємо його до осі y у 2 рази;

3) отриманий графік переносимо на 2 одиниці ліворуч (мал. 133, *а*);
4) розтягом від осі x у 3 рази дістанемо потрібний графік (мал. 133, *б*).



Мал. 133

Так само можна перетворювати й інші графіки тригонометричних функцій.

Виконайте усно

931. Які з функцій періодичні:

а) $y=2\sin x$; в) $y=\sqrt{x}$; д) $y=|x|$;

б) $y=x^2$; г) $y=\operatorname{ctg}3x$; е) $y=-3\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$?

932. Знайдіть найменший додатний період функції.

а) $y=\sin 2x$; б) $y=3\cos x$; в) $y=7\operatorname{tg}\frac{x}{3}$; г) $y=-\operatorname{ctg}5x$.

933. Опишіть усно, як змінюється значення функції $y = \sin x$ при збільшенні її аргументу x від 0 до 2π.

934. Як змінюється значення функції $y=\cos x$ при збільшенні її аргументу x від 0 до 2π?

935. Чи можна вважати парною функцію $y = \cos x$, задану на множині $(0;+\infty)$? А на множині $[-\pi;\ \pi]$?

936. Хід поршня в циліндрі двигуна дорівнює 12 см. Знайдіть амплітуду його коливання.

937. Визначте амплітуду, фазу, початкову фазу і кутову швидкість гармонічного коливання, заданого формулою:

а) $y=\frac{1}{2}\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $y=7\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$; в) $y = 3\cos 3t$; г) $y = 2\sin(3\pi t + 1)$.

938. Чи правильно, що графік функції $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ є також графіком функції $y = \sin x$?

939. Чи правильно, що графік функції $y=|1+\cos x|$ є також графіком функції $y = 1 + \cos x$?

Рівень А

Використовуючи періодичність тригонометричних функцій, знайдіть значення виразу (940–941).

940. а) $\sin\frac{16\pi}{3}$; в) $\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$; ґ) $\text{tg}\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$; е) $\text{ctg}\frac{8\pi}{3}$;

б) $\cos 750°$; г) $\sin(-1500°)$; д) $\text{tg}870°$; є) $\text{ctg}(-585°)$.

941. а) $\sin(-420°)$; в) $\cos 300°$; ґ) $\text{tg}600°$; е) $\text{ctg}(-405°)$;

б) $\cos\frac{7\pi}{3}$; г) $\sin\left(-\frac{37\pi}{6}\right)$; д) $\text{tg}\left(\frac{10\pi}{3}\right)$; є) $\text{ctg}\left(\frac{11\pi}{4}\right)$.

942. Чи проходить графік функції $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ через точку:

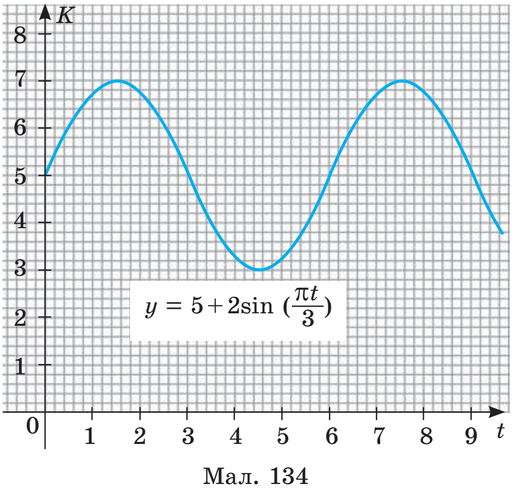
$A(0;\ 1{,}5)$, $B\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{3}{2}\right)$, $C\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{1}{2}\right)$, $D\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$?

943. Еколог, що вивчає популяцію жуків-плавунців протягом 8 тижнів, змоделював зміну їх кількості за допомогою функції $K(t)=5+2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, де t — кількість тижнів дослідження, $0 \le t \le 8$, а $K(t)$ — кількість жуків-плавунців у тисячах. На малюнку 134 побудовано графік цієї функції. Встановіть:

а) чисельність популяції на початку дослідження;

б) чи зменшувалася кількість популяції жуків плавунців до 2000;

в) найбільшу і найменшу чисельність популяції за час дослідження.



Мал. 134

944. Побудуйте графік функції $y=x^2$ на відрізку $[-1;\ 1]$. Продовжте цей графік на відрізок $[-12;\ 12]$ так, щоб він задавав періодичну функцію. Знайдіть період цієї функції.

945. Побудуйте графік функції $y=2-|x|$ на відрізку $[-2;\ 2]$. Продовжте цей графік на відрізок $[-12;\ 12]$ так, щоб він задавав періодичну функцію. Знайдіть період цієї функції.

Побудуйте графік функції (946–949).

946. а) $y = \sin x,\ x\in[-2\pi;\ 2\pi]$; б) $y = \cos x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

947. а) $y = \sin x,\ x\in[0;\ 2\pi]$; б) $y = \cos x,\ x\in[-\pi;\ \pi]$.

948. а) $y = \operatorname{tg} x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; б) $y = \operatorname{ctg} x,\ x\in[0;\ \pi]$.

949. а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$; в) $y = \operatorname{tg} x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$.

950. Побудуйте графік функції $y = \sin x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

Укажіть: а) нулі функції; б) найбільше і найменше значення; в) проміжки зростання і спадання.

951. Побудуйте графік функції $y = \cos x,\ x\in[0;\ 2\pi]$.

Укажіть: а) нулі функції; б) найбільше і найменше значення; в) проміжки зростання і спадання.

Побудуйте графік функції та встановіть її множину значень (952–953).

952. а) $y = \sin x - 1$; б) $y = 2 + \cos x$; в) $y = \operatorname{tg} x + 1$; г) $y = -1 + \operatorname{ctg} x$.

953. а) $y = 2\sin x$; б) $y = 0{,}5\cos x$; в) $y = 2\operatorname{tg} x$; г) $y = 0{,}5\operatorname{ctg} x$.

Побудуйте графіки функцій та встановіть, яка з них є парною (непарною) (954–955).

954. а) $y = -\sin x - 1$; б) $y = -\cos x$; в) $y = -\operatorname{tg} x$; г) $y = -\operatorname{ctg} x$.

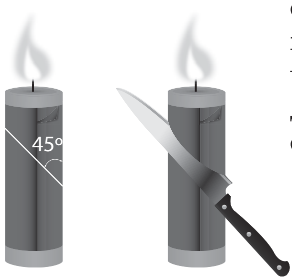
955. а) $y = 2\sin x$; б) $y = -2\cos x$; в) $y = 0{,}5\operatorname{tg} x$; г) $y = 2\operatorname{ctg} x$.

Побудуйте графік функції (956–957).

956. а) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; б) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; в) $y=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

957. а) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; в) $y=\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

958. **Практичне завдання.** Розглянемо одну матеріальну модель синусоїди. Якщо обгорнути свічку кілька разів папером, потім перерізати її гострим ножем під кутом 45° до осі свічки (мал. 135) і розгорнути папір, матимемо матеріальну модель частини синусоїди. Спробуйте виготовити таку модель синусоїди, обгорнувши кольоровим папером свічку чи циліндр, виготовлений із пластиліну.



Мал. 135

Рівень Б

Знайдіть період функції та побудуйте її графік (959–961).

959. а) $y = \sin 2x$; б) $y = \cos 3x$; в) $y = \mathrm{tg}\, 2x$; г) $y = \mathrm{ctg}\, 3x$.

960. а) $y = \sin 0{,}5x$; б) $y = \cos 2x$; в) $y = \mathrm{tg}\, 0{,}5x$; г) $y = \mathrm{ctg}(-x)$.

961. а) $y = 2\sin\frac{x}{2}$; б) $y = 3\cos\frac{x}{2}$; в) $y = -\mathrm{tg}\frac{x}{2}$; г) $y = \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\frac{x}{3}$.

962. Знайдіть абсциси точок перетину графіка функції $y = \sin\frac{x}{2}$ з віссю x.

963. Знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій $y = \cos 2x$ і $y = 0{,}5$.

964. Знайдіть область значень функції:

а) $y = 2\sin x$; б) $y = -\sqrt{3}\cos x$; в) $y = 1 - \frac{1}{2}\sin x$; г) $y = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, x$.

Знайдіть найменший додатний період функції (965–966).

965. а) $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = 3\,\mathrm{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$; в) $y = \sin\left(0{,}5x + \frac{\pi}{4}\right)$.

966. а) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$; в) $y = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\left(0{,}5x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Побудуйте графік функції (967–969).

967. а) $y = \mathrm{tg}\, 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \mathrm{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$; в) $y = \mathrm{tg}\left(0{,}5x - \frac{\pi}{4}\right)$.

968. а) $y = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$; в) $y = 3\sin\left(0{,}5x + \frac{\pi}{4}\right)$.

969. Областю визначення періодичної функції $y = f(x)$ із періодом $T = 5$ є множина всіх дійсних чисел. Обчисліть:

а) $f(7)$, якщо $f(x) = 3x^2 - 1$ для $x \in (-2; 3]$;

б) $f(4)$, якщо $f(x) = \sqrt{|x| + 3}$ для $x \in (-5; 0]$.

970. Областю визначення періодичної функції $y = f(x)$ із періодом $T = 0{,}5\pi$ є множина всіх дійсних чисел. Обчисліть:

а) $f(1{,}25\pi)$, якщо $f(x) = 1 - \sin 2x$ для $x \in (0; 0{,}5\pi]$;

б) $f(\pi)$, якщо $f(x) = 2\cos^2 x - 1$ для $x \in [0; 0{,}5\pi)$.

971. Парною чи непарною є функція:

а) $y = \sin 2x$; в) $y = 3\cos x$; ґ) $y = -\,\mathrm{tg}\, x$;

б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; г) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; д) $y = \mathrm{ctg}\frac{x}{2}$?

972. Розмістіть у порядку зростання числа:

а) $\sin 0$, $\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$, $\sin 3{,}1$, $\sin 3{,}5$, $\sin 5$;

б) $\cos 0$, $\cos 1$, $\cos 2$, $\cos 2{,}5$, $\cos 3{,}3$, $\cos 4$, $\cos 6{,}3$.

Побудуйте графік і визначте важливіші властивості функції (973–974).

973. а) $y = 4\sin x$ на $[-\pi; \pi]$; б) $y = -0{,}5\cos x$ на $[-\pi; \pi]$.

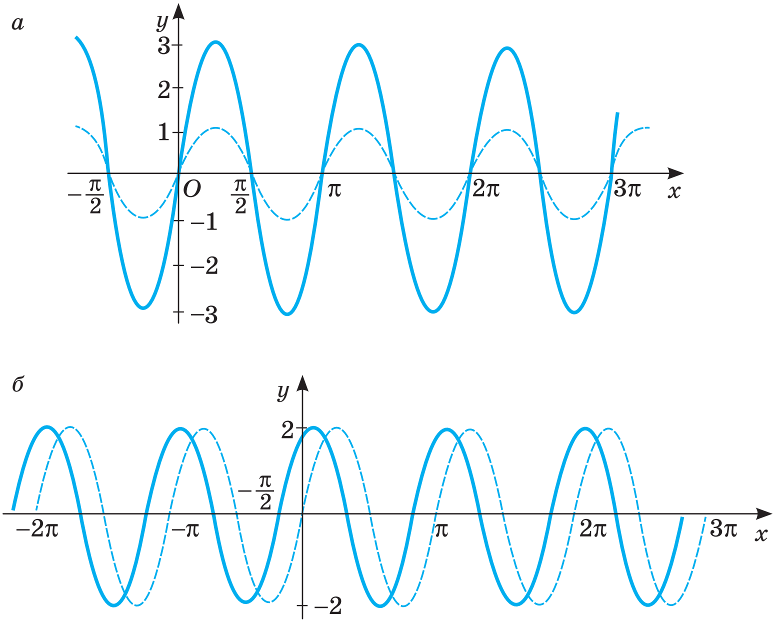
974. а) $y = \sin\dfrac{x}{2}$ на $[-\pi; \pi]$; б) $y = 1 + \cos x$ на $[0; 2\pi]$.

Скільки коренів має рівняння (975–976)?

975. а) $\operatorname{tg} x = \sqrt[3]{x}$; б) $\operatorname{ctg} x = 2x$; в) $\operatorname{tg} x = x^3$.

976. а) $\cos x = 1$; б) $\sin x = x$; в) $\cos x = 0{,}5$.

977. Дивлячись на графіки гармонічних коливань $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ (мал. 136), напишіть відповідні їм функції.



Мал. 136

978. Побудуйте графік функції $y = 1 - x^2$, $x \in [-1; 1]$. Продовжіть графік так, щоб він задавав періодичну функцію. Який період має утворена функція? Чи задає ця функція гармонічне коливання?

979. Електричний струм, який живить міську освітлювальну мережу, є змінним струмом. Його сила I постійно змінюється, здійснюючи гармонічне коливання $I = I_0 \sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$, де I_0 — максимальне значення сили струму; T — період коливання; φ — початкова фаза.
З'ясуйте, у які моменти часу сила струму досягає мінімального або максимального значення і коли дорівнює нулю.

Рівень В

980. Побудуйте графік функції:
а) $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$; б) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$; в) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$.

Побудуйте графік і визначте важливіші властивості функцій (981–982).

981. а) $y=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = 2\sin(x + 1)$.

982. а) $y = -0{,}5\sin 3x$; б) $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Побудуйте графіки функцій (983–989).

983. а) $y=|\sin x|$; б) $y=|\cos x|$; в) $y=|\operatorname{tg} x|$.

984. а) $y=\sin|x|$; б) $y=\cos|x|$; в) $y=\operatorname{tg}|x|$.

985. а) $y=|1+2\sin x|$; б) $y=|\cos x-1|$; в) $y=\left|\operatorname{tg}|x|-1\right|$.

986. а) $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$; б) $y=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$.

987. а) $y=-2\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)-1$; б) $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)+1$.

988. а) $y=2\sin\left(|x|+\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y=\frac{1}{2}\cos\left(|x|-\frac{\pi}{3}\right)-2$; в) $y=\operatorname{tg}\left(|x|-\frac{\pi}{4}\right)$.

989. а) $y=3\cos\left(|x|-\frac{\pi}{3}\right)$; б) $y=-\frac{3}{2}\sin\left(|x|+\frac{\pi}{4}\right)$; в) $y=\left|\operatorname{ctg}\left(|x|-1\right)\right|$.

990. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $\cos x = x^2 + 1$; б) $\sin x = x - \pi$; в) $0{,}5\pi + \cos x = x$.

Знайдіть найменший додатний період функції (991–992).

991. а) $y=\sin 2x+3\cos\left(\frac{x}{4}+3\right)$; в) $y=3\sin\frac{x}{2}+\cos\left(\frac{x}{3}+\pi\right)$;

б) $y=\sin\frac{x}{5}+\operatorname{tg}(3x-1)$; г) $y=2\cos\frac{3x}{2}-\operatorname{ctg}(2x-1)$.

992. а) $y=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+2\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+3\right)$; в) $y=2\sin 3x+3\cos\left(\frac{x}{3}-1\right)$;

б) $y=\cos\pi x-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3}$; г) $y=\sin(5x-\pi)-\operatorname{tg}\left(\frac{3x}{2}+1\right)$.

Побудуйте графік функції (993–994).

993. а) $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}$; б) $y=\cos x+\sqrt{\cos^2 x}$; в) $y=|\operatorname{tg} x|\cdot\operatorname{ctg} x$.

994. а) $y=\frac{\sin x}{|\cos x|}$; б) $y=\operatorname{tg} x\cdot|\cos x|$; в) $y=\sin x\cdot|\operatorname{ctg} x|$.

995. При якому значенні параметра a рівняння має єдиний розв'язок:
а) $2\cos x = x^2 + a$; б) $0{,}5\cos(\pi + x) = a - x^2$?

Вправи для повторення

Спростіть вираз (996–997).

996. а) $(1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $1-\sin\beta\cos\beta\operatorname{tg}\beta+\sin^2\alpha$.

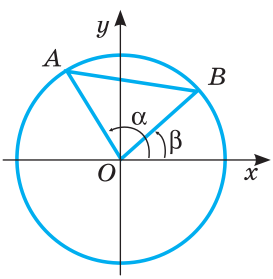
997. а) $\left(a-\sqrt{b}\right)^2$; б) $\left(m+\sqrt{n}\right)^2$; в) $\left(2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)^2$; г) $\left(\frac{1}{4}\sqrt{xy}+2\sqrt{x}\right)^2$.

998. Чи є число 143 членом арифметичної прогресії 3, 8, 13, ...? Якщо так, то знайдіть номер цього члена прогресії.

§ 19 Формули додавання

Addition Formulas

Теорема. *Які б не були кути або числа* α *і* β, *завжди* $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.



Мал. 137

Доведення. Нехай α і β — довільні кути. На одиничному колі їм відповідають точки A $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ і B $(\cos\beta; \sin\beta)$ (мал. 137). Виразимо квадрат відстані між точками A і B двома способами. Якщо $\angle AOB=\alpha-\beta$, де $0<\alpha-\beta<\pi$, то, за теоремою косинусів,

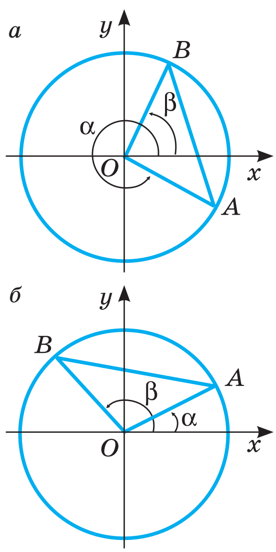
$$AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cos(\alpha-\beta)=$$
$$=2-2\cos(\alpha-\beta).$$

А згідно з теоремою про квадрат відстані між двома точками

$AB^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=\cos^2\alpha-$
$-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+$
$+\sin^2\beta=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$.

Отже, $2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+$ $+\sin\alpha\sin\beta)$, звідси $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

Ми розглянули випадок, коли $\angle AOB=\alpha-\beta$, де $0<\alpha-\beta<\pi$. В інших випадках кут AOB може дорівнювати $\alpha-\beta+2\pi n$ або $\beta-\alpha+2\pi n$, де $n\in N$ (мал. 138). Косинус кожного з таких кутів дорівнює $\cos(\alpha-\beta)$. Тому доводжувана теорема правильна для будь-яких кутів α і β, а отже, і для довільних чисел α і β.



Мал. 138

На основі доведеної теореми, формул зведення і властивостей тригонометричних функцій можна вивести аналогічні формули для перетворення виразів $\cos(\alpha + \beta)$ і $\sin(\alpha \pm \beta)$.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta) =$$
$$= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) =$$
$$= \sin\alpha \cos\alpha - \cos\alpha \sin\beta.$$

Доведемо ще формули для перетворення виразів $\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta)$.

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} =$$
$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \mathrm{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}(-\beta)}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}(-\beta)} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Отже, маємо 6 формул:

$$\mathbf{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}$$
$$\mathbf{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}$$
$$\mathbf{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$$
$$\mathbf{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta}$$
$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$
$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

Це формули додавання. Чотири перші з них правильні для будь-яких кутів або чисел α і β, дві останні — для будь-яких допустимих значень α і β (коли всі тангенси у формулі мають значення).

Перевірте себе

1. Які тригонометричні рівності називають формулами додавання?
2. Чому дорівнює косинус різниці двох кутів?
3. Чи одне й те саме означає косинус суми і сума косинусів?
4. Чому дорівнює косинус суми двох кутів?
5. Чому дорівнює тангенс суми (різниці) двох кутів?
6. Чому дорівнює синус суми (різниці) двох кутів?

Виконаємо разом

1 За допомогою формул додавання перетворіть вираз:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\cos(\pi + \alpha)$; в) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-1\right)$.

Розв'язання.

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha=1\cdot\cos\alpha-0\cdot\sin\alpha=\cos\alpha$;

б) $\cos(\pi + \alpha) = \cos\pi\cos\alpha - \sin\pi\sin\alpha = -1\cdot\cos\alpha - 0\cdot\sin\alpha = -\cos\alpha$;

в) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-1\right)=\cos\frac{3\pi}{2}\cos 1+\sin\frac{3\pi}{2}\sin 1=0\cdot\cos 1+(-1)\cdot\sin 1=-\sin 1$.

2 Обчисліть значення $\sin 75°$.

Розв'язання.

$$\sin 75°=\sin(30°+45°)=\sin 30°\cos 45°+\cos 30°\sin 45°=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right).$$

Відповідь. $\sin 75°=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

3 Обчисліть значення виразу $\cos 35°\cos 25° - \sin 35°\sin 25°$.

Розв'язання.

$$\cos 35°\cos 25°-\sin 35°\sin 25°=\cos(35°+25°)=\cos 60°=\frac{1}{2}.$$

4 Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha$.

Розв'язання. Запишемо даний вираз у вигляді синуса суми двох чисел:

$$\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\left(\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha\right)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right).$$

Оскільки $-1\le\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$, то $-2\le 2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\le 2$.

Отже, найменше значення виразу дорівнює -2, а найбільше значення 2.

Примітка. Щоб вираз $A\sin\alpha + B\cos\alpha$ записати у вигляді синуса або косинуса суми, потрібно винести за дужки множник $\sqrt{A^2+B^2}$.

Виконайте усно

999. Обчисліть значення виразу:

а) $\cos 57°\cos 27° + \sin 57°\sin 27°$; в) $\sin 11°\cos 19° + \cos 11°\sin 19°$;

б) $\cos 51°\sin 21° - \cos 21°\sin 51°$; г) $\sin 12°\cos 18° + \cos 12°\sin 18°$.

1000. Спростіть вираз:

а) $\sin\alpha\cos 2a + \cos\alpha\sin 2a$; в) $\sin 5a\cos 3a - \cos 5a\sin 3a$;

б) $\cos\alpha\cos 2a - \sin\alpha\sin 2a$; г) $\cos x\cos y + \sin x\sin y$.

Рівень А

Спростіть вираз (1001–1003).

1001. а) $\sin\alpha\cos x+\cos\alpha\sin x$; в) $\cos\beta\sin\alpha-\cos\alpha\sin\beta$;

б) $\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta$; г) $\sin\alpha\sin\frac{\pi}{5}+\cos\alpha\cos\frac{\pi}{5}$.

1002. а) $\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos\beta$; в) $\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)$;

б) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$; г) $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$.

1003. а) $\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$; в) $\sin 2\alpha-\cos 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

б) $\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,2\alpha$; г) $\mathrm{tg}\,2\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Обчисліть значення виразу (1004–1006).

1004. а) $\cos 58^\circ\cos 32^\circ-\sin 58^\circ\sin 32^\circ$; в) $\sin 65^\circ\cos 55^\circ+\cos 65^\circ\sin 55^\circ$;

б) $\sin 64^\circ\sin 19^\circ+\cos 64^\circ\cos 19^\circ$; г) $\cos 10^\circ\cos 20^\circ-\sin 20^\circ\sin 10^\circ$.

1005. а) $(\mathrm{tg}\,36^\circ+\mathrm{tg}\,24^\circ):(1-\mathrm{tg}\,36^\circ\mathrm{tg}\,24^\circ)$;

б) $(\mathrm{tg}\,70^\circ-\mathrm{tg}\,40^\circ):(1+\mathrm{tg}\,70^\circ\mathrm{tg}\,40^\circ)$;

в) $(\mathrm{tg}\,16^\circ+\mathrm{tg}\,29^\circ):(1-\mathrm{tg}\,16^\circ\,\mathrm{tg}\,29^\circ)$;

г) $(\mathrm{tg}\,81^\circ-\mathrm{tg}\,36^\circ):(1+\mathrm{tg}\,81^\circ\,\mathrm{tg}\,36^\circ)$.

1006. а) $\dfrac{\sin 53^\circ\cos 37^\circ+\cos 53^\circ\sin 37^\circ}{\cos 35^\circ\cos 65^\circ+\sin 35^\circ\sin 65^\circ}$; в) $\dfrac{\cos 67^\circ\cos 7^\circ+\sin 67^\circ\sin 7^\circ}{\sin 40^\circ\cos 50^\circ+\cos 40^\circ\sin 50^\circ}$;

б) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}}$; г) $\dfrac{\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{15}\sin\frac{x}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{30}-\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{30}}$.

Доведіть тотожність (1007–1008).

1007. а) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$;

б) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$;

в) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}=\cos\alpha\cos\beta$; г) $\dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{1}{\sin\alpha\sin\beta}$.

1008. а) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\alpha$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sqrt{3}\sin\alpha$;

б) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$; г) $\dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta+1}{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta-1}=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$.

Обчисліть значення виразу (1009–1011).

1009. а) $\sin 75^\circ$; б) $\cos 75^\circ$; в) $\mathrm{tg}\,75^\circ$; г) $\mathrm{ctg}\,75^\circ$.

1010. а) $\sin 15^\circ$; б) $\cos 15^\circ$; в) $\mathrm{tg}\,15^\circ$; г) $\mathrm{ctg}\,15^\circ$.

1011. а) $\sin 105^\circ$; б) $\cos 105^\circ$; в) $\mathrm{tg}\,105^\circ$; г) $\mathrm{ctg}\,105^\circ$.

1012. Знайдіть $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ і $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$, якщо $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{4}{3}$, $\mathrm{tg}\,\beta=\frac{1}{4}$.

1013. Знайдіть $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ і $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, якщо $\mathrm{tg}\,\alpha=1{,}5$.

Рівень Б

Обчисліть значення виразу (1014–1016).

> «Життя прекрасне двома речами — можливістю вивчати математику та можливістю викладати її».
>
> С. Пуассон

1014. а) $\sin\frac{\pi}{12}$; в) $\cos\frac{7\pi}{12}$;

б) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}$.

1015. а) $\sin\frac{5\pi}{12}$; в) $\cos\frac{5\pi}{12}$;

б) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$.

1016. а) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ - 0{,}25$; б) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+0{,}75$.

Спростіть вираз (1017–1022).

1017. а) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\alpha$; б) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\alpha$.

1018. а) $\sqrt{3}\cos\alpha-2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha$.

1019. а) $0{,}5\sin x-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; б) $2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin x$.

1020. а) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$; б) $\frac{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}$.

1021. а) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha}$; б) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta}$.

1022. а) $\frac{\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{7\pi}{30}\cos\frac{4\pi}{15}+\cos\frac{7\pi}{30}\sin\frac{4\pi}{15}}$; б) $\frac{\cos 17^\circ\cos 28^\circ-\cos 107^\circ\sin 208^\circ}{\sin 34^\circ\sin 146^\circ+\sin 236^\circ\sin 304^\circ}$.

Доведіть тотожність (1023–1027).

1023. а) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

б) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

1024. а) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta$;

б) $(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta-\cos\beta)=\sin(\beta-\alpha)-\cos(\beta+\alpha)$.

1025. а) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=1$;

б) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

1026. а) $\cos\alpha+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos(120^\circ+\alpha)=0$;

б) $\frac{1}{2}\left(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha\right)=\cos(60^\circ-\alpha)$.

1027. а) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; б) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}$.

1028. Знаючи, що $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ і $\sin\beta = \frac{4}{5}$, причому $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, обчисліть значення:

а) $\sin(\alpha + \beta)$; б) $\cos(\alpha + \beta)$; в) $\cos(\alpha - \beta)$.

1029. Знайдіть $\operatorname{tg}\beta$, якщо:

а) $\operatorname{tg}\alpha = 2$ і $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 1$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$ і $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -1$.

1030. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}{\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{4} - 3\pi\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}$; б) $\dfrac{\cos(2\pi - 4\alpha)\operatorname{tg}2\alpha + \sin(\pi + 4\alpha)}{\cos 4\alpha \operatorname{tg}(2\alpha - 0,5\pi) - \sin 4\alpha}$.

Рівень В

Знайдіть найбільше і найменше значення виразу (1031–1032).

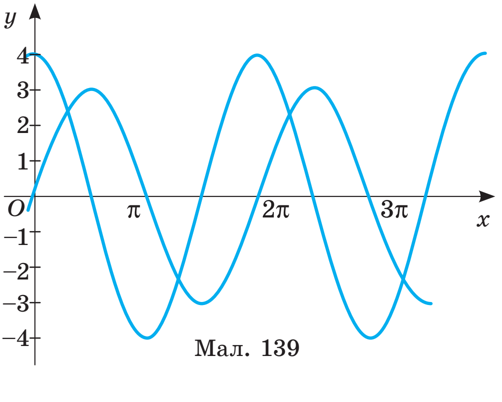
1031. а) $\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha$; б) $\sin\alpha + \cos\alpha - 1$;
в) $3\sin\alpha - 4\cos\alpha$; г) $5\sin\alpha - 12\cos\alpha$.

1032. а) $\cos\alpha - \sin\alpha$; б) $\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha$;
в) $3\cos\alpha - 4\sin\alpha + 1$; г) $\sqrt{5}\cos\alpha - 2\sin\alpha$.

1033. На малюнку 139 зображено графіки двох тригонометричних функцій $y_1 = \alpha\sin x$ і $y_2 = \beta\cos x$. Знайдіть:

а) значення коефіцієнтів α і β;
б) період кожної функції;
в) найбільше і найменше значення кожної функції;
г) період функції $y = y_1 + y_2$;
ґ) найбільше і найменше значення функції $y = y_1 + y_2$.

Побудуйте графік функції $y = y_1 + y_2$.



Мал. 139

1034. Доведіть, що $\alpha + \beta = 135°$, якщо α і β — гострі кути і $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{7}$.

1035. Доведіть, що $\alpha + \beta = 45°$, якщо кути α і β — гострі і $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}$.

1036. Доведіть тотожність;

а) $(1 - \operatorname{tg}\alpha)(1 - \operatorname{tg}\beta) = 2$, якщо $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

б) $(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\beta) = 2$, якщо $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

1037. Доведіть, що для будь-яких кутів α, β, γ трикутника

$$\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

1038. Доведіть, що для будь-яких кутів α, β і γ непрямокутного трикутника справджується рівність:

а) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$; в) $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\beta=1$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1$; г) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma}=-1$.

1039. Кути трикутника дорівнюють α, β, γ, причому $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\cos\beta=\frac{3}{5}$.

Знайдіть: а) $\sin\gamma$; б) $\cos\gamma$; в) $\operatorname{tg}\gamma$; г) $\operatorname{ctg}\gamma$.

1040. Побудуйте графік функції:

а) $y=2\left(\sin|x|\cos\frac{\pi}{6}+\cos|x|\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $y=\frac{1}{2}\left|\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}\right|$;

в) $y=\left|\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}+1\right|$.

«Найвище призначення математики — знаходити порядок у хаосі, який нас оточує».

Н. Вінер

1041. При яких значеннях параметра a можлива рівність

а) $2\sin 3x\cos\frac{\pi}{5}-2\cos 3x\sin\frac{\pi}{5}=a^2-3a$;

б) $\cos 2x\cos\frac{x}{3}-\sin 2x\sin\frac{x}{3}=a^2-5a+5$;

в) $\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=a^2-a-1$?

Вправи для повторення

1042. З двох міст, відстань між якими становить 500 км, виїхали назустріч один одному автомобіль і мотоцикл, які зустрілися через 5 год. Швидкість руху автомобіля у 3 рази більша, ніж швидкість руху мотоцикла. Яка швидкість руху автомобіля і яка — мотоцикла?

1043. Розв'яжіть нерівність:

а) $(x+3)(x-2)>0$; б) $(2x-1)(x-5)\le 0$.

1044. Різниця між прибутком і видатком називається сальдо. У таблиці подано у гривнях розміри прибутків і видатків фірми «Фенікс» за чотири місяці. За даними таблиці установіть відповідність між місяцями **(1–4)** і розміром сальдо **(А–Д)** за кожен із цих місяців.

		Прибуток	Видаток		Сальдо
1	Січень	$3{,}15\cdot10^4$	$3{,}43\cdot10^4$	**А**	$3{,}07\cdot10^4$
2	Лютий	$6{,}15\cdot10^4$	$4{,}5\cdot10^4$	**Б**	$7{,}28\cdot10^4$
3	Березень	$1{,}15\cdot10^5$	$8{,}43\cdot10^4$	**В**	$-2{,}8\cdot10^3$
4	Квітень	$1{,}04\cdot10^5$	$1{,}35\cdot10^5$	**Г**	$-3{,}1\cdot10^4$
				Д	$1{,}65\cdot10^4$

§ 20 Формули подвійного і половинного аргументів

Double and Half Arguments Formulas

Якщо у формулах додавання:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$,

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$,

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$

замість змінної β підставити α, дістанемо тотожності:

$$\boldsymbol{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,}$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Це формули *подвійних аргументів*. Вони правильні при будь-яких значеннях α (остання — за умови, що $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg} 2\alpha$ існують).

Якщо у формулі $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ замінити $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ або $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, то отримаємо $\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ або $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$. Отже,

$$\boldsymbol{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha}$$

Формули подвійних аргументів часто використовують для перетворень тригонометричних виразів. Наприклад,

$\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$;

$(1 - \operatorname{tg}^2\alpha) \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = (1 - \operatorname{tg}^2\alpha) \cdot \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = 2\operatorname{tg}\alpha.$

Зверніть увагу на вирази $1 + \cos 2\alpha$ і $1 - \cos 2\alpha$.

$1 + \cos 2\alpha = 1 + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha$,

$1 - \cos 2\alpha = 1 - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 2\sin^2\alpha$.

Отже,

$$\boldsymbol{1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha} \qquad \boldsymbol{1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

Ці тотожності називають *формулами пониження степеня*. Замінивши в них α на $\dfrac{\alpha}{2}$, дістанемо *формули половинних аргументів*:

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad \left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Для прикладу обчислимо $\operatorname{tg}15°$. Оскільки $\operatorname{tg}15° > 0$, то

$$\operatorname{tg}15° = \sqrt{\frac{1-\cos30°}{1+\cos30°}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = 2-\sqrt{3}.$$

Отже, $\operatorname{tg}15° = 2-\sqrt{3}$.

Примітка. Іноді аргумент α доцільно розглядати як подвійний відносно $\frac{\alpha}{2}$ або половинний — відносно 2α. Наприклад,

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \quad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}, \quad \sin4\alpha = 2\sin2\alpha\cos2\alpha.$$

Для перетворення складніших виразів використовують формули *потрійного аргументу* — формули, які виражають тригонометричні функції аргументу 3α через тригонометричні функції аргументу α. А саме:

$$\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \operatorname{ctg}3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha}$$

Доведемо дві з них.

1. $\sin3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin2\alpha\cos\alpha + \cos2\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 2\sin\alpha - 2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^2\alpha.$

2. $\operatorname{tg}3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) =$

$$= \frac{\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha} = \left(\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right) : \left(1 - \frac{2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\right) = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Інші дві формули доведіть самостійно.

Формули потрійних кутів використовують для перетворення тригонометричних виразів та доведення тотожностей.

Приклад 1. Доведіть тотожність

$$\frac{\cos^3\alpha - \cos3\alpha}{\sin^3\alpha + \sin3\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Застосовуючи формули синуса і косинуса потрійного кута, отримаємо:

$$\frac{\cos^3\alpha - \cos3\alpha}{\sin^3\alpha + \sin3\alpha} = \frac{\cos^3\alpha - 4\cos^3\alpha + 3\cos\alpha}{\sin^3\alpha + 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha} = \frac{-3\cos^3\alpha + 3\cos\alpha}{-3\sin^3\alpha + 3\sin\alpha} =$$

$$= \frac{-3\cos\alpha\left(\cos^2\alpha - 1\right)}{-3\sin\alpha\left(\sin^2\alpha - 1\right)} = \frac{3\cos\alpha\sin^2\alpha}{3\sin\alpha\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Для спрощення деяких виразів, доведення тотожностей, розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей використовують формули, які виражають кожну з тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу.

$$\sin\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Для доведення двох перших формул використовують формули подвійного аргументу для $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, врахувавши, що $\alpha = 2\cdot\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},\quad \cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Запишемо їх у дещо іншому вигляді і поділимо чисельник і знаменник кожної з них на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, вважаючи, що $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$. Маємо:

$$\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}:\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\cos\alpha=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}:\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Дві інші формули можна безпосередньо отримати з формул $\mathrm{tg}\,2\alpha$ і $\mathrm{ctg}\,2\alpha$, врахувавши, що $\alpha = 2\cdot\frac{\alpha}{2}$.

Приклад 2. Знайдіть $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$, якщо $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{4}$.

Скористаємося формулами, які виражають тригонометричні функції через тангенс половинного кута. Тоді отримаємо:

$$\sin\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1+\frac{9}{16}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{25}{16}}=\frac{24}{25};\quad \cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}=\frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}}=\frac{7}{25};$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}}=\frac{24}{7};\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{7}{24}.$$

Перевірте себе

1. Сформулюйте формули додавання.
2. Як можна отримати формули подвійних аргументів?
3. Чому дорівнює синус подвійного аргументу? А косинус?
4. За якою формулою обчислюють тангенс подвійного аргументу?
5. Доведіть формули пониження степеня.
6. Які формули називають формулами половинних аргументів?

Виконаємо разом

1 Спростіть вираз:

а) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\alpha$; б) $\cos\frac{2}{3}\alpha-\cos^2\frac{\alpha}{3}+\sin^2\frac{\alpha}{3}$.

Розв'язання. а) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\alpha=\sin\alpha-\sin\alpha=0$;

б) $\cos\frac{2}{3}\alpha-\left(\cos^2\frac{\alpha}{3}-\sin^2\frac{\alpha}{3}\right)=\cos2\frac{\alpha}{3}-\cos2\frac{\alpha}{3}=0$.

2 Доведіть тотожність $\frac{1-\cos2\alpha+\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha+\sin2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

Розв'язання. Перетворимо ліву частину тотожності:

$$\frac{1-\cos2\alpha+\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha+\sin2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha$, тотожність доведено.

3 Знайдіть $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$ і $\operatorname{ctg}2\alpha$, якщо $\sin\alpha=\frac{12}{13}$ і $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Розв'язання. Знайдемо $\cos\alpha$:

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ або $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

Оскільки α — кут другої чверті, то $\cos\alpha < 0$. Маємо:

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha},\quad \cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{144}{169}}=-\sqrt{\frac{25}{169}}=-\frac{5}{13}.$$

Оскільки $\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, то $\sin2\alpha=2\cdot\frac{12}{13}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=-\frac{120}{169}$.

Знайдемо $\cos2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$ і $\operatorname{ctg}2\alpha$:

$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $\cos2\alpha=\frac{25}{169}-\frac{144}{169}=-\frac{119}{169}$.

$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}$; $\operatorname{tg}2\alpha=-\frac{120}{169}:\left(-\frac{119}{169}\right)=\frac{120}{119}$. $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha}$; $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{119}{120}$.

Відповідь. $\sin2\alpha=-\frac{120}{169}$; $\cos2\alpha=-\frac{119}{169}$; $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{120}{119}$; $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{119}{120}$.

4 Обчисліть $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$.

Розв'язання. Помножимо і поділимо даний вираз на $2\sin\frac{\pi}{9}$ і застосуємо формулу синуса подвійного кута. Тоді отримаємо:

$$\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{2\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{2\sin\frac{\pi}{9}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{2\cdot 2\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{4\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{2\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{2\cdot 4\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{8\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}}=$$

$$=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)}{8\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{1}{8}.$$

5 Доведіть тотожність $\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha$.

Розв’язання. Скористаємося формулами додавання і отримаємо:

$$\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sin\alpha\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)\times$$

$$\times\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)=\sin\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\right)=$$

$$=\sin\alpha\left(\frac{3}{4}\cos^2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin\alpha\left(3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\sin\alpha\left(3-3\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin\alpha\left(3-4\sin^2\alpha\right)=\frac{1}{4}\left(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha.$$

Зверніть увагу! Доведену тотожність часто використовують для обчислення значень виразів. Наприклад,

$$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=\sin 20^\circ\sin\left(60^\circ-20^\circ\right)\sin\left(60^\circ+20^\circ\right)=\frac{1}{4}\sin 3\cdot 20^\circ=$$

$$=\frac{1}{4}\sin 60^\circ=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Виконайте усно

Спростіть вираз (1045–1047).

1045. а) $2\sin\alpha\,\cos\alpha$; б) $\sin x\,\cos x$; в) $4\cos\beta\,\sin\beta$; г) $4\sin\alpha\,\cos\alpha\,\cos 2\alpha$.

1046. а) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$; в) $\sin^2 x-\cos^2 x$;

б) $\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$; г) $\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha$.

1047. а) $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; б) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

1048. Обчисліть значення виразу:

а) $2\sin 45^\circ\cos 45^\circ$; б) $1-2\sin^2 45^\circ$; в) $2\operatorname{tg}15^\circ:(1-\operatorname{tg}^2 15)$.

Рівень А

1049. Обчисліть значення виразу:

а) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$; в) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$; ґ) $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$;

б) $1 - 2\sin^2 15^\circ$; г) $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$; д) $2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}:\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}\right)$.

Спростіть вираз (1050–1053).

1050. а) $2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha$; в) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$;

б) $\sin 2x - (\sin x + \cos x)^2$; г) $\cos^2\beta\,(1 - \operatorname{tg}^2\beta)$.

1051. а) $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}-\sin\alpha$; в) $\frac{2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha$;

б) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\cos\alpha$; г) $\frac{\cos 2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

1052. а) $\sin 2\alpha\operatorname{ctg}\alpha - 1$; в) $1 - \sin 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$;

б) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$; г) $(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)\sin 2\alpha$.

1053. а) $\operatorname{tg}2\alpha\cdot\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)$; в) $\operatorname{tg}2\alpha\cdot\left(1+\frac{2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}\right)$;

б) $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; г) $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$.

Доведіть тотожність (1054–1056).

1054. а) $\cos 2\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$; в) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$;

б) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$; г) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + \sin 2\alpha = 1$.

1055. а) $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha$; в) $(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha) = 2\operatorname{ctg}2\alpha$;

б) $\frac{\cos^2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{1}{2}$; г) $\frac{2\cos^2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$.

1056. а) $\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\sin 2\alpha$; в) $\frac{2\operatorname{tg}\alpha\cos 2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin 2\alpha$;

б) $\left(\frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1-\cos\alpha}\right)\sin 2\alpha=4\operatorname{ctg}\alpha$; г) $\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\sin^2 2\alpha=4$.

1057. Обчисліть:

а) $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$, якщо $\sin\alpha = 0{,}6$ і $0 < \alpha < 90^\circ$;

б) $\operatorname{tg}2\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -3$.

1058. Дано: $\sin\alpha = 0{,}8$; $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Знайдіть $\sin\frac{\alpha}{2}$ і $\cos\frac{\alpha}{2}$.

1059. Дано: $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}$; $270^\circ < \alpha < 360^\circ$. Знайдіть $\sin 3\alpha$ і $\cos 3\alpha$.

1060. Дано: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 3$. Знайдіть $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

Рівень Б

1061. Обчисліть значення виразу:

а) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; в) $\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}$; ґ) $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$;

б) $(\sin 15° + \cos 15°)^2$; г) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}$; д) $\dfrac{2\operatorname{tg}75°}{1-\operatorname{tg}^2 75°}$.

Спростіть вираз (1062–1066).

1062. а) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$; в) $\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

б) $\dfrac{\sin 6\alpha}{2\sin^2 3\alpha}$; г) $\dfrac{\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}-\sin 2\alpha$.

1063. а) $\dfrac{\sin\alpha-2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-1}$; в) $\dfrac{\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha}-\sin 2\alpha$;

б) $\dfrac{\sin 8\alpha\operatorname{ctg}4\alpha}{2\sin^2 4\alpha}$; г) $\dfrac{\cos 4\alpha-\cos^2 2\alpha}{1-\cos^2 2\alpha}$.

1064. а) $\dfrac{2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$; в) $\dfrac{2}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$;

б) $(1 - \operatorname{tg}^2 4\alpha)\cos^2 4\alpha$; г) $(\operatorname{tg}3\alpha + \operatorname{ctg}3\alpha)\sin 6\alpha$.

1065. а) $1 + \cos 6\alpha$; б) $1 - \cos 4\alpha$; в) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2\cos^2\alpha}$; г) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

1066. а) $(1 + \cos 2\alpha)\operatorname{tg}\alpha$; в) $(1-\cos\alpha)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$;

б) $\dfrac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}$; г) $\dfrac{1+\cos 4\alpha+\sin 4\alpha}{1-\cos 4\alpha+\sin 4\alpha}$.

Доведіть тотожність (1067–1070).

1067. а) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=2$; в) $\dfrac{\operatorname{ctg}2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha}=\cos 4\alpha$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\cos 2\alpha$; г) $\dfrac{4\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin^2\alpha$.

1068. а) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha)=\sin\alpha$; в) $\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{ctg}2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$; г) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1$.

1069. а) $\dfrac{\sin 2\beta}{1+\cos 2\beta}\cdot\dfrac{\cos\beta}{1+\cos\beta}=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$; б) $\dfrac{\cos 4\beta}{\sin 2\beta\cos 2\beta+\sin^2 2\beta}-\operatorname{ctg}2\beta=-1$;

в) $\dfrac{1+\cos(\pi-2\beta)+\sin(\pi-2\beta)}{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\beta\right)-\cos(\pi-2\beta)}=\operatorname{tg}\beta;$

г) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2\beta\right)-2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)-\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\beta\right)}=-2\operatorname{ctg}\beta.$

«Алгебра і геометрія — єдині країни, де панують тиша й мир».

Марія Аньєзі

1070. а) $\dfrac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha;$

б) $\dfrac{\sin 3\alpha+4\sin^3\alpha}{\cos 3\alpha-\cos^3\alpha}=-\dfrac{2}{\sin 2\alpha};$

в) $\dfrac{\sin 3\alpha+\sin^3\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 3\alpha-\cos^3\alpha}{\cos\alpha}=3.$

1071. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{1+\cos 2\alpha}$, якщо $\alpha\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$; $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$;

б) $\sqrt{2(1-\cos 2\alpha)}$, якщо $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$; $\alpha\in\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$; $\alpha\in\left[2\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$;

в) $\sqrt{1-\cos 2\beta}+\sqrt{1+\cos 2\beta}$, якщо $\beta\in\left[\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$; $\beta\in\left[\pi;\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$;

г) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}}$, якщо $\beta\in[0;\ \pi]$; $\beta\in\left[\pi;\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$; $\beta\in[\pi;\ 2\pi]$.

1072. Дано: $\sin\dfrac{\alpha}{2}=0{,}8$; $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Знайдіть $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

1073. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 2$; $\alpha\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. Знайдіть $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

1074. Дано: $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$; $\sin\beta=\dfrac{1}{2}$. Знайдіть $\sin(2\alpha + 2\beta)$, якщо α і β — гострі кути.

1075. Дано: $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$; $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$. Знайдіть $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

1076. Доведіть:

а) $1+\sin 2\alpha=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$; б) $1-\sin 2\alpha=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

1077. Побудуйте графіки функцій:

а) $y=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$;

б) $y=\dfrac{\sin 2x}{\sin x}$;

в) $y=\sqrt{2(1-\cos 2x)}$;

г) $y = 2\cos^2 x$;

ґ) $y=\dfrac{2\sin 4x}{\cos 2x}$;

д) $y=\sqrt{2(1+\cos 2x)}$.

Рівень В

1078. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{\sin^2(\alpha-\pi)-4\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{2}\right)-4+4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}$; б) $\dfrac{\sin^2(2\alpha+4\pi)+4\sin^4\alpha}{4-\sin^2 2\alpha-4\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}-\dfrac{\mathrm{ctg}^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos^2\alpha}$.

1079. Доведіть тотожність:

а) $\cos\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\dfrac{1}{4}\cos 3\alpha$; б) $\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\mathrm{tg}3\alpha$.

Використовуючи тотожності з № 1079, обчисліть значення виразу (1080–1082).

1080. а) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$; б) $\cos 10^\circ\cos 30^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ$;

1081. а) $\mathrm{tg}20^\circ\,\mathrm{tg}40^\circ\,\mathrm{tg}60^\circ\,\mathrm{tg}80^\circ$; б) $\mathrm{tg}10^\circ\,\mathrm{tg}30^\circ\,\mathrm{tg}50^\circ\,\mathrm{tg}60^\circ\,\mathrm{tg}70^\circ$;

1082. а) $8\cos 5^\circ\cos 15^\circ\cos 55^\circ\cos 65^\circ$; б) $\mathrm{tg}5^\circ\,\mathrm{tg}15^\circ\,\mathrm{tg}45^\circ\,\mathrm{tg}55^\circ\,\mathrm{tg}65^\circ$.

Знайдіть значення (1083–1084).

1083. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, якщо $3\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}+2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}-1=0$ і $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$.

1084. $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}2\alpha$, якщо $\dfrac{3\mathrm{tg}\alpha+1}{\mathrm{tg}\alpha+1}=\dfrac{1+\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}$ і $-\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{6}$.

1085. Знайдіть область значень функції:

а) $y=2\cos^2 x-\sin 2x-1$; в) $y=2\sin^2 3x-\sqrt{3}\sin 6x-1$;

б) $y=\sin 4x+2\sin^2 2x-1$; г) $y=3+\sqrt{3}\sin 2x-6\cos^2 x$.

1086. Обчисліть:

а) $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{4\pi}{5}\cos\dfrac{8\pi}{5}$; б) $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}$.

Спростіть вираз (1087–1088).

1087. а) $\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}+1\right)(\mathrm{ctg}\,\alpha+1)+\mathrm{ctg}^2\alpha$, якщо $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

б) $\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right)\sin\alpha$, якщо $-\pi<\alpha<0$.

1088. а) $\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha}}$; якщо: 1) $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; 2) $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

б) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\alpha}}}$; якщо: 1) $-\dfrac{\pi}{4}<\alpha<0$; 2) $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

Вправи для повторення

1089. У загальному обсязі забруднення атмосфери питома вага різних галузей промисловості й транспорту становить (%): теплова енергетика – 25,7; чорна металургія – 23,4; нафтовидобувна і нафтохімічна – 13,7; транспорт – 11,6; кольорова металургія – 11,1; гірничодобувна – 7,1; підприємства будівельного комплексу – 3,4; машинобудування – 2,8; інші галузі – 1,2. Побудуйте секторну діаграму.

1090. Птахоферма збільшила випуск продукції за перший рік на 10 %, а за другий — на 20 %. Як зріс випуск продукції на птахофермі за ці два роки?

1091. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\sqrt{27-12x-4x^2}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{|x|-5}$.

§ 21 Формули суми і різниці тригонометричних функцій

Sum and Difference of Trigonometric Functions Formulas

Суму і різницю синусів або косинусів можна подати у вигляді добутку тригонометричних функцій.

Мають місце такі формули:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\qquad \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Усі ці тотожності називають *формулами перетворення суми тригонометричних функцій у добуток* (різницю вважають окремим видом суми). Дві останні формули правильні тільки за умови, що $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}\beta$ визначені.

Доведемо формулу $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Припустимо, що $\alpha = x + y$ і $\beta = x - y$. Тоді $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x + y) + \sin(x - y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = 2\sin x \cos y$.

З рівностей $\alpha = x + y$ і $\beta = x - y$ знаходимо, що $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Тому $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Цю тотожність називають формулою суми синусів двох кутів.

Інші з наведених вище шести формул можна довести простіше, наприклад, так.

$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin\alpha + \sin(-\beta) = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 2\sin\frac{\pi - \alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Приклад 1. Доведіть тотожність: $\frac{3 + 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha}{3 - 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha} = \operatorname{ctg}^4 2\alpha$.

Доведення.

$$\frac{3 + 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha}{3 - 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha} = \frac{(3 + 3\cos 4\alpha) + (\cos 4\alpha + \cos 8\alpha)}{(3 - 3\cos 4\alpha) + (\cos 8\alpha - \cos 4\alpha)} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2\cos^2 2\alpha + 2\cos 6\alpha\cos 2\alpha}{3 \cdot 2\sin^2 2\alpha - 2\sin 6\alpha\sin 2\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha(3\cos 2\alpha + \cos 6\alpha)}{2\sin 2\alpha(3\sin 2\alpha - \sin 6\alpha)} =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha(2\cos 2\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha)}{\sin 2\alpha(2\sin 2\alpha + \sin 2\alpha - \sin 6\alpha)} = \frac{\cos 2\alpha(2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha\cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha(2\sin 2\alpha - 2\cos 4\alpha\sin 2\alpha)} =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha(1 + \cos 4\alpha)}{\sin 2\alpha \cdot 2\sin 2\alpha(1 - \cos 4\alpha)} = \frac{\cos^2 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha \cdot 2\sin^2 2\alpha} = \operatorname{ctg}^4 2\alpha.$$

Існують також формули, які дають змогу перетворювати добуток тригонометричних функцій на суму.

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

Доведемо першу з цих формул. Перетворимо праву частину:

$$\frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) = \frac{1}{2} \cdot \left(2\sin\frac{\alpha - \beta + \alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta - \alpha - \beta}{2}\right) =$$

$$= \sin\alpha\cos(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta.$$

Аналогічно можна довести й інші формули. Зробіть це самостійно.

Приклад 2. Перетворіть у суму добуток $2\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha$.

Розв'язання. $2\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha = 2\cdot 0{,}5\cdot(\cos(-\alpha)-\cos 3\alpha)\sin 3\alpha =$

$$= \cos\alpha\sin 3\alpha - \cos 3\alpha\sin 3\alpha = 0{,}5(\sin 4\alpha + \sin 2\alpha) - 0{,}5\sin 6\alpha =$$
$$= 0{,}5\sin 4\alpha + 0{,}5\sin 2\alpha - 0{,}5\sin 6\alpha.$$

Часто для спрощення тригонометричних виразів та обчислення їх значень застосовують спеціальні прийоми. Розглянемо один із них.

Приклад 3. Обчисліть значення виразу $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$.

Розв'язання. Помножимо і поділимо задану суму на $2\sin\frac{\pi}{7}$.

Маємо: $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\dfrac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$.

Використаємо формули перетворення добутку в суму.

Отримаємо: $\dfrac{-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}+\sin\frac{7\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\dfrac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\dfrac{1}{2}$.

Формули, які дають змогу перетворювати добуток тригонометричних функцій у суму, використовують також для дослідження функцій, зокрема, для визначення їх періоду.

Приклад 4. Знайдіть найменший додатний період функції

$$f(x) = 2\cos^2 x\cos 3x.$$

Розв'язання. Подамо вираз, що задає функцію $f(x)$ у вигляді суми тригонометричних функцій у першому степені. Маємо:

$$2\cos^2 x\cos 3x = (1 + \cos 2x)\cos 3x = \cos 3x + \cos 2x\cdot\cos 3x =$$
$$= \cos 3x + 0{,}5(\cos x + \cos 5x) = 0{,}5\cos x + \cos 3x + 0{,}5\cos 5x.$$

Найменший додатний період кожної з функцій $y_1 = 0{,}5\cos x$, $y_2 = \cos 3x$, $y_2 = 0{,}5\cos 5x$ дорівнює відповідно $T_1 = 2\pi$, $T_2 = \frac{2\pi}{3}$, $T_3 = \frac{2\pi}{5}$. Число 2π ділиться націло на кожне з чисел 2π, $\frac{2\pi}{3}$ і $\frac{2\pi}{5}$, тому $T = 2\pi$ — найменший додатний період функції $f(x) = 2\cos^2 x\cos 3x$.

Перевірте себе

1. Чому дорівнює сума синусів кутів α і β? А їх різниця?
2. За якою формулою знаходять суму косинусів двох кутів? А різницю?
3. Доведіть формулу перетворення суми синусів двох кутів у добуток.
4. Доведіть формулу перетворення суми косинусів двох кутів у добуток.
5. За якими формулами добуток тригонометричних функцій перетворюють у суму? Доведіть одну з них.

Виконаємо разом

1 Доведіть тотожність: $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha.$

Розв'язання. Перетворимо ліву частину тотожності:

$$\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-3\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-3\alpha}{2}}=\frac{2\sin 2\alpha\cos\alpha}{2\cos 2\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha.$$

$\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}2\alpha$. Тотожність доведено.

2 Запишіть у вигляді добутку вираз $1-2\cos\alpha$.

Розв'язання. $1-2\cos\alpha=2\left(\frac{1}{2}-\cos\alpha\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\alpha\right)=$

$$=2\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$

3 Спростіть вираз $\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)\sin\alpha$.

Розв'язання. Скористаємося формулами перетворення добутку тригонометричних функцій у суму і отримаємо: $\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=$

$$=\frac{1}{2}(\cos(60^\circ-\alpha-60^\circ-\alpha)-\cos(60^\circ-\alpha+60^\circ+\alpha))\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha-\cos 120^\circ)\sin\alpha=\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right)\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\cos 2\alpha\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\sin(\alpha-2\alpha)+\sin(\alpha+2\alpha))+\frac{1}{4}\sin\alpha=$$

$$=-\frac{1}{4}\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin 3\alpha+\frac{1}{4}\sin\alpha=\frac{1}{4}\sin 3\alpha.$$

4 Відомо, що α, β, γ — внутрішні кути трикутника.

Доведіть, що $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

Розв'язання. Якщо α, β, γ — кути трикутника, то $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, звідси $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$. Тоді

$$\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=\sin\alpha+\sin\beta-\sin(180^\circ-(\alpha+\beta))=$$

$$=\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(-2\sin\frac{\alpha-\beta-\alpha-\beta}{4}\sin\frac{\alpha-\beta+\alpha+\beta}{4}\right)=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)=4\sin\frac{180^\circ-\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=4\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Виконайте усно

Перетворіть у добуток (1092–1093).

1092. а) $\sin 3\alpha + \sin\alpha$; б) $\cos 2\beta + \cos 4\beta$; в) $\sin 6\beta - \sin 4\beta$; г) $\cos\alpha - \cos 3\alpha$.

1093. а) $\sin 5° + \sin 25°$; в) $\sin 5° - \sin 55°$;
б) $\cos 5° + \cos 25°$; г) $\cos 5° + \cos 55°$.

Рівень А

1094. Спростіть вираз:
а) $\sin 50° + \sin 10°$; в) $\cos 50° + \cos 10°$;
б) $\sin 50° - \sin 10°$; г) $\cos 50° - \cos 10°$.

Запишіть у вигляді добутку вираз (1095–1099).

1095. а) $\sin 5\alpha + \sin\alpha$; б) $\sin 5\beta - \sin\beta$; в) $\cos x - \cos 3x$; г) $\cos g + \cos 7g$.

1096. а) $\sin 6\alpha + \sin 2\alpha$; в) $\sin 8\beta - \sin 6\beta$;
б) $\cos 2\alpha - \cos 6\alpha$; г) $\cos 4\alpha + \cos 12\alpha$.

1097. а) $\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha$; в) $\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg} 5\beta$;
б) $\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha$; г) $\operatorname{tg} 3\beta - \operatorname{tg} 5\beta$.

1098. а) $\sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5}$; в) $\cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{11\pi}{12}$;
б) $\cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\alpha$.

1099. а) $\operatorname{tg} 2\beta + \operatorname{tg}\beta$; в) $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x$;
б) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \operatorname{tg}\alpha$.

Перетворіть дані добутки на суми (1100–1101).

1100. а) $\cos 20° \cos 10°$; б) $\sin 5° \cos 40°$; в) $\sin 10° \sin 20°$; г) $\cos 15° \cos 75°$.

1101. а) $2\sin\alpha \sin 2\alpha$; б) $2\cos 3\alpha \cos 2\alpha$; в) $2\sin 4\alpha \sin\alpha$; г) $2\sin 6\alpha \cos 4\alpha$.

Доведіть тотожність (1102–1104).

1102. а) $\frac{\sin\alpha + \sin 5\alpha}{2\cos^2\alpha - 1} = 2\sin 3\alpha$; в) $\frac{\cos 2\alpha + \cos 8\alpha}{\cos 3\alpha} = 2\cos 5\alpha$;
б) $\frac{\cos 4\alpha - \cos 8\alpha}{\sin 12\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 6\alpha}$; г) $\frac{\sin 4\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha} = \cos\alpha\cos 3\alpha$.

1103. а) $\frac{\sin 2\beta + \sin 6\beta}{\cos 2\beta + \cos 6\beta} = \operatorname{tg} 4\beta$; в) $\frac{\cos 6\beta - \cos 2\beta}{\cos 6\beta + \cos 2\beta} = -\operatorname{tg} 2\beta \operatorname{tg} 4\beta$;
б) $\frac{\cos\beta + \cos 5\beta}{\sin\beta + \sin 5\beta} = \operatorname{ctg} 3\beta$; г) $\frac{\sin 3\alpha + \sin\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha$.

1104. а) $2\sin 35° \sin 55° = \cos 20°$; б) $2\cos 65° \cos 25° = \cos 40°$.

1105. Перетворіть на добуток:
а) $\sin 5\alpha + \sin 7\alpha + 2\sin 6\alpha$; в) $2\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha$;
б) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$; г) $\sin\alpha + \sin 5\alpha - \sin 6\alpha$.

Рівень Б

1106. Спростіть вираз:

а) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$; б) $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}$; в) $\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$; г) $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}$.

1107. Розкладіть на множники вираз:

а) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$; б) $\cos 2\alpha - \cos 4\alpha - \cos 6\alpha + \cos 8\alpha$.

1108. Доведіть:

а) $\sin 10° + \sin 50° - \cos 20° = 0$; в) $\sin 20° + \sin 40° - \cos 10° = 0$;

б) $\cos 85° + \cos 35° - \cos 25° = 0$; г) $\cos 85° - \cos 25° - \cos 20° = 0$.

1109. Спростіть вираз:

а) $\cos(60° + \alpha) + \cos(60° - \alpha)$; в) $\sin(60° + \alpha) + \sin(60° - \alpha)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

1110. Запишіть у вигляді суми:

а) $\sin(60° + \alpha) \cdot \sin(60° - \alpha)$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$;

б) $\cos\alpha \sin(\alpha + \beta)$; г) $\sin\alpha \cos(\alpha + \beta)$.

Доведіть тотожність (1111–1113).

1111. а) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta)$;

б) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta = -\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$;

в) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; г) $\sin\alpha-\cos\alpha=-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

1112. а) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$; б) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$;

в) $(\cos 2\alpha + \cos 6\alpha)\operatorname{tg} 4\alpha = \sin 2\alpha + \sin 6\alpha$;

г) $(\cos\alpha + \cos 5\alpha)\operatorname{tg} 3\alpha = \sin\alpha + \sin 5\alpha$.

1113. а) $\frac{\sin\beta+\sin 2\beta+3\sin 3\beta}{\cos\beta+\cos 2\beta+3\cos 3\beta}=\operatorname{tg}2\beta$; б) $\frac{\sin\alpha-2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha-2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$;

в) $\frac{\sin\beta+2\sin 3\beta+\sin 5\beta}{\sin 3\beta+2\sin 5\beta+\sin 7\beta}=\frac{\sin 3\beta}{\sin 5\beta}$; г) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\sin\alpha-\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Запишіть у вигляді добутку (1114–1115).

1114. а) $0{,}5+\sin\alpha$; б) $0{,}5+\cos\alpha$; в) $\sqrt{2}+2\cos\alpha$; г) $2\sin\alpha-\sqrt{3}$.

1115. а) $\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sqrt{3}-2\cos\alpha$; г) $1 - \sin 2\alpha$.

Знайдіть найменший додатний період функції (1116–1117).

1116. а) $\sin 5\alpha \sin 7\alpha + 2$; б) $2\cos^2\alpha\cos 3\alpha$; в) $\sin^2\alpha\sin 2\alpha + 3$.

1117. а) $2\cos 3\alpha\sin 7\alpha$; б) $\sin^2\alpha\cos 3\alpha - 1$; в) $8\sin^3 2\alpha\cos^2 2\alpha$.

1118. Доведіть тотожність Ейлера:

а) $\sin(30° + z) = \cos z - \sin(30° - z)$;

б) $\cos(30° + z) = \cos(30° - z) - \sin z$.

1119. Доведіть тотожність Вієта:

а) $\cos mx = 2\cos x\cos(m-1)x - \cos(m-2)x$;

б) $\sin mx = 2\cos x\sin(m-1)x - \sin(m-2)x$.

Рівень В

Доведіть тотожність (1120–1121).

1120. а) $\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos6\alpha+\cos7\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos4\alpha$;

б) $\sin4\alpha-\sin5\alpha-\sin6\alpha+\sin7\alpha=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{11\alpha}{2}$;

в) $\dfrac{\cos\alpha-\cos2\alpha-\cos4\alpha+\cos5\alpha}{\sin\alpha-\sin2\alpha-\sin4\alpha+\sin5\alpha}=\operatorname{ctg}3\alpha$;

г) $\dfrac{\cos\alpha-\cos3\alpha+\cos5\alpha-\cos7\alpha}{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\sin7\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

1121. а) $\cos2\alpha-\cos3\alpha-\cos4\alpha+\cos5\alpha=-4\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha}{2}$;

б) $\cos\alpha+\sin\alpha+\cos3\alpha+\sin3\alpha=2\sqrt{2}\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$;

в) $\dfrac{\cos\left(\frac{5\pi}{2}-6\alpha\right)+\sin(\pi+4\alpha)+\sin(3\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}+6\alpha\right)+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos(\alpha+2\pi)}=\operatorname{tg}\alpha$;

г) $\dfrac{1+\cos(2\pi-2\alpha)+\cos(4\pi+4\alpha)-\cos(6\alpha-\pi)}{\cos(6\pi-2\alpha)+2\cos^2(2\alpha-3\pi)-1}=2\cos2\alpha$.

1122. Доведіть, що при будь-яких α і β виконується рівність:

а) $\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;

б) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

Доведіть тотожність (1123–1124).

1123. а) $\cos2\alpha-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sin2\alpha\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

б) $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos2\alpha\cos2\beta=1$;

в) $\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=\sin^2\beta$;

г) $\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha$.

1124. а) $\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{6}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\left(\sqrt{3}-1\right)\sin\alpha$;

в) $\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{10}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{10}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{10}+\alpha\right)=\sin\alpha$.

Обчисліть значення виразу (1125–1126).

1125. а) $\sin\frac{3\pi}{14}-\sin\frac{\pi}{14}-\sin\frac{5\pi}{14}$; б) $\sin 10^\circ - \sin 30^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ$.

1126. а) $\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}$;

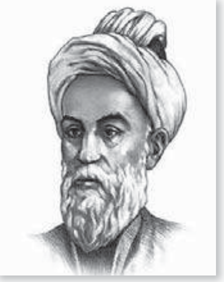
б) $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$.

1127. Відомо, що α, β, γ — кути трикутника. Доведіть, що:

а) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

б) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$.



1128. Перетворіть на добуток різницю:

а) $\sqrt{1+\cos 2\alpha}-\sqrt{1-\cos 2\alpha}$, якщо $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

б) $\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-\cos 2\alpha}}-\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1+\cos 2\alpha}}$, якщо $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

в) $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}$, якщо $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

г) $\dfrac{\sqrt{1-\sin\alpha}-\sqrt{1+\sin\alpha}}{\sin\alpha}$, якщо $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

«...Головним скарбом життя є здоров'я, і щоб його зберегти, потрібно багато що знати».

Авіценна

Вправи для повторення

1129. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x^2-2x-5)^2-2(x^2-2x-5)=3$;

б) $(y^2+2y)(y^2+2y+2)=3$;

в) $\dfrac{x^2+2}{3x-2}-\dfrac{3x-2}{x^2+2}=\dfrac{8}{3}$.

1130. Спростіть вираз $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$ і знайдіть його значення при $a=4$.

1131. За даними Дитячого фонду ООН (ЮНІСЕФ) в Україні 120 000 підлітків 10–19 років належать до групи ризику. З них 75 % — це діти вулиці. 45 % підлітків із групи ризику внаслідок своєї поведінки наражаються на ризик інфікування ВІЛ. Установіть:

а) скільки підлітків із групи ризику становлять діти вулиці;

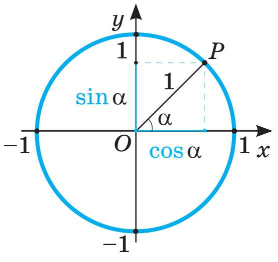
б) скільки підлітків із групи ризику наражаються на ризик інфікування ВІЛ — вірус імунодефіциту людини (англ. Human Immunodeficiency Virus, HIV).

Скарбничка досягнень

✓ Розумію, що градусна і радіанна міри кутів пов'язані такими залежностями:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\ \text{рад},\quad n^\circ = \frac{\pi}{180}n\ \text{рад}.\quad 1\ \text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ,\quad \alpha\ \text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \cdot \alpha$$

✓ Знаю тригонометричні функції числового аргументу та їхні властивості:



$$y_\alpha = \sin\alpha;\quad x_\alpha = \cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;\quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;\quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin x;\ \cos(x + 2\pi n) = \cos x;$$

$$\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x;\ \operatorname{ctg}(x + \pi n) = \operatorname{ctg} x$$

✓ Умію використовувати правило зведення для спрощення виразів.

Якщо кут зводжуваної тригонометричної функції відкладається від вертикального діаметра, то її замінюють кофункцією, якщо ж — від горизонтального діаметра, то її назву не змінюють. Знак ставимо такий самий, як у значенні зводжуваної функції за умови, що кут α — гострий.

✓ Знаю і вмію використовувати тригонометричні тотожності.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha};\quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};\quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

✓ Знаю і вмію використовувати формули додавання і наслідки з них.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\beta,$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2};\quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\sin\frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha;\quad 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha,$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\quad \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},\quad \operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Перевіряємо набуті компетентності

Тестові завдання № 3

1 Обчисліть значення виразу $\sin 37° \cos 23° + \cos 37° \sin 23°$.

А	Б	В	Г
$0,5$	$\cos 14°$	$\sin 14°$	$0,5\sqrt{3}$

2 Знайдіть $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = 0,8$, $0,5\pi < \alpha < \pi$.

А	Б	В	Г
$0,2$	$-0,6$	$0,6$	$-0,2$

3 Переведіть $18°$ у радіани.

А	Б	В	Г
$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$

4 Графік функції $y = \cos(x + 2)$ можна отримати з графіка функції $y = \cos x$ зсувом на 2 одиниці:

А	Б	В	Г
вправо	вліво	вверх	вниз

5 Знайдіть період функції $y = 3\sin(2x + 0,25\pi)$.

А	Б	В	Г
$0,25\pi$	$0,5\pi$	π	2π

6 Яка з функцій є непарною?

А	Б	В	Г
$y = \cos x$	$y = 2\sin(3x - 4)$	$y = 3\,\mathrm{tg}^2\, 2x$	$y = 0,5\sin 2x$

7 Спростіть вираз $\sin(90° + \alpha) + \cos(180° - \alpha)$.

А	Б	В	Г
$\sin\alpha + \cos\alpha$	0	$\cos\alpha - \sin\alpha$	$2\cos\alpha$

8 Обчисліть значення функції $y = 2\,\mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ у точці $x = \frac{\pi}{3}$.

А	Б	В	Г
2	$2\sqrt{3}$	0	значення не існує

9 Спростіть вираз $\cos\alpha\cos 3\alpha : (\cos\alpha\cos 2\alpha + \sin\alpha\sin 2\alpha)$.

А	Б	В	Г
$\cos\alpha$	$-\cos 3\alpha$	$\cos 3\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$

10 Знайдіть найбільше значення виразу $2\sin 3x - 5$.

А	Б	В	Г
2	-7	-3	7

Типові завдання до контрольної роботи № 3

1 Визначте знак добутку:
а) sin 125°cos 376°tg 192°ctg 586°; б) $\sin 1\cos 2\mathrm{tg} 3\mathrm{ctg} 4$.

2 Розмістіть у порядку зростання числа: $\frac{\pi}{18}$; $\frac{\pi}{9}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{\pi}{7}$; $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{2\pi}{5}$.

3 Обчисліть:
а) cos 20° sin 110° – sin 160°sin (–20°); б) $3\sqrt{2}\cos 15^\circ\left(1+\mathrm{tg}15^\circ\mathrm{tg}60^\circ\right)$.

4 Знайдіть значення виразу:
а) sin 3α cos α – cos 3α sin α, якщо $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ і $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;
б) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$, якщо $\cos\alpha=\frac{1}{3}$; в) $\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{3\cos\alpha-\sin\alpha}$, якщо tg α = 2.
г) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$, якщо $\sin 2\alpha=0,2$.

5 Побудуйте графік функції $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ і вкажіть:
а) область визначення функції;
б) область значень;
в) період;
г) парною чи непарною є функція;
ґ) зростаючою чи спадною на проміжку $\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right]$?

6 Спростіть вираз:
а) $\frac{\cos(2\pi+3x)-\sin(0,5\pi+x)}{\sin(2\pi+3x)+\cos(1,5\pi-x)}$; б) $\frac{\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}$;
в) $\sqrt{\left(\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{3\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}-4\sin^2\frac{\alpha}{4}$, якщо $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

7 Доведіть тотожність:
а) $\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos(60^\circ+\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\mathrm{ctg}\,\alpha$;
б) $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;
в) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=m-1$, якщо $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=m$.

8 Знайдіть найбільше і найменше значення функції:
а) $y=3-2\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \sin x + \cos x$.

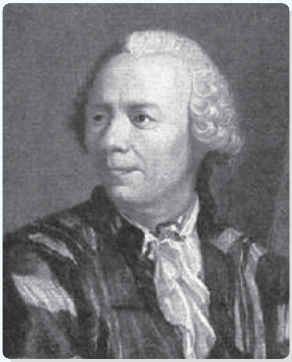
9 Доведіть, що $\mathrm{tg}\frac{\pi}{9}\,\mathrm{tg}\frac{2\pi}{9}\,\mathrm{tg}\frac{4\pi}{9}=\sqrt{3}$.

10 При яких значеннях c можлива рівність
$$\sin 4\alpha-2\sqrt{3}\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}=c^2-2c-6?$$

Розділ 4

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

Trigonometric Equations and Inequalities



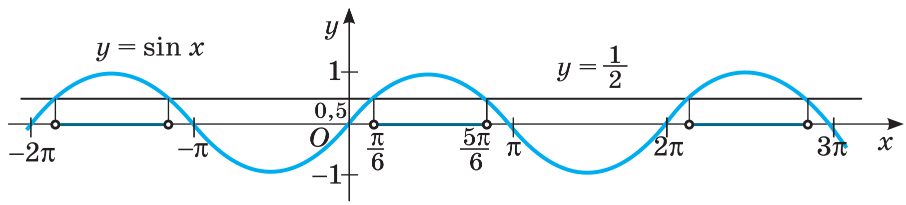
Леонард ЕЙЛЕР
(1707–1783)

Видатний швейцарський, російський і німецький математик, фізик, астроном, інженер тощо. Майже в усіх галузях математики та її застосувань є терміни, пов'язані з його ім'ям.

Надав сучасного вигляду тригонометрії, зокрема, розширив поняття тригонометричних функцій та ввів відповідні позначення, обґрунтував знаки тригонометричних функцій у різних координатних чвертях і формули зведення.

«Саме математика насамперед захищає нас від обману чуттів і вчить, що одна справа — як влаштовані предмети, які сприймаються чуттями, а інша — якими вони здаються; ця наука дає найнадійніші правила; хто керується ними, тому не страшний обман чуттів».

Л. Ейлер



НАБУВАЄМО ДОСВІДУ ТА КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ

- Обернені тригонометричні функції
- Найпростіші тригонометричні рівняння і нерівності
- Основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей
- Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами
- Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції

- Формулювати означення обернених тригонометричних функцій
- Обґрунтовувати формули коренів тригонометричних рівнянь
- Розв'язувати тригонометричні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами

Навчальний проект № 4. **РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРАМИ**

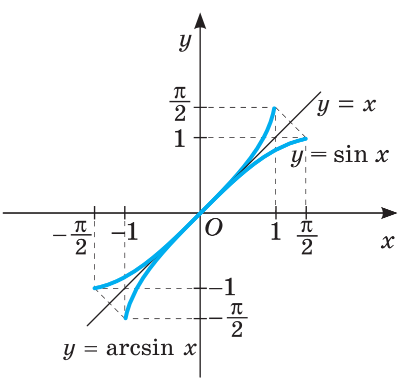
§ 22 Обернені тригонометричні функції

Inverse Trigonometric Functions

Під час дослідження у галузі механіки, електротехніки, геодезії, оптики, геометрії виникає потреба розв'язувати рівняння та нерівності, у яких невідома змінна стоїть під знаком однієї з тригонометричних функцій (тригонометричні рівняння і нерівності). Щоб розв'язувати такі рівняння і нерівності, використовують обернені тригонометричні функції. З'ясуємо, що це за функції.

З теореми про обернену функцію випливає, що функція оборотна, якщо вона монотонна на всій області визначення. Тригонометричні функції на всій області визначення немонотонні, а тому, взагалі кажучи, необоротні. Але можна визначити проміжки, на яких тригонометричні функції монотонні, а отже, мають обернені функції. Розглянемо ці функції та їх властивості.

Функція $y = \arcsin x$. Функція $y = \sin x$ на відрізку $[-0{,}5\pi;\ 0{,}5\pi]$ зростає, а тому на цьому відрізку має обернену функцію. Її називають *арксинусом* і позначають $y = \arcsin x$. Оскільки графіки двох взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$, то графік функції $y = \arcsin x$ можна отримати з графіка функції $y = \sin x$, $x \in [-0{,}5\pi; 0{,}5\pi]$ за допомогою перетворення симетрії відносно прямої $y = x$ (мал. 140).



Мал. 140

Властивості функції $y = \arcsin x$.

1. $D(y) = [-1;\ 1]$.
2. $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Функція непарна: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
4. На всій області визначення функція зростає.

З властивостей взаємно обернених функцій випливають рівності:

$$\sin(\arcsin x) = x,\ \ x \in [-1; 1] \text{ і } \arcsin(\sin x) = x,\ \ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right].$$

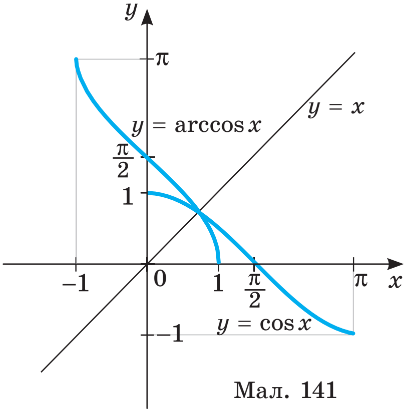
Арксинусом числа a називають такий кут або число з відрізка $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a.

Приклад 1. Обчисліть: а) $\arcsin\frac{1}{2}$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Розв'язання. а) $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, оскільки $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Функція $y = \arccos x$. Функція $y = \cos x$ на відрізку $[0; \pi]$ спадає, а тому на цьому відрізку має обернену функцію. Її називають *арккосинусом* і позначають $y = \arccos x$. Графік функції $y = \arccos x$ можна отримати з графіка функції $y = \cos x$, $x\in[0;\pi]$ за допомогою перетворення симетрії відносно прямої $y = x$ (мал. 141).



Мал. 141

Властивості функції $y = \arccos x$.

1. $D(y) = [-1; 1]$.

2. $E(y) = [0; \pi]$.

3. Функція ні парна, ні непарна: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

4. На всій області визначення функція спадає.

З властивостей взаємно обернених функцій випливають рівності: $\cos(\arccos x) = x$, $x\in[-1;1]$ і $\arccos(\cos x) = x$, $x\in[0;\pi]$.

Арккосинусом числа a називають такий кут або число з відрізка $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює a.

Приклад 2. Обчисліть: а) $\arccos\frac{1}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Розв'язання. а) $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, оскільки $\frac{\pi}{3}\in[0;\pi]$ і $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$, оскільки $\frac{3\pi}{4}\in[0;\pi]$ і $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Можна було цей приклад розв'язати, використовуючи формулу, а саме:

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

Функція $y = \operatorname{arctg} x$. Функція $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ зростає, а тому на цьому проміжку має обернену функцію. Її називають *арктангенсом* і позначають $y = \operatorname{arctg} x$. Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ можна отримати з графіка функції $y = \operatorname{tg} x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ за допомогою перетворення симетрії відносно прямої $y = x$ (мал. 142).

Властивості функції $y = \operatorname{arctg} x$.

1. $D(y) = R$.

2. $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Функція непарна:

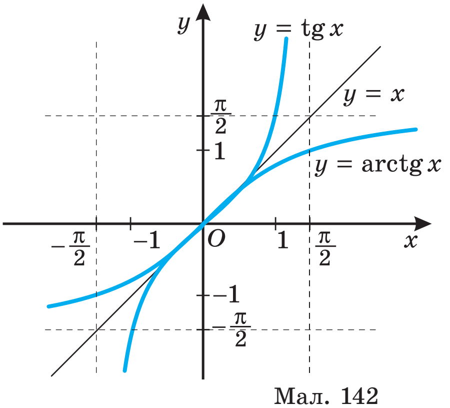
$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$

4. Функція зростає на всій області визначення.

З властивостей взаємно обернених функцій випливають рівності:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x,\ x \in R$$

$$\text{і } \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$



Мал. 142

Арктангенсом числа a називають такий кут або число з інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, що його тангенс дорівнює a.

Приклад 3. Обчисліть: а) $\operatorname{arctg} 1$; б) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

Розв'язання.

а) $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, оскільки $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

б) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

Функція $y = \operatorname{arcctg} x$. Функція $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$ спадає, а тому на цьому проміжку має обернену функцію. Її називають *арккотангенсом* і позначають $y = \operatorname{arcctg} x$. Графік функції $y = \operatorname{arcctg} x$ можна отримати з графіка функції $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$, симетричним відображенням відносно прямої $y = x$ (мал. 143).

Властивості функції $y = \operatorname{arcctg} x$.

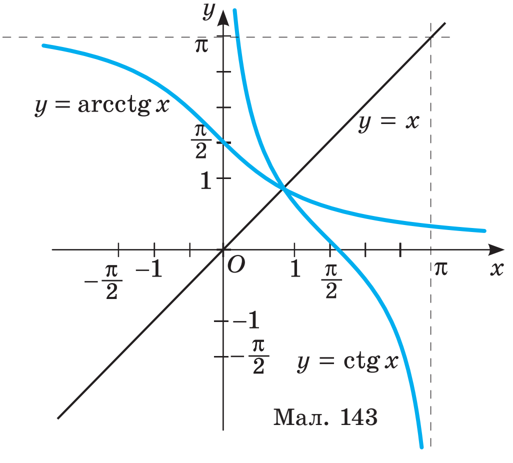
1. $D(y) = R$.

2. $E(y) = (0; \pi)$.

3. Функція ні парна, ні непарна: $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

4. Функція спадає на всій області визначення.

З властивостей взаємно обернених функцій випливають рівності:



Мал. 143

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x,\ x \in R \ \text{ і } \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x,\ x \in (0; \pi).$$

Арккотангенсом числа a називають такий кут або число з інтервалу $(0; \pi)$, що його котангенс дорівнює a.

Приклад 4. Обчисліть: а) $\operatorname{arcctg} 1$; б) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Розв'язання. а) $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, оскільки $\frac{\pi}{4} \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$; б) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$, оскільки $\frac{2\pi}{3} \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Можна було цей приклад розв'язати, використовуючи формулу, а саме: $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Наближені значення обернених тригонометричних функцій можна знаходити за допомогою калькулятора або користуючись таблицею наближених значень тригонометричних функцій (див. форзац 4).

Наприклад, $\arcsin 0{,}4226 \approx 25°$, $\operatorname{arctg} 0{,}8391 \approx 40°$.

Хочете знати ще більше?

Відомо багато співвідношень для обернених тригонометричних функцій, зокрема:

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ при $x \in [-1; 1]$; $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ для всіх $x \in R$.

Покажемо, як ці формули використовують для розв'язування рівнянь.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $\arcsin x \cdot \arccos x = \frac{\pi^2}{18}$.

Розв'язання. Оскільки $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, то рівняння матиме вигляд $18\arcsin^2 x - 9\pi \arcsin x + \pi^2 = 0$. Зробимо заміну $\arcsin x = t$, $|t| \le \frac{\pi}{2}$. Маємо: $18t^2 - 9\pi t + \pi^2 = 0$, звідки $t = \frac{\pi}{3}$; $t = \frac{\pi}{6}$.

Якщо $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$, то $x = \frac{1}{2}$; якщо $\arcsin x = \frac{\pi}{3}$, то $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Перевірте себе

1. Які властивості має функція $y = \arcsin x$?
2. Сформулюйте означення арксинуса числа a.
3. Назвіть властивості функції $y = \arccos x$.
4. Дайте означення арккосинуса числа a.
5. Які властивості мають функції $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$?
6. Дайте означення арктангенса і арккотангенса числа a.

Виконаємо разом

1 Чи правильно, що $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\pi}{4}$?

Розв'язання. Ні, неправильно. Хоч $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, але $\frac{3\pi}{4}\notin\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Тому $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\neq\frac{3\pi}{4}$.

2 Порівняйте значення виразів $\operatorname{arcctg}1$ і $\operatorname{arcctg}1{,}2$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{arcctg}x$ спадна і $1 < 1{,}2$, то $\operatorname{arcctg}1 > \operatorname{arctg}1{,}2$.

3 Обчисліть: а) $\arcsin\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$; б) $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$.

Розв'язання. а) $\arcsin\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)=\arcsin\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\arcsin\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)=$

$$=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{3}.$$

б) Знайдемо спочатку значення тангенса даного виразу, тобто $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)$.

Нехай $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}=\alpha$, а $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}=\beta$, тоді $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{7}$.

Оскільки $0<\frac{3}{4}<1$, то $0<\operatorname{arctg}\frac{3}{4}<\frac{\pi}{4}$ або $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$. Аналогічно $0<\beta<\frac{\pi}{4}$.

Тоді $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$.

Використаємо формулу тангенса суми:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}}=\frac{\frac{25}{28}}{1-\frac{3}{28}}=\frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}}=1.$$

Оскільки $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ і $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=1$, то $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

Отже, $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$.

4 Розв'яжіть нерівність $\arcsin\sqrt{2}x<\frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Оскільки функція $y=\arcsin x$ зростаюча на $D(y)=[-1;\ 1]$, то нерівність $\arcsin\sqrt{2}x<\frac{\pi}{4}$ рівносильна системі:

$$\begin{cases} -1 \le \sqrt{2}x \le 1, \\ \sqrt{2}x < \sin\frac{\pi}{4}, \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \text{ або } -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x < \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

Виконайте усно

Обчисліть (1132–1134).

1132. а) $\arcsin 0$; б) $\arcsin 1$; в) $\arcsin(-1)$; г) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1133. а) $\arccos 0$; б) $\arccos 1$; в) $\arccos(-1)$; г) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1134. а) $\mathrm{arctg}\, 0$; б) $\mathrm{arcctg}\, 0$; в) $\mathrm{arctg}\, 1$; г) $\mathrm{arcctg}\, 1$.

1135. Знайдіть область визначення функції:
а) $y = \arcsin 2x$; б) $y = 3\arccos(x + 1)$; в) $y = -3\mathrm{arctg}(x^2 - 1)$.

1136. Якого найменшого значення набуває функція:
а) $y = 2\arcsin x$; б) $y = 0{,}5\arccos x$; в) $\mathrm{arctg}\, x$?

1137. Скільки коренів має рівняння $\arcsin x = a$, якщо:
а) $a = 0{,}5$; б) $a = \frac{\pi}{2}$; в) $a = 3$?

Рівень А

Обчисліть (1138–1141).

1138. а) $\arcsin\frac{1}{2}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; г) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1139. а) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arccos\frac{1}{2}$; в) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; г) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1140. а) $\mathrm{arctg}\sqrt{3}$; б) $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\mathrm{arctg}(-1)$; г) $\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

1141. а) $\mathrm{arcctg}\sqrt{3}$; б) $\mathrm{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; г) $\mathrm{arcctg}(-1)$.

Обчисліть, користуючись калькулятором або таблицями (1142–1143).

1142. а) $\arcsin 0{,}2436$; в) $\arcsin 0{,}682$; г) $\arccos 0{,}6745$;
б) $\arccos 0{,}9455$; г) $\arcsin(-0{,}4067)$; д) $\arccos(-0{,}7313)$.

1143. а) $\mathrm{arctg}\, 0{,}7265$; в) $\mathrm{arctg}\, 0{,}4663$; г) $\mathrm{arcctg}\, 1{,}9626$;
б) $\mathrm{arcctg}\, 5{,}91445$; г) $\mathrm{arctg}(-3{,}732)$; д) $\mathrm{arcctg}(-9{,}5144)$.

Порівняйте (1144–1145).

1144. а) $\arcsin\frac{1}{2}$ і $\arccos\frac{1}{2}$; в) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ і $\operatorname{arcctg}1$; г) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ і $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1145. а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ і $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ і $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $\operatorname{arctg}(-1)$ і $\operatorname{arcctg}(-1)$; г) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ і $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

1146. Використовуючи малюнок 144, знайдіть кількість коренів рівняння:
а) $\arccos x = x$; б) $\arccos x = x^2 + 1$.

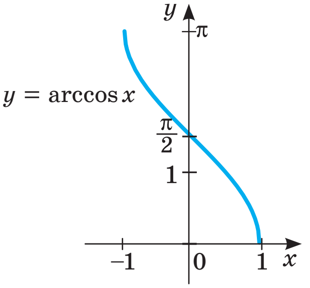
Обчисліть (1147–1151).

1147. а) $\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}$;

б) $\arcsin 1+\arccos\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}1+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arcctg}0-\arccos\frac{1}{2}$.



Мал. 144

1148. а) $\arcsin(-1)-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\operatorname{arcctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})-\arcsin(-1)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1149. а) $\operatorname{arctg}(-1)+\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})-\operatorname{arcctg}1$;

б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1150. а) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}\sqrt{3})$.

1151. а) $\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$; в) $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{2}-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\operatorname{arctg}(-1)\right)$; г) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)$.

1152. Знайдіть область визначення функції:
а) $y = 2\arcsin(3x - 5)$; в) $y = -\arcsin(4 - x)$;
б) $y = \arccos(x - 6)$; г) $y = 2\arccos(5 - 2x)$.

1153. Знайдіть область визначення та область значень функції

а) $y=\arcsin 2x+\frac{\pi}{2}$; в) $y=\arccos(3x+2)-2\pi$;

б) $y=\arccos\frac{x}{2}+\pi$; г) $y=2\arcsin(2x-3)-\frac{3\pi}{2}$.

1154. Розв'яжіть рівняння

а) $\arcsin x=\frac{\pi}{6}$; б) $\arccos x=\frac{\pi}{4}$; в) $\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{arcctg} x=\pi$.

Рівень Б

Обчисліть (1155–1161).

1155. а) $\arccos\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; б) $\arccos\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)$; в) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}\right)$.

1156. а) $\sqrt{2}\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{12}{\pi}\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{8}{\pi}\left(\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)-\operatorname{arcctg}(-1)\right)$.

1157. а) $\cos\left(2\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$; б) $\operatorname{ctg}\left(2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

1158. а) $\sin(\arccos 0{,}8)$; б) $\cos(\arcsin 0{,}6)$.

1159. а) $\sin\left(2\arccos\frac{1}{3}\right)$; б) $\cos(2\operatorname{arctg} 2)$.

1160. а) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$; б) $\operatorname{arctg} 7+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

1161. а) $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{12}{13}$; б) $\arccos\frac{8}{17}+\arccos\frac{15}{17}$.

1162. Установіть відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1	$\sin\left(\pi-\arccos\frac{1}{2}\right)$	А	1
2	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} 1\right)$	Б	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
3	$\operatorname{tg}\left(\pi+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$	В	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
4	$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$	Г	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
		Д	$-\sqrt{3}$

1163. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\arccos(2x^2-1)$; в) $y=2\arcsin(1-x^2)$;

б) $y=\arccos\frac{x}{x-1}$; г) $y=\arcsin\frac{x^2}{5x+6}$.

1164. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = \arcsin(x - 1) + 2$; в) $y = \arccos(x-2) - \dfrac{\pi}{2}$;

б) $y = \operatorname{arctg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 1$; г) $y = \operatorname{arcctg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) - 1$.

1165. Розв'яжіть рівняння двома способами: 1) графічно; 2) використовуючи властивість функцій:

а) $\arcsin x = \arccos x$; в) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} x$;

б) $\arcsin(x+2) = \dfrac{\pi}{6}$; г) $\arccos(x+1) = \dfrac{\pi}{3}$.

Розв'яжіть рівняння (1166–1167).

1166. а) $\operatorname{arctg}(2x+3) = \dfrac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{arcctg}(4-3x) = \dfrac{\pi}{4}$.

1167. а) $(\arccos x)^2 - 5\arccos x + 4 = 0$;
б) $2(\arcsin x)^2 - 5\arcsin x + 2 = 0$.

Розв'яжіть нерівність (1168–1169).

1168. а) $\arcsin x < \dfrac{\pi}{6}$; б) $\arccos x > \dfrac{\pi}{3}$.

1169. а) $\operatorname{arctg}(x-1) > \dfrac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{arcctg}(2x - 1) < \operatorname{arcctg}(x + 2)$.

Рівень В

1170. Обчисліть:

а) $\arccos\left(\cos\dfrac{12\pi}{5}\right)$; в) $\arcsin\left(\sin\dfrac{19\pi}{8}\right)$;

б) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{30\pi}{7}\right)$; г) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{10\pi}{3}\right)$.

1171. а) $\arcsin(\sin 7)$; б) $\arccos(\cos 9)$; в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 4)$; г) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 5)$.

1172. а) $\arcsin\left(\sin\left(-\dfrac{13\pi}{6}\right)\right)$; в) $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{17\pi}{6}\right)\right)$;

б) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\dfrac{7\pi}{3}\right)\right)$; г) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{19\pi}{8}\right)\right)$.

1173. Побудуйте графік функції:

а) $y = \arccos\left|x - \dfrac{1}{2}\right|$; б) $y = \arccos(|x| - 1)$; в) $y = \operatorname{arctg}|x|$; г) $y = |\operatorname{arcctg} x - 1|$.

Розв'яжіть рівняння (1174–1179).

1174. а) $2\arcsin(4x^2 + 4x + 2) = \pi$; в) $2\arccos(2x^2 - 4x + 0{,}5) = \pi$;

б) $4\operatorname{arctg}(x^2 + 5x + 7) = \pi$; г) $4\operatorname{arcctg}(6x^2 - 2x + 1) = \pi$.

1175. а) $\sin(\arcsin(x+3)) = x^2+x-1$; в) $\cos(\arccos(2x+1)) = x^2-2$;
б) $\sin(\arcsin(7-3x)) = (x-3)^2$; г) $\cos(\arccos(9-4x)) = 2x^2-13x+19$.

1176. а) $\arcsin(7x-3) = \arcsin(3x-1)$; в) $\arcsin(6-4x) = \arcsin(2x^2-9x+9)$;
б) $\arccos(x^2-1) = \arccos(x-1)$; г) $\arccos(2+x) = \arccos(x^2-3x-3)$.

1177. а) $2\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + \arccos\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4}$; в) $3\arccos x - 2\arcsin x = \frac{2\pi}{3}$;
б) $\arcsin\frac{5x-1}{3} + 2\arccos\frac{5x-1}{3} = \frac{5\pi}{6}$; г) $\arccos\frac{x^2-3}{\sqrt{2}} = \arcsin\frac{x^2-3}{\sqrt{2}}$.

1178. а) $\arcsin(7x-3) < \arcsin(3x-1)$; б) $\arccos(5-2x) > \arccos(x-1)$.

1179. а) $3\arccos x - 2\arcsin x \le \frac{2\pi}{3}$; б) $\arcsin x + 2\arccos x \ge \frac{5\pi}{6}$.

Вправи для повторення

1180. *Відкрита задача.* Знайдіть значення виразу … , якщо $\sin\alpha = -0{,}6$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

1181. Доведіть тотожність $\frac{\sin 3x + \cos 2x - \sin x}{\cos x + \sin 2x - \cos 3x} = \operatorname{ctg} 2x$.

1182. Розв'яжіть рівняння $\frac{2x-1}{x+2} + \frac{3x+1}{x^2-x-6} = \frac{x-1}{x-3}$.

§ 23 Найпростіші тригонометричні рівняння

Simplest Trigonometric Equations

Рівняння називають *тригонометричним*, якщо його невідомі входять тільки під знаки тригонометричних функцій. Приклади тригонометричних рівнянь:

$$\sin x = 0{,}5;\quad 2\cos x = \sqrt{3};\quad \cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

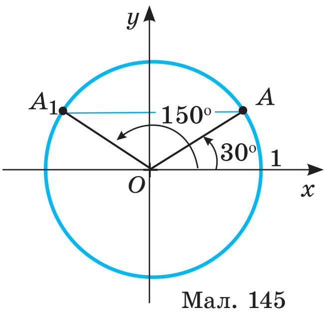
Задача. Сторони трикутника дорівнюють 15 см і 8 см. Знайдіть кут між ними, якщо площа трикутника становить 30 см^2.

Розв'язання. Площу S трикутника можна визначати за формулою $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, де a, b — його сторони; α — кут між ними. Якщо шуканий кут даного трикутника містить x градусів, то $30=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 8\cdot \sin x$, звідси $\sin x=\frac{1}{2}$.

Одержали тригонометричне рівняння. Розв'яжемо його. Синус кута дорівнює 0,5, коли кут становить 30° або 150° (мал. 145).

Трикутники з такими кутами існують.

Відповідь. 30° або 150°.



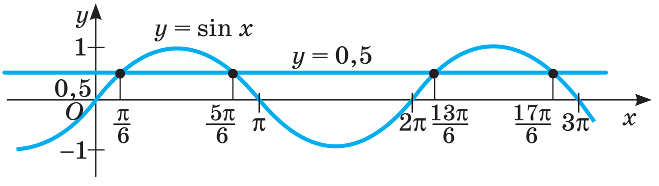
Мал. 145

У розглянутому випадку кути не можуть бути від'ємними або більшими за 180°. А взагалі рівняння $\sin x=\frac{1}{2}$ має безліч розв'язків: $30° + 360° \cdot n$ і $150° + 360° \cdot n$, де $n\in Z$.

Розв'язуючи тригонометричне рівняння, найчастіше знаходять усю множину його розв'язків. І виражають їх здебільшого не в градусах, а в абстрактних числах.

Наприклад, множину розв'язків рівняння $\sin x=\frac{1}{2}$ записують так: $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k$, де $k\in Z$.

Те, що рівняння $\sin x=\frac{1}{2}$ має безліч розв'язків, видно з його графічного розв'язання: графіки функцій $y = \sin x$ і $y=\frac{1}{2}$ мають безліч спільних точок (мал. 146).



Мал. 146

З'ясуємо, як у загальному вигляді розв'язувати найпростіші тригонометричні рівняння, тобто рівняння виду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\, x = a$, $\mathrm{ctg}\, x = a$.

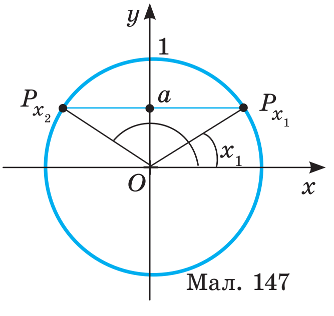
1. Розв'язування рівняння виду $\sin x = a$.

Якщо $|a|>1$, то рівняння розв'язків не має, оскільки завжди

$$-1 \le \sin x \le 1.$$

Якщо $|a|\le 1$, то рівняння має безліч коренів (мал. 146).

Запишемо формулу для їх знаходження. Пряма $y = a$, якщо $-1 \le a \le 1$, перетинає одиничне коло у двох точках: P_{x_1} і P_{x_2}, де x_1 і x_2 — корені рівняння $\sin x = a$ (мал. 147).



Мал. 147

$x_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тому $x_1 = \arcsin a$. З малюнка 147 видно, що $x_2 = \pi - x_1$, тобто $x_2 = \pi - \arcsin a$. Враховуючи періодичність функції $y = \sin x$, можемо записати множину всіх розв'язків рівняння $\sin x = a$. Вона складається з двох серій: $x_1 = \arcsin a + 2\pi n$ і $x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n$, $n \in Z$.

Дві останні формули можна об'єднати в одну.

$$x_1 = \arcsin a + \pi \cdot 2n, \; x_2 = -\arcsin a + n(2\pi + 1).$$

Якщо множник при π парний чи непарний, то $\arcsin a$ береться відповідно зі знаком «плюс» чи «мінус». Ці випадки об'єднує рівність

$$\boldsymbol{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \; n \in Z.}$$

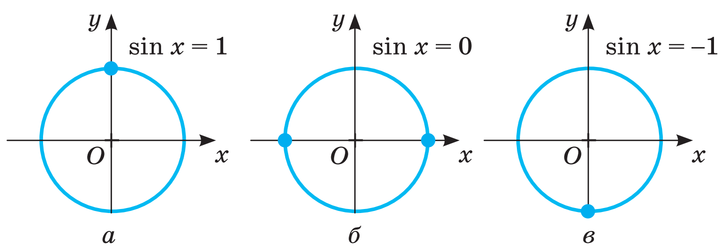
Така загальна формула розв'язків рівняння $\sin x = a$, якщо $|a| \le 1$.

Якщо a дорівнює 0, 1 або –1, рівняння $\sin x = a$ можна розв'язувати і за загальними формулами, але зручніше — уявляючи одиничне коло (мал. 148):

якщо $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$;

якщо $\sin x = 0$, то $x = \pi k$, $k \in Z$;

якщо $\sin x = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.



Мал. 148

Зауваження. Традиційно невідомі змінні у рівняннях позначають буквою x, як і вісь абсцис. Усе ж їх не слід ототожнювати, розв'язуючи тригонометричні рівняння на одиничному колі.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin 2x = 0$; в) $\sin x = 0{,}2$.

Розв'язання. а) Корені рівняння $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ знайдемо за загальною формулою: $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k$, $k \in Z$.

Оскільки $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, то отримаємо

$$x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k, \; k \in Z \text{ або } x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k, \; k \in Z.$$

б) Рівняння $\sin 2x = 0$ краще розв'язувати так:

$$2x = \pi k, \; k \in Z; \; x = \frac{\pi k}{2}, \; k \in Z.$$

в) З рівняння $\sin x = 0{,}2$ випливає, що $x = (-1)^k \arcsin 0{,}2 + \pi k,\ k \in Z$. Оскільки $\arcsin 0{,}2$ — нетабличне значення, то розв'язок залишається у такому самому вигляді, а в разі потреби обчислюється наближено за допомогою калькулятора чи програми Excel на комп'ютері: $\arcsin 0{,}2 \approx 0{,}2$.

Відповідь. а) $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; б) $\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z$;

в) $(-1)^k \arcsin 0{,}2 + \pi k,\ k \in Z$.

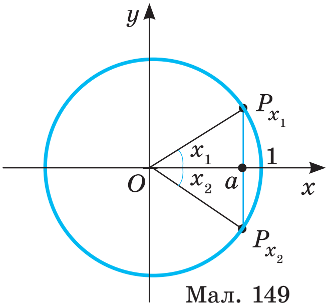
2. Розв'язування рівняння виду $\cos x = a$.

Якщо $|a|>1$, то рівняння розв'язків не має, оскільки завжди

$$-1 \le \cos x \le 1.$$

Якщо $|a|\le 1$, то рівняння має безліч коренів.

Пряма $x = a$, $-1 \le a \le 1$, перетинає одиничне коло у двох точках: P_{x_1} і P_{x_2}, де x_1 і x_2 — корені рівняння $\cos x = a$ (мал. 149).



Мал. 149

Оскільки $x_1 \in [0;\pi]$, то $x_1 = \arccos a$. Точки P_{x_1} і P_{x_2} симетричні відносно осі абсцис, тому кути (числа) x_1 і x_2 — протилежні. Отже, $x_2 = -x_1 = -\arccos a$. Враховуючи, що функція $y = \cos x$ періодична з періодом 2π, можемо записати множину всіх розв'язків рівняння $\cos x = a$:

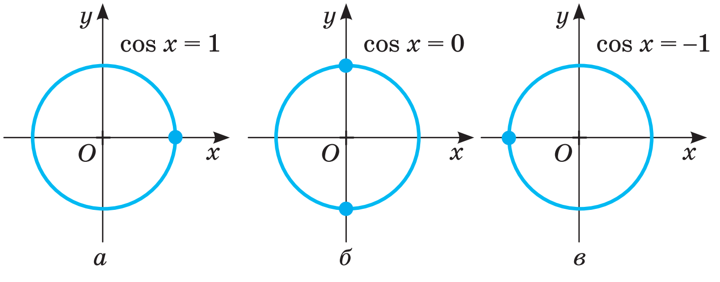
$$\boldsymbol{x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z.}$$

Одержана формула є загальною. Але якщо a дорівнює 0, 1 або -1, зручніше уявляти одиничне коло (мал. 150) і відразу писати:

якщо $\cos x = 1$, то $x = 2\pi k,\ k \in Z$;

якщо $\cos x = 0$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$;

якщо $\cos x = -1$, то $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$.



Мал. 150

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння:

а) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$; в) $\cos 2x = 1$.

Розв'язання. а) За загальною формулою коренів рівняння $\cos x = a$ отримаємо: $x = \pm\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$. $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$.

б) За загальною формулою отримаємо:

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k,\quad k \in Z.$$

Оскільки $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, то $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

в) Уявивши малюнок, можна писати одразу: $2x = 2\pi n,\ n \in Z;$

$$x = \pi n,\quad n \in Z.$$

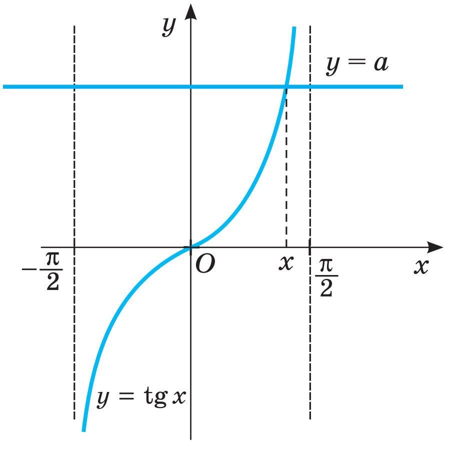
Відповідь. а) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z;$ б) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z;$ в) $\pi n,\ n \in Z.$

3. Розв'язування рівняння виду tg x = a і ctg x = a.

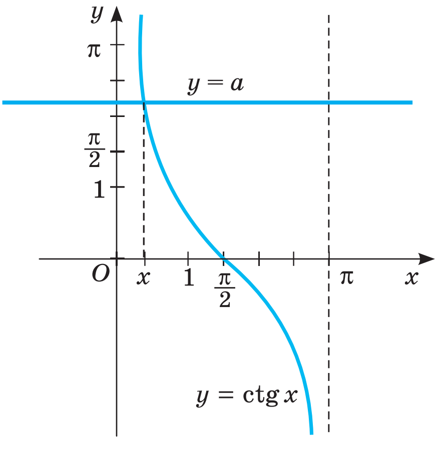
Побудуємо графік функції $y = \operatorname{tg} x$ для $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Пряма $y = a$ перетинає цей графік (мал. 151) в одній точці, для якої $\operatorname{tg} x = a$, тоді $x = \operatorname{arctg} a$. Враховуючи, що функція $y = \operatorname{tg} x$ періодична з періодом π, множину всіх розв'язків рівняння $\operatorname{tg} x = a$ можна визначити за формулою:

$$\boldsymbol{x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\quad k \in Z.}$$

Аналогічно, використовуючи графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ (мал. 152), можна визначити розв'язки рівняння $\operatorname{ctg} x = a$: $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in Z.$



Мал. 151



Мал. 152

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння:

а) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; б) $\operatorname{ctg} x = -1$; в) $\operatorname{tg} x = 0$.

Розв'язання. а) За формулою $x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k,\ k \in Z$. Оскільки $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, то $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

б) $x = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi k$. Обчислимо $\operatorname{arcctg}(-1)$:

$$\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Тоді $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

в) $\operatorname{tg} x = 0$; $x = \operatorname{arctg} 0 + \pi k$, $k \in Z$; $x = \pi k$, $k \in Z$.

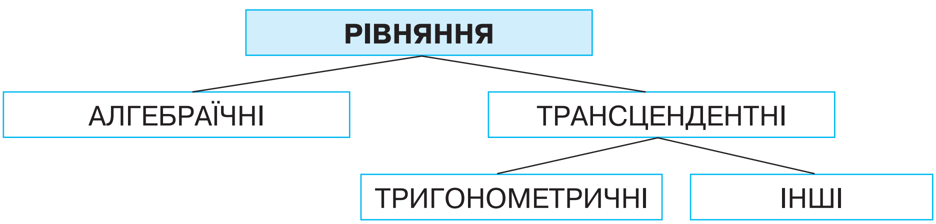
Відповідь. а) $\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\dfrac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; в) πk, $k \in Z$.

Формули розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь наведено в таблиці. У ній $k \in Z$.

Рівняння		Формула розв'язків
$\sin x = \alpha$,	$\lvert a \rvert \le 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$,
	$\lvert a \rvert > 1$	розв'язків немає
$\cos x = \alpha$,	$\lvert a \rvert \le 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi k$,
	$\lvert a \rvert > 1$	розв'язків немає
$\operatorname{tg} x = a$		$x = \operatorname{arctg} a + \pi k$,
$\operatorname{ctg} x = a$		$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$

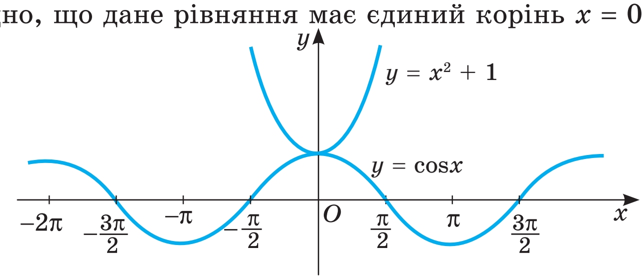
Хочете знати ще більше?

До тригонометричних рівнянь звичайно відносять рівняння, невідомі яких входять тільки під знаки тригонометричних функцій. А наприклад, у рівнянні $x^2 - \cos x + 1 = 0$ невідома змінна x входить не тільки під знак косинуса, а й в одночлен x^2. Такі рівняння не вважають тригонометричними, їх відносять до ширшого класу рівнянь — трансцендентних (*transcendens* — той, що виходить за межі). Тригонометричні рівняння — один із видів трансцендентних рівнянь (мал. 153).



Мал. 153

Більшість трансцендентних рівнянь найзручніше розв'язувати (наближено) графічним способом. Наведене вище рівняння можна записати у вигляді $\cos x = x^2 + 1$. Побудуємо графіки функцій $y = \cos x$ і $y = x^2 + 1$ (мал. 154). Очевидно, що дане рівняння має єдиний корінь $x = 0$.



Мал. 154

Перевірте себе

1. Які рівняння називають тригонометричними?
2. За якою формулою розв'язують рівняння $\sin x = a$?
3. При яких значеннях a рівняння $\sin x = a$ не має розв'язків?
4. Назвіть корені рівнянь $\sin x = 0$; $\sin x = 1$; $\sin x = -1$.
5. За якою формулою знаходять розв'язки рівняння $\cos x = a$?
6. Як найкраще знайти розв'язки рівнянь $\cos x = 0$; $\cos x = 1$; $\cos x = -1$?
7. За якими формулами розв'язують рівняння $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$?

Виконаємо разом

1 Розв'яжіть рівняння: $2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді: $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тоді, за загальною формулою коренів рівняння $\cos x = a$, маємо:

$x-\frac{\pi}{3}=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi k,\ \ k\in Z$; $x-\frac{\pi}{3}=\pm\left(\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi k,\ \ k\in Z$;

$x-\frac{\pi}{3}=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+2\pi k,\ \ k\in Z$; $x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in Z$; $x=\pm\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

Отриману відповідь можна так і залишити, а можна записати у вигляді сукупності: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2\pi k, \\ x=-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z \end{array}\right.$ або $\left[\begin{array}{l} x=\frac{7\pi}{6}+2\pi k, \\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z. \end{array}\right.$

Відповідь. $\pm\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in Z\ \ \left(\frac{7\pi}{6}+2\pi k \text{ або } -\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\right)$.

2 Розв'яжіть рівняння: $\sin^2 x=\frac{1}{4}$.

Розв'язання. *Спосіб 1.* Рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$\left[\begin{array}{l} \sin x=\frac{1}{2}, \\ \sin x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$ або $\left[\begin{array}{l} x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, \\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n \end{array}\right.$ або $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in Z$.

Спосіб 2 (пониження степеня). $\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{4}$; $\cos 2x=\frac{1}{2}$; $2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$.

Відповідь. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in Z$.

3 Знайдіть область визначення функції $y=\dfrac{\sqrt{4+3x-x^2}}{\sin x}$.

Розв'язання. Область визначення даної функції знайдемо, розв'язавши систему: $\begin{cases}4+3x-x^2\geq 0,\\ \sin x\neq 0\end{cases}$ або $\begin{cases}x^2-3x-4\leq 0,\\ \sin x\neq 0,\end{cases}$ звідси $\begin{cases}x\in[-1;4],\\ x\neq \pi k, k\in Z.\end{cases}$

Які значення x з множини $x = \pi k$, $k\in Z$, належать даному відрізку? Оскільки k — число ціле, будемо надавати k різних цілих значень і обчислювати x. При $k = 0$ $x = 0$ і $0\in[-1;4]$. При $k = 1$ $x = \pi$ і також $\pi\in[-1;4]$. При інших значеннях k значення πk виходять за межі відрізка $[-1;4]$. Отже, відрізку $[-1;\ 4]$ належать числа $x = 0$ (при $k = 0$) і $x = \pi$ (при $k = 1$). Тому область визначення даної функції — множина всіх дійсних чисел з відрізка $[-1;\ 4]$, крім $x = 0$ і $x=\pi$, тобто $x\in[-1;0)\cup(0;\pi)\cup(\pi;4]$ (мал. 155).

Мал. 155

Відповідь. $x\in[-1;0)\cup(0;\pi)\cup(\pi;4]$.

4 При якому значенні параметра a рівняння $3\cos x = a - 1$ має розв'язки? Знайдіть ці розв'язки.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді: $\cos x=\dfrac{a-1}{3}$.

Оскільки $-1 \leq \cos x \leq 1$, то рівняння матиме розв'язки при $-1\leq\dfrac{a-1}{3}\leq 1$, звідки $-3 \leq \alpha - 1 \leq 3$, $-2 \leq \alpha \leq 4$.

Отже, дане рівняння має розв'язки при $a\in[-2;\ 4]$. Знайдемо ці розв'язки:

$$x=\pm\arccos\frac{a-1}{3}+2\pi n,\quad n\in Z.$$

Відповідь. Якщо $a\in[-2;\ 4]$, то рівняння має розв'язки

$$\pm\arccos\frac{a-1}{3}+2\pi n,\quad n\in Z.$$

Виконайте усно

1183. Які з рівнянь є тригонометричними?

а) $\sin x + \cos x = 1$; в) $\sqrt{\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} 2x}=0$;

б) $\cos^2 x + 2x = 3$; г) $(x + 2)\cos x = 1$.

1184. Чи має розв'язки рівняння:

а) $\sin x = 1{,}5$; б) $\cos x = 1$; в) $\operatorname{tg} x = 3{,}5$; г) $\operatorname{ctg} x = 0{,}5$; ґ) $\sin x = \pi$?

Розв'яжіть рівняння (1185–1186).

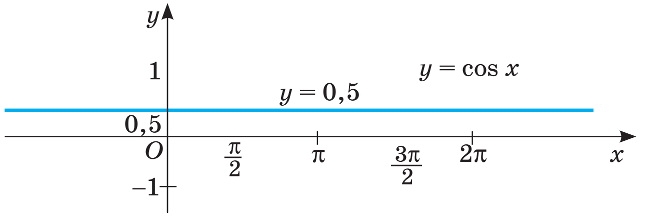
1185. а) $\sin x = 1$; б) $\cos x = -1$; в) $\operatorname{tg} x = 0$; г) $\operatorname{ctg} x = 1$.

1186. а) $\sin x = -1$; б) $\cos x = 0$; в) $\operatorname{tg} x = 1$; г) $\operatorname{ctg} x = 0$.

1187. При яких значеннях параметра a рівняння не має розв'язків:
а) $\sin x = a$; б) $\cos x = 2a$; в) $\operatorname{tg} x = a$?

1188. При яких значеннях параметра a рівняння має розв'язки:
а) $\cos 2x = a$; б) $\sin x = 3a$; в) $\operatorname{ctg} x = a$?

1189. На малюнку 156 зображено графік функції $y = \cos x$ і пряму, рівняння якої $y = 0{,}5$. Укажіть абсциси точок їх перетину.



Мал. 156

Рівень А

Розв'яжіть рівняння (1190–1200).

1190. а) $\sin x = \frac{1}{2}$; в) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ґ) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
б) $\sin x = 0$; г) $\sin x = 1$; д) $\sin x = -1$.

1191. а) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$; ґ) $\sin 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
б) $\sin \frac{x}{4} = -1$; г) $\sin 4x = 1$; д) $2\sin 3x = 0$.

1192. а) $\cos x = \frac{1}{2}$; в) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ґ) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
б) $\cos x = 0$; г) $\cos x = -1$; д) $\cos = 1$.

1193. а) $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos 4x = \frac{1}{2}$; ґ) $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
б) $\cos 7x = 1$; г) $\cos \frac{x}{4} = 1$; д) $2\cos 4x = 0$.

1194. а) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; ґ) $\operatorname{tg} x = 1$;
б) $\operatorname{ctg} x = 1$; г) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; д) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1195. а) $2\sin x = \sqrt{3}$; в) $3\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; ґ) $2\cos x = 1$;
б) $2\cos x - \sqrt{2} = 0$; г) $\operatorname{ctg} x - \sqrt{3} = 0$; д) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$.

1196. а) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$; в) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$; ґ) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$;
б) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$; г) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$; д) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

1197. а) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$; в) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; ґ) $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1=0$;

б) $\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$; г) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $2\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}=0$.

1198. а) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$; ґ) $\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$;

б) $\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1$; г) $3\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$; д) $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

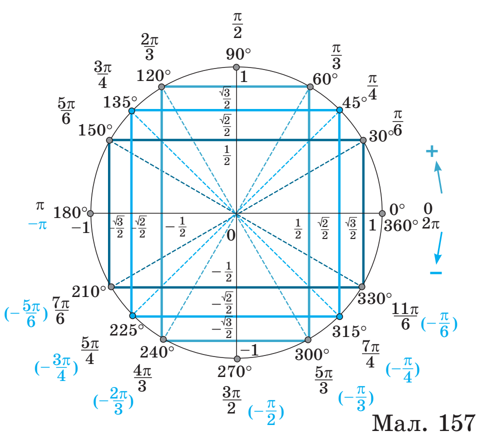
1199. а) $\sin 2x=-\frac{1}{2}$; в) $\sin\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ґ) $\sin 3x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos 2x=-\frac{1}{2}$; г) $\cos\frac{x}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $2\cos 3x=-\sqrt{3}$.

1200. а) $2\sin(x+1)=-1$; в) $2\sin 4x=-\sqrt{3}$; ґ) $\sqrt{2}+2\sin 5x=0$;

б) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{6}$; г) $2+\sin(4x-1)=0$; д) $4\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=8$.

1201. **Практичне завдання.** На цупкому папері зобразіть модель «тригонометричного кола» (мал. 157). За його допомогою ви зможете швидко і впевнено розв'язувати простіші тригонометричні рівняння. Наприклад, $\sin x=0{,}5$. Запишіть кілька рівнянь та їх розв'язки, що подані на малюнку 157.



Мал. 157

Рівень Б

Розв'яжіть рівняння (1202–1209).

1202. а) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=-1$; в) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{3}\right)=-\sqrt{2}$; ґ) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\sqrt{3}$;

б) $3\operatorname{ctg}(2x+1)=\sqrt{3}$; г) $2\cos\left(-2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$; д) $2\sin\left(-4x-\frac{\pi}{8}\right)=-\sqrt{2}$.

1203. а) $2\sin^2 x=1$; б) $2\cos^2 2x=2$; в) $3\operatorname{tg}^2 x-1=0$.

1204. а) $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=1$; б) $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=6$; в) $1-2\sin^2(4x-1)=0$.

1205. а) $\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$; б) $\cos^2(1-4x)=-2$; в) $3-4\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$.

1206. а) $(\sin x+1)(2\cos x-1)=0$; г) $(2\sin x-\sqrt{2})(2\cos x+\sqrt{2})=0$;
б) $(\operatorname{tg} x+1)(\operatorname{ctg} x-1)=0$; ґ) $\sin x(\operatorname{tg} x-\sqrt{3})=0$;
в) $\cos x(\operatorname{tg} x+\sqrt{3})=0$; д) $(2\sin x-1)(\cos x-1)=0$.

1207. а) $2\sin x\cos x=1$; в) $\cos^4 x-\sin^4 x=\frac{1}{2}$; ґ) $\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$;
б) $\sin x+\cos x=1$; г) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$; д) $\cos 5x\cos 3x+\sin 5x\sin 3x=-1$.

1208. а) $|\sin x|=1$; б) $|\cos x|=1$; в) $|\operatorname{tg} x|=1$.

1209. а) $2|\sin 2x|=1$; б) $2\left|\cos\frac{x}{3}\right|=1$; в) $3|\operatorname{tg} x|=1$.

1210. При яких значеннях параметра a число $x=\frac{\pi}{6}$ є коренем рівняння:
а) $\sin x=a+2$; б) $4\cos 2x=a^2-2$; в) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=a^2-a-1{,}5$?

1211. Укажіть координати точок перетину графіків функцій $y=\operatorname{tg} x$ і $y=-1$.

1212. Висота припливу ($H(t)$, у метрах) над середнім рівнем моря у пункті M моделюється приблизно такою формулою $H(t)=3\sin\frac{\pi t}{3}$, де t — кількість годин після півночі, $0\le t\le 24$. Установіть, коли висота припливу дорівнювала 1,5 м.

Рівень В

1213. Скільки коренів рівняння належать проміжку $[0;\ 2\pi]$; $[1;\ 7]$:
а) $\sin 2x=\frac{1}{2}$; б) $\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg}\frac{x}{3}=1$?

1214. Скільки коренів рівняння належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$; $[-1;\ 6]$:
а) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $2\cos x=\sqrt{2}$; в) $\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}$?

1215. Знайдіть (у градусах) найменший додатний корінь рівняння:
а) $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$; в) $2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=-1$;
б) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$; г) $\sin^2 2x-\cos^2 2x=-1$.

Знайдіть область визначення функції (1216–1217).

1216. а) $\frac{3x}{\cos x}$; б) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sin 2x}$; в) $\frac{\operatorname{tg} x}{2(x^2+1)}$.

1217. а) $\frac{\sqrt{x^2-4}}{2+\cos x}$; б) $\frac{\sqrt{16-x^2}}{2\sin x}$; в) $\frac{\sqrt{9-x^2}}{\operatorname{tg} x}$.

Розв'яжіть рівняння (1218–1219).

> «Цифри не керують світом, але вони показують, як світом керують».
>
> Й. В. Гете

1218. а) $\sin(2\pi\cos x)=1$; в) $\cos(\pi\sin x)=-\frac{1}{2}$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)=1$; г) $\operatorname{ctg}(2\pi\cos x)=0$.

1219. а) $\cos\frac{\pi x}{2}\sqrt{12-x^2}=0$; б) $\sin\pi x\sqrt{18-x^2}=0$.

1220. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $|\sin x|=-x^2$; б) $|\cos x|=|x|+1$.

1221. При яких значеннях параметра a рівняння має розв'язки? Знайдіть ці розв'язки:

а) $2\sin 3x = a + 3$; в) $3a\cos 2x = a - 1$; ґ) $\cos(2x + 1) = 2a + 1$;

б) $\cos^2 x = a$; г) $\sin^2 x = a$; д) $3\cos(x + 2) = 4 - 2a$.

1222. При яких значеннях параметра a рівняння:

а) $(2\sin 3x-1)(\sin 3x-a)$ має три корені на відрізку $\left[\frac{2\pi}{3};\ \pi\right]$;

б) $(2\cos 3x-1)(\cos 3x-a^2+4)$ має п'ять коренів на відрізку $\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}\right]$?

1223. *Відкрита задача.* Для кожного значення параметра a знайдіть кількість коренів рівняння $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\cdot\cos x=a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$ на проміжку ... .

Вправи для повторення

1224. Спростіть вираз $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$.

1225. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases}3(2+x)+4x<5x+16,\\ 2(3x-1)<3(4x+1)+7;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x>3-\dfrac{13x-2}{11},\\ 3+2x-x^2\ge 0.\end{cases}$

1226. У 100 г апельсина вітаміну С у 10 разів менше, а в 100 г лимонів — у 15 разів менше, ніж у 100 г чорної смородини. Разом в 1 кг чорної смородини, 1 кг апельсинів і 1 кг лимонів міститься 3 г 500 мг вітаміну С. Скільки вітаміну С міститься:

а) у 100 г лимона;
б) у 100 г апельсина;
в) у 100 г чорної смородини;
г) у 5 кг апельсинів і 3 кг лимонів;
ґ) в 1 кг чорної смородини?

§ 24 Основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь

Trigonometric Equations Solving Main Methods

Розв'язування складніших тригонометричних рівнянь зводиться до найпростіших. Для цього використовують тригонометричні формули та алгебраїчні перетворення. Якогось універсального методу розв'язування тригонометричних рівнянь не існує. Найчастіше їх розв'язують, використовуючи метод заміни, метод розкладання на множники та метод перетворення тригонометричних виразів за відомими формулами.

1. Заміна змінної. Зробивши у тригонометричному рівнянні заміну змінної, його можна звести до алгебраїчного рівняння, спосіб розв'язання якого відомий.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $2\cos^2 x + 7\cos x - 4 = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння квадратне відносно $\cos x$. Зробимо заміну $\cos x = t$, $t \in [-1; 1]$. Отримаємо рівняння $2t^2 + 7t - 4 = 0$, корені якого $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = -4$. Оскільки $t_2 \notin [-1; 1]$, то залишилося розв'язати тільки одне рівняння: $\cos x = \frac{1}{2}$. Множина його розв'язків:

$$x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n \text{ або } x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Відповідь. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $2\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння містить дві тригонометричні функції: $\sin x$ і $\cos x$. Користуючись формулою $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, можемо перейти до рівняння відносно косинуса:

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x + 1 = 0; \ 2 - 2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0;$$
$$2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0.$$

Зробивши заміну $\cos x = t$, отримаємо квадратне рівняння $2t^2 + t - 3 = 0$, корені якого $t_1 = -\frac{3}{2}$, $t_2 = 1$. Рівняння $\cos x = -\frac{3}{2}$ коренів не має. А рівняння $\cos x = 1$ має множину коренів $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

Відповідь. $2\pi n$, $n \in Z$.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x = 2$.

Розв'язання. Щоб звести дане рівняння до однієї тригонометричної функції, скористаємося формулою $\mathrm{ctg}\, x = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x}$. Отримаємо рівняння

$\operatorname{tg} x+\frac{1}{\operatorname{tg} x}=2$. Зробимо заміну $\operatorname{tg} x = t$ і отримаємо рівняння $t+\frac{1}{t}=2$, яке при $t \neq 0$ можна записати у вигляді: $t^2 - 2t + 1 = 0$ або $(t - 1)^2 = 0$, звідси $t = 1$. Тоді $\operatorname{tg} x = 1$, а $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$.

Відповідь. $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$.

2. Однорідні рівняння відносно синуса і косинуса. Так називають рівняння виду $a\sin^n x + b\sin^{n-1} x \cos x + \ldots + c\cos^n x = 0$, які після ділення обох частин на $\cos^n x$ ($\sin^n x$) можна звести до рівняння відносно $\operatorname{tg} x$ ($\operatorname{ctg} x$).

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $\sin x + \cos x = 0$.

Розв'язання. Тут $\cos x$ і $\sin x$ одночасно не дорівнюють нулю, бо якщо $\cos x = 0$, то $\sin x \neq 0$ і навпаки. Тому можемо поділити обидві частини рівняння на $\cos x$. Отримаємо рівняння $\operatorname{tg} x + 1 = 0$ або $\operatorname{tg} x = -1$, звідси $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$.

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

Розв'язання. Поділимо ліву і праву частини рівняння на $\cos^2 x \neq 0$. Отримаємо $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 = 0$.

Зробимо заміну $\operatorname{tg} x = t$ й отримаємо рівняння $t^2 - t - 2 = 0$; $t_1 = 2$; $t_2 = -1$. Тоді $\operatorname{tg} x = 2$ або $\operatorname{tg} x = -1$.

Розв'яжемо ці рівняння: $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in Z$, або $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$.

Відповідь. $\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in Z$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$.

3. Розкладання на множники

Приклад 6. Розв'яжіть рівняння $\sin x - \sin x \operatorname{tg} x = 0$.

Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники, винісши за дужки $\sin x$. Маємо: $\sin x\,(1 - \operatorname{tg} x) = 0$. Тоді $\sin x = 0$ або $1 - \operatorname{tg} x = 0$.

Перше рівняння має розв'язки $x = \pi n,\ n \in Z$, а друге рівняння запишемо у вигляді $\operatorname{tg} x = 1$ й отримаємо розв'язки $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$.

Відповідь. $\pi n,\ n \in Z$; $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$.

4. Перетворення рівняння за тригонометричними формулами

Приклад 7. Розв'яжіть рівняння $\sin x + \sin 3x = 0$.

Розв'язання. Скористаємося формулою суми синусів і перетворимо ліву частину рівняння в добуток. Отримаємо:

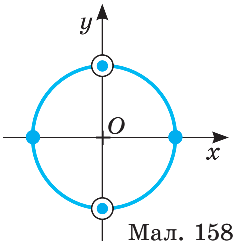
$$2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}=0 \text{ або } 2\sin 2x \cos x = 0.$$

Тоді $\sin 2x = 0$ або $\cos x = 0$. Розв'яжемо кожне з рівнянь.

$$\sin 2x = 0:\ 2x = \pi k,\ x=\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$$

$$\cos x = 0:\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$$

Кожне зі знайдених значень x є розв'язком рівняння. Але якщо ці розв'язки позначити на одиничному колі (мал. 158), то побачимо, що множина розв'язків другого рівняння (порожні кружечки) є підмножиною розв'язків першого рівняння (зафарбовані кружечки). Тому загальний розв'язок можна записати у вигляді: $x=\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$



Мал. 158

Відповідь. $\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$

Приклад 8. Розв'яжіть рівняння $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1{,}5.$

Розв'язання. Домножимо дане рівняння на 2:

$2\cos^2 x + 2\cos^2 2x + 2\cos^2 3x = 3.$

Скористаємося формулою пониження степеня $1+\cos 2x=2\cos^2 x$ і отримаємо рівняння:

$$1 + \cos 2x + 1 + \cos 4x + 1 + \cos 6x = 3 \text{ або } \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0.$$

Згрупуємо $\cos 2x$ і $\cos 6x$ та застосуємо формулу суми косинусів:

$$(\cos 2x + \cos 6x) + \cos 4x = 0;\ 2\cos\frac{2x+6x}{2}\cos\frac{2x-6x}{2}+\cos 4x=0;$$

$$2\cos 4x\cos 2x + \cos 4x = 0 \text{ або } \cos 4x\,(2\cos 2x + 1) = 0.$$

Тоді $\cos 4x = 0$ або $2\cos 2x + 1 = 0$.

Розв'яжемо кожне з отриманих рівнянь.

$$\cos 4x = 0:\ 4x=\frac{\pi}{2}+\pi n \text{ або } x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z.$$

$$2\cos 2x + 1 = 0 \text{ або } \cos 2x=-\frac{1}{2},$$

звідки $2x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n,\ n\in Z$ або $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$

Відповідь. $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z;\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$

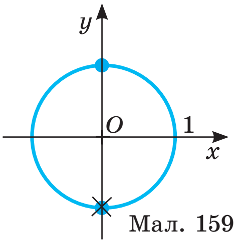
5. Зведення рівняння до рівносильної системи

Приклад 9. Розв'яжіть рівняння $\frac{\cos x}{1+\sin x}=0.$

Розв'язання. Враховуючи умови рівності дробу нулю, отримаємо систему:

$$\begin{cases}\cos x=0,\\ 1+\sin x\neq 0\end{cases} \text{ або } \begin{cases}\cos x=0,\\ \sin x\neq -1,\end{cases} \text{ звідки } \begin{cases}x=0{,}5\pi+\pi n,\ n\in Z,\\ x\neq -0{,}5\pi+2\pi n,\ n\in Z.\end{cases}$$

Позначимо відповідні точки на одиничному колі (мал. 159). З малюнка видно, що дане рівняння задовольняють тільки значення $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in Z.$



Мал. 159

Відповідь. $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in Z.$

Хочете знати ще більше?

Іноді доводиться розв'язувати не тільки тригонометричні рівняння, а і їх системи.

Приклад 1. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}\sin x+2\cos y=2,\\ \sin x-2\cos y=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sin x+\sin y=1,\\ x+y=\pi.\end{cases}$

Розв'язання. а) Додамо почленно рівняння системи. Маємо:

$$2\sin x = 2, \text{ або } \sin x = 1, \text{ звідки } x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in Z.$$

Віднімемо друге рівняння системи від першого:

$$4\cos y = 2,\ \ \cos y=\frac{1}{2},\ \ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n_1,\ \ n_1\in Z.$$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n_1\right)$, де $n\in Z$; і $n_1\in Z$.

б) З другого рівняння системи виразимо y і підставимо у перше рівняння.

Отримаємо систему: $\begin{cases}y=\pi-x,\\ \sin x+\sin(\pi-x)=1.\end{cases}$

За формулами зведення $\sin(\pi - x) = \sin x$. Тоді:

$$\begin{cases}y=\pi-x,\\ \sin x+\sin x=1\end{cases} \text{ або } \begin{cases}y=\pi-x,\\ 2\sin x=1,\end{cases} \text{ звідки } \begin{cases}y=\pi-x,\\ \sin x=0{,}5.\end{cases}$$

Множину розв'язків рівняння $\sin x=0{,}5$ запишемо у вигляді

$$x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \ x_2=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \ n\in Z.$$

Тоді $y_1=\pi-\frac{\pi}{6}-2\pi n=\frac{5\pi}{6}-2\pi n,\ \ y_2=\pi-\frac{5\pi}{6}-2\pi n=\frac{\pi}{6}-2\pi n,\ \ n\in Z.$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}-2\pi n\right)$, де $n\in Z$; $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}-2\pi n\right)$, де $n\in Z$.

Примітка. У відповіді до вправи а) числа n і n_1 можуть бути різними. Записавши відповідь у вигляді $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, ми втратили б безліч розв'язків. А відповідь $x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \ y_1=\frac{5\pi}{6}-2\pi n_1$ до вправи б) була б неправильною, бо ці значення при $n\neq n_1$ дану систему не задовольняють.

Перевірте себе

1. Які тригонометричні рівняння належать до найпростіших?
2. Які методи розв'язування тригонометричних рівнянь ви знаєте?
3. Як розв'язують однорідні рівняння відносно синуса і косинуса?
4. Як використовують алгебраїчні методи для розв'язування тригонометричних рівнянь?

Виконаємо разом

1 Розв'яжіть рівняння:

а) $\cos 2x + \sin 4x = 0$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin(\pi+5x)=\cos 4x$;

в) $5\sin^2 x - 14\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 2$.

Розв'язання. а) Розкладемо $\sin 4x$ за формулою синуса подвійного кута: $\cos 2x + 2\sin 2x\cos 2x = 0$.

Тоді $\cos 2x\,(1 + 2\sin 2x) = 0$, звідси $\cos 2x = 0$ або $1 + 2\sin 2x = 0$.

З першого рівняння маємо: $2x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ або $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

Розв'яжемо друге рівняння:

$1 + 2\sin 2x = 0$ або $\sin 2x=-\frac{1}{2}$. Маємо $2x=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi k$, $k\in Z$.

Звідси $2x=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi k$, $2x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

Відповідь. а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

б) За формулами зведення $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$, $\sin(\pi + 5x) = -\sin 5x$.

Отже, маємо рівняння:
$-\sin x \cdot (-\sin 5x) = \cos 4x$ або $\sin x\sin 5x = \cos 4x$.
Перетворимо ліву частину рівняння в суму:

$$\sin x\sin 5x=\frac{1}{2}(\cos(x-5x)-\cos(x+5x))=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 6x).$$

Тоді рівняння матиме вигляд:

$\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 6x)=\cos 4x$ або $\cos 4x - \cos 6x = 2\cos 4x$, звідси

$$\cos 4x + \cos 6x = 0.$$

Перетворимо ліву частину рівняння в добуток:

$$2\cos\frac{4x+6x}{2}\cos\frac{4x-6x}{2}=0 \text{ або } 2\cos 5x\cos x = 0.$$

Тоді $\cos 5x = 0$ або $\cos x = 0$.

Розв'яжемо перше рівняння:

$$\cos 5x = 0,\ 5x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5},\ \ n \in Z.$$

Множина розв'язків другого рівняння ($x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in Z$) є підмножиною розв'язків першого. Перевірте.

Відповідь. б) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5},\ \ n \in Z.$

в) $5\sin^2 x - 14\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 2.$

Зведемо дане рівняння до однорідного рівняння другого степеня. Для цього число 2 запишемо у вигляді $2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$. Тоді рівняння матиме вигляд:

$$5\sin^2 x - 14\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) \text{ або}$$
$$3\sin^2 x - 14\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 0.$$

Поділимо дане рівняння на $\cos^2 x \neq 0$:

$$3\text{tg}^2 x - 14\text{tg}\, x - 5 = 0.$$

Зробивши заміну $\text{tg}\, x = t$, отримаємо квадратне рівняння $3t^2 - 14t - 5 = 0$, корені якого $t_1 = 5$, $t_2 = -\frac{1}{3}$. Тоді $\text{tg}\, x = 5$ або $\text{tg}\, x = -\frac{1}{3}$, звідси $x = \text{arctg}\, 5 + \pi n,\ n \in Z$ або $x = -\text{arctg}\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

Відповідь. в) $\text{arctg}\, 5 + \pi n,\ n \in Z;\ -\text{arctg}\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

2 Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо бісектриса його гострого кута відноситься до гіпотенузи як $1 : \sqrt{3}$.

Розв'язання. Нехай у ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle CAD = \angle DAB = x$ і $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (мал. 160). Тоді $\angle B = 90° - 2x$, $\angle ADB = 90° + x$. За теоремою синусів

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\sin(90° - 2x)}{\sin(90° + x)} \text{ або } \frac{AD}{AB} = \frac{\cos 2x}{\cos x}.$$

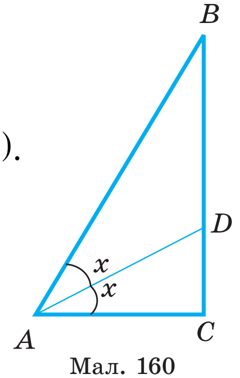
Підставимо в останню рівність дані умови. Маємо:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x},\ \ \cos x = \sqrt{3}\left(2\cos^2 x - 1\right).$$

Звідси $2\sqrt{3}\cos^2 x - \cos x - \sqrt{3} = 0$, а $\cos x = \frac{1 \pm 5}{4\sqrt{3}}$.

За змістом задачі $\cos x > 0$, тому $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = 30°$.

Відповідь. 30°, 60°, 90°.



Мал. 160

Виконайте усно

Розв'яжіть рівняння (1227–1228).

1227. а) $\cos x = 0,5$; б) $\cos x = 1$; в) $\sin x = -0,5$; г) $\sin x = -1$.

1228. а) $2\sin x = \sqrt{2}$; б) $2\cos x = \sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x = 1$; г) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

1229. Чи задовольняє значення $x = \pi$ рівняння:
а) $\sin x - 2\cos x = 2$; в) $\cos^2 x - \sin^2 2x = 1$;
б) $\operatorname{ctg} x + 2\cos x = -2$; г) $2\operatorname{tg} x + 1 = \cos x$?

1230. Скільки розв'язків має рівняння:
а) $\sin^2 x + \cos^2 x = 2$; в) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2$;
б) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 3$; г) $2\sin 2x \cos 2x = 4$?

1231. Розв'яжіть рівняння:
а) $\sin x\,(\cos^2 x + 2) = 0$; в) $\operatorname{tg} x\,(3 - \cos x) = 0$;
б) $2\sin x \cos x - 1 = 0$; г) $\cos x + \cos^3 x = 0$.

1232. Яку заміну потрібно зробити в рівнянні, щоб його розв'язати:
а) $\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$; в) $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x = 3$;
б) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$; г) $\cos^2 x + \sin x = 2$?

1233. Укажіть найбільший від'ємний корінь рівняння:
а) $2\sin x = 0$; б) $\cos 2x = 1$; в) $\operatorname{tg} x\,(1 + \cos^2 3x) = 0$; г) $\operatorname{ctg} x = 1$.

1234. Укажіть найменший додатний корінь рівняння:
а) $3\cos x = 3$; в) $\sin x\,(4 - \sin x) = 0$;
б) $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1 = 0$; г) $3\operatorname{ctg} x - \sqrt{3} = 0$.

Рівень А

Розв'яжіть рівняння (1235–1241).

1235. а) $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$; в) $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$;
б) $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0$; г) $3\operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg} x + 1 = 0$.

1236. а) $4\sin^2 x + 4\cos x - 1 = 0$; в) $2\cos^2 x - \sin x = 1$;
б) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$; г) $2\sin^2 x - 5\cos x - 4 = 0$.

1237. а) $2\cos^2 2x + 5\sin 2x + 1 = 0$; в) $2\sin^2 3x + 7\cos 3x + 2 = 0$;
б) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2,5$; г) $\operatorname{tg} 2x - 5\operatorname{ctg} 2x = 4$.

1238. а) $2\sin^2 x - \sin x = 0$; в) $\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0$;
б) $\cos x + \sin 2x = 0$; г) $\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} - \sin 2x = 0$.

1239. а) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x = 0$; в) $2\cos^2 x + \sqrt{2}\cos x = 0$;
б) $3\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0$; г) $\operatorname{ctg}^2 x + \sqrt{3}\operatorname{ctg} x = 0$.

1240. а) $\sin x + \cos x = 0$; в) $2\cos x - \sin x = 0$;
б) $\sin 2x - \cos 2x = 0$; г) $\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = 0$.

1241. а) $\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos x = 0$;
б) $\sin^2 x + 5\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 0$;
в) $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$;
г) $2\sin^2 x - 7\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 0$.

1242. Розв'яжіть рівняння (1–4). Установіть відповідність між цими рівняннями і кількістю їх розв'язків (А–Д) на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

1	$\sin 6x - \sin 4x = 0$	А	один
2	$\cos x + \cos 3x = 0$	Б	два
3	$\sin 2x + \sin 8x = 0$	В	три
4	$\cos 5x - \cos 3x = 0$	Г	чотири
		Д	п'ять

Знайдіть корені рівняння (1243–1247).

1243. а) $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$; б) $\cos x - \cos 3x + \sin x = 0$; в) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$; г) $\sin 2x + \sin 6x - \cos 2x = 0$.

1244. а) $\sin x + \operatorname{tg} x = 0$; б) $\sin x - \operatorname{tg} 2x = 0$; в) $\cos x - \operatorname{ctg} x = 0$; г) $\cos\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 0$.

1245. а) $1 + \cos x - 2\cos\frac{x}{2} = 0$; б) $1 - \cos 8x = \sin 4x$; в) $1 - \cos x - 2\sin\frac{x}{2} = 0$; г) $1 + \cos 8x = \cos 4x$.

1246. а) $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x + \cos 3x = 0$; б) $1 + \cos 2x = \operatorname{ctg} x$; в) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} + 2\cos x = 1$; г) $1 - \cos 2x = \operatorname{tg} x$.

1247. а) $2\sin x \sin 2x + \cos 3x = 0$; б) $\sin 3x \cos 2x = \sin 5x$; в) $\cos 7x \cos 3x = \cos 10x$; г) $\sin 3x \cos 5x = \sin 8x$.

Рівень Б

Розв'яжіть рівняння (1248–1254).

1248. а) $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$; б) $1 + \sin 2x = (\sin 3x + \cos 3x)^2$; в) $3 + \cos^4 x - \sin^4 x = 5\cos x$; г) $1 + \sin 6x = (\sin x + \cos x)^2$.

1249. а) $\cos x + \cos 5x = \cos 3x + \cos 7x$; б) $\sin x + \sin 3x = \sin 7x + \sin 5x$; в) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 5x = \cos 9x$; г) $\cos x - \cos 3x = 2\sqrt{3}\sin^2 x$.

1250. а) $\cos(\pi - 5x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 7x\right) = \cos(\pi + 6x)$;
б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$;
в) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 5\sin(\pi + x) = 4$;
г) $(1 + \cos(\pi - 2x))\sin 2x = \sin^2(2\pi + x)$.

«Рівняння — це золотий ключ, що відчиняє усі математичні сезами».
С. Коваль

1251. а) $6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$;
б) $4\sin^2 x - 7\sin x \cos x + 15\cos^2 x = 3$;
в) $5\cos^2 x - 3\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 2$;
г) $5\sin^2 x - 0{,}5\sin 2x - 4\cos^2 x = 1$.

1252. а) $\sin^2 x + \sin^2 3x = 1$; в) $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = 0{,}5$;
б) $\cos^2 3x + \cos^2 5x = 1$; г) $\cos^2 2x + \cos^2 x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.

1253. а) $\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x$;
б) $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$;
в) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)\sin(\pi-5x)=\sin 5x\cos 7x$;
г) $\sin x \cos 2x = \sin 3x \cos 4x$.

1254. а) $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = 0$; в) $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = 0$;
б) $2(1 - \cos 2x) = \operatorname{tg} x$; г) $\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{ctg} x = 0$.

Знайдіть корені рівняння (1255–1259).

1255. а) $\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x}$; б) $\frac{\sin x-\sin 2x}{1-\cos x}=0$; в) $\frac{\cos x+\cos 3x}{1+\sin x}=0$; г) $\frac{2\sin^2 x+3\sin x}{1-\cos x}=0$.

1256. а) $\frac{\sin 2x\cos 3x-\cos 2x\sin 3x}{1+\cos x}=0$; в) $\frac{\cos 4x\cos 2x+\sin 4x\sin 2x}{1-\sin 2x}=0$;
б) $\frac{\sin 2x+\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x$; г) $\frac{1+2\cos x-\sin^2 x}{\sin x}=\operatorname{ctg} x$.

1257. а) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$; в) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2$;
б) $\cos x+\sqrt{3}\sin x=-1$; г) $3\cos x + 4\sin x = 5$.

1258. а) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin 5x$; в) $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos 3x$;
б) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\cos 5x$; г) $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin 3x$.

1259. а) $|\sin x|=|\cos x|$; б) $|\sin 3x|=|\cos x|$; в) $|\cos 4x|=|\cos 2x|$; г) $|\sin x|=|\sin 2x|$.

1260. Знайдіть найменший додатний розв'язок рівняння:
а) $\sin 2x + \sin 4x = 0$; в) $\cos 5x + \cos 3x = 0$;
б) $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x$; г) $\cos^2 x - \sin x \cos x = 0$.

1261. Знайдіть найбільший від'ємний розв'язок рівняння:
а) $\sin 3x - \sin x = 0$; в) $\cos 2x = \cos 4x + 1$;
б) $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$; г) $1-\sin 4x=(\sin x-\cos x)^2$.

Рівень В

1262. Скільки коренів рівняння міститься у проміжку [0; 6]:
а) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0{,}5$; в) $\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = -1$;
б) $\cos^2 x - 3\sin x - 1 = 0$; г) $5\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}=3$?

1263. Скільки коренів рівняння міститься у проміжку $[-0{,}5\pi; 0{,}5\pi]$:
а) $2\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x = 3$; в) $3\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$;
б) $2\cos x + 1 = 3\cos 2x$; г) $2\cos^2 x = 1$?

1264. Знайдіть суму коренів рівняння:

а) $(1+\cos 2x)\sqrt{4-x^2}=0;$ в) $(\sin x-\cos x)\sqrt{5x-x^2}=0;$

б) $\dfrac{1-2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\sqrt{10-x^2}}=0;$ г) $\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sqrt{4x-x^2}}=0.$

Розв'яжіть рівняння (1265–1266).

1265. а) $\sqrt{3}\sin x=-\sqrt{2}\cos x$; б) $\sqrt{1-\cos 2x}=\sin 2x$; в) $\sqrt{\cos x+\cos 3x}=\sqrt{2}\cos x$.

1266. а) $2\sin\dfrac{\pi x}{6}=x^2-6x+11;$ в) $\cos\dfrac{\pi(x-4)}{2}=-x^2-4x-5;$

б) $\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\,\pi x}{1+\mathrm{tg}^2\,\pi x}=x^2+8x+17;$ г) $\sin\pi x+3=|x-2|+|x+2|.$

При яких значеннях параметра *a* рівняння має розв'язки (1267–1268).

1267. а) $\cos^2 x - \sin^2 x = a + 3;$ б) $\sin x\cos 3x+\cos x\sin 3x=\dfrac{a+1}{a-1}.$

1268. а) $\cos^2 x - (3a + 1)\cos x + 2a^2 + a = 0;$

б) $\sin^4 x - (a + 2)\sin^2 x - (a + 3) = 0.$

1269. Для кожного значення параметра a знайдіть кількість розв'язків рівняння на заданому проміжку:

а) $2\sin^2 x-(2a+3)\sin x+a+1=0$ на $[2\pi;\ 3\pi];$

б) $2\cos^2 x-(2a+3)\cos x-a+2=0$ на $[-0,5\pi;\ 0,5\pi].$

1270. При яких значеннях параметра a рівняння $4\sin^2 2x-4(a+1)\sin 2x+2a+1=0$ на відрізку $[0,5\pi;\ 1,5\pi]$ має:

а) два корені; б) три корені; в) п'ять коренів?

1271. При яких значеннях параметра a рівняння має єдиний розв'язок:

а) $(1+2|x|)a+6=a^2(2x^2+1);$ б) $4a(\cos^2\pi x-\sin^2\pi x)=12-a^2(2x^2+1).$

1272. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

а) $4\cos^2 x+4\cos x+1-a^2=0;$ б) $\sin 2x-(a+1)(\sin x+\cos x)+a+1=0.$

1273. Миттєві значення двох синусоїдальних напруг задаються формулами: $u_1 = Um\sin\omega t$; $u_2 = Um\sin(\omega t + \psi)$. Визначте перший момент часу, коли миттєві значення напруг рівні між собою.

1274. Миттєві значення сили струмів, які проходять паралельними вітками кола, задаються формулами: $i_1 = Im\sin(\omega t + \psi_1)$; $i_2 = Im\sin(\omega t + \psi_2)$. Як мають співвідноситися фази ψ_1 і ψ_2, щоб загальний струм у колі дорівнював нулю?

Розв'яжіть систему рівнянь (1275–1280).

1275. а) $\begin{cases}\sin(x+y)=0,\\ \sin(x-y)=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\mathrm{tg}(x+y)=0,\\ \mathrm{tg}(x-y)=0.\end{cases}$

1276. а) $\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{4},\\ \mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2},\\ \mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y=2.\end{cases}$

1277. а) $\begin{cases} x+y=2\pi, \\ \cos x+\cos y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3}, \\ \sin x+\sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

1278. а) $\begin{cases} \cos x-\sin y=0, \\ \cos^2 x+\sin^2 y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x+\cos y=1, \\ \sin^2 x-\cos^2 y=1. \end{cases}$

1279. а) $\begin{cases} x+y=60°, \\ \sin x\sin y=\dfrac{1}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=30°, \\ \sin x\cos y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

1280. а) $\begin{cases} \sin x\cos y=\dfrac{1}{4}, \\ \cos x\sin y=\dfrac{3}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x\cos y=\dfrac{3}{4}, \\ \cos x\sin y=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

1281. Паралельні площини відітнули від двох прямих відрізків, довжини яких відносяться як $1:\sqrt{3}$. Під якими кутами вони нахилені до площин, якщо один із цих кутів удвічі більший за другий?

1282. MA — перпендикуляр до площини трикутника ABC, $\angle AMB=\angle ACM$. Знайдіть ці кути, якщо $AB : AC = 1 : 3$.

1283. У гострокутному рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) висота BH ділить висоту AM у відношенні $2:\sqrt{3}$, рахуючи від вершини A. Знайдіть кути трикутника.

Вправи для повторення

1284. Обчисліть:

а) $\arcsin\dfrac{1}{2}+\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\operatorname{arctg}(-1)+\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$;

б) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

1285. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}-6\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}+1=0.$$

1286. Розв'яжіть нерівність:

а) $(x-1)(x+2)^2(x-1)\le 0$;

б) $\dfrac{(x^2+x-2)(x^2-6x+9)}{(x^2-x-2)(4x^2+12x+9)}\le 0.$

> «Натуральні числа — це вільні витвори людського розуму».
>
> Р. Дедекінд

§ 25 Найпростіші тригонометричні нерівності

The Simplest Trigonometric Inequalities

Тригонометричною називають нерівність, у якій невідомі містяться тільки під знаком тригонометричних функцій. Приклади тригонометричних нерівностей:

$$\sin x > \frac{1}{2},\ \cos 2x + \cos^2 2x > 0,\ \operatorname{tg} 3x \le \sqrt{3}.$$

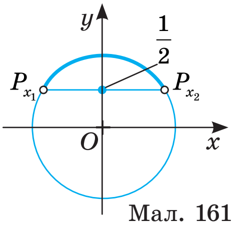
Розв'язування тригонометричних нерівностей зводиться до розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей, тобто нерівностей виду:

$$\sin x > \alpha,\ \cos x < \alpha,\ \operatorname{tg} x < \alpha,\ \operatorname{ctg} x > \alpha \text{ і т. д.}$$

Розв'язують такі нерівності на одиничному колі або використовуючи графіки тригонометричних функцій.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Знайдемо на колі точки, для яких $\sin x = \frac{1}{2}$, тобто точки, у яких ордината дорівнює $\frac{1}{2}$. Для цього проведемо пряму $y = \frac{1}{2}$, яка перетне коло в точках P_{x_1} і P_{x_2}.

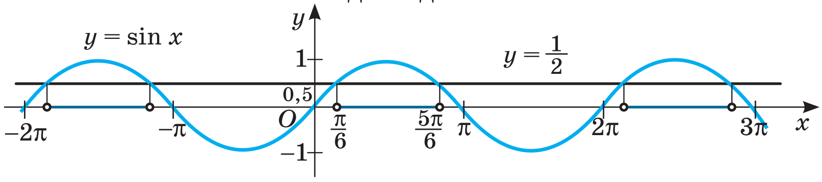


Мал. 161

Точки кола, які задовольняють нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$, лежать на дузі кола $P_{x_1}P_{x_2}$, яка розміщена вище від прямої $y = \frac{1}{2}$ (мал. 161).

Оскільки точка P_{x_1} лежить у I чверті і значення синуса в ній дорівнює $\frac{1}{2}$, то $x_1 = \frac{\pi}{6}$. Тоді $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Отже, дану нерівність задовольняє кожне з чисел проміжку $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$. Враховуючи періодичність функції $y = \sin x$, всю множину розв'язків можна записати у вигляді $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$. Або у вигляді подвійної нерівності $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Дану нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$ можна розв'язати і графічно. Для цього треба побудувати в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$ (мал. 162). Ті значення x, при яких $\sin x$ більший за $\frac{1}{2}$, утворюють безліч проміжків. Вони і становлять відповідь.



Мал. 162

Оскільки функція $y = \sin x$ набуває значень від -1 до 1, то нерівності $\sin x > 1$ і $\sin x < -1$ розв'язків не мають, а нерівності $\sin x \le 1$ і $\sin x \ge -1$ виконуються для довільного значення x.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

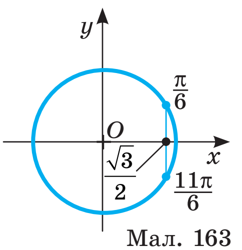
Розв'язання. Знайдемо точки одиничного кола, у яких $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Для цього проведемо пряму $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Виділимо ту частину дуги кола, для точок якої $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ (мал. 163).

Знайдемо значення у крайніх точках цієї дуги. Точці, яка лежить у I чверті, відповідає значення $\frac{\pi}{6}$, а значення у другій точці дорівнює $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$. Тоді, враховуючи періодичність функції косинус, можемо записати відповідь:

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right],\quad n \in Z \text{ або}$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le x \le \frac{11\pi}{6} + 2\pi n,\quad n \in Z.$$

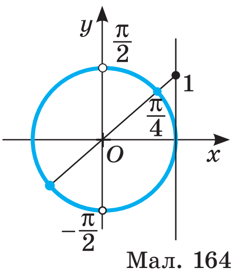


Мал. 163

Очевидно, що нерівності $\cos x > 1$ і $\cos x < -1$ розв'язків не мають, а нерівності $\cos x \le 1$ і $\cos x \ge -1$ виконуються для всіх значень x.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність $\text{tg}\, x \ge 1$.

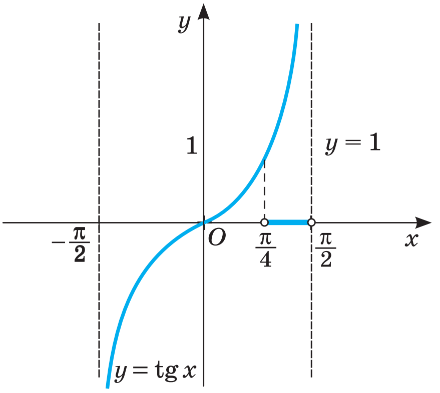
Розв'язання. Щоб розв'язати цю нерівність на одиничному колі, проведемо лінію тангенсів — пряму, яка проходить через точку (1; 0) паралельно до осі ординат (мал. 164).



Мал. 164

Позначимо на лінії тангенсів точку 1 і через неї та центр кола проведемо пряму, яка перетне коло в точках, для яких тангенс дорівнює 1. Точки, для яких $\operatorname{tg} x \geq 1$, належать виділеним дугам. Точці в I чверті відповідає кут чи число $\frac{\pi}{4}$. Враховуючи періодичність тангенса, можемо записати відповідь: $x \in \left[\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

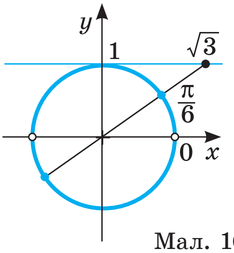
Цю нерівність можна розв'язати і графічно (мал. 165).



Мал. 165

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність $\operatorname{ctg} x \leq \sqrt{3}$.

Розв'язання. Проведемо лінію котангенсів (пряму, яка проходить через точку (0; 1), паралельну осі абсцис) і відмітимо на колі точки, для яких $\operatorname{ctg} x \leq \sqrt{3}$ (мал. 166). Оскільки $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$, якщо $x = \frac{\pi}{6}$, то, враховуючи періодичність котангенса, отримаємо відповідь: $x \in \left[\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \pi + \pi n\right)$, $n \in Z$.



Мал. 166

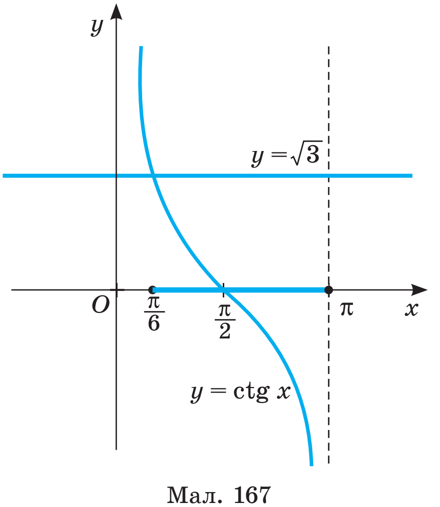
Дану нерівність можна розв'язати і графічно (мал. 167).

До розв'язування розглянутих вище найпростіших тригонометричних нерівностей зводиться розв'язування складніших нерівностей. Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 5. Розв'яжіть нерівність: $|\cos x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Оскільки обидві частини нерівності невід'ємні, то піднесемо кожну з них до квадрата. Маємо: $\cos^2 x < \frac{3}{4}$ або $\frac{1 + \cos 2x}{2} < \frac{3}{4}$, звідки $\cos 2x < \frac{1}{2}$ і $2x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.

Остаточно: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + \pi k;\ \frac{5\pi}{6} + \pi k\right)$, $k \in Z$.



Мал. 167

Приклад 6. Розв'яжіть нерівність: $4\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 3\cos^2 x > 2.$

Розв'язання. Оскільки $2 = 2\cdot\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$, то

$$4\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 3\cos^2 x > 2\sin^2 x + 2\cos^2 x \text{ або}$$
$$2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x > 0.$$

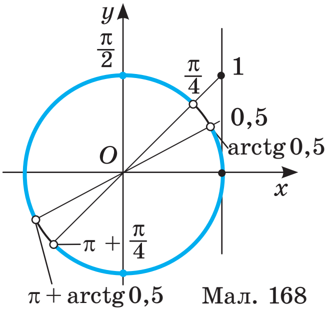
1) Перевіримо, чи будуть розв'язками нерівності точки, де $\cos^2 x = 0$. За цієї умови $\sin^2 x = 1$, а нерівність $4 > 2$ — правильна.

Отже, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ — розв'язок заданої нерівності.

2) Якщо $\cos^2 x \neq 0$, то поділимо обидві частини нерівності на $\cos^2 x$. Маємо: $2\mathrm{tg}^2 x - 3\mathrm{tg} x + 1 > 0$, звідки $\mathrm{tg}\ x < 0,5$ або $\mathrm{tg}\ x > 1$.

Розв'яжемо отримані нерівності (мал. 168). Враховуючи результат пункту 1, маємо:

$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi + \pi k\right),\ k \in Z.$$



Мал. 168

Перевірте себе

1. Які нерівності називають тригонометричними?
2. Наведіть приклади тригонометричних нерівностей.
3. Як розв'язати нерівність $\sin x > a$, $|a| < 1$?
4. Скільки розв'язків має нерівність $\sin x > 1$, $\cos x < -1$?

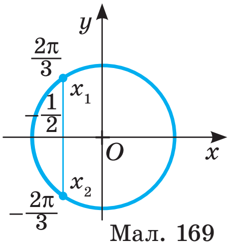
Виконаємо разом

1 Розв'яжіть нерівність:

а) $\cos x \geq -\frac{1}{2}$; б) $\sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0.$

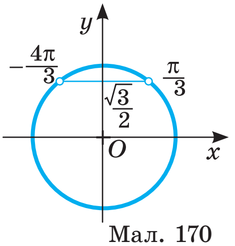
Розв'язання. а) $\cos x \geq -\frac{1}{2}$. Розв'яжемо дану нерівність на одиничному колі. Проведемо пряму $x = -\frac{1}{2}$ і виділимо ту частину кола, точки якої задовольняють дану нерівність (мал. 169). Оскільки $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, то $x_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, а $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$.

Тоді $x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right],\ n \in Z.$



Мал. 169

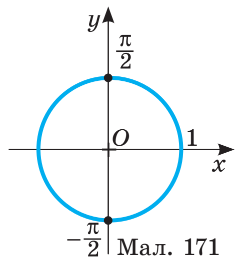
б) $\sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Знайдемо точки на одиничному колі, які задовольняють дану нерівність (мал. 170). Маємо:



Мал. 170

$$-\frac{4\pi}{3}+2\pi n<2x<\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z;\quad -\frac{2\pi}{3}+\pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in Z.$$

Отже, $x\in\left(-\frac{2\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right),\quad n\in Z.$



Мал. 171

в) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\geq 0$. З малюнка 171 видно, що:

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi n\leq 2x-\frac{\pi}{6}\leq\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in Z.$$

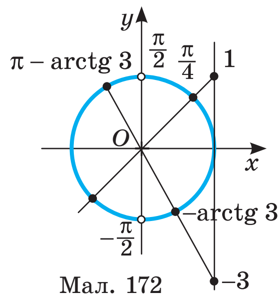
Розв'яжемо дану подвійну нерівність:

$$-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+2\pi n\leq 2x\leq\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in Z$$

або $-\frac{\pi}{3}+2\pi n\leq 2x\leq\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z.$

Звідси $-\frac{\pi}{6}+\pi n\leq x\leq\frac{\pi}{3}+\pi n,\quad n\in Z$

або $x\in\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right],\quad n\in Z.$



Мал. 172

2 Розв'яжіть нерівність: а) $\mathrm{tg}^2\,x+2\mathrm{tg}\,x-3\geq 0$;
б) $\sqrt{\mathrm{tg}\,x}(x^2-7x+6)\leq 0$.

Розв'язання. а) $\mathrm{tg}^2\,x+2\mathrm{tg}\,x-3\geq 0$. Зробимо заміну $\mathrm{tg}\,x=t$ й отримаємо нерівність $t^2+2t-3\geq 0$. Розв'яжемо цю квадратичну нерівність:

$t^2+2t-3=0$, звідки $t_1=-3$, $t_2=1$, тому $t\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$.

Маємо:

$$\left[\begin{aligned}&t\leq -3,\\&t\geq 1\end{aligned}\right.\quad\text{або}\quad\left[\begin{aligned}&\mathrm{tg}\,x\leq -3,\\&\mathrm{tg}\,x\geq 1.\end{aligned}\right.$$

Розв'яжемо отриману сукупність нерівностей на одиничному колі (мал. 172).

Тоді: $x\in\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi-\mathrm{arctg}\,3+\pi n\right],\quad n\in Z.$

б) Нерівність $\sqrt{\mathrm{tg}\,x}(x^2-7x+6)\leq 0$ рівносильна сукупності:

$$\left[\begin{aligned}&\mathrm{tg}\,x=0,\\&\begin{cases}\mathrm{tg}\,x>0,\\x^2-7x+6\leq 0,\end{cases}\end{aligned}\right.\quad\text{звідки}\quad\left[\begin{aligned}&x=\pi n,\quad n\in Z,\\&\begin{cases}x\in(\pi k;\ 0{,}5\pi+\pi k),\ k\in Z,\\x\in[1;\ 6]\end{cases}\end{aligned}\right.\ \text{або}\ \left[\begin{aligned}&x=\pi n,n\in Z,\\&x\in[1;0{,}5\pi)\cup[\pi;1{,}5\pi).\end{aligned}\right.$$

Остаточно маємо: $x\in[1;\ 0{,}5\pi)\cup[\pi;\ 1{,}5\pi)\cup\{\pi n\},\ n\in Z,\ n\neq 1.$

Виконайте усно

1287. Укажіть множину розв'язків нерівності $\sin x\leq 1$.

1288. Укажіть множину розв'язків нерівності: $\cos x<-1$; $\cos x\geq -1$.

1289. Знайдіть розв'язки нерівності:
а) $\sin x \geq 1$; б) $\cos x \leq -1$; в) $\sin x \leq -1$; г) $\cos x \geq 1$.

1290. Розв'яжіть нерівність:
а) $\cos x < 0$; б) $\cos x > 0$; в) $\sin x < 0$; г) $\sin x > 0$.

1291. Яка з нерівностей не має розв'язків і чому:
а) $2\sin^2 x \geq 1$; б) $3\cos x \geq 6$; в) $|\cos x| \geq 1$; г) $\operatorname{tg}^2 x \geq 4$?

Рівень А

Розв'яжіть нерівність (1292–1307).

1292. а) $\sin x < \frac{1}{2}$; б) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin x \geq 0$.

1293. а) $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos x > \frac{1}{2}$; г) $\cos x < 0$.

1294. а) $\operatorname{tg} x \leq 1$; б) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\operatorname{tg} x \geq 0$.

1295. а) $\operatorname{ctg} x \geq 1$; б) $\operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\operatorname{ctg} x < 1$; г) $\operatorname{ctg} x \leq 0$.

1296. а) $2\sin x - 1 > 0$; б) $\sin x + 2 < 0$; в) $\sqrt{3} - 2\cos x < 0$; г) $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} > 0$.

1297. а) $\sin 2x > \frac{1}{2}$; б) $\cos\frac{x}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin\frac{x}{3} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos 3x \geq \frac{1}{2}$.

1298. а) $3\operatorname{tg} 2x > \sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{4} \leq 1$; в) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} \leq 1$; г) $\operatorname{ctg} 4x \geq \sqrt{3}$.

1299. а) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \geq \frac{1}{2}$.

1300. а) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin\left(\frac{x}{8} - \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}$.

1301. а) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$; б) $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \leq 1$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{6} - \frac{\pi}{6}\right) \leq \sqrt{3}$.

1302. а) $\sin x > -\frac{1}{2}$; б) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{tg} \geq -\sqrt{3}$.

1303. а) $\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x \leq \frac{1}{2}$.

1304. а) $\cos^2 x - \sin^2 x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x \cos x < \frac{1}{4}$.

1305. а) $\sin^2 x + 4\sin x < 0$; б) $\cos^2 x + 5\cos x \geq 0$.

1306. а) $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} \geq 1$; б) $\frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x} \leq \sqrt{3}$.

1307. а) $\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\le\frac{1}{2}$; б) $\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1308. Знайдіть область визначення функції:

а) $\sqrt{\operatorname{tg}x+1}$; б) $\sqrt[4]{1-2\cos x}$; в) $\frac{3x}{\sqrt{2\sin x-\sqrt{2}}}$; г) $\frac{x+1}{\sqrt[4]{\sqrt{3}-\operatorname{ctg}x}}$.

Рівень Б

Розв'яжіть нерівності (1309–1316).

1309. а) $\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\ge-\frac{1}{2}$; в) $2\cos\left(\frac{x}{2}-\pi\right)\le\sqrt{3}$;

б) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)>-\sqrt{2}$; г) $2\sin\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)<-\sqrt{3}$.

1310. а) $4\cos^2 t\le 1$; б) $2\sin^2 t\le 1$; в) $\operatorname{tg}^2 x>3$; г) $3\operatorname{ctg}^2 x\ge 1$.

1311. а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\cos\frac{x}{2}<\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}\le\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)<1$.

1312. а) $|\sin x|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $|\sin 2x|\le\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $|\cos x|>\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $|\operatorname{tg}3x|\le\sqrt{3}$.

1313. а) $(2+\cos 3x)\sin 2x\ge 0$; в) $(1+\cos 4x)(2-2\cos 3x)\le 0$;

б) $(3-\cos x)(\operatorname{tg}2x-\sqrt{3})\ge 0$; г) $(2\cos^2 x+1)(\operatorname{ctg}x+\sqrt{3})\le 0$.

1314. а) $2\sin^2 x-7\sin x+3>0$; в) $2\cos^2 x+3\cos x-2\le 0$;

б) $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x\ge 0$; г) $\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}x-2\ge 0$.

1315. а) $3\cos^2 x\ge 7(\sin x+1)$; в) $2\sin^2 x+9\cos x+3\ge 0$;

б) $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x\ge 2{,}5$; г) $\operatorname{ctg}^2 x-2\operatorname{ctg}x-3\le 0$.

1316. а) $\sin^2 x-2\sin x\cos x-3\cos^2 x\ge 0$; в) $\sin x-\cos x\ge 0$;

б) $3\sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x\le 0$; г) $\sin x+\cos x\le 0$.

Розв'яжіть нерівність графічно (1317–1319).

1317. а) $2\cos x>1$; б) $\sin x\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\operatorname{tg}x>\sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg}x\le -1$.

1318. а) $\cos x\le-\frac{1}{2}$; б) $\sin x\ge-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $3\operatorname{tg}\le\sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg}x>\sqrt{3}$.

1319. а) $\cos x>\frac{1}{4}$; б) $\sin x<\frac{1}{3}$; в) $\operatorname{tg}x\ge 2$; г) $\operatorname{ctg}x<\frac{1}{2}$.

Розв'яжіть нерівності (1320–1321).

1320. а) $2\sin^2 x-5|\sin x|+2\ge 0$; в) $2\cos^2 x+3|\cos x|-2\ge 0$;

б) $|\sin x|<|\cos x|$; г) $|\sin x|>|\cos x|$.

1321. а) $\sin 4x+\cos 4x\operatorname{ctg}2x>1$; в) $\sin^6 x+\cos^6 x<\frac{7}{16}$;

б) $\cos 2x+\cos^2 x\le 1$; г) $\cos 2x\cos x<\cos 3x$.

Рівень В

Знайдіть область визначення функції (1322–1323).

1322. а) $y=\sqrt{\cos x}-\dfrac{2x}{\sqrt{\sin x}}$; б) $y=\sqrt{2\cos x-1}+\dfrac{\operatorname{ctg}2x}{x^2+1}$; в) $y=\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{1-2\sin x}}$;

г) $y=\dfrac{\operatorname{ctg}x}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}$; г) $y=\sqrt{2\cos x-\sqrt{3}}+\sqrt{2\cos x}$; д) $y=\sqrt{2\sin x-1}-\sqrt{\sqrt{2}-2\sin x}$.

1323. а) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{(1-x)(x-5)}$; б) $y=\sqrt{-\cos x}+\sqrt{8x-15-x^2}$.

Розв'яжіть нерівність (1324–1325).

1324. а) $\sin x\sqrt{4-x^2}\le 0$; в) $\cos x\sqrt{2-x-x^2}\ge 0$;

б) $\operatorname{tg}x\sqrt{2-x-x^2}\ge 0$; г) $\operatorname{ctg}x\sqrt{4-x^2}\le 0$.

1325. а) $\sqrt{6x-x^2-8}\left(2\sin^2 x+\sin x\right)\ge 0$; в) $\sqrt{4+3x-x^2}\left(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x\right)\ge 0$;

б) $\sqrt{\operatorname{tg}x}\left(x^2-3x-4\right)\le 0$; г) $\sqrt{\sin x}\left(x^2-7x+6\right)\le 0$.

Розв'яжіть систему нерівностей (1326–1327).

1326. а) $\begin{cases}\sin x\ge\dfrac{1}{2},\\ \cos x>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\cos x\le\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x\ge 0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}\operatorname{tg}x\le 1,\\ \sin x>\dfrac{1}{2};\end{cases}$ г) $\begin{cases}\sin x<\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \operatorname{tg}x>0.\end{cases}$

1327. а) $\begin{cases}\operatorname{tg}x\ge 0,\\ \cos x\le\dfrac{1}{2};\end{cases}$ б) $\begin{cases}\cos x\ge-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin x<\dfrac{\sqrt{3}}{2};\end{cases}$ в) $\begin{cases}\operatorname{tg}x\le 0,\\ \operatorname{ctg}x\ge-\sqrt{3};\end{cases}$ г) $\begin{cases}\cos x<\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x\ge-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$

1328. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $\cos^2 x-(a-2)\cos x-2a\ge 0$.

1329. При яких значеннях параметра a нерівність виконується для довільного дійсного числа:

а) $a\cos x-2<0$; в) $a\sin x+1>0$;

б) $(2a-5)\sin x\le 1$; г) $(a+3)\cos x-1\le 0$?

Вправи для повторення

1330. Розв'яжіть рівняння:

а) $1+\sin 2x=(\cos 3x+\sin 3x)^2$; б) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=\cos 3x$.

1331. Доведіть, що для довільних дійсних чисел x і y виконується нерівність: $x^2+2y^2+2xy+6y+10>0$.

1332. У сплаві міді й цинку масою 36 кг міститься 45 % міді. Скільки кілограмів міді потрібно додати до цього сплаву, щоб новий сплав містив 60 % міді?

Скарбничка досягнень

- ✓ Знаю і розумію, що таке обернені тригонометричні функції.
  Арксинус числа a ($\arcsin a$) — це число з відрізка $[-0{,}5\pi;\ 0{,}5\pi]$, синус якого дорівнює a.
  Арккосинус числа a ($\arccos a$) — це число з відрізка $[0;\ \pi]$, косинус якого дорівнює a.
  Арктангенс числа a ($\operatorname{arctg} a$) — це число з інтервалу $(-0{,}5\pi;\ 0{,}5\pi)$, тангенс якого дорівнює a.
  Арккотангенс числа a ($\operatorname{arcctg} a$) — це число з інтервалу $(0;\ \pi)$, котангенс якого дорівнює a.
- ✓ Знаю і вмію використовувати властивості обернених тригонометричних функцій:

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$; $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$;

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$; $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arctg} a$;

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1;\ 1]$; $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2},\ x \in R$.

Співвідношення між тригонометричними та оберненими до них функціями:

$\sin(\arcsin x) = x,\ x \in [-1;\ 1]$ і $\arcsin(\sin x) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$;

$\cos(\arccos x) = x,\ x \in [-1;\ 1]$ і $\arccos(\cos x) = x,\ x \in [0;\ \pi]$.

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x,\ x \in R$ і $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x,\ x \in R$ і $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x,\ x \in (0;\ \pi)$.

- ✓ Умію використовувати формули для розв'язування тригонометричних рівнянь.

Рівняння		Формула розв'язків
$\sin x = a$	$\lvert a\rvert \le 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$
	$\lvert a\rvert > 1$	розв'язків немає
$\cos x = a$	$\lvert a\rvert \le 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z$
	$\lvert a\rvert > 1$	розв'язків немає
$\operatorname{tg} x = a$		$x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z$

- ✓ Умію усно розв'язувати такі види рівнянь, $k \in Z$.

	$a = 0$	$a = 1$	$a = -1$
$\sin x = a$	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$
$\cos x = a$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x = 2\pi k$	$x = \pi + 2\pi k$

Перевіряємо набуті компетентності

Тестові завдання № 4

1 Які з рівнянь не є тригонометричними?

А	Б	В	Г
$\sin 2x = 1$	$\sin x + \cos x = 0$	$(x^2 + 2x - 4)\operatorname{tg} x = 5$	$(a + 3)\cos(x + 2) = -1$

2 Обчисліть значення $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

А	Б	В	Г
$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$

3 Областю визначення функції $y = \arcsin x$ є:

А	Б	В	Г
$[-1; 1]$	$[-0{,}5\pi; 0{,}5\pi]$	$[0; \pi]$	$[0; 2\pi]$

4 Який знак потрібно поставити замість * у виразі $\arccos\frac{1}{4} * \arccos\frac{3}{4}$?

А	Б	В	Г
$>$	$<$	$=$	$\leq$

5 За якою формулою знаходять розв'язки рівняння $\sin x = a$, $|a| \leq 1$?

А	Б	В	Г
$\arcsin a + 2\pi k$ $k \in Z$	$\pm\arcsin a + 2\pi k$, $k \in Z$	$(-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in Z$	$(-1)^k \arcsin a + 2\pi k$, $k \in Z$

6 Укажіть найменший додатний корінь рівняння $3\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$:

А	Б	В	Г
$30°$	$45°$	$60°$	$90°$

7 Яке з рівнянь не має розв'язку?

А	Б	В	Г
$4\sin 3x - \pi = 0$	$2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -2$	$\operatorname{tg}(3x - 9) = 10$	$3\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 6$

8 Розв'яжіть нерівність $\sin x \geq 0{,}5$ на проміжку $[-\pi; \pi]$.

А	Б	В	Г
$\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$	$\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$	$\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$	$\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$

9 При яких значеннях a нерівність $2\cos(x+1) \geq a+3$ виконується для всіх $x \in R$?

А	Б	В	Г
$a \geq -5$	$a \geq -1$	$a \leq -5$	$a \leq -1$

10 При яких a рівняння $(3\cos 2x - a + 4)(\cos 3x + 2) = 0$ має розв'язки?

А	Б	В	Г
$-7 \leq a \leq 1$	$-1 \leq a \leq 7$	$1 \leq a \leq 7$	$-7 \leq a \leq -1$

Типові завдання до контрольної роботи № 4

1 Обчисліть значення виразу:

$$\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{3}.$$

2 Розв'яжіть рівняння:

а) $2\sin 3x = 0$; б) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$; в) $\sin\frac{x}{2}=3$.

3 Розв'яжіть нерівність:

а) $2\sin x < 1$; б) $\operatorname{tg} 2x \geq 1$;

в) $\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x>\frac{1}{2}$.

4 Знайдіть найменший додатний корінь рівняння: $\sin 2x - \cos 2x = 0$.

5 Розв'яжіть рівняння:

а) $2\cos^2 x + \sin x - 2 = 0$;

б) $1 + \cos 2x = \cos x$.

6 Обчисліть:

$$\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

7 Знайдіть корені рівняння:

а) $4\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 7\cos^2 x = 3$;

б) $\cos x + \sin 2x + \sin 4x = 0$;

в) $2|\sin x| = \sin x - \cos x$;

г) $\sqrt{1-\operatorname{tg} x} = \cos x - \sin x$.

8 Розв'яжіть нерівність:

а) $2\cos^2 x - 7\cos x - 4 \geq 0$;

б) $2\cos^3 x-\sqrt{3}\cos^2 x\geq 0$;

в) $\sqrt{7x-x^2-6}(2|\sin x|-1)\geq 0$.

9 Розв'яжіть рівняння:

$\pi - 3\arccos(x^2 + 0,5x) = 0$.

10 При яких значеннях параметра a рівняння

$2\cos^2 x - (2a + 3)\cos x + a + 1 = 0$

на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ має два корені? Знайдіть ці корені.

Розділ 5

ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Function boundary and Continuity. Derivative and its Application

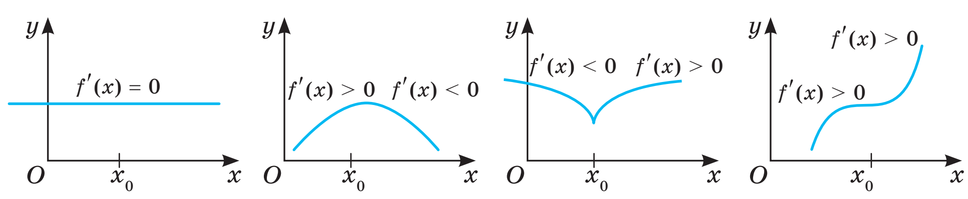
Михайло Васильович ОСТРОГРАДСЬКИЙ
(1801–1862)

Всесвітньо відомий український математик і механік. Видатний учений, організатор наукової школи прикладної математики і механіки, популяризатор математики, прогресивний реформатор математичної освіти, великий лектор і талановитий педагог-новатор.

Досліджував проблеми математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики тощо.

«Усі гадають, ніби математика — наука суха, що полягає вона тільки в умінні рахувати. Це безглуздя. Цифри в математиці відіграють наймізернішу, найостаннішу роль. Це — найвища філософська наука, наука найвеличніших поетів...».

М. В. Остроградський



НАБУВАЄМО ДОСВІДУ ТА КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ

- Границя і неперервність функції в точці і на проміжку
- Похідна, її геометричний і фізичний зміст.
- Правила диференціювання
- Застосування похідної до дослідження функцій
- Застосування похідної до розв'язування прикладних задач

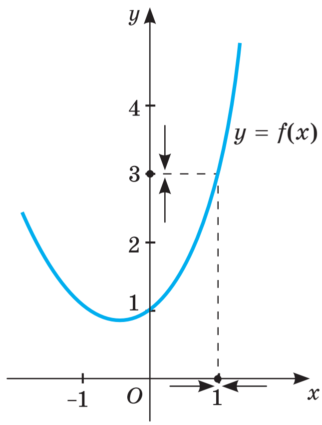
- Формулювати означення понять теми
- Знаходити похідні функцій, кутовий коефіцієнт дотичної, найбільше і найменше значення функції
- Застосовувати похідні для знаходження проміжків монотонності і екстремумів функції; проміжків опуклості та точок перегину тощо
- Досліджувати функції за допомогою похідної та будувати їх графіки

Навчальний проект № 5. **ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ В ЕКОНОМІЧНИХ РОЗРАХУНКАХ**

§ 26 Границя і неперервність функції

Function Limit and Continuity

Реальні процеси можна моделювати за допомогою функції, а тому слід добре розуміти і вміти досліджувати поведінку функції біля конкретної точки, знати, як змінюються значення функції при зміні значення аргументу. Для цього вивчають значення функції в точці, границю функції в точці, приріст функції в точці, неперервність функції в точці. Про які точки йдеться? Про точки осі абсцис — значення аргументу.



Мал. 173

Значення функції в точці. Нехай задано, наприклад, функцію $f(x) = x^2 + x + 1$. Якщо $x = 1$, то відповідне значення функції дорівнює 3. Кажуть, що в точці $x = 1$ значення функції $f(x)$ дорівнює 3. У точці $x = 0$ її значення дорівнює 1, у точці $x = 10$ значення функції $f(x)$ дорівнює 111. Пишуть: $f(1) = 3$, $f(0) = 1$, $f(10) = 111$.

Границя функції в точці. Розглянемо ту саму функцію $f(x) = x^2 + x + 1$. Якщо значення її аргументу x досить близькі до числа 1 і з обох боків наближаються до 1, то відповідні значення функції як завгодно близько наближаються до числа 3 (мал. 173).

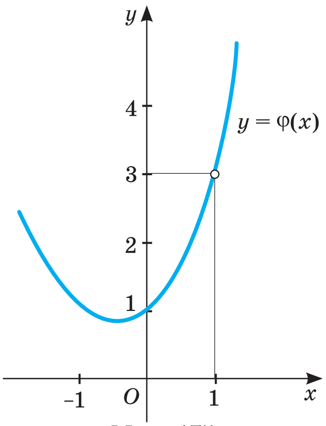
Про це свідчать дані таблиці (мал. 174), в якій містяться значення функції $y = x^2 + x + 1$ для 10 значень аргументу, близьких до числа 1, і графік, зображений на малюнку 174.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2	f=x2+x+1		x	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
3			f	2,8525	2,8816	2,9109	2,9404	2,9701	3	3,0301	3,0604	3,0909	3,1216	3,1525

Мал. 174

Іншими словами: різниця $|f(x)-3|$ може стати і залишатись як завгодно малою, якщо різниця $|x-1|$ буде досить малою. У цьому випадку кажуть, що границя функції $f(x)$ у точці $x = 1$ дорівнює 3. Пишуть: якщо $x \to 1$, то $f(x) \to 3$, або $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.

Суттєва деталь: функція може мати границю навіть у такій точці, у якій вона не визначена. Наприклад, функція $\varphi(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ у точці $x = 1$ не має значення, бо знаменник не може дорівнювати нулю. В усіх інших точках функція $\varphi(x)$ має такі самі значення, як і функція $f(x)$, бо $(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$, якщо $x \neq 1$. Графік функції $\varphi(x)$ зображено на малюнку 175. Хоча значення функції $\varphi(x)$ у точці $x = 1$ не існує, а її границя у цій точці існує і дорівнює 3.



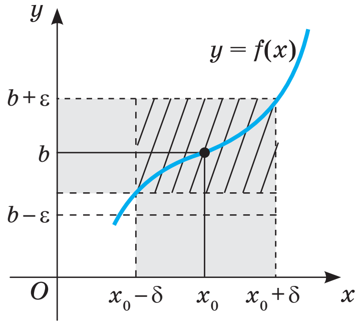
Мал. 175

Означення границі функції можна сформулювати так.

Число b називається *границею функції* $f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого додатного числа ε можна вказати таке додатне число $\delta(\varepsilon)$, що для всіх значень x з проміжку $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, крім, можливо, самої точки x_0, справджується нерівність $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Пишуть так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$.

Означення границі функції має просте геометричне тлумачення: яке б не було досить мале наперед задане додатне число ε, можна вказати таке додатне число $\delta(\varepsilon)$, що для всіх точок x, які віддалені від точки x_0 не далі ніж на δ, графік функції $y = f(x)$ лежить усередині смуги шириною 2ε, обмеженої прямими $y = b - \varepsilon$ і $y = b + \varepsilon$ (мал. 176).



Мал. 176

Границя функції в точці має цікаві властивості. Наприклад:

- функція не може мати двох різних границь у точці;
- якщо c — число, то $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$.

Кілька властивостей сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. *Якщо кожна з функцій $f(x)$ і $g(x)$ має границю в точці x_0, то в цій точці існують границі функцій $kf(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ і мають місце рівності:*

1) $\lim\limits_{x\to x_0} kf(x)=k\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$.

Іншими словами можна сказати так.

Сталий множник можна виносити за знак границі. Границя суми (різниці, добутку) функцій дорівнює сумі (різниці, добутку) границь даних функцій. Границя відношення двох функцій дорівнює відношенню їх границь, якщо границя дільника не дорівнює нулю. Ці властивості використовують для обчислення границь функцій у заданих точках.

Приклад 1. За умови, що $x \to 5$, обчисліть границю функції $f(x)$, якщо: а) $f(x) = 2x - 3$; б) $f(x) = x^2 - 10x + 17$.

Розв'язання. а) $\lim\limits_{x\to 5}(2x-3)=\lim\limits_{x\to 5}(2x)+\lim\limits_{x\to 5}(-3)=2\lim\limits_{x\to 5}x-3=2\cdot 5-3=7;$

$$б)\ \lim_{x\to 5}\left(x^2-10x+17\right)=\lim_{x\to}\left(x^2\right)+\lim_{x\to}(-10x)+\lim_{x\to 5}17=$$

$$=\left(\lim_{x\to 5}x\right)^2-10\cdot\lim_{x\to 5}x+\lim_{x\to 5}17=5^2-10\cdot 5+17=25-50+17=-8.$$

Зауваження. Розв'язуючи такі вправи, деякі перетворення можна виконувати усно.

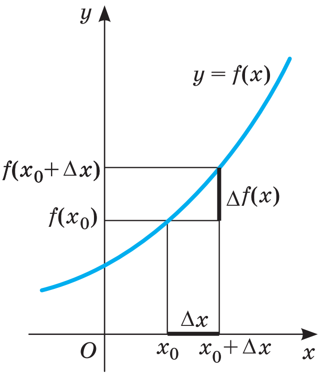
У попередніх прикладах для знаходження границі досить було підставити у даний вираз граничне значення аргументу. Але часто така підстановка призводить до невизначеностей виду $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. У таких випадках спочатку слід перетворити даний вираз, а вже потім обчислювати границю. Знаходження границі у такий спосіб називається розкриттям невизначеностей.

Приклад 2. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$.

Розв'язання. Оскільки при $x \to 3$ границя знаменника дорівнює нулю, то використовувати теорему про границю частки не можна. Безпосередня підстановка у даний вираз граничного значення аргументу $x = 3$ призводить до невизначеності виду $\dfrac{0}{0}$. Щоб її розкрити, розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники. Маємо:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x+3}=\frac{5}{6}.$$

Приріст аргументу і функції. Нехай дано, наприклад, функцію $f(x) = x^2$. У точці $x_0 = 2$ її значення $f(2) = 4$. Збільшимо значення аргументу на 0,01, тобто нехай $x = 2{,}01$. Відповідне значення функції $f(2{,}01) = 4{,}0401$. Порівняно з попереднім значенням воно збільшилось на 0,0401. Тут 0,01 — *приріст аргументу*, а 0,0401 — відповідний *приріст функції*, а саме: приріст функції $f(x) = x^2$ на проміжку [2; 2,01].

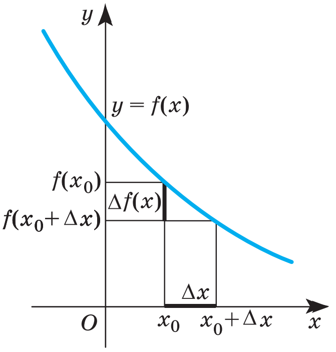


Мал. 177

Приростом аргументу в точці x_0 називають різницю $x - x_0$, де x — довільне число, яке мало відрізняється від x_0. Він може бути додатним або від'ємним. Відповідний приріст функції $f(x)$ — різниця $f(x) - f(x_0)$.

Приріст аргументу x позначають символом Δx, а приріст функції Δf, Δy (читають: дельта ікс, дельта еф, дельта ігрек). Так, у розглянутому прикладі $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta f = 0{,}0401$.

Геометрично приріст аргументу зображується приростом абсциси точки кривої, а приріст функції — приростом ординати цієї точки (мал. 177).



Мал. 178

Властивості цих понять видно на малюнках 177 і 178. Якщо функція $f(x)$ — зростаюча і $\Delta x > 0$, то $\Delta f(x)$ — число додатне, а якщо $f(x)$ — спадна функція і $\Delta x > 0$, то $\Delta f(x)$ — число від'ємне.

Важливе значення для дослідження функції має відношення приросту функції до приросту аргументу в деякій точці. Це відношення називають середньою швидкістю зміни функції. Воно показує, скільки одиниць приросту функції припадає на одиницю приросту аргументу.

Неперервність функції. Як пов'язані між собою прирости аргументу x і функції $f(x) = x^2$ в точці $x_0 = 2$? Якщо $\Delta x = 0{,}01$, то $\Delta f = 0{,}0401$; якщо $\Delta x = 0{,}001$, то $\Delta f = 0{,}004001$ і т. д. Узагалі, якщо $\Delta x \to 0$, то і $\Delta f \to 0$, тобто приріст функції прямує до нуля, коли прямує до нуля приріст аргументу (зліва або справа). У такому випадку говорять, що функція $f(x)$ неперервна в точці $x_0 = 2$.

Функція $f(x)$ називається *неперервною* в точці x_0, якщо в цій точці досить малим приростам аргументу відповідають як завгодно малі прирости функції.

Інакше: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$

Перетворимо останню рівність:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}\left(f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(f(x) - f\left(x_0\right)\right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x) - \lim_{\Delta x \to 0} f\left(x_0\right) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x) - f\left(x_0\right).$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$ і $\Delta x \to 0$, коли $x \to x_0$, то матимемо, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) - f\left(x_0\right) = 0,$ звідси $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f\left(x_0\right).$

Функція $y = f(x)$ називається *неперервною* в точці x_0, якщо існує границя функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в точці x_0.

На основі цих умов знаходження границь неперервних функцій суттєво спрощується. Для обчислення границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ неперервної в точці x_0 функції $f(x)$ досить обчислити значення функції у цій точці, тобто $f(x_0)$.

Над неперервними функціями можна виконувати арифметичні операції.

Теорема. *Нехай функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ неперервні в точці x_0. Тоді їх сума, різниця, добуток і частка (за умови, що знаменник не дорівнює нулю) теж неперервні в точці x_0, тобто $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ — неперервні в точці x_0 функції.*

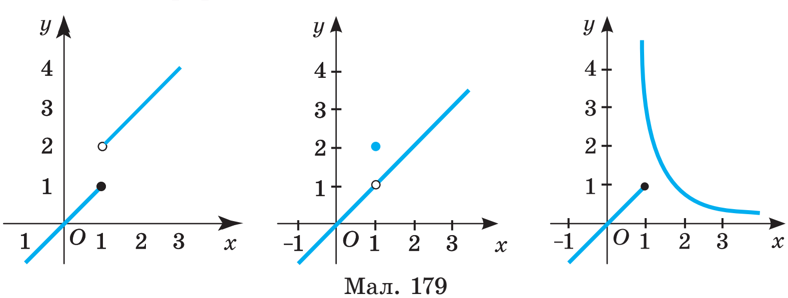
Доведення. Оскільки за означенням неперервні в точці x_0 функції $f(x)$ і $g(x)$ мають границі, що дорівнюють $f(x_0)$ і $g(x_0)$, то за властивістю границі суми, різниці, добутку та частки границі вказаних функцій існують і відповідно дорівнюють $f(x_0) + g(x_0)$, $f(x_0) - f(x_0)$, $f(x_0) \cdot g(x_0)$, $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ $(g(x_0) \neq 0)$. Але ці величини дорівнюють значенням відповідних функцій. Отже, вказані функції за означенням неперервності є неперервними в точці x_0.

Приклад 1. Для яких значень x функція $f(x) = \frac{3x^2 + x + 5}{x^2 - 6x + 8}$ буде неперервною?

Розв'язання. Дробово-раціональна функція є неперервною за умови, що знаменник не дорівнює нулю. Рівняння $x^2 - 6x + 8 = 0$ має корені $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Отже, функція є неперервною у кожній точці множини $(-\infty; 2) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$.

Функція називається *неперервною на проміжку*, якщо вона неперервна в кожній його точці. Графік такої функції — неперервна крива (її можна провести, не відриваючи олівець від паперу).

На малюнку 179 зображено графіки функцій, які мають розриви у точці $x = 1$; вони не є неперервними в цій точці.



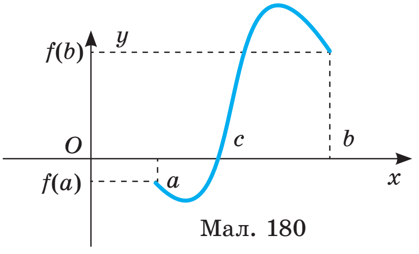
Мал. 179

Неперервними у кожній точці своєї області визначення є *елементарні функції* — степеневі, тригонометричні, $y=\sqrt[n]{x}$ $(n \in N)$, а також функції, утворені з них за допомогою чотирьох арифметичних дій. Графіки елементарних функцій на кожному проміжку з області визначення є нерозривними лініями.

Властивості функцій, неперервних на відрізку.

Теорема Больцано—Коші. *Якщо функція* $y = f(x)$ *неперервна на* $[a; b]$ *і на кінцях цього відрізка набуває значення різних знаків, то на інтервалі* $(a; b)$ *обов'язково існує точка* c, *така, що* $f(c) = 0$.

Геометричний зміст цієї теореми полягає в тому, що неперервна крива при переході з однієї півплощини в другу, межею яких є вісь Ox, перетинає цю вісь (мал. 180). Ця теорема застосовується при розв'язуванні рівнянь і нерівностей.



Мал. 180

Зауваження! Розривні функції, взагалі кажучи, цих властивостей не мають.

Точки розриву. Точка, в якій функція не є неперервною, називається *точкою розриву функції*, а сама функція називається *розривною* в цій точці.

Точка x_0 буде точкою розриву функції $y = f(x)$, якщо виконується одна з умов:

1) функція в точці x_0 не визначена;
2) не існує границі функції в точці x_0 або вона є нескінченною;
3) границя функції в точці x_0 не збігається зі значенням функції в цій точці.

Досліджуючи точки розриву, використовують односторонні границі. Це означає, що розглядають поведінку функції для значень x лише праворуч або ліворуч від точки x_0. У такий спосіб отримують відповідно правосторонню чи лівосторонню границі.

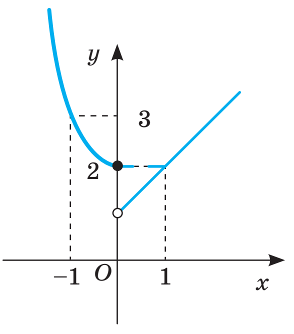
Позначають: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ — правостороння границя функції $y = f(x)$ в точці x_0; $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ — лівостороння границя функції $y = f(x)$ в точці x_0.

Приклад 2. Знайдіть точки розриву функції $y=\dfrac{1}{x}$.

Розв'язання. Оскільки на нуль ділити не можна, то точкою розриву даної функції є $x = 0$.

Приклад 3. Дослідіть функцію $f(x)=\begin{cases} x^2+2, x \le 0, \\ x+1, x>0 \end{cases}$ на неперервність та побудуйте її графік.

Розв'язання. На кожному з інтервалів $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ функція неперервна як многочлен. Оскільки вся область визначення функції розділена на два проміжки точкою $x = 0$, то в цій точці функція може мати розрив. З'ясуємо, чи існує границя функції в цій точці. Якщо $x \to 0$ зліва, то функція має вигляд $f(x) = x^2 + 2$ і $\lim\limits_{x\to 0-}(x^2+2)=2$, а при $x \to 0$ справа $f(x) = x + 1$ і $\lim\limits_{x\to 0+}(x+1)=1$. Отже, не існує границі функції в точці $x = 0$, а тому $x = 0$ — точка розриву. Графік даної функції зображено на малюнку 181.



Мал. 181

Хочете знати ще більше?

Теорія границь — великий і цікавий розділ курсу математичного аналізу, який вивчається в університетах. У школі цей матеріал вивчають оглядово, на основі наочних уявлень та інтуїції. Уявлення про границі та їх властивості бажано мати для вивчення похідної та її застосувань — могутнього апарату для дослідження багатьох реальних процесів.

Пропонуємо вам ознайомитися з одним із цікавих і важливих фактів теорії границь. Розгляньте таблицю, складену за допомогою програми Excel.

t	–0,1	–0,01	–0,001	0,001	0,01	0,1
$\sin t$	–0,0998	–0,00999	–0,009999	0,009999	0,0099	0,0998
$\dfrac{\sin t}{t}$	0,998	0,999	0,9999	0,9999	0,999	0,998

Як бачимо, при досить малих значеннях t, $\sin t \approx t$, а $\dfrac{\sin t}{t}\approx 1$. У курсі математичного аналізу доводять, що $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$.

Ця рівність називається *першою важливою (чудовою) границею*. Її використовують для знаходження границь функцій, пов'язаних із тригонометричними.

Приклад. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}\right)=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2\sin 2x}{2x}\right)=2\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=$$

$$=2\cdot 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=4\cdot 1\cdot 2\cdot 1=8.$$

Відповідь. 8.

Перевірте себе

1. Що таке границя функції в точці?
2. Що таке приріст аргументу? Як його позначають?
3. Що таке приріст функції? Як його позначають?
4. Яку функцію називають неперервною в точці?
5. Які операції можна виконувати над функціями, неперервними в точці?
6. Сформулюйте означення функції, неперервної на проміжку.
7. Сформулюйте властивості функцій, неперервних на проміжку.

Виконаємо разом

1 Обчисліть:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$.

Розв'язання. а) У точці $x = 3$ границя кожного з дробів не існує, тому скористатися теоремами про границі ми не можемо. Спростимо функцію, що міститься під знаком границі, виконавши дію віднімання. Маємо:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 3}\frac{6-x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{x^2-9}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{x+3}=\frac{-1}{3+3}=-\frac{1}{6}.$$

б) У точці $x = 1$ дана функція не визначена, але дріб $\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ можна скоротити:

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=x-2.$$

Оскільки для обчислення границі функції при $x \to 1$ саму точку $x = 1$ можна виключити і не розглядати, то

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}(x-2)=\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}2=1-2=-1.$$

в) Домножимо чисельник і знаменник дробу на вирази, спряжені до даних.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+1-9)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=$$
$$\lim_{x\to 4}\frac{2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{2\cdot(2+2)}{3+3}=\frac{4}{3}.$$

2 Знайдіть приріст функції $y = x^2$ при переході значення аргументу від 3 до 3,5.

Розв'язання.

Спосіб 1. Маємо $f(x) = x^2$, а $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$, тоді

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2,\ \Delta f(x) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

За цією формулою можна обчислити значення $\Delta f(x)$ для будь-яких x і Δx. Зокрема, у нашому прикладі $x = 3$, $\Delta x = 3,5 - 3 = 0,5$, тому

$$\Delta f(x) = 2 \cdot 3 \cdot 0,5 + 0,5^2 = 3 + 0,25 = 3,25.$$

Спосіб 2. $f(3) = 3^2$, $f(3,5) = 3,5^2$.

$$\Delta f(x) = f(3,5) - f(3) = 3,5^2 - 3^2 = (3,5 - 3)(3,5 + 3) = 0,5 \cdot 6,5 = 3,25.$$

3 Для функції $y = x^3$ знайдіть:

а) приріст функції при переході від деякої точки x до точки $x + \Delta x$;

б) границю відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

Розв'язання. а) $f(x) = x^3$, $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$.

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2);$$

б) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\left(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2\right)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2\right) = 3x^2,$

оскільки $\Delta x \to 0$, а x — не залежить від Δx.

4 Чи має рівняння $x^3 - 3x - 1 = 0$ принаймні один дійсний корінь на відрізку $[0; 2]$?

Розглянемо функцію $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Ця функція неперервна на відрізку $[0; 2]$ і на його кінцях набуває різних за знаком значень: $f(0) = -1 < 0$, $f(2) = 1 > 0$. Отже, згідно з теоремою Больцано—Коші існує принаймні одна точка c $(0 < c < 2)$, у якій значення функції дорівнює нулю. Число c і є коренем заданого рівняння. Переконайтеся у цьому, розв'язавши графічно рівняння $x^3 = 3x + 1$.

Виконайте усно

1333. Обчисліть границю функції $y = f(x)$ у точці $x_0 = 0$, якщо:

а) $f(x) = x - 5$;

б) $f(x) = x^2 - x + 7$;

в) $f(x) = \sqrt{2x+1}$;

г) $f(x) = 3x^2 - x$;

ґ) $f(x) = \dfrac{x}{x+7}$;

д) $f(x) = \dfrac{7}{x+7}$.

1334. Чи має функція $f(x) = \dfrac{5}{x}$ границю в точці:

а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -10$?

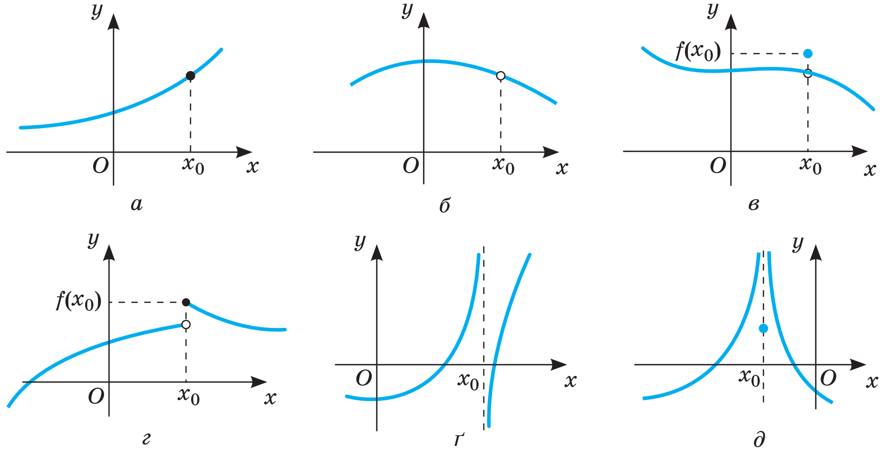
1335. Для кожної з функцій, графік якої зображено на малюнку 182, встановіть:

а) чи визначена ця функція в точці x_0;

б) чи існує границя функції в точці x_0;

в) якщо границя в точці x_0 існує, то чи дорівнює вона значенню функції в цій точці.

1336. Яка з функцій, графіки яких зображені на малюнку 182, є неперервною: а) для всіх $x < 0$; б) для всіх $x > 0$; в) на всій області визначення?



Мал. 182

1337. Скільки точок розриву має функція:

а) $y=\dfrac{x-3}{x^2-9}$; б) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$; в) $y=\dfrac{4}{x^3+1}$; г) $y=\dfrac{1}{\sin x}$?

Рівень А

1338. Знайдіть значення функції $f(x) = 0{,}5x^2$ у точці: а) $x = 5$; б) $x = -0{,}5$.

1339. Порівняйте значення функції $f(x)=\dfrac{1}{x}+x$ у точках $x = -2$ і $x = -0{,}5$.

1340. Дано функції $f(x) = x^2 - x + 1$ і $\varphi(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$. Перемалюйте в зошит і заповніть таблицю.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$							
$\varphi(x)$							

1341. Відомо, що $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=2$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=3$. Обчисліть:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+\varphi(x)-g(x)\right)$; в) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(2f(x)-\varphi(x)+g(x)\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\cdot g(x)\right)$; г) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\varphi^2(x)\cdot g(x)\right)$.

1342. Обчисліть границю функції $y = f(x)$ у точці $x_0 = 1$, якщо:

а) $f(x) = 2x - 5$; б) $f(x) = 3x^2 - x + 1$; в) $f(x)=\dfrac{5}{x-3}$.

1343. Обчисліть границю функції $y = \varphi(x)$ у точці $x_0 = 2$, якщо:

а) $\varphi(x) = 3x^3 - x$; б) $\varphi(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$; в) $\varphi(x) = x^2 - 7x + 3$.

1344. Обчисліть границю функції:

а) $f(x) = 2x^2 - 3$ у точці $x = 5$; $x = 10$; $x = 50$;

б) $\varphi(x) = (1 + x)^2$ у точці $x = 0,5$; $x = 1$; $x = -0,5$.

Обчисліть (1345–1346).

1345. а) $\lim\limits_{x\to 10}(12x-30)$; в) $\lim\limits_{x\to 5}(8-3x)$; ґ) $\lim\limits_{x\to 5}(2x^2-0,5)$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-4x}{3x+5x^2}$.

1346. а) $\lim\limits_{x\to 0}(2+x+x^2)$; в) $\lim\limits_{x\to 1}(7-3x^2)$; ґ) $\lim\limits_{x\to 3}x(x+5)$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{3x-x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x}{x^2-5}$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{3-x}$.

1347. Знайдіть приріст аргументу при переході від 5 до:

а) 5,5; б) 5,1; в) 5,05; г) 5,001.

1348. Знайдіть приріст аргументу при переході від точки x_0 до точки x, якщо:

а) $x_0 = 1$, $x = 1,3$; б) $x_0 = 3$, $x = 3,5$; в) $x_0 = 2,1$, $x = 2,7$.

1349. Знайдіть приріст функції $y = 3x + 1$ при переході від точки x_0 до точки x, якщо:

а) $x_0 = 2$, $x = 2,3$; б) $x_0 = 5$, $x = 5,5$; в) $x_0 = 2,5$, $x = 2,7$.

1350. Для функції $y = 0,5x - 3$ знайдіть x і Δy, якщо:

а) $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,2$; б) $x_0 = 3$, $\Delta x = 0,4$; в) $x_0 = 2,1$, $\Delta x = 0,9$.

1351. Для функції $y = 10x - 1$ знайдіть Δx і Δy, якщо:

а) $x_0 = 1$, $x = 1,2$; б) $x_0 = 3$, $x = 3,1$; в) $x_0 = 2,1$, $x = 2,5$.

1352. Наведіть приклад зростаючої функції, неперервної на всій області визначення. Побудуйте її графік.

1353. Наведіть приклад спадної функції, неперервної на всій області визначення. Побудуйте її графік.

1354. Побудуйте графік функції, яка не є неперервною в точках:

а) -1 і 1; б) -1; 0 і 1; в) 0 і 2; г) -3 і 1.

При яких значеннях x функція буде неперервною (1355–1356)?

1355. а) $f(x)=\dfrac{3x^2+x+5}{2x^2+6x+4}$; б) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-6x+8}$.

1356. а) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}$.

1357. Доведіть, що функція $f(x)=\dfrac{x}{4+x^2}$ є неперервною, якщо $x \in R$.

1358. Знайдіть точки розриву функції $y=\dfrac{1}{x-2}$.

1359. Дослідіть функцію $y = f(x)$ на неперервність у точках 1; 2; –1; 0, якщо:

а) $y=\dfrac{x^2-1}{9}$; б) $y=\dfrac{1}{x+1}$; в) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; г) $y=\dfrac{2}{x}$.

Рівень Б

1360. Відомо, що $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=5$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=2$. Обчисліть:

а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)+1}{g(x)-\varphi(x)}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2f(x)}{g(x)\cdot\varphi(x)}$; в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{1-5\varphi(x)}$; г) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)+\varphi(x)}{g(x)\cdot\varphi(x)}$.

1361. Доведіть, що границя многочлена $P(x) = a^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ при $x \to x_0$ дорівнює значенню цього многочлена при $x = x_0$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$.

1362. Якщо $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени, причому $Q(x_0)\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Доведіть.

1363. Обчисліть границю функції $f(x)$ у тій точці, у якій функція не визначена, якщо: а) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$; б) $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$; в) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$.

Обчисліть границі (1364–1366).

1364. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

1365. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+4x^2+4x}{(x+2)(x-3)}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

1366. а) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{8x^3-4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x^2+2x+2}{x^2+5x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2-12}$.

1367. Знайдіть приріст функції $y = 2\sin x\cos x$ при переході від точки $x_0 = 0$ до точки x, якщо: а) $x=\dfrac{\pi}{8}$; б) $x=\dfrac{\pi}{12}$; в) $x=-\dfrac{\pi}{6}$.

1368. Для функції $y = 0{,}5(\cos 4x + 1)$ знайдіть Δx і Δy, якщо:

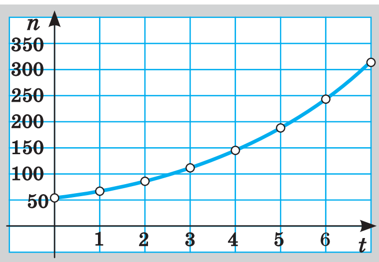
а) $x_0=\dfrac{\pi}{8}$, $x=\dfrac{\pi}{4}$; б) $x_0=\dfrac{\pi}{6}$, $x=\dfrac{\pi}{12}$; в) $x_0=\dfrac{\pi}{6}$, $x=\dfrac{\pi}{8}$.

1369. Відомо, що для деякої фірми витрати на випуск x одиниць продукції описуються функцією: $K(x) = 0{,}002x^3 - 0{,}3x^2 + 20x + 100$ (грн), а дохід, одержаний від реалізації x одиниць продукції, можна обчислити за формулою $R(x) = 200x - 0{,}05x^2$ (грн). Визначте приріст витрат і доходу при збільшенні випуску продукції: а) з 20 до 100; б) з 30 до 50.

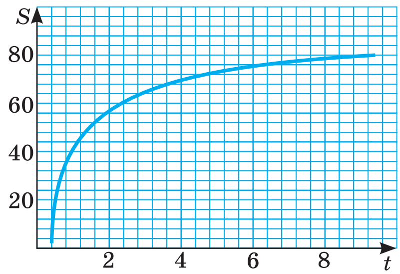
1370. За деякими підрахунками визначено, що при виробництві x одиниць продукції щомісяця фірма має витрати $K(x)$, що виражається формулою $K(x) = 150 + 30x$ (грн), а дохід $R(x)$, одержаний від продажу x одиниць цієї ж продукції, становить $R(x) = 90x - 0{,}02x^2$ (грн). Якщо фірма збільшить щомісячний випуск продукції з 300 до 320 одиниць, як зміняться її витрати, дохід, прибутки?

1371. Кількість мишей у колонії записували щотижня і побудували відповідний графік (мал. 183). Оцініть середню швидкість зростання популяції мишей: а) з 4-го по 6-й тиждень; б) за перших п'ять тижнів.

1372. На малюнку 184 подано графік руху тіла. Оцініть середню швидкість руху за час t (час t — у секундах; шлях s — у метрах), якщо: а) $1 \le t \le 4$; б) $4 \le t \le 8$.



Мал. 183



Мал. 184

1373. Побудуйте графік функції $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{2 - x}$. Чи неперервна вона у точці $x_0 = -1$? А в точці $x_0 = 2$?

1374. Чи визначена функція $f(x) = \dfrac{9 - x^2}{x + 3}$ у точці $x = -3$? Чи існує границя даної функції в цій точці? Якщо так, то чому вона дорівнює?

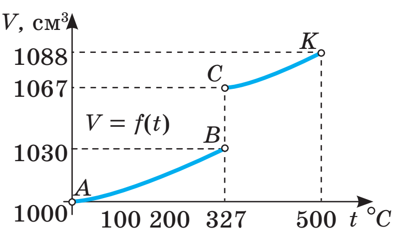
1375. Для функції $y = 1 - 5x^2$ знайдіть границю відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

1376. Знайдіть границю відношення приросту функції $y = f(x)$ до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, якщо: а) $f(x) = -x + 3$; б) $f(x) = 3x^2$; в) $f(x) = x^3 + 1$.

1377. Чи завжди буде розривною в заданій точці x_0 сума (добуток) двох функцій, якщо обидві функції в цій точці розривні? Наведіть приклад.

1378. Чи завжди буде розривною в заданій точці x_0 сума (добуток) двох функцій, якщо тільки одна з функцій у цій точці розривна? Наведіть приклад.

1379. На малюнку 185 зображено графік залежності об'єму куска свинцю від температури нагрівання. Чи є ця залежність функцією? Чи має функція точки розриву? Встановіть їх характер. Наведіть приклади інших розривних функцій, що описують фізичні та хімічні процеси.



Мал. 185

1380. Дослідіть функцію на неперервність та побудуйте її графік:

а) $f(x)=\begin{cases}2x^2-1, x\le 1,\\ x-4, x>1;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x^3, x\ge 0,\\ \dfrac{1}{2x}, x<0.\end{cases}$

1381. Довизначте функцію $f(x)$ в точці $x = 0$ так, щоб вона стала неперервною в цій точці:

а) $f(x)=\dfrac{3x^3-2x}{5x}$; б) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$; в) $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

1382. Доведіть, що рівняння $x^4 - 3x - 1 = 0$ має хоча б один дійсний корінь на відрізку $[1; 2]$.

1383. Доведіть, що рівняння $x^3 + 4x + 3 = 0$ має хоча б один дійсний корінь на відрізку $[-1; 0]$.

Рівень В

1384. Для функції $y=\sqrt{x}$ знайдіть:

а) приріст функції при переході від деякої точки x до точки $x + \Delta x$;

б) границю відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

1385. Знайдіть границю відношення приросту функції $y = f(x)$ до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, якщо:
а) $f(x) = ax + b$; б) $f(x) = ax^2$; в) $f(x) = x^{-1}$.

1386. Доведіть за означенням, що функція $f(x) = 2x^2 - 1$ неперервна на всій області визначення.

1387. Користуючись означенням, доведіть неперервність функції $\varphi(x)$ на інтервалі $(-\infty;+\infty)$, якщо:

а) $\varphi(x) = 5x + 3$; б) $\varphi(x) = x^3 + x$; в) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 1$.

Обчисліть (1388–1389).

1388. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{2x+2}}{x^2-4x+3}$.

1389. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$.

1390. Дослідіть задані функції на неперервність і знайдіть точки розриву:

а) $f(x)=\dfrac{|x-4|}{x^2-16}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$.

Дослідіть функцію на неперервність та побудуйте схематично її графік (1391–1392).

1391. а) $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le -1,\\ x^2+1, & -1<x\le 1,\\ -x+3, & x>1;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x+4, & x<-1,\\ x^2+2, & -1\le x<1,\\ 2x, & x\ge 1.\end{cases}$

1392. а) $f(x)=\begin{cases}\cos x,\ x\le 0,\\ x^2+1,\ 0<x<1,\\ x,\ x\ge 1;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}-x,\ x\le 0,\\ -(x-1)^2,\ 0<x<2,\\ x-3,\ x\ge 2.\end{cases}$

1393. Доведіть, що рівняння $x^5+x-\dfrac{1}{x}=0$ має хоча б один дійсний корінь на відрізку [0,5; 1].

Вправи для повторення

1394. На скільки відсотків збільшиться площа прямокутника, якщо його довжину збільшити на $20\ \%$, а ширину — на $10\ \%$?

1395. Спростіть вираз: а) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-2y^{\frac{1}{2}}}{x-4y}$; в) $\dfrac{x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$.

1396. Розв’яжіть нерівність:
а) $|x|>2x$; б) $|x|\ge -x$; в) $x|x+1|\ge 0$; г) $x|x-1|<0$.

§ 27 Асимптоти функції

Function Asymptotes

Переважну більшість функцій, з якими ви ознайомилися раніше, визначено на нескінченних проміжках. Досліджуючи такі функції, бажано встановити їх поведінку для як завгодно великих за модулем значень аргументу x, тобто при $x\to\infty$ і при $x\to-\infty$.

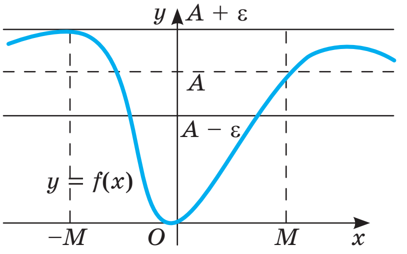
Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(-\infty;+\infty)$.

Число A називається *границею функції $y = f(x)$ на нескінченності* (при $x\to\infty$), якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке число $M(\varepsilon)>0$, що для всіх $|x|>M(\varepsilon)$ виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Пишуть: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

Геометрично це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $M(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x\in(-\infty;-M)$ або $x\in(M;+\infty)$ відповідні значення функції

$y = f(x)$ попадають в ε-окіл точки A, тобто відповідні точки графіка цієї функції лежать у смузі, обмеженій прямими $y = A + \varepsilon$ та $y = A - \varepsilon$ (мал. 186).



Мал. 186

У курсі математичного аналізу строго доводять, що $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ і $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$.

Для границі функції на нескінченності виконуються ті самі властивості і теореми про границі, що й для границі функції в точці (див. с. 250), а також використовують ще одне правило:

Для того, щоб обчислити границю дробово-раціональної функції у випадку, коли при $x\to\infty$ чисельник та знаменник дробу мають границі, що дорівнюють нескінченності, необхідно спочатку кожен член многочленів чисельника та знаменника дробу розділити на степінь x з найбільшим показником, а потім знаходити границю.

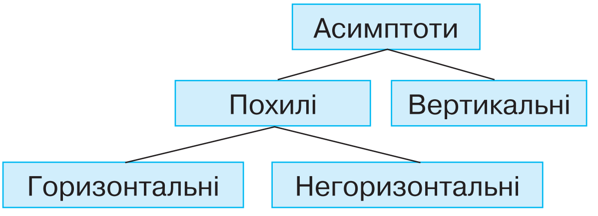
Приклад 1. Обчисліть $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x^3+5}{x^3-8x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x^3+5}{x^3-8x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-4+\frac{5}{x^3}}{1-\frac{8}{x^2}}=\frac{0-4+0}{1-0}=-4.$

Поняття границі функції на нескінченності та нескінченної границі використовуються для знаходження асимптот.

Пряма l називається асимптотою кривої, якщо відстань d від точки $M(x; f(x))$ кривої до цієї прямої прямує до нуля при віддаленні точки M по кривій у нескінченність.

Асимптоти є *вертикальні*, *похилі* і *горизонтальні* (мал. 187).



Мал. 187

Асимптотами, наприклад, є осі координат для графіка функції $y=\frac{1}{x}$:

$x=0$ — вертикальна асимптота;

$y = 0$ — горизонтальна асимптота.

Крива $y = f(x)$ має горизонтальну асимптоту $y = b$, якщо існує скінченна границя функції $f(x)$ при $x\to+\infty\,(x\to-\infty)$, і ця границя дорівнює b, тобто $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b\right)$.

Приклад 2. Знайдіть горизонтальну асимптоту кривої $y=\frac{1}{(x+1)^2}$.

Розв'язання. Обчислимо границю $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(x+1)^2}=0$. Отже, $y=0$ — горизонтальна асимптота.

Пряма $x = a$ буде вертикальною асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо при $x \to a$ (справа або зліва) значення функції $y = f(x)$ прямує до нескінченності, тобто виконується одна з умов: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$.

Рівняння похилої асимптоти: $y = kx + b$, де $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$. Якщо обидві записані границі існують, то існує похила асимптота; якщо хоча б одна з них не існує або дорівнює ∞, то крива похилої асимптоти не має.

Якщо $k = 0$, то $b=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, тому $y = b$ — рівняння горизонтальної асимптоти.

Зверніть увагу. Розглянуті границі можуть бути односторонніми, а під символом ∞ слід розуміти $+\infty$ і $-\infty$. При цьому вказані границі можуть бути різними при $x\to+\infty$ і при $x\to-\infty$.

Приклад 2. Знайдіть асимптоти кривих:

а) $y=\frac{4}{1-x^2}$; б) $y=\frac{x^3}{x^2-4}$; в) $y=\sqrt{1+x^2}$.

Розв'язання. а) $y=\frac{4}{1-x^2}$. Знайдемо вертикальні асимптоти. Оскільки функція не визначена в точках $x = 1$ та $x = -1$ і $\lim\limits_{x\to1}\frac{4}{1-x^2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to-1}\frac{4}{1-x^2}=\infty$, то прямі $x = 1$ і $x = -1$ — вертикальні асимптоти.

Знайдемо похилу асимптоту:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{(1-x^2)x}=0;\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{1-x^2}-0\cdot x\right)=0.$$

Крива має горизонтальну асимптоту; її рівняння: $y = 0$.

Отже, задана крива має три асимптоти: $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$.

б) $y=\frac{x^3}{x^2-4}$. Знайдемо вертикальні асимптоти.

Оскільки функція не визначена в точках $x = 2$ та $x = -2$ і $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty$, $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty$, то прямі $x = 2$ і $x = -2$ — вертикальні асимптоти.

Для похилої асимптоти $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^3}{x(x^2-4)}=1$;

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-4}=0.$$

Маємо: пряма $y = x$ — похила асимптота. Горизонтальної асимптоти немає.

Отже, асимптоти кривої: $x = 2$, $x = -2$, $y = x$.

в) $y=\sqrt{1+x^2}$. Будемо шукати похилі асимптоти.

1) якщо $x \to +\infty$; $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x^2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}=1.$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0.$$

Отже, $y = x$ — похила асимптота, якщо $x\to+\infty$.

2) якщо $x\to-\infty$; $k = -1$, $b = 0$ (перевірте самостійно), звідси $y = -x$ — похила асимптота, якщо $x\to-\infty$.

Отже, задана крива має дві асимптоти: $y=x(x\to+\infty)$ і $y = x$ $(x\to-\infty)$.

Перевірте себе

1. Що називають границею функції $y = f(x)$ на нескінченності?
2. Як обчислити границю дробово-раціональної функції на нескінченності?
3. Що таке асимптота кривої? Які бувають асимптоти?
4. За яких умов крива має горизонтальну асимптоту?

Виконаємо разом

1 Обчисліть $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1\right)}=\frac{2}{2}=1.$$

2 Знайдіть горизонтальні асимптоти кривої: $f(x)=\dfrac{2-x}{x+3}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2-x}{x+3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{x}{x}}{\dfrac{x}{x}+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{0-1}{1+0}=-1.$

Отже, $y = -1$ — горизонтальна асимптота.

3 Знайдіть асимптоти кривої $y=\sqrt[3]{x^3-2x^2}$.

Область визначення функції — R, тому вертикальних асимптот немає. Знайдемо похилу асимптоту:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx);$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2}\right)^3-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-2x^2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-2x^2}+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-2x^2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}}+1}=\frac{-2}{1+1+1}=-\frac{2}{3}.$$

Отже, пряма $y=x-\frac{2}{3}$ — похила асимптота даної кривої. Інших асимптот крива не має.

Виконайте усно

1397. Яка з функцій має скінченну границю, якщо $y=x(x\to+\infty)$:
а) $y=x^2$; б) $y=x^{-2}$; в) $y=\operatorname{arctg}x$; г) $y=\sin x$?

1398. Яка з функцій, поданих нижче, має скінченну границю, якщо $x\to-\infty$:
а) $y=x^3$; б) $y=x^{-1}$; в) $y=\operatorname{arcctg}x$?

1399. Яка з функцій, поданих нижче, має нескінченну границю, якщо $x\to+\infty$:
а) $y=\sqrt{x}$; б) $y=x$; в) $y=\operatorname{arctg}x$?

1400. Обчисліть: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x}{5}$.

1401. Наведіть приклад функції, яка має горизонтальну асимптоту.

1402. Наведіть приклад функції, яка має вертикальну асимптоту.

Рівень А

Обчисліть, використовуючи теореми про границі (1403–1404).

1403. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^9}+4\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6}{x^5}+\frac{4}{x^2}+9\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x^3}+\frac{7}{x}-2\right)$.

1404. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(12-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{16}{x^7}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}-3\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$.

Знайдіть границю (1405–1407).

1405. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-4}{x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-4}{2x+7}$.

1406. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{x^2+7x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x-1}{3x^2-4x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-5x}{2x^2-9x}$.

1407. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+9}{x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-8}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2+5x+2}{6x^2+5x-1}$.

Знайдіть асимптоти кривих (1408–1409).

1408. а) $y=x+\dfrac{1}{x}$; б) $y=\dfrac{1}{x-1}+2$.

1409. а) $y=4x^2+\dfrac{1}{x}$; б) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Рівень Б

1410. Побудуйте графік функції, яка в точці $x_0=1$ має нескінченну границю.

1411. Побудуйте графік функції, яка на нескінченності має границею число 2.

Знайдіть границю (1412–1414).

1412. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{2x+5}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to}\dfrac{2(x-1)^3}{x^3-1}$.

1413. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-7}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

1414. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5-3x}-\sqrt{-3x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4x}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-1}}{x-2}$.

Знайдіть горизонтальні асимптоти кривої (1415–1416).

1415. а) $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$; б) $y=\dfrac{2}{(x-2)(x-1)}$; в) $y=\dfrac{3x+5}{x+3}$.

1416. а) $y=\dfrac{2}{x+3}$; б) $y=\dfrac{3x}{5(x+2)}$; в) $y=\dfrac{9-2x}{x-3}$.

Рівень В

1417. Відомо, що непарна функція має єдину горизонтальну асимптоту. Запишіть рівняння цієї асимптоти.

1418. Знайдіть горизонтальні асимптоти кривої: а) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$.

Знайдіть границю (1419–1420).

1419. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{4+x^2}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+9x^2}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{1+9x^2}-\sqrt{x^2-1}}$.

1420. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)\operatorname{arctg}x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)\operatorname{arctg}x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+8}}{x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+8}}{x+3}$.

1421. Знайдіть асимптоти кривих.

а) $y=\dfrac{1}{(3x^2-1)^2}$; б) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; в) $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$; г) $y=\dfrac{1}{x^2-2x}$.

Вправи для повторення

1422. Розкладіть многочлен на множники:

а) $2a^4-13a^2+6$; б) $64a^6-1$; в) $3a^4+12$.

1423. Що більше $\sqrt{2010}-\sqrt{2012}$ чи $\sqrt{2011}-\sqrt{2013}$?

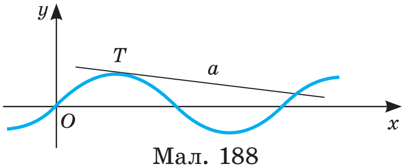
1424. Розв'яжіть нерівність:

а) $x(x-5)(x+3)(x^2-1)>0$; б) $(x-1)(x+3)(x^2-1)>0$.

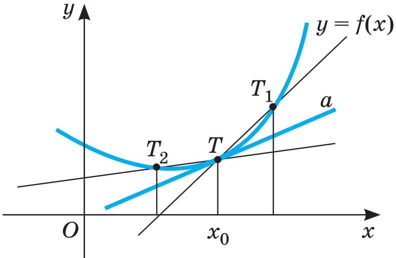
§ 28 Дотична до графіка функції і похідна

Tangent and Derivative

Ви вже знаєте, яку пряму називають дотичною до кола. А що розуміють, наприклад, під дотичною до синусоїди? Пряма a може бути дотичною до синусоїди в якійсь її точці T і перетинати цю синусоїду в інших точках (мал. 188). Що ж розуміють під дотичною до графіка функції?



Мал. 188

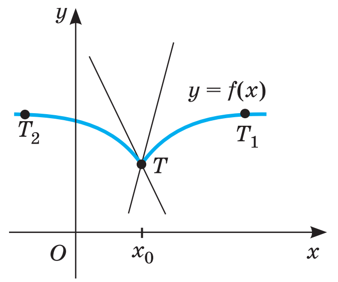


Мал. 189

Нехай дано графік функції $y=f(x)$ і на ньому точку T, яка не є кінцем графіка (мал. 189). Позначимо на даному графіку по різні боки від T довільні точки T_1 і T_2. Прямі TT_1 і TT_2, узагалі кажучи, — січні. Якщо ж точки T_1 і T_2, рухаючись по графіку, наближати досить близько до T, то TT_1 і TT_2 як завгодно близько наближатимуться до деякої прямої a. Таку пряму a (якщо вона існує) називають *дотичною до графіка функції* $y=f(x)$ у точці T.

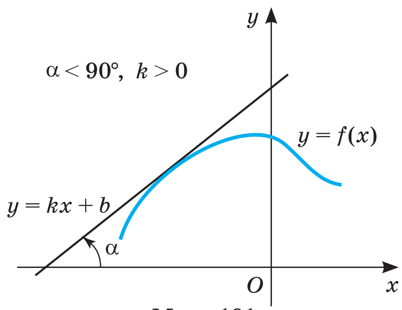
Якщо графік функції такий, як показано на малюнку 190, то при необмеженому наближенні точок T_1 і T_2 до T граничні положення січних — прямі TT_1 і TT_2 — не збігатимуться. Говорять, що в точці T дотичної до графіка не існує. І якщо T — кінцева точка графіка, то дотичної до нього в точці T не існує.

Поняття дотичної до графіка часто використовують для дослідження функцій. Розглянемо це питання спочатку в загальному випадку.

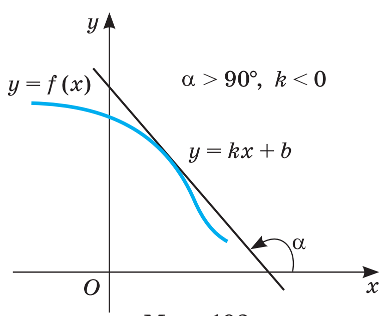


Мал. 190

Дотична — це пряма. Її рівняння має вигляд $y = kx + b$, де k — *кутовий коефіцієнт* — тангенс кута між променем дотичної, розміщеним вище від осі Ox, і додатним напрямом цієї осі. Зверніть увагу на кутовий коефіцієнт k дотичної, проведеної до графіка якої-небудь функції в його точці з абсцисою x_0. Якщо число x_0 належить проміжку зростання функції, то відповідне значення k додатне (мал. 191). Якщо x_0 належить проміжку спадання функції, то відповідне значення k від'ємне (мал. 192). І навпаки: якщо кожному значенню x_0 з деякого проміжку $(a; b)$ відповідає додатне значення k, то на $(a; b)$ дана функція зростає; якщо кожному значенню x_0 з деякого проміжку $(c; d)$ відповідає від'ємне значення k, то на $(c; d)$ функція спадає. Заслуговують на увагу і ті точки графіка функції, у яких дотична не існує і в яких вона паралельна осі Ox, тобто коли її кутовий коефіцієнт дорівнює 0.



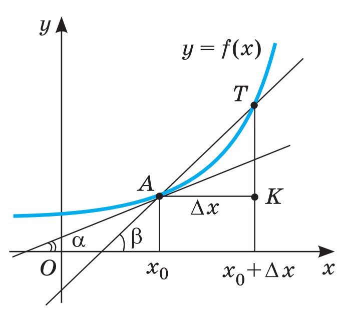
Мал. 191



Мал. 192

Отже, знаючи кутові коефіцієнти дотичних до графіка функції в тих чи інших точках, можна зробити висновок, чи зростає дана функція в цих точках, чи спадає, а також відповісти на багато інших важливих питань.

Оскільки для дослідження функцій важливо вміти визначати кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка, то розглянемо детальніше зв'язок цього коефіцієнта з досліджуваною функцією.



Мал. 193

Нехай дано графік функції $y = f(x)$ і на ньому точку A, у якій існує дотична до графіка (мал. 193). Якщо абсциса точки A дорівнює x_0, то її ордината $f(x_0)$. Надамо значенню аргументу x_0 приріст Δx. Нарощеному значенню аргументу $x_0 + \Delta x$ на графіку функції відповідає точка T з абсцисою $x_0 + \Delta x$ і ординатою $f(x_0 + \Delta x)$.

Через точки A і T проведемо прямі AK і TK, паралельні осям абсцис і ординат; вони перетнуться в деякій точці K. Тоді $AK = \Delta x$ — приріст аргументу, а $TK = \Delta y$ — приріст функції на $[x_0; x_0 + \Delta x]$.

Кутовий коефіцієнт січної AT дорівнює тангенсу кута β, тобто відношенню Δy до Δx:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то січна AT, повертаючись навколо точки A, наближається до дотичної, проведеної в точці A до графіка даної функції. Отже, якщо k — кутовий коефіцієнт цієї дотичної і $\Delta x \to 0$, то

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to k, \text{ тобто } k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\beta \to \alpha} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Так визначається кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у деякій точці x_0, якщо дотична в ній не паралельна осі Oy. Якщо дотична до графіка функції у деякій точці паралельна осі Ox, то кутовий коефіцієнт цієї дотичної дорівнює нулю.

Для обчислення значення виразу $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ чи $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ приводить розв'язування багатьох задач з механіки, електрики, біології, економіки, статистики тощо. Саме тому цей вираз отримав спеціальну назву — *похідна*.

***Похідною функції* $f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції у точці x_0 до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує.**

Похідну функції $f(x)$ в точці x_0 позначають $f'(x_0)$. Її означення записують також у вигляді рівності:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{або} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $f(x) = x^2$ в точці $x = 3$.

Розв'язання. Надамо аргументу $x = 3$ приріст Δx. Відповідний приріст функції $\Delta y = (3 + \Delta x)^2 - 3^2 = 6\Delta x + (\Delta x)^2$.

Тому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{6\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 6 + \Delta x.$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to 6.$

Отже, $f'(3) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6.$

Відповідь. $f'(3) = 6$.

Так розв'язують задачу, користуючись означенням похідної функції в точці.

Досі йшлося про похідну функції в точці. А можна розглядати похідну функції і як функцію. Нехай, наприклад, дано функцію $y = x^2$. Знайдемо її похідну в довільній точці x. Для цього надамо значенню x приріст Δx. Відповідний йому приріст функції $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

Тому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. Якщо $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to 2x$.

Маємо $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$.

Отже, похідна функції $y = x^2$ в кожній точці x її області визначення дорівнює $2x$. Пишуть: $(x^2)' = 2x$ або якщо $y = x^2$, то $y' = 2x$.

Зверніть увагу! Похідна функції в точці — це число. Коли ж говорять про похідну, не вказуючи «в точці», мають на увазі похідну як функцію: похідною функції $y = x^2$ є функція $y' = 2x$, похідною функції $y = x^3$ є функція $y' = 3x^2$ і т. д.

Знаючи це, похідну функції в точці можна обчислювати простіше, ніж за означенням похідної функції в точці.

Приклад 2. Дано функцію $f(x) = x^2$. Знайдіть $f'(3)$, $f'(0)$, $f'(-2)$.

Розв'язання. Похідною функції $f(x) = x^2$ є функція $f'(x) = 2x$. Тому $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$; $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$; $f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.

Знаходження похідної називається *диференціюванням*. Функція, яка має похідну в точці x_0, називається *диференційовною в точці x_0*. Функція, диференційовна в кожній точці деякого проміжку, називається *диференційовною на цьому проміжку*.

Доведемо, наприклад, що *лінійна функція $y = ax + b$ диференційовна в кожній точці x, $x \in R$*. Справді, приросту Δx її аргументу x відповідає приріст функції $\Delta y = a(x + \Delta x) + b - (ax + b) = a\Delta x$. Тому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{a\Delta x}{\Delta x} = a$.

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to a$. А це й означає, що в кожній точці x функція $y = ax + b$ має похідну $y' = a$.

Пишуть $(ax + b)' = a$.

Зокрема: $x' = 1$, $b' = 0$.

Похідна сталої дорівнює нулю.

З курсу планіметрії відомо, що рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M(x_0; y_0)$, має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$, де k — кутовий коефіцієнт прямої.

Як показано на с. 271, для дотичної до графіка функції $y = f(x)$ кутовий коефіцієнт дорівнює значенню похідної у точці дотику ($k = f'(x_0)$), *то можемо записати загальний вигляд рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці дотику $(x_0; y_0)$:*

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \text{ або } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Досі йшлося про дотичні до криволінійних графіків. Але ж графіком функції може бути і пряма або частина прямої. Тому для загальності міркувань домовляються дотичною до прямої у будь-якій її точці вважати цю саму пряму. Дотичною до відрізка чи променя у будь-якій його внутрішній точці вважають пряму, якій належить цей відрізок чи промінь.

Вище було встановлено, що похідна лінійної функції дорівнює коефіцієнту при змінній, тобто $(ax + b)' = a$.

Одержаний результат має очевидний геометричний зміст: дотична до прямої — графіка функції $y = ax + b$ — ця сама пряма, її кутовий коефіцієнт дорівнює a.

Перевірте себе

1. Що таке дотична до графіка функції в даній точці?
2. Що таке кутовий коефіцієнт дотичної?
3. Сформулюйте означення похідної функції в даній точці.
4. Як називають операцію знаходження похідної функції?
5. Чим є похідна функції в точці? А похідна функції на проміжку?
6. Чому дорівнює похідна сталої?
7. Яким є рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $f(x)$ у точці x_0?
8. Що означає запис $(ax + b)' = a$? Який його геометричний зміст?

Виконаємо разом

1 Знайдіть кут, який утворює з додатним напрямом осі Ox дотична до графіка функції $y = 0,5x^2 - 2$ в точці $x_0 = 1$.

Розв'язання. Визначимо спочатку кутовий коефіцієнт цієї дотичної за формулою $k = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, де Δy і Δx — приріст функції і приріст аргументу відповідно.

Знайдемо приріст функції $y = 0,5x^2 - 2$ в точці x_0.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0,5(x_0 + \Delta x)^2 - 2 - (0,5x_0^2 - 2) =$$
$$= 0,5(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) - 2 - 0,5x_0^2 + 2 =$$
$$= 0,5x_0^2 + x_0\Delta x + 0,5\Delta x^2 - 2 - 0,5x_0^2 + 2 = x_0\Delta x + 0,5\Delta x^2.$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0\Delta x + 0,5\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (x_0 + 0,5\Delta x) = x_0.$$

Оскільки $x_0 = 1$, то $k = 1$.

Відомо також, що $k = \operatorname{tg}\alpha$, тому $\operatorname{tg}\alpha = 1$, звідси $\alpha = 45°$.

Відповідь. 45°.

2 Доведіть, що для функції $y = x^3$ похідною є функція $y' = 3x^2$.

Розв'язання. $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$. Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 3x^2$. А це й означає, що похідною функції $y = x^3$ є функція $y' = 3x^2$.

3 Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2$ у його точці з абсцисою $x_0 = 5$.

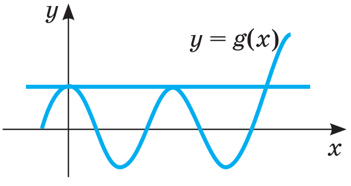
Розв'язання. *Спосіб 1*. Рівняння дотичної має вигляд $y = kx + b$. Кутовий коефіцієнт k дорівнює значенню похідної функції $y = x^2$ в точці $x_0 = 5$. $(x^2)' = 2x$, $k = 2 \cdot 5 = 10$. Отже, рівняння дотичної $y = 10x + b$. Координати точки дотику $x_0 = 5$, $y_0 = 25$. Точка з такими координатами лежить на дотичній, тому $25 = 10 \cdot 5 + b$, звідси $b = -25$. Отже, рівняння дотичної набуває вигляду $y = 10x - 25$.

Спосіб 2. Запишемо загальний вигляд рівняння дотичної:
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
Знайдемо $f'(x)$, $f'(x_0)$, $f(x_0)$: $f'(x) = 2x$, $f'(x_0) = 2 \cdot 5 = 10$, $f(x_0) = 5^2 = 25$.
Підставимо знайдені значення у рівняння дотичної:
$y = 10(x - 5) + 25$ або $y = 10x - 25$.
Відповідь. $y = 10x - 25$.

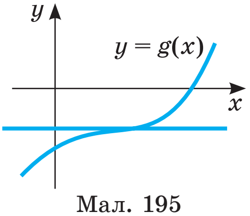
Виконайте усно

1425. Назвіть кутовий коефіцієнт прямої, заданої рівнянням:
а) $y = 2x$; б) $y = -x + 3$; в) $y = 2 + 0,5x$; г) $y = 2$.

1426. Чи може пряма, зображена на малюнках 194 і 195, бути дотичною до графіка функції $g(x)$?



Мал. 194



Мал. 195

1427. Чи можна провести дотичну до графіка функції $y = |x|$ у точці:
а) $(-1; 1)$; б) $(0; 0)$; в) $(1; 1)$?

1428. Чи можна у точці $(0; 0)$ провести дотичну до графіка функції:
а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \frac{5}{x}$; в) $y = \operatorname{tg} x$?

1429. Знайдіть значення похідної функції $y = 2x + 5$ у точці:
а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 0$; в) $x_0 = 10$; г) $x_0 = -10$.

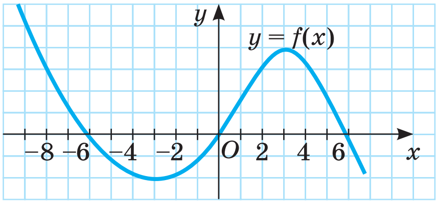
1430. Знайдіть значення похідної функції $y = x^2$ у точці:
а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 5$; в) $x_0 = 10$; г) $x_0 = -15$.

1431. Чому дорівнює похідна функції:
а) $y = 3$; б) $y = x$; в) $y = x^2$; г) $y = x^3$?

Рівень А

1432. Укажіть кілька точок, в яких дотична до графіка функції $f(x)$ (мал. 196) утворює з додатним напрямом осі Ox:

а) гострий кут; б) тупий кут.

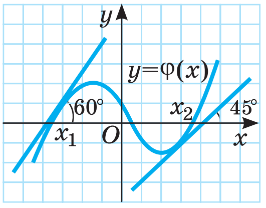


Мал. 196

1433. У яких точках дотична до графіка функції $f(x)$ (мал. 197) паралельна осі Ox?

1434. Укажіть проміжки, на яких кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x)$ (мал. 196) набуває:

а) додатних значень; б) від'ємних значень.



Мал. 197

1435. Які кутові коефіцієнти мають дотичні до графіка функції $\varphi(x)$ (мал. 197), проведені в точках x_1; x_2?

1436. Кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $\varphi(x)$ (мал. 197), проведений в деякій точці, дорівнює k. Чи існують точки, в яких:

а) $k < 0$; б) $k = 0$?

1437. Запишіть рівняння прямої, кутовий коефіцієнт якої дорівнює 3 і яка проходить через точку $A(2; 5)$.

1438. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої, заданої рівнянням:

а) $y - x + 5 = 0$; б) $x + 2y + 3 = 0$; в) $3x - 5y = 1$.

1439. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через точки $A(-3; 3)$ і $B(2; 5)$.

1440. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через точки:

а) $O(0; 0)$ і $A(5; 3)$; б) $K(0; 5)$ і $P(4; 3)$.

1441. Побудуйте графік функції $y = \frac{4}{x}$ і проведіть до нього дотичну в точці $T(2; 2)$. Знайдіть знак кутового коефіцієнта цієї дотичної.

1442. Функцію $y = f(x)$ задано на проміжку $(-3; 5)$. Кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка в кожній точці проміжку $(-3; 2)$ додатний, а в кожній точці проміжку $(2; 5)$ від'ємний. Знайдіть проміжки зростання і спадання даної функції.

1443. Проведіть дотичну до графіка функції $y = x^2$ через його точку з абсцисою $x_0 = 2$. Прикиньте, чому дорівнює її кутовий коефіцієнт. Скориставшись формулою $(x^2)' = 2x$, знайдіть точне значення кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці $x_0 = 2$.

1444. Користуючись означенням похідної функції в точці, обчисліть:

а) $f'(2)$, якщо $f(x) = x^2$;

б) $f'(-3)$, якщо $f(x) = 5x^2$;

в) $f'(4)$, якщо $f(x) = -x$;

г) $f'(1)$, якщо $f(x) = -x^3$.

1445. Знаючи, що $(x^2)' = 2x$, обчисліть значення похідної функції $y = x^2$ у точці: а) $x_0 = -2$; б) $x_0 = 3$; в) $x_0 = 0,7$; г) $x_0 = -2,8$.

1446. Знаючи, що $(x^3)' = 3x^2$, обчисліть значення похідної функції $y = x^3$ у точці: а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 5$; в) $x_0 = 10$; г) $x_0 = -1,5$.

Рівень Б

1447. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці:
а) $x_0 = 2,5$; б) $x_0 = -2,5$; в) $x_0 = \sqrt{5}$.

1448. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^3$ в його точці з абсцисою:
а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = 0$.

1449. Знайдіть координати точки дотику дотичної до графіка функції $y = x^2$, якщо кутовий коефіцієнт цієї дотичної дорівнює 6.

1450. На графіку функції $y = 0,5x^2$ позначте точки T_1, T_2, T_3 з абсцисами 0, 1, 2 і знайдіть кутові коефіцієнти січних T_1T_2, T_1T_3, T_2T_3.

1451. Доведіть за допомогою означення, що для функції $y = \frac{1}{x}$ похідною буде функція $y' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$.

1452. Доведіть за допомогою означення, що для функції $y = \sqrt{x}$ похідною буде функція $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

1453. Знайдіть за допомогою означення значення похідної функції $y = x^2 + 2x - 1$ у точці $x_0 = 10$.

1454. Доведіть за допомогою означення, що для функції $y = ax^2 + bx + c$ похідною буде функція $y' = 2ax + b$.

1455. Знайдіть похідну функції $y = x^2 + 5x + 6$ у точці:
а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 0$; в) $x_0 = 1$; г) $x_0 = 5$.

1456. Використовуючи результат задачі 1454, знайдіть похідну функції:
а) $y = 3x^2 + x - 7$; б) $y = -x^2 + 5x$; в) $y = 1 - 6x - x^2$.

1457. Перепишіть у зошит подану нижче таблицю похідних найпоширеніших функцій і вивчіть її напам'ять.

$$a' = 0;\ x' = 1;$$
$$(ax + b)' = a;$$
$$(x^2)' = 2x;\ (x^3)' = 3x^2;$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};\ \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Рівень В

1458. Доведіть за допомогою означення, що для функції $y = ax^3 + c$ похідною буде функція $y' = 3ax^2$.

1459. Знайдіть похідну функції $y = 0{,}1x^3 + 5$ у точці:
а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = 1$; г) $x_0 = 2$.

1460. Використовуючи результат задачі 1458, знайдіть похідну функції:
а) $y = 5x^3 - 7$; б) $y = -x^3 + 5$; в) $y = 1 - 6x^3$.

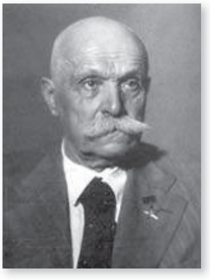
1461. Доведіть, що похідна заданої функції приймає невід'ємні значення при всіх допустимих значеннях аргументу:
а) $y = 3x - 7$; б) $y = x^3 + 1$; в) $y = \sqrt{x}$.

1462. Знайдіть похідну функції в точці $x_0 = 5$:
а) $y = (x + 2)(x - 2)$; в) $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$;
б) $y = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}$; г) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

1463. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = -\dfrac{6}{x}$ у точці:
а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = 3$; г) $x_0 = 6$.

1464. Для даної функції $y = 2x^2 + 4x$:
а) користуючись означенням, знайдіть її похідну;
б) напишіть рівняння дотичних, проведених до графіка функції у точках його перетину з віссю Ox;
в) знайдіть, у яких точках дотична до графіка функції утворює з додатним напрямом осі Ox кут 45°, 135°;
г) знайдіть, у якій точці дотична до графіка функції паралельна до прямої $2x + y - 6 = 0$;
ґ) знайдіть, у якій точці до графіка функції можна провести горизонтальну дотичну. Напишіть рівняння цієї дотичної.

1465. Дотична до графіка функції $y = x^2$ проходить через точку $A(4; 7)$. Знайдіть координати точки дотику.



Вправи для повторення

1466. Розв'яжіть рівняння:
а) $x^3 - x^2 - 6x = 0$;
б) $5x^4 - 3x^2 - 2 = 0$.

1467. Спростіть вираз:
а) $(1 - \operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x$;
б) $(\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x)\sin 2x$.

1468. Порівняйте значення виразів:
а) $\dfrac{1}{3}\sqrt{6}$ і $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{12}$; б) $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ і $-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

«Важкі й складні задачі цікавіше розв'язувати, ніж прості. І нехай це не видається парадоксом, — легше розв'язувати!»
Є. Патон

§ 29 Техніка диференціювання

Differentiation Technique

Ви вже знаєте, що таке диференціювання і яку функцію називають диференційовною (с. 272). У курсі математичного аналізу доводять таку теорему:

Якщо функція $y = f(x)$ – диференційовна у точці x_0, то вона неперервна в цій точці.

Це означає, що всі диференційовні функції обов'язково є неперервними.

Тобто якщо функція в точці x_0 має похідну, то вона в цій точці неперервна. Обернене твердження не завжди є істинним – не кожна неперервна функція є диференційовною (див. мал. 190).

Зверніть увагу! У тих точках, в яких функція $y = f(x)$ є розривною або має «злам», не існує похідної функції $y = f(x)$.

Ви вже вмієте обчислювати похідні деяких елементарних функцій, користуючись формулами: $a' = 0$; $x' = 1$; $(ax + b)' = a$; $(x^2)' = 2x$; $(x^3)' = 3x^2$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

У цьому параграфі будуть розглянуті теореми, які допоможуть знаходити похідні складніших функцій. Тут для спрощення записів замість $u(x)$, $u'(x)$, $v(x)$, ... писатимемо також u, u', v, ...

Теорема (про похідну суми). *Якщо функції u і v диференційовні в точці x, то в цій точці $(u + v)' = u' + v'$.*

Доведення. Знайдемо приріст $\Delta(u + v)$ суми даних функцій на проміжку $[x;\ x + \Delta x]$:

$$\Delta(u + v) = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x) =$$
$$= (u(x + \Delta x) - u(x)) + (v(x + \Delta x) - v(x)) = \Delta u + \Delta v.$$

Тому $\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$.

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$ і $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$. Отже, $(u + v)' = u' + v'$.

Аналогічно можна довести, що $(u - v)' = u' - v'$.

Теорема правильна також для трьох і більше функцій. Наприклад, $(u + v - w)' = ((u + v) - w)' = (u + v)' - w' = u' + v' - w'$.

Теорема (*про похідну добутку*). *Якщо функції u і v диференційовні в точці x, то $(uv)' = u'v + uv'$.*

Доведення. Знайдемо приріст $\Delta(uv)$ добутку даних функцій на проміжку $[x;\ x + \Delta x]$, врахувавши, що $u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u$ і $v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v$:

$$\Delta(uv) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) =$$
$$= (u\ (x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x) \cdot v(x) = \Delta u \cdot v(x) + u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Тому $\dfrac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u \cdot v(x)}{\Delta x} + \dfrac{u(x) \cdot \Delta v}{\Delta x} + \dfrac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}$.

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$, $\dfrac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$, $\dfrac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} \to 0$, бо $\Delta v \to 0$.

Отже, $(uv)' = u'v + uv'$.

Наслідок. *Сталий множник можна виносити за знак похідної.* Адже якщо $u = C$, де C — сталий множник, то $u' = 0$ і за теоремою про похідну добутку $(Cv)' = C'v + Cv' = Cv'$, тобто $(Cv)' = Cv'$.

Теорема (*про похідну частки*). *Якщо u і v — функції від x, диференційовні в точці x, причому в цій точці $v \neq 0$, то* $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Доведення теореми можна провести аналогічно до двох попередніх.

Теорема (*про похідну степеня*). *Якщо n — число натуральне, то*

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Доведення. Доведемо формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in N$ методом математичної індукції.

1. Перевіримо істинність рівності при $n = 1$: $x' = 1$ (рівність правильна).

2. Припустимо, що дана рівність справджується при $n = k$, $k > 1$, $k \in N$, тобто рівність $(x^k)' = kx^{k-1}$ — істинна.

Доведемо істинність рівності при $n = k + 1$, тобто доведемо рівність $(x^{k+1})' = (k + 1)x^k$.

Розглянемо ліву частину і застосуємо до неї теорему про похідну добутку $(x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = x' \cdot x^k + x \cdot (x^k)' = x^k + x \cdot kx^{k-1} = x^k + k \cdot x^k = (k + 1)x^k$.

Отже, $(x^{k+1})' = (k + 1)x^k$.

3. За принципом математичної індукції дана рівність справджується для довільного натурального числа n.

Пізніше буде показано, що доводжувана формула правильна не тільки для натуральних значень n, а й для будь-яких дійсних.

Приклади.

1. Якщо $y = x^8$, то $y' = 8x^7$.

2. Якщо $y = 5x^4$, то $y' = 5 \cdot (x^4)' = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3$.

3. Якщо $y = 2x^5 + 3x - 7$, то за теоремою про похідну суми

$$y' = (2x^5)' + (3x)' - 7' = 10x^4 + 3.$$

4. Якщо $y = \dfrac{3x^2}{x-2}$, то за теоремою про похідну частки

$$y' = \frac{(3x^2)'(x-2) - 3x^2(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{6x(x-2) - 3x^2}{(x-2)^2} = \frac{3x^2 - 12x}{(x-2)^2}.$$

З розглянутих теорем випливає, що *кожна функція* $y = f(x)$, *де* $f(x)$ — *многочлен, диференційовна на всій множині R. Тому кожний графік такої функції — лінія без розривів і зламів.* Бо коли б графік функції у якійсь точці мав розрив чи злам, то в цій точці функція не мала б похідної, тобто не була б диференційовною. Дробово-раціональна функція від x диференційовна в кожній точці x її області визначення.

Перевірте себе

1. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну суми двох функцій.
2. Як знаходять похідну добутку двох функцій?
3. Як знаходять похідну частки?
4. Чому дорівнює похідна степеня з натуральним показником?

Виконаємо разом

1 Знайдіть похідну функції $f(x) = 3x^5(1 - x^2)$.

Розв'язання. *Спосіб 1.* Скористаємося теоремою про похідну добутку:

$$f'(x) = (3x^5(1 - x^2))' = (3x^5)' \cdot (1 - x^2) + 3x^5 \cdot (1 - x^2)' =$$
$$= 15x^4 (1 - x^2) + 3x^5(-2x) = 15x^4 - 15x^6 - 6x^6 = 15x^4 - 21x^6.$$

Спосіб 2. Спочатку розкриємо дужки, а потім застосуємо теорему про похідну суми.

$f'(x) = (3x^5(1 - x^2))' = (3x^5 - 3x^7)' = 15x^4 - 21x^6$.

2 Обчисліть значення похідної функції $f(x)$ у точці $x_0 = 4$, якщо:

а) $f(x)=\dfrac{x+12}{3x}$; б) $f(x)=x^2+\sqrt{x}$.

Розв'язання. а) $f'(x)=\left(\dfrac{x+12}{3x}\right)'=\dfrac{(x+12)'\cdot 3x-(x+12)(3x)'}{9x^2}=$

$$=\frac{1\cdot 3x-(x+12)\cdot 3}{9x^2}=\frac{3x-3x-36}{9x^2}=-\frac{4}{x^2};\quad f'(4)=\frac{-4}{16}=\frac{-1}{4}.$$

б) $f(x)=\left(x^2+\sqrt{x}\right)'=\left(x^2\right)'+\left(\sqrt{x}\right)'=2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(4)=8+\dfrac{1}{4}=8\dfrac{1}{4}$.

3 Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^4 + x^2$ в точці $x_0 = -2$.

Розв'язання. Рівняння дотичної має вигляд:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Знайдемо $f(-2)$ і $f'(-2)$.

$$f(-2) = (-2)^4 + (-2)^2 = 16 + 4 = 20;$$
$$f'(x) = (x^4 + x^2)' = 4x^3 + 2x;\ f'(-2) = 4(-2)^3 + 2(-2) = -36.$$

Отже, $y = -36(x + 2) + 20$ або $y = -36x - 52$.

Виконайте усно

Знайдіть похідну функції (1469–1470).

1469. а) $y = x^{10}$; б) $y = x^{17}$; в) $y = -5x^{20}$; г) $y = 0{,}1x^{10}$.

1470. а) $y = x^5 - 7x$; б) $y = 1 - x^7$; в) $y = x^4 + x^2$; г) $y = x^3 + 5x$.

Обчисліть значення похідної в точці $x_0 = 1$ (1471–1472).

1471. а) $y=\frac{1}{2}x^{10}+3$; б) $y=\frac{1}{3}x^6+2$; в) $y=\frac{1}{6}x^2-7$.

1472. а) $y=2\sqrt{x}$; б) $y=2+\sqrt{x}$; в) $y=2x-\sqrt{x}$.

Рівень А

Знайдіть похідну функції (1473–1479).

1473. а) $y = x^6$; в) $y = -x^3$; ґ) $y = x^{10}$; е) $y = -x$;
б) $y = 3x^2$; г) $y = 2x^7$; д) $y = -7x^8$; є) $y = 0{,}1x$.

1474. а) $y = x^2 + x^3$; б) $y = x^7 - x^3$; в) $y = 4x^5 - 2$; г) $y = -5x^3 + 4$.

1475. а) $y = 3x^2 - 5x + 7$; в) $y = 2 - 3x - 8x^2$;
б) $y = x^4 + 3x^3 - 5x + 4$; г) $y = 5 - 2x + 7x^2 - 3x^3$.

1476. а) $y=x\sqrt{x}$; б) $y=(5+x^2)\sqrt{x}$; в) $y=x^5(1-\sqrt{x})$.

1477. а) $y=\frac{1}{x}(2x+1)$; б) $y=\frac{1}{x}(x^6-5)$; в) $y=(1-x^{20})\frac{1}{x}$.

1478. а) $y=\frac{2}{x}$; б) $y=\frac{x-3}{x}$; в) $y=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$.

1479. а) $y=\frac{2x+1}{5x-3}$; б) $y=\frac{x^2}{5-x}$; в) $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2-4}$.

Обчисліть значення похідної в даних точках (1480–1482).

1480. $f(x) = x^2 - 5x$, $x_0 = 1$; $x_0 = 0$; $x_0 = -2$.

1481. $f(x) = 3x^4 + 2x - 10$, $x_0 = -2$; $x_0 = 0$; $x_0 = \sqrt{2}$.

1482. $f(x) = -8x^{-1} + 3$, $x_0 = -2$; $x_0 = 1$; $x_0 = \pi$.

Рівень Б

Визначте двома способами похідну функції (1483–1484).

1483. а) $y = x^2(x^3 - 5)$; в) $y = x^3(3x^2 - 1)$;
б) $y = (x - 2)(x + 3)$; г) $y = (x - 3)(x^2 - 2x + 4)$.

1484. а) $y = 3x^2(5 - x^3)$; б) $y = -7x(x^2 - 4)$; в) $y = 5(x + 3)^2$; г) $y = (2x - 7)^2$.

Напишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в його точці з абсцисою x_0 (1485–1486).

1485. а) $y = x^2 - 2x$, $x_0 = 3$; $x_0 = -2$; б) $y=\sqrt{x}$, $x_0 = 1$; $x_0 = 4$.

1486. а) $y = 3x^4 + 2x$, $x_0 = -2$; $x_0 = 0$; б) $y = x^{-2}$, $x_0 = -1$; $x_0 = 1$.

Знайдіть похідну функції (1487–1491).

1487. а) $y=\frac{2}{x}+3x$; в) $y=5-\frac{3}{x^2}$; ґ) $\sqrt{x}+\frac{3}{x}$.

б) $y=\frac{2(x-5)}{3x}+\sqrt{x}$; г) $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x-\frac{3}{x}\right)$;

1488. а) $y=(1-x+x^3)(5\sqrt{x}+x)$; б) $y=(5-\sqrt{x})(x^2+4\sqrt{x})$.

1489. а) $y=\left(\frac{1}{x}-x^{20}\right)(1-2\sqrt{x})$; б) $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)\left(5x^6-\frac{1}{x}\right)$.

1490. а) $y=\frac{x^2+3x-7}{2x+1}$; б) $y=\frac{5x^4-1}{x^3-x+4}$; в) $y=\frac{5-0{,}1x^{10}}{x^{10}-x+5}$.

1491. а) $y=\frac{\sqrt{x}+2x}{1-\sqrt{x}}$; б) $y=\frac{5\sqrt{x}-1}{x^3-x+2}$; в) $y=\frac{x^7+3x-7}{2\sqrt{x}+x^3}$.

1492. Розв'яжіть рівняння $f'(x)=0$, якщо:

а) $f(x) = x - 12x^3$; б) $f(x) = x^5 - 15x^3 + 4$.

1493. Розв'яжіть нерівність $f'(x) < 0$, якщо:

а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; б) $f(x) = 12x - x^3$.

Рівень В

1494. Знайдіть функцію $y = f(x)$, якщо її похідна $f'(x) = 2x + 3$. Скільки розв'язків має задача?

1495. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в його точці з абсцисою x_0:

а) $f(x)=\frac{4}{x}+\frac{x}{4}$, $x_0=5$; в) $f(x)=\frac{1}{x^2}(\sqrt{x}-5)$, $x_0=25$;

б) $f(x)=\frac{x^2+2}{3+x}$, $x_0=7$; г) $f(x)=\frac{1}{3}(0{,}5x^2-\sqrt{x})^2$, $x_0=4$.

1496. Знайдіть абсцису точки, в якій дотична до графіка функції $f(x)$ паралельна осі Ox:

а) $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 2$; в) $f(x) = x^3 - 3x + 1$;

б) $f(x) = x^2(2x - 9)$; г) $f(x) = 2x(3 - 8x^3)$.

1497. Знайдіть координати точки, в якій дотична до графіка функції $y = f(x)$ паралельна прямій $y = 4x + 3$:

а) $f(x) = 0{,}25x^4 + x^3 + 1$; б) $f(x)=4\sqrt{x}-x+0{,}5x^2$.

1498. Знайдіть абсцису точки, в якій дотична до графіка функції $y = f(x)$ перпендикулярна прямій $y = 11x + 3$:

а) $f(x)=\frac{x^2+2}{3+x}-x$; б) $f(x)=\frac{x}{11}-2\sqrt{x}+\sqrt{3}$.

1499. Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $y = (2x - 1)(4x^2 - 4x + 1)$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

1500. Напишіть рівняння дотичних до графіка функції $y = x^2 - 5x + 7$, які разом з осями координат утворюють рівнобедрений трикутник. Знайдіть площу цього трикутника.

1501. Напишіть рівняння дотичних, проведених до графіка функції $y = x^2 + 2x - 1$ з точки $A(-1; -3)$. Виконайте малюнок.

1502. З точки $A(2; 6)$ до кривої $y = -x^2 + 2x + 2$ проведені дотичні. Знайдіть відстань між точками дотику.

1503. Складіть рівняння спільних дотичних до графіків функції

$$y = -x^2 + 2x - 2 \text{ і } y = x^2 + 2x.$$

1504. Знайдіть точку перетину дотичних до графіка функції $y = x^2 - |5x - 1|$, проведених через точки з абсцисами:
а) $x_0 = 1$, $x_0 = 2$; б) $x_0 = -2$, $x_0 = 2$; в) $x_0 = -1$, $x_0 = -2$.

1505. При яких значеннях параметра a дотична до графіка функції $y = x^3 + ax^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$ проходить через точку:
а) $A(0;5)$; б) $A(3; 4)$?

Вправи для повторення

1506. Побудуйте графік функції:
а) $y = \sin x$; б) $y = 2\sin x$; в) $y = 2\sin x - 1$.

1507. Спростіть вираз:
а) $\cos 3x - \sin 4x - \cos 5x$; б) $\sin 10x - \sin 6x - 2\sin 4x$.

1508. Розв'яжіть рівняння:
а) $x - \sqrt{x+8} = 4$; б) $x^2 - 3x + 1 = 2\sqrt{x^2 - 3x}$.

§ 30 Похідні тригонометричних функцій

Trigonometric Functions Derivatives

Розглянемо похідні тригонометричних функцій. У кожній точці області визначення функції правильні такі формули:

$$(\sin x)' = \cos x; \; (\cos x)' = -\sin x; \; (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \; (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Для доведення двох перших згадаємо першу чудову границю (див. с. 255), а саме: коли $x \to 0$, то $\sin x$ все менше відрізняється від x, тобто $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Теорема (*про похідну синуса*). *Для кожного дійсного* x $(\sin x)' = \cos x$.

Доведення. Знайдемо приріст функції $\sin x$ на проміжку $[x;\ x + \Delta x]$:

$$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Тому $\dfrac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \dfrac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right).$

Якщо $\Delta x \to 0$, то й $\dfrac{\Delta x}{2} \to 0$. У цьому випадку $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$. Відомо також, що функція $\cos x$ неперервна на R. Тому якщо $\dfrac{\Delta x}{2} \to 0$, то $\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x$.

Отже, для довільного x

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = 1\cdot\cos x = \cos x.$$

Тобто завжди $(\sin x)' = \cos x$.

Теорема (*про похідну косинуса*). *Для кожного дійсного* x $(\cos x)' = -\sin x$.

Доведення. $\Delta \cos x = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$,

$$\frac{\Delta \cos x}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то й $\dfrac{\Delta x}{2} \to 0$, а $\sin\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) \to \sin x$, оскільки функція $\sin x$ неперервна на R. Отже, при кожному дійсному x

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(-\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right) = -\sin x \cdot 1 = -\sin x.$$

Тобто $(\cos x)' = -\sin x$.

Формули похідних тангенса і котангенса можна вивести на основі теореми про похідну частки:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Отже, в кожній точці x області визначення функцій:

$$(\sin x)' = \cos x; \ (\cos x)' = -\sin x; \ (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \ (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Перевірте себе

1. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну синуса.
2. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну косинуса.
3. Чому дорівнює похідна тангенса? А котангенса?

Виконаємо разом

1 Знайдіть похідну функції $f(x) = \sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою про похідну добутку:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} x\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' \cdot \operatorname{tg} x + \sqrt{x} \cdot (\operatorname{tg} x)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \operatorname{tg} x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x \cos x + 2x}{2\sqrt{x} \cos^2 x} = \frac{0{,}25 \sin 2x + x}{\sqrt{x} \cos^2 x}.$$

Відповідь. $\dfrac{0{,}25 \sin 2x + x}{\sqrt{x} \cos^2 x}$.

2 Обчисліть значення похідної функції $y = 3\sin x + 5\cos x$ у точці $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою про похідну суми:
$y' = (3\sin x + 5\cos x)' = (3\sin x)' + (5\cos x)' = 3\cos x - 5\sin x$.

Якщо $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, то $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3\cos\dfrac{\pi}{4} - 5\sin\dfrac{\pi}{4} = 3 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 5 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$.

Відповідь. $-\sqrt{2}$.

3 У якій точці дотична, проведена до графіка функції $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 5$, $x \in [0; \pi]$, паралельна прямій $y = 2x - 1$?

Розв'язання. В шуканій точці кутовий коефіцієнт k дотичної дорівнює 2, бо паралельні прямі мають рівні кутові коефіцієнти.

Крім того, кутовий коефіцієнт k дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0, визначається формулою $k = f'(x_0)$. Можемо скласти рівняння $f'(x_0) = 2$.

Знайдемо $f'(x)$: $f'(x) = \left(\sqrt{3}\sin x - \cos x + 5\right)' = \sqrt{3}\cos x + \sin x$.

Абсцису шуканої точки знайдемо, розв'язавши рівняння $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2$.

Маємо: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\sin x = 1$ або $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$, звідси $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in N$.

Проміжку [0; π] належить тільки одна така точка: $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Тоді $y_0 = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6} + 5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 = 5.$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{6}; 5\right)$.

Виконайте усно

Знайдіть похідну функції (1509–1510).

1509. а) $y = 3\sin x$; б) $y = 2\operatorname{tg} x$; в) $y = -5\cos x$.

1510. а) $y = 2 + \cos x$; б) $y = 1 + \operatorname{ctg} x$; в) $y = \sqrt{3} - \sin x$.

1511. Знайдіть значення похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0, якщо:
а) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 2\pi$; в) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \pi$.

1512. Чи правильно, що похідна функції $y = \operatorname{ctg} x$ набуває лише від'ємних значень? А функції $y = \cos x$?

Рівень А

Знайдіть похідну функції (1513–1520).

1513. а) $y = 2\sin x + 1$; б) $y = \sin x + 2x$; в) $y = 3\cos x + 2$; г) $y = -\cos x + 3x$; ґ) $y = 4\operatorname{tg} x - 3$; д) $y = \operatorname{tg} x + 4x$.

1514. а) $y = x^2 + \cos x$; б) $y = \sqrt{x} + \operatorname{ctg} x$; в) $y = 3x^4 - \sin x$; г) $y = 2\sqrt{x} - \sin x$; ґ) $y = 2x^5 + \operatorname{tg} x$; д) $y = -\sqrt{x} + \cos x$.

1515. а) $y = 2\sin x + 3\cos x$; б) $y = 5\sin x - \operatorname{ctg} x$; в) $y = 4\operatorname{tg} x - 3\cos x$; г) $y = 11\cos x - 2\operatorname{tg} x$.

1516. а) $y = \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$; б) $y = 0{,}5\cos x + \operatorname{tg} x$; в) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x - \frac{2}{3}\cos x$; г) $y = -4\sin x + \operatorname{ctg} x$.

1517. а) $y = x\sin x$; б) $y = x\operatorname{tg} x$; в) $y = \sqrt{x}\cos x$.

1518. а) $y = x^3\sin x$; б) $y = x^2\operatorname{ctg} x$; в) $y = x^5\cos x$.

1519. а) $y = \frac{2x}{\sin x}$; б) $y = \frac{\cos x}{x-5}$; в) $y = \frac{x^2}{\cos x}$.

1520. а) $y = \frac{\cos x}{x^2+1}$; б) $y = \frac{x^2-1}{\sin x}$; в) $y = \frac{1+\sin x}{\sqrt{x}}$.

Рівень Б

Знайдіть двома способами похідну функції (1521–1522).

1521. а) $y = (1 - x)\sin x$; б) $y = (x + 3)\cos x$; в) $y = x(2 + \operatorname{ctg} x)$.

1522. а) $y = (x^2 + 1)\cos x$; б) $y = \left(\sqrt{x} - 1\right)\sin x$; в) $y = \sqrt{x}\,(\operatorname{tg} x - 3)$.

Обчисліть значення похідної функції в даних точках (1523–1524).

1523. а) $y = 2\sin x - 13\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; б) $y = 4\cos x + x\sqrt{2}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

1524. а) $y = \frac{\sin x}{x}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; б) $y = \frac{\cos x}{x}$, $x_0 = \pi$.

1525. Обчисліть $f'(0)$, $f'(\pi)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f'(3)$, якщо $f(x) = x\cos x$.

Напишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в його точці з абсцисою x_0 (1526–1527).

1526. а) $y = 2 + \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; б) $y = 4\operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

1527. а) $y = \sin x + \cos x$, $x_0 = \pi$; б) $y = \operatorname{tg} x - \cos x$, $x_0 = \pi$.

1528. В яких точках дотична, проведена до графіка функції $y = 2\sin x$, паралельна прямій:
а) $y = 2x - 5$; б) $y = x + 3$?

1529. Знайдіть похідну функції:
а) $y = \sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x$; в) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;
б) $y = \cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x$; г) $y = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$.

Обчисліть (1530–1532).

1530. $f'(0{,}5\pi)$, якщо: а) $f(x) = x^2 + x + \sin x$; б) $f(x) = x + x^2\sin x$.

1531. $f'(\pi)$, якщо: а) $f(x) = 1 + x + \cos x$; б) $f(x) = x(1 + \cos x)$.

1532. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, якщо: а) $f(x) = x\cos x + \frac{x^2}{\pi} + \frac{x^2}{4}$; б) $f(x) = \frac{x}{\cos x} - \frac{x^2}{3}$.

Знайдіть похідну функції (1533–1534).

1533. а) $y = \sin x \cos x$; б) $y = \sin 2x$.

1534. а) $y = \cos^2 x$; б) $y = \cos 2x$.

Знайдіть похідну функції й обчисліть її значення в точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{4}$ (1535–1538).

1535. а) $y = 5\operatorname{tg} x(\sin x + 2)$; в) $y = (3x + \sqrt{x})(\cos x - 5)$;
б) $y = \sqrt{x}(1 - \operatorname{ctg} x)$; г) $y = (4 - x)(\cos x + 7)$.

1536. а) $y = (5 + 2\cos x)(1 - \operatorname{tg} x)$; в) $y = (4x - \pi)(\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x)$;
б) $y = (\sin x + \operatorname{ctg} x)\left(\frac{1}{x} + 3\right)$; г) $y = (\operatorname{tg} x - 2\sin x)\left(\frac{1}{x} - \cos x\right)$.

1537. а) $y = \frac{1 + \sin x}{2\operatorname{tg} x}$; б) $y = \frac{5\cos x - 1}{5 + \operatorname{tg} x}$; в) $y = \frac{2x - \operatorname{tg} x}{\cos x}$.

1538. а) $y = \frac{\cos x + 2x}{\sin x}$; б) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x + 2\cos x}$; в) $y = \frac{3x}{2\operatorname{tg} x + x}$.

Рівень В

1539. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = g'(x)$, якщо:
а) $f(x) = \sin x \cos x$, $g(x) = 0,5x + 5$;
б) $f(x) = x\cos x$, $g(x) = \sin x$.

1540. Розв'яжіть нерівність $f'(x) > g'(x)$, якщо:
а) $f(x) = x + \sin x$, $g(x) = x - \cos x$;
б) $f(x) = \sin x \cos x$, $g(x) = 1 - 0,5x$.

1541. При яких значеннях x правильна рівність $y' \cdot y + y^2 = 0$, якщо:
а) $y = 2\sin x$; б) $y = 3\cos x$; в) $y = 4\operatorname{tg} x$?

1542. При яких значеннях x правильна рівність $(y')^2 + y^2 = 1$, якщо:
а) $y = 1 - \sin x$; б) $y = 1 - \cos x$; в) $y = \sin x + \cos x$?

1543. Напишіть рівняння такої дотичної до графіка функції $y = f(x)$, $x \in (0; \pi)$, яка утворює з віссю абсцис кут 45°, якщо:
а) $f(x) = x + 2\sin x$; б) $f(x) = 2x + \sin x \cos x$.

1544. До графіка функції $f(x) = \sin x \cos x$ проведено дотичні в точках із координатами $(a;\ f(a))$, а до графіка функції $g(x) = 2 + \sin x$ — у точках $(a;\ g(a))$. Знайдіть усі такі пари точок, дотичні в яких, проведені до графіків функцій $f(x)$ і $g(x)$, паралельні між собою. Запишіть рівняння однієї з пар таких дотичних.

1545. Якою формулою можна задати функцію $y = f(x)$, якщо:
а) $y' = 2x - \sin x$; б) $y' = x^2 + 3\cos x$; в) $y' = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{\sin^2 x}$?

1546. Знайдіть функцію $y = f(x)$, якщо:
а) $f'(x) = 2\cos x$ і $f(\pi) = 3$;
б) $f'(x) = \dfrac{1}{5\sin^2 x}$ і $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0,8$;
в) $f'(x) = \sin x$ і $f(\pi) = 2$;
г) $f'(x) = 4 - \dfrac{1}{\cos^2 x}$ і $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \pi$.

1547. Знайдіть кут між дотичними, проведеними до графіків функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$, у точці $x_0 = 0$.

Вправи для повторення

1548. Обчисліть границі:
а) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x+1}{x^2 - 3x + 4}$;
б) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{x^2 - 3x - 4}$.

1549. При яких значеннях x дана функція має найменше значення:
а) $y = x^2 - 6x + 9$;
б) $y = 4x^2 - 12x - 3$;
в) $y = x^2 + 4x + 7$;
г) $y = 4x^2 - 4x + 1$?

1550. Витрати на виготовлення виробу становлять 1250 грн, а його ціна — 1750 грн. Обчисліть націнку на товар у відсотках.

§ 31 Похідна складеної функції

Composite Function Derivative

Досі розглядались похідні функцій, аргументами яких є змінна x, наприклад $y = x^n$, $y = \sin x$. А як знаходити похідні функцій $y = (2x + 1)^{10}$, $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$? Кожну з них можна розглянути як функцію $y = f(u)$, де $u = h(x)$, тобто $y = f(h(x))$. Таку функцію називають *складеною*, а функції $u = h(x)$ і $f(u)$ — відповідно внутрішньою і зовнішньою функціями.

Розглядаючи у функції $y = f(u)$ змінну u як аргумент, можна знайти і похідну цієї функції по u. Її ми позначатимемо знаком y'_u. Похідні функцій по x, як і раніше, позначатимемо символами y', u'.

Теорема (*про похідну складеної функції*). *Нехай дано функцію $y = f(u)$, де $u = h(x)$. Якщо в якійсь точці x існує похідна u'* і у відповідній точці u існує похідна y'_u, то існує також похідна y', *причому* $y'=y'_u\cdot u'$.

Строге доведення цієї теореми важке, тому обмежимося тільки його схемою. Похідна y' дорівнює границі відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, коли $\Delta x \to 0$. Вважаючи, що $\Delta u\neq 0$, помножимо чисельник і знаменник цього відношення на Δu:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (*)$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то і $\Delta u \to 0$, бо йдеться про функцію $u = h(x)$, диференційовну в точці x, а отже — неперервну. Тому якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to y'$, $\frac{\Delta y}{\Delta u}\to y'_u$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}\to u'$ і з рівності (*) випливає доводжувана рівність $y'=y'_u\cdot u'$.

Досі йшлося про похідну y' в якійсь фіксованій точці x. Якщо ж дана складена функція $y = f(h(x))$ диференційовна в кожній точці x деякого проміжку, то рівність $y'=y'_u\cdot u'$ справджується для всього проміжку. Отже, користуючись цією рівністю, можна знаходити похідну даної функції і як функцію, задану на цьому проміжку.

Приклад. Знайдемо похідну функції $y = (2x + 1)^{10}$. Це функція $y = u^{10}$, де $u = 2x + 1$. Ці функції диференційовні на R, $y'_u=10u^9$, $u' = 2$.

Отже, $y = 10u^9 \cdot 2 = 20u^9 = 20(2x + 1)^9$.

Не обов'язково, розв'язуючи такі вправи, вводити змінну u. Її можна тільки уявляти і відразу писати, наприклад:

$$(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3\cos 3x;$$

$$(\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

Нерідко буває, що похідною даної функції $y = f(x)$ є деяка функція від того самого аргументу x: $y' = \varphi(x)$. Її також можна диференціювати: знаходити похідну від похідної. У цьому випадку кажуть про знаходження *похідної другого порядку*. Похідну від функції другого порядку називають похідною третього порядку.

Для прикладу розглянемо функцію $y = x^4 + 2x^2 + 1$. Знайдемо похідну цієї функції та похідні утворених функцій і запишемо відповідні назви:

$y' = (x^4 + 2x^2 + 1)' = 4x^3 + 4x = y'$ — похідна першого порядку;

$(y')' = (4x^3 + 4x)' = 12x^2 + 4 = y''$ — похідна другого порядку;

$(y'')' = (12x^2 + 4)' = 24x = y'''$ — похідна третього порядку;

$(y''')' = (24x)' = 24 = y^{(4)}$ — похідна четвертого порядку;

$(y^{(4)})' = (24)' = 0 = y^{(5)}$ — похідна п'ятого порядку.

Зрозуміло, що всі похідні наступних порядків $y^{(n)}$ $(n > 5)$ функції $y = x^4 + 2x^2 + 1$ також дорівнюють нулю.

Похідні другого і вищих порядків використовуються для дослідження функцій різної природи. Про це ви дізнаєтеся у наступних параграфах.

Перевірте себе

1. Яку функцію називають складеною? Наведіть приклади.
2. Як знаходять похідну складеної функції? Наведіть приклади.
3. Як позначають похідну другого порядку? А третього?
4. Як знайти похідну другого порядку? А третього?

Виконаємо разом

1 Знайдіть $f(g(x))$, якщо $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin x$.

Розв'язання. За умовою $f(x) = \sqrt{x}$ — зовнішня функція, а $g(x) = \sin x$ — внутрішня. Отже, аргументом зовнішньої функції має стати функція $g(x) = \sin x$, тобто замість x у виразі $\sqrt{x}$ слід записати $\sin x$. Маємо: $f(g(x)) = \sqrt{\sin x}$.

2 Виведіть формулу для обчислення похідної функції $y = \sqrt{u}$.

Розв'язання. З даної рівності маємо: $u = y^2$, $u' = 2y \cdot y'$, звідси $y' = \dfrac{u'}{2y} = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Зокрема, якщо $u = x$, то $u' = 1$. Отже, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3 Знайдіть значення похідної функції $y=\sqrt{x^3+x^2+x+1}$ у точці $x_0 = 1$.

Розв'язання.

$$y'=\left(\sqrt{x^3+x^2+x+1}\right)=\frac{\left(x^3+x^2+x+1\right)'}{2\sqrt{x^3+x^2+x+1}}=\frac{3x^2+2x+1}{2\sqrt{x^3+x^2+x+1}}.$$

Якщо $x_0 = 1$, то $y'(x_0) = y'(1) = 1,5$.

4 Знайдіть y'', якщо $y = \cos(x^2 - 1)$.

Розв'язання.

$y' = (\cos(x^2 - 1))' = -\sin(x^2 - 1) \cdot (x^2 - 1)' = -\sin(x^2 - 1) \cdot 2x$.

$$y'' = (-\sin(x^2 - 1) \cdot 2x)' = -2(x \cdot \sin(x^2 - 1))' =$$
$$= -2(\sin(x^2 - 1) + x \cdot \cos(x^2 - 1) \cdot 2x) = -2\sin(x^2 - 1) - 4x^2 \cdot \cos(x^2 - 1).$$

Виконайте усно

1551. Знайдіть $f(g(x))$, якщо:

а) $f(x) = x^3$ і $g(x) = \operatorname{tg} x$;
в) $f(x) = \operatorname{tg} x$ і $g(x) = x^3$;
б) $f(x) = 2x - 1$ і $g(x) = \operatorname{ctg} x$;
г) $f(x) = \operatorname{ctg} x$ і $g(x) = 2x - 1$.

1552. Знайдіть $f(x)$ і $g(x)$, якщо:

а) $f(g(x)) = \sin(x^2 - 5)$; б) $f(g(x))=\sqrt{1-x^3}$; в) $f(g(x)) = (\operatorname{tg} x + 1)^5$.

Знайдіть похідну функції (1553–1554).

1553. а) $y = \sin 3x$; б) $y = \cos 2,5x$; в) $y = \sin x^2$; г) $y = \operatorname{tg}(x^2 - 1)$.

1554. а) $y=\sqrt{2x}$; б) $y=\sqrt{2x+3}$; в) $y=\sqrt{2-3x}$; г) $y=\sqrt{\sin x}$.

Знайдіть другу похідну функції (1555–1556).

1555. а) $y = 3x$; б) $y = 2,5x^2$; в) $y = 5x + 7$; г) $y = -x^3$.

1556. а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$; в) $y = \sin 5x$; г) $y = \cos 3x$.

Рівень А

Знайдіть $f(g(x))$, якщо відомі функції $f(x)$ і $g(x)$ (1557–1558).

1557. а) $f(x) = x^2$ і $g(x) = 2x + 7$; в) $f(x) = 2x + 7$ і $g(x) = x^2$;
б) $f(x)=\sqrt{x}$ $g(x) = 3 - 4x$; г) $f(x) = 3 - 4x$ і $g(x)=\sqrt{x}$.

1558. а) $f(x)=\frac{2}{x}$ і $g(x) = x^2 + 3$; в) $f(x) = x^2 + 3$ і $g(x)=\frac{2}{x}$;
б) $f(x) = \sin x$ і $g(x) = 3x + 4$; г) $f(x) = 3x + 4$ і $g(x) = \sin x$.

За відомою функцією $y = f(g(x))$ знайдіть $f(x)$ і $g(x)$ (1559–1560).

1559. а) $y = (3x + 10)^3$; б) $y = (x^2 + 5x - 1)^4$; в) $y=\sqrt{x^2-3x}$.

1560. а) $y=\frac{1}{\sqrt{5-2x}}$; б) $y=\frac{1}{2x+4}$; в) $y=\frac{10}{\left(3x-x^2\right)^3}$.

Знайдіть похідну функції (1561–1566).

1561. а) $y = (x + 3)^{20}$; в) $y = (2 - x)^7$; ґ) $y = (1 - x^3)^5$;
б) $y = 5(1 - 2x)^7$; г) $y = (3 + x^2)^9$; д) $y = (2x + 1)^5$.

1562. а) $y = \sin 4x$; в) $y = \operatorname{ctg} 2x$; ґ) $y = \operatorname{tg} 3x$;
б) $y = \operatorname{tg}\frac{3x}{4}$; г) $y = \sin\frac{x}{3}$; д) $y = \cos\frac{2x}{3}$.

1563. а) $y = 2 + \sin 3x$; б) $y = 1 + 3x$; в) $y = \sin x + \sin 2x$; г) $y = \cos x - \cos 2x$.

1564. а) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$; в) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y = (3x + 1)$.

1565. а) $y = x\sin 2x$; б) $y = x\cos 3x$; в) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; г) $y = x\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$.

1566. а) $y = \sqrt{x^2 - 5}$; б) $y = \sqrt{x + 3} - \sqrt{3x}$; в) $y = \sqrt{(x - 1)(x + 2)}$; г) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

1567. Обчисліть значення похідної функції у точці $x_0 = \frac{\pi}{12}$.

а) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$; в) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$; г) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

1568. Обчисліть значення похідної функції у точці x_0.

а) $y = (3x - 4)^7$, $x_0 = 2$; в) $y = \sqrt{25 - 9x}$, $x_0 = 1$;
б) $y = (4 - 5x)^8$, $x_0 = 1$; г) $y = \sqrt{7x + 1}$, $x_0 = 5$.

Рівень Б

Запишіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 (1569–1570).

1569. а) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; б) $y = \sqrt{2x + 3}$, $x_0 = 3$.

1570. а) $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; б) $y = \sqrt{5x - 1}$, $x_0 = 2$.

Спростіть формулу, що задає функцію, і знайдіть її похідну (1571–1573).

1571. а) $y = 2\cos^2 x - 1$; в) $y = 1 - 2\sin^2 3x$;
б) $y = 2\sin^2 x \cos^2 x$; г) $y = \sin^2 8x \cos^2 8x$.

1572. а) $y = \sin 8x \cos 5x - \cos 8x \sin 5x$;
б) $y = \cos 4x \cos 6x + \sin 4x \sin 6x$.

1573. а) $y = \sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x$;
б) $y = \cos\frac{x}{3}\cos\frac{5x}{6} - \sin\frac{x}{3}\sin\frac{5x}{6}$.

Знайдіть $f''(x)$ (1574–1577).

1574. а) $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$; б) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 5$.

1575. а) $f(x) = x^5 - 7x^3 + 5x$; б) $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2$.

1576. а) $f(x) = \sin 5x + x^2$; б) $f(x) = \cos 2x + x$.

1577. а) $f(x) = 1 - \cos(2 - x)$; б) $f(x) = 0{,}5x - \sin(5 + 3x)$.

Знайдіть похідну функції (1578–1580).

1578. а) $y = \sin x \cos 2x$; б) $y = \cos x \sin 3x$; в) $y = \sin x \cos\frac{x}{2}$; г) $y = \cos x \cos\frac{x}{3}$.

1579. а) $y = \sin^4 x$; б) $y = 5\mathrm{tg}^3 x$; в) $y = \sqrt{\sin x}$; г) $y = \sqrt{\mathrm{tg}\, x}$.

1580. а) $y = \frac{\cos 2x}{x-1}$; б) $y = \frac{\cos 2x}{1-\sin x}$.

Рівень В

1581. Обчисліть значення похідної функції у точці $x_0 = 0$.

а) $y = (x^2 - 3x + 1)^7$; б) $y = \sqrt{(x-1)(x-4)}$; в) $\sqrt{\frac{x+1}{x+4}}$; г) $y = \left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)^3$.

1582. Обчисліть значення похідної функції у точці x_0.

а) $y = (x + 2\sin x)^2$, $x_0 = \pi$; в) $y = \sqrt{\sin x \cos x}$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

б) $y = \sqrt{\frac{1-\sin x}{\cos x}}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; г) $y = \left(\frac{1+\sin x}{1-\cos x}\right)^3$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Запишіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 (1583–1584).

1583. а) $y = \mathrm{tg}\, 6x$, $x_0 = \frac{\pi}{24}$; б) $y = \mathrm{ctg}^2 x - 1$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

1584. а) $y = \mathrm{ctg}\frac{x}{3}$, $x_0 = \pi$; б) $y = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

1585. Знайдіть площу трикутника, утвореного координатними осями і дотичною, проведеною до графіка функції $y = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$ у точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

1586. Знайдіть площу трикутника, утвореного бісектрисами координатних кутів і дотичною, проведеною до графіка функції $y = 2\sqrt{x^2-5}$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.

1587. Доведіть, що графіки функцій $y = \sqrt{3x+1}$ і $y = \sqrt{5x-x^2}$ у точці перетину мають спільну дотичну. Напишіть її рівняння.

1588. Дотична, проведена до графіка функції $y = \frac{6x}{\sqrt{1-2x}}$ у точці з абсцисою $x_0 = -3$, має вигляд $3x + by = a$. Знайдіть a і b.

1589. Знайдіть другу похідну функції:

а) $y = \frac{1}{4}\mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \frac{1}{x^2-1}$.

1590. Знайдіть похідну четвертого порядку функції:

а) $y = x\sin x$; б) $y = x\cos x$.

1591. Виведіть формули для знаходження похідної n-го порядку для функції:
а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$; в) $y = (x + 1)^{-1}$.

«Математика віддає свої фортеці лише сильним і сміливим».
А. Г. Конфорович

Вправи для повторення

1592. Побудуйте графік функції:
а) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$; б) $y=\left(\sqrt{2}\right)^{x}+1$.

1593. Знайдіть період функції:
а) $y = \sin x \cos x$; б) $y = 2\operatorname{tg} 5x + 1$;
в) $y = 1 - 2\sin^2 3x$.

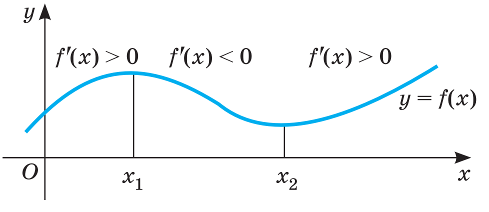
1594. Розв'яжіть систему рівнянь:
а) $\begin{cases} \frac{4}{x-2}-\frac{1}{y-6}=0, \\ \frac{3}{x+5}+\frac{2}{y-3}=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3}{x+3}-\frac{2}{y}=0, \\ \frac{4}{x-1}-\frac{5}{y+1}=1. \end{cases}$

§ 32 Зростання і спадання функції

Derivative Application to the Study of Functions

Дослідити функцію — це означає виявити її властивості: вказати її область визначення й область значень, проміжки зростання і спадання, проміжки, на яких функція набуває додатних значень, на яких — від'ємних, з'ясувати, чи є дана функція парною або непарною, і т. ін.

Одне з важливих завдань дослідження функції — визначення проміжків її зростання і спадання. Як зазначалося в § 13, у тих точках, в яких функція зростає, її похідна (кутовий коефіцієнт дотичної) додатна, а в точках спадання функції її похідна від'ємна (мал. 198). Правильні й такі твердження.



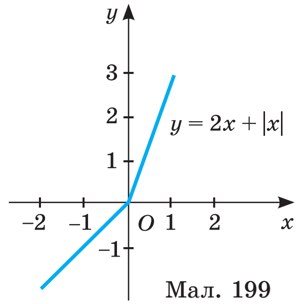
Мал. 198

• *Якщо похідна функції в кожній точці деякого проміжку додатна, то функція на цьому проміжку зростає.*

• *Якщо похідна в кожній точці проміжку від'ємна, то функція на цьому проміжку спадає.*

• *Якщо похідна в кожній точці проміжку тотожно дорівнює нулю, то на цьому проміжку функція стала.*

Строге доведення цих тверджень досить громіздке, тому ми його не наводимо. Зауважимо, що в ньому виражається достатня ознака зростання чи спадання функції, але не необхідна, оскільки функція може зростати і на проміжку, в деяких точках якого вона не має похідної. Наприклад, функція $y = 2x + |x|$ зростає на R, хоч у точці $x = 0$ її похідна не існує (мал. 199).



Мал. 199

Із сказаного випливає, що два сусідні проміжки, на одному з яких функція зростає, а на другому спадає, можуть розділятись тільки такою точкою, в якій похідна функції дорівнює нулю або не існує.

Внутрішні точки області визначення функції, в яких її похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними точками функції*.

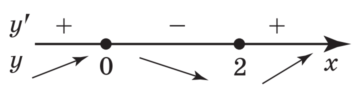
Отже, щоб визначити проміжки зростання чи спадання функції $f(x)$, треба розв'язати нерівності $f'(x) > 0$ чи $f'(x) < 0$, або знайти всі критичні точки функції, розбити ними область визначення функції на проміжки, а далі досліджувати, на яких із них функція зростає, а на яких — спадає.

Приклад 1. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Розв'язання. Область визначення даної функції — множина R.

$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

Рівняння $3x(x - 2) = 0$ має корені $x = 0$ і $x = 2$. Це — критичні точки. Вони розбивають множину R на три проміжки: $(-\infty; 0)$, $(0;\ 2)$, $(2; +\infty)$ (мал. 200). Похідна функції на цих проміжках має відповідно такі знаки: $+$, $-$, $+$. Отже, дана функція на проміжках $(-\infty; 0)$ і $(2; +\infty)$ зростає, а на проміжку $(0;\ 2)$ спадає.



Мал. 200

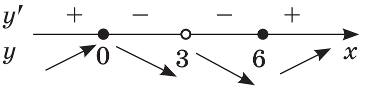
Зауваження. Якщо функція неперервна в якому-небудь кінці проміжку зростання чи спадання, то цю точку можна приєднати до розглядуваного проміжку. Оскільки функція $y = x^2 - 3x^2 + 2$ в точках 0 і 2 неперервна, то можна стверджувати, що вона зростає на проміжках $(-\infty; 0]$ і $[2; +\infty)$, а на проміжку $[0;\ 2]$ — спадає.

Приклад 2. Знайдіть проміжки спадання функції $y = \dfrac{2x^2}{x-3}$.

Розв'язання. Область визначення даної функції: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

$$y' = \frac{x(x-3) - 2x^2}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 12x}{(x-3)^2} = \frac{2x(x-6)}{(x-3)^2}.$$

Критичні точки: $x = 0$ і $x = 6$. Вони всю область визначення функції розбивають на проміжки: $(-\infty; 0)$, $(0; 3)$, $(3; 6)$, $(6; +\infty)$ (мал. 201). Похідна y' на цих проміжках має відповідно такі знаки: $+$, $-$, $-$, $+$. Отже, функція спадає на $(0; 3)$ і $(3; 6)$. Оскільки в точках $x = 0$ і $x = 6$ дана функція неперервна, то відповідь можна записати і так: $[0; 3)$ і $(3; 6]$.



Мал. 201

Знаходити проміжки зростання або спадання функції доводиться при розв'язуванні багатьох задач, зокрема, для відшукання наближених коренів рівнянь.

Перевірте себе

1. Що означає дослідити функцію?
2. За якої умови функція зростає (спадає) на деякому проміжку?
3. Що таке критичні точки функції? Наведіть приклади.
4. Як визначити проміжки, на яких дана функція зростає або спадає?

Виконаємо разом

1 Знайдіть критичні точки функції $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$.

Розв'язання. $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$. Знайдемо похідну функції:

$$y' = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}\right)' = \frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x+2) - x^{\frac{2}{3}}}{(x+2)^2} = \frac{2(x+2) - 3x}{3x^{\frac{1}{3}}(x+2)^2} = \frac{4-x}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2}.$$

Знайдемо точки, в яких похідна дорівнює нулю чи не існує:

$y' = 0$, якщо $\dfrac{4-x}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2} = 0$, звідси $x = 4$.

y' — не існує, якщо знаменник дорівнює нулю, звідси $x = 0$ і $x = -2$. Точка $x = -2$ не входить до області визначення функції. Отже, функція має дві критичні точки: $x = 0$ і $x = 4$.

Відповідь. 0 і 4.

2 Доведіть нерівність $\sin x > x$ для всіх $x < 0$.

Розв'язання. Розглянемо допоміжну функцію $h(x) = \sin x - x$.

Оскільки $h'(x) = \cos x - 1 \le 0$ для всіх $x \in R$, то ця функція монотонно спадає на R.

Отже, при $x < 0$ $h(x) > h(0)$.

$$h(0) = 0 - 0 = 0.$$

Тоді $h(x) > 0$, тобто $\sin x - x > 0$, звідси $\sin x > x$.

3 Установіть, на якому проміжку функція $y = -3x + \cos x$ зростає, а на якому — спадає.

Розв'язання. $D(y) = (-\infty; +\infty)$. Знайдемо похідну функції:

$$y' = (-3x + \cos x)' = -3 - \sin x.$$

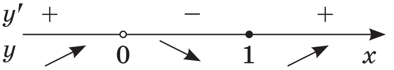
Оскільки $-1 \le \sin x \le 1$, то $y' < 0$ для всіх дійсних x. Отже, функція $y = -3x + \cos x$ спадає на всій області визначення, тобто на множині R.

4 Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $y = 2x + x^{-2}$.

Розв'язання. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Знайдемо похідну функції: $y' = (2x + x^{-2})' = 2 - 2x^{-3}$.

Знайдемо критичні точки функції: $y' = 0$, якщо $2 - 2x^{-3} = 0$ або $2x^{-3} = 2$, звідки $x = 1$.

Точки 0 і 1 розбивають область визначення функції на три проміжки (мал. 202). Визначимо знак похідної на кожному з них.



Мал. 202

$y'(-1) = 2 + 2 = 4 > 0;$

$y'(0{,}5) = 2 - 16 = -14 < 0;$

$y'(2) = 2 - 0{,}25 = 1{,}75 > 0.$

Отже, функція $y = 2x + x^{-2}$ зростає на проміжку $(-\infty; 0)$ і $(1; +\infty)$, а спадає на проміжку $(0; 1)$. Оскільки в точці $x = 1$ дана функція неперервна, то остаточно: функція $y = 2x + x^{-2}$ зростає на проміжку $(-\infty; 0)$ і $[1; +\infty)$, а спадає на проміжку $(0; 1]$.

Виконайте усно

1595. Знайдіть критичні точки функції:

а) $y = x^3$; б) $y = \sin x$; в) $y = \sqrt{x}$; г) $y = x^2 + 2x + 1$.

1596. Яка з функцій зростає на всій області визначення:

а) $y = \sin x$; б) $y = x^3$; в) $y = 2 - x$; г) $y = 0{,}5x$?

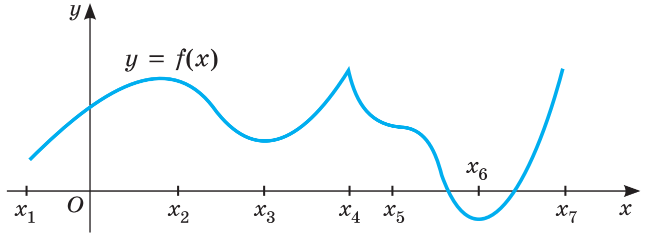
1597. Яка з функцій спадає на всій області визначення:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \cos x$; в) $y = 0{,}5 - x$; г) $y = -5x$?

1598. Використовуючи малюнок 203, визначте:

а) критичні точки функції;

б) проміжки зростання; проміжки спадання.



Мал. 203

1599. Чи може мати тільки одну критичну точку функція:

а) монотонна; б) періодична; в) парна; г) непарна?

Рівень А

Знайдіть критичні точки функції (1600–1604).

1600. а) $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$; б) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$.

1601. а) $f(x) = x - 2\sin x$; б) $f(x) = 3x^5 + 6x$.

1602. а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$; б) $f(x) = x + x^{-1}$.

1603. а) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-x}$.

1604. а) $f(x) = 3x - 0{,}5x^2$; б) $f(x) = \cos 2x$.

Доведіть, що функція $y = f(x)$ зростає на всій області визначення (1605–1606).

1605. а) $f(x) = x^3 + 3$; б) $f(x) = 4x - 1$; в) $f(x) = 5 + \sqrt{x}$.

1606. а) $f(x) = 2x - 3$; б) $f(x) = x + 2{,}5$; в) $f(x)=5\sqrt{x}$.

1607. Доведіть, що функція $y = f(x)$ спадає на всій області визначення:
а) $f(x) = 1 - x^3$; б) $f(x) = -4x + 3$; в) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$.

Рівень Б

1608. Побудуйте графік неперервної функції, яка зростає на кожному з проміжків $(-\infty;-1)$ і $(3;+\infty)$, але спадає, якщо $x\in(-1;\,3)$. Вкажіть, яких значень набуває функція в критичних точках.

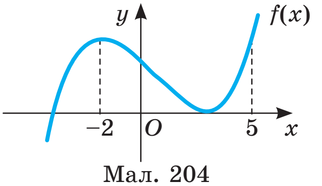
1609. Чи мають критичні точки функції:
а) $y=\sqrt{x}$; б) $y=\sqrt[3]{x}$; в) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$; г) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$?

Знайдіть проміжки зростання і спадання функції (1610–1611).

1610. а) $f(x) = 3 - 2x^2$; б) $f(x) = 3x - x^2$.

1611. а) $f(x) = x^4 - 2x^2$; б) $f(x) = x^2(x + 5)$.

1612. На малюнку 204 зображено графік функції $y=f(x)$. Упорядкуйте числа $f'(-2)$, $f'(0)$ і $f'(5)$ за спаданням.



Мал. 204

1613. Доведіть, що на всій області визначення функція $y=\frac{\cos x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$ зростає.

Знайдіть проміжки зростання і спадання функції (1614–1617).

1614. а) $y=\frac{x-3}{x}$; б) $y=(3x-12)\sqrt{x-1}$; в) $y=\frac{3}{x^2}$; г) $y=\frac{9}{x}+\frac{x}{9}$; ґ) $y=(x-2)\sqrt{x-1}$; д) $y=\frac{x^2-x-4}{x-1}$; е) $y=\frac{x+2}{\sqrt{x}}$.

1615. а) $y=\frac{5x^2}{x+4}$; в) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$; ґ) $y=\frac{3x+2}{2x-1}$; е) $y=\frac{3-x}{\sqrt{x}}$.
б) $y=(7-2x)\sqrt{x+1}$; г) $y=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$; д) $y=\frac{4x-x^2-3}{x^2}$;

1616. а) $y = 5 + \sin 3x$; б) $y=7-\cos\frac{x}{2}$; в) $\sin^2 x - \cos x$.

1617. а) $y=\sqrt{x}\left(x^3+1\right)$; б) $y = (x - 1)^2(x + 1)^3$; в) $y=(x-1)^3(x-5)^2$.

1618. Яка з даних функцій зростає на всій області визначення:
а) $f(x) = x^5 + 2x^3$; в) $f(x)=\sqrt{x-x^2}$;
б) $f(x) = x + \sin x$; г) $f(x) = -2x - \cos x$?

1619. Установіть відповідність між функціями, заданими формулами **(1–4)**, та кількістю критичних точок **(А–Д)**.

1	$y = (x^3 - x)^{-5}$	**А**	жодної
2	$y=\sqrt{x}(x-1)$	**Б**	одна
3	$y=x^4-4x^2+3$	**В**	дві
4	$y = -2x + \sin x$	**Г**	три
		Д	чотири

Рівень В

Знайдіть проміжки зростання і спадання функції (1620–1624).

1620. а) $y = \cos^2 x + \sin x$; б) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x$; в) $y = \cos^2 0{,}5x - \sin x$.

1621. а) $y=\cos x+\sqrt{2}x$; б) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x+2$; в) $y=2\sin x+\cos 2x$.

1622. а) $y=\sin x-\frac{x}{2}$; б) $y=\sqrt{3}\cos x+\sin x-4$; в) $y=\cos x+\cos^2 x$.

1623. а) $y=\sqrt{x^2-6x}$; б) $y=\sqrt{9-x^2}$.

1624. а) $y=\sqrt{4x-x^2}$; б) $y=\sqrt{x^2+8x}$.

1625. Доведіть, що при кожному дійсному значенні a рівняння $2x + \sin x = a$ і $\cos x - 4x = a$ мають по одному кореню.

1626. При яких значеннях параметра a функція зростає на R:
а) $y = x^3 + 2ax + 1$; б) $y = ax - 2\cos x$?

1627. При яких значеннях параметра a функція спадає на R:
а) $y = ax - x^2 - x^3$; б) $y = (a - 1)x^3 - 3(a + 1)x^2 + 3(a - 4)x + 2$?

1628. Розв'яжіть рівняння, використовуючи похідну:
а) $2x^5+x^3=4-\sqrt{x}$; в) $\sin x-\operatorname{tg} x-x=0$;
б) $3x^7+\operatorname{tg}\pi x=\frac{4}{x}-1$; г) $\cos 3\pi x+2\sqrt{x}+15x-16=0$.

1629. Доведіть нерівність, використовуючи похідну:

а) $\sin x < x$ для всіх $x > 0$;

б) $\operatorname{tg} x > x$ для всіх $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$;

в) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ для всіх $x > 0$;

г) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ для всіх $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$;

ґ) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ для всіх $x > 0$;

д) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ для всіх $x > 1$.

1630. Розв'яжіть нерівність, використовуючи похідну:

а) $6x + \cos \pi x > 3 \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}$, $x \in (0;\ 2)$;

б) $\frac{x}{\sqrt{\pi^2 - 16x^2}} \le \operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Вправи для повторення

1631. Знайдіть НСК і НСД чисел 175 і 280.

1632. Електронна петиція (особлива форма колективного звернення громадян), адресована відповідно Президенту України, Верховній Раді України, Кабінету Міністрів України, розглядається за умови збору на її підтримку не менш як 25 000 підписів громадян протягом не більше трьох місяців з дня оприлюднення петиції. А для розгляду петиції у Київській міській раді петиція має отримати не менше 10 000 підписів протягом не більше 90 днів. За яких умов термін збору підписів на підтримку електронної петиції, адресованої Кабінету Міністрів України, перевищуватиме термін збору підписів на підтримку електронної петиції, адресованої Київській міській раді.

1633. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^3 + 6x^2 + 10x + 5 = 0$; б) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$.

§ 33 Екстремуми функції

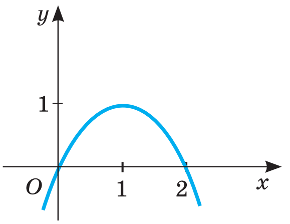
Functions Extrema

Введемо кілька нових понять. Околом точки x_0 називається будь-який проміжок, для якого x_0 є внутрішньою точкою.

Точка x_0 називається точкою мінімуму (максимуму) функції $y = f(x)$, якщо для всіх x $(x \neq x_0)$ з деякого околу точки x_0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$ $(f(x_0)) > f(x))$.

Точки мінімуму і максимуму позначають $x_{\min}$ та $x_{\max}$ відповідно. Значення функції в точці мінімуму називається мінімумом функції, а в точці максимуму — максимумом функції. Позначають їх: $y_{\min}$ та $y_{\max}$.

Точки мінімуму і максимуму функції разом називають *точками екстремуму* (лат. *εxtrεmum* — край, кінець). Значення функції в точках її екстремуму — її екстремальні значення, або екстремуми.



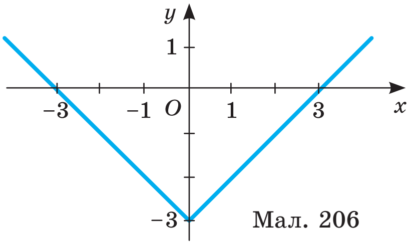
Мал. 205

Наприклад, для функції $y = 2x - x^2$ точка $x = 1$ є точкою максимуму (мал. 205). Її максимум:

$$y_{\max} = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1.$$

Для функції $y = |x| - 3$ точка $x = 0$ є точкою мінімуму (мал. 206). Її мінімум:

$$y_{\min} = 0 - 3 = -3.$$



Мал. 206

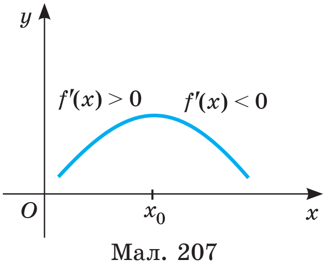
Функція, графік якої зображено на малюнку 203, має чотири екстремальні точки: x_2 і x_4 — точки максимуму; x_3 і x_6 — точки мінімуму.

Точка екстремуму функції не може належати проміжку, на якому ця функція зростає або спадає (чому?). Отже, ті точки, в яких похідна функції додатна або від'ємна, не можуть бути точками її екстремуму. Всі інші точки області визначення функції є її критичними точками. Тому точками екстремуму функції можуть бути тільки її критичні точки. Це — необхідна умова існування екстремуму.

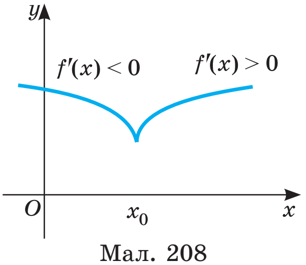
Вибрати з критичних точок функції точки екстремуму дає можливість достатня умова існування екстремуму.

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $(a; b)$, диференційовна на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$, а x_0 — її критична точка. Тоді: *точка x_0, при переході через яку в напрямі зростання аргументу похідна змінює знак з «плюса» на «мінус», є точкою максимуму, а точка, при переході через яку похідна змінює знак з «мінуса» на «плюс», — точкою мінімуму.*

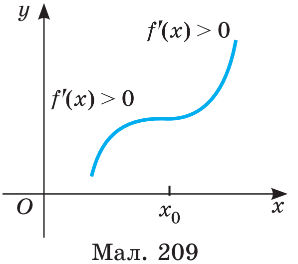
Справді, якщо похідна функції $f(x)$ на проміжку $(a; x_0)$ додатна, а на проміжку $(x_0; b)$ — від'ємна, то при переході через точку x_0 зростання функції змінюється на спадання (мал. 207). У цьому випадку x_0 — точка максимуму. Якщо ж при переході через точку x_0 спадання функції змінюється на зростання, то x_0 — точка мінімуму (мал. 208).



Мал. 207



Мал. 208



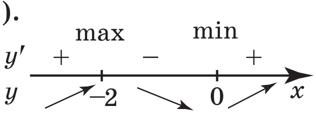
Мал. 209

Якщо ж похідна функції в точці x_0 дорівнює нулю, а зліва і справа від x_0 похідна функції додатна (мал. 209) або зліва і справа від'ємна, то x_0 не є точкою екстремуму.

Приклад 1. Знайдіть точки екстремуму й екстремальні значення функції $y = 2x^3 + 6x^2 - 5$.

Розв'язання. $D(y) = R$. $y' = 6x^2 + 12x = 6x(x + 2)$.

Критичні точки функції: $x_1 = -2$ і $x_2 = 0$. При переході через точку $x_1 = -2$ похідна змінює знак з «+» на «−», тому $x_1 = -2$ — точка максимуму. При переході через точку $x_2 = 0$ похідна змінює знак з «−» на «+», тому $x_2 = 0$ — точка мінімуму (мал. 210).



Мал. 210

$$y_{max} = 2 \cdot (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 5 = 3,\ y_{min} = 2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 5 = -5.$$

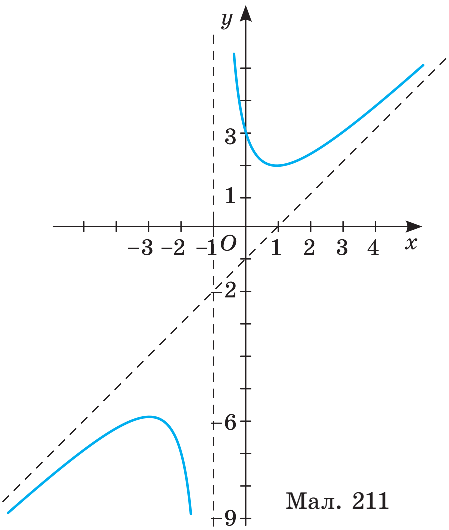
Відповідь. $x_{max} = -2$, $y_{max} = 3$; $x_{min} = 0$, $y_{min} = -5$.

Знаходження екстремумів функції можна оформляти у вигляді таблиці. Особливо це зручно при загальному дослідженні функції, коли виявляють не тільки її екстремуми, а й інші властивості, будують її графік.

Досліджують функцію, користуючись такою схемою:

1) знайти область визначення функції;
2) дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;
3) знайти точки перетину графіка функції з осями координат;
4) дослідити функцію на монотонність, тобто знайти проміжки зростання і спадання функції;
5) знайти точки екстремуму та екстремальні значення функції;
6) знайти асимптоти графіка;
7) побудувати графік функції.

Приклад 2. Дослідіть функцію $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$ і побудуйте її графік.



Мал. 211

Розв'язання. Область визначення функції — всі дійсні числа, крім $x = -1$.

Оскільки вона не симетрична відносно нуля, то функція не може бути парною чи непарною. Функція неперіодична.

Рівняння $\dfrac{x^2+3}{x+1} = 0$ не має розв'язків, тому графік функції не перетинає вісь x. Вісь y він перетинає в точці з ординатою $f(0) = 3$.

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+3)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

Критичні точки: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

Складемо і заповнимо таблицю.

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	не існує	–	0	+
$f(x)$	↗	–6	↘	не існує	↘	2	↗
		max				min	

На проміжках $(-\infty; -3]$ і $[1; +\infty)$ функція зростає, на проміжках $[-3; -1)$ і $(-1; 1]$ функція спадає.

$x_1 = -3$ — точка максимуму, $f(-3) = -6$;

$x_2 = 1$ — точка мінімуму, $f(1) = 2$.

Графік функції має вертикальну асимптоту $x = -1$, бо $\lim\limits_{x\to-1+0} \dfrac{x^2+3}{x+1} = +\infty$, а $\lim\limits_{x\to-1-0} \dfrac{x^2+3}{x+1} = -\infty$. Перевірте самостійно, що пряма $y = x - 1$ є похилою асимптотою цього графіка.

Графік даної функції зображено на малюнку 211. За його допомогою можемо знайти область значень функції: $(-\infty; -6] \cup [2; +\infty)$.

Перевірте себе

1. Що таке точки екстремуму функції? А її екстремуми?
2. Як можна знайти точки екстремуму функції?
3. Що таке точка максимуму функції? А точка мінімуму?

Виконаємо разом

1 Чи може непарна функція мати екстремум у точці $x = 0$? А парна функція?

Розв'язання. Непарна функція не може. Якщо в околі точки $x = 0$ функція має екстремум, то з одного боку від нуля вона зростає, а з другого — спадає, і навпаки. А непарна функція — або тільки зростає, або тільки спадає в околі точки $x = 0$. Парна функція може. Наприклад, функція $y = x^2$.

2 Чи існують такі числа a і b, при яких має екстремум функція

$$f(x) = (x - a)^3 + b?$$

Розв'язання. При будь-яких дійсних значеннях a і b $f'(x) = 3(x - a)^2$. У кожній точці x похідна даної функції невід'ємна. Функція $f(x)$ зростає на R, тому не може мати екстремумів.

Відповідь. Не існують.

3 Дослідіть функцію $y = \dfrac{x}{x^2-4}$ і побудуйте її графік.

Розв'язання. 1) $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

2) Функція — непарна, оскільки $y(-x) = -\dfrac{x}{x^2-4} = -y(x)$.

Отже, її графік симетричний відносно початку координат і досить дослідити функцію на множині $[0; 2) \cup (2; +\infty)$.

3) Якщо $x = 0$, то $y = 0$ — графік перетинає осі координат тільки в точці $(0; 0)$.

4 Знайдемо похідну функції: $y' = \left(\frac{x}{x^2-4}\right)' = \frac{x^2-4-x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = -\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$.

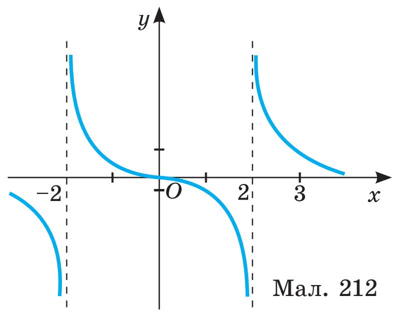
Очевидно, що $y' < 0$ для всіх x з області визначення. Отже, функція спадає на кожному з проміжків $(\infty; -2)$, $(-2;\ 2)$ і $(2; +\infty)$ і не має максимумів і мінімумів.

Для точнішої побудови обчислимо значення функції в кількох точках:

$y(1) = -\frac{1}{3}$; $y(1{,}5) = -\frac{6}{7}$; $y(3) = 0{,}6$; $y(4) = \frac{1}{3}$.

Графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ і вертикальні асимптоти $x = -2$ і $x = 2$. (Переконайтеся самостійно).

Графік функції подано на малюнку 212.

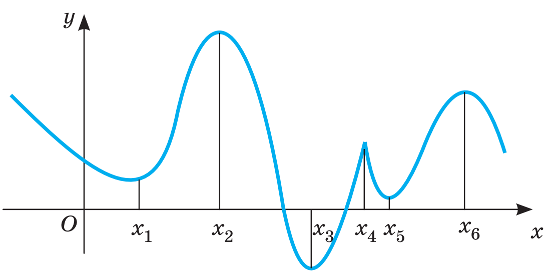


Мал. 212

Виконайте усно

1634. Які з проміжків (1; 3), (0; 4), (−3; 3), (2; 3), [2; 3] є околами точки $x = 2$?

1635. Назвіть точки екстремуму функції, графік якої зображено на малюнку 213.



Мал. 213

1636. Функція визначена і зростає на проміжку [−7; 7]. Чи може точка її екстремуму належати цьому проміжку? Чому?

1637. Доведіть, що функція $y = x^2 - 4x + 1$ в точці $x = 2$ має мінімум. Чи має вона максимум?

1638. Як за допомогою похідною, знайти абсцису вершини параболи — графіка функції $y = ax^2 + bx + c$?

1639. Скільки точок екстремуму може мати функція $y = f(x)$, де $f(x)$ — многочлен третього, четвертого чи п'ятого степеня?

1640. Чи існує функція, яка має безліч екстремумів?

1641. Наведіть приклад функції, яка має один екстремум.

Рівень А

1642. Знайдіть точку мінімуму функції:

а) $y = x + x^2$; б) $y = x^2 - 6x - 3$; в) $y = 5x^2 - 4x$.

1643. Знайдіть точку максимуму функції:
а) $y = 5 - x^2$; б) $y = 1 - x - x^2$; в) $y = x - 2x^2$.

1644. Знайдіть точки екстремуму функції:
а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$; б) $y = 1 + 8x^2 - x^4$; в) $y = -x^3 + 12x + 7$.

Знайдіть точки екстремуму й екстремуми функції (1645–1647).

1645. а) $f(x) = 7x^2 - 2x + 4$; б) $f(x) = x^2 + x + 1$.

1646. а) $f(x) = x^3 - 3x + 5$; б) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

1647. а) $f(x) = 8 - 12x - x^3$; б) $f(x) = 1 + 8x^2 - x^4$.

Рівень Б

1648. Побудуйте графік неперервної функції, яка спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 1]$ і $[3; 5]$, а зростає на двох інших $[1; 3]$ і $[5; +\infty)$. Врахуйте, що у даної функції мінімальні значення рівні між собою. Для побудованого графіка випишіть усі точки екстремуму й екстремальні значення функції.

Дослідіть функцію і побудуйте її графік (1649–1652).

1649. а) $f(x) = x^2 - 2x + 4$; б) $f(x) = 4 + 5x - x^2$.

1650. а) $f(x) = x^3 + 3x + 2$; б) $f(x) = 3x - x^3$.

1651. а) $f(x)=\frac{x^4}{4}+8x+5$; б) $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x}{16}+\frac{1}{4}$.

1652. а) $f(x) = 4x^2 - x^4$; б) $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

Знайдіть точки екстремуму й екстремуми функції (1653–1656).

1653. а) $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$; б) $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$.

1654. а) $f(x) = x - 2\cos x$; б) $f(x) = x + 2\sin x$.

1655. а) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$; б) $f(x) = 10\cos x - 5x$.

1656. а) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$; б) $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$.

1657. Доведіть, що не має екстремумів функція:
а) $f(x) = 2x + \sin x$; б) $f(x) = -3x - \cos x$.

1658. Доведіть, що при $a > 0$ і $b^2 < 3ac$ функція $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ не має екстремумів.

1659. Знайдіть точки екстремуму й екстремальні значення функції:
а) $y=|x-5|$; б) $y=|2x-3|$; в) $y=|3x+6|+1$.

Знайдіть проміжки зростання, спадання та точки екстремуму функції (1660–1661).

1660. а) $y=\frac{x^2-3x}{x+1}$; б) $y=x+\frac{1}{x}$; в) $y=(x+1)\sqrt{2-x}$.

1661. а) $y=\frac{x-1}{x^2+3}$; б) $y=x+\frac{4}{x}$; в) $y=(x-9)\sqrt{x-3}$.

1662. Дослідіть функцію і побудуйте її графік:
а) $y=\frac{2x}{1-x^2}$; б) $y=\frac{3x}{1+x^2}$; в) $y=1+\frac{1}{x}$; г) $y=\frac{x}{x-1}$.

Рівень В

1663. Знайдіть проміжки монотонності й екстремуми функції:

а) $y=x^3+3x^2+3x+3|x+1|+1$; в) $y=4x^3-x|x-2|$;

б) $y=\sqrt{x^2+2x-3}$; г) $y=\sqrt[3]{x^2+2x-3}$.

Дослідіть функцію і побудуйте її графік (1664–1665).

1664. а) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$; б) $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$;

1665. а) $f(x)=x\sqrt{3-x}$; в) $f(x)=x^2\sqrt{x+2}$;

б) $f(x) = \sin^2 x + \sin x$; г) $f(x) = \cos x - \cos^2 x$.

1666. При яких значеннях параметра a точки екстремумів функції $y = f(x)$ належать проміжку $[-3; 8]$, якщо:

а) $f(x) = x^3 - 3(a + 1)x^2 + 3(a^2 + 2a - 15)x + 21$;

б) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-1)x-6$?

1667. Функція $f(x)$ парна і має максимум у точці $x = 2$, а в точці $x = 5$ — мінімум. Чи має ця функція інші екстремуми? Які та в яких точках? Задайте графічно та аналітично (за допомогою формули) одну з таких функцій.

1668. Функція $\varphi(x)$ непарна і в точці $x = -3$ має мінімум, а в точці $x = -2$ — максимум. Чи має ця функція інші екстремуми? Які та в яких точках? Задайте графічно й аналітично (за допомогою формули) одну з таких функцій.

1669. Побудуйте графік функції $y = f(x)$ і знайдіть кількість коренів рівняння $f(x) = a$ для кожного дійсного значення параметра a.

а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$; в) $f(x) = 2x^2 - x^4 + 5$;

б) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 3$; г) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$.

1670. При яких значеннях параметра m мінімум функції $y=|x^2-4x+3|+mx$ більший за 2?

Вправи для повторення

1671. Площа прямокутника дорівнює 120 см^2. Знайдіть його сторони, якщо одна з них на 20 % більша за другу.

1672. Основною водною магістраллю України є Дніпро. Його загальна довжина 2285 км, а у межах України 1050 км. У IX–XII ст. по Дніпру проходив «шлях із варяг у греки», який з'єднував Балтійське і Чорне моря. Який відсоток шляху по Дніпру купці долали територією теперішньої України?

1673. Спростіть вираз:

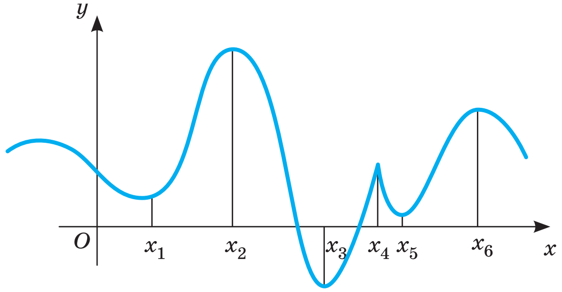
а) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{ab^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\dfrac{2a^2}{a-b}$; б) $\dfrac{3xy-y^2}{x-y}-\dfrac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

§ 34 Найбільше і найменше значення функції

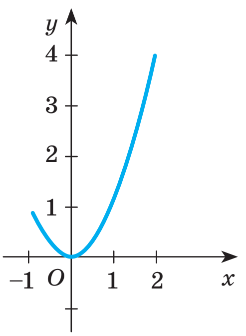
The Largest and Smallest Value of the Function

Від максимумів і мінімумів функції слід відрізняти її найбільше і найменше значення на проміжку. Функція може мати кілька максимумів (мінімумів) на деякому проміжку (мал. 214), але не більше одного найбільшого (найменшого) значення. Функція може не мати максимуму (мінімуму) на проміжку, але мати найбільше (найменше) значення.

Наприклад, функція, графік якої зображено на малюнку 214, найбільше значення має у точці x_2, а найменше — у точці x_3, а функція $f(x) = x^2$, задана на проміжку $[-1; 2]$, має найменше значення $f(0) = 0$ і найбільше значення $f(2) = 4$ (мал. 215).



Мал. 214



Мал. 215

Найбільше і найменше значення функції тісно пов’язані з її областю значень. Якщо область значень неперервної функції — проміжок $[m; M]$, то m — найменше значення даної функції, M — найбільше її значення.

Оскільки неперервна функція найбільше і найменше значення може мати тільки в точках екстремуму або на кінцях відрізка, то для знаходження цих значень користуються таким правилом.

Щоб знайти найбільше і найменше значення неперервної функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$, треба обчислити її значення $f(a)$ і $f(b)$ на кінцях даного проміжку і в критичних точках, що належать цьому проміжку, та вибрати з них найбільше і найменше.

Позначаються вони $\max\limits_{[a;\,b]} f(x)$ і $\min\limits_{[a;\,b]} f(x)$.

Приклад 1. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ на проміжку $[-4; 4]$.

Розв’язання. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$. Критичні точки: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. Знайдемо значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка. $f(-4) = 10$, $f(-3) = 17$, $f(1) = -15$, $f(4) = 66$.

З цих чотирьох значень функції найменшим є −15, а найбільшим — 66.

Відповідь. $\max\limits_{[-4;\ 4]} f(x) = f(4) = 66,\ \ \min\limits_{[-4;\ 4]} f(x) = f(1) = -15.$

Приклад 2. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = \sqrt{2x - x^2}$, якщо $x \in [0;\ 1]$.

Розв'язання. Знайдемо похідну та критичні точки функції

$$y' = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}}.$$

Якщо $y' = 0$, то $\dfrac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = 0$, звідки $x = 1$; $1 \in [0;\ 1]$.

y' — не існує, якщо $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$. Ці точки не є критичними. Чому?
Знайдемо $y(0) = 0$ і $y(1) = 1$.

Маємо: $\max\limits_{[0;\ 1]} y(x) = y(1) = 1;\ \min\limits_{[0;\ 1]} y(x) = y(0) = 0.$

Відповідь. $\max\limits_{[0;\ 1]} y(x) = y(1) = 1;\ \min\limits_{[0;\ 1]} y(x) = y(0) = 0.$

Приклад 3. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = 0{,}5\sin 2x + 3\sin x - x$ на проміжку $[-0{,}5\pi;\ 0{,}5\pi]$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції $y = 0{,}5\sin 2x + 3\sin x - x$. Маємо: $y' = \cos 2x + 3\cos x - 1$.

Розв'яжемо рівняння $\cos 2x + 3\cos x - 1 = 0$ або $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$.

Нехай $\cos x = y$. Рівняння $2y^2 + 3y - 2 = 0$ має два корені: $y = -2$ і $y = 0{,}5$. Значення косинуса не може дорівнювати −2. Отже, $\cos x = 0{,}5$, звідси $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$ — критичні точки функції. Точки $-\dfrac{\pi}{3}$ і $\dfrac{\pi}{3}$ належать прміжку $[-0{,}5\pi;\ 0{,}5\pi]$.

Знайдемо значення функції у цих точках і на кінцях проміжку:

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -3 + \frac{\pi}{2} \approx -1{,}43;\ \ y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{7\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} \approx -1{,}98;$$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3} \approx 1{,}98;\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 - \frac{\pi}{2} \approx 1{,}43.$$ Маємо:

$$\max_{[-0{,}5\pi;\ 0{,}5\pi]} y(x) = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3};\ \ \min_{[-0{,}5\pi;\ 0{,}5\pi]} y(x) = y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{7\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}.$$

До знаходження найбільшого або найменшого значення функції зводиться розв'язання багатьох прикладних задач.

Приклад 4. Є квадратний лист жерсті зі стороною 60 см. Знайдіть розміри квадратів, які треба вирізати в кутах цього листа, щоб з одержаної заготовки зробити коробку найбільшого об'єму (мал. 216).

Розв'язання. Щоб одержати коробку (у формі прямокутного паралелепіпеда), треба вирізати рівні квадрати в кутах цього листа. Нехай x — довжина сторони такого квадрата. Тоді висота коробки дорівнює x, а сторона основи $60 - 2x$.

Об’єм коробки $V(x) = (60 - 2x)^2x$ — функція від x.

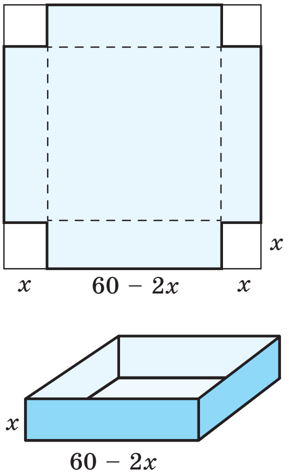
Маємо дослідити математичну модель задачі: при якому значенні x функція $V(x) = (60 - 2x)^2x$ на проміжку (0; 30) набуває найбільшого значення.

$$V(x) = (60 - 2x)^2x = 3600x - 240x^2 + 4x^3,$$
$$V'(x) = 3600 - 480x + 12x^2,$$
$$3600 - 480x + 12x^2 = 0,$$
$$x^2 - 40x + 300 = 0,$$
$$x_1 = 10,\ x_2 = 30.$$

Значення $x = 30$ не належить проміжку (0; 30). Тому $x = 10$.

Оскільки $V'(x) > 0$ при $x < 10$, а $V'(x) < 0$ при $x > 10$, то $x = 10$ — точка максимуму. Отже, в цій точці функція $V(x)$ набуває найбільшого значення.

Відповідь. Треба вирізати квадрати, сторони яких дорівнюють 10 см.



Мал. 216

Перевірте себе

1. Що таке найбільше (найменше) значення функції на даному проміжку?
2. Чи одне і те саме означають максимальне значення функції і її найбільше значення?
3. Як знайти найбільше або найменше значення неперервної функції на проміжку $[a; b]$?

Виконаємо разом

1 Знайдіть область значень функції $y = x^3 - 9x^2 - 7$, якщо $x \in [0; 10]$.

Розв’язання. $y' = (x^3 - 9x^2 - 7)' = 3x^2 - 18x$. Знайдемо критичні точки: $y' = 0$, якщо $3x^2 - 18x = 0$ або $3x(x - 6) = 0$, звідси $x = 0$, $x = 6$.

Знайдемо значення функції на кінцях проміжку [0; 10] і в критичних точках: $y(0) = -7$; $y(6) = -115$; $y(10) = 93$.

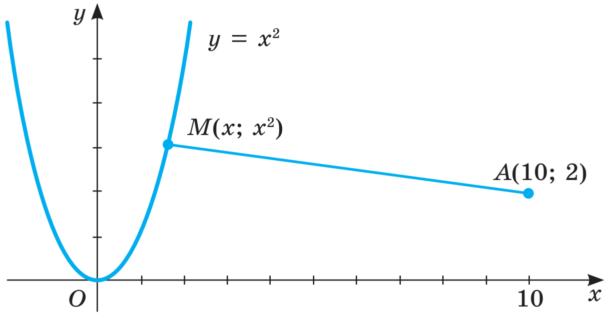
Задана функція неперервна, її найбільше значення 93, найменше −115. Отже область її значень — відрізок [−115; 93].

Відповідь. [−115; 93].

2 Знайдіть найкоротшу відстань від точки $A(10; 2)$ до графіка функції $y = x^2$.

Розв’язання. Нехай найближча до A точка графіка функції M має абсцису x, її ордината дорівнює x^2 (мал. 217, с. 310). Знайдемо квадрат відстані між точками $M(x; x^2)$ і $A(10; 2)$:

$$AM^2 = (x - 10)^2 + (x^2 - 2)^2 = x^4 - 3x^2 - 20x + 104.$$



Мал. 217

Довжина відстані AM найменша, коли її квадрат найменший. Отже, знайдемо найменше значення функції $f(x) = x^4 - 3x^2 - 20x + 104$.

$$f'(x) = 4x^3 - 6x - 20 = 2(x - 2)(2x^2 + 4x + 5).$$

Рівняння $2x^2 + 4x + 5 = 0$ дійсних коренів не має, тому функція $f(x)$ має одну критичну точку $x = 2$. Якщо $x < 2$, то $f'(x) < 0$, якщо $x > 2$, то $f'(x) > 0$. Отже, $x = 2$ — точка мінімуму. В цій точці функція $f(x)$ набуває найменшого значення.

Найменше значення квадрата відстані

$$AM^2 = (2 - 10)^2 + (2^2 - 2)^2 = 68, \quad AM = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

Відповідь. $2\sqrt{17}$.

Виконайте усно

1674. Чи має найбільше значення функція:
а) $y = x^3$; б) $y = 3x$; в) $y = -x^2$; г) $y = 2x + 1$?

1675. Укажіть найменше значення функції:
а) $y = x^4$; б) $y = \sin x$; в) $y = \sqrt{x}$; г) $y = 2 - |x|$.

1676. Укажіть найбільше і найменше значення функції $y = x^2$ на заданому проміжку:
а) $[0; 2]$; б) $[-1; 1]$; в) $[-2; 0]$; г) $[-5; 2]$.

1677. Чи може:
а) значення функції у точці максимуму бути меншим від її значення у точці мінімуму?
б) найбільше значення функції бути меншим від її максимуму? А навпаки?

Рівень А

1678. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = x^3 - 1$ на заданому проміжку:
а) $[0; 2]$; б) $[-1; 1]$; в) $[-2; 0]$; г) $[-3; 3]$.

1679. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = x^2 - 2x$ на заданому проміжку:
а) $[-1; 0]$; б) $[-1; 1]$; в) $[-2; 0]$; г) $[0; 3]$.

Знайдіть найбільше і найменше значення функції на заданому проміжку (1680–1682).

1680. а) $f(x) = x^2 - 4x$; $x \in [-3; 3]$; б) $f(x) = 0{,}5x^2(x - 3)$; $x \in [1; 4]$.

1681. а) $f(x) = 5x^3 - 3x^5$; $x \in [-2; 2]$; б) $f(x) = x^2(3 - x)$; $x \in [1; 4]$.

1682. а) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 3$; $x \in [3; 1]$; б) $f(x) = \sin x$; $x \in [0; \pi]$.

1683. Чи має функція $y = x^3 - 3x^2$ найменше або найбільше значення на заданому проміжку? Встановіть, яке саме, якщо:
а) $x \in (-\infty; 1)$; б) $x \in (1; +\infty)$ в) $x \in (-\infty; 2)$; г) $x \in (0; +\infty)$.

1684. Число 10 розбийте на два доданки так, щоб їх добуток був найбільшим.

1685. Яке додатне число разом з оберненим дає найменшу суму?

1686. Яке число в сумі з його квадратом має найменше значення?

1687. Площа прямокутного загону для страусів дорівнює 40 000 м². Якими мають бути його розміри, щоб на огорожу пішло найменше сітки рабиці?

1688. Треба відгородити два пасовища у формі рівних прямокутників зі спільною стороною, щоб сума їх площ дорівнювала 6 га. Знайдіть найменшу можливу довжину огорожі.

Рівень Б

Знайдіть найбільше і найменше значення заданої функції на заданому проміжку (1689–1692).

1689. а) $f(x) = x^5 - x^3 + x - 7$ на: 1) $[-2; 1]$; 2) $[-1; 2]$;
б) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3$ на: 1) $[0; 2]$; 2) $[-1; 5]$.

1690. а) $f(x) = \sqrt{x+2}$ на: 1) $[-2; 0]$; 2) $[0; 2]$;
б) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ на: 1) $[-4; 0]$; 2) $[-3; 3]$.

1691. а) $f(x) = \sin x - \cos^2 x$ на: 1) $[-\pi; 0]$; 2) $[0; \pi]$;
б) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ на: 1) $[-2; 2]$; 2) $[3; 4]$.

1692. а) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ на: 1) $[1; 3]$; 2) $[-4; -1]$; б) $f(x) = 2\sin\dfrac{x-\pi}{3}$ на $[0; 2\pi]$.

1693. Чи має найбільше або найменше значення на R функція:
а) $f(x) = x^3 - 5x + 2$; б) $f(x) = 3 - 2x^2 - x^5$?

1694. Знайдіть область значень функції:
а) $y = x^6 - 3x^4 + 2$; б) $y = 2 - x^2 - x^4$; в) $y = \sqrt{2 - x - x^2}$; г) $y = x + \dfrac{1}{x}$.

1695. Довжина відрізка AB дорівнює 6, точка M — його середина. Знайдіть на відрізку AB таку точку X, щоб добуток довжин XA, XB, XM був найбільшим.

1696. Який з прямокутників, вписаних у дане коло, має найбільшу площу?

1697. Який з прямокутників, вписаних у дане коло, має найбільший периметр?

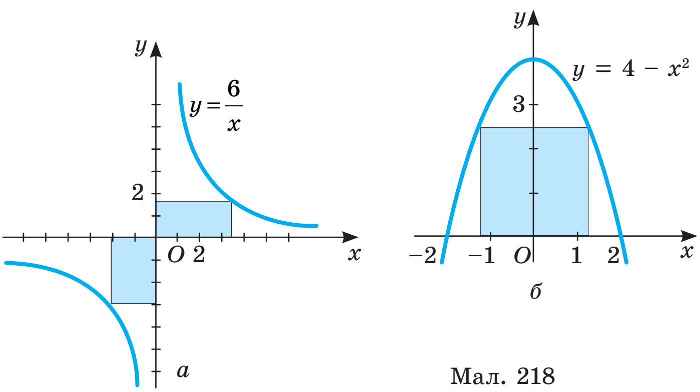
1698. Із пунктів A і B прямолінійними дорогами AO і BO виїхали одночасно два велосипедисти зі швидкостями 12 км/год і 15 км/год. Коли відстань між велосипедистами буде найменшою, якщо $AO = BO = 60$ км, $\angle AOB = 60°$?

1699. У трапеції $ABCD$ $AB = BC = CD = a$, $AD > BC$. Яким повинен бути кут BAD, щоб площа трапеції була найбільшою?

1700. Якими повинні бути розміри басейну об'ємом 32 м^3 з квадратним дном і вертикальними стінками, щоб на його облицювання пішло найменше плиток?

Рівень В

1701. Розгляньте всі можливі прямокутники, дві сторони яких лежать на осях координат, а одна з вершин — на графіку функції $y = \frac{6}{x}$ (мал. 218, *а*). Який з них має найбільшу площу? Найменший периметр?

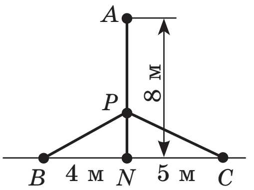


Мал. 218

1702. Яку найбільшу площу може мати прямокутник, вписаний у фігуру, обмежену віссю Ox і графіком функції $y = 4 - x^2$ (мал. 218, *б*)?

1703. Фігура обмежена віссю Ox, графіком функції $y = \sqrt{x}$ і прямою $x = 27$. Знайдіть сторони прямокутника, вписаного в цю фігуру, якщо він має найбільшу площу.

1704. У точках A, B і C (як показано на малюнку 219) розміщено столи з комп'ютерами, що мають вихід на один принтер P. У якій точці на AN слід розмістити принтер, щоб загальна довжина кабелів $AP + BP + CP$ була найменшою?



Мал. 219

1705. За допомогою програмного забезпечення будують графік функції $y = x - 2\cos x$ для всіх x, які належать проміжку $[-\pi; \pi]$. Знайдіть розміри найменшого прямокутника, який містить цей графік.

1706. Знайдіть координати точки на графіку функції $y=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, найменш віддаленої від початку координат.

1707. Якими слід робити літрові консервні банки циліндричної форми, щоб на їх виготовлення йшло найменше жерсті? Допусками на шви можна нехтувати.

1708. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на заданому відрізку:

а) $f(x)=x^2-3x|x-3|, \quad x\in[0;4]$;

б) $f(x)=4x^3-3x|x-2|, \quad x\in[0;3]$.

> «Ніякі людські дослідження не можна назвати справжньою наукою, якщо вони не пройшли через математичні доведення».
>
> Леонардо да Вінчі

1709. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x+2}{\sqrt{3-3x^2}}=-4x^2-4x$;

б) $\sqrt{x^2-2x+5}=2\cos 4\pi x$.

1710. При яких значеннях параметра a найбільше значення функції $y=-x^2+2ax-a^2+2a-3$ на відрізку $[0; 1]$ дорівнює -2?

1711. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких:

а) найменше значення функції $f(x)=\sin^2 x-8a\cdot\sin x+8$ на відрізку $[0; 0{,}5\pi]$ додатне;

б) найбільше значення функції $f(x)=-\cos^2 x+4a\cdot\cos x-7$ на відрізку $[-0{,}5\pi; 0]$ від'ємне.

Вправи для повторення

1712. *Відкрита задача.* Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y=(x+2)(x-4)$, якщо ця дотична ... .

1713. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

а) $\frac{a}{\sqrt[3]{ab^2}}$; б) $\frac{m}{n\sqrt[5]{m^3n}}$; в) $\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x-1}}$; г) $\frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$.

1714. У сімейному фермерському господарстві розводили гусей і тримали кілька собак, які їх охороняли. Скільки гусей і скільки собак було на фермі, якщо разом вони мали 98 голів і 202 ноги?

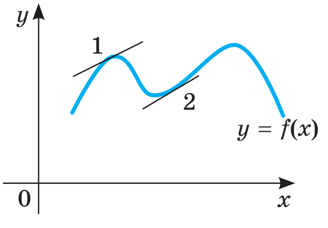
§ 35 Застосування другої похідної до дослідження функцій та побудови їх графіків

Second Derivative Application to the Study and Functions Plotting

За допомогою першої похідної можна дослідити функцію на монотонність і екстремуми та схематично побудувати графік. Виявляється, що поведінку деяких функцій не завжди можна пояснити, використовуючи першу похідну. Детальніше дослідження проводиться за допомогою другої похідної. Згадаємо, що таке друга похідна (с. 289).

Нехай функція $y = f(x)$ є диференційовною, $x \in [a; b]$, її похідна $f'(x)$ — функція, яка також диференційовна. Тоді можна знайти похідну $(f'(x))' = f''(x)$. Це похідна другого порядку, або друга похідна функції $y = f(x)$.

Наприклад, знайти похідну 2-го порядку функції $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ — означає знайти похідну цієї функції $y' = 3x^2 - 8x + 5$ і отриману функцію продиференціювати: $y'' = 6x - 8$.



Мал. 220

Крива $y = f(x)$ називається *опуклою* на інтервалі $(a; b)$, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі (на мал. 220 — 1).

Крива $y = f(x)$ називається *увігнутою* на інтервалі $(a; b)$, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі (на мал. 220 — 2).

Точкою перегину називається така точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від увігнутої.

Інтервали опуклості і увігнутості знаходять за допомогою такої теореми.

Теорема. *Якщо друга похідна двічі диференційовної функції $y = f(x)$ від'ємна ($f''(x) < 0$) на інтервалі $(a; b)$, то крива $y = f(x)$ опукла на даному інтервалі; якщо друга похідна функції $y = f(x)$ додатна ($f''(x) > 0$) на інтервалі $(a; b)$, то крива увігнута на $(a; b)$.*

З теореми випливає, що точками перегину кривої $y = f(x)$ можуть бути лише точки, в яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує. Такі точки називають критичними точками другого роду.

Встановимо достатні умови існування точки перегину.

Теорема. *Нехай x_0 — критична точка другого роду функції $y = f(x)$. Якщо при переході через точку x_0 похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину кривої $y = f(x)$.*

Для знаходження проміжків опуклості та точок перегину графіка функції доцільно користуватися такою схемою:

1) знаходимо область визначення функції;

2) знаходимо критичні точки другого роду;

3) визначаємо знак другої похідної на утворених інтервалах. Якщо $f''(x) < 0$, то крива опукла; $f''(x) > 0$ — крива увігнута;

4) якщо похідна $f''(x)$ змінює знак при переході через критичну точку другого роду x_0, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину кривої $y = f(x)$.

Приклад 1. Знайдіть інтервали опуклості і увігнутості та точки перегину кривої $y = x^4 - 6x^2 + 5$.

Розв'язання.

1) Область визначення функції: R.

2) Знайдемо другу похідну: $y' = 4x^3 - 12x$; $y'' = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$. Критичні точки другого роду: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Інших критичних точок немає.

3) Розбиваємо область визначення на інтервали $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$ і визначаємо знак другої похідної на кожному з них.

Якщо $x \in (-\infty; -1)$, то $y''(x) > 0$, тому крива вгнута.

Якщо $x \in (-1; 1)$, то $y''(x) < 0$, тому крива опукла.

Якщо $x \in (1; +\infty)$, то $y''(x) > 0$ — крива вгнута. Отже, точки $(-1; 0)$ і $(1; 0)$ — точки перегину.

Визначення точок перегину, інтервалів опуклості та асимптот суттєво допомагає у побудові графіків багатьох функцій.

Розширимо схему дослідження функцій, подану на с. 302.

Повна схема дослідження функції

1. Знайти область визначення функції.

2. Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.

3. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.

4. Знайти інтервали знакосталості.

5. Знайти першу похідну. Встановити проміжки зростання і спадання, точки екстремуму та екстремальні значення функції.

6. Знайти другу похідну. Визначити інтервали опуклості графіка функції та точки перегину.

7. Дослідити поведінку функції на кінцях проміжків визначення.

8. Знайти асимптоти графіка функції.

9. Побудувати графік функції.

Приклад 3. Дослідіть функцію $y = \dfrac{|x|}{(x-1)^2}$ і побудуйте її графік.

Розв'язання.

1) Область визначення функції: $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Функція ні парна, ні непарна, ні періодична.

3) (0; 0) — точка перетину графіка функції з осями координат.

4) $y > 0$, якщо $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

5) Щоб знайти похідну функції, запишемо її у вигляді $y = \begin{cases} \dfrac{x}{(x-1)^2}, x \geq 0, \\ -\dfrac{x}{(x-1)^2}, x < 0. \end{cases}$

Оскільки в точці $x = 0$ функція похідної не має, то знайдемо похідну окремо для $x > 0$ і $x < 0$. Маємо: $y' = \begin{cases} -\dfrac{x+1}{(x-1)^3}, x > 0, \\ \dfrac{x+1}{(x-1)^3}, x < 0. \end{cases}$

Функція має дві критичні точки:
$x = 0$ (похідна не існує) і $x = -1$ (похідна дорівнює нулю).
Складемо і заповнимо таблицю для першої похідної.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	+	0	–	Не існує	+	Не існує	–
y	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗	Не існує	↘
		max		min			

Із таблиці видно, що функція зростає на проміжках $(-\infty; -1]$ і $[0;\ 1)$, а спадає на проміжках $[-1;\ 0]$ і $(1; +\infty)$.

Перша похідна при переході через точку $x = -1$ змінює знак з «+» на «–», а при переході через точку $x = 0$ — з «–» на «+», тому $x = -1$ — точка максимуму, а $x = 0$ — точка мінімуму.

6) Знайдемо другу похідну: $y'' = \begin{cases} \dfrac{2x+4}{(x-1)^4}, x > 0, \\ -\dfrac{2x+4}{(x-1)^4}, x < 0. \end{cases}$

Функція має дві критичні точки другого роду:
$x = 0$ (друга похідна не існує) і $x = -2$ (друга похідна дорівнює нулю).
Складемо і заповнимо таблицю для другої похідної

x	$(-\infty; -1)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	+	0	–	Не існує	+	Не існує	+
y	☺	$\frac{2}{9}$	☹	0	☺	Не існує	☺
		перегин		перегин			

Як бачимо з таблиці, крива опукла на проміжку (–2; 0), а увігнута на проміжках $(-\infty; -2)$; (0; 1) і $(1; +\infty)$.

Друга похідна при переході через точку $x = -2$ змінює знак з «+» на «–», а при переході через точку $x = 0$ – з «–» на «+», тому $x = -2$ і $x = 0$ — абсциси точок перегину. У цих точках на графіку опуклість змінюється на вгнутість і навпаки.

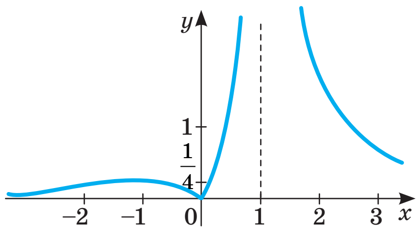
7) Дослідимо поведінку заданої функції на кінцях проміжків визначення:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(x-1)^2}=0;\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{(x-1)^2}=0;\quad \lim_{x\to1-0}\frac{x}{(x-1)^2}=+\infty;\quad \lim_{x\to1+0}\frac{x}{(x-1)^2}=+\infty.$$

8) Знайдемо асимптоти. Функція не визначена у точці $x = 1$. Оскільки $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to1+0}\frac{x}{(x-1)^2}=\infty$ і $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{x}{(x-1)^2}=\infty$, то $x = 1$ — вертикальна асимптота.

Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{(x-1)^2}=0$ і $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{(x-1)^2}=0$, то $y = 0$ — горизонтальна асимптота.

9) Користуючись отриманими даними, будуємо графік функції (мал. 221).



Мал. 221

Перевірте себе

1. Що таке друга похідна?
2. Яку криву називають опуклою на інтервалі?
3. Яку криву називають увігнутою на інтервалі?
4. Що таке точка перегину?
5. Як знаходять інтервали опуклості та увігнутості?
6. Що таке критичні точки другого роду?
7. Якими бувають асимптоти кривої?

Виконаємо разом

Знайдіть інтервали опуклості і увігнутості та точки перегину кривих: а) $y = 3x^2 - x^3$; б) $y=\sqrt{1+x^2}$.

Розв'язання. а) $y = 3x^2 - x^3$.

1) Область визначення функції — R.

2) Знайдемо першу і другу похідні. Маємо: $y' = 6x - 3x^2$; $y'' = 6 - 6x$. Знайдемо критичні точки другого роду: $6 - 6x = 0$, $x = 1$. Інших критичних точок другого роду немає.

3) Визначимо знак другої похідної на кожному з інтервалів $(-\infty;1)$, $(1;+\infty)$. Для цього досить визначити знак похідної в довільній внутрішній точці кожного інтервалу.

Якщо $x\in(-\infty;1)$, то $y''(x) > 0$, тому на інтервалі $(-\infty;1)$ крива увігнута.

Якщо $x\in(1;+\infty)$, то $y''(x) < 0$, тому на інтервалі $(1;+\infty)$ крива опукла.

Точка $x = 1$ є точкою перегину, оскільки при переході через цю точку друга похідна змінює знак.

Отже, $M(1;\ 2)$ — точка перегину.

б) $y=\sqrt{1+x^2}$.

1) Область визначення функції — R.

2) Знайдемо критичні точки другого роду: $y'=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

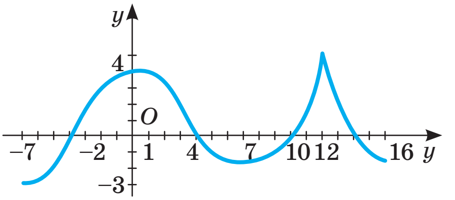
$$y''=\frac{\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Як бачимо, друга похідна існує на множині всіх дійсних чисел і в жодній точці в нуль не перетворюється. А тому критичних точок другого роду немає. Отже, немає і точок перегину. На всій області визначення $y'' > 0$, тому на множині дійсних чисел крива увігнута.

Виконайте усно

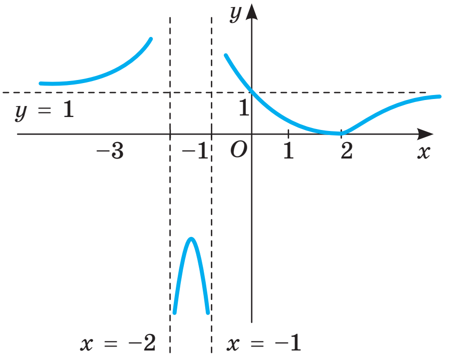
1715. Знайдіть другу похідну функції:
а) $y = 5x^4$; в) $y = 5 + x^4$;
б) $y = x^{-2}$; г) $y = \sin x$.

1716. На малюнку 222 подано графік функції $y = f(x)$. Установіть:
а) проміжки зростання і спадання;
б) точки екстремуму; в) інтервали опуклості і увігнутості; г) точки перегину.



Мал. 222

1717. На малюнку 223 подано графік функції $y = g(x)$. Встановіть:
а) проміжки зростання і спадання;
б) точки екстремуму; в) інтервали опуклості й увігнутості; г) точки перегину; ґ) асимптоти.



Мал. 223

1718. Які асимптоти має крива, задана рівнянням:

а) $y = x^{-1}$; б) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$?

Рівень А

Знайдіть другу похідну функції (1719–1720).

1719. а) $y = 6x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 2x + 7$; в) $y = x(3x^2 - 2)$;
б) $y = \sin 2x - x$; г) $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

1720. а) $y = 5x^7 - 4x^6 + 5x^4 - 3x + 2$; в) $y = 2x^{-1}$;
б) $y = 2x + \cos 3x$; г) $y = \sqrt[3]{x + 2}$.

1721. Доведіть, що на всій області визначення:
а) функція $y = 5x^2 - 12x + 6$ є вгнутою;
б) функція $y = \sqrt{x+1} - 2$ є опуклою.

Знайдіть інтервали опуклості і увігнутості та точки перегину кривих (1722–1723).

1722. а) $y = 3x^2 + 4$; б) $y = 3x^3 - 6x$; в) $y = 3x^{-2}$.

1723. а) $y = 12x - 3x^2$; б) $y = 7 - 2x^3$; в) $y = 2x^{-3}$.

Рівень Б

Знайдіть інтервали опуклості і увігнутості та точки перетину кривих (1724–1725).

1724. а) $y = x^4 - 1{,}5x^2 + 1$; б) $y = x^5 - 5x^3 - 5x^2 + 30$; в) $y = \operatorname{tg} x$.

1725. а) $y = x^4 - x^2$; б) $y = 3x^5 - 5x^3 - 15x^2$; в) $y = \operatorname{ctg} x$.

Скільки коренів має рівняння (1726–1727).

1726. а) $2x^3 + 2x - 1 = 0$; б) $0{,}2x^5 - x^3 + 7x + 5 = 0$.

1727. а) $3x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$; б) $2x^5 + x^2 + 7x + 5 = 0$.

Проведіть повне дослідження функції і побудуйте її графік (1728–1729).

1728. а) $y = (x - 1)^2(x + 3)^2$; б) $y = x^5 - 5x^3 + 5x^2$.

1729. а) $y = x^2 + \dfrac{1}{4x}$; б) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

Рівень В

Знайдіть інтервали опуклості і увігнутості та точки перегину кривих (1730–1731).

1730. а) $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$; б) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$; в) $y = \dfrac{2x^3}{1 - x^2}$.

1731. а) $y = \sin x + \cos x$; б) $y = x + \cos x$; в) $y = 2\sin x + \sin 2x$.

Знайдіть асимптоти кривих (1732–1733).

1732. а) $y = \dfrac{1}{(3x^2 - 1)^2}$; б) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; в) $y = x + \operatorname{arctg} x$.

1733. а) $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$; б) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x}$; в) $y = \dfrac{x^2 - 5x}{x + 4}$.

Проведіть повне дослідження функції і побудуйте її графік (1734–1736).

1734. а) $y=\dfrac{12x}{x^2+9}$; б) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$; в) $\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

1735. а) $y=\sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}$; б) $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x^2}$; в) $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$.

1736. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}}$; б) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

Вправи для повторення

1737. Розв'яжіть рівняння:
а) $\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}x=0$; б) $\sin 6x-\sin 4x=0$.

1738. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $y = 2 - 0{,}5x - x^2$ в точці перетину її з віссю ординат.

1739. Розв'яжіть систему рівнянь:
а) $\begin{cases} x^2-xy=3{,}36, \\ 3x+y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-y^2=2, \\ 3x+y=-4. \end{cases}$

§ 36 Похідна як швидкість

Derivative as Speed

Досі ми мали справу з геометричним змістом похідної, тобто розуміли під похідною кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції. Не менш важливо зрозуміти і фізичний зміст похідної. Похідна функції — це швидкість її зміни, тобто швидкість протікання процесу, який описується даною функцією.

Нехай тіло рухається по прямій зі змінною швидкістю. Відстань s, пройдена тілом за час t, залежить від t. Ця залежність $s = f(t)$ — закон руху даного тіла. Знайдемо його миттєву швидкість $v(t_0)$ у момент t_0.

За час від t_0 до $t_0 + \Delta t$ тіло проходить відстань $\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. За цей проміжок часу Δt тіло рухається з середньою швидкістю $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Якщо $\Delta t \to 0$, то $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} \to v(t_0)$, $v(t_0)$ — швидкість руху тіла в момент t_0. З другого боку — якщо при $\Delta t \to 0$ $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} \to v(t_0)$, то $v(t_0)$ — похідна функції s у точці t_0. Отже, якщо $s = f(t)$ — закон руху, то похідна цієї функції — швидкість руху в момент t.

Розглянемо конкретний приклад. Як відомо, вільне падіння тіла відбувається за законом $s=\frac{g}{2}t^2$, де стала g = 9,8 м/с^2 — його прискорення. З якою швидкістю тіло падає в момент t і після початку падіння?

Розв'язувати задачу можна так. За час від t до $t + \Delta t$ тіло проходить відстань $\Delta s=\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2-\frac{g}{2}t^2=\frac{g}{2}\left(2t\cdot\Delta t+(\Delta t)^2\right)$ із середньою швидкістю $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{g}{2}(2t+\Delta t)$.

Якщо $\Delta t \to 0$, то $\frac{\Delta s}{\Delta t}\to gt$, тобто $v(t) = gt$.

Дістали результат, добре відомий із фізики.

Такий спосіб розв'язування задачі нераціональний, так змушені міркувати ті, хто не знає похідної та її фізичного змісту. Якщо ж ми знаємо, що швидкість прямолінійного руху — це похідна функції, яка виражає закон цього руху, то задачу можна розв'язати простіше:

$$v(t)=\left(\frac{g}{2}t^2\right)'=\frac{g}{2}\cdot 2t=gt.$$

Так можна знаходити не тільки швидкість прямолінійного руху, а й швидкість протікання багатьох процесів: хімічної реакції, радіоактивного розпаду, нагрівання тіла, танення криги, плавлення металу, розмноження бактерій тощо. Взагалі, якщо деякий процес відбувається за законом $y = f(t)$, то швидкість протікання цього процесу в момент часу t можна визначити за формулою $v(t) = f'(t)$.

Коротко говорять: похідна — це швидкість.

Швидкість руху також може змінюватись. Швидкість зміни швидкості руху — його прискорення. Отже, прискорення — похідна швидкості. Якщо, наприклад, швидкість руху виражається формулою $v(t) = gt$, то його прискорення $a(t) = (gt)' = g$.

Інший приклад. Якщо якийсь процес відбувається за законом

$$s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3,$$

то швидкість його протікання в момент t: $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 10t$, а його прискорення в цей самий момент: $a(t) = v'(t) = 12t - 10$.

За допомогою похідної розв'язують багато задач із різних галузей науки і практики. Наведемо приклади часто вживаних формул, які містять похідну:

$\omega(t) = \varphi'(t)$ — кутова швидкість — похідна від кута повороту
$a(t) = \omega'(t)$ — кутове прискорення — похідна від кутової швидкості
$I(t) = q'(t)$ — сила струму — похідна від кількості електрики
$N(t) = A'(t)$ — потужність — похідна від роботи
$C(t) = Q'(t)$ — теплоємність — похідна від кількості теплоти
$P(t) = V'(t)$ — продуктивність праці — похідна від обсягу продукції

Перевірте себе

1. У чому полягає суть геометричного змісту похідної функції в точці?
2. Яка суть фізичного змісту похідної функції в точці?
3. Як розуміти вислів «похідна — це швидкість»?

Виконаємо разом

1 Сигнальна ракета летить вертикально вгору так, що її рух описується законом $s(t) = 98t - 4{,}9t^2$ (час t — у секундах, відстань s — у метрах). Знайдіть:

а) швидкість ракети через 5 секунд руху;

б) на яку максимальну висоту злетить ракета?

Розв'язання. а) Знайдемо швидкість ракети у будь-який момент часу як похідну від функції $s(t)$: $v(t) = s'(t)$ або $v(t) = (98t - 4{,}9t^2)' = 98 - 9{,}8t$.

Тоді $v(5) = 98 - 9{,}8 \cdot 5 = 98 - 49 = 49$ (м/с).

б) Знайдемо точку екстремуму функції $s(t)$, розв'язавши рівняння $s'(t) = 0$ або $98 - 9{,}8t = 0$. Звідси $t = 10$ (с).

Якщо $t < 10$, то $s'(t) > 0$, якщо $t > 10$, то $s'(t) < 0$. Отже, $t = 10$ с — точка максимуму. Тоді $s(10) = 98 \cdot 10 - 4{,}9 \cdot 10^2 = 490$ (м).

Відповідь. а) 49 м/с; б) 490 м.

2 Кількість теплоти $Q(t)$, яка необхідна для нагрівання води масою 1 кг від 0 °C до температури t °C ($0° < t < 95°$), наближено можна визначити за формулою $Q(t) = 0{,}396 \cdot t + 2{,}081 \cdot 10^{-3}t^2 - 5{,}024 \cdot 10^{-7}t^3$.

Установіть залежність теплоємності води $C(t)$ від температури.

Розв'язання. $C(t) = Q'(t) = (0{,}396 \cdot t + 2{,}081 \cdot 10^{-3}t^2 -$

$$- 5{,}024 \cdot 10^{-7}t^3)' = 0{,}396 + 4{,}162 \cdot 10^{-3}t - 15{,}072 \cdot 10^{-7}\, t^2.$$

3 Тіло масою 10 кг рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2 + t + 1$ (час t — у секундах, координата x — у метрах). Знайдіть: а) кінетичну енергію тіла через 5 с після початку руху; б) силу, що діє на тіло в цей час.

Розв'язання. а) Кінетична енергія тіла визначається за формулою $E = \frac{mv^2}{2}$, де m — маса тіла, а v — швидкість. Знайдемо швидкість тіла $v(t)$ у будь-який момент часу t і через 5 с після початку руху — $v(5)$.

$$v(t) = x'(t) = (t^2 + t + 1)' = 2t + 1,\ v(5) = 2 \cdot 5 + 1 = 11 \text{ (м/с)}.$$

Тоді $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{10 \cdot 11^2}{2} = 5 \cdot 121 = 605$ (Дж).

б) Сила, що діє на рухоме тіло, визначається за формулою $F = ma$. Знайдемо прискорення тіла $a(t)$ у будь-який момент часу t і через 5 с після початку руху — $a(5)$.

$$a(t) = v'(t) = (2t + 1)' = 2 \text{ (м/с}^2\text{)},\ a(5) = 2 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Тоді $F = ma = 10 \cdot 2 = 20$ (Н).

Відповідь. а) 605 Дж; б) 20 Н.

Виконайте усно

1740. Знайдіть швидкість тіла, що рухається за законом $s(t)$, де t вимірюється в секундах, а s — у метрах:
а) $s(t) = 5t^2 + t$; б) $s(t) = 1 + 3t$; в) $s(t) = t^2 - 1$; г) $s(t) = 2t^3 + t$.

1741. Знайдіть прискорення тіла, що рухається за законом $s(t)$, де t вимірюється в секундах, а s — у метрах:
а) $s(t) = t^2 + t$; б) $s(t) = 1 - 3t^2$; в) $s(t) = 5t - 1$; г) $s(t) = 2t^3 + 5$.

1742. Як залежить продуктивність праці молодого фахівця від часу роботи, якщо обсяг виготовленої ним продукції виражається формулою $v(t) = 10 + 6t^2 - t^3$?

Рівень А

1743. Точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 100 + t^2$ (час t — у секундах, координата x — у метрах). Знайдіть швидкість v цієї точки в момент часу: а) $t = 5$ с; б) $t = 23$ с.

1744. Робота, яку виконує двигун автомобіля, визначається формулою $A(t) = 15t^2 + 360$ ($A(t)$ вимірюється у джоулях, t — у секундах). Яку потужність розвиває цей двигун у момент часу t?

1745. Визначте швидкість коливання тіла, що рухається за законом:
а) $x(t) = 10\cos \pi t$; б) $x(t) = 2\sin(t - \pi)$; в) $x(t) = 0{,}1\cos 10\pi t$.

1746. Точка рухається так, що шлях (у метрах), пройдений нею за t секунд, виражається формулою $s = 4t^2 + 3t$. Знайдіть:
а) швидкість точки у будь-який момент часу;
б) прискорення точки в будь-який момент часу;
в) швидкість і прискорення точки в момент часу $t = 5$ с.

1747. Точка обертається навколо осі за законом $\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2$ (час t — у секундах, кут повороту $\varphi(t)$ — у радіанах). Знайдіть кутову швидкість точки:
а) в довільний момент t; б) у момент $t = 4$ с.

1748. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 7t^3 - 5t$ (у метрах). Знайдіть його миттєву швидкість і прискорення в момент: а) $t = 1$ с; б) $t = 2$ с; в) $t = 3$ с.

1749. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$ (шлях s — у метрах, час t — у секундах). У який момент часу тіло рухається з найбільшою швидкістю?

1750. Матеріальна точка виконує гармонічні коливання за законом $x(t) = 4\sin t$, де x — зміщення точки від положення рівноваги (у м), t — час руху (у с). Знайдіть наближене значення миттєвої швидкості точки в момент часу:
а) $t = 0{,}5$ с; б) 1 с.

Рівень Б

1751. Маховик, затримуваний гальмом, обертається за законом $\varphi(t) = 4t - 0{,}3t^2$ (час t — у секундах, кут $\varphi(t)$ — у радіанах). В який момент він зупиниться?

1752. Під час нагрівання тіла його температура T із часом змінюється за законом $T = 0{,}4t^2$, де T — температура в градусах, t — час у секундах. Знайдіть швидкість зміни температури в момент $t = 5$ с.

1753. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 2 + 8t - t^2$ (s — шлях у метрах, t — час у секундах). Яку відстань пройшло тіло до моменту, коли його швидкість стала дорівнювати нулю?

1754. Два тіла рухаються прямолінійно відповідно до законів $s_1(t) = t^3 + 3t^2 - 2t + 2$ і $s_2(t) = t^3 + 2t^2 + 5t - 4$ (s_1, s_2 — шлях у метрах, t — час у секундах). Знайдіть прискорення кожного з тіл у момент часу, коли вони пройшли однаковий шлях.

1755. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6t - t^2$ (шлях s — у метрах, час t — у секундах). Знайдіть:
а) миттєву швидкість тіла в момент часу: $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с;
б) кінетичну енергію тіла через 1,5 с після початку руху, якщо його маса дорівнює 2 кг.

1756. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^3 + 3t^2$ (шлях s — у метрах, час t — у секундах). Знайдіть:
а) прискорення його руху в момент $t = 5$ с;
б) силу, що діє на тіло через 3 с після початку руху, якщо його маса дорівнює 5 г.

1757. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t)=6t+2t^2-\frac{2}{3}t^3$ (шлях s — у метрах, час t — у секундах). Визначте кінетичну енергію тіла в той момент, коли його швидкість стане найбільшою ($m = 2$ кг).

1758. Тіло, підкинуте вертикально вгору зі швидкістю $v_0 = 60$ м/с, рухається за законом $h(t)=v_0t-\frac{gt^2}{2}$, де h — шлях у метрах, t — час у секундах, $g = 10$ м/с^2 — прискорення вільного падіння. Знайдіть:
а) швидкість тіла через 2 с після початку руху;
б) час, коли швидкість тіла дорівнює нулю;
в) найбільшу висоту, якої досягне тіло.

1759. Тіло кинули вертикально вгору з початковою швидкістю 40 м/с. Коли і на якій відстані від землі воно досягне найвищої точки?

1760. Обсяг продукції V майстерні, яка виготовляє ялинкові прикраси, протягом дня виражається залежністю $V(t)=-\frac{5}{6}t^3+7\frac{1}{2}t^2+50t+37$, де $t\in[1;\ 8]$. Обчисліть продуктивність праці майстерні протягом кожної години роботи.

1761. Через поперечний переріз провідника у кожний момент часу t проходить заряд $q(t)=5\sqrt{2t+5}$ (q вимірюється в кулонах, а t — у секундах). Знайдіть силу струму в момент часу t = 10 с.

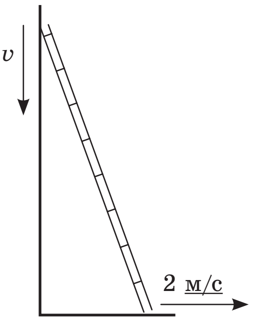
1762. Маса кристалів у розчині змінюється за законом $m=\sqrt{t^2+5t}$, де m — маса кристалів у грамах, t — час у годинах. Знайдіть швидкість зростання маси кристалів через 4 год після початку кристалізації.

1763. Кулька коливається за законом $x(t) = 2\sin 3t$. Доведіть, що її прискорення пропорційне координаті x. При яких значеннях t прискорення кульки додатне?

1764. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t)=\sqrt{t}$. Доведіть, що його прискорення пропорційне кубу швидкості.

1765. Колесо обертається так, що кут його повороту пропорційний квадрату часу. Перший оберт воно зробило за 8 с. Знайдіть його кутову швидкість через 48 с після початку обертання.

1766. Драбина завдовжки 5 м стояла вертикально. Потім її нижній кінець став переміщатись по підлозі зі сталою швидкістю 2 м/с (мал. 224). З якою швидкістю в момент t опускався верхній кінець драбини?



Мал. 224

Вправи для повторення

1767. Доведіть, що многочлен n^5-5n^3+4n для будь-якого цілого значення n становить число, що ділиться на 120.

1768. Знайдіть середнє арифметичне усіх цілих чисел x, таких, що:
а) $10 \le x \le 50$; б) $-10 \le x \le 50$.

1769. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x-y=3, \\ x^2+y^2=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=4. \end{cases}$

1770. На українських дорогах у 2016 році трапилося понад 138 тисяч ДТП. Загинуло внаслідок ДТП 4 тисячі громадян, іще понад 31 тис людей травмовано. У 7 з 10 випадків ДТП спричинені перевищенням швидкості. В половині випадків люди гинуть через нетверезе керування автотранспортом, а в 4 із 10 випадків смерть спричинена недбалістю та ігноруванням ременів безпеки.

Установіть, скільки громадян загинуло через недбалість та ігнорування ременів безпеки.

Скарбничка досягнень

✓ Розумію сутність поняття похідна і вмію його використовувати.

Похідною функції $f(x)$ в точці x_0 називають границю відношення приросту функції у точці x_0 до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

✓ Знаю і вмію використовувати правила і формули диференціювання.

$C' = 0,\qquad (\sin x)' = \cos x,\qquad (Cu)' = Cu',$

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1},\qquad (\cos x)' = -\sin x,\qquad (u+v)' = u+v',$

$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\qquad (\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (uv)' = u'v+uv',$

$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2},\qquad (\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},\qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2},$

якщо $y = f(u)$, де $u = h(x)$, то $y'=y'_u u'$

✓ Знаю і вмію використовувати геометричний і фізичний зміст похідної.

$f'(x_0) = k = \operatorname{tg}\alpha$ — геометричний зміст похідної.

$v(t) = s'(t)$; $a(t) = v'(t)$ — фізичний зміст похідної.

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ — рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0

✓ Знаю, як знаходять асимптоти кривої $y = f(x)$.

$x = a$ — вертикальна асимптота кривої $y = f(x)$, якщо $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ або не існує границі функції в точці $x = a$.

$y = b$ — горизонтальна асимптота кривої $y = f(x)$, якщо існує скінченна границя $b=\lim_{x\to\infty} f(x)$.

$y = kx + b$, де $k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$ — похила асимптота, якщо обидві границі існують

Перевіряємо набуті компетентності

Тестові завдання № 5

1 Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 1}\left(x+2\sqrt{x}\right)$.

А	Б	В	Г
1	2	3	4

2 Знайдіть k, якщо пряма $y = kx + 3$ утворює з додатним напрямом осі Ox кут 135°.

А	Б	В	Г
1	–1	3	–3

3 Похідною функції $y=\sqrt[3]{x^2}$ є функція:

А	Б	В	Г
$y'=3\sqrt[2]{x^3}$	$y'=\sqrt[3]{x}$	$y'=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^3}$	$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

4 Знайдіть область значень функції $y = 3x^2 - 6x + 7$.

А	Б	В	Г
R	$[3;\ 7]$	$(-\infty;\ 4]$;	$[4;\ +\infty)$

5 Точка рухається за законом $s(t)=\frac{1}{3}t^3+2t^2-t$, де s вимірюється в метрах, а t — у секундах. Обчисліть її швидкість, якщо $t = 1$ с.

А	Б	В	Г
3 м/с	4 м/с	5 м/с	6 м/с

6 Знайдіть тангенс кута між додатним напрямком осі Ox та дотичною до графіка функції $f(x) = 1 + 4\sqrt{x^2+3}$ в точці з абсцисою $x_0 = -1$.

А	Б	В	Г
–2	2	4	–4

7 Скільки критичних точок має функція $y = x^5 - 5x^3$ на проміжку $(0;\ 3)$?

А	Б	В	Г
одну	дві	три	жодної

8 Відрізок завдовжки 12 см поділили на дві частини так, щоб сума площ квадратів, побудованих на цих відрізках як на сторонах, була найменшою. Знайдіть суму площ цих квадратів.

А	Б	В	Г
100	40	72	80

9 Обчисліть значення похідної функції $f(x)=4\cos x-2\sin x$ у точці $x_0=0{,}5\pi$.

А	Б	В	Г
–3	–2	–4	1

10 Сума найбільшого і найменшого значення функції $y = x^2$ на проміжку $[-5;\ 2]$ дорівнює:

А	Б	В	Г
– 3	29	25	4

Типові завдання до контрольної роботи № 5

1 Знайдіть значення похідної функції $f(x)$ в точці x_0:
а) $f(x) = \text{tg}x + 3x^3$, $x_0 = 0$;
б) $f(x) = \sin 4x \cos 4x$, $x_0 = \frac{\pi}{24}$;
в) $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 + 3x + 9}$, $x_0 = 2019$;
г) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$, $x_0 = 1$.

2 Знайдіть критичні точки функції:
а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + 1$; б) $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{5 - x}$.

3 Знайдіть найбільше і найменше значення функції на заданому проміжку:
а) $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$, $x \in [-2; 1]$; б) $y = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$, $x \in [1; 6]$.

4 Знайдіть екстремуми функції та визначте їх характер:
а) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - 8$; б) $y = x - 2\sqrt{x - 2}$.

5 Знайдіть проміжки монотонності функції:
а) $y = \frac{3x - 1}{3x + 1}$; б) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$.

6 Знайдіть похідну функції:
а) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 6}}$; б) $y = \frac{\sqrt{\text{tg}\, x}}{x^2 + 1}$.

7 Знайдіть площу трикутника, який відтинає від осей координат дотична, проведена до графіка функції $y = 5x + |x^2 - 4x|$ у точці $x_0 = 3$.

8 Парканом довжиною 24 м потрібно обгородити з трьох сторін прямокутний квітник найбільшої площі. Знайдіть розміри квітника.

9 Дослідіть функцію на монотонність:

$$y = \begin{cases} -3x^5 + 5x^4 + 1, x \geq -1, \\ \frac{4}{x}, x < -1. \end{cases}$$

10 При яких значеннях параметра a функція $y = ax^3 - 3x^2$ в точці $x = 1$ має мінімум?

Предметний покажчик

Відповіді та вказівки до задач і вправ

15. а) {3, 6, 9}. **18.** $A=\{x|\in N, x\le 5\}$, $B=\{x|\in Z, |x|\le 3\}$. **22.** а) {1, 2, 3, 5, 7}. **23.** в) {a, b, c, m, n, k}. **24.** а) $\varnothing$. **25.** в) {m}. **30.** а) $A\cup B=\{2,3,5,7\}$; $A\cap B=\{3,7\}$. **33.** A = {−2, −1, 0, 1, 2}. **34.** $A=\{x|\in N, x\le 5\}$, $B=\{x|\in Z, |x|\le 3\}$, $C=\{x|x-\text{просте число},\ x\le 7\}$. **35.** а) {1, 2, 3, 6}. **36.** а) $(-\infty;+\infty)$; (1; 5]. **37.** а) $(-\infty;7)$; (−7; −1]. **41.** г) {3}. **42.** $A\cap B=\{-1\}$; $A\cup B=\{-1,1,5\}$. **46.** $A \setminus B$ = {2}. **48.** 7. **49.** 10. **54.** д) 1. **55.** б) $2(a-b)$. **68.** б) $f(-2) = 11$; $f(-1) = 5$; $f(0) = 3$; $f(1) = 5$; $f(2) = 11$. **77.** б) (0; 0) і (3; 0). **78.** в) $[0;+\infty)$. **81.** $y = x + 3$. **94.** $m = 0{,}8V + 40$. **109.** $t=\dfrac{2h+905}{61}$. **111.** б) $[-3;-2)\cup(-2;2)\cup(2;4]$. **121.** а) $[3;+\infty)$; б) $[-5;\infty)$. **125.** $a=1$; $a=5$. **126.** $a=6; a=4\dfrac{2}{3}$. **144.** а) [0; 6]. **145.** а) [4; 7]. **153.** а) один. **154.** а) 0,25. **155.** б) $y>0$, якщо $x\in(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$, $y<0$, якщо $x\in(-5;5)$. **156.** б) спадна. **163.** г) $(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$. **164.** б) $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$. **173.** д) $(25;+\infty)$. **178.** а) $g(x) = 0{,}5x + 2{,}5$. **179.** в) $g(x) = x^2 - 1$. **183.** 3 і 0. **184.** 0 і − 4. **185.** а) $y = 0{,}25x$, $x > 0$ і $y = 0{,}5x$, $x \le 0$. **186.** − 0,5; 0. **187.** б) (−5;8). **190.** а) $a = 3$. **191.** **а)** $a\le-\dfrac{1}{3}$, б) $a\ge 0$. **194.** а) 2; б) 4. **195.** а) −2. **198.** а) 2; б) 4. **199.** а) 3; б) −3. **200.** а) 2; б) −1. **211.** а) 6; б) 0. **215.** а) $x-5$ та − 1. **216.** а) x^3-4x^2+3 та 5. **219.** а) 1; − 3. **220.** а) − 1; б) ±2. **221.** а) 1; $-2\pm\sqrt{2}$; б) 0; 2. **227.** а) $x(x-1)(x+2)(x+3)$. **228.** а) $x(x+1)(x+3)(x+5)$. **230.** а) − 1; 0; 1; б) 2. **232.** а) − 3; − 1; 0; 2; б) − 2; − 1; 1; 4; в) − 1; 0; 1; 2. **235.** а) − 3; б) 3 **236.** а) ±2; б) −2;0,5. **237.** а) $(-\infty;-5]\cup(3;4)\cup(4;\infty)$; б) $[-1;1)\cup(1;2)\cup(2;3)\cup(3;5]$. **239.** $a=-7$; $b=12$. **240.** $a=-6$; $b=24$. **241.** а) $a=1$; б) $a=6$. **242.** $a=-6; b=5$. **243.** $x+1$. **256.** а) − 1. **257.** а) 12. **258.** а) $(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$. **259.** в) (−3; −2); г) $(-\infty;-5)\cup(3;+\infty)$. **263.** в) (−7; −3). **265.** а) $(-\infty;-2{,}5)\cup(1;+\infty)$. **271.** а) Ні. **272.** б) $(-\infty;0{,}2]$. **273.** а) $(-\infty;-2)$; б) $(2;\infty)$. **274.** а) $(-\infty;-5)\cup(-5;-3)\cup(7;\infty)$; в) $[-3;0]\cup[1;7]$. **280.** а) 3; б) 8; в) 2. **282.** а) $(-\infty;-3)\cup(-2;0]$; б) $(0;2)\cup(3;\infty)$. **284.** а) $(-\infty;1)\cup(2;\infty)$; б) $(0;0{,}5]$; г) $[-6;-1)$. **290.** $(-\infty;-1]\cup(-0{,}5;1)\cup(1;+\infty)$; б) $(-3-1)\cup[0;1)\cup(1;+\infty)$. **291.** в) $(-\infty;-2{,}5)\cup[-\sqrt{5};0)\cup$ $\cup[\sqrt{5};+\infty)$. **294.** а) $[0;+\infty)$; в) $[-2;+\infty)$. **298.** а) $(-\infty;-4)\cup(-3;-2{,}5]\cup(-2;-\sqrt{2})\cup[1;\sqrt{2})$. **300.** Якщо $a\le-3$, то $x\le a$; якщо $a>-3$, то $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;a)$. **301.** а) $(-\infty;-1-\sqrt{2})\cup$ $\cup(-1+\sqrt{2};+\infty)$.. **318.** а) при $a > 4$, $x\in(4;a)$; при $a = 4$, $x\in\varnothing$; при $a < 4$ $x\in(a;4)$; г) при $a > 2$, $x\in(a;+\infty)\cup\{2\}$; при $a = 2$, $x\in(2;+\infty)$ і при $a < 2$, $x\in(-\infty;a)\cup\{2\}$. **319.** 1; 0; 4. **324.** а) $b > 2$; б) $b\in(-1;2)$. **325.** (0; 1). **328.** При $a < 3$, $x\in(-\infty;a)\cup(3;+\infty)$; при $a > 3$, $x\in(-\infty;3)\cup(a;+\infty)$; при $a = 3$, $x\in R$. **330.** $a=-4$. **331.** $a=-1; a=5$. **333.** а) $m=1$; б) $m=-\dfrac{1}{3}$. **334.** а) 2; б) −3. **335.** в) ±5; ±3. **337.** $p=1$. **339.** $a=3$. **340.** Якщо $a=0{,}2$, то $x=2{,}6$; $x=0{,}2$, якщо $a\ge1$, то $x=1$; $x=3a+2$, якщо $a\le-1$, то $x=-1; x=-2a+3$. **341.** 0; −4; −12. **344.** $a>\dfrac{2\sqrt{7}-2}{3}$; б) $a<-2$. **345.** (−2; 4). **347.** $a\in(0;1)$. **349.** (−1;4). **408.** а) −6; б) 1; г) −0,25. **411.** а) −4. **414.** а) $10\sqrt{3}$. **415.** а) $\sqrt[3]{81}$. **418.** а) $2-\sqrt{2}$. **419.** а) −8 і 8. **420.** а) −1. **423.** а) 3. **428.** а) $1+2\sqrt[3]{2}$. **430.** а) $2\sqrt[4]{2}$. **432.** а) $axy\sqrt[6]{xy^3}$. **437.** а) $\sqrt[3]{289}-2\sqrt[3]{17}+8$. **441.** а) 2. **444.** а) 4. **445.** а) $\sqrt{2}$. **449.** а) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. **451.** а) $4\sqrt{3}+6$. **456.** а) $2\sqrt[4]{ab}$; б) $\sqrt{a}$; в) $a-b$; г) $a+b$. **457.** а) $\sqrt{a}$; б) 1. **458.** а) $\dfrac{1}{3}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{a}+1}{\sqrt[3]{a-1}}$. **460.** а) $a\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$,

$x\in\{0;2;a\}$; $a\in[0;2], x\in\{0;2\}$. **471.** а) $[8;+\infty)$. **475.** б) $-2\le\sqrt[5]{x}\le-1$. **479.** б) [0; 4]. **482.** б) $(1;+\infty)$. **483.** а) $(-\infty;-4)\cup(-4;4)\cup(4;+\infty)$. **486.** в) Ні. **487.** б) (–0,1; 0,5). **496.** а) 1. **497.** а) (0; 16). **498.** а) –1; 0; 1; б) –1; 0; 1. **499.** в) Два, якщо $a > 0$; один, якщо $a = 0$; жодного, якщо $a < 0$. **500.** а) $a<1$, $x\in\varnothing$; $a\ge1$ – один корінь; б) $a<3$, $x\in\varnothing$; $a\ge3$ — один корінь. **501.** Якщо $a<0$, то $x\in\varnothing$, якщо $a=0$, то безліч коренів, якщо $a>o$, то 1 корінь. **502.** а) $\left[3;5-\sqrt[3]{2}\right)$; б) $[3;18)$. **505.** 3 год 20 хв. **515.** б) –2. **517.** а) $\varnothing$. **518.** а) –2. **519.** б) 2 і 3. **520.** а) –9 і 1. **522.** а) –1,25. **523.** б) $\varnothing$. **524.** а) 16. **525.** а) 81. **526.** б) 2 і –2. **530.** б) 1. **531.** в) 0,125. **532.** а) $\varnothing$; в) 0, 1 і 7. **533.** а) 0. **535.** а) 4. **536.** а) 1. **537.** б) –4 і 2; г) 1. **538.** а) 0; 2 і 5. **539.** б) –4 і 1; в) 2 і –0,5; г) –8 і 1. **540.** а) 0,125; б) 5; в) –2 і 6. **555.** а) 2; б) –3. **554.** а) 7 і 8. **545.** а) (9; 4) і (4; 9). **546.** (1; 10). **547.** а) (1; 4). **548.** а) (1; 9) і (9; 1). **549.** а) (2; 3). **541.** 0,5. **542.** 1. **551.** г) $a\in\{1\}\cup(2;+\infty)$. **562.** а) $a[3;+\infty)$; б) $a\in(-4;5]$. **594.** а) $[2{,}25;+\infty)$; б) $x\in\varnothing$. **595.** а) $[-0{,}5;4{,}5]$; б) $(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$. **596.** а) $[4;5]$; в) (0,8; 1). **598.** а) $[-1;3]\cup\{5\}$. **599.** а) $[2;+\infty)$; б) $(-\infty;1]\cup\{6\}$. **600.** а) $(-\infty;-1]\cup\{3\}$; б) $[-3;-1)\cup(2;3]$; в) $\{-5;2\}$. **601.** а) $[3;4]$; г) $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$. **602.** б) $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$; в) $(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$. **603.** а) (0; 8). **604.** а) $[-2;5)$. **605.** а) $(-\infty;-5]\cup[5;+\infty)$. **606.** а) $(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$; б) $[2;4]$. **607.** $(-9;-5]\cup[7;9)$; б) $[-4;-2]\cup[2;10]$. **637.** а) $a+b$. **638.** а) 64. **639.** б) 27. **640.** а) 28; в) 3 і –3. **651.** а) 1. **645.** а) x. **652** в) 4. **653.** а) (8; 1). **654.** (9; 1). **655.** а) (25; 9). **656.** а) $a^{\frac{1}{3}}-1$. **657.** в) $c+1$. **659.** а) 28; г) 1. **662.** а) $\sqrt{1+x}$; б) $a+1$; в) $2a^{0,5}$. **643.** $d=\sqrt[6]{27V^2}$. **665.** $a^{\frac{2}{3}}$. **689.** б) 0,5. **694.** а) $[-2;+\infty]$. **703.** а) $q=-0{,}5$. **715.** а) $y=x^2$. **750.** а) $2\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$. **751.** б) 1,5. **769.** б) Ні; в) Ні. **783.** а) –8 і –2; г) 0,2 і 0,5. **785.** а) $[1{,}25;+\infty)$; в) $(-\infty;-1]$; г) (–1;1). **832.** а) 0,75; б) 0,375. **833.** б) –0,5; в) 0,5. **842.** 4,5 м². **843.** 7 Н. **844.** 1, а) $\frac{3\pi}{4}$; 2, а) $\frac{5\pi}{9}$. **854.** в) tg x; ґ) 1; д) $\mathrm{tg}^2\,\beta$. **862.** б) –0,6; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{4}{3}$. **863.** а) tg β; б) tg β; г) 1. **864.** а) 4; в) tg α tg φ; г) $2\mathrm{tg}^2\,j$. **874.** а) 5; б) 1,25. **877.** а) –0,32; б) –3,125. **881.** б) 3,5 та –1. **882.** б) 3,125 та 0; в) 0,25 та –2. **905.** а) 1; б) 1; **906.** а) $\frac{1}{\sin^2 x}$; б) $\frac{1}{\sin^2 x}$. **915.** б) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; в) –1; г) 1. **916.** а) –ctg b; б) 0; в) $\frac{1}{\cos^2\varphi}$; г) sin a. **924.** а) 1; б) 0; в) –2; г) 1. **925.** а) 1; б) 0; в) 0. **926.** а) 2; б) 2. **950.** а) $x = 0$ і $x = \pi$; б) 1 і –1; в) $x\in(-0{,}5\pi;0{,}5\pi)$ — зростає, $x\in(0{,}5\pi;1{,}5\pi)$ — спадає. **962.** $2\pi n$, $n\in Z$. **963.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. **966.** а) π; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) 2π. **990.** а) $x = 0$; б) $x = \pi$; в) $x=\frac{\pi}{2}$. **992.** а) 6π; б) 6; в) 6π; г) 2π. **995.** а) $a=2$; б) $a=-0{,}5$. **1003.** а) 1; б) $\frac{1}{\sin 2\alpha}$; в) tgα ; г) $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\cos 2\alpha}$. **1005.** а) $\sqrt{3}$; г) 1. **1006.** б) 2; в) 0,5; г) 1. **1009.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$; б) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$; в) $2+\sqrt{3}$; г) $2-\sqrt{3}$. **1010.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$; б) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$; в) $2-\sqrt{3}$; г) $2+\sqrt{3}$. **1014.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$; в) $\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$. **1016.** а) 0; б) 1. **1017.** а) sin a. **1018.** б) cos a. **1020.** а) –ctg β; б) 1. **1021.** а) 1; б) ctg actg β. **1022.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1028.** а) $\frac{84}{85}$; б) $\frac{13}{85}$; в) $\frac{77}{85}$. **1029.** а) $-\frac{1}{3}$; б) –2. **1030.** а) $-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{8}$; б) $-\mathrm{tg}^2 2\alpha$. **1031.** а) 2 і –2; б) $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$; в) 5 і –5; г) 13 і –13.

1039. а) $\frac{63}{65}$; б) $-\frac{16}{65}$. **1041.** б) $a\in[1;2]\cup[3;4]$; в) $a\in[-1;0]\cup[1;2]$. **10052.** а) cos 2a; в) 2; г) 2cos 2a. **1053.** а) 2tg a; в) tg 2a. **1058.** –0,96; –0,28. **1064.** а) sin a; б) tg a; в) cos 8a. **1066.** а) sin 2a; б) $\sin\alpha$; г) ctg 2a. **1071.** а) $\sqrt{2}\cos\alpha$, $-\sqrt{2}\cos\alpha$. **1075.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{6}}{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sqrt{2}$. **1080.** а) 0,125; б) 0,1875. **1081.** а) 3. **1083.** а) 0,6; 0,8; 0,75. **1085.** а) $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$; б) $[-2;2]$. **1087.** а) 1. **1098.** а) $2\sin\frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}$; б) $2\cos\frac{5\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}$; в) $\sqrt{3}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$. **1099.** б) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. **1105.** а) $4\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin 6\alpha$; в) 4cos a cos² 2a; б) $4\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}$; г) $4\sin 3\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha}{2}$. **1107.** а) $4\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha}{2}$; б) –4sin a sin 2a cos 5a. **1109.** а) cos a; б) $\sqrt{2}\sin\alpha$. **1110.** а) $\frac{1}{4}(2\cos 2\alpha+1)$; в) $\frac{1}{2}\left(\sin\beta+\sin(2\alpha+\beta)\right)$. **1115.** в) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$; г) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$. **1125.** а) –0,5; б) –0,5. **1126.** а) 0,5; б) 0,5. **1127.** а) $-2\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$; в) $2\cos\frac{\alpha}{2}$. **1152.** а) $\left[\frac{4}{3};\ 2\right]$; б) [5; 7]; в) [3; 5]; г) [2; 3]. **1155.** а) $\frac{5\pi}{6}$; в) **1156.** а) 3; б) –8. **1157.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1160.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{3\pi}{4}$. **1161.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}$. **1166.** а) –1; б) 1. **1167.** а) cos 1; б) sin 0,5. **1016.** а) $[-1;0{,}5)$; б) $[-1;0{,}5)$. **1169.** а) $x > 2$; б) $x > 3$. **1171.** а) $7-2\pi$; в) $4-\pi$. **1174.** а) –0,5; в) –3; –2. 1176. а) 0,5; б) 0; 1; в) 1,5; г) –1. 1177. а) 2; б) 0,5; в) 0,5; г) ±2. 1179. а) $[0{,}5;\ 1]$; б) $[-1;\ 0{,}5]$. **1204.** а) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; в) $\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$; д) $\pm\frac{\pi}{16}+\frac{1}{4}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$. **1209.** а) $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$; б) $\pm\pi+3\pi k,\ k\in Z$; **1213. 1.** а) 4; б) 4; в) 1. **1216.** а) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$. **1222** а) 1; б) ±2. **1235.** а) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; г) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k,\ k\in Z$. **1236.** а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; г) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$. **1238.** а) $\pi n,\ n\in Z$; $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; б) г) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. **1240.** а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; г) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$. **1241.** а) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; $\operatorname{arctg}3+\pi k,\ k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; $-\operatorname{arctg}4+\pi k,\ k\in Z$; в) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; $-\operatorname{arctg}2+\pi k,\ k\in Z$; г) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; $\operatorname{arctg}2{,}5+\pi k,\ k\in Z$. **1243.** а) $\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; г) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; $(-1)^k\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z$; **1246.** а) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z$; $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; $\pi+2\pi n,\ n\in Z$; г) $\pi n,\ n\in Z$; $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$. **1247.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; б) $\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z$. **1250.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6},\ k\in Z$; б) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z$; в) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; г) $\pi n,\ n\in Z$; $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$. **1251.** а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi k,\ k\in Z$; б) $\operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in Z$; $\operatorname{arctg}4+\pi k$,

$k \in Z$; **1252.** а) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; г) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{6}$, $n \in Z$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **1256.** а) $2\pi n$, $n \in Z$; г) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$. **1257.** а) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n \in Z$; г) $-\text{arctg}\frac{4}{3}+2\pi n$, $n \in Z$. **1260.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{8}$; г) $\frac{\pi}{4}$. **1261.** а) $-\frac{\pi}{4}$; б) $-\pi$; в) $-\frac{\pi}{6}$; г) $-\frac{\pi}{4}$. **1262.** а) 4; б) 2; в) 3; г) 4. **1263.** а) 2; б) 1; в) 2; г) 2. **1264.** а) 0; б) $\frac{3\pi}{2}+5$; в) 0; г) $\frac{9\pi}{4}$. **1266.** а) 3; б) 4; в) –2; г) 0,5; –1,5. **1268.** а) [–1; 1]; б) [–3; –2]. **1276.** а) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;-\pi n\right)$; $\left(\pi k;\frac{\pi}{4}-\pi k\right)$, k, $n \in Z$; б) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{4}-\pi n\right)$, $n \in Z$. **1278.** а) $\left(2\pi n,\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$; $\left(\pi+2\pi n;-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, n, $k \in Z$; б) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, n, $k \in Z$. **1281.** 30°; 60°. **1282.** 30°. **1283.** 75°; 75°; 30°. **1312.** а) $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right]$, $n \in Z$; г) $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right]$, $n \in Z$. **1315.** а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$; б) $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n \in Z$. **1316.** а) $\left[\text{arctg}\,3+\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right]$, $n \in Z$; в) $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n \in Z$. **1320.** а) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right]$, $n \in Z$; г) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in Z$. **1322.** а) $\left(2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in Z$; г) $\left(\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in Z$; ґ) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n \in Z$; **1324.** а) $[-2;0]\cup\{2\}$; в) $[-0{,}5\pi;1]\cup\{-2\}$. **1247.** а) (–2; 2); б) [2; 3]; в) (–1; 1); г) [–4; –2]. **1342.** а) –3; б) 3. **1345.** а) 90; б) 2; в) –7. **1347.** а) 0,5; в) 0,05. **1349.** а) 0,9. **1351.** а) $\Delta x = 0{,}2$; $\Delta y = 2$. **1356.** а) $(-\infty;-2)\cup[2;+\infty)$. **1358.** $x = 2$ — точка розриву. **1363.** а) –8; б) 2. **1364.** а) –0,5. **1365.** а) 1; в) –0,4. **1366.** а) –1,5. **1375.** $-10x$. **1376.** а) –1; б) $6x$. **1380.** а) $x = 1$ — точка розриву; б) $x = 0$ — точка розриву. **1381.** а) $f(0) = -0{,}4$; б) $f(0) = 2$; в) $f(0) = 2$. **1385.** б) $2ax$. **1388.** б) 1,5. **1389.** а) 0,5. **1391.** а) $x = -1$ — точка розриву; б) $x = 1$ — точка розриву. **1392.** а) $x = 1$ — точка розриву; б) $x = 0$ — точка розриву. **1403.** а) 4; в) –2. **1404.** а) 0; б) –21. **1405.** а) 1; в) 1,5. **1406.** а) 0. **1407.** а) 4; в) 2. **1412.** а) 0. **1413.** а) 0; б) 1. **1414.** а) 0; б) 1. **1415.** а) $y = 0$; в) $y = 3$. **1416.** а) $y = 0$. **1419.** а) 0; б) 2. **1420.** а) $-\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}$. **1435.** $k_1=\sqrt{3}$, $k_2 = 1$. **1437.** $y = 3x - 1$. **1439.** $k = 0{,}4$. **1444.** а) 4; в) –1. **1448.** а) $y = 3x - 2$. **1449.** (3; 9). **1453.** $y'(x) = 2x + 2$, $y'(10) = 22$. **1455.** $y'(x) = 2x + 5$. **1456.** а) $y' = 6x + 1$; б) $y' = -2x + 5$. **1462.** а) 10; б) 75; в) 10; г) 1. **1463.** а) $y = 6x + 12$. **1465.** (1; 1) або (7; 49). **1476.** а) $1{,}5\sqrt{x}$. **1478.** а) $-\frac{2}{x^2}$. **1485.** а) $y = 4x - 9$; $y = -6x - 4$. **1487.** а) $y'=-\frac{2}{x^2}+3$; в) $y'=\frac{6}{x^3}$. **1490.** а) $y'=\frac{2x^2+2x+17}{(2x+1)^2}$. **1492.** а) $\pm\frac{1}{6}$; б) $\pm$ 3. **1493.** а) $(1;2)$; б) $\left(-\infty;-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6};+\infty\right)$. **1495.** а) $y = 0{,}09x + 1{,}6$; б) $y = 0{,}89x - 1{,}13$. **1496.** а) $x = 0$; $x = \pm1$. **1497.** а) $x = 1$; $x = -2$. **1498.** а) $x_0 = 8$, або $x_0 = -14$. **1499.** $\frac{25}{12}$. **1505.** а) $a = -3$. **1517.** а) $y' = \sin x + x\cos x$. **1518.** а) $y' = x^2(3\sin x + x\cos x)$. **1523.** а) 13. **1527.** а) $y = -x + \pi - 1$. **1528.** а) $(2\pi n; 0)$, $n \in Z$. **1529.** а) $\cos x$; г) $-\sin x$. **1534.** а) $y' = -\sin 2x$; б) $y' = -2\sin 2x$. **1539.** а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$,

$n\in Z$. **1543.** а) $y = x + 2$. **1546.** а)$y' = 2\sin x + 3$. **1547.** 45°. **1561.** в) $y' = -7(2 - x)^6$; г) $y' = -15x^2(1 - x^3)^4$. **1562.** а) $y' = 4\cos 4x$; б) $y' = \dfrac{3}{4\cos^2\dfrac{3x}{4}}$. **1565.** а) $y' = \sin 2x + 2x\cos 2x$. **1566.** а) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-5}}$; в) $y' = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{(x-1)(x+2)}}$. **1567.** а) $\sqrt{3}$. **1568.** б) 40; г) $\dfrac{7}{12}$. **1570.** а) $y = -3x + \dfrac{3\pi}{4}$; б) $y = \dfrac{5}{6}x + \dfrac{4}{3}$. **1571.** а) $y' = -2\sin 2x$; г) $y' = 4\sin 32x$. **1573.** а) $y' = 5\cos 5x$. **1574.** а) $y'' = 6$; б) $y'' = 12x - 6$. **1576.** а) $y'' = -25\sin 5x + 2$; б) $y'' = -4\cos 2x$. **1578.** а) $y' = \cos x \cos 2x - 2\sin x \sin 2x$. **1579.** а) $y' = 4\sin^3 x \cos x$. **1581.** а) -21; в) $\dfrac{3}{16}$. **1582.** а) -2π; в) $-0{,}5\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$. **1583.** а) $y = 12x + 1 - 0{,}5\pi$. **1586.** $S = 3{,}125$. **1587.** $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}$. **1588.** $a = -\dfrac{7\sqrt{7}}{8}$; $b = \dfrac{27}{4}$. **1590.** а) $y^{(IV)} = -4\cos x + x\sin x$. **1591.** а) $y^{(n)} = \sin(x + n\cdot 0{,}5\pi)$. **1601.** а) $= \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n\in Z$. **1611.** а) спадає на $(-\infty;-1]$ і $[0;\ 1]$; зростає на $[-1;\ 0]$ і $[1;+\infty)$. **1614.** а) Зростає на $(-\infty;0)$ і $(0;+\infty)$; б) зростає на $(-\infty;0)$ спадає на $(0;+\infty)$; **1615.** в) спадає на $(-\infty;-1]$; зростає на $[-1;+\infty)$. **1616.** а) зростає на $\left[-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}; \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}\right]$, $n\in Z$; спадає на $\left[\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}; \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2\pi n}{3}\right]$, $n\in Z$. **1620.** б) зростає на $\left(-\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \pi n\right)$ і $\left(\pi n; \dfrac{\pi}{4} + \pi n\right)$; спадає на $\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$ і $\left(\dfrac{\pi}{2} + n; \dfrac{3\pi n}{4} + \pi n\right)$; $n\in Z$. **1626.** а) $a \ge 0$; б) $a \ge 2$. **1627.** а) $a \le -\dfrac{1}{3}$. **1642.** а) $-0{,}5$. **1643.** а) $x = 0$; б) $x = -0{,}5$. **1644.** а) $x_{max} = -1$; $x_{min} = 0$. **1646.** а) $x_{max} = -1$, $y_{max} = 7$; $x_{min} = 1$, $y_{min} = 3$. **1669.** а) $a\in(-\infty;-14)\cup(13;+\infty)$ — один корінь; $a = -14$ і $a = 13$ два корені; $a\in(-14;13)$ — три корені; в) $a\in(-\infty;-77)\cup(31;+\infty)$ — один корінь; $a = -77$ і $a = 31$ — два корені; $a\in(-77;31)$ — три корені. **1685.** 1. **1686.** $-0{,}5$. **1688.** 1200 м. **1691.** б) 1) $\sqrt{20}$; 0. **1692.** а) 1) 5; 4. **1693.** а) Ні. **1694.** а) $[2;+\infty)$. **1696.** Квадрат. **1698.** $4\dfrac{2}{7}$ год. **1699.** 60°. **1700.** 4 · 4 · 2 (м). **1702.** $\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$ (кв. од.). **1703.** 18 і 3. **1704.** ≈ 2,57 м. **1706.** $(0{,}5; 0{,}5\sqrt{2})$. **1710.** $a = 0{,}5$, $a = 2 + \sqrt{2}$. **1724.** а) увігнута, якщо $x\in(-\infty;-0{,}5)$ і $x\in(0{,}5;+\infty)$; опукла, якщо $x\in(-0{,}5;0{,}5)$; $x = \pm 0{,}5$ — точки прегину. **1725.** а) $x\in\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$ і $x\in\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6};+\infty\right)$ — вгнута, $x\in\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6};\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$ опукла; $x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ — точки перегину. **1730.** а) вгнута, якщо $x\in(-\infty;-1)$ і $x\in(0;+\infty)$; опукла, якщо $x\in(1;0)$; $x = -1$ — точка перегину. **1733.** а) $x = \pm\sqrt{3}$ — вертикальні асимптоти; $y = -x$ — похила асимптота. **1743.** а) 10 м/с. **1746.** а) $v(t) = 8t + 3$; б) $a(t) = 8$. **1748.** а) 16 м/с і 42 м/с². **1749.** 1 с. **1751.** Через $6\dfrac{2}{3}$ с. **1752.** 4 град/с. **1755.** а) 4 м/с і 2 м/с. **1756.** а) 36 м/с². **1758.** а) 40 м/с; в) 180 м. **1759.** $t = 4{,}1$ с; $h \approx 82$ м. **1761.** 1 А. **1763.** $1\dfrac{1}{12}$ г/год. **1765.** 3π рад/с. **1766.** $\dfrac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}$ м/с.

Зміст

Зміст

Розділ 4. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

Розділ 5. ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Відомості про стан підручника

№	Прізвище та ім’я учня	Навчальний рік	Стан підручника		Оцінка
			на початку року	в кінці року	
1					
2					
3					
4					
5					

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна
ВЛАДІМІРОВА Наталія Григорівна

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ
Профільний рівень

Підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

ВИДАНО ЗА ДЕРЖАВНІ КОШТИ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Редактор *О. В. Попович*
Технічний редактор *Л. І. Аленіна*
Комп’ютерна верстка *К. П. Мирончик*
Коректор *Л. А. Еско*

Формат $70\times100^1/_{16}$. Ум. друк. арк. 27,216 + 0,405 форзац.
Обл.-вид. арк. 26,40 + 0,69 форзац. Наклад 4550 пр. Зам. №

ТОВ «ВИДАВНИЧИЙ ДІМ «ОСВІТА»
Свідоцтво «Про внесення суб’єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції»
Серія ДК № 6109 від 27.03.2018 р.

Адреса видавництва: 04053, м. Київ, вул. Обсерваторна, 25
www.osvita-dim.com.ua

Віддруковано у ПРАТ «Харківська книжкова фабрика “Глобус”»
61052, м. Харків, вул. Різдвяна, 11.
Свідоцтво ДК № 3985 від 22.02.2011 р.
www.globus-book.com