Т.М. ЗАСЄКІНА , М.В.ГОЛОВКО

ФІЗИКА

Підручник для 10-го класу загальноосвітніх навчальних закладів (профільний рівень)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Київ
«Педагогічна думка»
2010

УДК 373.5+53](075.3)
ББК 22.3я721
Ф 50

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 03.03.2010 р. № 177)

Видано державним коштом. Продаж заборонено

Наукову експертизу підручника проводив Інститут теоретичної фізики
ім. М. М. Боголюбова Національної академії наук України
Психолого-педагогічну експертизу підручника проводив Інститут педагогіки
Національної академії педагогічних наук України

Експертизу підручника здійснювали:

***О. В. Костенко,** учитель Мартинівського навчально-виховного комплексу «Дошкільний навчальний заклад загальноосвітньої школи I–III ст.» Канівської районної ради Черкаської обл., учитель-методист;*

***Н. А. Іваницька,** учитель ліцею №32 м. Чернігова;*

***Н. М. Дворак,** завідувачка Ужгородського міського методичного кабінету, учитель-методист;*

***С. І. Сукманюк,** методист Старокостянтинівського районного методичного кабінету Хмельницької обл.;*

***В. Ф. Нефедченко,** доцент кафедри загальної та естетичної фізики Сумського державного університету, кандидат педагогічних наук.*

Відповідальні за підготовку підручника до видання:

***О. В. Хоменко,** головний спеціаліст Міністерства освіти і науки України;*

***І. А. Юрчук,** методист вищої категорії Інституту інноваційних технологій і змісту освіти.*

Ф 50 **Фізика:** підручник для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. (профільн. рівень) / авт.: Т. М. Засєкіна, М. В. Головко. – К.: Педагогічна думка, 2010. – 304 с., іл., табл.

УДК 373.5+53](075.3)
ББК 22.3я721

ISBN 978-966-644-159-4

СЛОВО ДО УЧНІВ

У старшій школі ви продовжуватимете вивчення фізики, розпочате ще у 7-му класі. Фізика є загальноосвітнім навчальним предметом і тому не випадково вона вивчається у загальноосвітніх школах усіх країн світу. Разом з іншими науками вивчення фізики має на меті готувати до вибору професії у вашому дорослому житті.

Сучасна людина живе у світі техніки і високих технологій. Вам уже відомо, що фізика є теоретичною основою техніки. Тільки знаючи фізику, можна проектувати та будувати машини, будинки, заводи, електростанції, засоби теле- і радіозв'язку тощо. Сучасна фізика є основою комп'ютерних технологій. З огляду на це фізика необхідна майбутньому інженеру.

Знову-таки і тому, що ми живемо у світі техніки, наше житло, побут заповнені фізико-технічними установками. Вони освітлюють і опалюють житло, допомагають готувати і зберігати їжу, прибирати квартиру, а чого варті телефони, радіо- і телеприймачі, відеомагнітофони і відеокамери, комп'ютери... Для правильного і безпечного користування цими прикладами також необхідно знати основи фізики.

Разом із тим фізика – це не просто результат копіткої і допитливої праці вчених, а й велике надбання людської цивілізації, *важлива складова культури людства. Насамперед фізика дає систематизовану інформацію про навколишній світ разом з умінням здобувати таку інформацію.* Фізика є найглибшою, найфундаментальнішою наукою про природу. Тому її методи і теорії широко використовуються в інших природничих науках і філософії природознавства. Вивчення фізики має важливе значення для розвитку наукового світорозуміння та забезпечення майбутнього фахівця, науковця в галузі техніки і природничих наук методами наукового пізнання природних явищ, вивчення основ техніки і технологій.

Автори прагнули представити фізику як одну з провідних наук про природу, що активно розвивається і є основою сучасної техніки і технологій. У підручнику подано детальне обґрунтування найважливіших фізичних явищ, закономірностей і законів, що стане в пригоді при подальшому опануванні фізики та інших наук у вищих навчальних закладах. Також наведено багато прикладів вияву і застосування фізичних законів у навколишньому житті, відомостей з історії фізичних відкриттів. При цьому ми прагнули висвітлити погляд на фізику як живу науку, що є частиною загальнолюдської культури і надбанням сучасної цивілізації.

Учитель і підручник допоможуть вам у набутті знань. Для цього навчальний матеріал у підручнику виділено спеціальними позначками:

– увага, запам'ятати!!!

– дайте відповіді на запитання

– вправа, приклад розв'язування задач

– загальні рекомендації щодо розв'язування задач

СЛОВО ДО ВЧИТЕЛЯ

Підручник розрахований на учнів 10-х класів, які вивчають фізику на *профільному рівні*. Він є стрижневим елементом навчально-методичного забезпечення шкільного курсу фізики, орієнтиром для вчителя та учня в досягненні кінцевої мети навчання, формування життєвої компетентності особистості, оволодіння методологічними знаннями, залучення до активної пізнавальної діяльності та розвитку інтересу до навчання фізики. Інтерес учнів до вивчення фізики є діалектичним явищем: з одного боку, він формується в процесі вивчення фізики; з другого – вивчення фізики неможливе без стійкого інтересу.

Автори прагнули представити фізику як *живу науку*, що є частиною загальної людської культури, з одного боку, і як фундаментальну науку про природу, одну з важливих природничих наук, з іншого. У тексті наводиться багато прикладів вияву і застосування фізичних законів у житті та практиці, сучасній науці і техніці, відомостей з історії фізики, подається опис фізичних дослідів.

Відомо, що *чітка структура підручника полегшує* сприйняття, усвідомлення та розуміння навчального матеріалу, тому в тексті *виділено головне* (означення, найвагоміші факти, твердження, формули); цей текст виділено кольором. У кінці параграфів підібрані запитання на *узагальнення* і *закріплення* вивченого матеріалу.

У підручнику глибоко та детально використано математичний апарат опису явищ, закономірностей і фізичних законів. Одним з найбільш важливих видів навчальної роботи в профільній школі є розв'язування фізичних задач. Задачі різних типів можна ефективно використовувати на всіх етапах засвоєння фізичного знання: для розвитку інтересу, творчих здібностей і мотивації учнів до навчання фізики, під час постановки проблеми, що потребує розв'язання, у процесі формування нових знань учнів, вироблення практичних умінь учнів, з метою повторення, закріплення, систематизації та узагальнення засвоєного матеріалу, з метою контролю якості засвоєння навчального матеріалу чи діагностування навчальних досягнень учнів тощо. Тому до підручника включені розрахункові, графічні, якісні, дослідницькі, експериментальні, творчі задачі. Автори вважали за доцільне подати також методичні рекомендації щодо розв'язування задач та приклади розв'язування типових задач. Приклади розв'язування задач підібрано так, щоб учень міг самостійно розібратись у фізичній суті задачі, опанувати знання й набути навичок використання найзагальніших і найдоцільніших методів розв'язування задач.

Автори

ЗМІСТ

Вступ

§ 1 Роль фізичного знання в житті людини і суспільному розвитку

✓ *Зародження і розвиток фізики як науки.*
✓ *Методи наукового пізнання.*

Зародження і розвиток фізики як науки. Фізика – одна з найдавніших наук про природу. Першими фізиками були грецькі мислителі, які зробили спробу пояснити спостережувані явища природи. Найвидатнішим із стародавніх мислителів був Арістотель (384–322 рр. до н. е.), який і запровадив слово «φνσιξ» («фюзіс»), що у перекладі з грецької означає *природа*. Але не подумайте, що «Фізика» Арістотеля хоч якось схожа на сучасні підручники з фізики. Ні! У ній ви не знайдете жодного опису досліду чи приладу, жодного малюнка чи креслення, жодної формули. У ній – філософські міркування про речі, про час, про рух взагалі. Такими ж були всі праці учених-мислителів античного періоду. Ось як римський поет Лукрецій (бл. 99–55 рр. до н. е.) описує у філософській поемі «Про природу речей» рух порошинок у сонячному промені:

Певне, ти бачив не раз, як у темряві наших покоїв
Сонця яскравого промінь знадвору нараз просмикнеться, –
Безліч тоді порошинок дрібних, найдрібніших ти бачив,
Як вони в паруску сонця танцюють і всі метушаться.
…………………………………………………………….
Звідси ти можеш собі уявити, як первісні тільця
Серед безкраїх просторів,у світі широкім блукають.
Справді – бо: речі малі є часто модель для великих,
Шлях до пізнання, вказівка до повного їх розуміння.
От чому мають вони на увагу твою заслужити,
Ті порошинки дрібні, що у сонячнім світлі танцюють.
Їх метушня, їхні купи – то певна подоба, то образ
Нам неприступного руху матерії. З прикладу того
Ти зауважити можеш, як тільця, зазнавши удару,
Ледве помітно окові, напрямок руху змінюють,
Кидатись вліво і вправо, вперед і назад починають...

Як видно з наведеного прикладу, уже в античні часи почали розвиватись методи наукового пізнання природи (спостереження, припущення (гіпотеза), моделювання, мисленнєвий експеримент тощо). З праць учених-філософів античного періоду почали свій розвиток усі природничо-математичні науки – фізика, астрономія, хімія, географія, біологія, математика.

Від старогрецького філософа Фалеса (624–547 рр. до н. е.) беруть початок наші знання з електрики і магнетизму, Демокріт (460–370 рр. до н. е.) є основоположником вчення про будову речовини, саме він припустив, що всі тіла складаються з найдрібніших часток – атомів, Евкліду (III ст. до н. е.) належать важливі дослідження в галузі оптики – він вперше сформулював основні закони геометричної оптики (закон прямолінійного поширення світла і закон відбивання), описав дію плоских і сферичних дзеркал.

Серед видатних учених та винахідників цього періоду перше місце посідає Архімед (287–212 рр. до н. е.). З його робіт «Про рівновагу площин», «Про плаваючі тіла», «Про важелі» починають свій розвиток такі розділи фізики, як механіка, гідростатика. Яскравий інженерний талант Архімеда виявився у сконструйованих ним механічних пристроях.

Із середини XVI ст. настає якісно новий етап розвитку фізики – у фізиці починають застосовувати експерименти і досліди. Одним із перших є дослід Галілео Галілея із кидання ядра та кулі з Пізанської вежі. Цей дослід став знаменитим, оскільки його вважають «днем народження» фізики як експериментальної науки.

Потужним поштовхом до формування фізики як науки стали наукові праці Ісаака Ньютона. У праці «Математичні начала натуральної філософії» (1684 р.) він розробляє математичний апарат для пояснення і опису фізичних явищ. На сформульованих ним законах було побудовано так звану ***класичну* (*ньютонівську) механіку*.**

Швидкий прогрес у вивченні природи, відкриття нових явищ і законів природи сприяли розвитку суспільства. Починаючи з кінця XVIII ст., розвиток фізики спричиняє бурхливий розвиток техніки. У цей час з'являються і вдосконалюються парові машини. У зв'язку з широким їх використанням у виробництві та на транспорті цей період часу називають «віком пари». Одночасно поглиблено вивчаються теплові процеси, у фізиці виокремлюється новий розділ – термодинаміка. Найбільший внесок у дослідженні теплових явищ належить С. Карно, Р. Клаузіусу, Д. Джоулю, Д. Менделєєву, Д. Кельвіну та багатьом іншим.

Безліч нових відкриттів відбуваються і у галузі електрики та магнетизму (закон Кулона, закон Ампера, закон Ома, закон електромагнітної індукції тощо). Визначальними для цього періоду є дослідження М. Фарадея, Е.Х. Ленца та Д. Максвелла, які сприяли розробці так званої ***класичної електродинаміки***, що пояснювала властивості електромагнітних полів, електромагнітну природу світла. У кінці XIX і на початку XX ст. з'являються і вдосконалюються електричні машини. Завдяки широкому використанню електричної енергії цей час називають «віком електрики». У фізиці виокремлюються нові розділи – електродинаміка, електротехніка, радіотехніка та інші.

На початку XX ст. фізики отримали численні експериментальні результати, які не можна було узгодити з положеннями класичної механіки та електродинаміки. У фізиці починається новий етап розвитку – створення ***квантової*** та ***релятивістської теорій***. Визначальними для їх створення були праці

М. Планка, Н. Бора, А. Ейнштейна. Квантово-релятивістська фізика є найбільш загальною й універсальною формою подання сучасного тлумачення закономірностей навколишнього світу. Але з її появою класична фізика не зникла. Визначились лише межі, в яких вона діє: класична фізика досліджує макроскопічні тіла (тобто тіла, які складаються з величезної кількості атомів і молекул), які рухаються порівняно повільно (зі швидкістю набагато меншою за 300 000 км/с).

Особливо бурхливий розвиток суспільства починається з другої половини XX ст. Люди навчились добувати і широко застосовувати ядерну енергію, освоювати космічний простір, конструювати нові автоматизовані пристрої і механізми. XX ст. називають «атомним віком», «віком космічної ери». У фізиці інтенсивно проводяться дослідження атомного ядра, плазми, керованих термоядерних реакцій, напівпровідників тощо. Виокремлюються нові галузі фізики, такі як фізика низьких температур, фізика рідкого стану, фізика плазми, фізика твердого тіла та інші.

Початок XXI ст. супроводжується величезним проривом у галузі інформаційних технологій, супутникового зв'язку, нанотехнологій. Але яку б галузь техніки і технологій ми не взяли, в її основі лежать закони фізики.

Методи наукового пізнання. Науки про природу, зокрема й фізика, мають споріднені закони розвитку. За допомогою емпіричних методів пізнання (***спостереження, експерименти***) накопичується значний фактичний матеріал про певну групу явищ природи. На основі цього формулюється ***гіпотеза*** (наукове припущення) та створюється модель, яка пояснює протікання цих явищ. Гіпотеза дає нам лише більш-менш імовірне пояснення явища або ряду явищ. Перевірка гіпотези на практиці, а також застосування гіпотези для розв'язування нових завдань науки робить гіпотезу або достовірною, або іноді примушує відмовитись від неї як хибної і замінити її іншою.

Якщо правильність гіпотези підтверджується, то на її основі формулюються ***закони*** і створюється ***теорія,*** яка має достатньо вичерпно пояснювати явища, що відбуваються, не тільки з якісного, а й з кількісного боку, а також передбачати нові явища, з достатньою для практичних цілей точністю.

Експериментальний і теоретичний методи пізнання є основою фізики.

Експериментом у фізиці називають спеціально поставлений дослід чи спостереження, які задовольняють таким вимогам:

1) відтворюваність експериментальних результатів у разі виконання будь-якої кількості незалежних вимірювань (зокрема й таких, що проводяться на різних установках, різними експериментаторами, у різних місцях тощо);

2) максимальна точність вимірювання;

3) повний контроль за всіма чинниками, які визначають перебіг досліджуваного явища.

У *теоретичних дослідженнях* значна роль відводиться ***мисленнєвим експериментам***, ***моделюванню***, ***ідеалізації*** та ***формалізації*** фізичних явищ. Так, зокрема, вивчення фізичних явищ на мікро- та нанорівнях спершу моделюється, досліджується методами математики, і лише потім перевіряється експериментом.

Метод моделювання полягає в створенні моделі, яка відображає найбільш суттєві властивості оригіналу і дає змогу значно спростити процес дослідження.

Наприклад, механічні рухи тіл, що трапляються у природі, дуже різноманітні. Вони відрізняються один від одного траєкторіями, швидкостями, напрямами тощо. Але з усього різноманіття рухомих тіл можна мислено виокремити ті, що рухаються по прямій лінії, і ті, швидкість руху яких залишається незмінною. Це і буде модель рівномірного прямолінійного руху, за допомогою якої можна встановити закони руху.

Окрім фізичних моделей у фізиці використовуються математичні моделі. ***Математична модель*** – це опис якогось реального об'єкта або процесу мовою математичних понять, відношень, формул, рівнянь тощо.

Історія науки знає чимало прикладів, коли в межах вдало побудованої математичної моделі за допомогою обчислень, як кажуть, «на кінчику пера», вдавалося передбачити існування нових фізичних явищ та об'єктів. Так, спираючись на математичні моделі, астрономи Дж. Адамс (Англія) у 1845 р. і У. Левер'є (Франція) у 1846 р. незалежно один від одного дійшли висновку про існування невідомої тоді ще планети і вказали її розміщення. За розрахунками Левер'є астроном Г. Галле (Німеччина) знайшов цю планету. Її назвали Нептуном.

Англійський фізик М. Дірак у 1928 р. отримав рівняння руху електрона. З розв'язку цього рівняння випливало існування елементарної частинки, яка відрізняється від електрона лише знаком електричного заряду. Таку частинку у 1932 р. відкрив фізик К. Д. Андерсен (США) і назвав її позитроном.

Метод математичного моделювання відіграє важливу роль у корабле- та авіабудуванні, економіці тощо.

Результати експериментальних і теоретичних досліджень формулюються у вигляді певних закономірностей – фізичних законів.

Не всі закони фізики є рівносильними за науковим значенням. У фізиці розрізняють фундаментальні, часткові та закони фундаментального походження.

Фундаментальними є закони збереження (енергії, електричного заряду та ін.), закон всесвітнього тяжіння тощо. Закони, які виконуються лише у певних обмежених умовах, називаються *частковими*. Це, наприклад, закон Гука, закон Ома. Закони, які можна математично вивести з фундаментальних, називають *законами фундаментального походження*.

Сукупність законів, що описують широке коло явищ, називають ***науковою теорією***.

Наприклад, закони Ньютона складають зміст однієї з перших фізичних теорій – класичної механіки. Зміст класичної теорії електромагнетизму утворюють закони, сформульовані англійським фізиком Д. Максвеллом.

Усі фізичні закони і теорії є деяким наближенням до дійсності, обумовленим певною умовністю моделі явищ і процесів. Тому фізичні закони і теорії мають певні межі застосування. Наприклад, класична механіка є справедливою тільки при розгляді руху тіл зі швидкостями, набагато меншими, ніж швидкість поширення світла.

Підбиваючи підсумок зазначимо: фізика – це не просто результат копіткої і допитливої праці вчених, а й велике надбання людської цивілізації, *важлива складова культури людства. Насамперед фізика дає систематизовану інформацію про навколишній світ разом з умінням здобувати таку інформацію.* Фізика є найглибшою, найфундаментальнішою наукою про природу. Тому її методи і теорії широко використовуються в інших природничих науках і філософії природознавства. Вивчення фізики має важливе значення для розвитку наукового світорозуміння та забезпечення майбутнього фахівця в галузі техніки і природничих наук методами наукового пізнання.

Дайте відповіді на запитання

1. Вкажіть основні етапи у розвитку фізики.
2. Назвіть основні методи наукового пізнання.
3. Що таке фізичний експеримент, закон, теорія?
4. У чому полягає суть моделювання? Наведіть приклади відомих вам фізичних моделей.

§ 2 Вимірювання фізичних величин

✓ *Одиниці фізичних величин.*
✓ *Вимірювання. Похибки вимірювання.*
✓ *Наближені обчислення.*

Одиниці фізичних величин. Фізичні закони і закономірності плину фізичних явищ і процесів мають бути виражені кількісно, тому фізики шукають кількісні характеристики тих властивостей тіл чи явищ, які вони вивчають. У фізиці такі характеристики називають фізичними величинами.

> ***Фізична величина*** – кількісна характеристика певної властивості тіла чи явища.

Фізичну величину завжди можна виміряти, тобто порівняти її з однорідною величиною, яку взято за одиницю цієї величини. Так, виміряти довжину стола – означає порівняти її з іншою довжиною, яку взято за одиницю довжини, наприклад, з метром. У результаті вимірювання величини визначають її числове значення, виражене в певних одиницях.

Для кожної фізичної величини встановлено свої одиниці. Для зручності всі країни світу прагнуть користуватись однаковими одиницями фізичних величин. Тож у 1960 р. було прийнято ***Міжнародну систему одиниць*** (в українській транскрипції скорочено – ***СІ «система інтернаціональна»***). До неї входить сім основних одиниць та дві додаткові на основі яких визначаються інші (похідні) одиниці.

Основна фізична величина – фізична величина, яка входить до системи і умовно прийнята як незалежна від інших величин цієї системи.

До основних одиниць СІ належать:

Довжина – 1 м (метр).
Час – 1 с (секунда).
Маса – 1 кг (кілограм).
Температура – 1 К (кельвін).
Сила світла – 1 кд (кандела).
Сила струму – 1 А (ампер).
Кількість речовини – 1 моль.
Додатковими є одиниця плоского кута – 1 рад (радіан) і тілесного кута – 1 ср (стерадіан).

Похідна фізична величина – фізична величина, яка входить до системи і визначається через основні величини цієї системи.

Наприклад, знаючи, що густину речовини визначають за формулою $\rho = m/V$, можна з основних одиниць скласти одиницю густини $[\rho] = 1\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Для скорочення запису великих і малих значень різних величин користуються кратними й частинними одиницями. Кратні одиниці – це одиниці, більші від основних одиниць у 10, 100, 1000 і більше разів. Частинні одиниці – це одиниці, менші від основних у 10, 100, 1000 і більше разів.

На форзаці підручника розміщена табл. 1 у якій вказані найважливіші одиниці Міжнародної системи, які ми будемо використовувати при вивченні механіки, та табл. 2 з найменуванням і позначенням префікса для записування кратних і частинних одиниць.

Вимірювання. Похибки вимірювання. Багато галузей діяльності людини та суспільства тісно пов'язані з вимірюванням фізичних величин.

Вимірюванням називають визначення фізичної величини дослідним шляхом за допомогою засобів вимірювання.

Точні вимірювання – справа досить громіздка, тому для вирішення проблем вимірювання існує наука – метрологія. Ця назва походить від грецьких слів: «метрон» – міра та «логос» – учення.

Метрологія – наука про вимірювання, яка включає як теоретичні, так і практичні аспекти вимірювань у всіх галузях науки і техніки.

Ми розглянемо лише ті питання теорії вимірювань, які найчастіше використовуються у шкільній практиці при виконанні лабораторних робіт, експериментальних досліджень.

Серед фізичних величин є такі, які можна виміряти безпосередньо за допомогою вимірювальних приладів, наприклад, довжина, час, маса, температура, сила струму. Вимірювання, здійснені безпосередньо, називаються *прямими*.

Однак частіше доводиться визначати величини, які виміряти безпосередньо неможливо (коефіцієнт тертя, питома теплоємність речовини, внутрішній опір джерела струму тощо). Для таких фізичних величин потрібно відшукати функціональну залежність від величин, вимірюваних безпосередньо. Такі вимірювання називаються *непрямими*.

Недосконалість вимірювальних приладів і методів вимірювання, а також людських органів чуття, вплив середовища вносять певну неточність (похибку) у процес вимірювання.

Наприклад, трьом учням дали завдання виміряти довжину бруска лінійкою з сантиметровими поділками (без мм), а десяті частки сантиметра визначити «на око». Результати вимірювань виявились такими: 15,3; 15,8 і 15,4 см.

Яке ж вимірювання вважати найточнішим? У нас немає підстав віддати перевагу будь-якому вимірюванню, якщо всі вони проводились акуратно, з додержанням правил користування вимірювальними приладами. У такому випадку наближеним результатом буде середнє арифметичне з усіх результатів вимірювання:

$$l_с = \frac{15,3 + 15,8 + 15,4}{3} = 15,5 \text{ см}.$$

Відхилення наближеного значення величини від його точного значення називається ***абсолютною похибкою***.

Якщо істинне значення вимірювальної величини позначити X, а значення отримане у результаті прямого вимірювання x, то абсолютна похибка ΔX є різницею між ними: $\Delta X = X - x$.

Звернімось до нашого прикладу. Оскільки істинне значення l нам невідоме, за абсолютну похибку Δl приймається відхилення його результату від середнього значення, знайденого з кількох вимірювань: $\Delta l_1 = 15,3 - 15,5 = -0,2$ см; $\Delta l_2 = 15,8 - 15,5 = 0,3$ см; $\Delta l_3 = 15,4 - 15,5 = -0,1$ см.

Далі слід обчислити ***середню абсолютну похибку*** як *середнє арифметичне*:

$$\Delta l_с = \frac{0,2 + 0,3 + 0,1}{3} = 0,2 \text{ см}.$$

Зверніть увагу, що під час обчислення середньої абсолютної похибки значення всіх похибок окремих вимірювань взято зі знаком «+». Якби ми взяли б усі відхилення від середнього з вказаними вище знаками «+» і «–», то в сумі дістали б нуль і дійшли б неправильного висновку, що значення 15,5 см є точним значенням довжини бруска.

Знати абсолютну похибку вимірювань – ще не означає мати повну характеристику якості вимірювань. Так, похибка в 1 см при вимірюванні рейки довжиною 12 м є незначною, але така сама похибка при вимірюванні бруска довжиною 12 см уже буде грубою. Для оцінки точності вимірювання визначають ***відносну похибку***.

> ***Відносна похибка*** ε – це відношення абсолютної похибки ΔX вимірювання до істинного значення вимірювальної величини X.

Відносну похибку найчастіше виражають у відсотках.

$$\varepsilon = \frac{\Delta X}{X} \cdot 100\ \%.$$

У наведеному прикладі, оскільки нам невідоме істинне значення величини, слід визначити середню відносну похибку:

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta l_c}{l_c} \cdot 100\ \% = \frac{0,2}{15,5} \cdot 100\ \% = 1,3\ \%.$$

Остаточний результат записуємо у вигляді: $l = l_c \pm \Delta l_c = (15,5 \pm 0,2)$ м при $\varepsilon_c = 1,3\ \%$.

Похибки непрямих вимірювань фізичних величин визначають за похибками безпосередньо виміряних величин з використанням табличних формул для обчислення похибок, які наведено у табл. 3 на форзаці.

Під час математичної обробки результатів експериментів потрібно також врахувати похибки засобів вимірювання – інструментальні похибки $\Delta x_{ін}$.

Інструментальними називаються похибки, причина яких полягає у властивостях засобів вимірювання. Джерелами цих похибок є деяка недосконалість вимірювальних приладів: неточність нанесення відміток шкали, тертя при переміщенні рухомих деталей приладу тощо.

Похибку приладу (її називають граничною абсолютною похибкою вимірювального приладу $\Delta x_{ін}$) вказують у його паспорті або на шкалі, і вона характеризує точність засобу вимірювання за нормальних умов роботи. У табл. 4 форзацу вказані $\Delta x_{ін}$ приладів, які найчастіше використовуються у шкільному фізичному експерименті.

Якщо для певного приладу не вказано $\Delta x_{ін}$, то вважають, що гранична похибка дорівнює половині ціни поділки шкали.

Наближені обчислення. При вимірюванні фізичних величин їх значення завжди є наближеними.

На практиці наближені значення записують так, щоб за цим записом можна було дійти висновку про точність наближення. Якщо наближене значення записано так, що його абсолютна похибка не перевищує одиниці останнього розряду, то кажуть, що число записано ***правильними цифрами***.

> ***Правильною цифрою наближеного значення*** називають цифру будь-якого розряду, якщо абсолютна похибка не перевищує одиниці цього розряду.

Наближені значення завжди записують так, що усі його цифри є правильними. Наприклад, у таблиці температур плавлення зазначено, що температура плавлення міді 1084,5 °С. У записі цього наближеного значення температури всі цифри правильні. Остання цифра записана у розряді десятих, тому абсолютна похибка наближеного значення не перевищує 0,1°С.

У довідниках, технічній літературі при розв'язуванні фізичних задач записи наближених значень можуть подаватись у ***стандартному вигляді***.

Стандартний вигляд числа – це запис числа у вигляді $a \cdot 10^n$, де $1 \le a < 10$, n – ціле число.

При такому записі множник a містить лише правильні цифри, тож можна легко знайти точність наближеного значення.

Наприклад, у довіднику зазначено, що маса Землі дорівнює $5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг. Визначимо точність наближеного значення. Оскільки у множнику 5,976 усі цифри правильні, а останньою є цифра розряду тисячних, то маса Землі (у кг) дорівнює:

$$m = (5{,}976 \pm 0{,}001) \cdot 10^{24}\text{ кг} = 5{,}976 \cdot 10^{24}\text{ кг} \pm 0{,}001 \cdot 10^{24}\text{ кг} = (5{,}976 \cdot 10^{24} \pm 10^{21})\text{ кг}.$$

Отже, точність наближеного значення 10^{21} кг.

При виконанні дій над наближеними значеннями використовують також поняття ***значущої цифри***.

Значущими цифрами наближеного значення називають усі його цифри, крім нулів ліворуч, а також тих нулів праворуч, які стоять на місцях цифр, замінених при округленні.

Наприклад, у наближеному значенні 0,003 09 три значущі цифри: 3; 0; 9. У числі 9,001 усі чотири цифри значущі. Число 0,060 має дві значущі цифри: 6 і 0, а два нулі, які передують цифрі 6, не є значущими,

Виконуючи дії з наближеними значеннями використовують певні правила.

Правила наближених обчислень:

Під час додавання і віднімання результат округлюють так, щоб він не мав значущих цифр у розрядах, яких немає хоча б в одному з даних.

Наприклад, знайдемо суму наближених значень 1,2 і 0,423. Перше з них має один десятковий знак, інше – три. Отже, суму слід округлити до одного десяткового знака (до десятих): $1{,}2 + 0{,}423 = 1{,}623 \approx 1{,}6$.

При множенні та діленні наближених значень результат слід округлювати до стількох значущих цифр, скільки їх має компонент дії з найменшим числом значущих цифр.

Наприклад, перемножимо наближені значення 5,21 і 0,08. Перше з них має три значущі цифри, а інше – одну. Отже, у добутку слід залишати одну значущу цифру: $5{,}21 \cdot 0{,}08 = 0{,}4168 \approx 0{,}4$.

У випадку піднесення до квадрата (чи куба) в результаті беруть стільки значущих цифр, скільки їх має основа степеня. Наприклад: $1{,}26^2 = 3{,}276 \approx 3{,}28$.

При добуванні квадратного (чи кубічного) кореня у результаті беруть стільки значущих цифр, скільки їх має підкореневий вираз. Наприклад:

$\sqrt{2,29} \approx 1,513 \approx 1,51$.

Корисно пам'ятати такі наближені рівності:

Якщо $a << 1$, то $(1 \pm a)^2 \approx 1 \pm 2a$; $\sqrt{1 \pm a} \approx 1 + \frac{a}{2}$.

При малих кутах (до 5°) $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha = \alpha$ (рад).

Дайте відповіді на запитання

1. Що таке вимірювання?
2. Назвіть основні одиниці фізичних величин СІ.
3. Чим зумовлені похибки вимірювання? Якими вони бувають?
4. Які цифри називають правильними, а які значущими?
5. Сформулюйте правила наближених обчислень.
6. Визначте середню абсолютну і відносну похибки вимірювання діаметра болта, якщо три послідовні вимірювання дали такі результати: 12,52; 12,48 і 12,51 мм.
7. Виконуючи лабораторну роботу з визначення густини тіла, учень виміряв об'єм та масу тіла з точністю до 1 %. Отримане значення густини він записав у вигляді $\rho = 2{,}7348$ г/см^3. Якої помилки припустився учень? Як треба записати цей результат?

§ 3 Скалярні і векторні величини

✓ *Скалярні і векторні величини.*
✓ *Дії над векторами.*
✓ *Проекція вектора на вісь.*

Скалярні і векторні величини. У фізиці використовуються як скалярні величини так і векторні.

> ***Скалярна величина*** (скаляр) – величина, значення якої задається дійсним числом.

У механіці це: маса m, робота A, потужність N, енергія E та інші.

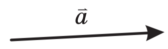
Скалярні величини можуть бути додатними або від'ємними. *Сума скалярних величин обчислюється алгебраїчною сумою* їх числових значень.

> ***Векторна величина*** (вектор) – величина, значення якої задається дійсним числом і напрямком.

У механіці це: швидкість $\vec{\upsilon}$, прискорення $\vec{a}$, сила $\vec{F}$, імпульс $\vec{p}$ та інші.

Графічно вектор зображається як напрямлений відрізок (*мал. 1*).

Мал. 1. Графічне зображення вектора



Числове значення вектора називають **модулем вектора** і позначають $|\vec{a}|$ або просто a.

Модуль вектора – завжди додатний скаляр.

Дії над векторами. Над векторними величинами можна виконувати математичні дії додавання, віднімання, множення.

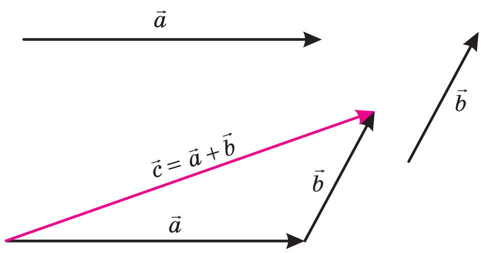
Сума векторних величин обчислюється геометричною сумою векторів, результуюча якої є також вектором.

Додають вектори, застосовуючи правило трикутника або правило паралелограма.

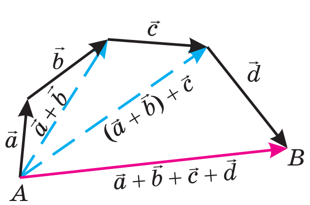
Правило трикутника: при додаванні векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори паралельним переміщенням розташовують так, щоб початок вектора $\vec{b}$ виходив із кінця вектора $\vec{a}$, тоді вектор $\vec{c}$, який виходить із початку вектора $\vec{a}$ і кінець якого збігається з кінцем вектора $\vec{b}$ і є сумарним вектором (*мал. 2*).

За правилом трикутника зручно додавати велику кількість векторів (*мал. 3*).

Правило паралелограма: два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ паралельним перенесенням розміщують так, що їх початки збігалися. Вважаючи, що обидва вектори є двома сторонами паралелограма, необхідно добудувати паралелограм. Тоді діагональ паралелограма, яка виходить із точки, де починаються вектори, і є сумарним вектором $\vec{c}$ (*мал. 4*).



Мал. 2. Додавання векторів за правилом трикутника



Мал. 3. Додавання декількох векторів

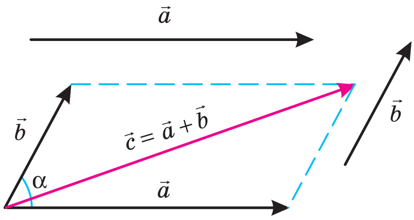
$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d} = ((\vec{a}+\vec{b})+\vec{c})+\vec{d}$$

Числове значення сумарного вектора визначають за формулою

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha},$$

де α – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, що виходять з однієї точки (*мал. 4*).

Щоб визначити різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, вектори паралельним перенесенням розміщують так, щоб їх початки збігалися. Тоді вектор $\vec{c}$, проведений із кінця від'ємника $\vec{b}$ до кінця зменшуваного $\vec{a}$ і є їх різницею (*мал. 5*).



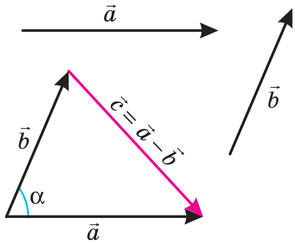
Мал. **4. Додавання векторів за правилом паралелограма**

Числове значення різниці векторів визначають за формулою

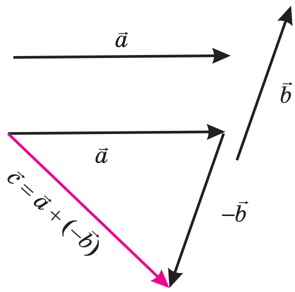
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha},$$

де α – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, що виходять з однієї точки (*мал. 5*).

Так, як і у випадку дійсних чисел, віднімання векторів можна звести до їх додавання. Різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна визначити через суму вектора $\vec{a}$ з вектором $(-\vec{b})$ (який за модулем дорівнює вектору $\vec{b}$, але протилежний йому за напрямом), тобто $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ (*мал. 6*).



Мал. **5. Різниця векторів**



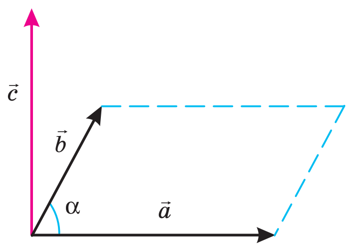
Мал. **6. Різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна визначити через суму вектора $\vec{a}$ з вектором $(-\vec{b})$**

У випадку взаємноперпендикулярних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ числові значення суми та різниці однакові. Сумарний вектор і вектор різниці відрізняються напрямками.

При множенні вектора $\vec{a}$ на додатний скаляр k отримуємо новий вектор $k\vec{a}$, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, а числове значення в k разів більше.

При множенні вектора $\vec{a}$ на від'ємний скаляр k отримуємо новий вектор $k\vec{a}$, напрям якого протилежний напряму вектора $\vec{a}$, а числове значення в k разів більше.

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є *скаляр* c, що дорівнює добутку модулів векторів a і b, помножений на косинус кута між ними: $c = (\vec{a} \cdot \vec{b}) = a \cdot b \cdot \cos\alpha$.



Мал. **7. Векторний добуток векторів**

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є *вектор* $\vec{c}$, що дорівнює добутку модулів векторів a і b, помножений на синус кута між ними: $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}] = a \cdot b \cdot \sin\alpha$.

Вектор $\vec{c}$ за модулем дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, та направлений перпендикулярно до площини, у якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. До того ж, якщо спостерігати з кінця вектора $\vec{c}$ за обертанням вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ (у напрямку меншого кута), то воно відбувається проти годинникової стрілки (*мал. 7*).

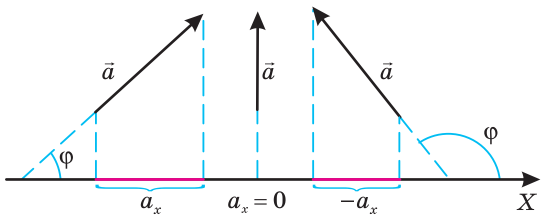
Проекція вектора на вісь. Будь-який вектор можна розкласти на складові, зокрема, за осями декартової системи координат.

> ***Проекція вектора*** – відрізок, який отримують шляхом проектування вектора на відповідну числову вісь.

Проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь X називається величина a_x, яка визначається $a_x = a \cdot \cos\varphi$, де a – модуль вектора, φ – кут між напрямом вектора та віссю X (*мал. 8*).

Проекції вектора – величини скалярні.

Проекція вектора на вісь буде додатною, якщо кут φ гострий, і від'ємною, якщо кут φ тупий, і нульовою, якщо φ прямий (вектор перпендикулярний до осі).

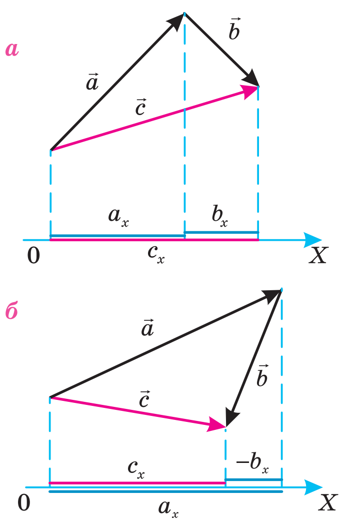


Мал. 8. Проекція вектора на вісь

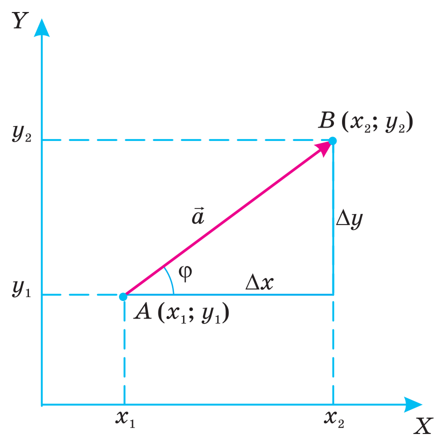
Проекція суми векторів на координатну вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій векторів, що додаються (*мал. 9*).

Отже, векторні величини додаються геометрично, а скалярні – алгебраїчно.

Якщо (*мал. 10*) початком вектора $\vec{a}$ на координатній площині є точка A, координати якої $(x_1; y_1)$, а кінцем вектора є точка B з координатами $(x_2; y_2)$, то координатами $(a_1; a_2)$ вектора $\vec{a}$ є числа $a_1 = (x_2 - x_1)$ та $a_2 = (y_2 - y_1)$.



Мал. 9. Проекція суми векторів: а) $c_x = a_x + b_x$; б) $c_x = a_x - b_x$



Мал. 10. Визначення координат і напряму вектора

З формули відстані між двома точками випливає, що модуль вектора визначається:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\,.$$

Напрям вектора $\vec{a}$ відносно координатної осі X визначається тангенсом кута нахилу вектора: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Дайте відповіді на запитання

1. Які величини називають векторними, а які скалярними?
2. Як визначити суму і різницю двох векторів?
3. Що називають скалярним добутком векторів?
4. Що таке векторний добуток векторів?

Вправа 1

1. Визначте побудовою суму і різницю двох однакових за модулем взаємноперпендикулярних векторів.

2. У початковий момент часу тіло перебувало у точці з координатами $x_1 = -2$ м та $y_1 = 4$ м. Тіло перемістилось у точку з координатами $x_2 = 2$ м та $y_2 = 1$ м. На скільки метрів перемістилось тіло?

3. Задано координати точок (10; 2) та (5; 1). Визначити координати точки, яка розташована на відстані 1/3 довжини відрізка, що сполучає ці точки, від першої точки.

4. Вектор $\vec{a}$ лежить у площині $X0Y$ та утворює з віссю абсцис кут 30°. Визначити проекції вектора на осі координат.

5. Початок вектора має координати (2; 1), а кінець – (9; 5). Визначити: а) проекції вектора на осі координат; б) модуль вектора; в) напрям вектора у просторі.

6. Дано два вектора a і b, розташованих під кутом α один до одного. Побудуйте вектори різниці $(a - b)$ та $(b - a)$. Прослідкуйте, як змінюється модуль вектора різниці, якщо кут α між векторами a і b змінювати від 0° до 180°.

§ 4 Графіки функцій та правила їх побудови

✓ *Функціональні залежності величин.*
✓ *Графіки функцій та правила їх побудови.*

Функціональні залежності величин. Спостерігаючи за будь-яким процесом, можна помітити, що одні величини змінюють своє значення, інші – ні. Величини, які у певному процесі весь час зберігають своє значення незмінним, називаються ***постійними***. ***Змінними*** є величини, значення яких у певному процесі змінюється.

Наприклад, під час зльоту літака відстань від поверхні землі збільшується, кількість бензину у баках зменшується, розміри літака залишаються постійними.

Одна і та сама величина в одному процесі може бути постійною, в іншому – змінною. Проте є такі величини, які весь час зберігають своє значення – ***константи*** (їх прийнято записувати: const). Наприклад, відношення довжини кола до його радіуса; сума кутів трикутника; питома теплоємність речовини; величина елементарного електричного заряду тощо.

Часто одна змінна величина залежить від іншої. Якщо дві змінні величини пов'язані між собою так, що кожному значенню однієї з них відповідає певне значення іншої, то кажуть, що між цими змінними є функціональна залежність. Приклади функціональних залежностей: $l = 2\pi R$ – довжина кола і його радіус, $R = R_0\,(1 + \alpha t)$ електричний опір провідника та його температура.

Якщо дві змінні знаходяться у функціональній залежності, то та з них, яка набуває довільні допустимі значення називається ***аргументом (незалежною змінною)***, інша, значення якої залежить від значень аргументу, – ***функцією (залежною змінною)***. Наприклад, відомо, чим вища температура, тим більшою стає довжина стального стержня, тобто довжина стержня залежить від температури. У цьому випадку температура – аргумент, довжина стержня – функція.

Якщо величина y є функцією величини x, то математично це записують так: $y = f(x)$. Наприклад, шлях, що проходить тіло є функцією часу руху тіла: $s = f(t)$.

Функцією називають і сам закон (правило) f взаємозв'язку величин.

Функцію можна задати формулою, за якою за певним значенням аргументу можна обчислити відповідне значення функції. Такий спосіб визначення функції називається ***аналітичним***. Функцію також можна задати ***табличним***, ***графічним, описовим*** та іншими способами.

Графіки функцій та правила їх побудови. При розв'язуванні фізичних задач найчастіше користуються аналітичним або графічним способами визначення функцій.

Звернемо увагу на графічний метод зображення функціональної залежності – побудову графіків. За допомогою графіка можна наочно подати функціональну залежність фізичних величин, з'ясувати, у чому суть прямої та оберненої пропорційності між ними, вказати, як швидко зростає чи спадає числове значення однієї фізичної величини залежно від зміни іншої, коли вона досягає максимального чи мінімального значення, і т. ін.

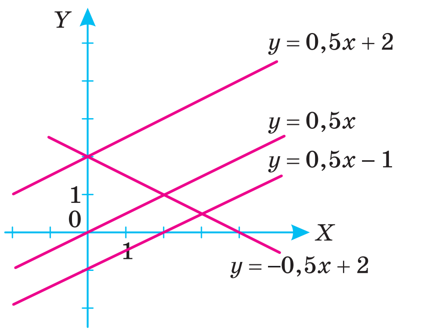
У курсі математики ви уже вивчали деякі графіки функцій та правила їх побудови. Пригадаємо ті, які найчастіше використовуються при розв'язуванні фізичних задач.

Графік лінійної функції. Лінійною функцією називають функцію, яку можна виразити формулою $y = ax + b$, де x – аргумент, a і b – задані числа.

Графіком лінійної функції є пряма. Залежно від знака і значення кутового коефіцієнта a та сталої b графік функції буде мати відповідний вигляд (*мал. 11*).

Якщо $a = 0$, графік лінійної функції є прямою, паралельною осі абсцис, що проходить через точку b на осі ординат.

Прикладами відомих вам лінійних залежностей фізичних величин є: залежність пройденого шляху від часу при рівномірному русі тіла $l = \upsilon \cdot t$, де

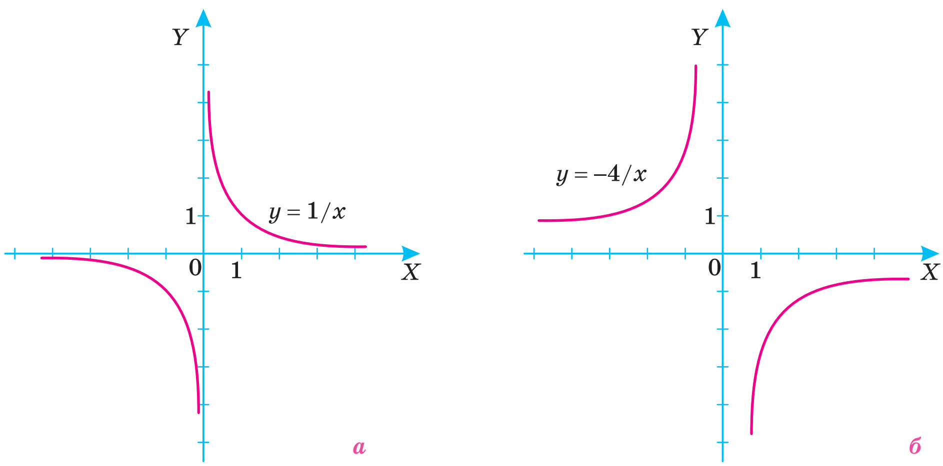


Мал. **11. Графік лінійної функції**

$\upsilon = \text{const}$; залежність сили струму в провіднику від напруги на його кінцях $I = U \cdot R$, де $R = \text{const}$; робота, яку виконує сила, що постійно діє на тіло, при його прямолінійному рівномірному русі $A = F \cdot s$, та багато інших.

Графік обернено пропорційної залежності. Залежність між величинами x і y, яку можна виразити формулою $y = a/x$, де x – аргумент, a – задане число, називають обернено пропорційною залежністю.

Графіком обернено пропорційної залежності є крива, що складається з двох окремих віток, розташованих у першій та третій чвертях координатної площини при $a > 0$ (*мал. 12, а*), або у другій та четвертій – при $a < 0$ (*мал. 12, б*). Ця лінія називається ***гіперболою***.



Мал. **12. Графіки обернено пропорційної функції**

Відомими вам оберненими пропорціями є: залежність періоду обертання від частоти обертання $T = 1/\nu$, залежність сили струму в провіднику від величини його опору при постійній напрузі $I = U/R$, де $U = \text{const}$, та інші.

Графік квадратичної функції. Квадратичною називають функцію, яку можна виразити формулою $y = ax^2 + bx + c$, де x – аргумент; a, b, c – задані числа. Її графіком є крива, яку називають ***параболою***.

Координати вершини параболи $(m; n)$ визначаються за формулами:

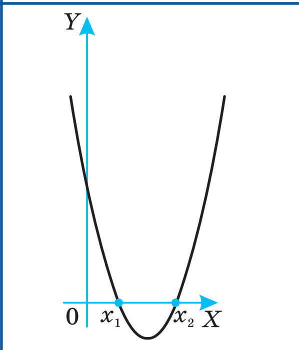
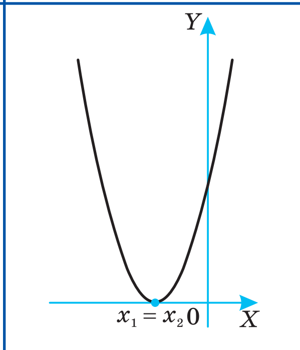
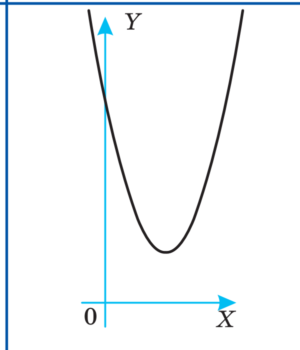
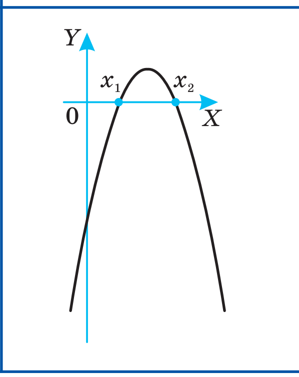
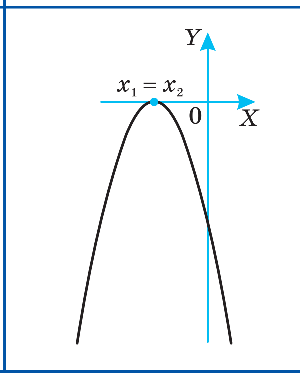
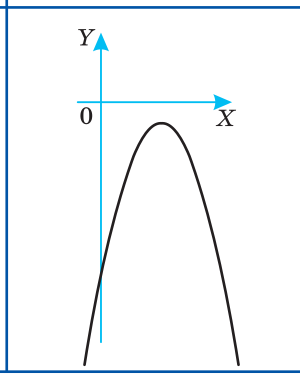
$$m = -\frac{b}{2a}, \quad n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{D}{4a},$$

де D – дискримінант.

Її віссю симетрії є пряма $x = m$. При $a > 0$ вітки параболи направлені вгору, а при $a < 0$ – вниз. У таблиці показано положення графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ залежно від знаків коефіцієнта a та дискримінанта D.

З прикладами побудови таких графіків ми згодом ознайомимось при вивченні прискореного руху (§ 10).

Таблиця положення графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ залежно від знаків коефіцієнта a

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Дайте відповіді на запитання

1. Що називають функціональною залежністю? Наведіть приклади функціональних залежностей фізичних величин.
2. Охарактеризуйте особливості побудови графіка функції $y = ax + b$.
3. Охарактеризуйте особливості побудови графіка функції $y = ax^2 + bx + c$.
4. Зобразіть графічно роботу трактора силою тяги F = 500 кН на шляху s = 300 м.
5. Чим відрізняються між собою графіки $s = \upsilon t$ і $s = s_0 + \upsilon t$, при $\upsilon = \text{const}$?

§ 5 Класична механіка – перша фізична теорія

- *Історія розвитку вчення про механічний рух.*
- *Загальні відомості про механічний рух.*
- *Основна задача механіки.*

Історія розвитку вчення про механічний рух. Вивчення навколишнього світу показало, що матерія постійно рухається. ***Будь-яка зміна, що відбувається в природі, є рухом матерії.***

Рух матерії досить складний. Він може виявлятись у різних формах, змінювати свою форму, але сам рух матерії не створюється і не знищується.

Щоб зрозуміти навколишній світ, треба передусім дослідити ***рух***. Найупізнаванішим, наочним і доступним для дослідження є ***механічний рух***.

> Наука, яка вивчає механічний рух матеріальних тіл і взаємодії, які при цьому відбуваються, називається ***механікою***.

Назва «механіка» походить від грецького слова *mēchanikē*, що означає «наука про машини, мистецтво конструювання машин».

Перші трактати з механіки, де описані прості механізми (важіль, клин, колесо, похила площина), належать ученим Стародавньої Греції, передусім Аристотелю й Архімеду.

Архімед увійшов в історію науки як автор закону гідростатики, названого його ім’ям, як винахідник важеля. Вчений уперше застосував математику для аналізу і опису механічних рухів.

Новий етап розвитку механіки відкривають праці Галілео Галілея (1564–1642) – великого італійського фізика й астронома, який уперше застосував експериментальний метод у науці, сформулював закон інерції, встановив закони падіння тіл і коливань маятника.

Через рік після смерті Галілея народився Ісаак Ньютон (1643–1727) – видатний англійський фізик, астроном, математик. Його називають засновником ***класичної механіки,*** або, як кажуть, механіки Ньютона. Він сформулював основні закони механічного руху, відкрив закон всесвітнього тяжіння, пояснив особливості руху Місяця, розглянув теорію припливів і відпливів.

Загальні відомості про механічний рух. Механічний рух найпоширеніший у природі. Він є складовою більш складних немеханічних процесів.

> ***Механічний рух*** – це зміна з часом взаємного положення тіл чи їх частин у просторі.

Розуміння і пізнання навколишнього світу були б неможливі без розуміння саме законів механічного руху.

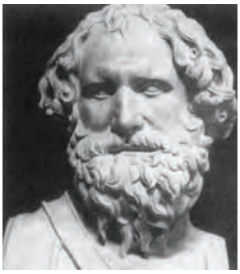
Наприклад, ***коливання і хвилі*** різної фізичної природи мають загальні закономірності і описуються однаковими математичними рівняннями. Звук – це механічна хвиля, світло – електромагнітна, але поширення їх у просторі має спільні ознаки хвильового руху.

Завдяки дослідженню ***руху рідин і газів*** стало можливим освоєння повітряного і водного просторів, а завдяки дослідженню ***реактивного руху*** – космічного простору.

Розуміння і знання законів механічного руху необхідне для пояснення як руху простого колеса, так і руху деталей складних установок.

Механічні рухи тіл також можуть бути досить складними і різноманітними, тому вивчення їх утруднюється. Тож при дослідженні механічного руху намагаються виокремити простіші форми, і тоді будь-який складний рух можна розглядати як комбінацію простих рухів.

Аристотель



Архімед

Галілео Галілей

Ісаак Ньютон

Простими формами руху вважають ***поступальний, обертальний*** і ***коливальний,*** які характеризуються певними фізичними величинами.

У восьмому класі ви ознайомилися з деякими ознаками ***поступального руху***. Ви знаєте, що рухоме тіло здійснює переміщення у просторі за певною траєкторією. За формою траєкторії рухи поділяють на ***прямолінійні*** і ***криволінійні.*** Довжину траєкторії можна виміряти і таким чином дізнатися пройдений тілом шлях. А знаючи довжину шляху і час, за який тіло його проходить, можна визначити шляхову швидкість (ми говорили тоді просто швидкість руху). Досліджуючи більш складні форми руху, ми з'ясуємо, що швидкість руху тіла дуже важлива його властивість і від неї багато в чому залежить характер руху. Поки що ви знаєте, якщо швидкість руху не змінюється – тіло рухається ***рівномірно,*** рух зі змінною швидкістю буде ***нерівномірним***. Серед нерівномірних рухів ми навчимося з вами досліджувати рівноприскорений рух, обертальний рух твердого тіла.

Проте у чистому вигляді в природі не існує як виключно рівномірного, так і рівноприскореного прямолінійного руху. Це ідеалізації, що дають змогу зрозуміти складніше на основі простішого. Крім того, для дослідження механічного руху застосовують інші ідеалізації – ***фізичні моделі,*** за допомогою яких дещо спрощується вивчення механічного руху. Наприклад, якщо ми розглядатимемо рух потяга між Києвом і Львовом, то, визначаючи його положення в просторі, ми можемо знехтувати його розмірами і прийняти його за ***матеріальну точку.***

Матеріальна точка – це абстрактна модель, яка вводиться для спрощення вивчення механічного руху.

Обертальний рух тіл вивчають за допомогою ***моделі абсолютно твердого тіла.***

Коливальні рухи вивчають за допомогою ***моделей маятників*** (математичного, пружинного та фізичного).

Основна задача механіки. Основною задачею механіки є опис механічного руху тіл, тобто встановлення ***закону (рівняння) руху*** тіла на основі характеристик, що його описують (координати, переміщення, довжина пройденого шляху, кут повороту, швидкість, прискорення тощо). Іншими словами, якщо за допомогою складеного ***закону (рівняння) руху*** можна ***визначити положення тіла у будь-який момент часу***, то основна задача механіки вважається розв'язаною.

Основна задача механіки – визначення положення тіла у просторі в будь-який момент часу.

Залежно від обраних фізичних величин і методів розв'язання основної задачі механіки її поділяють на кінематику, динаміку та статику.

Кінематика – розділ механіки, в якому вивчається механічний рух без розглядання його причин. Кінематика дає відповідь на питання, ***де буде тіло у просторі*** з плином часу, якщо відомі його початкові характеристики.

Динаміка – розділ механіки, в якому вивчають закономірності механічного руху тіл під дією прикладених до них сил. Динаміка дає відповідь на питання, ***чому саме так*** рухається тіло.

Статика – розділ механіки, який вивчає умови рівноваги матеріальних тіл під дією прикладених до них сил.

Слід також зауважити, що закони класичної механіки не завжди можуть бути застосовними. Наприклад, рух однієї молекули можна описати законами механічного руху, а рух їх сукупності в тілі описується уже іншими – ***статистичними законами***. Рух тіла зі швидкістю, близькою до швидкості світла (швидкість світла позначають літерою c, c = 300 000 км/с), описується ***релятивістськими законами***. Рух і взаємодію елементарних частинок мікросвіту описують у ***квантовій механіці.***

Говорячи «механіка», ми розумітимемо саме класичну механіку, яка базується на законах механічного руху, сформульованих Ньютоном, і яка стала поштовхом до створення ***сучасної квантової фізики.***

Вивчення механіки ми починаємо з її першого розділу – кінематики.

Дайте відповідь на запитання

1. Що таке механічний рух? Наведіть приклади різних видів механічного руху.
2. Внесок яких вчених у розвиток механіки є вагомим?
3. Що є основною задачею механіки?
4. Назвіть розділи механіки.
5. Чи має механіка Ньютона межі застосування?

Розділ 1

КІНЕМАТИКА поступального та обертального рухів матеріальної точки

Оскільки у кінематиці досліджується механічний рух тіл без урахування сил, що діють на нього, кінематичні рівняння складають на підставі лише *просторових характеристик механічного руху* – його траєкторії, координат, швидкості тощо. Тому кінематику ще називають *геометрією руху*.

§ 6 Способи опису руху

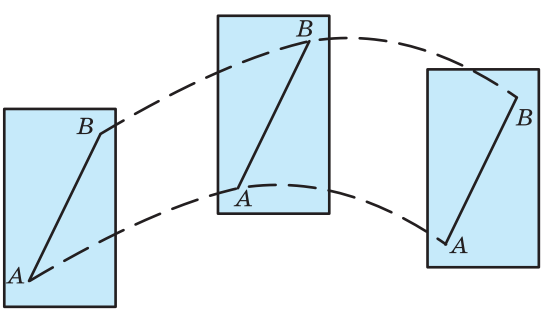
- ✓ *Поступальний рух. Матеріальна точка.*
- ✓ *Відносність руху. Система відліку.*
- ✓ *Кінематичні способи визначення положення тіла.*

Поступальний рух. Матеріальна точка. Тіло може рухатись так, що під час руху всі його точки описують однакові траєкторії. Такий рух називається *поступальним*.

> ***Поступальний рух*** – це рух тіла, при якому пряма, яка сполучає дві будь-які його точки, при переміщенні тіла буде паралельною сама собі (*мал. 13*).

Оскільки при поступальному русі всі точки тіла описують однакові траєкторії, здійснюють однакові переміщення, рухаються з однаковими швидкостями, то, описуючи рух тіла, ми можемо розглядати його як точку. У фізиці прийнято говорити *матеріальну точку*.

> ***Матеріальна точка*** – це тіло, розмірами і формою якого у певній задачі можна знехтувати, а всю масу тіла можна вважати зосередженою у точці.



Мал. 13. Поступальний рух тіла

Слід зазначити, що одне й те саме тіло не завжди можна вважати матеріальною точкою. Наприклад, велосипедиста, який рухається по дорозі і долає відстань 1 км, можна вважати матеріальною точкою, але не можна – якщо треба визначити, на який кут він нахиляється при повороті.

Можна чи не можна вважати тіло матеріальною точкою – залежить не від розмірів тіла, а від поставленої задачі.

Надалі, якщо ми розглядатимемо поступальний рух тіла або рух тіла, розміри якого малі, порівняно з довжиною пройденого шляху, то вважатимемо тіло матеріальною точкою.

Відносність руху. Система відліку. Основною ознакою механічного руху тіла є те, що воно змінює своє положення. Щоб фіксувати зміну положення тіла у просторі, необхідно встановити, ***відносно чого*** відбувається саме ця зміна.

Як ви, напевно, бачили, крім рухомих тіл є нерухомі. Не рухаються будинки, мости, дерева. Але не рухаються відносно чого? Відносно Землі, так – вони нерухомі, а відносно Сонця – вони обертаються навколо нього разом із Землею. Отже, ***відносність* – важлива ознака механічного руху.**

Поняття «рух» і «спокій» – відносні і залежать від обраної системи відліку.

Для розв'язання будь-якої задачі про рух необхідно передусім вибрати **систему відліку**, в якій досліджуватиметься рух тіла.

Наприклад, автомобіль їде по дорозі. Положення автомобіля змінюється відносно дерев, будинків, що стоять на узбіччі. У цьому випадку дерево чи будинок можна вважати за ***тіло відліку,*** відносно якого розглядається рух автомобіля. Тілом відліку може бути й інший автомобіль, що їде по дорозі. Тіло відліку можна обирати довільно.

Але для опису механічного руху тіла обрати тільки тіло відліку недостатньо. Ще необхідно фіксувати, ***як саме змінюється його положення*** відносно обраного тіла відліку. Для цього вибирають систему координат і прилад для вимірювання часу (найчастіше годинник).

Як правило, початок координат суміщають з тілом відліку. У цьому разі зміна положення рухомого тіла відносно тіла відліку визначатиметься *зміною його координат у часі.*

> Сукупність тіла відліку, пов'язаної з ним системи координат і приладу для відліку часу утворює ***систему відліку.***

Кінематичні способи визначення положення тіла. Систему відліку в кінематиці вибирають, керуючись лише міркуваннями зручності для математичного опису руху.

Наприклад, нам необхідно дослідити рух тіла, кинутого вертикально вгору. У такому випадку за тіло відліку зручно обрати землю і розглядати рух тіла відносно однієї вертикально направленої координатної осі (рух уздовж прямої). А якщо, наприклад, тіло кинули під кутом до горизонту, то його рух описуватиметься двома координатами (рух у площині). Рух тіла у просторі зазвичай описується трьома його координатами.

> Рівняння, яке встановлює залежність координат тіла (матеріальної точки) від часу називається ***кінематичним рівнянням (законом) руху.***

Математично це записують так: $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$.

Дослідити рух тіла (зміну його положення у просторі з плином часу) можна і за його *траєкторією*.

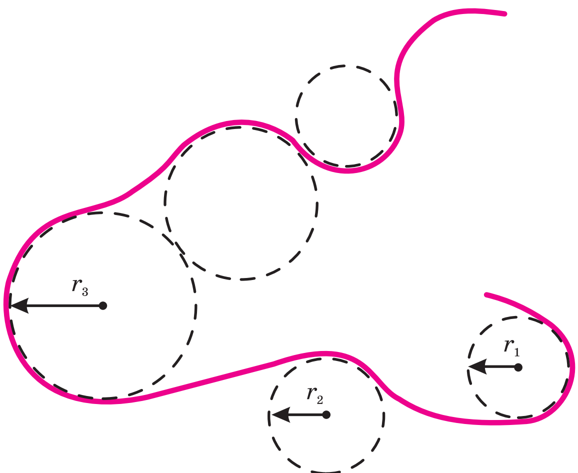
Траєкторія – **неперервна уявна лінія, яку описує тіло під час свого руху в обраній системі відліку.**

Траєкторія руху деяких тіл може бути заздалегідь відомою, так само, як траєкторія руху потяга, що визначена залізничною колією, або траєкторія руху плота течією річки. Досить часто траєкторію руху тіла необхідно розрахувати, виходячи з інших характеристик руху. Наприклад, щоб запустити супутник, який обертатиметься навколо Землі, йому необхідно надати певної початкової швидкості.

Траєкторія руху може бути видимою (слід лижника, слід від пензлика на папері (*мал. 14*)) і невидимою (політ птаха).

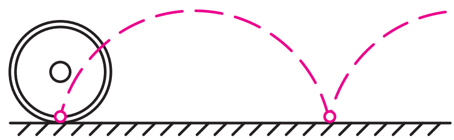
Мал. **14. Траєкторії руху тіл**

Залежно від форми траєкторії розрізняють *прямолінійний* і *криволінійний* рух. Зрозуміло, що траєкторією прямолінійного руху тіла є пряма лінія. Траєкторії криволінійного руху можуть бути дуже складними і різноманітними. Але, як зазначалося, будь-який складний рух можна вивчити за допомогою простішого. Так, будь-який криволінійний рух можна подати як послідовність ділянок, що складаються з дуг кіл різних радіусів (*мал. 15*).



Мал. **15. Моделювання траєкторії криволінійного руху**

Оскільки тіло відліку можна вибрати довільно, то траєкторія руху одного і того самого тіла відносно різних систем відліку буде різною. Наприклад, усі точки колеса велосипеда відносно його осі описують кола. Проте в системі відліку, пов'язаній із землею, ця лінія складніша – її називають циклоїдою (*мал. 16*).



Мал. 16. Траєкторія точки колеса відносно землі

За траєкторією руху легко визначити шлях, пройдений тілом. Для цього необхідно виміряти довжину траєкторії між початковим і наступним положеннями тіла.

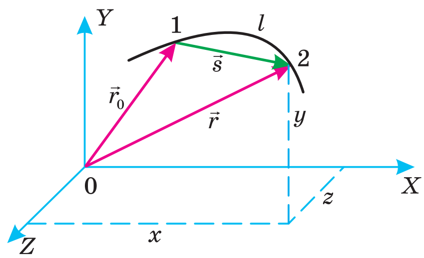
Шлях дорівнює довжині траєкторії, яку описує тіло за час руху.

Довжина пройденого шляху позначається латинською літерою l. Одиницею шляху є метр, $[l] = 1$ м.

Шлях – величина скалярна, тобто не визначає напрям і характеризується тільки числовим значенням довжини пройденого шляху.

Якщо відомо, де розташовано тіло на початку руху, його траєкторія і пройдений шлях, то можна визначити, де буде тіло у кінці руху.

Якщо траєкторія руху невідома і якщо не має значення, якою саме траєкторією рухається тіло, а важливо визначити зміну положення тіла у просторі з плином часу, тоді користуються поняттями «радіус-вектор» і «переміщення» (*мал. 17*).



Мал. 17. Визначення положення тіла у просторі

Радіусом-вектором $\vec{r}$ ***точки*** називається вектор, що сполучає початок відліку з цією точкою.

Наприклад, у початковий момент часу тіло перебуває у точці 1, положення якої визначається радіусом-вектором $\vec{r}_0$. Протягом інтервалу часу Δt тіло перемістилось у точку 2, положення якої визначається радіусом-вектором $\vec{r}$. Зміну положення тіла можна визначити за пройденим шляхом або за переміщенням.

Переміщення $\vec{s}$ – вектор, що сполучає початкове положення тіла з його положенням у вибраний момент часу.

Як видно з *мал. 17* вектор переміщення $\vec{s}$, проведений із початкової точки 1 до кінцевої точки, збігається з приростом радіуса-вектора: $\vec{s} = \Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$.

Модуль вектора переміщення позначають $|\vec{s}|$, або просто s.

Одиницею переміщення є метр, $[s] = 1$ м.

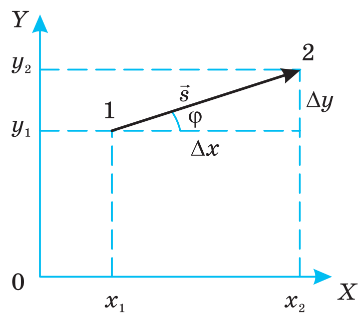
Шлях і переміщення характеризують зміну положення тіла, але це різні величини. Наприклад, щоб дістатися з одного населеного пункту в інший, водію доводиться їхати звивистою дорогою (*мал. 18*). Пройдений шлях – це довжина дороги l (траєкторії). Разом з тим водій здійснив переміщення з точки a в точку b, яке можна оцінити, з'єднавши початкове і кінцеве положення тіла у просторі прямою лінією і вказавши напрям руху. Тобто, щоб визначити кінцеве положення тіла в будь-який момент часу, потрібно знати його положення у початковий момент і вектор переміщення.

Мал. 18. Шлях і переміщення

Якщо траєкторія криволінійна, модуль переміщення менший від шляху, бо відрізок прямої коротший за будь-яку криву, що з'єднує кінці відрізка.

У випадку прямолінійного руху за умови, що тіло не змінювало напрям руху, модуль переміщення і шлях збігаються.

У випадку, коли тіло повертається у початкове положення (наприклад, якщо тіло, рухаючись по колу, здійснює повний оберт), модуль переміщення дорівнює 0. Тобто переміщення може дорівнювати нулю навіть тоді, коли тіло рухалося.



Мал. 19. Визначення модуля і напряму вектора переміщення за його координатами

Вектор переміщення тіла по площині можна визначити і за його координатами. Нехай тіло знаходиться в точці 1, координати якої x_1 і y_1. За певний інтервал часу тіло перемістилось у точку 2, координати якої x_2 та y_2 (*мал. 19*). На малюнку видно, що модуль і напрям вектора переміщення $\vec{s}$ може бути визначений через різниці координат $\Delta x = x_2 - x_1$ та $\Delta y = y_2 - y_1$.

Модуль вектора переміщення

$$|\vec{s}|^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \text{ або } s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\ .$$

Напрям вектора переміщення відносно координатної осі X визначається тангенсом кута нахилу вектора:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

І навпаки, різниця координат може бути виражена через модуль вектора переміщення: $\Delta x = |\vec{s}|\cos\varphi$, $\Delta y = |\vec{s}|\sin\varphi$.

Таким чином, визначити положення рухомого тіла відносно вибраної системи відліку можна трьома способами: координатним, векторним і траєкторним (природним).

При ***координатному способі*** положення рухомого тіла у просторі можна визначити, якщо відомо закон зміни координат від часу $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$.

При ***векторному способі*** положення рухомого тіла у просторі можна визначити за його радіусом-вектором $\vec{r}$.

При ***траєкторному (природному) способі*** положення тіла визначається за пройденим шляхом уздовж траєкторії. Цей спосіб зручний, коли траєкторія руху тіла відома.

Рівняння лінії у просторі, тобто формула, яка зв'язує координати точки під час руху, називається ***рівнянням траєкторії***. Наприклад, на площині це залежність $x = f(y)$.

Зазначимо, що можна розглядати рух не лише між початковим і кінцевим положеннями тіла, а й у будь-який момент часу його руху.

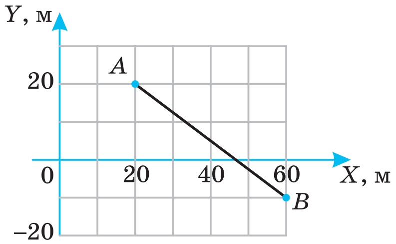
Дайте відповіді на запитання

1. Що вивчає кінематика?
2. Що називають системою відліку?
3. Що таке траєкторія? Вкажіть види механічного руху, які відрізняються формою траєкторії.
4. Що таке пройдений шлях і переміщення?
5. Які є способи опису механічного руху?

Вправа 2

1. У спортивному залі м'яч упав з висоти 3 м, відбився від підлоги і був зловлений на висоті 1 м. Визначити шлях і переміщення м'яча.

2. На *мал. 20* зображено траєкторію руху тіла з A у B. Визначити координати тіла на початку і в кінці руху, проекції переміщення на осі координат, переміщення.



Мал. 20. До задачі 2.

3. Тіло перемістилося з точки, координати якої $x_1 = 0$ м, $y_1 = 2$ м, у точку з координатами $x_2 = 4$ м, $y_2 = -1$ м. Зробити малюнок і визначити вектор переміщення і його проекції на осі координат.

4. Вертоліт, пролетівши по прямій 400 км, повернув під кутом 90° і пролетів у цьому напрямі ще 300 км. Визначити шлях і переміщення вертольота.

5. Тіло почало рух з точки A перпендикулярно радіусу-вектору $\vec{OA}$ цієї точки. Радіус-вектор $\vec{OB}$ кінцевої точки B дорівнює 10 м і складає кут 30° з радіусом вектором $\vec{OA}$. Визначити модуль вектора переміщення тіла.

6. Вектор переміщення має модуль $\left|\vec{AB}\right| = 10$ см і складає кут 30° з віссю X. Координати точки A: $x = 2$ см, $y = 2$ см. Визначити координати точки B.

7. Сходинка ескалатора піднялась вгору на 10 м. Людина по ескалатору за цей час спустилась вниз на 5 м. Визначити і накреслити вектор переміщення людини відносно землі. Накреслити вектори переміщення ескалатора відносно землі та людини відносно ескалатора.

8. Вагон рівномірно рухається у горизонтальному напрямі. У вагоні до стелі прикріплено пружинку, на кінці якої закріплено тягарець. Тягарець коливається у вертикальному напрямі. Накресліть траєкторію руху тягарця відносно вагона та відносно землі.

9. Записати рівняння траєкторій $y = f(x)$ точок, якщо відомо, залежності координат від часу: а) $x = 2t$, $y = t - 1$; б) $x = 2t$, $y = 8t^2$; в) $x = 2t$, $y = 0$.

§ 7 Прямолінійний рівномірний рух

✓ *Рівняння рівномірного прямолінійного руху.*
✓ *Графічне зображення прямолінійного рівномірного руху.*

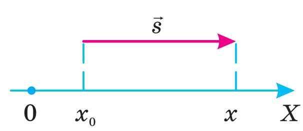
Рівняння рівномірного прямолінійного руху. Пригадаємо означення прямолінійного рівномірного руху відоме вам із 8-го класу:

> ***Прямолінійний рівномірний рух*** – це рух, при якому тіло (матеріальна точка) за будь-які рівні інтервали часу здійснює однакові переміщення.

Швидкість руху тіла при рівномірному русі залишається постійною на всьому шляху. Траєкторія такого руху – пряма лінія.

Прямолінійний рівномірний рух тіла можна описати зміною однієї з координат, якщо систему відліку обрати так, щоб координатна вісь збігалася з напрямом руху.

Нехай тіло в момент початку руху знаходиться у точці з координатою x_0 (*мал. 21*); через деякий час t, здійснивши переміщення $\vec{s}$, воно матиме координату x.



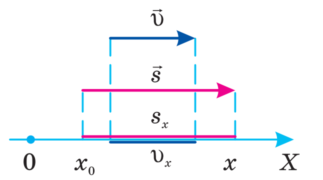
Мал. **21. Зміна координат тіла під час руху**

Фізична величина, яка характеризує стрімкість зміни положення тіла у просторі, називається ***швидкістю руху тіла***.

> ***Швидкість рівномірного руху тіла*** $\vec{\upsilon}$ визначається відношенням переміщення $\vec{s}$ (або приросту радіуса вектора $\Delta\vec{r}$) до інтервалу часу t, протягом якого відбулося це переміщення: $\vec{\upsilon} = \vec{s}/\Delta t = \Delta\vec{r}/\Delta t$.

Інтервал часу найчастіше обирають від початкового моменту $t_0 = 0$, так що $\Delta t = t - t_0 = t - 0 = t$, а векторні величини, що характеризують рух тіла, записують у проекціях на відповідну вісь (*мал. 22*), отже, $\upsilon_x = s_x/t$.

Знаючи проекцію швидкості руху тіла, можна визначити проекцію його переміщення за будь-який інтервал часу: $s_x = \upsilon_x \Delta t$.



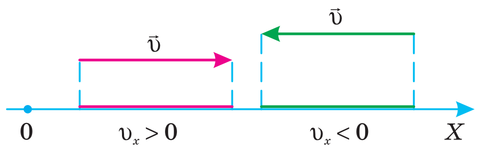
Мал. **22. Проекції швидкості і переміщення на вісь** X

На *мал. 22* видно, що числове значення проекції вектора переміщення на координатну вісь X дорівнює зміні координат тіла $x - x_0$, тобто $s_x = x - x_0$.

Застосовуючи останні формули, отримаємо кінематичне ***рівняння рівномірного прямолінійного руху:***

$$x - x_0 = \upsilon_x t \text{ або } x = x_0 + \upsilon_x t.$$

Якщо напрям руху збігається з напрямом координатної осі (*мал. 23*), то $\upsilon_x > 0$, $\upsilon_x = \upsilon$ і координата з плином часу збільшуватиметься: $x = x_0 + \upsilon t$, де υ – модуль швидкості.



Мал. **23. Проекції векторів швидкості, коли різні напрями руху тіл**

Якщо напрям руху тіла протилежний напряму координатної осі (*мал. 23*), то $\upsilon_x < 0$, $\upsilon_x = -\upsilon$ і координата з плином часу зменшуватиметься: $x = x_0 - \upsilon t$.

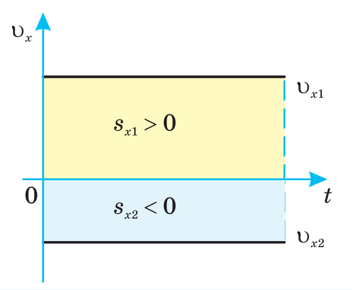
Отже за рівнянням руху ми можемо визначити положення (координати) тіла у будь-який момент часу.

У просторі положення рухомої точки, тобто її радіус-вектор (або три координати), у будь-який момент часу можна визначити, якщо відомо швидкість рівномірного прямолінійного руху і початкове положення точки (її радіус вектор $\vec{r}_0$) у початковий момент часу t_0: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}(t - t_0)$.

Дослідити характер руху можна і графічним способом, зображуючи залежності параметрів руху (швидкості, пройденого шляху, переміщення, координати) від часу за допомогою відповідних графіків.

Графічне зображення прямолінійного рівномірного руху. Як відомо, швидкість тіла під час рівномірного прямолінійного руху з часом не змінюється, тобто $\vec{\upsilon}$ = const. Тому ***графік проекції швидкості*** – це пряма, паралельна осі часу t.

Лінія $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ може бути як над віссю t ($\upsilon_x > 0$), так і під нею ($\upsilon_x < 0$) (*мал. 24*).



Мал. **24. Графіки проекції швидкості**

Площі заштрихованих прямокутників відповідають значенням проекцій переміщень за певний час $s_{x1} > 0$, $s_{x2} < 0$.

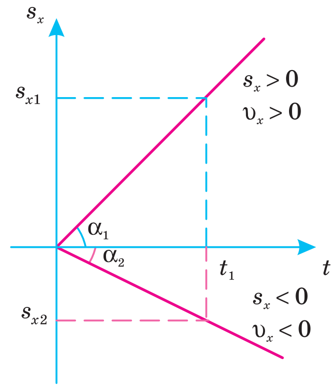
Графік проекції переміщення $s_x = s_x(t)$. Залежність проекції переміщення від часу визначається рівнянням $s_x = \upsilon_x t$, графіком якого є пряма (порівняйте з відомим вам графіком лінійної функції $y = ax$: див. §4).

Оскільки проекція переміщення може набувати як додатних, так і від'ємних значень, то графік проекції переміщення (*мал. 25*) може бути направлений вгору ($s_x > 0$, відповідно і $\upsilon_x > 0$) або вниз ($s_x < 0$, $\upsilon_x < 0$).

Кут нахилу графіка проекції переміщення залежить від значення швидкості: чим більша швидкість, тим швидше змінюється проекція переміщення.

Із графіка видно, що

$$\upsilon_1 = \frac{s_{x1}}{t_1} = \mathrm{tg}\,\alpha_1 \ \text{ і } \ \upsilon_2 = \frac{s_{x2}}{t_1} = \mathrm{tg}\,\alpha_2 .$$



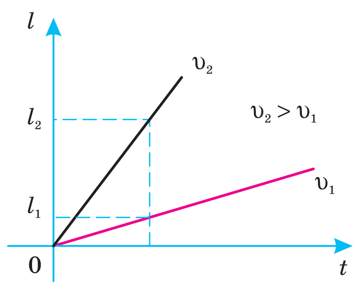
***Мал.* 25. Графік проекції переміщення**

Графік проекції переміщення завжди проходить через початок координат.

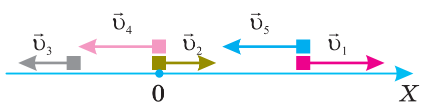
Графік шляху $l = l\,(t)$. Оскільки при рівномірному прямолінійному русі модуль переміщення дорівнює довжині пройденого шляху, то $l = \upsilon t$, де υ – модуль швидкості.

Модуль переміщення завжди величина додатна, і графік шляху завжди напрямлений вгору (*мал. 26*).

Графік руху тіла $x = x(t)$. Цей графік характеризує зміну координат тіла з часом. З рівняння руху $x = x_0 + \upsilon_x t$ стає очевидно, що він представляє лінійну функцію і зображається прямою. Ця пряма проходить через початок координат, коли $x_0 = 0$ або зміщена по осі x на величину x_0, коли $x_0 \neq 0$. Оскільки проекція швидкості може мати додатні та від'ємні значення (напрям вектора швидкості може збігатися з обраним напрямом координатної осі або бути протилежним йому), то графік може здійматись вгору при ($\upsilon_x > 0$) або спадати вниз при ($\upsilon_x < 0$).



***Мал.* 26. Графік шляху**

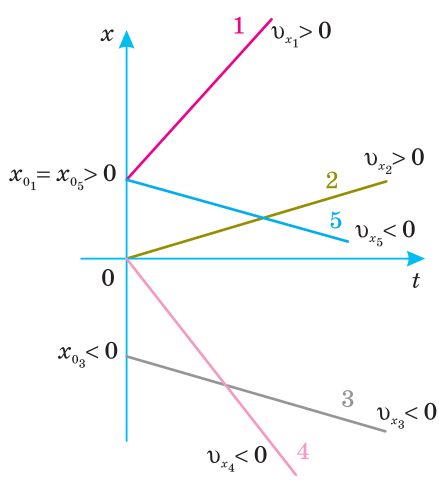


***Мал.* 27. Схематичне зображення початкового положення і швидкості руху тіл**

На *мал. 27* показано розташування п'яти тіл на початку руху і вектори їх швидкостей. Довжина стрілки на малюнку характеризує модуль швидкості (чим довша стрілка, тим більше значення швидкості руху тіла).

На *мал. 28* схематично відтворено графіки руху цих тіл.

Графіки рівномірного прямолінійного руху відображають залеж-



***Мал.* 28. Графіки руху тіл**

ності відповідних параметрів руху (координат, пройденого шляху, переміщення і швидкості) від часу. За їх допомогою можна з'ясувати характер руху тіла і зміни відповідних величин з плином часу.

Дайте відповіді на запитання

1. Чи можна визначити кінцеве положення тіла, якщо відомо його початкове положення і довжина пройденого шляху?
2. Чим відрізняється графік шляху від графіка проекції переміщення?
3. Графік руху перетинає вісь часу: що це означає?
4. Чи можуть зменшуватись із часом координата рухомої точки і пройдений шлях?
5. Швидкість тіла під час руху по прямій з пункту A в пункт B у два рази більша від швидкості руху цього тіла у зворотному напрямі. Побудуйте графіки залежності від часу: а) координати; б) швидкості; в) шляху.

Загальні рекомендації щодо розв'язування задач з кінематики матеріальної точки

Під час розв'язування задач слід виконувати певну послідовність дій.

1. Передусім слід вибрати систему відліку, яка складається з тіла відліку, пов'язаної з ним системи координат і початку відліку часу. Визначити положенням тіла у початковий момент часу.
2. Виконуючи схематичний малюнок до задачі, потрібно зобразити систему відліку, напрям векторних величин (переміщення, швидкості тощо).
3. Встановити характер руху (рівномірний чи нерівномірний). Записати кінематичні рівняння (закони) руху для кожного тіла у векторній формі та в проекціях на вибрані осі координат. Врахувати знак проекції вектора на вибрану координатну вісь!
4. За потреби, якщо кількість невідомих більша, ніж кількість рівнянь, встановити додаткові рівняння, які можуть виражати конкретні математичні зв'язки, що випливають з умови задачі.
5. Отриману систему рівнянь розв'язати відносно шуканих величин.

Для графічного розв'язування задачі використовують графіки залежності від часу координат або швидкості (переміщення або шляху). Це дасть змогу визначати невідомі величини на основі графіків. Слід пам'ятати, що графічні залежності кінематичних величин можуть виявитися корисними як під час аналізу умови задачі, так і для перевірки результатів її розв'язання. На графіках в умовах задач (якщо немає відповідного пояснення) на вертикальній осі відкладено проекцію вектора на вісь координат.

В умовах деяких задач не обумовлено, йдеться про вектор, його модуль чи про проекцію. Аналізуючи умову задачі (або відповідь), треба в кожному конкретному випадку уточнювати, що саме дано в задачі: вектор, його модуль чи проекцію. ***Зверніть увагу, що модуль векторної величини позначають просто буквою, не ставлячи значка вектора і модуля: замість*** $|\vec{s}|, |\vec{\upsilon}|, |\vec{F}|$ ***записують просто*** s, υ, F.

Вважається, що рух відбувається вздовж осі, додатний напрям якої збігається з напрямом руху у початковий момент часу. У деяких задачах, де в умові чи у відповіді значення якої-небудь векторної величини наведено зі знаком «мінус», ідеться про проекцію відповідного вектора на вісь координат.

Приклад розв'язування задач

Задача. Користуючись графіками руху двох тіл (*мал. 29*):

1) визначити:

а) швидкості тіл;

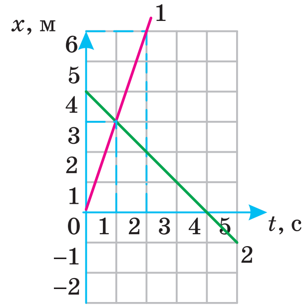
б) рівняння руху для цих тіл;

в) модуль переміщення тіл за час $t = 4$ с;

г) час та місце зустрічі;

д) відстань між тілами через 2 с їх руху.

2) побудувати графіки проекції швидкості, проекції переміщення і шляху за 4 с руху.



Мал. 29. Графіки руху тіл

Розв'язання:

а) Швидкість визначаємо за формулою $\upsilon_x = (x - x_0)/t$.

Інтервал часу зміни координати вибираємо довільно, керуючись зручністю розрахунків. Наприклад, візьмемо $t = 2$ с. Перше тіло через 2 с руху мало координату $x = 6$ при $x_0 = 0$, тому проекція швидкості $\upsilon_{x1} = (6\text{ м} - 0)/(2\text{ с}) = 3$ м/с; $\upsilon_1 = 3$ м/с.

Для другого тіла $x_0 = 4$ м, а через $t = 2$ с, $x = 2$ м, тобто $\upsilon_{x2} = (2\text{ м} - 4\text{ м})/(2\text{ с}) = -1$ м/с; $\upsilon_2 = 1$ м/с.

б) Записуємо рівняння руху для цих тіл, виходячи з його загального вигляду $x = x_0 + \upsilon_x t$. Для першого тіла $x_1 = 3t$. Для другого тіла $x_2 = 4 - t$.

в) Визначаємо модуль переміщення за $t = 4$ с, користуючись формулою $s_x = \upsilon_x t$.

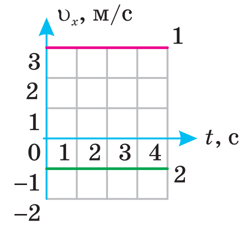
$s_{x1} = 3t = 3\text{ м/с} \cdot 4\text{ с} = 12$ м, $s_1 = 12$ м.

$s_{x2} = -t = -1\text{ м/с} \cdot 4\text{ с} = -4$ м, $s_2 = 4$ м.

г) Визначаємо час і місце зустрічі. Для цього з точки перетину графіків руху двох тіл опускаємо перпендикуляр на вісь t і одержуємо час зустрічі 1 с. Перпендикуляр, опущений на вісь x, укаже координату зустрічі 3 м.

д) Через 2 с перше тіло матиме координату 6 м, а друге – 2 м. Відстань між тілами $l = x_1 - x_2 = 4$ м.

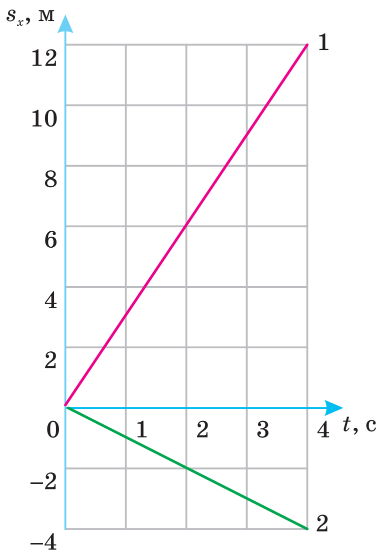
Використовуючи отримані результати, виконаємо відповідні побудови (*мал. 30, 31, 32*):



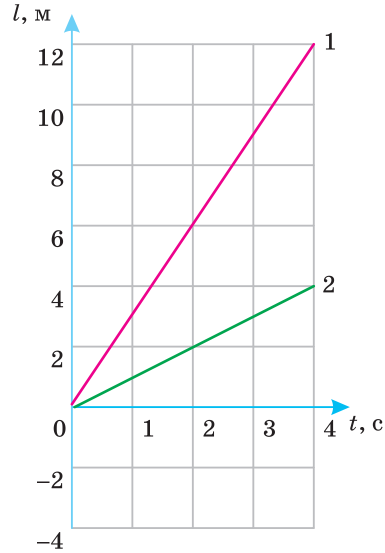
Мал. 30. Графіки проекцій швидкостей

Вправа 3

1. Із двох точок A і B, які знаходяться на відстані 90 м одна від одної, одночасно в одному напрямі почали рухатися два тіла. Тіло, що рухається з точки A, має швидкість 5 м/с. Тіло, що рухається з точки B, має швидкість 2 м/с.



Мал. 31. **Графіки проекцій переміщень**



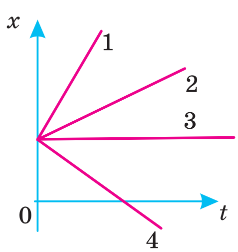
Мал. 32. **Графіки шляху**

Через який час перше тіло наздожене друге? Яке переміщення здійснить кожне тіло? Розв'язати задачу аналітичним і графічним способами.

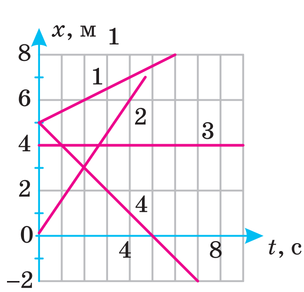
2. На *мал. 33* наведено графіки руху чотирьох тіл уздовж осі X. Що спільного в усіх цих рухів? Чим вони відрізняються? Накреслити схематичні графіки $\upsilon_x(t)$ для кожного з рухів.

3. За наведеними на *мал. 34* графіками опишіть рух. Для кожного з них визначте модуль і напрям швидкості, запишіть формулу $x(t)$ і побудуйте відповідні графіки.

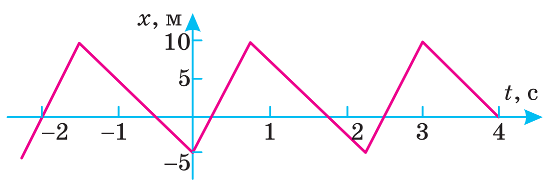
4. Рівняння руху вантажного автомобіля має вигляд $x_1 = -270 + 12t$, а рівняння руху пішохода, який іде узбіччям того самого шосе, має вигляд $x_2 = -1{,}5t$. (Всі величини задано в СІ). Накреслити графіки руху



Мал. 33. **До задачі 2**



Мал. 34. **До задачі 3**

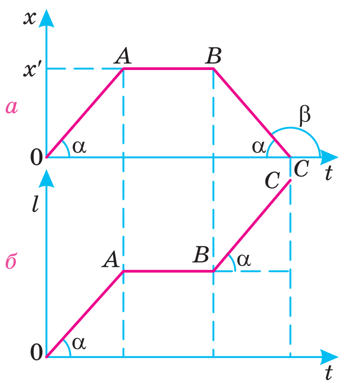


Мал. 35. **До задачі 5**

і визначити: а) положення автомобіля і пішохода у момент початку спостереження; б) з якими швидкостями і в якому напрямі вони рухалися; в) коли і де вони зустрілися.

5. За графіком залежності координати від часу (*мал. 35*) побудувати графік залежності швидкості від часу.

6. На *мал. 36* (*а* і *б*) подано графіки, які характеризують рух пішохода. Побудуйте на їх основі графік залежності $\upsilon_x(t)$.



Мал. **36. До задачі 6**

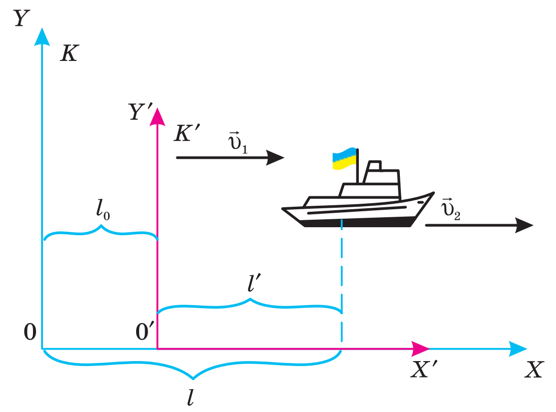
§ 8 Відносність механічного руху

✓ *Відносність руху.*
✓ *Перетворення Галілея.*
✓ *Закон додавання швидкостей.*

Відносність руху. Як ми уже з'ясували, щоб описати механічний рух і визначити його параметри – траєкторію, переміщення, пройдений шлях, швидкість тощо, треба насамперед обрати систему відліку й описувати рух тіла (матеріальної точки) відносно певного тіла відліку. При розв'язуванні задач кінематики систему відліку вибирають так, щоб рух відносно цієї системи описувався найпростішими виразами. Оскільки тіло відліку можна обирати довільно і таких тіл може бути безліч, то й рух тіла можна одночасно розглядати у кількох системах відліку.

Найчастіше систему відліку пов'язують із тілом відліку, яке в цій ситуації вважається нерухомим: із землею, із деревами на узбіччі, населеним пунктом тощо. Таку систему відліку умовно називають ***нерухомою*** і позначають літерою K. З іншими тілами, що рухаються в нерухомій системі відліку рівномірно і прямолінійно, пов'язують ***рухомі*** системи відліку K', розглядаючи рух вибраного тіла відносно обох систем відліку.

Відносний механічний рух – рух матеріальної точки (чи тіла) відносно рухомої системи відліку, яка певним чином переміщається відносно іншої, умовно прийнятої за нерухому.



Мал. **37. Рух тіла відносно рухомої та нерухомої систем відліку**

Перетворення Галілея. Розглянемо рух тіла, наприклад, катера по річці, відносно різних систем відліку – нерухомої (K), пов'язаною із землею, і рухомої (K'), пов'язаною з течією річки (*мал. 37*).

Вважаємо, що річка не змінює швидкість своєї течії, тобто швидкість течії (рухомої системи відліку) $\vec{\upsilon}_1$ постійна.

Системи координат вибирають так, щоб осі X та X' збігалися, а у момент часу $t_0 = 0$ збігалися і осі Y та Y'. Вважаємо, що годинники в обох системах відліку йдуть однаково.

За час t катер змістився відносно землі (нерухомої системи відліку) на відстань l, за той самий час течія річки (рухома система відліку) – на l_0. Тоді, зміщення l' катера відносно рухомої системи відліку визначається за співвідношенням: $l' = l - l_0$. Або $l = l_0 + l'$.

Таким чином, у будь-який момент часу координати тіла (у нашому випадку катера) у системі K та K' пов'язані співвідношеннями: $y = y'$, $x = x_0 + x'$, де x_0 – координата точки O' в системі координат K у певний момент часу t.

Оскільки швидкість течії (рухомої системи координат) $\vec{\upsilon}_1$ і переміщення, яке вона здійснює за час t, визначається за формулою $l_0 = \upsilon t$, то ці співвідношення набувають вигляду: $x = \upsilon t + x'$; $y = y'$; $t = t'$.

Співвідношення $x = \upsilon t + x'$, $y = y'$, $t = t'$ називають ***перетвореннями Галілея.***

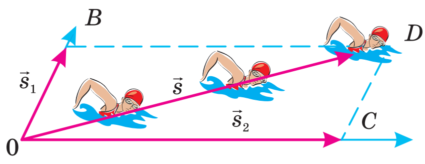
Координати тіла залежать від системи відліку, тобто є ***величинами відносними.***

Рівність $t = t'$ виражає абсолютний характер часу, тобто час є ***величиною інваріантною (незмінною).***

Зверніть увагу! Вкажемо на деяке припущення, яке ми застосували при виведенні співвідношень Галілея. Як відомо, до системи відліку, окрім системи координат, входить прилад для вимірювання часу – годинник. Ми розглядаємо дві системи відліку. Отже, повинні використовувати дві системи координат і два годинники. У наших розрахунках ми користувались одним часом і всі відстані вимірювали одним і тим самим масштабом. Тобто ми вважали, що у нерухомій і рухомій системах відліку годинники відраховують один і той самий час, а відстані вимірюються з однаковим масштабом. Це припущення виконується при розгляді руху тіл, швидкості яких малі порівняно зі швидкістю світла ($\upsilon << c$, де $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла). При русі тіл із швидкостями, близькими до швидкості світла, перетворення Галілея набувають іншого вигляду. Про це ви детально довідаєтеся при вивченні ***спеціальної теорії відносності*** (*розд. 5*).

Закон додавання швидкостей. Розглянемо тепер рух плавця відносно різних систем відліку (*мал. 38*).

Його переміщення відносно води за деякий час t становитиме $\vec{s}_1$. Це *нерухома система відліку*, пов'язана з берегом. Переміщення води відносно берега (течія) за той самий час становить $\vec{s}_2$. На віддаль s_2 вода перенесла і плавця. Це *рухома система відліку*. Результуюче переміщення відносно нерухомої системи відліку, пов'язане з Землею, становитиме $\vec{s}$, або $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$.



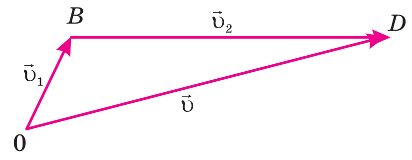
Мал. **38. Рух плавця**

Отже: ***переміщення*** $\vec{s}$ тіла в нерухомій системі відліку дорівнює векторній сумі переміщення $\vec{s}_1$ тіла в рухомій системі відліку і переміщення $\vec{s}_2$ рухомої системи відліку відносно нерухомої.

Це правило пов'язує швидкості того самого тіла у двох системах відліку. Розділивши співвідношення $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ на час руху t дістанемо: $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$ (*мал. 39*).

Це означає, що швидкість тіла $\vec{\upsilon}$ у нерухомій системі відліку дорівнює векторній сумі швидкості $\vec{\upsilon}_1$ тіла в рухомій системі відліку і швидкості $\vec{\upsilon}_2$ рухомої системи відліку відносно нерухомої – ***класичний закон додавання швидкостей.***

Таким чином, ***швидкість руху тіла*** також є ***величиною відносною***, що залежить від вибору системи відліку.



Мал. **39. Додавання швидкостей**

Будь-який складний рух можна подати як суму простих незалежних рухів. У цьому полягає суть *принципу незалежних рухів:*

якщо тіло одночасно бере участь у декількох рухах, то кожен із рухів відбувається незалежно від інших.

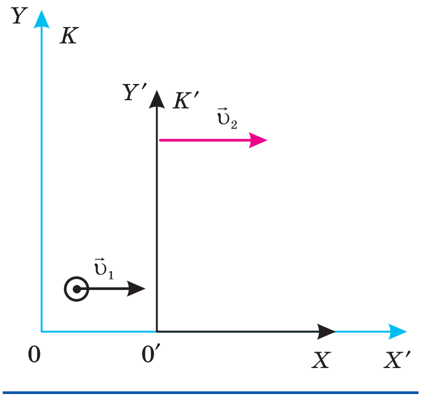
Саме завдяки цьому принципу векторні величини можна розкладати на складові, на проекції на координатні осі.

Дайте відповіді на запитання

1. У чому суть відносності руху?
2. Що означають рухома і нерухома системи відліку?
3. Сформулюйте закон додавання швидкостей і наведіть приклад застосування цього правила.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Два тіла рухаються зі швидкостями υ_1 і υ_2 відповідно. Визначити швидкість руху другого тіла відносно першого у випадку, коли тіла рухаються в одному напрямі і назустріч одне одному.



Мал. 40. **До задачі 1.**

Розв'язання:

В умові задачі вказані швидкості тіл відносно Землі (нерухомої системи відліку K). Приймемо друге тіло за рухому систему відліку (K'), що рухається відносно Землі зі швидкістю $\vec{\upsilon}_2$ (мал. 40).

Тоді класичний закон додавання швидкостей набуває вигляду: $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}'$, де υ_1 – швидкість першого тіла відносно Землі, υ' – швидкість другого тіла відносно першого.

Якщо тіла рухаються в одному напрямі, то у проекціях на вісь X закон записується у вигляді $\upsilon_1 = \upsilon_2 + \upsilon'$. Звідси $\upsilon' = \upsilon_1 - \upsilon_2$.

У випадку, коли тіла рухаються назустріч одне одному, то проекція швидкості руху другого тіла буде від'ємною: $\upsilon_1 = -\upsilon_2 + \upsilon'$, звідси $\upsilon' = \upsilon_1 - (-\upsilon_2) = \upsilon_1 + \upsilon_2$.

Відповідь: $\upsilon_1 - \upsilon_2$; $\upsilon_1 + \upsilon_2$.

Задача 2. Пліт пропливає біля пункту A у той момент, коли від нього відправляється униз за течією річки до пункту B моторний човен. Відстань між пунктами 15 км човен проплив за 0,75 год і повернув назад. Повертаючись у пункт A човен зустрів пліт на відстані 9 км від пункту B. Визначити швидкість течії u та швидкість човна відносно води υ.

Дано:
$s_1 = 15$ км;
$s_2 = 9$ км;
$t = 0,75$ год

u – ?
υ – ?

Розв'язання:

Розв'язання цієї задачі набагато спрощується, якщо систему відліку пов'язати з плотом. У такій системі пліт та річка нерухомі. Це означає, що відносно плота моторний човен рухається до пункту B і у зворотному напрямі з однаковою швидкістю. Час руху човна у прямому та зворотному напрямах $2t$, відстань, яку він при цьому проходить, $s = s_1 + s_2$. Швидкість човна відносно води:

$$\upsilon = \frac{s}{2t} = \frac{15\text{ км} + 9\text{ км}}{2 \cdot 0,75\text{ год}} = 16\,\frac{\text{км}}{\text{год}}.$$

За цей час пліт пройшов відстань $s_1 - s_2$.

Таким чином, швидкість течії $u = \dfrac{s_1 - s_2}{2 \cdot t} = \dfrac{6\text{ км}}{2 \cdot 0,75\text{ год}} = 4\,\dfrac{\text{км}}{\text{год}}$.

Відповідь: $\upsilon = 16\,\dfrac{\text{км}}{\text{год}}$, $u = 4\,\dfrac{\text{км}}{\text{год}}$.

Вправа 4

1. Швидкість велосипедиста – 36 км/год, а швидкість зустрічного вітру 4 м/с. Яка швидкість вітру в системі відліку, пов'язаній з велосипедистом?

2. Ескалатор метро рухається зі швидкістю 0,8 м/с. За який час пасажир переміститься на 40 м відносно землі, коли він сам іде у напрямі руху зі швидкістю 0,2 м/с у системі відліку, пов'язаний з ескалатором?

3. Швидкість руху човна відносно води в n разів більша, ніж швидкість течії річки. У скільки разів довше човен пливе між двома пунктами проти течії, ніж за течією? Розв'язати задачу для значень $n = 2$ і $n = 11$.

4. Моторний човен, що має в системі відліку, пов'язаній з водою, швидкість 6 м/с, має переправитись через річку найкоротшим шляхом. Який курс відносно берега треба тримати під час переправи, якщо швидкість течії річки становить 2 м/с.

5. Пасажир потяга, що рухається зі швидкістю 36 км/год, бачить протягом 60 с сусідній поїзд завдовжки 600 м, який іде паралельно першому в одному напрямі. Визначити: а) з якою швидкістю йде другий поїзд і скільки часу пасажир другого потяга бачить перший завдовжки 900 м; б) час, протягом якого пасажири кожного з поїздів бачать проходження сусіднього потяга, за умови коли вони рухаються назустріч один одному.

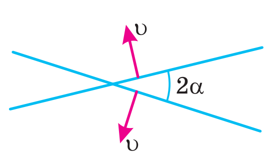
6. Між двома пунктами, розташованими на річці на відстані 100 км один від одного, курсує катер. Катер проходить цю відстань за течією за 4 год, а проти течії – за 10 год. Визначити швидкість течії річки і швидкість катера відносно води.

7. Рибалка пливе човном угору по річці. Пропливаючи під мостом, він упустив рятівний круг. Через годину рибалка помітив втрату і, повернувши назад, догнав круг за 6 км нижче від моста. Яка швидкість течії річки, якщо рибалка, рухаючись угору і вниз по річці, гріб однаково?

8. Вагон завширшки 2,4 м, що рухався зі швидкістю 15 м/с, пробила куля, яка летіла перпендикулярно до руху вагона. Зміщення отворів у стінках вагона один відносно іншого дорівнює 6 см. Яка швидкість кулі?

9. Відносно системи K' рівняння руху матеріальної точки має вигляд: $x' = 4t + 5$; $y' = 0$; $z' = 0$. Який вигляд має рівняння руху матеріальної точки відносно системи K, якщо: а) система K' нерухома відносно системи K, а її початок має координати (3; 0; 0); б) система K' рухається відносно системи K рівномірно і прямолінійно вздовж осі X зі швидкістю 5 м/с і у початковий момент руху початки координат та осі систем K' і K збігалися; в) система K' рухається відносно системи K рівномірно і прямолінійно вздовж вісі Y зі швидкістю 3 м/с і у початковий момент руху початки координат та вісі систем K' і K збігалися.

10. Два стержні перетинаються під кутом 2α і рухаються з однаковими швидкостями υ перпендикулярно самим собі (*мал. 41*). Якою є швидкість руху точки перетину стержнів?



Мал. **41. До задачі 10**

§ 9 Рівномірний та нерівномірний рух

✓ *Рівномірний та нерівномірний рухи.*
✓ *Середня та миттєва швидкість.*
✓ *Фізичний зміст похідної.*

Рівномірний та нерівномірний рухи. При ***рівномірному русі*** тіло (матеріальна точка) за будь-які рівні інтервали часу здійснює однакові переміщення.

Рівномірним, як ми з'ясували, може бути прямолінійний рух, і, як з'ясуємо згодом, – рівномірний рух по колу.

Рівномірний рух трапляється в природі дуже рідко. Рівномірно рухаються кінець стрілки годинника, молекула газу від одного співудару до іншого. У реальному житті найчастіше ми маємо справу з ***нерівномірним рухом***, коли тіло за рівні інтервали часу здійснює різні переміщення.

Середня та миттєва швидкість. Для опису нерівномірного руху користуються поняттями ***середньої*** та ***миттєвої*** швидкості. Причому середня швидкість нерівномірного руху має подвійне тлумачення: як середня швидкість переміщення і як середня швидкість проходження шляху.

1) середня швидкість переміщення – ***векторна*** величина, що визначається відношенням переміщення до інтервалу часу, протягом якого відбулося це переміщення:

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{\vec{s}}{t} = \frac{\vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \ldots \vec{s}_n}{t_1 + t_2 + \ldots t_n},$$

де $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, ... – переміщення тіла за відповідні інтервали часу t_1, t_2 ... .

2) середня швидкість проходження шляху – ***скалярна*** величина, що визначається відношенням пройденого шляху до інтервалу часу руху тіла:

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{l}{t} = \frac{l_1 + l_2 + \ldots l_n}{t_1 + t_2 + \ldots t_n},$$

де l_1, l_2 ... – ділянки шляху, пройдені за відповідні інтервали часу t_1, t_2.

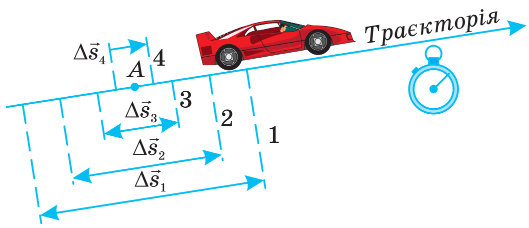
Значення цих швидкостей може не збігатися. Наприклад, якщо траєкторія руху криволінійна. Пройдений шлях завжди більший за переміщення.

Що визначає середня швидкість прямолінійного нерівномірного руху? Наприклад, рухаючись прямолінійно, автомобіль за 1 год проїхав 60 км. Отже, середня швидкість його руху – 60 км/год. Але автомобіль протягом цієї години міг гальмувати перед світлофорами, зупинятись і знову набирати швидкість. Тому ми не можемо знати, якою була його швидкість, наприклад, через 10 хв від початку руху, і яке переміщення здійснив автомобіль за ці 10 хв.

Таким чином, середня швидкість характеризує рух тіла на певній ділянці траєкторії ***за весь час*** руху, але не дає інформації про рух тіла у певній точці траєкторії (у певний момент часу).

Особливістю механічного руху є його неперервність: ні координати тіла, ні його швидкість не можуть змінюватись стрибками. Тому для характеристики нерівномірного руху застосовують поняття ***миттєвої швидкості***.

Щоб визначити миттєву швидкість треба зменшувати інтервал часу, за який здійснюється переміщення. Чим меншим буде цей інтервал, тим менше переміщення здійснюватиме тіло (*мал.45*). Коли швидкість визначатиметься за досить короткий інтервал часу $\Delta t \to 0$ і переміщення буде малим (наближається до точки $\vec{s} \to 0$), то дріб $\vec{s}/\Delta t$ прямує до деякого граничного значення, тобто швидкість практично не змінюватиметься ні за значенням, ні за напрямом.



Мал. 42. До визначення миттєвої швидкості

Граничне значення (межа, границя), до якого прямує дріб $\Delta\vec{s} \,/\, \Delta t$ при $\Delta t \to 0$ називають ***миттєвою швидкістю*** у певній точці або у певний момент часу.

Математично це записується так: $\vec{\upsilon} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}(\Delta\vec{s} \,/\, \Delta t)$.

Вираз lim означає «границя», а вираз $\Delta t \to 0$, зображений під ним, показує, за якої умови ця границя отримана.

Миттєва швидкість *збігається з напрямом того малого переміщення, яке здійснює тіло за досить короткий інтервал часу*.

Саме миттєву швидкість фіксує спідометр автомобіля.

Надалі, говорячи про швидкість нерівномірного руху, ми матимемо на увазі саме миттєву швидкість.

Про миттєву швидкість можна говорити й у випадку рівномірного руху. Миттєва швидкість рівномірного руху в будь-якій точці і у будь-який час є однаковою.

Миттєва швидкість нерівномірного руху в різних точках траєкторії і у різні моменти часу – різна.

Фізичний зміст похідної. Миттєва швидкість визначає *механічний (фізичний) зміст похідної*.

Виходячи з означення миттєвої швидкості відношення $\Delta\vec{s} \,/\, \Delta\, t$ називають ***похідною вектора переміщення*** $\vec{s}$ ***від часу*** t.

Фізичний (механічний) зміст похідної: величина миттєвої швидкості у момент часу t_0 дорівнює значенню похідної від переміщення s' у точці t_0:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0}(\Delta\vec{s} \,/\, \Delta t) = \vec{s}\,'.$$

Оскільки переміщення точки у просторі можна розглядати як одночасну зміну всіх її координат, то можна визначити миттєву швидкість точки у напрямі відповідної осі:

$$\upsilon_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'; \ \upsilon_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'; \ \upsilon_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = z'.$$

Нижче подано табличні значення похідних деяких функцій, які ми використовуватимемо під час вивчення механіки:

$(t)' = 1$;

$(t^n)' = nt^{n-1}$;

$(\sin\alpha)' = \cos\alpha$;

$(\cos\alpha)' = -\sin\alpha$.

$c' = 0$ – похідна від сталої величини дорівнює нулю.

Наведемо приклади визначення похідної:

а) $x = t^2 + t + 2$; $x' = (t^2 + t + 2)' = 2t + 1$;

б) $y = 3x^2$; $y' = (3x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$;

в) $x = 2\sin\alpha + \frac{\pi}{4}$; $x' = (2\sin\alpha + \frac{\pi}{4})' = 2\cos\alpha$;

г) $x = 2\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$; $x' = (2\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}))' = 2\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$;

д) $x = 10\cos 2\pi t$ – це випадок складеної функції. У цьому випадку спершу визначають похідну $(10\cos 2\pi t)' = -10\sin 2\pi t$, а потім похідну $(2\pi t)' = 2\pi$, а результат записують: $x' = -10 \cdot 2\pi \sin 2\pi t = -20\pi \sin 2\pi t$.

Дайте відповіді на запитання

1. Навіщо вводять поняття середньої та миттєвої швидкості? Коли застосовують кожне з них для опису руху?
2. Чим відрізняється середня швидкість переміщення від середньої швидкості проходження шляху?
3. Що означає вираз $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$? У чому полягає фізичний зміст похідної?

Приклад розв'язування задач

Задача. Велосипедист першу половину часу під час переїзду з одного пункту в інший їхав зі швидкістю 12 км/год, а другу половину часу (через прокол шини) йшов пішки зі швидкістю 4 км/год. Яка середня швидкість руху велосипедиста?

Дано:

$\upsilon_1 = 12\dfrac{\text{км}}{\text{год}}$;

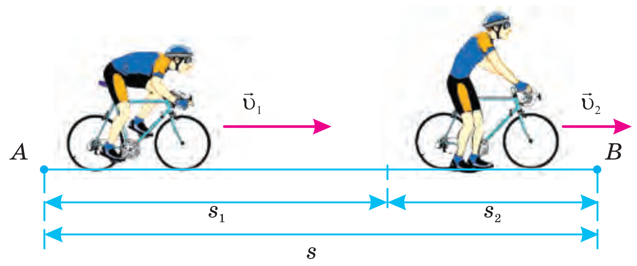
$\upsilon_2 = 4\dfrac{\text{км}}{\text{год}}$;

$t_1 = t_2 = \dfrac{t}{2}$

$\upsilon_c - ?$

Розв'язання:

Розглядатимемо рух велосипедиста відносно дороги (*мал. 43*).



***Мал.* 43. До задачі**

Рух велосипедиста в цілому нерівномірний, але на першій і другій частинах шляху він рухався рівномірно з відповідними швидкостями.

Тоді модулі переміщення $s_1 = \upsilon_1 t_1$ і $s_2 = \upsilon_2 t_2$.

Середня швидкість руху $\upsilon_c = \dfrac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}$. Підставляючи відповідні вирази для переміщення і враховуючи, що за умовою $t_1 = t_2 = \dfrac{t}{2}$, отримуємо:

$$\upsilon_c = \frac{\upsilon_1 t_1 + \upsilon_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{\frac{t}{2}(\upsilon_1 + \upsilon_2)}{t} = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2}.$$

Обчислення: $\upsilon_c = \dfrac{12\dfrac{\text{км}}{\text{год}} + 4\dfrac{\text{км}}{\text{год}}}{2} = 8\dfrac{\text{км}}{\text{год}}$.

Відповідь: $\upsilon_c = 8$ км/год.

Проаналізуємо відповідь. Середня швидкість руху визначається як середнє арифметичне її значень. Але подібним чином вона визначається лише у випадку, коли інтервали часу однакові. Можете переконатись у цьому, розв'язавши першу задачу вправи 5.

Вправа 5

1. Першу половину шляху велосипедист рухався зі швидкістю 12 км/год, а другу половину – (через прокол шини) йшов пішки зі швидкістю 4 км/год. Якою буде середня швидкість руху велосипедиста у цьому випадку?

2. Велосипедист за перші 5 с проїхав 40 м, за наступні 10 с – 100 м, а за останні 5 с – 20 м. Визначити середні швидкості на кожній з ділянок і на всьому шляху.

3. Автомобіль проходить першу третину шляху зі швидкістю υ_1, а ту частину шляху, що залишилася, зі швидкістю υ_2 = 50 км/год. Визначити швидкість руху автомобіля на першій ділянці шляху, якщо середня швидкість руху υ_c = 37,5 км/год.

4. Автомобіль проїхав відстань від A до B зі швидкістю 60 км/год, а назад повертався зі швидкістю 20 км/год. Яка середня швидкість руху автомобіля?

5. Велосипедист їхав з одного міста до іншого. Одну частину шляху він проїхав зі швидкістю 12 км/год, іншу – зі швидкістю 6 км/год. Потім (до кінця шляху) йшов пішки зі швидкістю 4 км/год. Визначити середню швидкість руху велосипедиста на всьому шляху.

6. Потяг першу половину шляху рухався зі швидкістю в $n = 1{,}5$ раза більшою, ніж під час долання другої половини шляху. Середня швидкість поїзда на всьому шляху становила 43,5 км/год. Які швидкості руху потяга на першій і другій половинах шляху?

7. Рух матеріальної точки задано рівнянням $x = at + bt^2 + ct^3$, де $a = 5$ м/с, $b = 0{,}2$ м/с^2, $c = 0{,}1$ м/с^3. Визначити швидкість точки у моменти часу $t_1 = 2$ с та $t_2 = 4$ с, а також середню швидкість протягом інтервалу часу від t_1 до t_2. При розв'язуванні задачі скористатись поняттям похідної.

§ 10 Прямолінійний рівноприскорений рух

- ✓ *Прискорення.*
- ✓ *Рівноприскорений прямолінійний рух.*
- ✓ *Швидкість і переміщення рівноприскореного руху.*

Прискорення. При нерівномірному русі швидкість (пам'ятайте, що ми маємо на увазі миттєву швидкість, але слово «миттєва» для спрощення не вживатимемо) у різних точках траєкторії і у різні моменти часу – різна. Тобто швидкість постійно змінюється від точки до точки, від одного моменту часу до наступного.

Під час руху швидкість може змінюватися по-різному – дуже стрімко (рух кулі в рушниці, старт ракети, розбіг літака) і порівняно повільно (початок руху потяга, гальмування автомобіля). Очевидно, для характеристики стрімкості зміни швидкості має існувати певна фізична величина. У фізиці цю величину називають ***прискоренням***.

Прискорення ($\vec{a}$) – векторна величина, що визначається відношенням зміни швидкості тіла до інтервалу часу, протягом якого відбулася така зміна:

$$\vec{a} = \frac{\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t},$$

де $\vec{\upsilon}_0$ – початкова швидкість тіла, $\vec{\upsilon}$ – його кінцева швидкість, Δt – інтервал часу, протягом якого відбулася зміна швидкості.

Одиниця прискорення – метр за секунду в квадраті, $[a] = 1$ м/с^2.

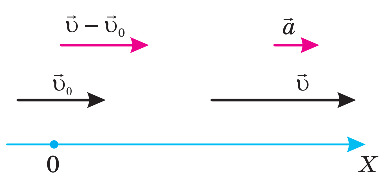
Оскільки прискорення характеризує стрімкість зміни швидкості тіла під час його нерівномірного руху, а сама швидкість характеризує стрімкість зміни положення (координати) тіла, то ці величини певним чином пов'язані одна з одною.

Вираз $\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$ характеризує середню за час Δt стрімкість зміни швидкості руху матеріальної точки. Це називають ***середнім прискоренням.***

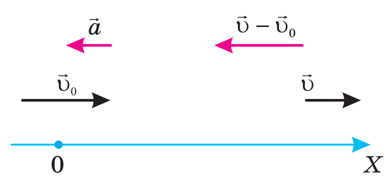
Якщо зменшувати інтервал часу, за який змінюється швидкість, то, чим меншим буде цей інтервал $\Delta t \to 0$, тим меншою буде зміна швидкості $\Delta\vec{\upsilon} \to 0$, а дріб $\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$ прямує до деякого граничного значення. Цю границю називають ***миттєвим прискоренням*** точки у певний момент часу: $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \vec{\upsilon}'$.

Рух тіла, при якому за будь-які однакові інтервали часу швидкість руху тіла змінюється однаково, тобто прискорення під час руху тіла залишається весь час сталим за напрямом і числовим значенням: $\vec{a} = \text{const}$, називається ***рівноприскореним.***

Рівноприскорений прямолінійний рух. ***Рівноприскорений прямолінійний рух*** може бути власне ***прискореним,*** якщо швидкість тіла з часом зростає (*мал. 44*) і вектори $\vec{\upsilon}, \vec{\upsilon}_0, \vec{a}$ направлені в один бік, і ***сповільненим,*** якщо швидкість спадає (*мал. 45*) і вектор $\vec{a}$ направлений протилежно до векторів $\vec{\upsilon}, \vec{\upsilon}_0$.



Мал. **44. Прискорений рух**



Мал. **45. Сповільнений рух**

Зверніть увагу! У посібниках з фізики і в задачах вживають тільки термін «рівноприскорений рух», зважаючи на те, що рівносповільнений рух відрізняється знаком проекції вектора прискорення.

Значення прискорення руху визначається, виходячи з векторних властивостей цієї фізичної величини. Зокрема, у проекціях на вісь X матимемо вираз для прискорення:

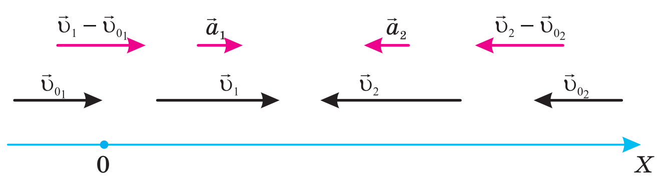
$$a_x = \frac{\upsilon_x - \upsilon_{0x}}{t}.$$

У випадку прискореного руху $a_x > 0$, оскільки швидкість руху збільшується, отже, $\upsilon_x - \upsilon_{0x} > 0$ і вектор прискорення збігається з напрямом руху.

Якщо рух сповільнений і швидкість з часом зменшується ($\upsilon_x - \upsilon_{0x} < 0$, $a_x < 0$), то й вектор прискорення направлений протилежно до напряму руху.

Проте слід пам'ятати, що знак проекції прискорення ще залежить від вибору системи відліку.

У цьому легко переконатись, якщо розглянути випадок, коли обидва тіла рухаються, наприклад, рівноприскорено, але у протилежних напрямах (*мал. 46*).

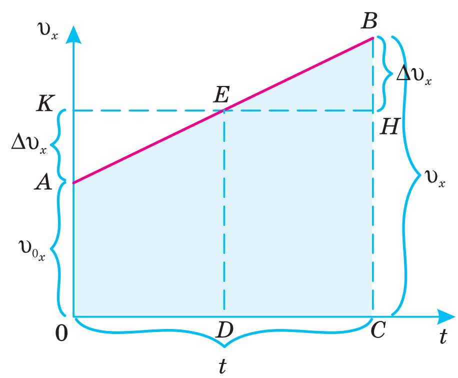


***Мал. 46.* Рівноприскорений рух тіл, що рухаються назустріч один одному**

Швидкість і переміщення рівноприскореного руху. Із формул для прискорення легко отримати ***кінематичне рівняння швидкості для рівноприскореного руху:*** $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t$ або в проекціях на обрану вісь X: $\upsilon_x = \upsilon_{ox} + a_x t$.

Побудуємо графік рівноприскореного руху (*мал. 47*), рівняння якого $\upsilon_x = \upsilon_{ox} + a_x t$.

Графік швидкості руху – пряма AB, відрізки координат OA і OC разом з ординатою кінцевої швидкості утворюють трапецію $OABC$. Проведемо в цій трапеції середню лінію DE. Через точку E проведемо відрізок KH, паралельний осі часу. З малюнка видно, що швидкість у точці E більша від початкової швидкості υ_{0x} на $\Delta\upsilon_x$ і на $\Delta\upsilon_x$ менша від кінцевої швидкості υ_x .



***Мал. 47.* Графік проекції швидкості рівноприскореного руху**

Отже, у точці E середня швидкість υ_c за час руху t.

З курсу геометрії відомо, що середня лінія трапеції дорівнює півсумі основ:

$$ED = \frac{OA + BC}{2}, \text{ або } \upsilon_c = \frac{\upsilon_{0x} + \upsilon_x}{2}.$$

Тобто для рівноприскореного руху середня швидкість визначається як середнє арифметичне.

Підкреслимо, ця формула справедлива тільки для випадку рівноприскореного руху, у випадку довільного нерівномірного руху середня швидкість визначається за формулою $\vec{\upsilon}_c = \frac{\vec{s}}{t}$.

Можна переконатись у тому, що переміщення при рівноприскореному русі виражається ***площею трапеції*** *ОАВС* (*мал. 47*). З курсу геометрії відомо, що площа трапеції дорівнює добутку півсуми основ на висоту. У нашому випадку довжина однієї основи υ_{0x}, іншої υ_x, висота трапеції – t. Півсума основ – це середня лінія трапеції, тобто, як ми довели, середня швидкість рівноприскореного руху.

Кінематичне рівняння переміщення при рівноприскореному русі в проекціях на вибрану вісь:

$$s_x = \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Якщо початкова швидкість дорівнює нулю, то $\upsilon_{0x} = 0$, то $s_x = a_x t^2/2$.

Для прямолінійного руху проекція вектора переміщення визначається як $s_x = x - x_0$, тоді

$$x = x_o + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Можна вивести й іншу формулу для переміщення.

Із $\upsilon_x = \upsilon_{ox} + a_x t$ виразимо час $t = \dfrac{\upsilon_x - \upsilon_{0x}}{a_x}$ і підставимо його у кінематичне рівняння переміщення $s_x = \upsilon_{0x} \dfrac{\upsilon_x - \upsilon_{0x}}{a_x} + \dfrac{a_x}{2}\left(\dfrac{\upsilon_x - \upsilon_{0x}}{a_x}\right)^2$.

Після спрощень: $s_x = \dfrac{\upsilon_x^2 - \upsilon_{0x}^2}{2a_x}$, або

$$\upsilon_x^2 - \upsilon_{0x}^2 = 2a_x s_x.$$

Ці формули дають змогу знайти переміщення тіла, якщо відомими є прискорення, початкова і кінцева швидкості руху тіла.

У векторній формі кінематичні рівняння рівноприскореного руху мають вигляд:

$$\vec{s} = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}; \ \vec{\upsilon}^2 - \vec{\upsilon}_0^2 = 2\vec{a}\vec{s}.$$

Дайте відповіді на запитання

1. За будь-якого нерівномірного руху змінюється швидкість. Як прискорення характеризує цю зміну?

2. Як спрямовано вектор прискорення при прямолінійному рівноприскореному русі? В якому випадку проекція прискорення має додатне, а в якому від'ємне значення?

3. Швидкість прямолінійного руху тіла щосекунди збільшується на 2 %: а) від початкового значення; б) від значення швидкості на початку кожної секунди. Чи стале прискорення тіла в обох випадках?

4. Тіло починає рухатись із стану спокою прямолінійно, проходячи щосекунди шлях, на 1 м більший, ніж за попередню секунду. Чи стале прискорення тіла?

5. Чи можуть два тіла, які рухаються по одній прямій в протилежних напрямах, мати однакові вектори прискорень?

Приклад розв'язування задач

Ураховуючи, що всі три вектори $\vec{\upsilon}$, $\vec{\upsilon}_0$, $\vec{a}$ спрямовані вздовж однієї прямої, то ***модулі їх проекцій дорівнюють модулю самих векторів, а знаки проекцій визначаються тим, як направлені вектори відносно вибраної координатної осі***. Якщо знаки проекцій векторів $\vec{\upsilon}_0$ і $\vec{a}$ співпадають, то модуль швидкості υ зростає з часом – ***тіло розганяється і всі вектори*** $\vec{\upsilon}, \vec{\upsilon}_0, \vec{a}$ ***направлені в один бік***. Якщо $\vec{\upsilon}_0$ і $\vec{a}$ протилежні, то тіло – ***гальмує, і вектор*** $\vec{a}$ ***направлений протилежно до векторів*** $\vec{\upsilon}, \vec{\upsilon}_0$.

Задача. Рівняння руху тіла задано у вигляді $x = 15t + 0,4t^2$, де всі величини задано в СІ. Визначити початкову швидкість і прискорення руху тіла, а також координату і швидкість руху тіла через 5 с.

Дано:
$x = 15t + 0,4t^2$;
$t = 5\,с$

$\upsilon_0 - ?$
$a - ?$
$x - ?$
$\upsilon - ?$

Розв'язання:

Порівняємо це рівняння руху $x = 15t + 0,4t^2$ із загальним:

$$x = x_o + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Очевидно, що $x_0 = 0$, коефіцієнт при t дорівнює $\upsilon_0 = 15$ м/с, а при t^2 відповідно $a/2 = 0,4$, звідки $a = 0,8$ м/с².

Координату через 5 с визначимо з рівняння при $t = 5$ с:

$$x = 15\frac{м}{с}\cdot 5\,с + \frac{0,8\frac{м}{с^2}}{2}\cdot 5^2\,с^2 = 85\,м.$$

Швидкість руху тіла визначимо за формулою $\upsilon = \upsilon_0 + at$ при $t = 5$ с:

$$\upsilon = 15\frac{м}{с} + 0,8\frac{м}{с^2}\cdot 5\,с = 19\,м/с.$$

Визначити значення швидкості і прискорення можна, скориставшись також визначенням похідної.

$$\upsilon = x' = (15t + 0,4t^2)' = 15 + 0,8t\text{, при } t = 5\text{ с: } \upsilon = 15\frac{м}{с} + 0,8\frac{м}{с^2}\cdot 5\,с = 19\ м/с.$$

$$a = \upsilon' = (15 + 0,8t)' = 0,8\,м/с^2.$$

Відповідь: $\upsilon_0 = 15\,м/с$; $a = 0,8\,м/с^2$; $x = 85\,м$; $\upsilon = 19\,м/с$.

Вправа 6

1. Рух матеріальної точки задано рівняннями: $x = 8t^2 + 4$; $y = 6t^2 - 3$; $z = 0$. Всі величини записано в СІ. Визначити модулі швидкості та прискорення у момент часу $t = 10$ с.

2. Який шлях пройде тіло за час $t = 10$ с від початку руху, якщо рівняння його руху $x = 2t^2 + 3t + 4$, $y = 3t^2 + 4t - 2$, $z = 0$? (Всі величини записано в СІ).

3. По схилу завдовжки 100 м лижник з'їхав за 20 с, рухаючись із прискоренням 0,3 м/с^2. Яку швидкість мав лижник на початку і в кінці схилу?

4. Кулька, що котиться похилим жолобом зі стану спокою, за першу секунду пройшла 10 см. Який шлях кулька пройде за три секунди?

5. У скільки разів швидкість руху кулі усередині ствола рушниці менша, ніж під час пострілу?

6. Тіло, рухаючись рівноприскорено, протягом четвертої секунди пройшло 35 м. З яким прискоренням рухалось тіло? Яка його швидкість наприкінці четвертої, а також десятої секунди руху? Який шлях пройшло тіло за другу, а також за п'яту секунду? Який шлях пройшло тіло за другу і третю секунди, разом узяті?

7. За час $t = 10$ с тіло пройшло $s = 18$ м, при цьому його швидкість збільшилась у $n = 5$ разів. Вважаючи рух рівноприскореним, визначити прискорення тіла.

8. Тіло, яке рухалось рівномірно з швидкістю 2 м/с, з деякої точки A починає рухатись з прискоренням 0,5 м/с^2. Через 30 с із цієї самої точки слідом за першим тілом починає рухатись із початковою швидкістю 5 м/с і прискоренням 2 м/с^2 друге тіло. Через скільки часу друге тіло наздожене перше?

9. Тіло починає рух з точки A і рухається спершу рівноприскорено протягом часу t_0, а потім з тим самим за модулем прискоренням – сповільнено. Через який час від початку руху тіло повернеться у точку A?

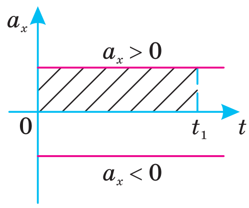
10. Доведіть, що під час прямолінійного рівноприскореного руху без початкової швидкості справджується рівність $s_1 : s_2 : \dots s_n = 1 : 3 : \dots (2n - 1)$ – відстані, які проходить тіло за послідовні однакові інтервали часу, відносяться як послідовні непарні числа.

§ 11 Графічне зображення рівноприскореного руху

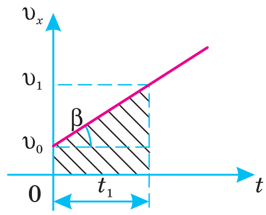
- ✓ *Графік проекції прискорення $a_x = a_x(t)$.*
- ✓ *Графік проекції швидкості $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$.*
- ✓ *Графік проекції переміщення $s_x = s_x(t)$ і координати $x = x(t)$.*

Графік проекції прискорення $a_x = a_x(t)$. Оскільки під час рівноприскореного руху прискорення є величиною сталою, то графіком залежності проекції прискорення від часу є пряма, паралельна осі часу (*мал. 48*).

За площею фігури, обмеженої графіком та перпендикуляром, опущеним на вісь часу, можна визначити швидкість руху тіла у певний момент часу t_1.



Мал. 48. Графік проекції прискорення



Мал. 49. Графік проекції швидкості

Графік проекції швидкості $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$. Як видно з рівняння $\upsilon_x = \upsilon_{ox} + a_x t$, залежність проекції швидкості від часу лінійна, тому графіком є пряма (*мал. 49*) (порівняйте з відомим вам графіком функції $y = ax + b$, §4).

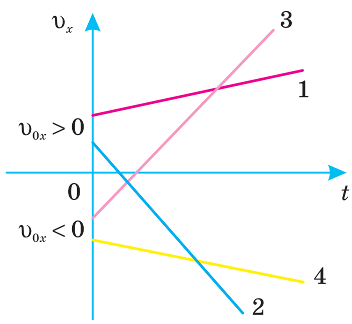
Кут нахилу графіку залежності проекції швидкості від часу визначається числовим значенням прискорення, яке графічно можна визначити так:

$$a = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_0}{t_1} = \operatorname{tg}\beta .$$

За площею фігури обмеженої графіком швидкості та перпендикуляром, опущеним на вісь часу можна визначити довжину пройденого шляху на даний момент часу t_1. Також за цим графіком можна записати закон руху.

Залежно від проекції прискорення і початкової швидкості руху тіла графік матиме різний вигляд. Так, для зображених на *мал. 50* графіках виконуються такі умови:

1) $\upsilon_{x0} > 0$, $a_x > 0$;
2) $\upsilon_{x0} > 0$, $a_x < 0$;
3) $\upsilon_{x0} < 0$, $a_x > 0$;
4) $\upsilon_{x0} < 0$, $a_x < 0$.



Мал. 50. Вигляд графіка $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ при відповідних значеннях υ_{x0} і a_x

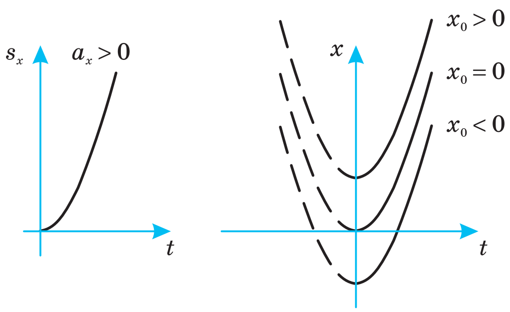
Якщо $\upsilon_{x0} = 0$, то пряма виходитиме з початку координат і, залежно від значення проекції прискорення, буде направлена вгору або вниз. Напрям прямих залежить від значення прискорення: чим більше його значення, тим крутіше здіймається чи спадає графік. Зверніть увагу на те, що *графіки 2* і *3* перетинають вісь часу. Це означає, що у деякий момент часу їх швидкість дорівнювала нулю (тіло зупинялось) і продовжувало рух у зворотному напрямі.

Графік проекції переміщення $s_x = s_x(t)$ і координати $x = x(t)$. Кінематичні рівняння проекції переміщення $s_x = \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$ і координати $x = x_o + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$ є квадратними рівняннями вигляду $y = c + bx + ax^2$, тому графіками залежності проекції переміщення і координати від часу є параболи (див. §4). Гілки цих парабол згідно з параметрами руху мають різний вигляд.

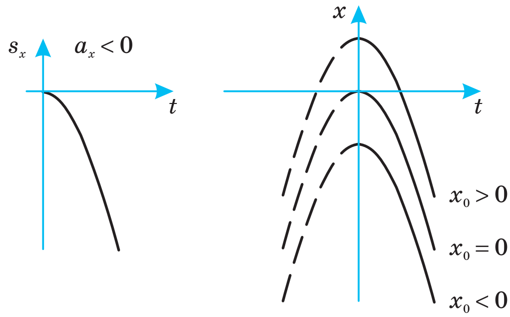
Якщо $\upsilon_{0x} = 0$ і $a_x > 0$, то графіки мають вигляд, як на *мал. 51*.

Якщо $\upsilon_{0x} = 0$ і $a_x < 0$, то гілки параболи зорієнтовані вниз (*мал. 52*).

Якщо $\upsilon_{0x} \neq 0$ і $x_0 \neq 0$, то вершина параболи зміщується в точку, координати якої визначаються співвідношеннями: $x = x_0 - \frac{\upsilon_0^2}{2a}$, $t = -\frac{\upsilon_0}{a}$ (*мал. 53*).

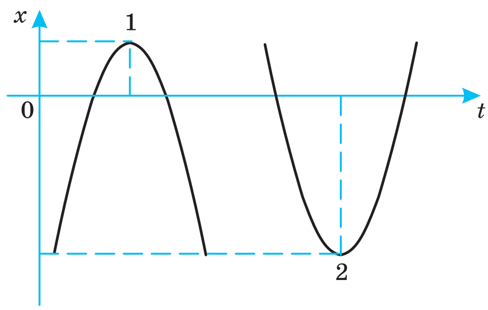


Мал. 51. Графік проекції переміщення і координати при $\upsilon_{0x} = 0$ і $a_x > 0$



Мал. 52. Графік проекції переміщення і координати при $\upsilon_{0x} = 0$ і $a_x > 0$

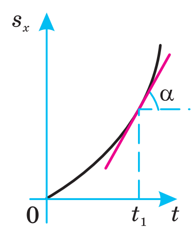
За фізичним змістом швидкість є похідною від переміщення, водночас за геометричним змістом похідна визначається кутом нахилу дотичної до кривої, тому швидкість руху тіла у певний момент часу t_1 визначається тангенсом кута нахилу дотичної до графіка проекції переміщення і віссю часу (*мал. 54*) $\upsilon = \mathrm{tg}\alpha$.



Мал. 53. Графік руху при: 1. $\upsilon_{0x} > 0$, $a_x < 0$; 2. $\upsilon_{0x} < 0$, $a_x > 0$

За зміною кута нахилу дотичних до графіка можна прослідкувати за зміною швидкості руху тіла.

Особливості побудови графіка шляху рівноприскореного руху $l = l(t)$ полягають у тому, що він розташований виключно над віссю часу, оскільки шлях не може набувати від'ємних значень.



Мал. 54. За тангенсом кута нахилу дотичної до графіка проекції переміщення можна визначити швидкість у певний момент часу

Дайте відповіді на запитання

1. У яких випадках графік проекції швидкості рівноприскореного руху напрямлений вгору, а в яких – вниз? Що означає перетин графіком проекції швидкості осі часу?

2. Яку форму має графік проекції переміщення? Чим відрізняються графіки проекції переміщення і координати?

3. Розкажіть, як за графіками прискорення, швидкості та переміщення визначити:

а) швидкості для будь-якого моменту часу за графіком прискорення;

б) закон руху за графіком швидкості;

в) зміну швидкості за графіком переміщення;

г) прискорення за графіком швидкості.

Приклади розв'язування задач

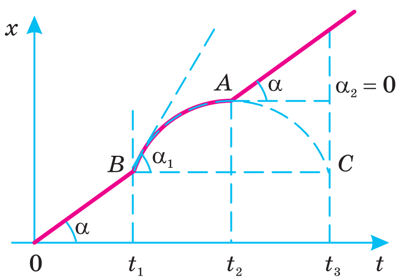
Задача 1. За графіком, що має злами (*мал. 55*), накреслити графік залежності швидкості руху тіла від часу та охарактеризувати його.

Розв'язання:

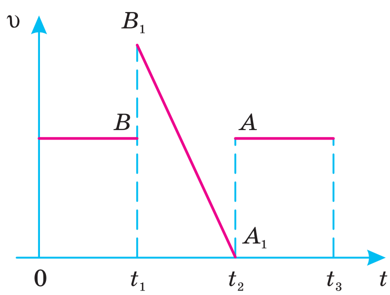
Розглянемо графік залежності координати від часу: протягом часу t_1 тіло рухалося рівномірно і прямолінійно ($tg\alpha = \upsilon$).

Протягом часу від t_1 до t_2 – рівносповільнено, причому, оскільки в точках B і A спостерігаються злами, то це означає, що швидкість руху тіла різко змінилася: у точці B від $\upsilon = tg\alpha$ до $\upsilon_1 = tg\alpha_1$, у точці А від $\upsilon_2 = 0$, оскільки $\alpha_2 = 0$ до $\upsilon = tg\alpha$.

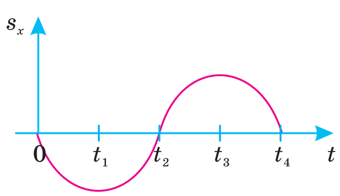
Протягом часу від t_2 до t_3 тіло рухалось рівномірно з такою самою швидкістю, що була і на початку руху.



Мал. 55.
Графік руху тіла



Мал. 56.
Графік залежності швидкості від часу



Мал. 57.
Графік проекції переміщення

Оскільки графік залежності координати від часу має злами, то графік залежності швидкості руху від часу матиме розриви у моменти часу t_1 та t_2 (*мал. 56*).

Задача 2. За графіком проекції переміщення (*мал. 57*) побудувати графік швидкості та прискорення.

Розв'язання:

За графіком залежності проекції переміщення від часу проаналізуємо характер руху тіла.

На початку руху до моменту t_1 тіло рухається у напрямі протилежному до вісі X, проекція швидкості руху від'ємна.

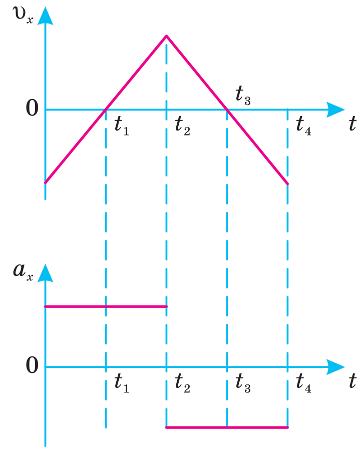
З моменту часу t_1 тіло змінює напрям руху і до моменту t_2 рухається у напрямі осі X. Проекція швидкості при цьому додатна.

Оскільки на інтервалі від 0 до t_2 гілки параболи спрямовані вгору, то протягом цього періоду прискорення тіла залишається додатним.

До моменту часу t_3 тіло продовжує рухатись у тому самому напрямі, проекція швидкості додатна, але зменшується за модулем, тому прискорення – від'ємне.

З моменту t_3 тіло змінює напрям руху і до моменту t_4 знову рухається у напрямі, протилежному вісі X, тому проекція швидкості від'ємна і зростає за модулем, оскільки протягом усього інтервалу від t_3 до t_4 прискорення від'ємне (гілки параболи направлені вниз).

Графіки проекції швидкості та проекції прискорення указано на *мал. 58*.



***Мал.* 58. Графіки проекції швидкості та прискорення**

Вправа 7

1. Рухи матеріальних точок задано такими рівняннями: а) $x_1 = 10t + 0,4t^2$; б) $x_2 = 2t - t^2$; в) $x_3 = -4t + 2t^2$; г) $x_4 = -t - 6t^2$. Всі величини записано в СІ. Написати залежність $\upsilon = \upsilon(t)$ для кожного випадку; побудувати графіки цих залежностей; визначити вид руху у кожному випадку.

2. Хлопчик з'їхав на санчатах з гори, що має схил 40 м, за 10 с, а потім проїхав по горизонтальній ділянці ще 20 м і зупинився. Обчислити швидкість у кінці схилу, прискорення на кожній ділянці, загальний час руху і середню швидкість на всьому шляху. Накреслити графік швидкості.

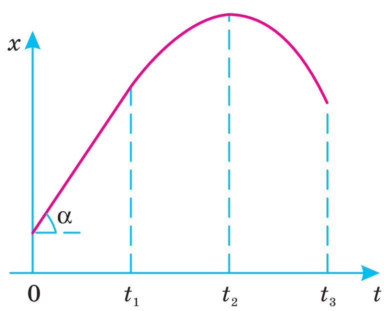
3. Велосипедист перші 4 с рухався зі стану спокою з прискоренням 1 м/с^2, а потім 0,1 хв їхав рівномірно, а останні 20 м, поки не зупинився, рівносповільнено. Обчислити середню швидкість за весь час руху. Побудувати графік $\upsilon_x(t)$.

4. На *мал. 59* подано графік залежності координати тіла від часу. Після моменту часу t_1 крива графіка – парабола. Який рух зображено на цьому графіку? Побудувати графік залежності швидкості тіла від часу.

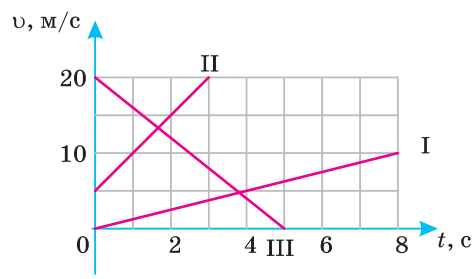
5. За наведеними на *мал. 60* графіками написати рівняння залежності $\upsilon_x(t)$ і рівняння $x = x(t)$. Вважати, що у початковий момент ($t = 0$) тіло перебуває у початку координат ($x = 0$). Побудувати графіки залежності $x = x(t)$ для кожного з тіл.

6. За графіками залежності $a_x(t)$, наведеними на *мал. 61, а* і *61, б,* побудувати графіки $\upsilon_x(t)$, вважаючи, що у початковий момент часу ($t = 0$) швидкість руху матеріальної точки дорівнює нулю.

7. Рухи двох автомобілів по шосе описуються рівняннями: $x_1 = 2t + 0,2t^2$ і

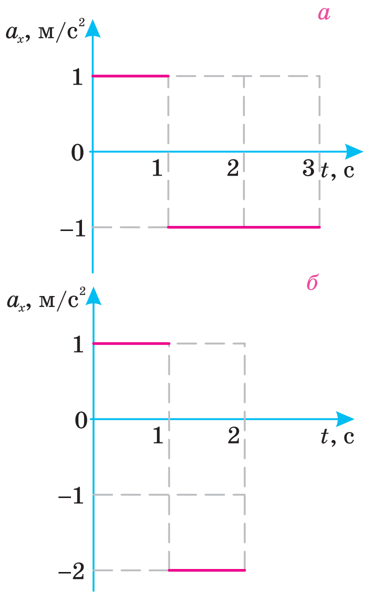


***Мал.* 59. До задачі 4**

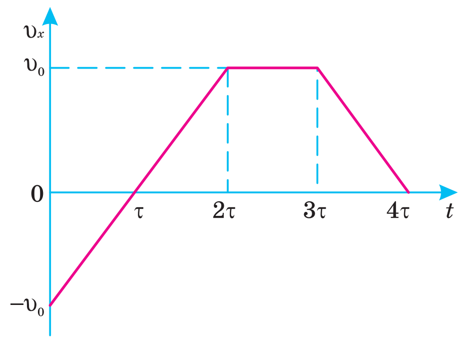


***Мал.* 60. До задачі 5**

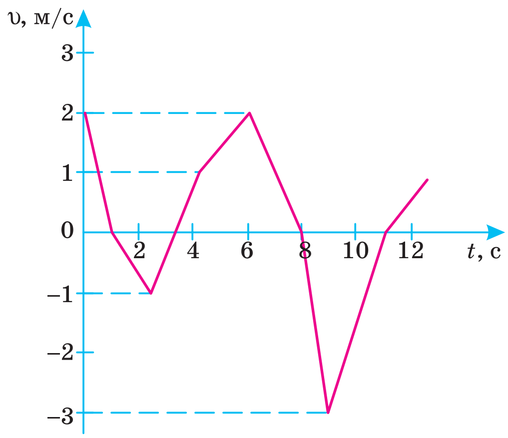
$x_2 = 80 - 4t$. Всі величини записано в СІ. Описати картину руху; визначити час і місце зустрічі автомобілів; відстань між ними через 5 с; координату першого автомобіля у той момент часу, коли другий перебував на початку відліку. Розв'язати задачу аналітично і графічно.



Мал. **61. До задачі 6**



Мал. **62. До задачі 8**



Мал. **63. До задачі 9**

8. Матеріальна точка рухається вздовж вісі X зі швидкістю $\vec{\upsilon}$ (*мал. 62*). Один під одним накреслити графіки проекцій прискорення $a_x(t)$, переміщення $s_x(t)$ та пройденого шляху $l(t)$. Визначити середнє значення модуля швидкості за час руху від t = 0 до $t = 2\tau$.

9. На *мал. 63* наведено графік швидкості тіла, яке рухається прямолінійно. На яку максимальну відстань від початкового положення відходить тіло за час руху?

10. Накресліть графік залежності координати від часу для прямолінійного руху, що одночасно задовольняє дві вимоги: а) протягом інтервалу часу від 2 до 6 с середня швидкість руху дорівнює 5 м/с; б) максимальна швидкість протягом того самого інтервалу часу дорівнює 15 м/с.

§ 12 Вільне падіння тіл – приклад рівноприскореного руху

✓ *Прискорення вільного падіння.*
✓ *Рівняння руху тіла у вертикальному напрямі.*

Прискорення вільного падіння. Чудовим прикладом прямолінійного рівноприскореного руху, що спостерігається у природі, є ***вільне падіння тіл***.

Тривалий час вважали, що тілам різної маси Земля надає різного прискорення і тому вони падають на неї неоднаково за часом: важчі – швидше, легші – повільніше. У цьому переконував життєвий досвід: легка пір'їна, що падає в повітрі з однакової висоти разом зі свинцевою кулькою, досягала землі пізніше, ніж кулька. Цей, на перший погляд, очевидний факт змушував багатьох людей спотворено уявляти справжній перебіг явища вільного падіння тіл.

Видатний італійський фізик Галілео Галілей, вивчаючи рух тіл по похилому жолобу, встановив, що кулі однакового діаметра, виготовлені з дерева, заліза, слонової кістки тощо, мають однакове прискорення, тобто воно не залежить від маси куль. Збільшуючи кут нахилу жолоба, він дійшов висновку, що значення прискорення при цьому збільшується, але залишається однаковим для всіх тіл незалежно від їх маси. Далі він зазначив: якщо збільшувати кут нахилу жолоба до 90°, тобто до вертикального положення, висновки щодо прискорення тіл не зміняться, а відмінність у падінні тіл спричинена лише опором повітря. Для перевірки цього він провів свій відомий дослід: кинувши з великої висоти мушкетну кулю і гарматне ядро (маси яких відрізнялись майже у 400 разів, проте опір повітря для них був порівняно однаковим). Для проведення такого досліду Галілей використав вежу, яка знаходилась в італійському місті Піза.

Дослід підтвердив припущення (гіпотезу) Галілея: кинуті одночасно куля та ядро впали теж практично одночасно, хоча ядро в 400 разів важче від кулі! Цей дослід став знаменитим, оскільки його вважають «днем народження» фізики як дослідної науки. А похила Пізанська вежа, що стоїть і досі, стала символом досліду як головного мірила істини: припущення стає істиною тільки тоді, коли його підтверджує дослід.

Таким чином, Г. Галілей експериментально встановив, що ***прискорення вільного падіння тіл не залежить від маси тіл і є сталою величиною***.

Подальше вивчення вільного падіння здійснювалося різними способами і за допомогою різних експериментальних установок. Так, І. Ньютон використовував велику скляну трубку, з якої можна було викачати повітря, і спостерігав, що пір'їна і сталева кулька у вакуумі падають одночасно.

> ***Вільне падіння*** – рух, який виконувало б тіло під дією лише сили тяжіння без урахування опору повітря.

Це рух зі сталим прискоренням $\vec{g}$, яке називають ***прискоренням вільного падіння***.

Після численних вимірювань було встановлено його середнє значення: $g = 9{,}81$ м/с^2. Вектор прискорення вільного падіння ***завжди направлений вертикально вниз***.

Рівняння руху тіла у вертикальному напрямі. Рух тіла у вертикальному напрямі описується рівняннями рівноприскореного руху: $\vec{h} = \vec{\upsilon}_o t + \dfrac{\vec{g}t^2}{2}$;

$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t$; $2\vec{g}\vec{h} = \vec{\upsilon}^2 - \vec{\upsilon}_0^2$, де $\vec{h}$ – переміщення при вертикальному русі (висота); $\vec{\upsilon}_0, \vec{\upsilon}$ – швидкість на початку та в кінці руху; $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння.

Рух тіла, кинутого вертикально вгору до максимальної висоти підйому, є сповільненим, потім вниз – прискореним, без початкової швидкості. Час підйому дорівнює часу падіння.

З певної висоти тіло можуть кидати вниз, надаючи йому деякої початкової швидкості, а можуть відпускати – тоді тіло падає без початкової швидкості ($\upsilon_0 = 0$) (тіло, що вільно падає).

Дайте відповіді на запитання

1. Що таке вільне падіння тіл? Який це рух? Чому?
2. У чому полягає суть досліду Г. Галілея?
3. Доведіть, що час підйому тіла, кинутого вертикально вгору, дорівнює часу його падіння.
4. Доведіть, що тіло, яке кидають вертикально вгору, і яке згодом падатиме вниз, матиме у будь-якій точці траєкторії швидкості рівні за модулем і протилежні за напрямом.

Приклади розв'язування задач

Зверніть увагу! Під час розв'язування задач опір повітря не враховувати, прискорення вільного падіння наближено можна прийняти як $g \approx 10\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 1. Тіло кидають вертикально вгору з початковою швидкістю 30 м/с. Визначити:

1) через який час воно буде на висоті 40 м;
2) яку швидкість матиме тіло на цій висоті;
3) на яку максимальну висоту може піднятись тіло.

Дано:

$\upsilon_0 = 30\,\frac{м}{с}$;

$g \approx 10\,\frac{м}{с^2}$;

$h = 40$ м

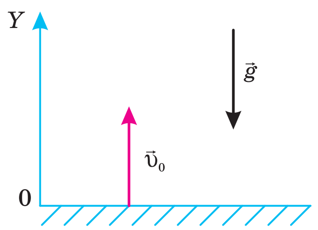
t – ?

υ – ?

h_{max} – ?

Розв'язання:

Вісь Y спрямуємо вертикально вгору (*мал. 64*).



Мал. **64. Напрями векторів початкової швидкості і прискорення вільного падіння**

Рух у вертикальному напрямі описується рівняннями: $\vec{h} = \vec{\upsilon}_o t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$ (1); $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t$ (2); $2\vec{g}\vec{h} = \vec{\upsilon}^2 - \vec{\upsilon}_0^2$ (3).

За умовою початкова швидкість тіла спрямована вертикально вгору, тому її проекція є додатною. Проекція вектора g_y – від'ємна.

З урахуванням знаків проекції векторів на вісь Y: $h = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

1) Щоб визначити, через який час тіло буде на висоті 40 м, складемо рівняння згідно з заданими числовими значеннями величин: $40 = 30t - \frac{10t^2}{2}$.

Розв'язавши квадратне рівняння, отримуємо два корені $t_1 = 2$ с, $t_2 = 4$ с. Це означає, що тіло на висоті 40 м було двічі: через 2 с, рухаючись вгору, і через 4 с – падаючи вниз.

2) Щоб визначити, яку швидкість матиме тіло на висоті 40 м, розв'яжемо рівняння (2) з урахуванням знаків проекції: $\upsilon = \upsilon_0 - gt$.

При $t_1 = 2$ с: $\upsilon_1 = 30\frac{м}{с} - 10\frac{м}{с^2}\cdot 2с = 10\frac{м}{с}$.

При $t_2 = 4$ с: $\upsilon_2 = 30\frac{м}{с} - 10\frac{м}{с^2}\cdot 4с = -10\frac{м}{с}$.

На одній і тій самій висоті швидкість тіла за модулем однакова, а за напрямом – протилежна.

3) Щоб визначити максимальну висоту підйому тіла, враховуємо, що у верхній точці швидкість тіла дорівнює нулю.

Тоді, записавши рівняння (3) з урахуванням знаків проекції, отримаємо: $-2gh = \upsilon^2 - \upsilon_0^2$. Враховуючи, що $\upsilon = 0$ м/с, маємо:

$$2gh = \upsilon_0^2;\ h = \frac{\upsilon_0^2}{2g};\ h = \frac{30^2\,\frac{м^2}{с^2}}{2\cdot 10\,\frac{м}{с^2}} = 45\ м.$$

Відповідь: $t_1 = 2$ с, $t_2 = 4$ с; 10 м/с; –10 м/с; 45 м.

Задача 2. Тіло, що вільно падає, пройшло останні 10 м за 0,25 с. Визначити, з якої висоти падало тіло, і швидкість у момент його приземлення.

Дано:
$\Delta h = 10$ м;
$\Delta t = 0{,}25$ с
h – ?
υ – ?

Розв'язання:

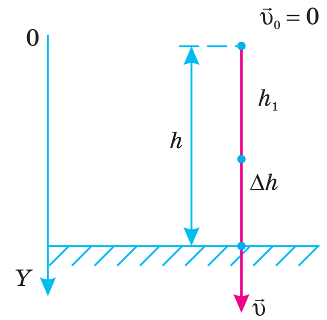
Зробимо схематичний малюнок до задачі (*мал. 65*). Вісь Y спрямовується у напрямі руху тіла.

Оскільки тіло вільно падає, то $\upsilon_0 = 0$ м/с, отже, рівняння руху має вигляд $h = gt^2/2$ (1).

h – вся висота, з якої падає тіло, Δh – останні 10 м; тоді $h_1 = h - \Delta h$ (2).

Відповідно t – увесь час падіння, $\Delta t = 0{,}25$ с, тоді $t_1 = t - \Delta t$ (3).

Запишемо рівняння руху для тіла, що вільно падає, на ділянці h_1: $h_1 = \dfrac{gt_1^2}{2}$ (4).



Мал. **65. Вільне падіння тіла**

Підставимо рівняння (1) та (4) у вираз (2):

$$\frac{gt_1^2}{2} = \frac{gt^2}{2} - \Delta h \quad (5).$$

Враховуючи вираз (3), маємо:

$$\frac{g(t - \Delta t)^2}{2} = \frac{gt^2}{2} - \Delta h.$$

Визначимо весь час руху.

$$\frac{g(t^2 - 2t\Delta t + \Delta t^2)}{2} = \frac{gt^2}{2} - \Delta h; \ \frac{gt^2}{2} - gt\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2} = \frac{gt^2}{2} - \Delta h; \ -gt\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2} = -\Delta h;$$

$$gt\Delta t = \frac{g\Delta t^2}{2} + \Delta h; \ t = \frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta h}{g\Delta t}.$$

Підставляємо числові значення: $t = \dfrac{0{,}25\text{ с}}{2} + \dfrac{10\text{ м}}{9{,}8\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot 0{,}25\text{ с}} = 4{,}2\text{ с}.$

Підставляючи час падіння у формулу (1), визначимо висоту, з якої падає тіло:

$$h = \frac{9{,}8\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot(4{,}2)^2\ \text{с}^2}{2} = 86\text{ м}.$$

Швидкість у момент приземлення можна визначити за формулами: $\upsilon = \upsilon_0 + gt$ або $2gh = \upsilon^2 - \upsilon_0^2$, враховуючи, що $\upsilon_0 = 0$ м/с. Тоді $\upsilon = 41$ м/с.

Відповідь: $h = 86$ м, $\upsilon = 41$ м/с.

Вправа 8

1. Тіло вільно падає з висоти 39,2 м. За який час тіло пройде: а) перший метр свого шляху; б) останній метр свого шляху? Чому дорівнює середня швидкість на другій половині шляху?

2. Тіло, яке вільно падає без початкової швидкості, за останню секунду руху проходить 2/3 усього шляху. Визначити шлях, пройдений тілом за час падіння.

3. Тіло вільно падає з висоти 80 м. Яке його переміщення за останню секунду падіння?

4. Тіло, що вільно падає пролетіло навпроти точки A зі швидкістю υ_A. З якою швидкістю воно пролетить навпроти точки B, яка знаходиться на відстані h нижче точки A.

5. З вежі, що має висоту h, кидають одночасно два тіла: перше – зі швидкістю υ_1 вертикально вгору; друге – зі швидкістю υ_2 вертикально вниз. Визначити різницю Δt між часом падіння кожного з тіл на землю.

6. Два тіла кинуто вертикально вгору з однаковими початковими швидкостями з інтервалом у часі Δt. З якою швидкістю буде рухатись друге тіло відносно першого?

7. М'ячик вільно падає з висоти 120 м на горизонтальну поверхню. При кожному відбиванні від поверхні швидкість м'ячика зменшується у $n = 2$ рази. Побудувати графік швидкості та визначити відстань, пройдену м'ячиком за час руху.

§ 13 Рух тіла у полі земного тяжіння

✓ *Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту.*
✓ *Рух тіла, кинутого горизонтально з висоти H.*

Під дією сили земного тяжіння спостерігають такі рухи: вільне падіння, рух тіла, кинутого вертикально вгору, під кутом до горизонту і горизонтально з певної висоти.

Розділ механіки, що досліджує рух тіл у полі тяжіння Землі, називається ***балістикою***, а сам рух – ***балістичним***.

Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту. Надамо тілу початкової швидкість $\vec{\upsilon}_0$, направленої під кутом до горизонту (*мал. 66*). Це буде нерівномірний криволінійний рух. Скориставшись принципом незалежності рухів, розглянемо його як два незалежні прямолінійні рухи: по горизонталі і по вертикалі.

Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, є результатом складання двох незалежних рухів: рівномірного прямолінійного по осі X і рівноприскореного по осі Y.

Це означає, що проекція швидкості υ_x залишається постійною протягом руху: $\upsilon_{0x} = \upsilon_x = \text{const}$.

Закон рівномірного руху по осі X має вигляд: $x = x_0 + \upsilon_{0x} t$.

По вісі Y рух є рівноприскореним, оскільки вектор прискорення вільного падіння $\vec{g}$ на невеликих висотах є величиною сталою.

Закон рівноприскореного руху по осі Y має вигляд:

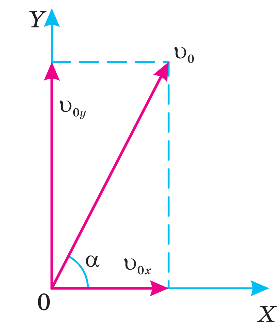
$$y = y_0 + \upsilon_{0y} t - \frac{gt^2}{2} .$$

У вибраній нами системі координат:

$$x_0 = 0 ;\ y_0 = 0 ;\ \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha ;\ \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha .$$

Таким чином закон балістичного руху має вигляд:

$$\begin{cases} x = (\upsilon_0 \cos\alpha)t, \\ y = (\upsilon_0 \sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$



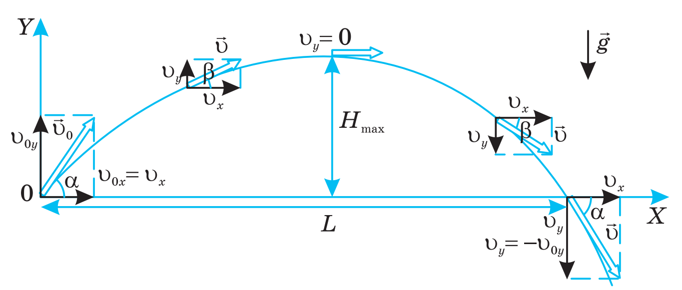
Мал. 66. Площина польоту тіла, кинутого під кутом до горизонту

Розв'язуючи цю систему рівнянь, можна отримати рівняння траєкторії такого руху. Для цього з першого рівняння виразимо час $t = x/\upsilon_0 \cos\alpha$ і підставимо його у друге рівняння. Після спрощень, і враховуючи, що $\sin\alpha/\cos\alpha = \text{tg}\alpha$, отримуємо ***рівняння траєкторії:*** $y = x\text{tg}\alpha - gx^2/2\upsilon_0^2\cos^2\alpha$.

Побудуємо траєкторію руху. З рівняння видно, що залежність $y(x)$ є квадратичною, графіком якої є парабола. Вітки параболи спрямовані вниз, оскільки коефіцієнт $\left({-g}\big/{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha} \right)$ при x^2 менше нуля і парабола проходить через початок координат, тому що $y = 0$ при $x = 0$ (*мал. 67*).

Визначимо основні параметри балістичного руху: час і дальність польоту; максимальну висоту підйому тощо.

Внаслідок незалежності рухів по координатним осям підйом тіла по вертикалі визначається лише про-



Мал. 67. Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту

екцією початкової швидкості υ_{0y} на вісь Y. Це означає, що якщо вертикальна проекція швидкості тіла, кинутого під кутом до горизонту така сама, як і початкова швидкість тіла кинутого вертикально вгору, то ці тіла будуть рухатись синхронно. Тому максимальну висоту підйому і час підйому можна визначити з відомих вам формул, що описують рух тіла, кинутого вертикально вгору.

Для тіла, кинутого вертикально вгору: $\upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt$, враховуючи, що на максимальній висоті підйому $\upsilon_y = 0$ визначимо час підйому $t_n = \upsilon_{0y}/g$, або з урахуванням, що для тіла, кинутого під кутом до горизонту $\upsilon_{0y} = \upsilon_0\sin\alpha$ час підйому визначається $t_n = \upsilon_0\sin\alpha/g$.

Оскільки парабола симетрична, то час підйому дорівнює часу падіння, і загальний час польоту $t = 2t_n = \dfrac{2\upsilon_0\sin\alpha}{g}$.

Максимальна висота підйому: $H_{\max} = \dfrac{\upsilon_0^2\sin^2\alpha}{2g}$.

Дальність польоту у горизонтальному напрямі $L = (\upsilon_0\cos\alpha)\cdot t = \dfrac{\upsilon_0^2\sin 2\alpha}{g}$.

Як видно з формули, дальність польоту L буде найбільшою за умови, якщо $\sin\alpha = 1$, тобто коли $\alpha = 45°$. За наявності опору повітря траєкторія польоту тіла, кинутого під кутом до горизонту, не буде параболою. Дальність польоту при цьому буде меншою від розрахованої за цією формулою.

Форму траєкторії руху тіла, кинутого під кутом до горизонту відтворює струмінь води, спрямований під кутом до горизонту. Спочатку, зі збільшенням кута α, струмина б'є все далі і далі. При куті 45° до горизонту дальність найбільша (якщо не враховувати опір повітря). Зі збільшенням кута дальність зменшується.

Для розрахунку швидкості руху тіла у довільній точці траєкторії та визначення кута β, який утворює вектор швидкості з горизонталлю, достатньо знати проекції швидкості на осі X та Y. При цьому слід враховувати, що горизонтальна проекція швидкості залишається постійною, і дорівнює проекції початкової швидкості $\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \text{const}$, вертикальна проекція змінюється: при підйомі вгору вона зменшується за лінійним законом $\upsilon_y = \upsilon_0\sin\alpha - gt$, на максимальній висоті підйому $\upsilon_y = 0$, далі тіло падає вниз.

Модуль результуючої швидкості: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2\cos^2\alpha + (\upsilon_0\sin\alpha - gt)^2}$.

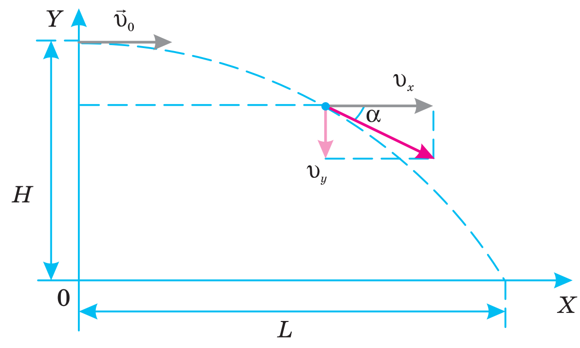
Вектор результуючої швидкості утворює з горизонтом кут β, що змінюється з часом:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{\upsilon_0\sin\alpha - gt}{\upsilon_0\cos\alpha}.$$

Висота, на яку підніметься тіло за довільний інтервал часу польоту,

$$h = \upsilon_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Рух тіла, кинутого горизонтально з висоти *H*. Це окремий випадок руху тіла, кинутого під кутом до горизонту ($\alpha = 0$) з деякої висоти H. Це криволінійний рух уздовж гілки параболи під дією земного тяжіння. У вертикальному напрямі вздовж осі Y відбувається вільне падіння, у горизонтальному напрямі вздовж осі X – рівномірний рух (*мал. 68*).



Мал. 68. Рух тіла, кинутого горизонтально з певної висоти

У будь-який момент часу швидкість $\vec{\upsilon}$ напрямлена по дотичній до траєкторії. Горизонтальна проекція швидкості у будь-який момент часу залишається сталою: $\upsilon_x = \upsilon_0$, а вертикальна проекція лінійно зростає з часом: $\upsilon_y = gt$.

Рівняння руху в горизонтальному напрямі: $x = \upsilon_x t$; у вертикальному напрямі: $y = gt^2/2$.

Оскільки $\upsilon_x \perp \upsilon_y$, то модуль швидкості $\vec{\upsilon}$ у будь-який момент часу польоту дорівнює: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2t^2}$.

Час падіння до поверхні Землі: $t = \sqrt{2H/g}$. Дальність польоту: $L = \upsilon_0\sqrt{2H/g}$.

Модуль швидкості падіння поблизу поверхні Землі: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}$.

Усі встановлені у цьому параграфі формули справедливі за умови, що рух відбувається на малих висотах.

Дайте відповіді на запитання

1. Результатом яких незалежних видів рухів є рух тіла, кинутого під кутом до горизонту?
2. Запишіть формули, що описують рух тіла, кинутого під кутом до горизонту.
3. Результатом яких двох незалежних рухів є рух тіла, кинутого горизонтально з деякої висоти?
4. Запишіть формули, що описують рух тіла, кинутого горизонтально з деякої висоти.

Приклади розв’язування задач

Зверніть увагу! Розглянуті нижче типи задач розв’язуються за допомогою ***кінематичних формул руху тіл у полі тяжіння Землі*** (без урахування опору повітря). При розв’язуванні задач використовуйте формули тотожних перетворень (див. додаток).

Задача 1. Літак летить горизонтально зі швидкістю 720 км/год на висоті 245 м. Коли він пролітає над деякою точкою поверхні Землі, з нього скидають вантаж. На якій відстані від місця кидання вантаж упаде на Землю? Опір повітря не враховувати.

Дано:
$\upsilon_0 = 720$ км/с $= 200$ м/с;
$H = 245$ м;
$g = 9{,}81$ м/с^2
L – ?

Розв'язання:

Вантаж вільно падає і одночасно рухається за інерцією з горизонтальною початковою швидкістю υ_0 (*мал. 68,* §13).

Кінематичні рівняння руху відносно координатних осей мають вигляд: по осі X рух рівномірний: $L = \upsilon_0 t$; по осі Y – рівносповільнений без початкової швидкості: $y = H - \dfrac{gt^2}{2}$. У момент падіння вантажу на землю $y = 0$, тому $H = \dfrac{gt^2}{2}$.

Визначимо час падіння: $t = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$. Тоді дальність польоту $L = \upsilon_0\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

Обчислення: $L = 200\text{ м/с}\sqrt{\dfrac{2\cdot 245\text{ м}}{9{,}81\text{ м/с}^2}} = 1414{,}2\text{ м} \approx 1{,}4\text{ км}.$

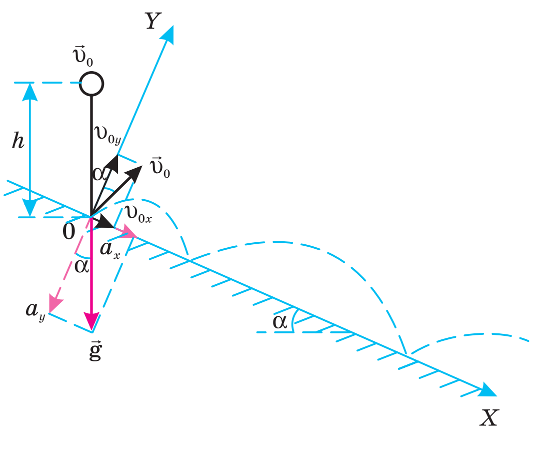
Відповідь: $L \approx 1{,}4$ км.

Задача 2. На похилу площину, кут нахилу якої α з висоти h вільно падає тіло і пружно відбивається з такою самою швидкістю. Визначити: а) через який час після відбивання тіло знову впаде на похилу площину; б) відстань від місця першого удару до другого, потім від другого до третього.

Дано:
α; h
t – ?
l_1 – ?
l_2 – ?

Розв'язання:

Виберемо систему координат так, що її початок знаходиться у точці першого дотикання тіла до похилої площини, вісь X напрямлена вздовж похилої площини, а вісь Y – перпендикулярно до неї (*мал. 69*).



Мал. 69. До задачі 2

У такому випадку рівняння руху тіла мають вигляд:

$$y = \upsilon_{oy}t + \frac{a_y t^2}{2}\ (1),\quad x = \upsilon_{ox}t + \frac{a_x t^2}{2}\ (2),$$

де $\upsilon_{oy} = \upsilon_o\cos\alpha$, $\upsilon_{ox} = \upsilon_o\sin\alpha$, $a_y = -g\cos\alpha$, $a_x = g\sin\alpha$. Оскільки після удару швидкість тіла не змінюється, то $\upsilon_0 = \sqrt{2gh}$.

У момент удару об похилу площину $y = 0$. Тоді з першого рівняння визначимо час:

$$t = \frac{2\upsilon_{oy}}{a_y} = \frac{2\upsilon_0}{g} = \frac{2\sqrt{2gh}}{g}.$$

Цей час залишається незмінним і для наступних, після першого відбивання, падінь тіла на похилу площину. Підставляючи у друге рівняння час польоту, визначимо відстань між місцями першого та другого відбивань.

$$l_1 = \upsilon_0 \sin\alpha \frac{2\upsilon_o}{g} + \frac{g\sin\alpha 4\upsilon_0^2}{2g^2} = \frac{4\sin\alpha\upsilon_0^2}{g} = 8h\sin\alpha.$$

Відстань між другим і третім ударами:

$$l_2 = \upsilon_{2x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \text{ де } \upsilon_{2x} = \upsilon_{0x} + a_x t.$$

Підставляючи вираз для t, отримуємо $l_2 = 16h\sin\alpha$.

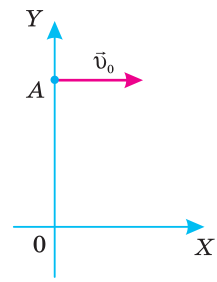
Доведіть самостійно, що відстань від місця третього удару до четвертого буде $l_3 = 24h\sin\alpha$. Зробіть висновок.

Відповідь: $t = \frac{2\sqrt{2gh}}{g}$, $l_1 = 8h\sin\alpha$, $l_2 = 16h\sin\alpha$.

Вправа 9

1. Дальність польоту тіла, кинутого в горизонтальному напрямі зі швидкістю $\upsilon = 10$ м/с, дорівнює висоті кидання. З якої висоти кинуто тіло?

2. У вибраній системі відліку (*мал. 70*) наведено положення матеріальної точки A та її швидкість $\upsilon = 10$ м/с при $t = 0$. На точку діє тільки сила тяжіння, напрямлена вздовж вісі Y. Написати рівняння залежностей $x(t)$ і $y(t)$, а також рівняння траєкторії $y(x)$, якщо $|OA| = 6$ м. Визначте положення рухомої точки через 1 с.



Мал. 70. До задачі 2

3. Тіло кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю υ_0. Накреслити графіки залежності: а) вертикальної проекції швидкості від часу $\upsilon_y(t)$; б) вертикальної проекції швидкості від висоти підйому $\upsilon_y(h)$; в) вертикальної проекції швидкості від дальності польоту $\upsilon_y(L)$.

4. Два тіла кинуто з однаковими швидкостями під кутами α і $\frac{\pi}{2} - \alpha$ до горизонту. Визначити відношення максимальних висот підйому цих тіл.

5. Під кутом 60° до горизонту кидають тіло з початковою швидкістю 50 м/с. Визначити переміщення тіла від точки кидання через 5 с.

6. На яку відстань викидається струмина води з брандспойта, встановленого під кутом 30° до горизонту, якщо початкова швидкість струмини води – 12 м/с? Врахувати, що опір повітря зменшує далекість викидання струмини порівняно з розрахованою на 20 %.

§ 14 Криволінійний рух. Рівномірний рух по колу

✓ *Переміщення і швидкість при криволінійному русі.*
✓ *Основні характеристики рівномірного руху по колу.*

Переміщення і швидкість при криволінійному русі. Досі ми розглядали ***прямолінійні рухи:*** *рівномірний прямолінійний рух,* за якого вектор швидкості *не змінюється ні за модулем, ні за напрямом* $\vec{\upsilon} = \text{const}$ та ***рівноприскорений прямолінійний рух,*** за якого *вектор швидкості змінюється за модулем*. Вектори швидкості $\vec{\upsilon}$ і переміщення $\vec{s}$ під час ***прямолінійного руху направлені в один бік***.

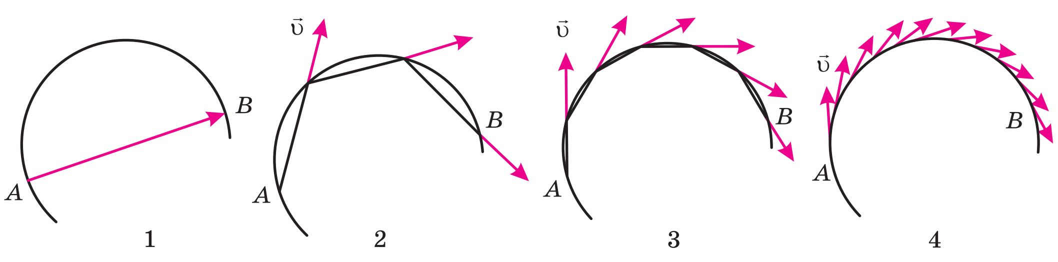
Як направлені вектори швидкості $\vec{\upsilon}$ і переміщення $\vec{s}$ при криволінійному русі?

Нехай протягом певного інтервалу часу тіло рухається криволінійною траєкторією від точки A до точки B (*мал. 71*). Пройдений тілом шлях – це довжина дуги $\overset{\frown}{AB}$, а переміщення – це вектор, направлений уздовж хорди $\overrightarrow{AB}$.

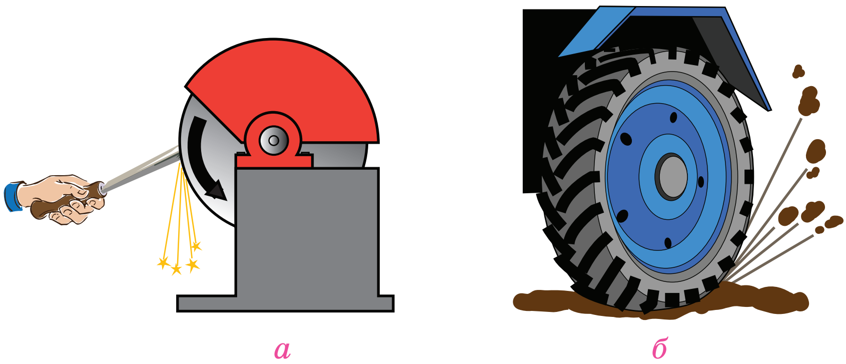
Якщо розглядати рух за коротші інтервали часу, то можна стверджувати, що миттєва швидкість тіла у точці траєкторії направлена по дотичній до дуги в цій точці.

У тому, що швидкість направлена по дотичній, можна переконатися, приклавши до точильного диска сталевий ніж: іскри від нього вилітатимуть по дотичній до місця прикладання ножа (*мал. 72, а*). По дотичній відлітають частки багнюки від коліс автомобіля, що забуксував (*мал. 72, б*).

Таким чином, миттєва швидкість тіла у різних точках криволінійної траєкторії ***має різний напрям***. За модулем ця швидкість може бути однаковою в усіх точках, а може і змінюватись.



Мал. **71. Напрям миттєвої швидкості тіла під час його криволінійного руху**



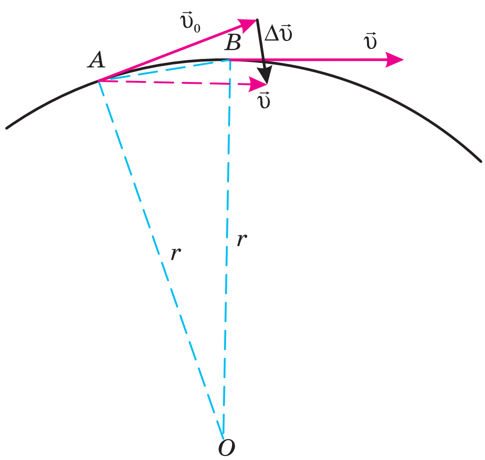
Мал. 72. Напрям руху: *а* – іскор; *б* – часток багнюки

Навіть коли за модулем швидкість не змінюється, її не можна вважати постійною, адже швидкість – величина векторна. А для векторної величини модуль і напрям однаково важливі.

Тому криволінійний рух – це завжди рух з прискоренням. ***Прискорення криволінійного руху пов'язане зі зміною напряму швидкості***.

Основні характеристики рівномірного руху по колу. Як ми уже з'ясували, рух криволінійною траєкторією відбувається по дугах кіл (див. § 6). Щоб дослідити прискорення при криволінійному русі, розглянемо випадок рівномірного руху матеріальної точки по колу.

Рівномірний рух по колу – це рух зі сталою за модулем швидкістю і з прискоренням, зумовленим зміною напряму швидкості. Цю швидкість прийнято називати ***лінійною***.



Мал. 73. Вектор прискорення направлений так само, як $\Delta\vec{\upsilon}$

Як відомо, прискорення визначається $\vec{a} = \dfrac{\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0}{t}$ або $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{t}$.

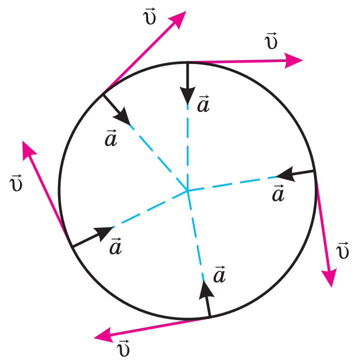
Зрозуміло, що вектор $\vec{a}$ направлений так само, як $\Delta\vec{\upsilon}$, бо час t є скалярною величиною.

Нехай тіло рухається по колу радіусом r і в деякий момент часу, який ми приймемо за початковий ($t_0 = 0$), воно перебуватиме у точці A (*мал. 73*).

Лінійна швидкість $\vec{\upsilon}_0$ у цій точці направлена по дотичній. Через деякий малий інтервал часу t тіло буде в точці B. Вважатимемо, що інтервал часу настільки малий, що дуга $\overset{\frown}{AB}$ збігається з хордою AB (на малюнку для наочності точки віддалені). У точці B тіло матиме лінійну швидкість $\vec{\upsilon}$ (яка за модулем не змінилась $\upsilon_0 = \upsilon$, змінився лише її напрям). Знайдемо різницю векторів $\vec{\upsilon}_0$ і $\vec{\upsilon}$ за правилом віднімання векторів: перенесемо вектор $\vec{\upsilon}$ паралельно самому собі так, щоб він і вектор $\vec{\upsilon}_0$ виходили з точки A. Тоді вектор $\Delta\vec{\upsilon}$, проведений від кінця вектора $\vec{\upsilon}_0$ до кінця вектора, $\vec{\upsilon}$ є їх різницею.

З малюнку видно, що вектор $\Delta\vec{\upsilon}$ направлено майже до центра кола. І якщо точки A і B дуже близькі, то вектор $\Delta\vec{\upsilon}$ направлено точно до центра кола. Такий напрям має і прискорення $\vec{a}$.

Отже, при рівномірному русі тіла по колу його прискорення в усіх точках кола спрямовано по радіусу до центра кола, його так і називають – ***доцентрове прискорення***.



Мал. 74. Напрями векторів лінійної швидкості та доцентрового прискорення

Як відомо з курсу геометрії, дотична, проведена до певної точки кола, є перпендикулярною до радіуса, проведеного у цю точку. Отже, вектор доцентрового прискорення $\vec{a}$ у кожній точці кола перпендикулярний до вектора лінійної швидкості $\vec{\upsilon}$ (*мал. 74*).

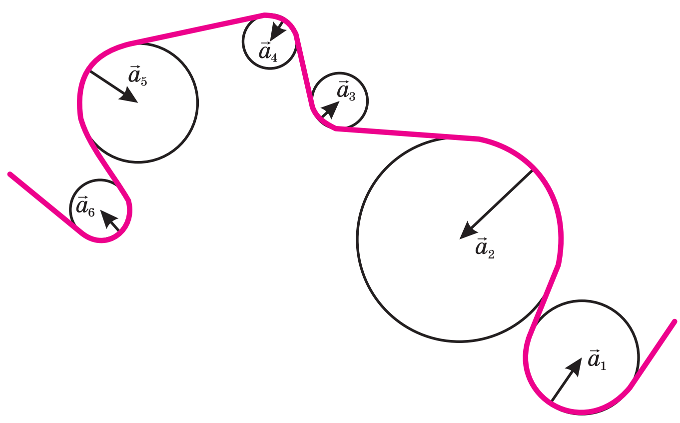
З'ясуємо, від чого залежить модуль доцентрового прискорення. Розглянемо трикутник, утворений векторами $\vec{\upsilon}_0$, $\vec{\upsilon}$ та $\Delta\vec{\upsilon}$ (див. *мал. 73*). Він рівнобедрений, оскільки рівні модулі $\upsilon_0 = \upsilon$. Трикутник OAB – також рівнобедрений. Ці трикутники подібні, як рівнобедрені з рівними кутами при вершині.

З подібності трикутників: $\dfrac{\Delta\upsilon}{AB} = \dfrac{\upsilon}{r}$.

Оскільки, як згадувалось вище, хорда AB збігається з дугою $\breve{AB}$, довжина якої є пройдений тілом шлях із постійною за модулем лінійною швидкістю протягом часу t. Він дорівнює υt.

Тому $\dfrac{\Delta\upsilon}{\upsilon t} = \dfrac{\upsilon}{r}$, або $\dfrac{\Delta\upsilon}{t} = \dfrac{\upsilon^2}{r}$. Оскільки $\dfrac{\Delta\upsilon}{t}$ є модуль прискорення, то ***доцентрове прискорення*** визначається за формулою $a = \upsilon^2/r$.

Отже, можна стверджувати, що у будь-якій точці криволінійної траєкторії (*мал. 75*) тіло рухається з прискоренням, направленим до центра того кола, частиною якого є ділянка, що містить цю точку. Модуль прискорення залежить від швидкості тіла і радіуса відповідного кола.



Мал. 75. Доцентрове прискорення криволінійного руху

Рівномірний рух по колу характеризується також специфічними кінематичними величинами: кутовим переміщенням, кутовою швидкістю, періодом і частотою.

Період обертання (T) – час одного повного оберту точки, що рухається по колу.

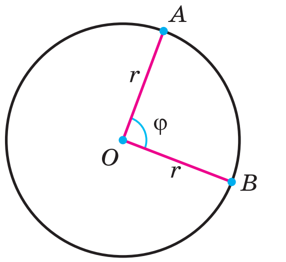
Одиниця періоду – секунда, $[T] = 1$ с.

Якщо тіло робить N обертів, то $T = \frac{t}{N}$, t – час обертання; N – кількість зроблених обертів.

Обертова частота (n) – кількість обертів за одиницю часу: $n = N/t$.

Одиниця обертової частоти – оберти за секунду,

$$[n] = 1\ \frac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1}.$$



Мал. 76.
Кутове переміщення

Легко помітити, що між частотою і періодом обертання існує взаємно обернена залежність:

$$n = \frac{1}{T} \text{ та } T = \frac{1}{n}.$$

Нехай тіло рівномірно рухається по колу радіуса r і за певний час t переміщається з точки A в точку B (*мал. 76*). Кут φ, який при цьому описує радіус, називається ***кутом повороту***, або ***кутовим переміщенням***.

Одиницею кутового переміщення є радіан, $[\varphi] = 1$ рад.

1 рад дорівнює центральному куту між двома радіусами, довжина дуги якого дорівнює радіусу.

За один оберт тіло здійснює кутове переміщення 2π рад.

Кут у радіанах і цей самий кут у градусах $\varphi°$ пов'язані співвідношенням:

$$\varphi = \frac{\varphi° \pi}{180°}.$$

Кутове переміщення – ***аксіальний вектор*** $\Delta\vec{\varphi}$. Аксіальні вектори використовуються при розгляді обертального руху. Вони направлені вздовж осі обертання.

Таким чином, за аналогією з кінематикою поступального руху, можна побудувати кінематику обертального руху.

Рівняння обертального руху – це залежність вектора кутового переміщення від часу: $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t)$.

Кутова швидкість $\vec{\omega}$ точки, що рівномірно рухається по колу, визначається відношенням кутового переміщення до інтервалу часу, протягом якого це переміщення відбулося:

$$\vec{\omega} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}.$$

Одиниця кутової швидкості – радіан за секунду, $[\omega] = 1$ рад/с.

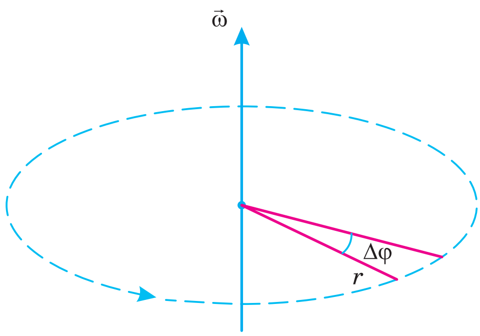
Кутова швидкість – векторна величина. Направлений вектор $\vec{\omega}$ уздовж осі обертання, причому так, що напрям обертання і напрям $\vec{\omega}$ утворюють правогвинтову систему (*мал. 77*): якщо дивитись услід вектору $\vec{\omega}$, то обертання відбувається за годинниковою стрілкою.

Оскільки кутове переміщення за час, що дорівнює періоду, становить 2π рад, то кутової швидкості може бути визначений через період і обертову частоту:

$$\omega = 2\pi n \text{ або } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

При рівномірному русі по колу кутова швидкість постійна: $\vec{\omega} = \text{const}$.

При нерівномірному русі по колу кутова швидкість змінюється (варіативна) $\vec{\omega} = \text{var}$. Тому при нерівномірному русі по колу застосовують миттєву кутову швидкість $\vec{\omega} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$.



Мал. 77. Напрям вектора кутової швидкості

Лінійна швидкість. Як ми вже з'ясували, лінійна швидкість руху тіла залишається сталою за модулем, весь час змінюється за напрямом і в будь-якій точці траєкторії руху тіла направлена по дотичній, проведеній до кола через цю точку.

За період T тіло проходить шлях, що дорівнює довжині кола $l = 2\pi r$, тоді ***модуль лінійної швидкості*** визначається: $\upsilon = 2\pi r/T$ або $\upsilon = 2\pi r \cdot n$.

Одиниця лінійної швидкості – метр за секунду, $[\upsilon] = 1$ м/с.

Легко побачити ***зв'язок лінійної і кутової швидкостей***: $\upsilon = \omega r$.

Як ми раніше встановили, ***доцентрове прискорення*** $a = \upsilon^2/r$, враховуючи зв'язок лінійної і кутової швидкості, можна виразити і так: $a = \omega^2 r$.

Зверніть увагу! Як видно з формул, доцентрове прискорення в одному випадку залежить від радіуса прямо пропорційно, а в іншому – обернено пропорційно. Цей парадоксальний, на перший погляд, висновок відображає той факт, що, якщо у тіл, які рухаються по колу, однакові лінійні швидкості, то доцентрове прискорення більше у того з них, яке рухається по колу меншого радіуса; якщо однакові їх кутові швидкості, то доцентрове прискорення більше там, де більший радіус.

Головною особливістю рівномірного руху по колу є те, що відбувається періодичне повторення положення тіла і відповідна періодична зміна величин, що характеризують рух. З подібними періодичними змінами величин ми зустрінемось при вивченні ***коливань***.

Дайте відповіді на запитання

1. Чим відрізняються зміни швидкості при прямолінійному і криволінійному рухах?
2. Чи можна вважати рівномірний рух по колу рівноприскореним?
3. Якщо при русі по колу змінюватиметься і модуль швидкості, то як це впливатиме на прискорення?
4. Якими специфічними кінематичними величинами характеризується рух по колу?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Як відомо, добове обертання Землі становить 24 год. З якою кутовою та лінійною швидкістю рухаються точки поверхні Землі, розташовані на екваторі? Радіус Землі – 6400 км. Вважати, що вісь обертання проходить крізь полюси.

Дано:
$T = 24$ год $= 86\,400$ с;
$R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м

ω – ?
υ – ?

Розв'язання:

Вважатимемо обертання Землі рівномірним.
Кутову швидкість визначаємо за формулою $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$,

$$\omega = \frac{2 \cdot 3{,}14\ \text{рад}}{86\,400\ \text{с}} = 0{,}000\,073\,\frac{\text{рад}}{\text{с}} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Лінійна швидкість відповідно: $\upsilon = \omega r$, $\upsilon = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}} \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ \text{м} = 47\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

Відповідь: $\omega = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\upsilon = 47\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

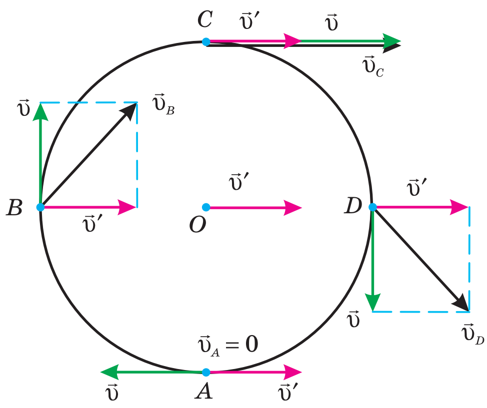
Задача 2. Велосипедист їде по дорозі зі швидкістю 10 м/с. Скільки обертів за секунду роблять колеса велосипеда, якщо вони не ковзають? Яке доцентрове прискорення мають точки на ободі колеса, якщо його радіус 35 см?

Дано:
$\upsilon = 10$ м/с;
$r = 0{,}35$ м

ν – ?
a – ?

Розв'язання:

Колесо велосипеда бере участь одночасно у двох рухах: поступальному зі швидкістю $\vec{\upsilon}'$ та обертальному з лінійною швидкістю $\vec{\upsilon}$. Напрями векторів цих швидкостей показані на *мал. 78*. Вектор швидкості поступального руху збігається з напрямом руху велосипеда, тому в усіх точках колеса він має однаковий напрям (червона стрілка на малюнку), вектор лінійної швидкості у різних точках колеса спрямований по дотичній, проведеній через цю точку.



***Мал.* 78. Поступальний та обертальний рух колеса**

Оскільки колесо рухається без проковзування, то точка A, що стикається в цей момент з дорогою, має швидкість, яка дорівнює нулю. Звідси випливає, що швидкість поступального руху дорівнює за модулем лінійній швидкості.

Таким чином, дане в умові значення швидкості ми можемо використовувати для визначення доцентрового прискорення:

$$a = \frac{\upsilon^2}{r}, \quad a = \frac{100\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{0{,}35\ \text{м}} = 285\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Кількість обертів, що робить за секунду колесо (тобто обертову частоту), визначаємо за формулою:

$$\upsilon = 2\pi n r,\ n = \frac{\upsilon}{2\pi r},\ n = \frac{10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}}{6{,}28 \cdot 0{,}35\ \text{м}} = 4{,}55\ \frac{1}{\text{с}}.$$

Відповідь: $a = 285\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $n = 4{,}55\ \text{с}^{-1}$.

Вправа 10

1. За який час колесо, що має кутову швидкість 4π рад/с, зробить 100 обертів?

2. Якщо радіус колової орбіти штучного супутника Землі збільшити в 4 рази, то його період обертання збільшиться у 8 разів. У скільки разів зміниться швидкість руху супутника по орбіті?

3. Хвилинна стрілка годинника у три рази довша від секундної. Обчислити співвідношення лінійних швидкостей кінців стрілок.

4. Обчислити доцентрове прискорення точок колеса автомобіля, які дотикаються до дороги, якщо автомобіль рухається зі швидкістю 72 км/год і при цьому обертова частота колеса становить 8 с^{-1}.

5. Дві матеріальні точки рухаються по колах радіусами R_1 і R_2, причому $R_1 = 2R_2$. Порівняти їх доцентрові прискорення у випадках: а) коли їх лінійні швидкості однакові; б) коли їх періоди однакові.

6. Яка лінійна швидкість точок земної поверхні на широті 60° під час добового обертання Землі? Вважати, що радіус Землі – 6400 км.

7. Радіус рукоятки коловорота криниці в 3 рази більший від радіуса вала, на який намотується трос. Яка лінійна швидкість кінця рукоятки під час піднімання відра з глибини 10 м за 20 с?

8. Дитячий заводний автомобіль, рухаючись рівномірно, пройшов шлях s за час t. Визначити обертову частоту, кутову швидкість коліс і доцентрове прискорення точок на ободі колеса, якщо його діаметр d. Якщо є можливість, визначити вказані у задачі параметри на досліді.

9. Визначити радіус диска, що обертається, якщо лінійна швидкість точок, що знаходяться на його краю 6 м/с, а точок, що знаходяться ближче на 15 см до його центра, – 5,5 м/с.

10. На горизонтальній осі обертаються з частотою 3000 обертів за хвилину два тонких диски, закріплені на відстані 100 см один від одного. Пущена паралельно осі куля пробиває обидва диски, причому друга пробоїна зміщена відносно першої на кут 45°. Пробивши диски, куля заглиблюється у стіну на 60 см. Визначити: а) швидкість кулі під час руху її між дисками; б) час руху в стіні; в) середнє значення прискорення кулі під час руху у стіні.

§ 15 Рівномірний та нерівномірний обертальні рухи

- ✓ *Характеристики нерівномірного обертального руху.*
- ✓ *Кінематичні рівняння обертального руху матеріальної точки.*
- ✓ *Співвідношення рівнянь кінематики поступального і обертального рухів.*

Характеристики нерівномірного обертального руху. Рух по колу (обертальний рух) може бути як рівномірним, так і нерівномірним. При рівномірному русі по колу лінійна швидкість змінюється тільки за напрямом. При нерівномірному русі – і за напрямом, і за числовим значенням.

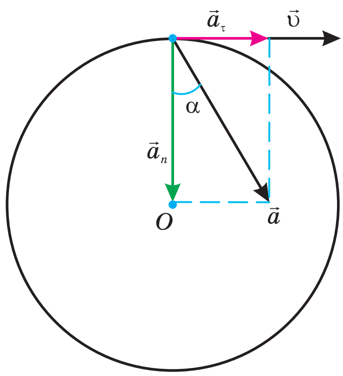
Оскільки лінійне прискорення характеризує зміну лінійної швидкості і за числовим значенням, і за напрямком, то його можна подати у вигляді суми двох складових: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, де ***нормальне (доцентрове)*** прискорення $\vec{a}_n$ характеризує зміну швидкості за напрямом і спрямоване до центра кола $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{r}$; ***тангенціальне*** (або ***дотичне***) прискорення $\vec{a}_\tau$ характеризує зміну модуля швидкості і напрямлене по дотичній до траєкторії $a_\tau = \Delta\upsilon/\Delta t$ (*мал. 79*).

Модуль лінійного або повного прискорення: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Кут α, який утворює вектор лінійного прискорення $\vec{a}$ з радіусом-вектором рухомої точки, визначається як залежність $\mathrm{tg}\alpha = a_\tau / a_n$.

При рівномірному обертанні тіла по колу тангенціальне прискорення відсутнє.

При нерівномірному русі по колу кутова швидкість $\vec{\omega}$ змінюється, що викликає кутове прискорення.



Мал. 79. Складові лінійного прискорення

Кутове прискорення **($\vec{\varepsilon}$) визначається відношенням зміни кутової швидкості обертання до інтервалу часу, за який ця зміна відбулась:**

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\vec{\omega} - \vec{\omega}_0}{\Delta t}.$$

Одиниця кутового прискорення – радіан за секунду в квадраті, $[\varepsilon] = 1$ рад/с^2.

Вектор $\vec{\varepsilon}$ співпадає з вектором $\vec{\omega}$, якщо обертання прискорене, і направлений у протилежний бік, якщо обертання сповільнене.

Вираз $\Delta\vec{\omega}/\Delta t$ характеризує середню за час Δt стрімкість зміни кутової швидкості руху матеріальної точки. Його називають середнім кутовим прискоренням.

Якщо зменшувати інтервал часу, за який змінюється кутова швидкість, то цим меншим буде цей інтервал $\Delta t \to 0$, тим меншою буде зміна кутової швидкості $\Delta\vec{\omega} \to 0$, а дріб $\Delta\vec{\omega}/\Delta t$ прямує до деякого граничного значення. Цю границю називають миттєвим кутовим прискоренням точки у певний момент часу:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \vec{\omega}' .$$

Нерівномірний обертальний рух є досить складним, тому надалі будемо досліджувати рух зі сталим кутовим прискоренням $\vec{\varepsilon} = \mathrm{const}$, тобто рівноприскорений обертальний рух. Кутова швидкість рівноприскореного обертального руху матеріальної точки у будь-який момент часу визначається за формулою: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}t$.

Щоб встановити зв'язок між кутовим і лінійним прискореннями, скористаємося співвідношенням $\Delta\omega = \frac{\Delta\upsilon}{r}$, тоді $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\Delta\upsilon}{r\Delta t}$. Оскільки за означенням $a_\tau = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$ – тангенціальне прискорення, то $\varepsilon = \frac{a_\tau}{r}$.

Отже, при рівномірному русі по колу є лише доцентрове (нормальне прискорення), яке зумовлене зміною напряму лінійної швидкості:

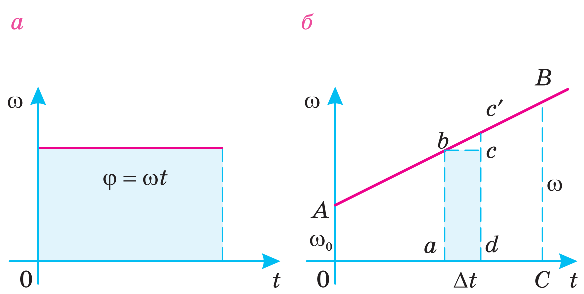
$$a_n = \frac{\upsilon^2}{r} = \omega^2 r = 4\pi^2 n^2 r = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \omega\upsilon.$$

При нерівномірному русі по колу виникає тангенціальне (дотичне) та кутове прискорення, які пов'язані між собою залежністю: $a_\tau = \varepsilon r$.

Кінематичні рівняння обертального руху матеріальної точки.

При рівномірному обертанні, тобто русі з постійною кутовою швидкістю, кутове переміщення визначається площею прямокутника, одна зі сторін якого t, а друга ω (*мал. 80, а*): $\varphi = \omega t$. У випадку нерівномірного руху по колу зі сталим кутовим прискоренням графік кутової швидкості має вигляд, зображений на *мал. 80, б.*

Якщо на графіку (*мал. 80, б*) виділити вузьку смужку $abc'd$, ширина якої відповідає малому інтервалу часу Δt, то вона мало відрізняється від прямокутника $abcd$. При досить малому Δt можна вважати, що рух відбувається з постійною кутовою швидкістю, тому площа прямокутника $abcd$ чисельно дорівнює кутовому переміщенню за малий інтервал часу Δt. На такі смужки можна розбити всю площу фігури, розташованої під графіком кутової швидкості. Отже, кутове переміщення при рівноприскореному русі по колу визначається площею трапеції $ABCO$, основами якої є відрізки $CB = \omega$, $OA = \omega_0$ і висота якої $OC = t$. Враховуючи, що при рівноприскореному обертанні $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$, отримуємо: $\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$. У векторній формі $\vec{\varphi} = \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon} t^2}{2}$.



Мал. **80. Графічне визначення кутового переміщення:**
а **– рівномірного;**
б **– рівноприскореного обертального рухів**

Для рівноприскореного обертання виконується також формула:

$$\vec{\omega}^2 - \vec{\omega}_0^2 = 2\vec{\varepsilon}\vec{\varphi}.$$

Співвідношення рівнянь кінематики поступального і обертального рухів. Для поступального руху основними характеристиками є переміщення і швидкість, для обертального – кут повороту (кутове переміщення) і кутова швидкість.

У таблиці подано співвідношення між рівняннями поступального та обертального рухів матеріальної точки.

Поступальний прямолінійний рівноприскорений рух	Обертальний рух з постійним кутовим прискоренням
Координата $x=x_{ox}+\upsilon_0\ t+\dfrac{a_x t^2}{2}$	Кут повороту: $\varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\dfrac{\varepsilon t^2}{2}$
Швидкість: $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0+\vec{a}t$	Кутова швидкість: $\vec{\omega}=\vec{\omega}_0+\vec{\varepsilon}t$ Лінійна швидкість: $\vec{\omega}=\vec{\upsilon}r$
Прискорення: $\vec{a}=\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$	Кутове прискорення: $\vec{\varepsilon}=\dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$ Доцентрове (нормальне) прискорення: $a_n=\dfrac{\upsilon^2}{r}$ Тангенціальне (дотичне) прискорення: $a_\tau=\varepsilon r$

Дайте відповіді на запитання

1. Який характер зміни швидкості руху тіла при нерівномірному його русі по колу?
2. Що таке повне прискорення руху тіла? З яких компонентів воно складається?
3. Яке прискорення називається тангенціальним? Нормальним? За якими формулами вони визначаються? Наведіть приклади, коли тангенціальне прискорення дорівнює нулю. А коли дорівнює нулю нормальне прискорення?
4. Що таке кутове прискорення? Яке обертання називають рівноприскореним?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Колесо радіусом 10 см обертається з кутовим прискоренням 3,14 рад/с². Визначити для точок ободу на кінець першої секунди руху: а) кутову швидкість; б) лінійну швидкість; в) тангенціальне прискорення; г) нормальне прискорення; ґ) повне прискорення; д) кут, який утворює вектор повного прискорення з радіусом-вектором ободу. Початкова кутова швидкість дорівнює нулю.

Дано:
$r=10$ см $=0,01$ м;
$\varepsilon=3,14$ рад/с²;
$\omega_0=0$;
$t=1$ с

ω – ?; υ – ?
a_t – ?; a_n – ?
a – ?; α – ?

Розв'язання:

За кінематичними формулами обертального руху визначаємо:

а) $\omega=\omega_0+\varepsilon t$, $\omega=\varepsilon t=3,14\,\text{рад/с}$;

б) $\upsilon=\omega r=3,14\,\text{рад/с}\cdot 0,1\,\text{м}=0,314\,\text{м/с}$;

в) $a_\tau=\varepsilon r=3,14\,\text{рад/с}^2\cdot 0,1\,\text{м}=0,314\,\text{м/с}^2$;

г) $a_n=\dfrac{\upsilon^2}{r}=\dfrac{(0,314\ \text{м/с})^2}{0,1\ \text{м}}=0,986\ \text{м/с}^2$;

ґ) $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{(0{,}314\,\text{м/с}^2)^2+(0{,}986\,\text{м/с}^2)^2}=1{,}03\,\text{м/с}^2$;

д) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{a_\tau}{a_n}=\dfrac{0{,}314\,\text{м/с}^2}{0{,}986\,\text{м/с}^2}=0{,}318$, $\alpha\approx18^\circ$.

Відповідь: $\omega=3{,}14\,\text{рад/с}$; $\upsilon=0{,}314\,\text{м/с}$; $a_\tau=0{,}314\,\text{м/с}^2$; $a_n=0{,}986\,\text{м/с}^2$; $a=1{,}03\,\text{м/с}^2$; $\alpha\approx18^\circ$.

Задача 2. Колесо починає обертатися рівноприскорено. Через 2 с від початку руху вектор повного прискорення точки, що міститься на ободі колеса, утворює кут 60° з вектором її лінійної швидкості. Визначити кутове прискорення у цей час.

Дано:
$\omega_0=0$;
$t=2$ с;
$\alpha=60^\circ$

ε – ?

Розв'язання:

Виконаємо малюнок до задачі (*мал. 81*).

З малюнка видно, що $a_\tau=a\cos\alpha$.

Повне прискорення $a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}$.

Враховуючи, що $a_n=\omega^2 r$ і $\omega=\varepsilon t$, маємо: $a_n=\varepsilon^2t^2r$.

Оскільки тангенціальне прискорення $a_\tau=\varepsilon r$, то нормальне прискорення можна виразити так: $a_n=a_\tau\varepsilon t^2$.

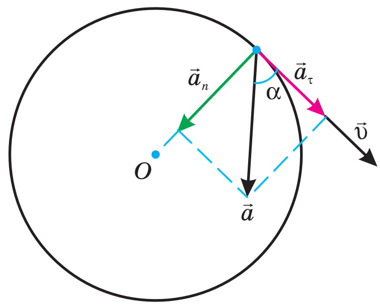
Підставимо цей вираз у формулу:

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}=\sqrt{a_\tau^2\varepsilon^2t^4+a_\tau^2}=a_\tau\sqrt{\varepsilon^2t^4+1}.$$

Враховуючи, що $a_\tau=a\cos\alpha$, отримуємо:

$a_\tau=a_\tau\sqrt{\varepsilon^2t^4+1}\cdot\cos\alpha$, звідки:

$$\sqrt{1+\varepsilon^2t^4}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$



Мал. **81. До задачі 2**

Після перетворень, отримуємо: $\varepsilon=\operatorname{tg}\alpha/t^2$.

Підставляємо числові значення: $\varepsilon=\dfrac{\sqrt3}{4\,\text{с}^2}\approx0{,}43\,\text{рад/с}^2$.

Відповідь: $\varepsilon\approx0{,}43\,\text{рад/с}^2$.

Вправа 11

1. Колесо при обертанні має початкову частоту 5 с$^{-1}$, після гальмування протягом 1 хв його частота зменшилася до 3 с$^{-1}$. Визначити кутове прискорення колеса та кількість обертів, які колесо здійснило за цей час. Вважати рух рівносповільнений.

2. Кутова швидкість тіла, що рухається по колу, змінюється за законом $\omega=5+2t$. Всі величини задано в СІ. Побудувати графік зміни швидкості. Ви-

значити кутове прискорення і початкову швидкість. Якою буде кутова швидкість через 10 с після початку обертання?

3. Тіло рухається по колу з постійним кутовим прискоренням 2 рад/с^2. Скільки повних обертів зробить тіло за 10 с, якщо початкова кутова швидкість дорівнює нулю? Якою буде кутова швидкість руху тіла у цей момент часу?

4. Тіло, що обертається з частотою 120 об/хв, зупиняється протягом 1,5 хв. Вважаючи рух рівносповільненим, визначити кількість обертів до повної зупинки. З яким кутовим прискоренням зупиняється тіло?

5. Точка рухається по колу радіусом 20 см з постійним тангенціальним прискоренням 5 см/с^2. За який час від початку руху нормальне прискорення точки буде: а) дорівнювати тангенціальному; б) вдвоє більшим за тангенціальне?

6. Колесо обертається з кутовим прискоренням 2 рад/с^2. Через інтервал часу 0,5 с від початку руху повне прискорення колеса дорівнює 13,6 см/с^2. Визначити радіус колеса.

Найголовніше в розділі 1

Механічний рух є відносним. Це означає, що такі його параметри, як траєкторія, переміщення, пройдений шлях, швидкість, залежать від вибору системи відліку і є відносними величинами. Перехід від однієї системи відліку до іншої здійснюється за допомогою **перетворень Галілея**: $x = \upsilon t + x'$, $y = y'$, $z = z'$ $t = t'$, згідно з якими координата тіла залежить від системи відліку, тобто є поняттям відносним. Рівність $t = t'$ виражає абсолютний (незмінний, інваріантний) характер часу.

Із перетворень Галілея випливає правило визначення швидкості руху тіла при переході від однієї системи координат до іншої, а також один важливий висновок: у всіх системах відліку, які рухаються рівномірно і прямолінійно одна відносно іншої, прискорення тіла залишається незмінним (інваріантним). Цей висновок ми використовуватимемо у динаміці при розгляді принципу відносності Галілея.

Основна задача механіки (визначення положення (координати) тіла в будь-який момент часу) у кінематиці розв'язується шляхом складання кінематичних рівнянь, згідно з якими можна визначити координати тіла за відомими прискоренням і швидкістю, і навпаки, визначити швидкість і прискорення тіла за змінами його координат.

Механічний рух за формою траєкторії може бути прямолінійним чи криволінійним, за характером руху – рівномірним чи нерівномірним (зокрема рівноприскорений).

Прямолінійний рух:

а) ***рівномірний прямолінійний рух:*** $\vec{\upsilon} = \text{const}$. Кінематичні рівняння руху $x = x_0 + \upsilon_x t$, $\vec{s} = \vec{\upsilon} t$;

б) ***нерівномірний прямолінійний рух:*** $\vec{\upsilon} \neq \text{const}$.

Характеризується середньою швидкістю: $\vec{\upsilon}_c = \frac{\vec{s}}{t}$ (або середньою шляховою швидкістю $\upsilon_c = l / t$) та миттєвою швидкістю $\vec{\upsilon} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{s}'$;

в) ***Рівноприскорений прямолінійний рух*** характеризується сталим прискоренням: $\vec{a} = const$.

Кінематичні рівняння руху $x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$, $\vec{s} = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$, $\vec{\upsilon}^2 - \vec{\upsilon}_0^2 = 2\,\vec{a}\,\vec{s}$.

г) ***вільне падіння*** – рух тіла, який відбувається лише під дією тяжіння, без інших сторонніх впливів на нього. Окремий випадок рівноприскореного руху. Прискорення вільного падіння біля поверхні Землі не залежить від маси тіл і є сталою величиною середнє значення якого становить $g = 9{,}81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Завжди направлене вертикально вниз.

Кінематичні рівняння руху $y = y_0 + \upsilon_{0y} t + \frac{g_y t^2}{2}$, $\vec{h} = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$, $\vec{\upsilon}^2 - \vec{\upsilon}_0^2 = 2\vec{g}\vec{h}$.

Криволінійний рух:

а) ***рівномірний рух по колу***. Характеризується лінійною $\upsilon = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r n$ та кутовою $\omega = \frac{\varphi}{t} = 2\pi n$ швидкістю. Лінійна швидкість за модулем залишається незмінною υ = const. Зміна напряму вектора лінійної швидкості зумовлює появу доцентрового прискорення: $a = \frac{\upsilon^2}{r} = \omega^2 r$; $\vec{a}_{\text{доц}}$= const. Кутова швидкість залишається сталою $\vec{\omega}$ = const.

Кінематичне рівняння рівномірного руху по колу: $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega} t$;

б) ***нерівномірний рух по колу***. Характеризується змінною лінійною і кутовою швидкостями. Зміна напряму вектора лінійної швидкості зумовлює появу доцентрового (нормального) прискорення: $a_n = \frac{\upsilon^2}{r}$, а зміна модуля лінійної швидкості зумовлює появу дотичного (тангенціального) прискорення: $a_\tau = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$, зміна кутової швидкості зумовлює появу кутового прискорення: $\vec{\varepsilon} = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}$.

Кінематичні рівняння рівноприскореного руху по колу: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} t$, $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon} t^2}{2}$, $\vec{\omega}^2 - \vec{\omega}_0^2 = 2\vec{\varepsilon}\vec{\varphi}$.

Розділ 2

ДИНАМІКА поступального та обертального рухів матеріальної точки

Динаміка (від грец. *dynamis* – сила) – розділ механіки, в якому вивчається рух тіл у зв'язку з їх взаємодією з іншими тілами.

Динаміка пояснює, за яких умов тіло рухається саме так, а не інакше, коли тіло рухається рівномірно, а коли – рівноприскорено, коли тіло рухається прямолінійно, а коли – криволінійно.

Основою динаміки є закони руху, сформульовані англійським фізиком Ісааком Ньютоном. Тому закони динаміки ще називають законами Ньютона. Вивчивши роботи своїх попередників у галузі механіки і провівши власні дослідження, він геніально узагальнив усе, що було відомо з механіки на той час, і заснував механіку як науку. Він увів основні поняття механіки (маса, сила, імпульс (кількість руху) тощо) та з їх допомогою сформулював три закони руху. Закони руху не були виведені теоретично чи експериментально. Вони є узагальненням дослідних фактів. Наведені у параграфах досліди не доводять закони, а лише допомагають зрозуміти їх суть.

У розділі «Динаміка» використовується потужний математичний апарат і це викликає певні труднощі у засвоєнні навчального матеріалу. Але хто проявить наполегливість, той зможе скористатися плодами своєї праці. Адже в цьому розділі використовуються уже відомі поняття «прискорення», «система відліку». Рухи під дією різних сил завжди можна звести до відомих рухів: рівномірного прямолінійного, рівноприскореного прямолінійного і обертального (рівномірного чи нерівномірного руху по колу).

Тому у цьому розділі ми розглянемо практичне застосування законів динаміки для опису як поступального руху матеріальної точки, так і обертання твердого тіла. Як для опису причин руху тіла (чи частин тіла), так і для опису причин їх нерухомості чи рівноваги. А також дослідимо природу сил, які вивчаються у механіці, особливості руху тіл під дією цих сил, встановимо межі застосування законів Ньютона і з'ясуємо, які зміни слід вносити в закони, щоб вони діяли і в неінерціальних системах відліку.

§ 16 Механічна взаємодія тіл. Сила. Маса

✓ *Взаємодія тіл. Сили у механіці.*
✓ *Інертність тіл. Маса.*

Взаємодія тіл. Сили у механіці. Для того щоб досконало зрозуміти закони руху, необхідно вивчити взаємодію тіл, оскільки ***взаємодія, так само як і рух, є невід'ємною властивістю матерії.***

Будь-які зміни у природі відбуваються внаслідок взаємодії між тілами. Усі тіла так чи інакше пов'язані між собою і діють одне на одне або безпосередньо (під час контакту одне з одним), або через різні поля.

Під ***взаємодіями у механіці*** розуміють ті дії тіл одне на одне, результатом яких є зміна руху цих тіл або їх деформації.

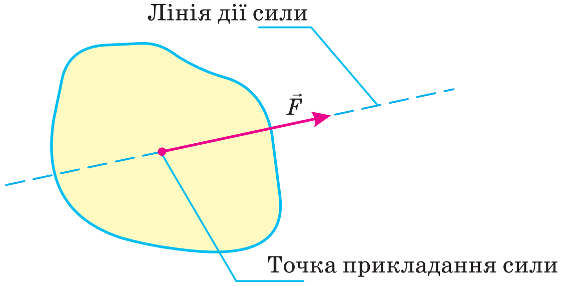
У фізиці часто не зазначають, яке тіло і як діє на певне тіло, а говорять, що на тіло діє сила або до тіла прикладена сила. Причому інтенсивність взаємодії між тілами може бути різною, тому і сила, яка характеризує цю взаємодію, може мати різні значення.

Сила – фізична величина, яка кількісно характеризує взаємодію.

Позначається $\vec{F}$. Одиницею сили є ньютон, $[\vec{F}] = 1$ Н.

Сила – векторна величина і у кожен момент часу сила, що діє на тіло, характеризується модулем, напрямом у просторі і точкою прикладання.

Пряма, вздовж якої напрямлена сила, називається лінією дії сили (*мал. 82*).



Мал. 82. **Сила як векторна величина характеризується також точкою прикладання сили та лінією дії сили**

Сила як кількісна характеристика дає змогу оцінити лише гравітаційні й електромагнітні взаємодії, яким притаманна властивість ***дальньої дії*** (далекодії): їх дія виявляється на дуже великих відстанях.

Усі механічні явища в макроскопічному світі визначаються виключно гравітаційними й електромагнітними силами. У тих дуже малих зонах простору і в тих процесах, в яких виявляються сильні та слабкі взаємодії, такі поняття, як точка прикладання, лінія дії, а разом із ними і поняття сили втрачають зміст.

У ***механіці розглядають гравітаційні сили***, а також ***два різновиди електромагнітних сил – сили пружності і сили тертя.***

Діючи на тіло, розглянуті ***сили змінюють швидкість його руху (тобто надають тілу прискорення) і (або) деформують його.***

Якщо на тіло діє тільки одна сила, вона обов'язково викликає і прискорення, і деформацію цього тіла. Якщо на тіло одночасно діє кілька сил, то можлива їх компенсація (зрівноваження) і тіло може не набувати прискорення.

Одночасна дія на тіло кількох сил може бути замінена дією однієї сили (рівнодійної). Це можливе тому, що існує ***принцип суперпозиції (незалежності***

дії сил): якщо на тіло діють одночасно кілька сил, дію кожної з них можна розглядати незалежно від дії інших.

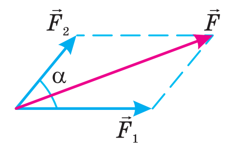
> Сила, якою можна замінити дію кількох сил, прикладених до тіла в одній точці, називається ***рівнодійною.***

Рівнодійна дорівнює геометричній сумі всіх сил, що діють на тіло.

У 8-му класі ви навчилися визначати рівнодійну сил, що діяли вздовж однієї прямої в одному або протилежних напрямах.

Якщо дві сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ діють на тіло під кутом одна до одної (*мал. 83*), напрям їх рівнодійної збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах сил як на сторонах, а модуль рівнодійної визначається за формулою

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}\ .$$



Мал. 83. Визначення рівнодійної сил

Оскільки сила здатна надати тілу прискорення і деформувати його, то обидві ці дії можна використовувати для вимірювання сили. Виникнення деформації, наприклад, пружин, застосовують у ***динамометрах*** – приладах для вимірювання сил.

Інертність тіл. Маса. Миттєво змінити швидкість тіла неможливо – дія на нього іншого тіла має тривати певний час.

> Властивість тіл зберігати швидкість за відсутності зовнішніх дій на нього з боку інших тіл, називають ***інертністю.***

Чим інертніше тіло, тим менше змінюється його швидкість за певний час. Кількісну міру інертності тіла називають його ***масою.*** Чим більшу інертність має тіло, тим більша його маса.

У 8-му класі ви також встановили, що маса характеризує і гравітаційну взаємодію. Чим більша маса тіла, тим сильніше воно притягує до себе інші тіла.

> Отже, ***маса*** – це скалярна фізична величина, що характеризує інертні та гравітаційні властивості тіл.

У сучасній фізиці достеменно доведено тотожність значень гравітаційної та інертної мас тіла ($m_т = m_i$), тому їх не розділяють і кажуть просто про масу тіла m.

Дайте відповіді на запитання

1. Які види взаємодії виокремлюють у фізиці? Які з них розглядаються у механіці?

2. Що є наслідком механічної взаємодії тіл? Що характеризує механічну взаємодію тіл?

3. Що таке сила? Які її основні характеристики? Які види сил розглядаються у механіці?

4. Що таке маса? Яку властивість тіл вона характеризує?

Приклад розв'язування задач

Зверніть увагу! Сила як векторна величина, крім числового значення і напряму, характеризується також ***точкою прикладання***, яку можна переміщувати лише вздовж лінії дії сили, якщо тіло абсолютно тверде (не деформується).

Сили пружності (реакції опори, вага), сили тертя, сила тяжіння мають відповідні точки прикладання, чому ми приділемо увагу під час детального їх вивчення.

Під час розв'язування задач із динаміки у більшості з них взаємодіючі тіла вважаються матеріальними точками. Нагадуємо, матеріальна точка – це тіло, розмірами і формою якого в певній задачі можна знехтувати. Всю масу тіла можна вважати зосередженою в точці, яку називають ***центром мас***. Виконуючи малюнок до задачі, вектори сил, що діють на тіло, паралельним перенесенням розташовуватимемо так, що початки векторів будуть прикладені до цієї точки.

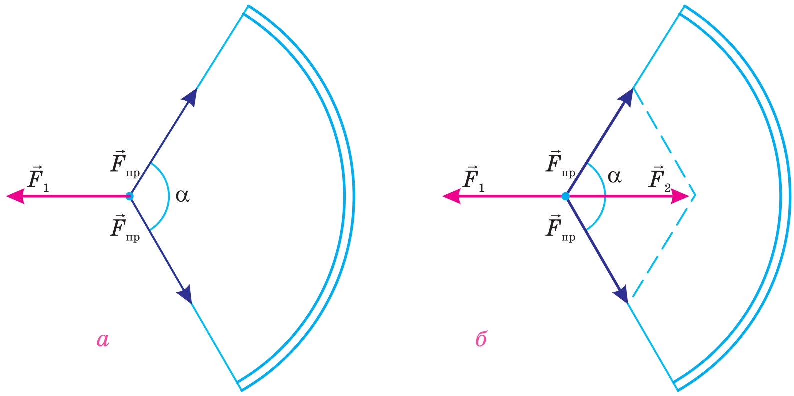
Дуже важливо навчитися правильно зображати на малюнку напрямки сил, які діють на тіло; розкладати їх на складові (проекції на координатні осі); знаходити рівнодійну сил.

Задача. Стрілець натягує тятиву лука, діючи з силою 150 Н. Кут між натягнутими частинами – тятиви 120°. Яка сила пружності виникає у кожній із частин тятиви?

Дано:	Розв'язання:
$F_1 = 150$ Н; $\alpha = 120°$ $F_{пр}$ – ?	Зробимо схематичний малюнок до задачі. Сила, з якою стрілець натягує тятиву лука – $\vec{F}_1$. Сили пружності $\vec{F}_{пр}$, що виникають у частинах тятиви, рівні за модулем і спрямовані під кутом 120° одна до одної (*мал. 84, а*).

Визначаємо за правилом додавання векторів рівнодійну двох сил пружності $\vec{F}_2$ (*мал. 84, б*), модуль якої можна визначити за формулою

$$F_2 = \sqrt{F_{пр}^2 + F_{пр}^2 + 2F_{пр}F_{пр}\cos\alpha} = \sqrt{2F_{пр}^2 + 2F_{пр}^2\cos 120°} = F_{пр}.$$



Мал. **84. Визначення рівнодійної сил**

Або з урахування того, що кут між векторами $\vec{F}_{пр}$ становить 120°, тоді утворений трикутник векторів є рівностороннім, тобто $F_2 = F_{пр}$.

Оскільки у даний момент стріла ще нерухома, то рівнодійна всіх прикладених до неї сил дорівнює нулю, отже, сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ є рівними за модулем.

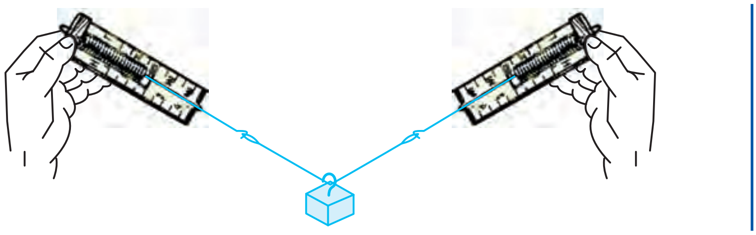
Таким чином, $F_{пр} = F_1 = 150$ Н.

Відповідь: $F_{пр} = 150$ Н.

Вправа 12

1. Два динамометри з'єднали ниткою, до якої підвісили тягарець вагою 1 Н (*мал. 85*). Змінюючи кут між нитками від 30° до 150°, визначити силу натягу ниток. Якщо є змога, перевірте отримані результати експериментально.

2. Яке значення матимуть сили, напрямлені перпендикулярно одна до одної, якщо їх можна замінити рівнодійною 250 Н, яка утворює кут 30° з однією з цих сил?



Мал. 85. До задачі 1

3. Визначити рівнодійну двох сил F_1 і F_2 прикладених до однієї точки у випадках, коли кут між їх напрямами 60° та 120°. Модулі сил $F_1 = 6$ Н та $F_2 = 8$ Н.

4. Розкласти силу $F = 10$ Н на дві складові F_1 та F_2, направлені під кутами $\alpha_1 = 30°$ та $\alpha_2 = 45°$ до напряму вектора F.

5. Який максимальний і який мінімальний результати можна дістати від додавання трьох сил з модулями: F, kF, $2kF$?

§ 17 Перший закон Ньютона. Інерціальні системи відліку

- ✓ *Початкові уявлення про причини руху тіл.*
- ✓ *Закон інерції.*
- ✓ *Інерціальна система відліку.*
- ✓ *Принцип відносності Галілея.*

Початкові уявлення про причини руху тіл. Спираючись на спостереження явищ руху, грецькі філософи понад дві тисячі років тому дійшли висновку, що природним станом тіла є спокій, оскільки всі тіла від природи «ліниві», або інертні (від лат. *iners* – бездіяльний, нерухомий). Виникнення рухів тіл можливе лише в результаті дії активної сили, а припинення дії цієї сили призводить до зупинки тіла. Тоді, коли спостерігали рух, але не розуміли його причин (рух Сонця, Місяця, зірок та інших небесних тіл), давали таке пояснення: ці предмети рухають боги. Така механіка на той час була до вподоби церкві.

Помилки давньогрецьких учених в розумінні механічних рухів виправив італійський учений Г. Галілей, досліджуючи рух кульки по похилому жолобу. Він помітив, що коли куля котиться по похилому жолобу вниз, її швидкість – збільшується, коли куля котиться нагору – її швидкість зменшується. Галілей припустив, що коли куля котитиметься по горизонтальній площині за повної відсутності сили тертя або опору, швидкість тіла залишається постійною, і для підтримання руху не потрібно прикладати жодної сили!

Це означало, що здатність тіл до «збереження руху» властива самим тілам, а вплив інших тіл виявляється в тому, що швидкість певного тіла змінюється.

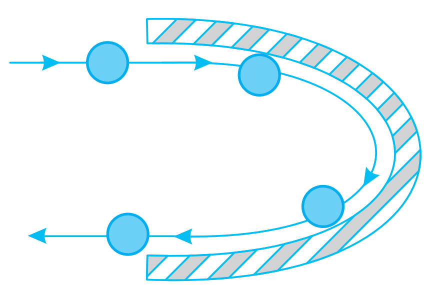
Явище збереження тілом швидкості за відсутності зовнішніх дій на нього з боку інших тіл, називають ***інерцією***, а цю властивість тіла – ***інертністю***. Властивість інертності, яка притаманна всім тілам, полягає в тому, що для зміни швидкості тіла потрібен час. З двох тіл, що взаємодіють, інертніше те, яке повільніше змінює свою швидкість.

Закон інерції. Фундаментальний висновок Г. Галілея використав І. Ньютон і сформулював його у вигляді ***першого закону динаміки (закону інерції)***.

> ***Будь-яке тіло зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, якщо воно не змушене змінити його під впливом сил, що діють.***

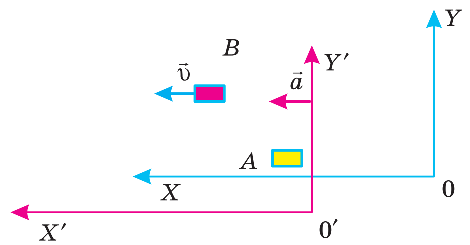
Перша частина закону інерції підтверджується практично на кожному кроці: відносний спокій тіл можна порушити лише під дією інших тіл. Зробити правильний висновок про те, що тіло зберігає стан прямолінійного і рівномірного руху, людям заважало те, що в земних умовах механічний рух супроводжується тертям, опором води або повітря тощо.

Про те, що тілу властиво зберігати не будь-який рух, а саме прямолінійний, свідчить такий дослід (*мал. 86*). Кулька, що рухається прямолінійно по плоскій горизонтальній поверхні, стикаючись із перешкодою, яка має криволінійну форму, під дією цієї перешкоди змушена рухатися по дузі. Однак, коли кулька доходить до кінця перешкоди, вона перестає рухатися криволінійно і знову починає рухатися по прямій.



Мал. 86. Збереження прямолінійного руху

Рух кульки по похилій площині, за міркуваннями Галілея, розглядали відносно поверхні Землі, яка вважається нерухомою. Вивчаючи кінематику, ми могли довільно вибирати систему відліку, оскільки у кінематиці всі системи відліку рівноправні. З'ясуємо, як впливає довільний вибір сис-



Мал. 87. **Інерціальні та неінерціальні системи відліку**

тем відліку на виконання закону інерції в динаміці.

Інерціальна система відліку. Нехай ми маємо систему відліку XOY, відносно якої тіло A перебуває у стані спокою, а тіло B рухається прямолінійно і рівномірно (*мал. 94*).

Виберемо іншу систему відліку $X'O'Y'$, яка рухається відносно першої з прискоренням $\vec{a}$. Тоді відносно цієї системи відліку $X'O'Y'$ і тіло A, і тіло B рухаються прискорено, хоч на них і не діють інші тіла.

Таким чином, у системі відліку, яка рухається з прискоренням, закон інерції не виконується.

Інерціальними називаються такі системи, в яких ізольоване тіло рухається за інерцією. В інерціальних системах відліку (ІСВ) зміна швидкості руху тіла може бути спричинена лише при взаємодії з іншими тілами.

Системи відліку, які рухаються відносно інерціальних систем із прискоренням (поступально чи обертально), – ***неінерціальні***.

І. Ньютон, розглядаючи інерціальну систему відліку, так і не зміг вказати тіло, яке було б для неї тілом відліку. Навколишні тіла рухаються прискорено: дім обертається навколо осі Землі, а разом з її поверхнею навколо Сонця. Системи відліку, які пов’язані з навколишніми тілами, неінерціальні, але їх прискорення здебільшого є дуже малими. Прискорення автобуса становить близько 1 м/с^2, великого корабля – кілька см/с^2, Землі – 6 мм/с^2, Сонця – близько 10^{-8} см/с^2. Відповідно, чим більша маса тіла відліку, тим менше його прискорення. Тому ІСВ – це абстрактне поняття, якби вона існувала, то мала б нескінченно велику масу. Очевидно, що найбільшу масу з тіл, що оточують нас має Сонце, тому пов’язана з ним система відліку є майже інерціальною. У цій ІСВ початок відліку координат суміщають з центром Сонця, а координати осей проводять у напрямі до зірок, які можна вважати нерухомими.

Для опису багатьох механічних явищ у земних умовах ІСВ пов’язують із Землею, при цьому нехтують обертальними рухами Землі навколо своєї осі і навколо Сонця. Наприклад, вивчаючи вільне падіння з Пізанської вежі, потрібно було б враховувати її доцентрове прискорення (2–3 см/с^2), оскільки Земля обертається навколо своєї осі. Але доцентрове прискорення в декілька сот разів менше від прискорення вільного падіння $\vec{g}$, тому ним зазвичай нехтують. У більшості задач Землю вважають ідеальним тілом відліку, а пов’язані з нею системи – інерціальними. Інерціальними є і системи відліку, які рухаються відносно Землі прямолінійно і рівномірно.

Визначивши роль системи відліку, сформулюємо ***перший закон Ньютона*** так:

В інерціальній системі відліку матеріальна точка (тіло) зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, якщо на неї (нього) не діють інші тіла або дія зовнішніх тіл скомпенсована.

Суттєвим є те, що в ІСВ (наприклад, автобус на зупинці) для збереження спокою не потрібно прикладати жодних зусиль, а в неінерціальній системі відліку (наприклад, автобус у момент різкого гальмування) пасажирам для цього доводиться напружувати м'язи, тримаючись за поручень.

Принцип відносності Галілея. Чи піднімалися або опускалися ви в сучасному швидкісному ліфті торговельного центру? Якщо так, то, мабуть, наставав такий момент, коли після прискорення ліфт починав рухатися рівномірно і вам здавалося, що ви стоїте на місці. Перебуваючи в кабіні ліфта, що рухається рівномірно, не можна з впевненістю сказати, рухається він чи стоїть. Подібний експеримент, щоправда, під палубою корабля, пропонував провести Г. Галілей у книзі «Діалог про дві найважливіші системи світу – Птолемеєву та Коперникову» (1632):

«Зберіться з приятелем під палубою корабля. Візьміть із собою літаючих комах, посудину з водою, в якій плавають рибки. Підвісьте вгорі відерце, з якого крапля за краплею витікає вода в іншу посудину з вузькою шийкою, що стоїть внизу. Доти, доки корабель стоїть нерухомо, спостерігайте уважно за рухом комах та рибок. Зверніть увагу, що всі падаючі краплі потрапляють у підставлену посудину... Стрибаючи двома ногами, ви зробите стрибок на одну й ту саму відстань, незалежно від його напряму. Спостерігайте добре за всім цим, хоча у нас не виникає сумніву в тому, що поки корабель залишається нерухомим, все має відбуватися саме так. Приведіть тепер корабель у рух з якою завгодно швидкістю. Якщо рух буде рівномірним і без гойдання в той чи інший бік, то у всіх вказаних явищах ви не виявите жодної зміни і за жодним із них не зможете встановити, рухається корабель чи стоїть на місці».

Саме Галілей уперше висловив думку про еквівалентність інерціальних систем відліку та механічних явищ, що протікають у них, сформулювавши ***принцип відносності***:

> ***Жодними механічними дослідами, що проводяться всередині інерціальної системи відліку (для пасажира нею є каюта корабля), неможливо встановити, перебуває ця система в спокої чи рухається рівномірно і прямолінійно.***

Людина в каюті корабля може встановити факт руху тільки тоді, коли спостерігатиме зовнішні тіла: острів, берег моря тощо.

Усі інерціальні системи відліку цілком рівноправні: час у всіх ІСВ вимірюють однаково, маса тіла не змінюється (m = const), його прискорення і сили взаємодії не залежать від швидкості ІСВ.

> ***У будь-яких ІСВ усі механічні явища відбуваються однаково за одних і тих самих початкових умов*** (інше формулювання принципу відносності Галілея).

Аналізувати механічний рух і взаємодію тіл найлегше в ІСВ, тому надалі використовуватимемо саме такі системи відліку.

Дайте відповіді на запитання

1. У чому сутність явища інерції? У яких випадках рух тіла можна називати рухом за інерцією?
2. Які системи відліку називаються інерціальними? Неінерціальними?
3. Яким чином можна довести, що система відліку є інерціальною?
4. Поясніть, чому систему відліку пов'язану із землею вважають інерціальною?
5. Як формулюється перший закон Ньютона? Наведіть приклади, які підтверджують цей закон.
6. У чому полягає принцип відносності Галілея?

§ 18 Другий закон Ньютона

✓ *Досліди, що допомагають зрозуміти другий закон Ньютона.*
✓ *Другий закон Ньютона.*
✓ *Вимірювання маси тіла.*

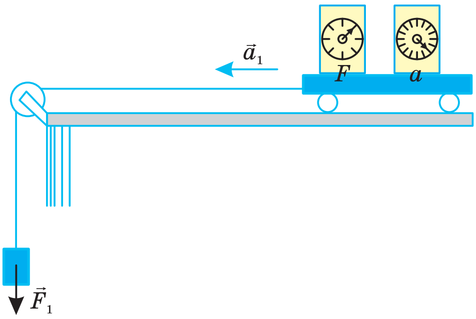
Закони Ньютона утворюють єдину систему, що пояснює закономірності механічного руху. Перший закон пояснює, що в інерціальних системах відліку тіло зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, якщо на нього не діють інші тіла або дія зовнішніх тіл скомпенсована. Другий закон Ньютона пояснює, що відбудеться з тілом у результаті взаємодії з іншими тілами.

Як перший, так і другий закон Ньютона не можна вивести ні логічно, ні з окремих експериментів. Цей закон був сформульований у результаті аналізу й узагальнення фактів, отриманих людством під час практичної діяльності.

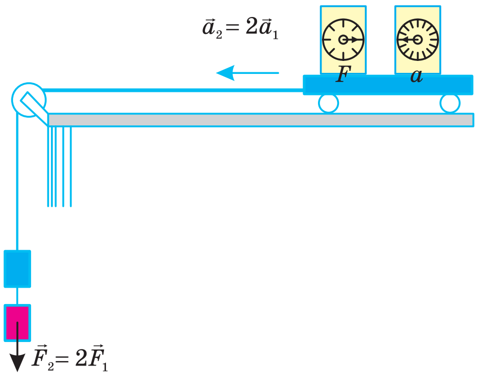
Досліди, що допомагають зрозуміти другий закон Ньютона. Розглянемо один із них.

На рухомий візок встановлюють чутливий динамометр, за допомогою якого визначають прикладену до візка силу F, та акселерометр – прилад для вимірювання прискорення візка a. Підвішений до перекинутої через блок нитки тягарець, діє із силою $\vec{F}_1$ і змушує візок рухатися з прискоренням $\vec{a}_1$ (*мал. 88, а*).

Повернемо візок у початкове положення і підвісимо до нитки два тягарці. Отже, прикладена до візка сила зростає удвічі: $\vec{F}_2 = 2\vec{F}_1$. Дослід показує, що удвічі зросло й прискорення візка $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1$ (*мал. 88, б*).



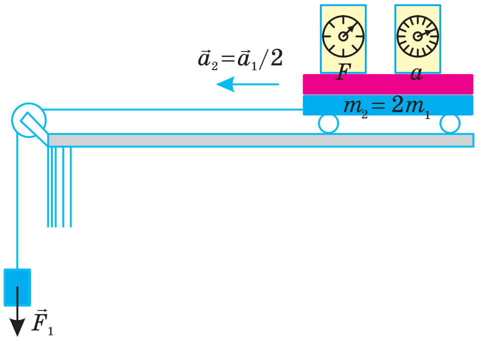
Мал. **88, *а*. Прискорений рух візка під дією одного тягарця**



Мал. **88, *б*. У скільки разів збільшується сила, у стільки само разів збільшується прискорення**

Якщо ми збільшуватимемо кількість тягарців і тим самим збільшуватимемо силу, то дослід показує: у скільки разів збільшується прикладена до візка сила, – у стільки само разів збільшується і прискорення візка $\vec{a} \sim \vec{F}$ при незмінній масі візка $m = \text{const}$.

Змінимо умови досліду. Залишимо прикладену силу $\vec{F}_1$ незмінною, а змінюватимемо масу візка. Якщо масу візка збільшити у 2 рази, то його прискорення зменшується удвічі (*мал. 88, в*). Збільшивши масу візка у 3 рази – прискорення зменшується утричі. Дослід показує, що у скільки разів збільшується маса візка, у стільки само разів зменшується його прискорення. Тобто прискорення обернено пропорційне до маси візка $a \sim 1/m$ при постійній силі $\vec{F} = \text{const}$.



Мал. **88, *в*. У скільки разів збільшується маса візка, у стільки само разів зменшується його прискорення**

Об'єднуючи результати дослідів, можна стверджувати, що $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$.

Другий закон Ньютона. Оскільки маса – величина скалярна, то напрям прискорення визначається напрямом діючої сили. Отримане співвідношення записують у векторній формі і другий закон Ньютона формулюють так:

В інерціальній системі відліку прискорення, якого набуває тіло під дією сили, прямо пропорційне силі, обернено пропорційне масі тіла і має той самий напрям, що й прикладена сила: $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$.

Якщо на тіло одночасно діє кілька сил, то результуюче прискорення визначається рівнодійною сил:

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{m}.$$

Якщо рівнодійна сил дорівнює нулю, то і прискорення дорівнює нулю. Що і підтверджується першим законом Ньютона: якщо дія прикладених до тіла сил скомпенсована, то воно зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху.

Для багатьох практичних завдань зручним для використання є запис другого закону Ньютона у такій математичній формі:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Із цієї формули встановлюють одиницю сили. За одиницю сили в СІ взято таку силу, яка тілу масою 1 кг надає прискорення 1 м/с^2. Таким чином, 1 Н можна визначити через основні одиниці СІ:

$$1\ \text{Н} = 1\ \text{кг} \cdot 1\ \text{м} / \text{с}^2 = 1\ \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Другий закон Ньютона, так само як і перший, виконується в інерціальних системах відліку.

Зазначимо, що математична форма запису другого закону Ньютона у вигляді $\vec{F} = m\vec{a}$ є дещо відмінною від тієї, як її записав сам Ньютон, але це не змінює суті закону. Другий закон Ньютона узагальнює винятково важливий факт:

> ***дія сил не спричиняє самого руху, а лише змінює його, адже сила викликає зміну швидкості, тобто прискорення, а не саму швидкість.***

Другий закон динаміки в іншій формі запису («ньютонівській») ми розглянемо у § 30.

Вимірювання маси тіла. Чим більша маса тіла, тим меншого прискорення набуває це тіло під час взаємодії з іншим тілом. Тому відношення модулів прискорень, що набуваються тілами під час взаємодії між собою, дорівнює величині, оберненій відношенню мас цих тіл, тобто $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$.

Звідси випливає, що $m_2 = m_1 \frac{a_1}{a_2}$. Остання формула вказує на спосіб вимірювання мас тіл. З неї видно, що для того, щоб визначити масу будь-якого тіла, насамперед необхідно вибрати тіло, масу якого m_e можна вважати одиницею маси. Таке тіло називають ***еталоном***. Тоді маса довільного тіла $m = m_e \frac{a_e}{a}$, де a_e – прискорення еталона; a – прискорення цього тіла.

За одиницю маси у 1899 р. було взято 1 кг (кілограм). Це – одна з основних одиниць СІ. Кілограм є масою еталона, що дорівнює масі міжнародного прототипу кілограма. Еталон – це відлите зі сплаву платини та іридію циліндричне тіло з твірною, що дорівнює його діаметрові – 39 мм. Він зберігається у місті Севр поблизу Парижа (Франція), у Міжнародному бюро мір і ваг. У всіх країнах є копії цього еталона, виготовлені з високою точністю. В Україні еталон кілограма зберігається в Інституті метрології (м. Харків).

Для звичайних розрахунків можна з достатньою точністю вважати, що масу 1 кг має 1 літр (тобто 1 дм^3) хімічно чистої води за температури +15 °С.

Установлення одиниці маси – кілограма – дало змогу впорядкувати виготовлення гир, тобто тіл з відомою масою, що використовуються для вимірювання маси інших тіл. Масу гир стали встановлювати, звіряючи їх з масою еталона. Маса будь-якої гирі дорівнює або масі еталона (тобто 1 кг), або становить кратну чи часткову величину від маси еталона.

Як ми бачимо, для вимірювання маси будь-якого тіла, крім маси еталона, треба знати відношення прискорень тіл, що взаємодіють, тобто величину a_e/a. Очевидно, для вимірювання маси тіла зовсім не обов'язково змушувати це тіло рухатися і зіштовхувати його з еталоном маси, визначаючи потім прискорення тіла й еталона. Є інший, зручніший спосіб визначення маси – зважування тіл на вагових терезах.

Нехай два тіла лежать на шальках рівноплечих терезів і кожне з них, притягуючись до Землі, прагне повернути коромисло терезів навколо осі обертання. Відомо, що прискорення вільного падіння тіл будь-якої маси однакове у будь-якому місці Землі. Тому $a_e = a$, тобто $a_e/a = 1$. Отже, якщо терези перебувають у рівновазі, маса тіла дорівнює масі еталона.

Дайте відповідь на запитання

1. Як пов'язані між собою такі фізичні величини, як прискорення, сила і маса тіла? Чи можна за формулою $\vec{F} = m\vec{a}$ стверджувати, що сила, яка діє на тіло, залежить від його маси і прискорення?
2. Який важливий висновок можна зробити з другого закону Ньютона?
3. Поясніть способи визначення маси тіла.

Приклад розв'язування задач

Нагадаємо, що під час поступального руху ***тіло можна вважати матеріальною точкою, маса якого зосереджена у центрі мас (центрі тяжіння)***.

У динаміці розглядають два типи задач, розв'язання яких ґрунтується на законах Ньютона для матеріальної точки.

Розв'язання задач першого типу можна розділити на такі етапи:

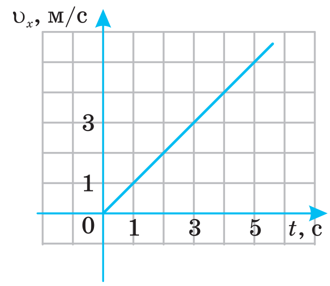
Знаючи силу F і масу тіла m, за другим законом Ньютона визначити прискорення, а потім, за формулами кінематики, – миттєву швидкість тіла.

Знаючи швидкість, визначити переміщення і координати тіла за формулами рівноприскореного руху.

Задачі другого типу розв'язують аналогічним чином, тільки у зворотній послідовності.

Задача. На *мал. 89* подано графік залежності проекції швидкості руху потяга, маса якого 300 т, від часу. Визначити силу, під дією якої він рухається, якщо сила опору 300 кН.

Дано:	***Розв'язання:***
Графік $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$; $m = 3 \cdot 10^5$ кг; $F_{\text{опр}} = 3 \cdot 10^5$ Н	Зробимо схематичний малюнок до задачі (*мал. 90*). Зверніть увагу, результуючу силу на малюнку не вказують.
F – ?	



Мал. 89. **Графік залежності проекції швидкості від часу**

Аналізуючи графік залежності проекції швидкості від часу, бачимо, що швидкість потяга змінилася від $\upsilon_0 = 0\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$ до $\upsilon = 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$ протягом $t = 5\,\text{с}$.

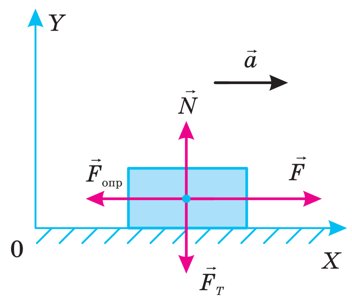
Таким чином, потяг рухається з прискоренням $a = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Другий закон Ньютона у векторній формі у цьому випадку має вигляд: $\vec{F}_T + \vec{N} + \vec{F}_{\text{опр}} + \vec{F} = m\vec{a}$.

У проекціях на вісь X: $F - F_{\text{опр}} = ma$, тоді $F = ma + F_{\text{опр}}$.

$$F = 3 \cdot 10^5\,\text{кг} \cdot 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} + 3 \cdot 10^5\,\text{Н} = 6 \cdot 10^5\,\text{Н}.$$

Відповідь: $F = 6 \cdot 10^5$ Н.



Мал. 90. **Сили, що діють на потяг**

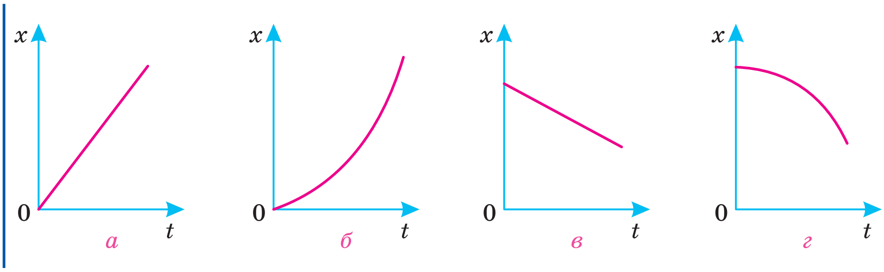
Вправа 13

1. Сила F була прикладена до санок масою m. Інша сила надала таку саму швидкість санкам, що й сила F, але на шляху, більшому в k разів. Яка з цих сил більша і наскільки?

2. Тіло зі стану спокою прискорює стала сила. Накресліть графік залежності швидкості руху тіла від пройденого шляху.

3. На *мал. 91* подано графіки руху тіла. Якою була прискорююча сила у кожному із випадків?

4. Дві металеві кульки – велика та мала – рухаються з однаковими швидкостями по склу (*мал. 92, вигляд згори*). Неподалік від траєкторії їх руху розта-

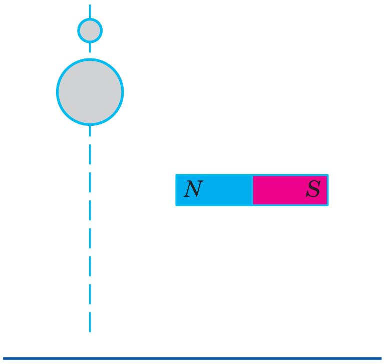


Мал. 91. **До задачі 3**

шовано магніт. Як будуть змінюватись траєкторії руху цих кульок поблизу магніту? Яка з кульок відхилиться сильніше і чому?

5. Автомобіль масою 4 т, рушаючи зі стану спокою, на відстані 240 м набуває швидкості 43,2 км/год. Визначити силу тяги двигунів автомобіля, якщо сила опору рухові дорівнює 2 кН.

6. Порівняти прискорення двох сталевих куль під час зіткнення, якщо радіус першої кулі у 2 рази більший від радіуса другої. Чи залежить відповідь задачі від початкових швидкостей куль?



Мал. 92. До задачі 4

7. Під час зіткнення двох візків, які рухаються по горизонтальній площині, проекція вектора швидкості на вісь X першого візка змінилася від 3 до 1 м/с, а проекція вектора швидкості другого візка на ту саму вісь змінилася від –1 до +1 м/с. Вісь X пов'язана із землею, розташована горизонтально, і її додатний напрям збігається з напрямом вектора початкової швидкості першого візка. Описати рухи візків до і після взаємодії. Порівняти маси візків.

8. Моторний човен рухається з прискоренням 2 м/с^2 під дією трьох сил: сили тяги двигуна F_1= 1 кН, сили вітру F_2=1 кН та сили опору води F_3= 414 Н. У якому напрямі рухається човен та яка його маса, якщо сила F_1 напрямлена на південь, сила F_2 – на захід, а сила F_3 – напрямлена проти руху човна.

§ 19 Третій закон Ньютона. Межі застосування законів Ньютона

- ✓ *Досліди, що допомагають пояснити третій закон Ньютона.*
- ✓ *Третій закон Ньютона.*
- ✓ *Межі застосування законів Ньютона.*

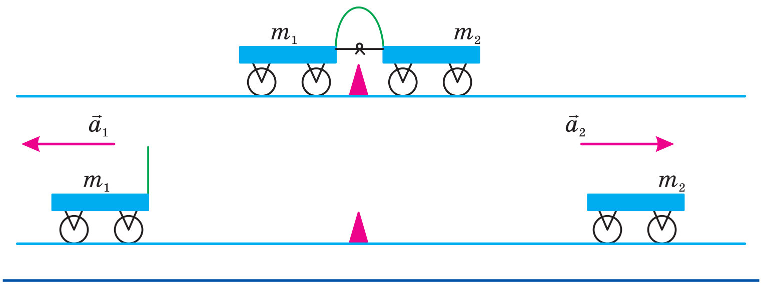
Ні перший, ні другий закони не пояснюють того, що відбувається з другим тілом, що взаємодіє. Про це йдеться у третьому законі Ньютона.

Досліди, що допомагають пояснити третій закон Ньютона. Два однакових за масою візки ($m_1 = m_2$) поставимо на горизонтальний стіл і до одного з них прикріпимо плоску пружину, що стиснена ниткою (*мал. 93, а*). Другий візок поставимо так, щоб він також торкався стисненої пружини.

Якщо тепер нитку, яка стискує пружину, перерізати, то пружина випрямиться, обидва візки почнуть рухатися. Це означає, що вони набули прискорень.

Оскільки маса візків однакова, то однакове й прискорення, і відстані, що вони проходять за певний час.

Коли на один із візків покласти який-небудь вантаж (збільшити його масу) і повторити дослід, то візок, що має більшу масу, пройде меншу відстань (*мал. 93, б*).

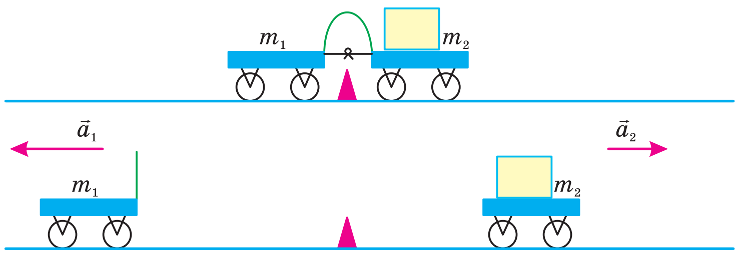


Мал. 93, а. Взаємодія однакових за масою візків

У разі взаємодії двох тіл відношення модулів їх прискорень дорівнює оберненому відношенню їх мас:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

або $m_1 a_1 = m_2 a_2$.



Мал. 93, б. Взаємодія візків різної маси

Прискорення тіл, що взаємодіють, мають протилежні напрями, тому у векторній формі можна записати:

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2 \text{ або } \vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Третій закон Ньютона. Отримана рівність і є математичним виразом третього закону Ньютона, який можна сформулювати так:

В інерціальній системі відліку сили, з якими тіла, що взаємодіють, діють одне на одне, направлені вздовж однієї прямої, рівні за модулем та протилежні за напрямом.

Цей закон відображає той факт, що у природі немає і не може бути односторонньої дії одного тіла на інше, а існує лише взаємодія.

Третій закон Ньютона формулюють, ще й так:

У дії завжди є протидія.

Сили дії та протидії завжди існують разом, парами.

Досліди показують, що сили будь-якої природи (гравітаційні, електромагнітні) під час взаємодії тіл виникають попарно, мають протилежні напрями, однакові за модулем. Природа обох сил під час взаємодії однакова.

Важливо наголосити, що сили взаємодії хоч і рівні та протилежно направлені, але не врівноважують одна одну, оскільки прикладені до різних тіл.

Наприклад, якщо два скейтбордисти стануть один навпроти одного і триматимуться за мотузку, то достатньо одному з них потягнути за неї, щоб обидва почали рухатися назустріч: тягнучи мотузку, перший скейтбордист діє на неї та на нерухомого товариша з силою $\vec{F}_1$. Згідно з третім законом Ньютона другий скейтбордист діє на мотузку і на першого скейтбордиста з силою $\vec{F}_2$, причому $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Під дією цих сил обидва скейтбордисти рухаються назустріч один одному.

Чи можна вважати, що третій закон Ньютона не виконується у випадках, коли під час взаємодії двох тіл помітно змінюється рух лише одного тіла? Розглянемо взаємодію легкоатлета із Землею. Під час старту спортсмен діє на Землю з силою $\vec{F}_1$, яка отримує прискорення $\vec{a}_1$. Згідно з третім законом Ньютона на спортсмена з боку Землі діє така сама сила $-\vec{F}_2$ у протилежному напрямі і надає йому прискорення – він починає рухатися з деякою швидкістю. Очевидно, що прискорення $\vec{a}_1$ досить мале (під дією легкоатлета масою 60 кг Земля отримує прискорення приблизно $5 \cdot 10^{-23}$ м/с^2). Розглядаючи таку взаємодію, потрібно врахувати, що маса Землі значно перевищує масу легкоатлета, тому й прискорення, якого набуває Земля, значно менше (відношення прискорень тіл обернено пропорційне їх масам). Отже, третій закон Ньютона виконується під час взаємодії тіл будь-якої маси. Щоправда, вияв його внаслідок набуття обома тілами, які беруть участь у взаємодії, прискорень спостерігається за умови, що тіла мають порівнювані маси.

Межі застосування законів Ньютона. Закони механіки Ньютона (її ще називають класичною механікою) встановлені для тіл, що нас оточують, тобто для тіл, що складаються з величезної кількості молекул і атомів ***(макроскопічних тіл***). Для руху частинок мікросвіту закони Ньютона можна застосовувати лише у деяких випадках.

Закони механіки Ньютона справедливі для тіл, які можна вважати ***матеріальними точками***, а також для ***поступального руху тіл***.

Закони механіки Ньютона встановлені для тіл, що рухаються порівняно з ***невеликими швидкостями***, які набагато менші за швидкість світла.

Рух, що відбувається зі швидкістю υ, набагато меншою від швидкості світла c у вакуумі ($\upsilon \ll c$, де $c = 3 \cdot 10^8$ м/с), називають ***нерелятивістським***.

Рух, що відбувається зі швидкістю, близькою до швидкості світла у вакуумі ($\upsilon \approx c$), називають ***релятивістським***.

У механіці Ньютона незмінними є час, маса тіла, прискорення і сила. Траєкторія, швидкість та переміщення різні у різних інерціальних системах відліку. Закони механіки, сформульовані Ньютоном, – незмінні в усіх інерціальних системах відліку.

Важливо ще раз наголосити, що сила згідно із законами Ньютона визначає прискорення тіла, а не швидкість. Це означає, що сила не є причиною руху. Сила – це причина зміни руху, тобто зміни швидкості руху тіла. Сам рух не потребує причини. Рухатись прямолінійно і рівномірно тіло може і без дії сили. Тому, наприклад, криволінійний рух, при якому швидкість змінюється за напрямом, без дії сили неможливий.

Напрям прискорення завжди збігається з напрямом сили. Швидкість може збігатися з напрямом сили (наприклад, при вільному падінні), може бути направлена протилежно (наприклад, при русі тіла, кинутого вертикально вгору), а може бути направлена і перпендикулярно до сили (наприклад, при русі по колу).

Закони Ньютона дають змогу ***розв'язати основну задачу механіки***: якщо відомі сили, прикладені до тіла, то можна визначити прискорення тіла у будь-який момент часу, у будь-якій точці траєкторії. І навпаки, якщо відомо положення тіла у будь-який момент часу, то закони Ньютона дають змогу з'ясувати, які сили діють на тіло.

Крім надання тілам прискорення в прямолінійному поступальному русі, прискорення вільного падіння під час рухів під дією сили тяжіння, доцентрового прискорення під час руху тіл по колу сила має також обертальну дію. Ще одним поняттям, що характеризує дію сили, є імпульс сили. З ним, а також із введеним Ньютоном поняттям імпульс тіла (або кількість руху) ми ознайомимось згодом. А наступні параграфи будуть присвячені силам, які характеризують механічну взаємодію, та особливостям руху під дією цих сил.

Дайте відповідь на запитання

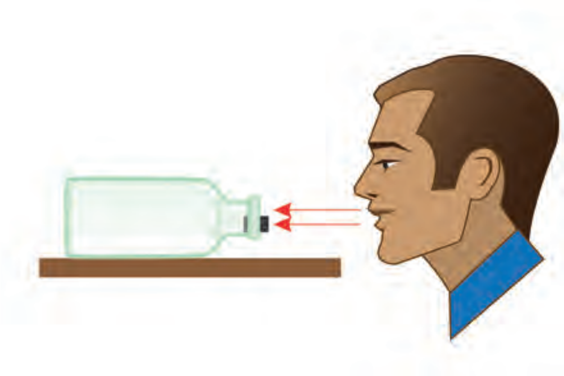
1. Чи є відмінність між дією і протидією?
2. Чи зрівноважують одна одну сили, що виникають внаслідок взаємодії тіл?
3. Наведіть приклади, що підтверджують третій закон Ньютона.
4. Чим обумовлені межі застосування законів Ньютона?

Вправа 14

1. Застосовуючи другий та третій закони Ньютона, пояснити, чому кінь везе воза, а не навпаки.

2. Два хлопчики, маси яких 40 і 50 кг, стоять на ковзанах на льоду. Перший хлопчик відштовхується від другого з силою 10 Н. Яке прискорення дістають хлопчики?

3. Покладіть порожню пляшку на стіл (*мал. 94*). З краю пляшки розмістіть невеликий шматок пробки. Спробуйте задути пробку всередину пляшки. Поясніть, чому пробка полетить не всередину, а навпаки – від пляшки.



Мал. 94. До задачі 3

4. Візьміть два шматки пластиліну. Вдарте одним шматком по іншому. Поясніть, чому шматки пластиліну при цьому злипаються.

§ 20 Закон всесвітнього тяжіння. Гравітаційна взаємодія

- *Закон всесвітнього тяжіння.*
- *Гравітаційне поле.*
- *Гравітаційна сила та сила земного тяжіння.*

Закон всесвітнього тяжіння. Аналізуючи закони Кеплера (закони руху планет) і закони вільного падіння тіл на Землі, Ньютон дійшов висновку, що сили притягання мають існувати не лише на Землі, а й у космосі, що притягання тіл є властивістю матерії.

На жаль, Ньютон не залишив письмових підтверджень того, яким чином він встановив закон всесвітнього тяжіння. Відомо лише (зі слів самого Ньютона), що важливу роль у цьому відіграли факт падіння яблука та рух Місяця навколо Землі.

В арсеналі Ньютона були такі факти: 1) усі тіла падають на землю; 2) прискорення, з яким тіла падають на землю, однакове для всіх тіл; 3) Місяць обертається навколо Землі майже по коловій орбіті з періодом обертання 27,3 доби; 4) радіус орбіти Місяця приблизно дорівнює 60 радіусам Землі.

Аналізуючи ці факти, Ньютон застосував сформульовані ним закони динаміки до руху Місяця навколо Землі і у 1667 р. встановив закон всесвітнього тяжіння.

Спробуємо і ми.

1. Тіла падають на Землю внаслідок того, що вона притягує їх до себе.

2. Оскільки всі тіла падають на Землю з однаковим прискоренням, то за другим законом динаміки сила притягання пропорційна масі тіла: $F \sim m$ або $F = gm$.

3. Оскільки Місяць обертається навколо Землі по коловій орбіті, то на нього має діяти сила, що надає доцентрового прискорення. Якби такої сили не було, то Місяць, за першим законом динаміки, рухався би прямолінійно і рівномірно. Отже, Місяць притягується до Землі, як і всі інші тіла, і сила, з якою він притягується до Землі, пропорційна масі Місяця: $F_М \sim m_М$.

4. За третім законом динаміки з боку Місяця діє сила притягання Землі до Місяця, пропорційна масі Землі: $F_З \sim m_З$. Оскільки $F_М = F_З$, то $F_М \sim m_З$.

5. Доцентрове прискорення, з яким Місяць обертається навколо Землі, обчислюється так:

$$a = \frac{\upsilon^2}{R},$$

де υ – лінійна швидкість руху Місяця по орбіті; R – радіус орбіти.

Лінійна швидкість руху Місяця по орбіті:

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T},$$

де T – період обертання Місяця.

Тоді $a = \frac{4\pi^2 R}{T}$. Підставляючи числові значення, отримуємо:

$$a = \frac{4 \cdot 9{,}86 \cdot 64 \cdot 10^5 \text{ м}}{(27{,}3 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ с})^2} = \frac{9{,}8 \text{ м}}{3600 \text{ с}^2} \text{ або } a = \frac{1}{3600} g.$$

Це означає, що будучи на орбіті, Місяць притягається у 3600 разів слабше до Землі, ніж аби він знаходився на її поверхні.

6. Оскільки відношення квадрата радіуса орбіти Місяця до квадрата радіуса Землі також становить 3600: $\frac{R^2}{R_З^2} = \frac{(60R_З)^2}{R_З^2} = 3600$, то це означає, що сила притягання Місяця до Землі обернено пропорційна квадрату відстані між ними: $F_М \sim \frac{1}{R^2}$.

7. Таким чином, враховуючи отримані висновки, що: $F_М \sim m_М$, $F_М \sim m_З$, $F_М \sim \frac{1}{R^2}$, можна стверджувати, що $F_М \sim \frac{m_М m_З}{R^2}$.

Переходячи до рівності, записаної у загальному випадку, закон всесвітнього тяжіння формулюється так:

Будь-які дві матеріальні точки притягуються одна до одної із силою, прямо пропорційною добутку їх мас і обернено пропорційною квадрату відстані між ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

де m_1 і m_2 – маси матеріальних точок; r – відстань між ними; G – гравітаційна стала.

Цей закон є основою ***класичної нерелятивістської теорії гравітації.***

Закон всесвітнього тяжіння ***виконується***:

• для точкових тіл, коли їх лінійні розміри набагато менші від відстані між ними (матеріальних точок);

• для однорідних куль, наприклад, система «Земля–Місяць», або однорідна куля і точкове тіло, наприклад, обертання штучного супутника навколо Землі.

Для визначення сили притягання між протяжними тілами, необхідно спершу умовно розбити тіла на елементарні частини, які можна вважати матеріальними точками, визначити сили взаємодії між цими точками і пододавати їх. Ця операція громіздка і вимагає знань з інтегрального та диференціального числення.

Гравітаційну сталу визначено експериментальним шляхом. Уперше це зробив англійський учений Г. Кавендіш за допомогою крутильного динамометра (крутильних терезів).

У СІ гравітаційна стала має значення $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2 /кг^2.

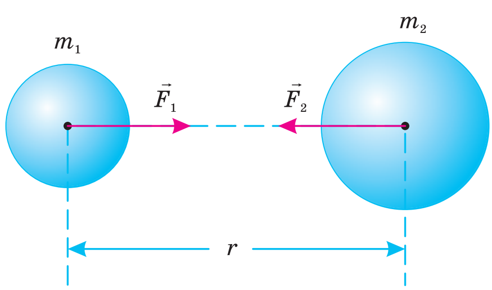
Отже, два тіла масою 1 кг кожне, центри яких знаходяться на відстані 1 м один від одного, взаємно притягуються гравітаційною силою, що дорівнює $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н.

Гравітаційне поле. Як ми з'ясували, однією з механічних властивостей матеріальних тіл є властивість взаємного притягання. Але як відбувається взаємне притягання тіл, або, як кажуть, гравітаційна взаємодія?

Гравітаційна взаємодія між тілами не залежить від середовища, в якому перебувають тіла, а здійснюється через ***гравітаційне поле*** (поле тяжіння).

Кожне тіло є джерелом гравітаційного поля. Чим більша маса тіла, тим сильніше його гравітаційне поле. Гравітаційне поле неоднорідне – воно сильніше біля поверхні тіла і слабшає, коли від нього віддалятися.

Гравітаційне поле, на відміну від електричного, яке існує тільки навколо електрично заряджених тіл, чи магнітного, яке існує навколо рухомих електричнозаряджених тіл, існує навколо всіх без винятку тіл.



Мал. 95. Гравітаційна взаємодія

У кожній точці гравітаційного поля на вміщене туди тіло діє сила притягання, пропорційна масі цього тіла.

Дві гравітаційні сили взаємодії, які діють на кожне із тіл, що взаємодіють, однакові за величиною і протилежні за напрямом цілком відповідно до третього закону Ньютона (*мал. 95*). Вони напрямлені вздовж прямої, яка з'єднує центри мас тіл, тому їх називають ***центральними силами***.

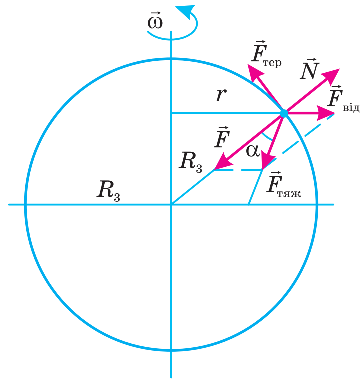
Гравітаційна сила та сила земного тяжіння. Навколо Землі існує її гравітаційне поле, яке називають ***полем тяжіння Землі***.

Визначимо гравітаційну силу, що діє на тіло з боку Землі, згідно з законом всесвітнього тяжіння. Позначимо масу Землі через $M_з$, а масу тіла – через m. Якщо тіло розташоване на поверхні Землі або близько біля її поверхні, то відстань r дорівнює радіусу Землі $R_з$.

Гравітаційна сила $F = G\dfrac{M_з m}{R_з^2}$, прикладена до центра маси тіла і спрямована по радіусу до центра маси Землі.

Унаслідок добового обертання Землі всі тіла на її поверхні беруть участь у цьому русі. Для неземного спостерігача, що перебуває в інерціальній системі відліку, тіло на поверхні Землі обертається разом з нею і має прискорення $\omega^2 r$, яке надає йому ***відцентрова сила інерції*** (детальніше особливості відцентрової сили інерції ми з'ясуємо, коли вивчатимемо рух у неінерціальних система відліку § 29).

Отже, на тіло діють сили: сила гравітації $\vec{F}$, відцентрова сила інерції $\vec{F}_{від}$, сила тертя спокою $\vec{F}_{тер}$ та сила реакції опори $\vec{N}$ (*мал. 96*). Рівнодійна сил гравітації та відцентрової сили інерції називається ***силою тяжіння*** $\vec{F}_{тяж}$. Вектор сили тяжіння напрямлений вздовж виска (напрям виска можна визначити, якщо тіло підвішене на нитці, то вектор сили тяжіння напрямлений вздовж нитки).



***Мал.* 96. Сили, що діють на тіло, яке обертається разом із Землею навколо осі**

Отже, ***сила тяжіння*** – це рівнодійна сили гравітації та відцентрової сили інерції, що спрямована вздовж виска.

Оскільки значення відцентрової сили інерції $F_{від} = m\omega^2 r$ залежить від радіуса обертання r, то і сила тяжіння залежить від географічної широти: максимальне значення сила тяжіння має на полюсах Землі, оскільки там $r = 0$ і дорівнює силі притягання; мінімальне значення сили тяжіння на екваторі.

Враховуючи те, що кутова швидкість обертання Землі ω мала, і $F_{від} \ll F$, то у більшості випадків вважають, що сила тяжіння дорівнює силі гравітації і за значенням, і за напрямом: $\vec{F}_{тяж} = \vec{F}$. Ми також надалі вважатимемо ці сили рівними і розглядатимемо рух тіл у полі тяжіння Землі як результат дії сили тяжіння.

Отже, ***сила тяжіння,*** прикладена до тіла (його центра тяжіння), спрямована вертикально вниз (уздовж виска), перпендикулярно до горизонтальної поверхні і визначається за формулою:

$$\vec{F}_{тяж} = m\vec{g}.$$

Прискорення, яке набуває тіло під дією сили тяжіння, і є ***прискоренням вільного падіння***: $g = \dfrac{F}{m} = G\dfrac{M_з}{R_з^2}$.

Оскільки земна куля дещо сплюснута: її полярний радіус менший від екваторіального приблизно на 21,5 км, то і значення прискорення вільного падіння відрізняється на полюсах та екваторі: так, на полюсі $g = 9{,}83\,\text{м/с}^2$, а на екваторі $g = 9{,}78\,\text{м/с}^2$. Однак ця залежність менш суттєва порівняно з ***добовим обертанням Землі***. Обертання Землі веде до появи відцентрової сили, спрямованої перпендикулярно осі обертання (не поверхні!) (*мал. 96*). Тобто в середніх широтах відцентрова сила менша за величиною (оскільки відстань до осі обертання менша) і спрямована під кутом до обрію, а на екваторі вона досягає найбільшої величини, що і призводить до зменшення g на екваторі.

Розрахунки показують, що через сплюснутість Землі значення прискорення вільного падіння на екваторі менше за його значення на полюсі на $0{,}18\ \%$, а через добове обертання – на $0{,}34\ \%$.

Як відомо, сила гравітації залежить і від відстані. Якщо тіло підняти на висоту h над поверхнею Землі, то $F = G\dfrac{M_з m}{(R_з + h)^2}$, то і прискорення вільного падіння змінюється з висотою: $g = \dfrac{GM_з}{(R_з + h)^2}$.

На *мал. 97* показано залежність значення прискорення вільного падіння від відстані, вираженої у земних радіусах. З малюнка та з формули видно, що при відстані $h = 4R_з$ у 25 разів зменшується g.

Якщо рух у полі тяжіння Землі відбувається на висоті у декілька сот метрів, то значення g можна вважати постійним.

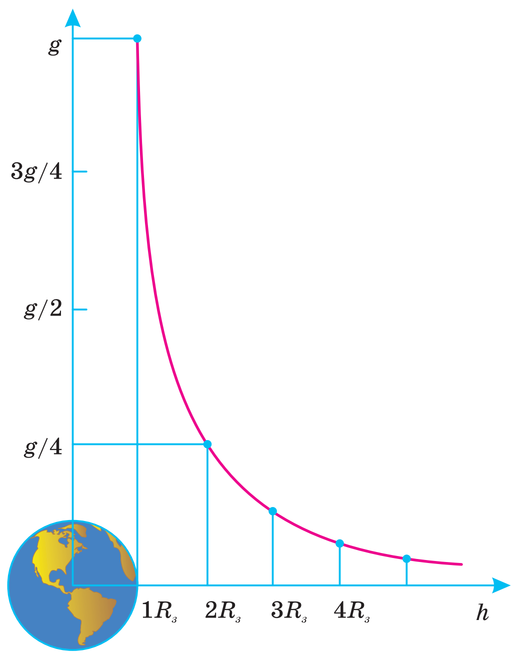
Таким чином, на значення прискорення вільного падіння впливають:

1) обертання Землі навколо власної осі (добове обертання);

2) деформація Землі;

3) відстань від поверхні Землі.

Значення прискорення вільного падіння також залежить від родовищ, що містяться в надрах Землі: більше його значення на довільній широті, там, де містяться родовища залізної та інших важких руд, менше – над родовищами газу.



***Мал.* 97. Залежність значення прискорення вільного падіння від відстані над поверхнею Землі**

Дайте відповіді на запитання

1. Як формулюють закон всесвітнього тяжіння? Який фізичний зміст гравітаційної сталої?

2. Який вид взаємодії тіл описується законом всесвітнього тяжіння? Як відбувається ця взаємодія?

3. Що таке сила тяжіння? За якою формулою визначають модуль сили тяжіння? Куди прикладена і як напрямлена сила тяжіння, що діє на довільне тіло?

4. Від чого залежить прискорення вільного падіння? Чи залежить прискорення вільного падіння тіл від їх маси?

Приклади розв'язування задач

Задача. Обчислити масу Землі, якщо відомо, що її радіус дорівнює $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м.

Дано:
$R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м;
$g = 9{,}81$ м/с^2;
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$

$M_з$ – ?

Розв'язання:

Усі тіла притягуються до Землі з силою $F = G\dfrac{mM_з}{R_з^2}$ і набувають прискорення $F = mg$, тому, прирівнюючи ці формули, отримуємо:

$$mg = G\frac{mM_з}{R_з^2} \text{ або } g = G\frac{M_з}{R_з^2}, \text{ звідки } M_з = \frac{gR_з^2}{G}.$$

Обчислення: $M_з = \dfrac{9{,}81 \text{м/с}^2 \cdot 6{,}37^2 \cdot 10^{12} \text{м}^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2} \approx 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг.

Відповідь: $M_з \approx 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг.

Вправа 15

1. Яке прискорення вільного падіння на висоті, що дорівнює половині радіуса Землі?

2. Радіус планети Марс становить 0,53 радіуса Землі, а маса – 0,11 маси Землі. Визначити прискорення вільного падіння на Марсі.

3. Середня відстань між центрами Землі і Місяця дорівнює 60 земним радіусам, а маса Місяця у 81 раз менша від маси Землі. У якій точці на прямій, що з'єднує їх центри, тіло притягуватиметься до Землі і до Місяця з однаковими силами?

4. Середня густина Венери $\rho = 4900$ кг/м^3, а радіус планети $R = 6200$ км. Визначити прискорення вільного падіння на поверхню Венери.

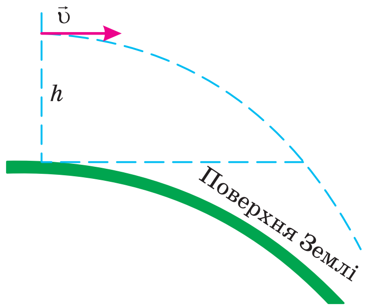
5. Знаючи радіус Землі та прискорення вільного падіння, визначте середню густину Землі. Порівняти отримане значення з густиною поверхневих шарів Землі ($2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3), зробити висновок про густину надр планети.

6. На якій висоті над поверхнею Землі сила тяжіння зменшується на 10 %? Радіус Землі $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м.

§ 21 Рух штучних супутників Землі. Перша та друга космічна швидкість

✓ *Перша і друга космічна швидкість.*
✓ *Штучні супутники Землі.*

Перша і друга космічна швидкість. У § 13 ми розглядали рух тіла, якому на висоті h над Землею надано початкової швидкості у горизонтальному напрямі. Тіло рухається по гілці параболи і падає на землю. При цьому ми вважали поверхню землі плоскою. Таке спрощення допустиме при невеликих швидкостях, коли дальність польоту незначна.



Мал. 98. **Віддалення поверхні Землі**

Насправді Земля – це майже куля. Тому одночасно з польотом тіла вздовж його траєкторії поверхня Землі дещо віддаляється від тіла (*мал. 98*).

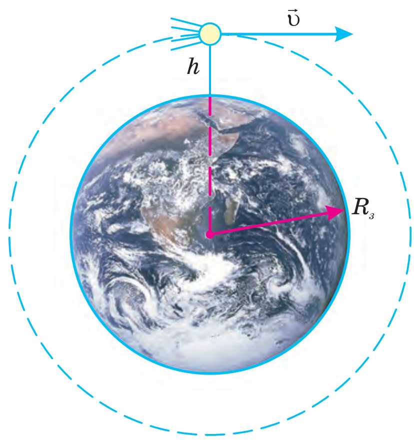
Можна визначити таке значення швидкості тіла, при якому поверхня Землі, внаслідок кривизни, віддалятиметься від тіла на стільки, на скільки тіло наближатиметься до неї внаслідок притягання. Тоді тіло рухатиметься на постійній висоті h над поверхнею Землі, тобто по колу радіусом $R_з + h$, перетворившись на ***штучний супутник Землі*** (ШСЗ) (*мал. 99*).

Оскільки тіло рухається рівномірно по колу радіусом $R_з + h$, то його доцентрове прискорення $a = \dfrac{\upsilon^2}{R_з + h}$.

Це прискорення тілу надає сила притягання до Землі, її модуль:

$$F = G\frac{M_з m}{(R_з + h)^2},$$

де $M_з$ – маса Землі; m – маса тіла.



Мал. 99. **Рух штучного супутника Землі**

За другим законом Ньютона $a = \frac{F}{m}$, а отже, $\frac{\upsilon^2}{R_з + h} = G\frac{M_з}{(R_з + h)^2}$, звідки $\upsilon = \sqrt{\frac{GM_з}{R_з + h}}$.

Тож, якщо надати тілу довільної маси на висоті h над Землею швидкості, що визначається цією формулою, то воно стане штучним супутником Землі.

Швидкість, яку потрібно надати тілу для того, щоб воно стало штучним супутником Землі, називають ***першою космічною швидкістю***.

Перша – тому, що існують друга і третя космічні швидкості.

Обчислимо першу космічну швидкість для ШСЗ, який запускається майже з поверхні Землі ($h \approx 0$). У такому випадку $\upsilon_1 = \sqrt{G\frac{M_з}{R_з}}$, і оскільки $g = G\frac{M_з}{R_з^2}$, то $\upsilon_1 = \sqrt{gR_з}$.

Підставивши у формулу значення $g = 9{,}81\ м/с^2$ і $R_з = 6{,}4 \cdot 10^6\ м$, отримуємо $\upsilon_1 = \sqrt{9{,}81\ м/с^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ м} \approx 7{,}9\ км/с$.

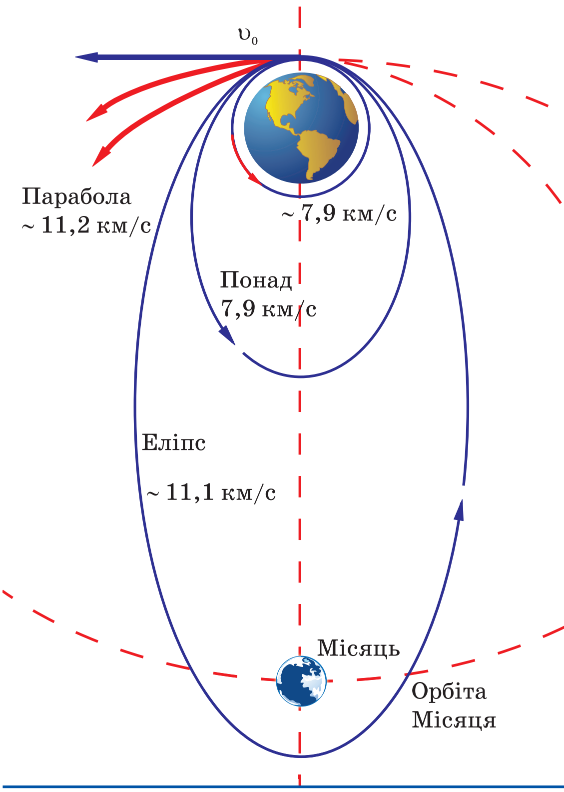
Таким чином, тіло, якому надається швидкість ≈ 7,9 км/с, яка напрямлена горизонтально відносно поверхні Землі, стає штучним супутником, що рухається по коловій орбіті.

Швидкість, яку потрібно надати тілу, щоб воно, подолавши притягання планети, стало супутником Сонця, називають ***другою космічною швидкістю***.

Для Землі друга космічна швидкість $\upsilon_2 = \sqrt{2gR_З} = \sqrt{2}\upsilon_1$; υ_2 = 11,2 км/с. Якщо значення швидкості більше 7,9 км/с, але менше 11,2 км/с, орбіта супутника Землі є еліптичною. Розвинувши швидкість 11,2 км/с, тіло почне рухатися по параболі і більше не повернеться до Землі (*мал. 100*).

Штучні супутники Землі. ШСЗ виводяться на орбіти за допомогою багатоступеневих ракет-носіїв (*мал. 101*), які піднімають їх на відповідну висоту над поверхнею Землі і розганяють до швидкості, що дорівнює, або такої, що перевищує (але не більше ніж у 1,4 раза) першу космічну швидкість. Цей шлях, який називається траєкторією виведення ШСЗ на орбіту, становить зазвичай від декількох сотень до двох-трьох тисяч кілометрів. Ракета стартує, рухаючись вертикально вгору, розвертається приблизно горизонтально і розганяється до так званої розрахункової швидкості. Космічний апарат, що є метою запуску, несе остання ступінь ракети; він автоматично відділяється від неї і починає свій рух по певній орбіті відносно Землі, стаючи штучним небесним тілом.

Нині у навколоземному просторі перебувають сотні штучних супутників, які є складними апаратами, що виконують різноманітні функції: ретранслюють телевізійні програми, охоплюючи значні за площею райони Землі; забез-



Мал. 100. Траєкторії руху штучних супутників Землі

Мал. 101. Запуск української ракети-носія типу «Дніпро»

печують всесвітній телефонний і комп'ютерний зв'язок, використовуються як маяки для морських і повітряних суден, точно визначаючи їх координати; здійснюють наукові програми дослідження Землі; використовуються у системі національної безпеки великих держав. Є навіть супутники для підтримання аматорського радіозв'язку.

Дайте відповіді на запитання

1. Як має бути напрямлена швидкість тіла у момент його виходу на колову орбіту, щоб воно стало штучним супутником Землі?
2. Як спрямоване прискорення штучного супутника Землі? Чи можна вважати рух штучного супутника Землі рівноприскореним?
3. Що таке перша космічна швидкість? Чому дорівнює перша космічна швидкість для Землі?
4. Що таке друга космічна швидкість? Чому дорівнює друга космічна швидкість для Землі?

Приклад розв'язування задач

У задачах на рух супутників навколо небесних тіл, планет, навколо Сонця тощо на небесні тіла і супутники діє лише сила притягання, яка і надає тілам доцентрового прискорення. Тому другий закон Ньютона для таких випадків матиме вигляд:

$$ma = G\frac{Mm}{r^2},$$

де m – маса тіла, що є супутником тіла масою M; a – доцентрове прискорення супутника r – відстань між тілами.

Задача. Визначити масу Місяця, якщо відомо, що його штучний супутник обертається майже по коловій орбіті, радіус якої 1890 км, і має період обертання 2 год 3 хв 30 с.

Дано:
$R = 1890 \cdot 10^3$ м;
$T = 7410$ с;
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м²/кг²

M – ?

Розв'язання:

За другим законом Ньютона сила всесвітнього тяжіння $F = G\frac{Mm}{R^2}$ надає штучному супутнику Місяця доцентрового прискорення $a = \frac{F}{m}$, тому $a = \frac{GM}{R^2}$.

З іншого боку, доцентрове прискорення можна визначити за формулами кінематики:

$$a = \frac{\upsilon^2}{R},$$

де υ – лінійна швидкість руху супутника. Прирівнюючи $\frac{GM}{R^2} = \frac{\upsilon^2}{R}$, звідти отримаємо $M = \frac{\upsilon^2 R}{G}$.

Лінійна швидкість руху супутника визначається відношенням довжини колової орбіти до інтервалу часу на проходження одного оберту:

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T}. \text{ Тоді } M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}.$$

$$M = \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \left(1890 \cdot 10^3\right)^3 \text{м}^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2 7410^2 \cdot \text{с}^2} \approx 7{,}35 \cdot 10^{22} \text{кг}.$$

Відповідь: $M \approx 7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг.

Вправа 16

1. Обчислити першу космічну швидкість для Місяця, якщо радіус Місяця становить 1700 км, а прискорення вільного падіння тіл на Місяці дорівнює 1,6 м/с^2.

2. Місяць рухається навколо Землі зі швидкістю близько 1 км/с. Відстань від Землі до Місяця дорівнює $3{,}8 \cdot 10^5$ км. Визначити масу Землі.

3. Яку швидкість повинен мати штучний супутник, щоб обертатись по коловій орбіті на висоті 600 км над поверхнею Землі? Який буде період його обертання? Радіус Землі становить 6400 км.

4. Довести, що період обертання штучного супутника по коловій орбіті визначається за формулою $T = 2\pi r\sqrt{\dfrac{r}{GM}}$ (де M – маса планети; r – відстань супутника від її центра).

5. У скільки разів період обертання супутника, який рухається на відстані 21 600 км від поверхні Землі, більший, ніж у супутника, що рухається на висоті 600 км від поверхні Землі?

6. Середня відстань від супутника до поверхні Землі становить 1700 км. Визначити його лінійну швидкість і період обертання.

7. Супутник рухається навколо деякої планети коловою орбітою, радіус якої $4{,}7 \cdot 10^9$ м зі швидкістю 10^4 м/с. Яка середня густина планети, якщо її радіус $1{,}5 \cdot 10^8$ м?

8. На яку висоту над поверхнею Землі слід запустити супутник, щоб він залишався нерухомим відносно неї?

§ 22 Сила пружності. Закон Гука

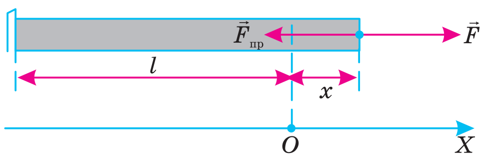
- ✓ *Природа сил пружності.*
- ✓ *Пружні деформації. Закон Гука.*
- ✓ *Механічні властивості матеріалів.*
- ✓ *Сили реакції опори.*

Природа сил пружності. Як відомо, взаємодія тіл може зумовлювати не тільки зміну їх швидкостей (динамічну дію), а й деформації (статичну дію).

> ***Деформація*** – зміна форми чи розмірів тіла (або частин тіла) під дією зовнішніх механічних сил та інших впливів, які зумовлюють зміну відносного розміщення частинок тіла.

Унаслідок деформації змінюються міжатомні відстані і відбувається перегрупування блоків атомів.

Наприклад, один кінець стержня довжиною l закріпимо, а до другого кінця прикладатимемо зовнішню силу $\vec{F}$ (*мал. 102*).



Мал. 102. Зовнішня сила *зумовлює* деформацію, а *деформація зумовлює* силу пружності, яка направлена протилежно до зовнішньої сили

Під дією цієї сили частинки стержня набувають прискорення, починають рухатись і зміщуються відносно їх початкового положення. При цьому на кожну з них почнуть діяти сили з боку сусідніх частинок, які намагаються повернути частинки в попереднє положення. У свою чергу частинки, що змістилися, діють на ще не зміщені частинки, надаючи їм прискорення, унаслідок чого зміщуються і вони. Стержень деформується, його довжина збільшується на x і в ньому виникають сили пружності $\vec{F}_{пр}$. Якби стержень не був закріплений, то почав би рухатися (будучи деформованим) з прискоренням, яке залежить від його маси. Оскільки стержень закріплено, то його деформація продовжується доти, доки сила пружності $\vec{F}_{пр}$ не стане рівною за модулем зовнішній силі $\vec{F}$.

Сили пружності **– сили, що виникають при деформаціях тіл і напрямлені у бік, протилежний зміщенню частинок, мають електромагнітну природу (оскільки зумовлені зміною відстаней між атомами, йонами, молекулами).**

Сили взаємодії між молекулами та атомами мають таку особливість: зі збільшенням відстані між ними вони є силами притягання, а зі зменшенням – силами відштовхування. Цим і зумовлений напрям сил пружності.

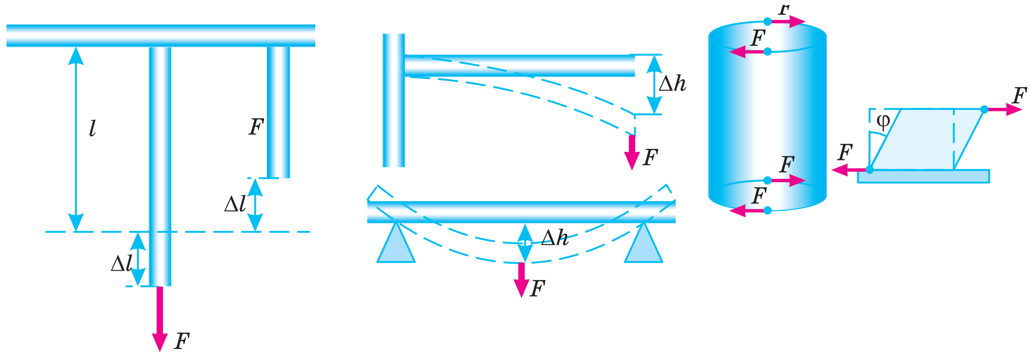
Сили пружності найпоширеніші і виникають у разі дотикання всіх тіл між собою, коли їх молекули наближаються на відстань $10^{-9} - 10^{-10}$ м, щоб могли взаємодіяти їх електронні оболонки.

Тіл, які б не деформувалися, у природі не існує. Водночас часто доводиться мати справу з такими малими деформаціями, що їх важко виявити. Наприклад, якщо наступити на цеглину, то її висота зменшиться приблизно на 0,000 05 см. За такої деформації сусідні атоми наближаються один до одного приблизно на $2 \cdot 10^{-14}$ см.

Розглядаючи більшість задач, ми нехтували деформаціями і силами пружності, які виникали під час взаємодії тіл. Тепер дослідимо властивості сил пружності у тілах, які зазнають значних деформацій під час дії на них зовнішніх сил (пружини, гумові джгути тощо).

Пружні деформації. Закон Гука. Серед деформацій, які виникають у твердих тілах, можна виокремити п'ять основних видів: ***розтяг, стискання, зсув, скручування*** і ***згинання***. На *мал. 103* показано різні види деформації тіл.

Ми надалі розглядатимемо деформації розтягу (стискання).



Мал. 103. Види деформації:
а **– розтяг і стискання;** ***б*** **– згинання;** ***в*** **– скручування;** ***г*** **– зсув**

Деформації поділяють також на ***пружні***, які зникають після припинення дії зовнішніх сил (оскільки молекули тіла повертаються у початкове положення), і ***пластичні***, коли відновлення форми тіла не відбувається.

Для ***пружних деформацій*** англійський учений Р. Гук у 1660 р. експериментально встановив закон, який названо його ім'ям.

На *мал. 104* подано результати досліду щодо вивчення залежності видовження пружини від величини прикладеної сили.

Коли до пружини підвісити один тягарець, то внаслідок дії земного тяжіння він рухається вниз і розтягує пружину доти, доки сила тяжіння не врівноважиться силою пружності, що виникає у пружині. Збільшуючи кількість тягарців, спостерігаємо, що у скільки разів збільшується прикладена сила, у стільки само разів збільшується і видовження пружини.

Отже, чим більша сила прикладена до тіла, тим більше воно деформується. Разом із тим, чим більша деформація, тим більша сила пружності виникає в тілі, тобто, сила пружності пропорційна деформації.

Закон Гука: сила пружності, яка виникає під час пружної деформації тіла, прямо пропорційна видовженню тіла і напрямлена у бік, протилежний до напряму переміщень частинок тіла під час деформації:

$$F_{\text{пр}\,x} = -kx,$$

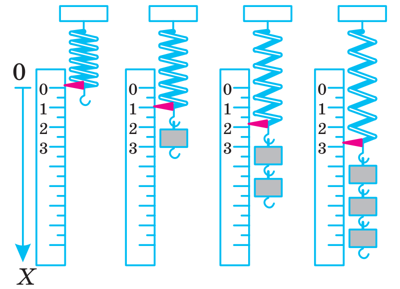
де k – коефіцієнт пружності, або жорсткість, його значення залежить від розмірів та матеріалу тіла, вимірюється в ньютонах на метр $[k] = 1$ Н/м; x – абсолютна деформація (лінійне видовження чи стиснення тіла).

Знак «–» показує, що напрям сили пружності протилежний напряму зміщення краю деформованого тіла.

Жорсткість – здатність тіла або конструкції протидіяти виникненню деформацій при заданому типі навантаження: чим більша жорсткість, тим менша деформація.

Під жорсткістю розуміють також коефіцієнт пропорційності k у формулі закону Гука.

Явище пружної деформації використовують у приладах для вимірювання сили – динамометрах (або силомірах). Конструкції динамометрів найрізноманітніші, але принцип їх роботи однаковий: у них використано властивість тіл подовжуватися, згинатися чи стискуватися при пружній деформації прямо пропорційно до величини прикладеної сили.



Мал. 104. Залежність сил пружності від деформації

Головною відмінністю сил пружності від усіх інших сил є те, що вони залежать лише від деформацій і не залежать від тіла, до якого прикладені.

Механічні властивості матеріалів. Механічні властивості матеріалів – це здатність матеріалів протистояти деформуванню і руйнуванню, пружно й пластично деформуватися під дією зовнішніх механічних сил.

Фізичною величиною, що характеризує дію внутрішніх сил, які виникають у деформованому тілі, є ***механічна напруга*** σ, яка визначається відношенням модуля сили пружності $F_{пр}$ до площі поперечного перерізу S тіла:

$$\sigma = F_{пр}/S.$$

Вимірюється в ньютонах на метр у квадраті або паскалях $[\sigma] = 1\ Н/м^2 = 1\ Па$.

Величина, яка характеризує здатність матеріалів протидіяти деформації одностороннього розтягу (стискання), називається ***модуль Юнга*** (***модуль пружності***) (E) і дорівнює відношенню механічної напруги до відносного видовження, спричиненого цією напругою у напрямі її дії:

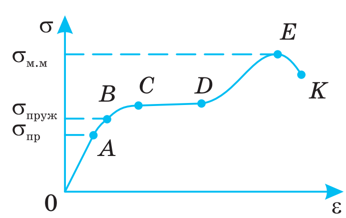
$$E = \sigma/|\varepsilon|.$$

Відносне видовження визначається:

$$|\varepsilon| = \frac{|\Delta l|}{l_0} = \frac{|l - l_0|}{l_0},$$

де l_0 – початкова довжина стержня; l – довжина деформованого стержня.

На *мал. 105* показано залежність механічної напруги від відносного видовження при розтягуванні.



Мал. 105. Діаграма розтягу

Ділянка *OA* – деформація пружна – тіло повністю відновлює свої розміри після зняття зовнішнього навантаження. $\sigma_{пр}$ – межа пропорційності, де виконується закон Гука.

> Закон Гука для деформації розтягу: в межах пропорційності механічна напруга прямо пропорційна відносному видовженню: $\sigma = E|\varepsilon|$.

Ділянка АВ. Закон Гука не виконується, але деформація пружна. Максимальна напруга, за якої ще не виникає помітна залишкова деформація, називається ***межею пружності*** $\sigma_{пруж}$.

Якщо продовжувати розтягувати тіло, то виникає ***залишкова деформація*** **(*ділянка ВС*)** – деформація, в результаті якої тіло залишається деформованим після припинення дії зовнішньої сили. Таку деформацію ще називають ***пластичною.***

Потім видовження тіла відбувається майже без зміни напруги в ньому, тому кажуть, що «матеріал тече». ***Ділянка CD*** – текучість матеріалу.

Зі збільшенням деформації крива напруг починає трохи підніматися і досягає максимуму в точці *E*. Потім напруга швидко спадає і тіло руйнується (точка *K*). Отже, розрив настає після того, як напруга досягне максимального значення $\sigma_{м.м}$, що називається ***межею міцності.***

Дослідження поведінки тіла при зовнішніх механічних навантаженнях і їх діаграми розтягу досить важливі у практичному використанні матеріалів для різних цілей.

Встановимо зв'язок між величинами, що входять до закону Гука, записаного у вигляді $F_{пр} = k|x|$ та $\sigma = E|\varepsilon|$.

Прирівняємо $\sigma = \frac{F_{пр}}{S}$ та $\sigma = E\left|\frac{\Delta l}{l_0}\right|$. Отримуємо $\frac{F_{пр}}{S} = E\left|\frac{\Delta l}{l_0}\right|$ або $F_{пр} = \frac{ES}{l_0}|\Delta l|$.

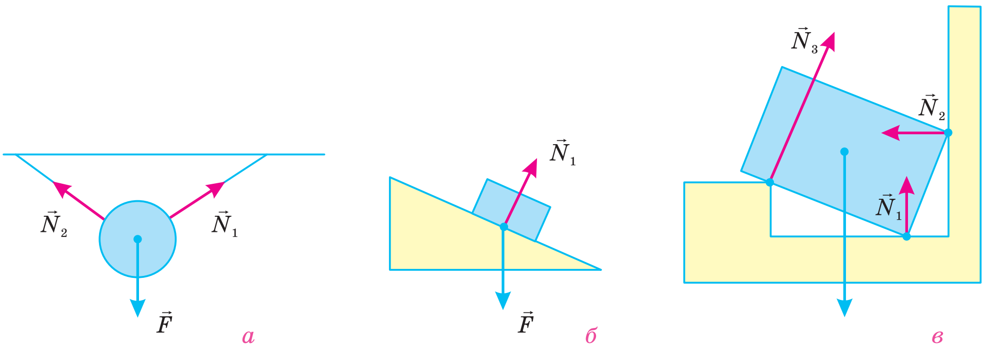
Враховуючи, що $|x| = |\Delta l|$ легко бачити, що $k = \frac{ES}{l_0}$.

Модуль Юнга *E* на відмінну від жорсткості тіла *k* не залежить від розмірів тіла і його значення наведено в таблицях (див. табл. 4 в додатках).

Сила реакції опори. Як ми уже знаємо, тіло внаслідок прикладених до нього сил може рухатись у будь-якому напрямі. У реальних умовах вільному рухові тіл перешкоджають інші тіла, які перебувають із цим тілом у контакті. Так, тіло внаслідок дії сили тяжіння тисне на опору чи розтягує підвіс – деформує їх. За третім законом Ньютона опора чи підвіс діють на тіло з такою самою за модулем і протилежно направленою силою. Природа цих сил однакова, але вони не компенсують одна одну, бо прикладені до різних тіл.

> Силу пружності, що діє на тіло з боку опори або підвісу, називають ***силою реакції опори*** $\vec{N}$.

Важливою особливістю сил реакції опори є те, що вони направлені перпендикулярно до поверхні дотику тіл (*мал. 106*).



Мал. **106. Напрям сил реакції опори (підвісу)**

Дайте відповіді на запитання

1. Унаслідок чого з'являється сила пружності? Яка природа цієї сили?
2. Що таке деформація? За яких умов виникають деформації тіл?
3. Яку деформацію називають пружною, а яку пластичною? Назвіть види деформації.
4. Як формулюється і записується закон Гука? Що означає знак «мінус» у формулі закону Гука?
5. Який закон описує поздовжню пружну деформацію розтягу (стискання)?
6. Що таке реакція опори або підвісу?

Приклади розв'язування задач

Під час розв'язування задач на рух тіл під дією сили пружності ми розглядатимемо ті випадки, коли сила пружності не змінюється.

Зверніть увагу! В умові більшості задач ідеться не про силу пружності $\vec{F}_{пр}$, а про прикладену силу $\vec{F}$. Якщо враховувати третій закон Ньютона, то формулу $F_{пр} = -kx$ можна застосовувати у вигляді $F = kx$.

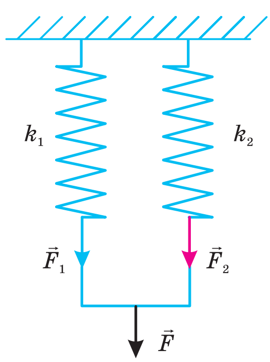
Задача 1. Пружини, жорсткості яких k_1 та k_2 відповідно, з'єднані паралельно. Чому дорівнює жорсткість такої системи? Яким буде результат, якщо пружини з'єднати послідовно?

Дано:	***Розв'язання:***
k_1; k_2	Закон Гука для системи пружин $F = kx$,
k – ?	де F – прикладена сила до пружин; k – жорсткість системи пружин; x – загальне

видовження системи пружин. Звідки $k = F/x$ (1).

Розглянемо випадок паралельного з'єднання пружин (*мал. 107*).

У цьому випадку кінці пружин з'єднані між собою (наприклад, тонкою пластинкою).



Мал. **107. Паралельне з'єднання пружин**

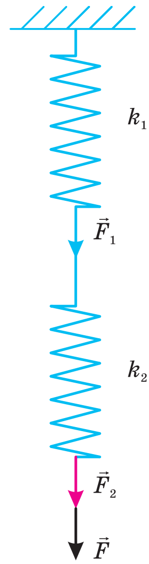
Сила $\vec{F}$, що діє на систему, дорівнює сумі сил, які діють на кожну пружину: $F = F_1 + F_2$. Оскільки сила прикладена до спільної пластинки, то обидві пружини зазнають однакового видовження $x_1 = x_2 = x$. Відповідно $F_1 = k_1 x$, $F_2 = k_2 x$.

Тоді $F = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2)x$. Підставляючи у формулу (1), маємо: $k = k_1 + k_2$.

У випадку послідовного з'єднання пружин (*мал. 108*), на кожну пружину діє однакова сила: $F = F_1 = F_2$.

Але кожна пружина зазнає відповідного видовження x_1 і x_2, які в сумі становлять загальне видовження: $x = x_1 + x_2$. Тоді

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \text{ або } \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$



Мал. **108. Послідовне з'єднання пружин**

Відповідь: у випадку паралельного з'єднання пружин, жорсткості яких k_1 та k_2, загальна жорсткість системи $k = k_1 + k_2$; при послідовному з'єднанні – $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.

Задача 2. Довжина сталевого дроту площею поперечного перерізу 3 мм² під дією сили $4 \cdot 10^4$ Н становить 2 м. Визначити абсолютне видовження дроту при збільшенні сили розтягування на 10^4 Н.

Дано:
$S = 3 \cdot 10^{-6}$ м²;
$l_1 = 2$ м;
$F = 4 \cdot 10^4$ Н;
$\Delta F = 10^4$ Н

$\Delta l_2 - ?$

Розв'язання:

Модуль Юнга для сталі визначаємо за табл. 4 (*див. додаток*): $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Визначимо початкову довжину дроту l_0.

Прирівнюючи формули $\sigma = \frac{F}{S}$, $\sigma = E\frac{l_1 - l_0}{l_0}$, визначаємо:

$$l_0 = \frac{SEl_1}{F + SE}.$$

При збільшенні сили розтягування на ΔF, маємо: $\frac{F + \Delta F}{S} = E\frac{\Delta l_2}{l_0}$.

Звідки $\Delta l_2 = \frac{(F + \Delta F)l_0}{SE}$.

Підставляючи вираз для l_0, отримуємо: $\Delta l_2 = \frac{(F + \Delta F)l_1}{F + SE}$.

Обчислення $\Delta l_2 = \frac{(4 \cdot 10^4 \text{ Н} + 10^4 \text{ Н}) \cdot 2 \text{ м}}{4 \cdot 10^4 \text{ Н} + 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}} \approx 0{,}16$ м.

Відповідь: $\Delta l_2 \approx 0{,}16$ м.

Вправа 17

1. Яке видовження горизонтальної пружини жорсткістю 60 Н/м, якщо пружина надає візку масою 600 г прискорення 1,5 м/с^2? Тертя не враховувати.

2. Маємо тіло масою 250 г та дві однакові пружини. Коли тіло підвісили до пружин, з'єднаних послідовно, воно видовжило їх на 96 мм, а коли до пружин з'єднаних паралельно, – на 22 мм. Яка жорсткість пружин?

3. На дві дротини, діаметри яких відрізняються в три рази, діють однакові сили розтягування. Порівняти напруги, які виникають у дротинах.

4. Балка завдовжки 5 м, яка має площу поперечного перерізу 100 см^2, під дією сил по 10 кН, прикладених до її кінців, стиснулася на 1 см. Визначити відносне стискання і механічну напругу.

5. Визначити напругу, яка виникає у сталевому тросі, при його відносному видовженні 0,001.

6. У скільки разів абсолютне видовження мідної дротини більше, ніж сталевої (такої самої довжини і такого самого поперечного перерізу), коли на них діють однакові сили розтягування?

7. Які сили треба докласти до кінців сталевої дротини завдовжки 4 м і з перерізом 0,5 мм^2, щоб видовжити її на 2 мм?

8. У скільки разів відносне видовження риболовної жилки діаметром 0,2 мм більше, ніж жилки діаметром 0,4 мм, якщо до їх кінців прикласти однакову силу?

9. До дротини було причеплено вантаж. Потім дротину зігнули пополам і причепили той самий вантаж. Порівняти абсолютне і відносне видовження дротини в обох випадках.

10. З гумового шнура завдовжки l = 42 см і радіусом R = 3 мм виготовлено рогатку. Хлопчик, стріляючи з неї, розтягнув шнур на Δl = 20 см. Визначити модуль Юнга E для цієї гуми, якщо відомо, що камінь масою m = 20 г, випущений з рогатки, полетів зі швидкістю υ = 20 м/с. Зміною перерізу шнура при розтягуванні знехтувати.

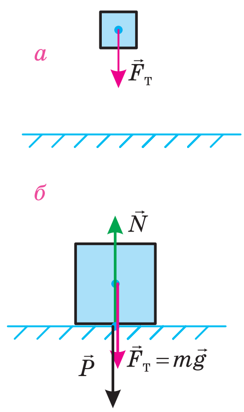
§ 23 Вага тіла. Невагомість

- ✓ *Вага тіла.*
- ✓ *Вага тіла, що рухається з прискоренням у вертикальному напрямі.*
- ✓ *Вага тіла, що рухається по коловій траєкторії.*

Вага тіла. Якщо тіло вільне, то воно під дією земного тяжіння падає на її поверхню з прискоренням g (*мал. 109, а*).

Якщо тіло знаходиться на горизонтальній опорі, то вона перешкоджає його падінню. У цьому випадку сила тяжіння $\vec{F} = m\vec{g}$ врівноважується силою нормальної реакції опори $\vec{N}$ (*мал. 109, б*).

На підставі другого закону Ньютона маємо: $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$. А оскільки тіло перебуває в стані спокою, то $\vec{N} + m\vec{g} = 0$, отже, модулі цих сил рівні: $N = mg$. Крім того, за третім законом Ньютона, сила реакції опори рівна за модулем і протилежна за напрямом силі, з якими тіло діє на опору, тобто – ***вазі тіла*** **(** $\vec{P}$ **)**.



Мал. 109. Тіло: *а* – таке, що падає вільно; *б* – тіло на опорі

$$\vec{N} = -\vec{P}$$

$$|P| = |mg|.$$

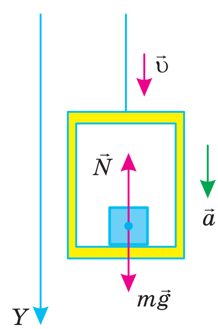
Вага тіла **–** це сила, з якою тіло діє на горизонтальну опору чи розтягує підвіс, на який воно підвішене, у результаті притягання до Землі.

Вага тіла чисельно дорівнює силі тяжіння, якщо тіло перебуває в стані спокою або рівномірно і прямолінійно рухається і відрізняється від неї лише точкою прикладання (вектор ваги тіла, на відміну від сили тяжіння, що має гравітаційну природу, докладено до опори чи підвісу, а силу тяжіння – до центра тяжіння тіла (*мал. 109, б*).

Оскільки $\vec{P} = m\vec{g}$, то вага тіла також залежить від широти місцевості: максимальна – на полюсах і мінімальна – на екваторі.

Вага тіла, що рухається з прискоренням у вертикальному напрямі. Розглянемо це на прикладах розв'язування задач.

Задача 1. З якою силою людина тисне на підлогу ліфта у двох випадках: а) ліфт опускається рівноприскорено; б) ліфт раптово зупиняється після спуску вниз. Маса людини 75 кг, модуль прискорення в обох випадках 1 м/с².



Мал. 110, *а*. Рух ліфта з прискоренням, направленим униз

Дано:	Розв'язання:
$m = 75$ кг; $a = 1$ м/с²	У кожному випадку на людину діє сила тяжіння і сила реакції опори, тому основне рівняння динаміки однакове для обох випадків: $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$.
P – ?	

Зробимо малюнки до обох випадків, вісь Y спрямуємо вниз.

У першому випадку (*мал. 110, а*), коли ліфт опускається рівноприскорено, його швидкість зростає, тому вектор прискорення $\vec{a}$ направлений у напрямі руху (вниз).

Закон руху в проекції на вісь Y: $-N+mg=ma$.

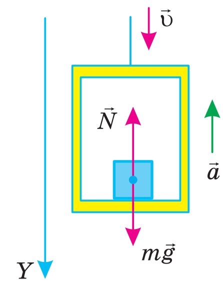
$N=mg-ma=m(g-a)$.

Оскільки $|P|=|N|$, отже, $P=m(g-a)$.

$P=75$ кг · (9,8 м/с^2 – 1 м/с^2) = 660 Н.

Такий самий результат отримуємо й у тому випадку, коли ліфт піднімається вгору і раптово зупиняється. Прискорення ліфта направлене також униз.

У другому випадку (*мал. 110, б*) під час раптової зупинки швидкість ліфта зменшується, тому вектор прискорення $\vec{a}$ направлений проти напряму руху (вгору).



Мал. 110, б. Рух ліфта з прискоренням, направленим угору

Закон руху в проекції на вісь Y, у цьому випадку

$$-N+mg=-ma.$$

$$N=mg+ma=m(g+a) \text{ або } P=m(g+a).$$

$$P=75\text{кг}\cdot(9{,}8\text{м/с}^2+1\text{м/с}^2)=810\text{ Н}.$$

Такий самий результат буде й у тому випадку, коли ліфт піднімається вгору рівноприскорено. Прискорення ліфта направлене вгору.

Висновок. Вага тіла залежить не від напряму руху ліфта, а лише від напряму прискорення $\vec{a}$. Якщо тіло спирається на опору, яка рухається з прискоренням $\vec{a}$, ***напрямленим угору, вага тіла зростає*** і дорівнює $P=m(g+a)$. Виникає ***перевантаження*** – збільшення ваги тіла, спричинене прискореним рухом опори вертикально вгору.

Якщо тіло разом з опорою рухається з прискоренням $\vec{a}$, ***направленим вертикально вниз, вага тіла зменшується*** і дорівнює: $P=m(g-a)$.

Якщо тіло разом з опорою вільно падає, то $a=g$ і $P=0$. Виникає стан ***невагомості.***

Під час рівномірного піднімання або опускання опори вага тіла не змінюється.

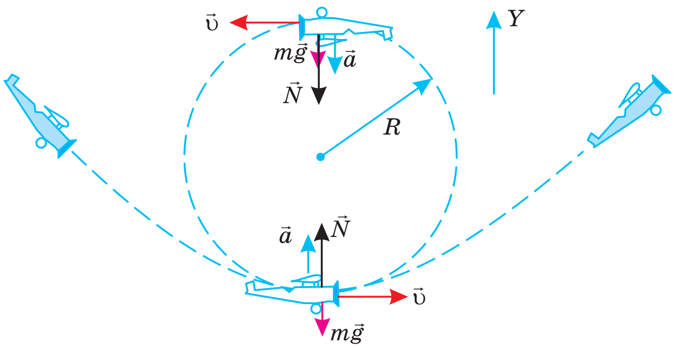
Перевантаження зазнають також космонавти під час вертикального запуску космічного корабля. У стані невагомості вони перебувають на орбіті.

Вага тіла, що рухається по коловій траєкторії.

Задача 2. З якою силою тисне пілот на сидіння крісла літака у верхній і нижній точках «петлі Нестерова», яка є коловою траєкторією радіусом 200 м у вертикальній площині, якщо швидкість літака стала і дорівнює 360 км/год? Маса пілота – 75 кг.

Дано:	*Розв'язання:*
$R=200$ м; $m=75$ кг; $\upsilon=360$ км/год $=100$ м/с	На пілота у верхній і нижній точках траєкторії діють сили тяжіння і сили реакції опори (крісла): $\vec{N}+m\vec{g}=m\vec{a}$. Рівнодійна цих сил надає руху літака доцентрового прискорення $\vec{a}$, яке в обох випадках направлене до центра кола.
P – ?	

Зробимо малюнок до задачі, вісь Y спрямуємо вгору (*мал. 111*).



Мал. **111. Петля Нестерова**

У нижній точці траєкторії сила реакції опори $\vec{N}$ і доцентрове прискорення $\vec{a}$ направлені у напрямку вибраної вісі Y вгору:

$$N - mg = ma\,;$$

$$N = mg + ma = m\left(g + \frac{\upsilon^2}{R}\right).$$

Оскільки $|P| = |N|$, то

$$P = m\left(g + \frac{\upsilon^2}{R}\right).$$

$$P = 75\ \text{кг}\left(9{,}81\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} + \frac{100^2\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{200\ \text{м}}\right) = 4485\ \text{Н}.$$

У верхній точці траєкторії сила реакції опори $\vec{N}$, доцентрове прискорення $\vec{a}$ і прискорення вільного падіння направлені протилежно до напрямку вибраної осі Y (униз):

$$-N - mg = -ma\,;\ \ N = ma - mg = m\left(\frac{\upsilon^2}{R} - g\right).$$

Оскільки $|P| = |N|$, то $P = m\left(\frac{\upsilon^2}{R} - g\right)$.

$$P = 75\ \text{кг}\left(\frac{100^2\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{200\ \text{м}} - 9{,}81\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) = 3015\ \text{Н}.$$

Висновок. Вага пілота у звичайному стані $P_0 = mg = 75\ \text{кг} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \approx 734\ \text{Н}$.

Як видно з результату розв'язування задачі, пілот зазнає перевантаження у верхній та нижній частині траєкторії. Причому більше перевантаження у нижній частині траєкторії.

У верхній частині траєкторії при $\frac{\upsilon^2}{R} = g$ можливий стан невагомості.

Під час перевантаження збільшують вагу і внутрішні органи організму пілота, збільшується сила, з якою вони діють одне на одного і на його скелет. Це викликає больові відчуття, а надмірні перевантаження можуть стати небезпечними для здоров'я. Треновані пілоти витримують перевантаження до 10 mg (зазвичай перевантаження виражають не через величину mg, а через величину g, і кажуть, що перевантаження дорівнює, наприклад, $10g$).

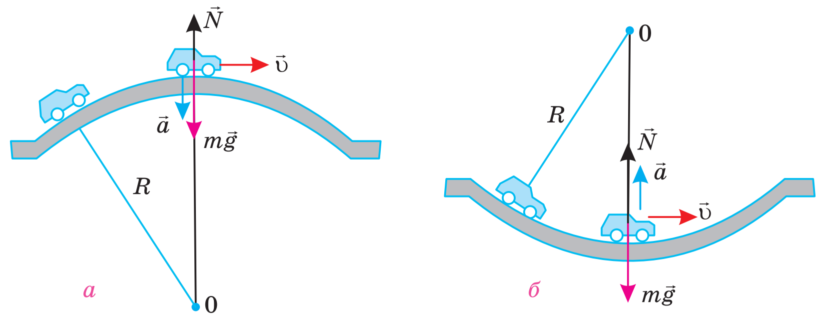
Зміна ваги тіла настає й у таких випадках:

– під час рівномірного руху тіла по випуклому мосту (*мал. 112, а*) доцентрове прискорення буде напрямлене вниз, відповідно вага тіла дорівнюватиме:

$$P = m\left(g - \frac{\upsilon^2}{R}\right),$$

– під час руху тіла по ввігнутому мосту (*мал. 112, б*):

$$P = m\left(g + \frac{\upsilon^2}{R}\right).$$



Мал. 112. Зміна ваги тіла при русі по мосту округлої форми

Дайте відповіді на запитання

1. Що таке вага тіла? У чому відмінність ваги тіла від сили тяжіння, що діє на тіло?
2. Що таке перевантаження?
3. Коли настає невагомість? Як вона виявляється?
4. Як зміниться вага космонавта під час старту ракети і під час її приземлення?
5. Людина стоїть у ліфті. Визначити й порівняти сили, які діють на неї у таких випадках: а) ліфт не рухається; б) починає рухатись угору; в) рухається рівномірно; г) сповільнює рух до зупинки.

Вправа 18

1. Вантаж масою 50 кг рівноприскорено піднімають за допомогою каната вертикально вгору протягом 2 с на висоту 10 м. Визначити силу натягу каната.
2. Пілот діє на сидіння крісла літака у нижній точці петлі Нестерова з силою 7,1 кН. Маса пілота 80 кг, радіус петлі 250 м. Визначити швидкість літака.
3. Космічна ракета під час старту з поверхні Землі рухається вертикально з прискоренням 20 м/с^2. Визначити вагу льотчика-космонавта в кабіні, якщо його маса 80 кг. Якого перевантаження він зазнає?
4. У ліфті стоїть пасажир, маса якого 60 кг. Визначити його вагу на початку і наприкінці піднімання, а також на початку і наприкінці опускання. Прискорення (за модулем) ліфта в усіх випадках дорівнює 2 м/с^2.

5. Космічний корабель робить м'яку посадку на Місяць ($g_м$ = 1,6 м/с^2), рухаючись сповільнено у вертикальному напрямі (відносно Місяця) зі сталим прискоренням a = 8,4 м/с^2. Скільки важить космонавт масою 70 кг, який перебуває у цьому кораблі?

6. З якою швидкістю автомобіль має проїжджати середину опуклого моста радіусом 40 м, щоб пасажир на мить опинився у стані невагомості?

7. Визначити, у скільки разів зменшується вага тіла на екваторі внаслідок добового обертання Землі та якої тривалості має бути доба на Землі, щоб тіла на екваторі були невагомими.

§ 24 Сили тертя

✓ *Зовнішнє тертя.*
✓ *Внутрішнє тертя. Сила опору при русі тіла в рідині чи газі.*

Зовнішнє тертя. Тертя – один із видів взаємодії тіл. Тертя, коли тіла взаємодіють своїми поверхнями, називають ***зовнішнім тертям*** (***внутрішнім*** вважають тертя, що виникає під час руху рідин і газів).

Тертя між поверхнями двох твердих тіл, які торкаються одне одного, за відсутності між ними рідкого чи газоподібного шару, називають ***сухим тертям***.

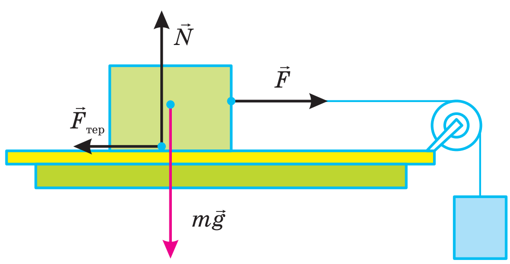
Сухе тертя поділяється на: ***тертя спокою*** (тертя за відсутності відносного переміщення контактуючих тіл), ***тертя ковзання***, ***тертя кочення***, які характеризуються відповідними силами тертя.

Сили тертя мають електромагнітну природу, виникають у площині дотику поверхонь і перешкоджають їх взаємному переміщенню, завжди напрямлені у бік, протилежний миттєвій швидкості тіла.

Силу тертя $F_{тер}$, яка перешкоджає виникненню руху одного тіла відносно поверхні іншого, називають ***силою тертя спокою***.

Сила тертя спокою – це та сила, яка заважає нам зрушити з місця стіл, шафу, ліжко тощо.

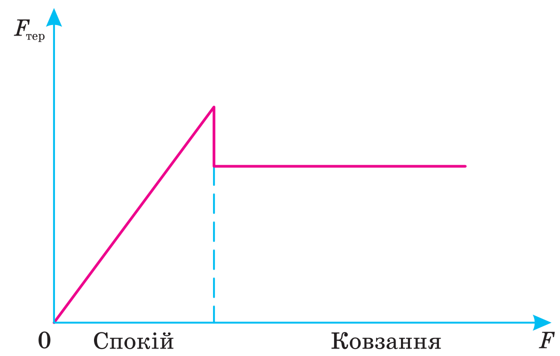
На *мал. 113* схематично показані сили, що діють на тіло: сила тяжіння $m\vec{g}$ врівноважується силою реакції опори $\vec{N}$. Сила тертя спо-



Мал. **113. Сили, що діють на тіло**

кою $\vec{F}_{тер}$ завжди напрямлена протилежно зовнішній силі $\vec{F}$, що діє на тіло, яка намагається привести це тіло в рух.

Сила тертя спокою збільшується $\vec{F}_{тер}$ зі зростанням зовнішньої сили $\vec{F}$, зрівноважуючи її. І при деякому значенні зовнішньої сили тіло зрушується з місця. Отже, є певне максимальне значення сили тертя спокою $\vec{F}_{тер}$ і тільки у разі, коли зовнішня сила його перевищує тіло, починає рухатися з прискоренням (*мал. 114*).



***Мал.* 114. Залежність сили тертя від прикладеної сили**

Встановлено, що максимальне значення сили тертя спокою пропорційне модулю сили нормального тиску, що чинить тіло на опору:

$$F_{тер.сп} = \mu N,$$

де N – сила нормального тиску (або рівна їй за модулем сила реакції опори); μ – коефіцієнт тертя, який залежить від стану поверхонь тіл і від властивостей речовини, з якої вони виготовлені.

Саме завдяки силі тертя спокою ми можемо ходити: оскільки підошва не ковзає по поверхні дороги, то сила тертя між нею і дорогою – це сила тертя спокою, яка надає нам прискорення.

Зрушивши з місця, тіло починає ковзати по поверхні іншого тіла і між ними уже існує ***сила тертя ковзання***, яка дещо менша за максимальну силу тертя спокою (*мал. 114*), хоча також пропорційна силі нормального тиску (силі реакції опори) і залежить від матеріалу контактуючих поверхонь: $\vec{F}_{тер.ков} = \mu N$. У цьому випадку менший коефіцієнт тертя μ .

Коефіцієнт μ залежить від того, з якого матеріалу виготовлено поверхні тертя і від якості їх обробки. Якщо зробити поверхні більш гладенькими, значення μ зменшиться. Однак, зменшувати шершавість поверхонь можна лише до певної межі, оскільки у разі дуже гладких (наприклад, полірованих) поверхонь значення μ знову збільшується. Відбувається це тому, що молекули тіл з гладкими поверхнями зближаються і сили молекулярного притягання перешкоджають їх ковзанню.

Сила тертя кочення менша за силу тертя ковзання. У цьому можна переконатися на практиці: адже перекочувати тяжку колоду значно легше, ніж тягти. Сила тертя кочення також залежить від сили тиску, що чинить тіло на поверхню, стану самих поверхонь (коефіцієнта тертя μ) і радіуса тіла, що котиться.

Сила тертя відрізняється від інших сил тим, що завжди направлена проти напряму руху тіла. Отже, і прискорення, яке вона надає, направлене проти напряму руху тіла, тобто проти його швидкості, у результаті чого тіло зупиняється.

Внутрішнє тертя. Сила опору при русі тіла в рідині чи газі. При русі шарів рідини чи газу виникають сили внутрішнього тертя. Такі самі сили можуть виникати й у випадку руху твердого тіла в рідині чи газі.

Вам, мабуть, доводилося спостерігати такі явища: ви стоїте на платформі залізниці, і коли повз вас проходить потяг, ви відчуваєте вітер, що його супроводжує, або, наприклад, ви дістаєте ложку з банки з густим варенням і бачите, як разом з ложкою піднімаються шари варення, і чим швидше ви піднімаєте ложку, тим більше варення піднімається з нею.

При русі тіла шари рідини (чи газу) ніби прилипають до поверхні тіла і рухаються разом із ним, тому сили опору, які виникають при русі тіла, такі самі як і при відносному русі самих шарів усередині рідини.

> Сили, які виникають при русі тіл у рідині чи газі і які залежать від швидкості їх відносного руху, називаються ***силами рідкого тертя***, або ***силами опору середовища.***

У загальному випадку закон, що встановлює зв'язок між силою рідкого тертя і швидкістю руху тіла відносно рідини чи газу досить складний.

У тих випадках, які розглядатимемо ми, можна вважати,

> ***що сила рідкого тертя прямо пропорційна швидкості відносного руху тіла:***
>
> $$\vec{F}_{\text{тер}} = -\alpha\vec{\upsilon}.$$

Знак «–» вказує на те, що сила рідкого тертя направлена проти напряму швидкості руху.

Коефіцієнт α називається ***коефіцієнтом рідкого тертя*** або ***коефіцієнтом опору середовища.*** Його значення залежить від форми і розмірів рухомого тіла, а також від властивостей рідини (чи газу).

Розглянемо детальніше рух тіла з урахуванням сил опору середовища на прикладі руху парашутиста.

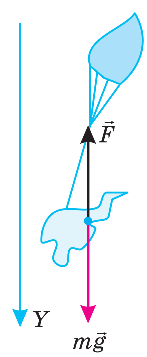
Нехай парашутист здійснює затяжний стрибок, тобто певний час він рухається з нерозкритим парашутом (при цьому коефіцієнт опору α_1) і далі з відкритим парашутом (при цьому коефіцієнт опору змінюється на $\alpha_2 >> \alpha_1$. Початкова швидкість дорівнює нулю.

Запишемо рівняння другого закону Ньютона: $\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}$.

У проекціях на вісь Y (*мал. 115*): $mg - F = ma$.

Сила опору повітря у цьому випадку: $F = \alpha_1\upsilon$. Тоді $mg - \alpha_1\upsilon = ma$.

У початковий момент часу $\upsilon = 0$, отже, $a = g$. Але швидкість руху парашутиста швидко збільшується, водночас збільшується і сила опору. Тоді різниця $mg - \alpha_1\upsilon$ набуває менших значень, а отже, прискорення руху парашутиста зменшується. Тому



Мал. 115. Рух парашутиста на початку стрибка

протягом деякого інтервалу часу наростання швидкості та зміна сили опору сповільнюються і рух парашутиста стає рівномірним:

$$mg - \alpha_1 \upsilon = 0, \text{ звідки } \upsilon = \frac{mg}{\alpha_1}.$$

Таким чином, на початку стрибка рух парашутиста був прискореним, з прискоренням $a = g$, далі прискорення руху зменшувалось до нуля. Швидкість руху парашутиста збільшувалась від нуля до сталого значення $\upsilon = mg/\alpha_1$ (розрахунки показують, що значення цієї швидкості становить приблизно 50 – 70 м/с).

Отже, дія сил опору повітря кардинально змінює процес вільного падіння: при падінні в повітрі всі тіла рухаються прискорено лише на початку руху, далі їх рух стає рівномірним.

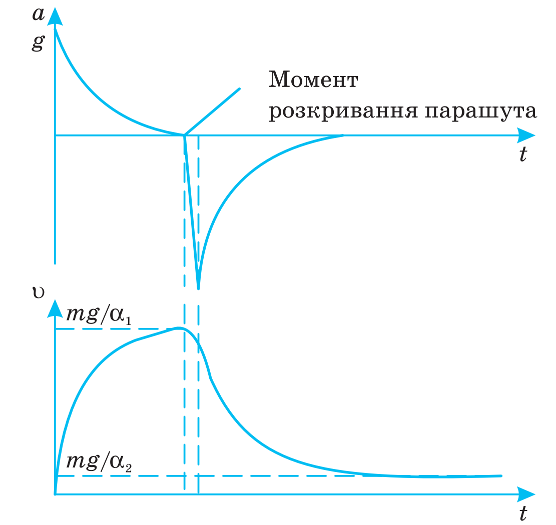
Подібне явище можна побачити, спостерігаючи за падінням кульки у посудині з в'язкою рідиною.

Що ж відбувається у момент, коли парашутист відкриває парашут? Сила опору повітря при цьому значно збільшується і стає більшою за силу тяжіння: $F > mg$. Виникає прискорення $\vec{a}$, направлене вгору.

З часом процес повторюється: прискорення починає зменшуватись до нуля, а швидкість набувати нового, сталого значення:

$$\upsilon' = \frac{mg}{\alpha_2}.$$

Повний графік зміни прискорення і швидкості руху під час затяжного стрибка подано на *мал. 116*.



***Мал.* 116. Графіки залежності $a(t)$ та $\upsilon(t)$ при затяжному стрибку з парашутом**

Дайте відповіді на запитання

1. Наведіть класифікацію основних видів тертя.
2. За яких умов виникає сила тертя спокою? Сила тертя ковзання? Від чого вони залежать?
3. Що таке сила нормального тиску?
4. Які сили називаються силами рідкого тертя? Від чого вони залежать?

Приклади розв'язування задач

Зверніть увагу! У більшості задач вважається, що граничний коефіцієнт тертя спокою такий самий, як коефіцієнт тертя ковзання.

Коли в задачі йдеться про ***коефіцієнт опору***, то вважається, що він враховує всі види тертя і показує, яку частину від сили нормального тиску становить сила тертя.

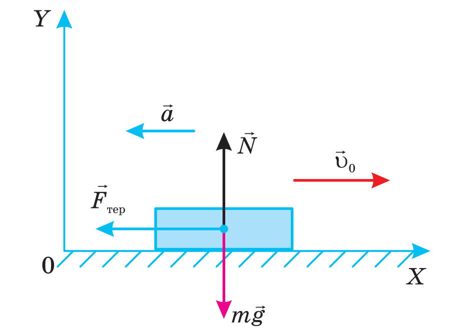
Задача 1. Велосипедист, який рухається зі швидкістю 36 км/год, побачив попереду, приблизно за 10 м від себе, перешкоду і різко загальмував. Чи встигне він зупинитись, якщо: а) дорога суха і коефіцієнт тертя 0,7; б) дорога слизька і коефіцієнт тертя 0,4; в) якби його швидкість руху була вдвічі більшою?

Дано:
$\upsilon_0 = 10$ м/с;
$s = 10$ м;
а) $\mu = 0{,}7$;
б) $\mu = 0{,}4$;
в) $\upsilon_0 = 20$ м/с
s – ?

Розв'язання:

Розглядатимемо рух велосипедиста з моменту гальмування (*мал. 117*).

Вісь X спрямовуємо у напрямку руху. Сила тертя ковзання та зумовлене нею прискорення направлені у протилежному напрямі.



***Мал.* 117. Рух тіла під дією сили тертя**

За другим законом Ньютона

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тер} = m\vec{a}.$$

У проекціях на координатні осі:

на вісь X: $-F_{тер} = -ma$; або $F_{тер} = ma$ (1);

на вісь Y: $N - mg = 0$ або $N = mg$ (2).

Сила тертя ковзання визначається за формулою $F_{тер} = \mu N$, враховуючи формулу (2), можемо записати, що $F_{тер} = \mu mg$. Підставляючи цю формулу у рівність (1), отримуємо: $\mu mg = ma$ (3).

Згідно з формулами кінематики $2\vec{a}\vec{s} = \vec{\upsilon}^2 - \vec{\upsilon}_0^2$. Оскільки рух рівносповільнений і у момент зупинки кінцева швидкість $\upsilon = 0$, то у проекціях: $-2as = -\upsilon_0^2$, звідки $a = \dfrac{\upsilon_0^2}{2s}$. Підставляємо цей вираз у формулу (3):

$$\mu mg = m\frac{\upsilon_0^2}{2s}, \text{ звідки } s = \frac{\upsilon_0^2}{2\mu g}.$$

Як бачимо, довжина гальмівного шляху не залежить від маси рухомого тіла, а визначається його початковою швидкістю і коефіцієнтом тертя.

При $\mu = 0{,}7$: $s = \dfrac{100\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{2\cdot 0{,}7\cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} \approx 7$ м – велосипедист встигає зупинитись до перешкоди.

При $\mu = 0{,}7$: $s = \dfrac{100\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{2\cdot 0{,}4\cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} \approx 13$ м – гальмівний шлях більший за відстань до перешкоди.

При $\upsilon_0 = 20$ м/с та $\mu = 0{,}7$ $s = \dfrac{400\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{2 \cdot 0{,}7 \cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} \approx 29$ м – гальмівний шлях збільшується у 4 рази.

Відповідь: 7м; 13 м; 29 м.

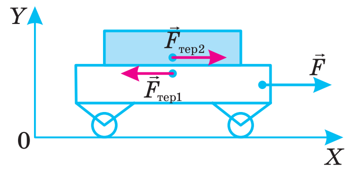
Задача 2. Візок масою $M = 20$ кг, на якому лежить вантаж масою $m = 10$ кг, тягнуть із горизонтальною силою $\vec{F}$. Коефіцієнт тертя між вантажем і візком $\mu = 0{,}1$. Нехтуючи тертям між візком і опорою, визначити прискорення візка a_1 і вантажу a_2, а також силу тертя між вантажем і візком у двох випадках: 1) $F = 20$ Н і 2) $F = 60$ Н.

Дано:
$M = 20$ кг;
$m = 10$ кг;
$\mu = 0{,}1$;
1) $F = 20$ Н;
2) $F = 60$ Н

a_1 – ?
a_2 – ?
F_T – ?

Розв'язання:

Оскільки прискорення направлено у горизонтальному напрямі, розглядатимемо тільки сили, що діють у горизонтальному напрямі, бо вертикальні сили урівноважуються.



Мал. **118. До задачі 3**

На візок діє сила $\vec{F}$ і сила з боку вантажу $\vec{F}_{\text{тер}1}$, а на вантаж діє сила з боку візка $\vec{F}_{\text{тер}2}$ (*мал. 118*), причому, за третім законом Ньютона, за модулем: $F_{\text{тер}1} = F_{\text{тер}2} = F_{\text{тер}}$.

Рівняння руху у проекції на горизонтальну вісь: $F - F_{\text{тер}} = Ma_1$ (1), $F_{\text{тер}} = Ma_2$ (2)

Для розв'язання цієї системи рівнянь необхідно з'ясувати характер сил тертя, що діють між тілами.

А) Якщо візок висковзує з-під вантажу, то між ними діє сила тертя ковзання $F_{\text{тер}} = \mu mg = 9{,}8$ Н.

Б) Якщо візок і вантаж рухаються як одне ціле, то $a_1 = a_2 = a$ і між вантажем і візком діє сила тертя спокою, яку визначаємо із системи:

$$F - F_{\text{сп}} = Ma;$$
$$F_{\text{сп}} = ma.$$

Звідси $F_{\text{сп}} = F\dfrac{m}{M+m}$.

У випадку якщо (1) $F = 20$ Н, то між тілами діє сила тертя спокою $F_{\text{сп}} = 6{,}6$ Н. Отже, тіла рухаються як одне ціле. Тоді $a = \dfrac{F}{m+M} = 0{,}66$ м/с^2.

У випадку, якщо (2) $F = 60$ Н, то $F_{\text{сп}} = 20$ Н, що неможливо, бо гранична сила тертя спокою дорівнює 9,8 Н. Отже, між тілами діє сила тертя ковзання $F_{\text{тер}} = \mu mg = 9{,}8$ Н. Із рівнянь (1) і (2) визначаємо: $a_1 = 2{,}5$ м/с^2; $a_2 = 0{,}98$ м/с^2.

Відповідь: 1) $a_1 = a_2 = a = 0{,}66$ м/с^2; $F_{\text{сп}} = 6{,}6$ Н; 2) $F_{\text{тер}} = 9{,}8$ Н; $a_1 = 2{,}5$ м/с^2; $a_2 = 0{,}98$ м/с^2.

Вправа 19

1. Хлопчик, маса якого 50 кг, спустившись на санках з гірки, проїхав по горизонтальній дорозі (поки не зупинився) шлях 20 м за 10 с. Визначити силу тертя і коефіцієнт тертя.

2. Через який час після аварійного гальмування зупиниться автобус, що рухається зі швидкістю 12 м/с, якщо коефіцієнт тертя дорівнює 0,4?

3. На дерев'яній похилій площині знаходиться дерев'яний брусок. Кут нахилу площини – 28°. Яким має бути коефіцієнт тертя спокою, щоб брусок не сковзав униз?

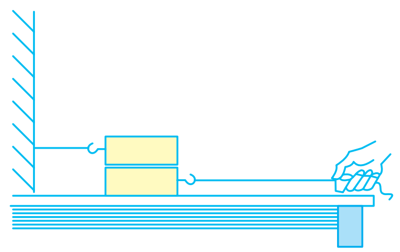
4. Визначити найменший радіус дуги для повороту автомашини, що рухається по горизонтальній дорозі зі швидкістю 36 км/год, якщо коефіцієнт тертя ковзання коліс об дорогу становить 0,25.

5. Парашутист з парашутом має масу 120 кг. Після розкриття парашута він опускається зі швидкістю 6 м/с. Визначити коефіцієнт опору повітря.

6. Якою є сила опору повітря, що діє на парашутиста, який рухається з постійною швидкістю? Маса парашутиста 80 кг.

7. Дві однакові сталеві кульки одночасно починають падати без початкової швидкості: одна – у в'язкій рідині, інша – у повітрі. У чому відмінність рухів кульок? Побудувати графік залежності швидкості руху кульок від часу.

8. Два дерев'яні бруски, кожен з яких має масу 1 кг, лежать на дошці (*мал. 119*). Яку силу потрібно прикласти на початку рівномірного руху, щоб витягнути нижній брусок із-під верхнього? Коефіцієнт тертя на обох поверхнях нижнього бруска дорівнює 0,3.



Мал. **119. До задачі 8.**

9. На аркуш паперу, що лежить на столі, поставили склянку з водою. З яким прискоренням треба рухати аркуш, щоб склянка почала ковзати назад відносно паперу? Коефіцієнт тертя між склянкою і папером дорівнює 0,3. Чи зміниться результат досліду, якщо склянка буде порожньою? Перевірити це на досліді.

Загальні рекомендації щодо розв'язування задач з динаміки матеріальної точки

1. Розв'язання задач динаміки починають з детального опису явищ, про які йдеться в умові: з якими тілами взаємодіє досліджуване тіло і яка сила характеризує цю взаємодію; як рухається тіло (прямолінійно чи криволінійно, прискорено чи рівномірно); які початкові чи кінцеві умови руху тіла тощо.

2. Виконують малюнок до задачі. Для спрощеного виконання малюнка ***сили, що діють на тіло,*** зображають стрілками, прикладеними в одну точку – центр тіла. Сили, з якими ***тіло діє*** на тіла, які взаємодіють з ним (за третім законом Ньютона), на малюнку не вказують. Також не вказують ***рівнодійну*** прикладених до тіла сил. Звертайте увагу на те, що сила реакції опори $\vec{N}$ направлена ***перпендикулярно до поверхні,*** на якій знаходиться тіло, сила

тяжіння $m\vec{g}$ завжди направлена вертикально вниз, сила тертя спокою чи ковзання $\vec{F}_{тер}$ направлена проти напряму руху тіла вздовж поверхні. На малюнку вказують напрям швидкості та напрям прискорення.

3. Вибирають інерціальну систему відліку, в якій зручно досліджувати рух, що є в конкретній задачі. Напрям координатних осей обирають залежно від характеру руху, наприклад, якщо тіло рухається по похилій площині, то вісь X спрямовують уздовж похилої площини в напрямі руху і, відповідно, перпендикулярно до неї вісь Y; якщо рух відбувається вздовж однієї прямої – достатньо обрати одну вісь і спрямувати її за напрямом руху тіла.

4. Використовуючи другий закон Ньютона, його спочатку записують у векторній формі $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = m\vec{a}$ – якщо рух тіла рівноприскорений і $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = 0$ – якщо тіло перебуває у стані спокою або рівномірно і прямолінійно рухається, де $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$ – векторна сума всіх прикладених до тіла сил.

5. Векторну суму сил замінюють алгебраїчною сумою їх проекцій на координатні осі. Тому далі необхідно записати рівняння другого закону Ньютона для проекцій на кожну вісь, враховуючи знаки проекцій.

6. Слід порівняти число невідомих у задачі величин із числом рівнянь отриманої системи. Якщо число невідомих дорівнює або менше числа рівнянь, то задачу математично сформульовано правильно і вона має розв'язання. В іншому випадку необхідно дописати додаткові рівняння, наприклад, кінематичні, і розв'язати утворену систему рівнянь.

7. Отримати кінцеву формулу, перевірити за нею одиниці шуканої величини, визначити її значення, проаналізувати отриману відповідь.

8. Дослідити інші можливі шляхи розв'язання певної задачі.

Приклади розв'язування задач на прямолінійний рух під дією кількох сил у горизонтальному та вертикальному напрямах

Задача 1. Автомобіль масою 1 т рушає з місця і досягає швидкості 30 м/с за 20 с. Визначити силу тяги, якщо коефіцієнт тертя – 0,05.

Дано:
$m = 10^3$ кг;
$\upsilon = 20$ м/с;
$t = 20$ с;
$\mu = 0{,}05$

$F_т$ – ?

Розв'язання:

Вкажемо напрям сил, що діють на автомобіль (*мал. 120*): силу реакції опори $\vec{N}$ – вертикально вгору; силу тяжіння $m\vec{g}$ – вертикально вниз; силу тертя ковзання $\vec{F}_{тер}$ – проти руху; силу тяги $\vec{F}_т$ – у напрямі руху.

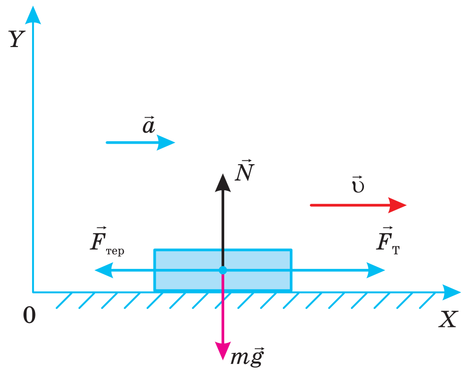
За умовою задачі автомобіль рушає з місця, тому $\upsilon_0 = 0$, і набуває швидкості, отже, рух рівноприскорений, напрям вектора прискорення збігається з напрямом швидкості руху.

За другим законом Ньютона: $\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тер} + \vec{F}_т = m\vec{a}$

У проекціях на координатні осі:
на вісь X: $F_т - F_{тер} = ma$ (1);
на вісь Y: $N - mg = 0$ або $N = mg$ (2).

Оскільки $F_{тер} = \mu N$, то $F_{тер} = \mu mg$. Тоді рівняння руху набуде вигляду: $F_т - \mu mg = ma$, звідки $F_т = \mu mg + ma$.

Прискорення визначимо з формул кінематики: $a = \dfrac{\upsilon - \upsilon_0}{t} = \dfrac{\upsilon}{t}$. Отже, $F_т = m(\mu g + \dfrac{\upsilon}{t})$.



Мал. 120. Схематичний малюнок до задачі 1

Підставляємо числові значення:

$$F_т = 10^3\,кг \cdot (0{,}05 \cdot 9{,}8\,м/с^2 + \frac{30\,м/с}{20\,с}) = 2000\,Н = 2\,кН.$$

Відповідь: $F_т = 2$ кН.

Задача 2. Тіло масою 3 кг падає в повітрі з прискоренням 8 м/с². Визначити силу опору повітря.

Дано:
$m = 3$ кг;
$a = 8$ м/с²;
$g = 9{,}8$ м/с²
$F_{оп}$ – ?

Розв'язання:

У задачах на вільне падіння ми завжди нехтували опором повітря, тому тіла падали з прискоренням $g = 9{,}8$ м/с². У цій задачі на тіло, що падає, діють сила тяжіння та сила опору повітря (*мал. 121*), рівнодійна яких надає тілу прискорення $\vec{a}$.

За другим законом Ньютона: $m\vec{g} + \vec{F}_{оп} = m\vec{a}$.

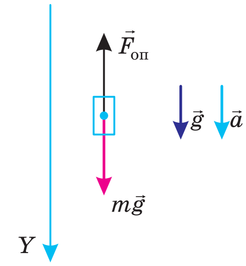
У проекції на вісь Y:

$$mg - F_{оп} = ma, \text{ звідки } F_{оп} = m(g - a).$$

Підставляємо числові дані

$$F_{оп} = 3\,кг \cdot (9{,}8\,м/с^2 - 8\,м/с^2) = 5{,}4\,Н.$$

Відповідь: $F_{оп} = 5{,}4$ Н.



Мал. 121. Падіння тіла з урахуванням опору повітря

Вправа 20

1. Дерев'яний брусок масою 2 кг тягнуть рівномірно по дошці за допомогою пружини, жорсткість якої 100 Н/м. Коефіцієнт тертя 0,3. Визначити видовження пружини.

2. Яку масу баласту треба викинути з аеростата, що рівномірно опускається, аби він почав рівномірно підніматися з такою самою швидкістю? Маса аеростата з баластом 1200 кг, піднімальна сила аеростата стала і дорівнює 8000 Н. Силу опору повітря вважати однаковою під час піднімання та опускання.

3. Вантаж масою 45 кг переміщується горизонтальною площиною під дією сили 294 Н, яка направлена під кутом 30° до горизонту. Коефіцієнт тертя вантажу по площині – 0,1. Визначити прискорення руху вантажу.

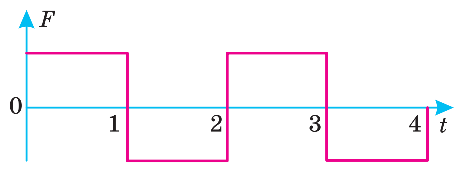
4. За якого прискорення розірветься трос (розривна міцність троса становить 15 кН), якщо ним піднімати вантаж масою 500 кг?

5. Сталевий виливок, маса якого m, піднімають з води за допомогою троса, що має жорсткість k, з прискоренням a. Густина сталі ρ_1, густина води ρ_2. Визначити видовження троса x. Опором води знехтувати.

6. Парашутист, що летить до відкривання парашута з швидкістю 50 м/с, відкриває парашут, і його швидкість стає рівною 5 м/с. Оцініть, якою була максимальна сила натягу строп парашута при його відкриванні. Маса парашутиста з парашутом – 80 кг, $g = 10$ м/с^2. Опір повітря пропорційний швидкості.

7. У ліфті знаходиться відро з водою, в якому плаває м'яч. Як зміниться глибина занурення м'яча, якщо ліфт рухатиметься з постійним прискоренням: а) вгору; б) вниз?

8. Як рухається тіло під дією сили, яка періодично змінює свій напрямок на протилежний (*мал. 122*). Накреслити графіки залежності проекції швидкості $\upsilon_x(t)$ та координати $x(t)$. Вважати, що початкові швидкість та координата дорівнюють нулю.



Мал. 122. До задачі 10

Приклад розв'язування задач на рух тіла по похилій площині

Задача. По похилій площині рівномірно витягують ящик масою 100 кг. Яку силу слід прикласти, щоб витягти ящик, якщо висота похилої площини – 1,5 м, а довжина – 4,5 м. Задачу розв'язати: а) з урахуванням сили тертя ($\mu = 0,3$); б) нехтуючи силою тертя.

Дано:
$m = 100$ кг;
$h = 1,5$ м;
$l = 4,5$ м;
$\mu = 0,3$

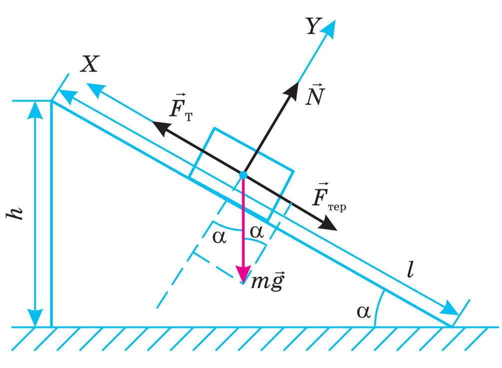
F_T-?

Розв'язання:

Розв'яжемо задачу з урахуванням сили тертя.

Зобразимо похилу площину (*мал. 123*) і покажемо сили, що діють на ящик.

Вісь X спрямуємо у напрямі руху.



Мал. 123. Схематичний малюнок до задачі

За другим законом Ньютона: $\vec{F}_т + \vec{F}_{тер} + m\vec{g} + \vec{N} = 0$, бо рух рівномірний. З урахуванням знаків проекції векторів на осі X та Y, рівняння має вигляд:

на вісь X: $F_т - F_{тер} - mg\sin\alpha = 0$ (1);

на вісь Y: $N - mg\cos\alpha = 0$ (2).

Оскільки $F_{тер} = \mu N$, то в умовах нашої задачі $F_{тер} = \mu mg\cos\alpha$ (3). Підставляючи (3) в (1), маємо:

$$F_т = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \quad (4).$$

Із співвідношень

$$\sin\alpha = \frac{h}{l} = \frac{1,5\text{ м}}{4,5\text{ м}} \approx 0,33,$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{h} = \frac{\sqrt{4,5^2\,\text{м}^2 - 1,5^2\,\text{м}^2}}{4,5\,\text{м}} \approx 0,94.$$

Підставляючи числові значення, отримуємо $F_т = 600$ Н.
З формули (4) у випадку, коли $\mu = 0$, отримуємо $F_т = mg\sin\alpha \approx 323$ Н.
Відповідь: $F_т = 600$ Н; 323 Н.

Вправа 21

1. На похилій площині завдовжки 13 м і заввишки 5 м лежить вантаж, маса якого 26 кг. Коефіцієнт тертя дорівнює 0,5. Яку силу треба прикласти до вантажу вздовж площини, щоб витягнути його? Щоб стягнути? Рух вважати рівномірним.

2. З яким прискоренням рухається брусок по похилій площині з кутом нахилу 30°, якщо коефіцієнт тертя – 0,2?

3. Тіло сковзає рівномірно похилою площиною з кутом нахилу в 40°. Визначити коефіцієнт тертя по площині.

4. Автомобіль масою 1 т підіймається по шосе з нахилом 30° під дією сили тяги 7 кН. Коефіцієнт тертя між шинами автомобіля та поверхнею шосе 0,1. Визначити прискорення автомобіля.

5. Тіло вільно ковзає з вершини нерухомої похилої площини під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту. Визначити його швидкість у кінці похилої площини і час руху, якщо висота похилої площини – 10 м, а коефіцієнт тертя – 0,05.

6. Для рівномірного піднімання вантажу вагою 1000 Н по похилій площині, яка утворює кут 60° з вертикаллю, треба прикласти силу 600 Н. З яким прискоренням рухатиметься вантаж униз, якщо його відпустити?

7. На похилій площині висотою $h = 3$ м і довжиною $l = 5$ м знаходиться тіло масою $m = 10$ кг. Яку горизонтальну силу F необхідно прикласти до тіла, щоб воно рівномірно рухалось по площині?

8. За який час тіло зісковзне з вершини похилої площини висотою $h = 2$ м і кутом при основі $\alpha = 45°$, якщо граничний кут, при якому тіло може не зісковзувати з площини, $\beta = 30°$.

9. По похилій площині, що утворює з горизонтом кут $\alpha = 30°$, пускають знизу вгору тіло. Воно протягом $t_1 = 2$ с проходить відстань $l = 16$ м, після чого починає зісковзувати вниз. За який час тіло зісковзне донизу? Який коефіцієнт тертя між тілом і поверхнею площини?

10. Тіло масою m знаходиться на площині, кут нахилу якої можна змінювати від 0 до 90°. Накреслити графік залежності сили тертя між тілом і площиною від кута нахилу площини до горизонту. Коефіцієнт тертя μ.

Приклади розв'язування задач на рух тіла по колу

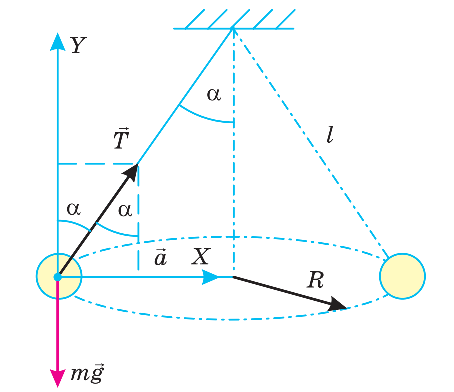
Задача 1. Кулька, що висить на нитці, обертається в горизонтальній площині. Визначити кут відхилення нитки від вертикалі. Швидкість руху кульки 1,5 м/с, радіус кола, яке описує кулька, – 30 см.

Дано:
$\upsilon = 1{,}5$ м/с;
$R = 0{,}3$ м
α – ?

Розв'язання:

Кулька з ниткою описують у просторі конічну поверхню, тому таку модель називають «конічним маятником» (*мал. 124*).

На кульку діє сила тяжіння $m\vec{g}$, направлена вертикально вниз, і сила натягу нитки (її прийнято позначати $\vec{T}$), направлена вздовж нитки. Нитка вважається нерозтяжною, щоб не враховувати додаткові сили пружності, які виникають при розтягуванні (згідно з законом Гука). Оскільки кулька рухається по колу, то прискорення $\vec{a}$, яке надає їй рівнодійна цих сил, – доцентрове.



Мал. **124. Конічний маятник**

За другим законом Ньютона: $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$.
У проекціях на координатні осі:
на вісь X: $T\sin\alpha = ma$;
на вісь Y: $T\cos\alpha - mg = 0$ або $T\cos\alpha = mg$.
Поділимо перше рівняння на друге:

$\dfrac{T\sin\alpha}{T\cos\alpha} = \dfrac{ma}{mg}$, отримаємо $a = g\cdot\mathrm{tg}\alpha$.

Доцентрове прискорення визначаємо за формулою $a = \dfrac{\upsilon^2}{R}$. Тоді $\dfrac{\upsilon^2}{R} = g\cdot\mathrm{tg}\,\alpha$, звідки $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\upsilon^2}{Rg}$. Підставляємо числові дані

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1{,}5^2\ \text{м}^2/\text{с}^2}{0{,}3\ \text{м}\cdot 9{,}8\ \text{м}/\text{с}^2} \approx 0{,}75;\ \alpha = 37°.$$

Відповідь: $\alpha = 37°$.

Задача 2. З якою максимальною швидкістю може їхати мотоцикліст по горизонтальній площині, описуючи дугу радіусом 90 м, якщо коефіцієнт тертя коліс об дорогу – 0,4? На який кут від вертикалі повинен відхилятись мотоцикліст при швидкості руху 15 м/с?

Дано:
$R = 90$ м;
$\mu = 0{,}4$;
$\upsilon = 15$ м/с
υ_m – ?
α – ?

Розв'язання:

На мотоцикліста діють три сили: сила нормальної реакції дороги $\vec{N}$, яка за модулем дорівнює mg, сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$, напрямлена до центра кола, по якому рухається мотоцикліст і сила тяжіння $m\vec{g}$, прикладена до центру тяжіння мотоцикліста (точка O' на *мал. 125*).

При русі по колу мотоцикліст має нахилятись на такий кут α, щоб рівнодійна Q сили тертя $F_{\text{тер}}$ і сили нормальної реакції опори N була напрямлена вздовж прямої, що проходить через центр тяжіння мотоцикліста O' (інакше виникав би обертаючий момент сили, в результаті дії якого мотоцикліст перекинувся б).

Таким чином, оскільки точки O і O' лежать на одній прямій, то точку прикладання сили Q можна перенести в точку O'. В результаті до центра тяжіння мотоцикліста виявляються прикладеними дві сили: сила тяжіння $m\vec{g}$ і $\vec{Q}$, рівнодійна яких $\vec{F}$ напрямлена по горизонталі і відіграє роль доцентрової сили, до того ж за модулем сила F дорівнює силі $F_{тер}$.

За другим законом Ньютона $m\vec{g}+\vec{Q}=m\vec{a}$.

У проекціях на координатні осі:

на вісь X: $Q\sin\alpha = ma$;

на вісь Y:

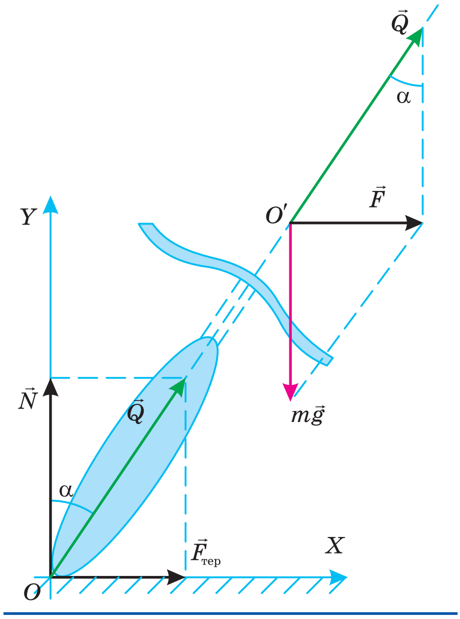
$$Q\cos\alpha - mg = 0 \text{ або } Q\cos\alpha = mg.$$

Поділимо перше рівняння на друге:

$\dfrac{Q\sin\alpha}{Q\cos\alpha}=\dfrac{ma}{mg}$, отримаємо $a = g\cdot \mathrm{tg}\alpha$, або

$$\frac{m\upsilon^2}{R}=g\cdot\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Звідки $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\upsilon^2}{gR}$.



Мал. **125. Сили, що діють на мотоцикліста при повороті**

Щоб визначити максимальну швидкість руху мотоцикліста на повороті, враховуємо, що $F = F_{тер} \le \mu mg$ або $\dfrac{m\upsilon_m^2}{R}\le \mu mg$, звідки $\upsilon_m=\sqrt{\mu gR}$.

Після підстановки числових даних:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{15^2\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot 90\text{ м}}\approx 0{,}2551,\ \alpha\approx 14^\circ;\ \upsilon_m=\sqrt{0{,}4\cdot 90\text{ м}\cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}\approx 18{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $\alpha\approx 14^\circ$; $\upsilon_m\approx 18{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Вправа 22

1. Автомобіль, маса якого 2 т, проїжджає по опуклому мосту, що має радіус кривизни 40 м, зі швидкістю 36 км/год. З якою силою тисне автомобіль на середину моста?

2. Визначити силу натягу нитки конічного маятника у момент, коли нитка утворює кут 60° з вертикаллю. Маса кульки 100 г, швидкість її руху 2 м/с, довжина нитки 40 см.

3. Відерце з водою обертають у вертикальній площині на мотузці завдовжки 0,5 м. З якою найменшою швидкістю необхідно його обертати, щоб при проходженні через верхню точку утримати воду у відерці?

4. Кулька масою 200 г, що прив'язана ниткою до підвісу, рухаючись з постійною швидкістю, описує в горизонтальній площині коло. Визначити швидкість кульки і період її обертання по колу, якщо довжина нитки 1 м, а її кут з вертикаллю становить 60°.

5. Кулька масою 500 г, підвішена на нерозтяжній нитці завдовжки 1 м, здійснює коливання в вертикальній площині. Визначити силу натягу нитки у момент, коли вона утворює з вертикаллю кут 60°. Швидкість кульки в цю мить – 1,5 м/с.

6. Який найменший радіус кола, по якому може проїхати ковзаняр, що рухається зі швидкістю 20 км/год, якщо коефіцієнт ковзання між ковзанами і поверхнею льоду 0,2? Який найбільший кут нахилу ковзаняра від вертикалі, при якому він ще не буде падати на заокругленні?

7. Посудина, що має форму зрізаного конуса з діаметром дна 20 см і кутом нахилу стінок до горизонту 60°, може обертатись навколо вертикальної осі. На дні посудини знаходиться кулька. При якій кутовій швидкості обертання посудини кулька підніметься і буде викинута з посудини? Тертя не враховувати.

Приклади розв'язування задач на рух системи зв'язаних тіл

Зверніть увагу! Системи зв'язаних тіл – *це два або більше тіл, зв'язаних між собою невагомими і нерозтяжними нитками (мотузками чи тросами).* Рухи зв'язаних тіл починаються, якщо на одне або кілька тіл системи діють зовнішні сили, тобто сили, викликані дією тіл, які не входять до складу системи.

Особливістю руху системи зв'язаних тіл є те, що всі вони ***мають однакові за модулем прискорення***. Це зумовлено тим, що на нитки, якими зв'язані тіла, накладається умова нерозтяжності і невагомості. Нерозтяжність нитки означає, що довжина нитки не змінюється і внаслідок деформації у ній не виникає додаткова сила пружності. Сила натягу нитки залишається незмінною і надає тілам однакового за модулем прискорення $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$. Невагомість нитки вказує на те, що сили натягу нитки рівні між собою $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$.

Умова невагомості блока, що передбачена умовою задачі, дає змогу вважати силу натягу нитки (при переході через блок) незмінною за модулем.

Задача 1. На горизонтальній площині лежить брусок масою $m_1 = 2$ кг. До кінця нитки, прикріпленої до бруска і перекинутої через нерухомий блок, підвішено тягар масою $m_2 = 0,5$ кг. Визначити силу натягу нитки, якщо коефіцієнт тертя між площиною і бруском $\mu = 0,1$. Масою нитки і блока, а також тертям у блоці знехтувати.

Дано:
$m_1 = 2$ кг;
$m_2 = 0,5$ кг;
$\mu = 0,1$

T – ?

Розв'язання:

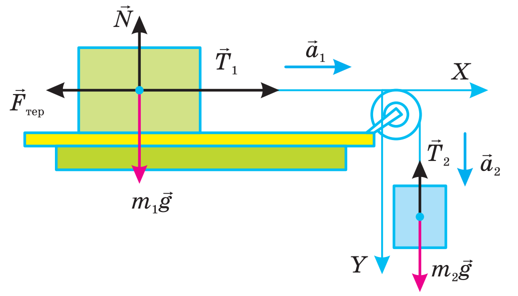
Розглянемо сили, що діють на систему «брусок – тягар» (*мал. 126*).

На тягар діє сила тяжіння $m_2\vec{g}$ і сила натягу нитки $\vec{T}_2$; на брусок – сила тяжіння $m_1\vec{g}$, сила реакції опори $\vec{N}$, сила тертя $\vec{F}_{тер}$ та сила натягу нитки $\vec{T}_1$.

З'ясуємо, рухається ця система тіл чи перебуває у стані спокою.

Якщо система тіл перебуває у стані спокою, то шукана сила натягу визначається вагою тягаря $m_2 g = 4{,}9\ \text{Н}$, а якщо система рухається, то сила натягу нитки буде меншою. Система рухатиметься, якщо $m_2 g > F_{\text{тер}}$.

Оскільки брусок знаходиться на горизонтальній поверхні, то сила тертя визначається: $F_{\text{тер}} = \mu m_1 g = 1{,}96$ Н. Тож система рухається.



Мал. **126. Рух системи зв'язних тіл**

Запишемо систему векторних рівнянь другого закону Ньютона для бруска: $\vec{N} + m_1\vec{g} + \vec{F}_{\text{тер}} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1$ та для тягарця: $m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2$.

Запишемо дані рівняння у проекціях на координатні осі, враховуючи, що $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$ і $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$.

Для бруска: $T - F_{\text{тер}} = m_1 a$; $N = m_1 g$ або $T - \mu m_1 g = m_1 a$.

Для тягарця: $m_2 g - T = m_2 a$.

Визначимо, наприклад, із першого рівняння прискорення і підставимо його у друге.

$$a = \frac{T - \mu m_1 g}{m_1} = \frac{T}{m_1} - \mu g;$$

$$m_2 g - T = m_2\left(\frac{T}{m_1} - \mu g\right), \text{ звідки } T = \frac{m_1 m_2 g(\mu + 1)}{m_1 + m_2} \approx 4{,}3\ \text{Н}.$$

Відповідь: $T \approx 4{,}3\ \text{Н}$.

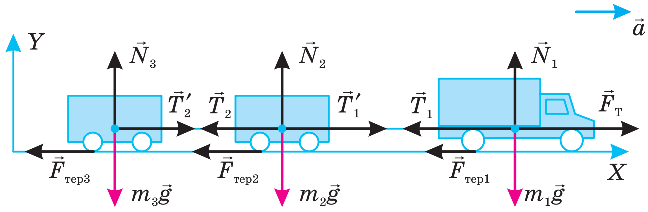
Задача 2. Вантажний автомобіль масою $m_1 = 2500$ кг тягне на буксирному тросі два причепи, розвиваючи під час руху прискорення $0{,}6\ \text{м/с}^2$. Маса першого причепа $m_2 = 1000$ кг, другого $m_3 = 500$ кг. Визначити силу тяги автомобіля і сили натягу тросів, що з'єднують автомобіль і причепи. Коефіцієнт тертя – $\mu = 0{,}1$.

Дано:
$m_1 = 2500$ кг;
$m_2 = 1000$ кг;
$m_3 = 500$ кг;
$a = 0{,}6$ м/с^2;
$\mu = 0{,}1$

F_T – ?
T_1 – ?
T_2 – ?

Розв'язання:

Зробимо малюнок до задачі (*мал. 127*). Силу тертя на малюнку показуємо між колесами і дорогою.



Мал. **127. Схематичний малюнок до задачі 2**

На автомобіль діють: сила тяги $\vec{F}_T$, сила тяжіння $m_1\vec{g}$, сила тертя $\vec{F}_{\text{тер1}}$, сила натягу троса $\vec{T}_1$, сила реакції опори $\vec{N}_1$.

Другий закон Ньютона для автомобіля: $\vec{F}_{\text{т}} + \vec{N}_1 + m_1\vec{g} + \vec{F}_{\text{тер }1} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}$.

Оскільки система зв'язаних тіл рухається з однаковим прискоренням, то для першого і другого причепів другий закон Ньютона відповідно має вигляд: $\vec{N}_2 + m_2\vec{g} + \vec{F}_{\text{тер }2} + \vec{T}_1' + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}$; $\vec{N}_3 + m_3\vec{g} + \vec{F}_{\text{тер }3} + \vec{T}_2' = m_3\vec{a}$.

Оскільки у вертикальному напрямі прискорення немає, то другий закон Ньютона у проекції на вісь Y для тіл: $N_1 = m_1 g$; $N_2 = m_2 g$; $N_3 = m_3 g$.

Відповідно сила тертя для кожного з тіл визначатиметься:

$F_{\text{тер}1} = \mu N_1 = \mu m_1 g$; $F_{\text{тер}2} = \mu N_2 = \mu m_2 g$; $F_{\text{тер}3} = \mu N_3 = \mu m_3 g$.

Враховуючи те, що за третім законом Ньютона $\vec{T}_1' = -\vec{T}_1$, $\vec{T}_2' = -\vec{T}_2$, то можна записати $\left|\vec{T}_1'\right| = \left|\vec{T}_1\right| = T_1$; $\left|\vec{T}_2'\right| = \left|\vec{T}_2\right| = T_2$. Враховуючи попередні співвідношення, другий закон Ньютона у проекціях на вісь X для кожного з тіл має вигляд: $F_{\text{т}} - T_1 - \mu m_1 g = m_1 a$; $T_1 - T_2 - \mu m_2 g = m_2 a$; $T_2 - \mu m_3 g = m_3 a$.

Щоб визначити силу тяги, зручно додати всі три рівняння одне до одного, тоді отримаємо:

$$F_{\text{т}} - \mu g\,(m_1 + m_2 + m_3) = a(m_1 + m_2 + m_3);$$

$$F_{\text{т}} = (\mu g + a)\,(m_1 + m_2 + m_3) = 6{,}4\ \text{кН}.$$

Сила натягу троса між автомобілем і першим причепом:

$$T_1 = F_{\text{т}} - \mu m_1 g - m_1 a = 2{,}4\ \text{кН}$$

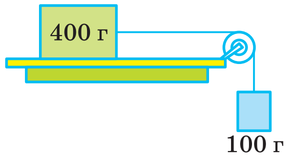
та між причепами:

$$T_2 = \mu m_3 g + m_3 a = 0{,}8\ \text{кН}.$$

Відповідь: $F_{\text{т}} = 6{,}4$ кН; $T_1 = 2{,}4$ кН; $T_2 = 0{,}8$ кН.

Вправа 23

1. Брусок, маса якого 400 г, під дією вантажу, що має масу 100 г (*мал. 128*), рухаючись із стану спокою, проходить за 2 с шлях 80 см. Визначити коефіцієнт тертя.

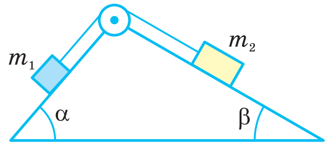


Мал. 128. До задачі 1

2. На шнурі, перекинутому через нерухомий блок, підвісили вантажі, маси яких 0,3 і 0,2 кг. З яким прискоренням рухається система? Яка сила натягу шнура під час руху?

3. Маневровий тепловоз, маса якого 100 т, тягне два вагони, кожний з яких має масу 50 т, з прискоренням 0,1 м/с^2. Визначити силу тяги тепловоза і силу натягу зчепів, якщо коефіцієнт опору рухові дорівнює 0,006.

4. На нитці, перекинутій через нерухомий блок, підвісили вантажі, маса яких 0,3 і 0,34 кг. За 2 с від початку руху кожний вантаж пройшов шлях 1,2 м. Визначити прискорення вільного падіння на підставі даних досліду.

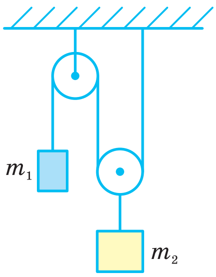


Мал. 129. До задачі 6

5. На кінцях нитки, перекинутої через нерухомий блок, підвісили тіла, маса кожного – 240 г. Який додатковий вантаж треба покласти на одне з тіл, щоб кожне з них за 4 с пройшло 160 см?

6. Через невагомий блок, закріплений на ребрі призми, грані якої утворюють кути α і β з горизонтом, перекинуто нитку (*мал. 129*). До кінців нитки прикріплено вантажі масами m_1 і m_2. Вважати, що вантаж m_1 опускається. Визначити прискорення вантажів і силу натягу нитки. Тертям знехтувати.

7. Визначити прискорення a_1 і a_2 тіл масами m_1 і m_2, а також силу натягу нитки у системі, зображеній на *мал. 130*. Масою блоку і тертям знехтувати. ***Вказівка:*** оскільки тіло m_2 закріплено до рухомого блока, то воно проходить удвічі меншу відстань порівняно з відстанню, що проходить тіло m_1, відповідно $a_1 = 2a_2$.



***Мал.* 130. До задачі 7.**

8. Два тіла масами $m_1 = 4$ кг та $m_2 = 8$ кг, які зв'язані ниткою, ковзають одне за одним по поверхні похилої площини, кут нахилу якої з горизонтом $\alpha = 30°$. Коефіцієнт тертя між першим тілом і площиною $\mu_1 = 0{,}1$, а між другим тілом і площиною $\mu_2 = 0{,}2$. Яка сила натягу нитки між тілами?

ДИНАМІКА обертального руху твердого тіла

§ 25 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

✓ *Тверде тіло. Точка прикладання сили.*
✓ *Обертальний рух твердого тіла.*

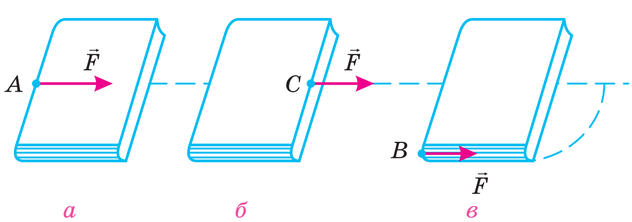
Тверде тіло. Точка прикладання сили. Ми детально розглянули закони кінематики і динаміки поступального руху матеріальної точки. Але знання законів поступального руху однієї матеріальної точки недостатньо для опису руху всього тіла. У такому випадку дослідження законів руху здійснюється за допомогою моделі – абсолютно твердого тіла.

> ***Абсолютно тверде тіло*** можна розглядати як систему жорстко зв'язаних матеріальних точок, що містяться на незмінних відстанях одна від одної.

Замість терміна «абсолютно тверде тіло» часто вживають термін «тверде тіло». Цією моделлю зручно користуватись, коли деформаціями фізичних тіл можна знехтувати.

Великого значення для характеру дії сили має точка тіла, до якої вона прикладена. У випадку твердого тіла перенесення точки прикладання сили змінює результат дії сили на тіло. Наприклад, сила F, яка прикладена до середини бокового краю книжки (точка A) і паралельна поверхні столу, де лежить книжка, викликає ковзання книги по столу у напрямі дії сили (*мал. 132*).

Якщо точку прикладання сили F перенести з точки A у точку C, що лежить на продовженні прямої, уздовж якої діє сила (лінії дії сили), то результат дії сили не зміниться. А якщо цю саму силу прикласти до точки B скраю книжки, то вона вже викличе її обертання (*мал. 132, в*).

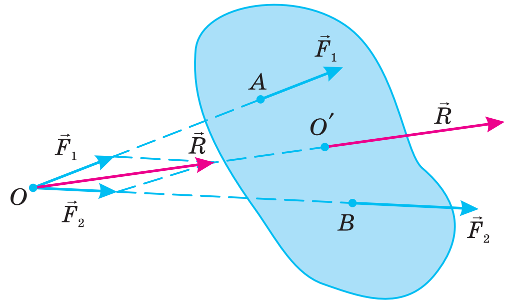


Мал. **132. Точки прикладання сили**

Отже, дія сили не змінюється, якщо точку прикладання переносити вздовж лінії дії сили.

Нехай на тіло діє дві сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, які лежать в одній площині, але прикладені до різних точок тіла (*мал. 133*). Визначимо рівнодійну цих сил. Для цього продовжимо лінії дії сил і визначимо точку їх перетину (точка *O*).

Перенесемо у точку перетину початки векторів сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ та побудуємо паралелограм сил. Отримаємо рівнодійну $\vec{R}$, яка знаходиться за межами тіла і яку можна перенести вздовж лінії дії у довільну точку тіла.

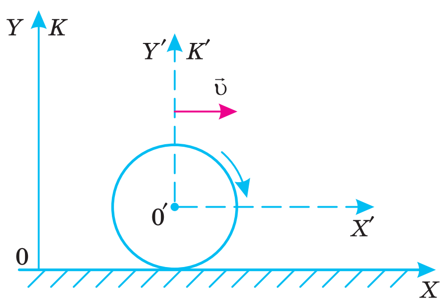


***Мал.* 133. Вектори сил можна переносити вздовж їх ліній дії**

Обертальний рух твердого тіла. Будь-який рух твердого тіла можна подати як сукупність поступального та обертального рухів.

> ***Обертальний рух*** твердого тіла навколо нерухомої осі – це рух, під час якого всі точки тіла описують кола в паралельних площинах, навколо прямої, яку називають віссю обертання.

Як уже наголошувалося, тверде тіло може одночасно здійснювати поступальний і обертальний рухи. Наприклад, рух циліндра, що котиться по горизонтальній поверхні, можна розглядати відносно нерухомої системи відліку *K* як поступальний рух, а відносно системи K', зв'язаної з віссю циліндра, – як обертальний (*мал. 134*).



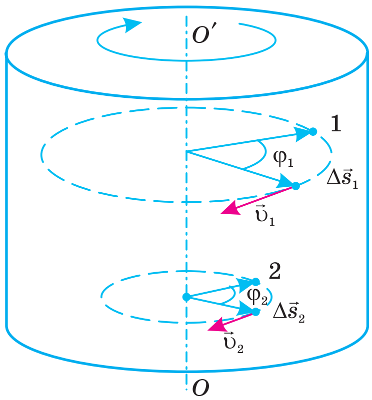
***Мал.* 134. Поступальний та обертальний рух циліндра**

Число незалежних рухів, з яких складається рух твердого тіла, ***називають ступенем свободи***. Вільне тіло має шість ступенів свободи: три поступальні – відносно координатних осей; три обертальні – навколо цих самих осей. Тіло, яке обертається навколо нерухомої (закріпленої) осі, має один ступінь свободи; циліндр, що котиться рейками, має два ступені свободи (один – поступальний, один – обертальний).

Надалі розглядатимемо ***механіку твердого тіла, що може обертатись навколо нерухомої осі***

Механіка твердого тіла, як і механіка матеріальної точки, поділяється на кінематику, динаміку і статику.

При обертальному русі навколо нерухомої осі всі точки тіла рухаються по концентричних колах, центри яких знаходиться на осі обертання (*мал. 135*).



Мал. 135. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

Обертання тіла, що має нерухому вісь, може викликати лише сила, що не є паралельною осі і не перетинає її.

Для дослідження обертального руху твердого тіла розглядатимемо лише точки, що лежать в одній площині, перпендикулярній до осі обертання. Положення кожної точки тіла у будь-який момент часу визначається її ***радіусом-вектором*** ***r***. Початком радіуса-вектора є точка перетину осі обертання з площиною, у якій лежить досліджувана точка. Цю точку називають центром обертання *O*.

Кінематика руху твердого тіла характеризується уже знайомими для вас величинами: кутом повороту $\Delta\varphi$, кутовою швидкістю ω та кутовим прискоренням ε.

Кінематичні рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі мають такий самий вигляд, як і для матеріальної точки:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}t;\ \vec{\varphi} = \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon}t^2}{2};\ \vec{\omega}^2 - \vec{\omega}_0^2 = 2\,\vec{\varepsilon}\,\vec{\varphi}.$$

Динаміка поступального руху тіла (матеріальної точки) вивчає причини виникнення прискорення тіла і дає змогу визначити його значення та напрям.

Динаміка обертального руху тіла вивчає причини виникнення кутового прискорення тіла, що може обертатись навколо осі, і уможливлює визначення значення і напряму цього прискорення.

У статиці розглядаються умови рівноваги тіла, що має вісь обертання.

Дайте відповіді на запитання

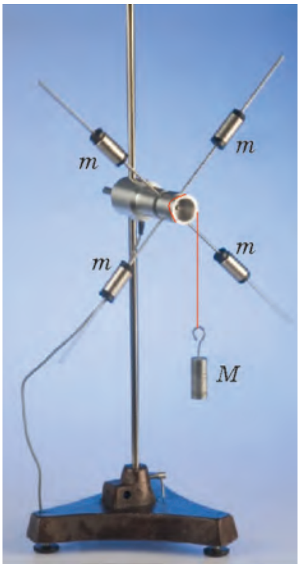
1. Що називають абсолютно твердим тілом?
2. Чи залежить результат дії сили на тверде тіло від перенесення точки її прикладення?
3. Що називають ступенем свободи?

§ 26 Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла

- *Досліди, що пояснюють закони динаміки обертального руху твердого тіла.*
- *Величини, що характеризують обертальний рух твердого тіла.*
- *Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.*

Досліди, що пояснюють закони динаміки обертального руху твердого тіла. Для дослідження динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі розглянемо такі досліди.

Візьмемо установку (*мал. 136*), що складається з двох блоків з різними радіусами. До цих блоків прикріплено чотири легкі стержні. На кожен з них розміщуємо тягарці масою m (на однаковій відстані від осі обертання). На один із блоків намотуємо нитку. До вільного кінця нитки підвішуватимемо тягарець масою M. Під дією сили тяжіння тягарець M опускатиметься, при цьому нитка розкручуватиме блок і вся установка почне обертатися.



Мал. 136.
Маятник Обербека

Установку називають маятником Обербека.

Дослідимо, як обертатиметься маятник за різних значень мас тягарців m та M, а також при їх різному розташуванні відносно осі.

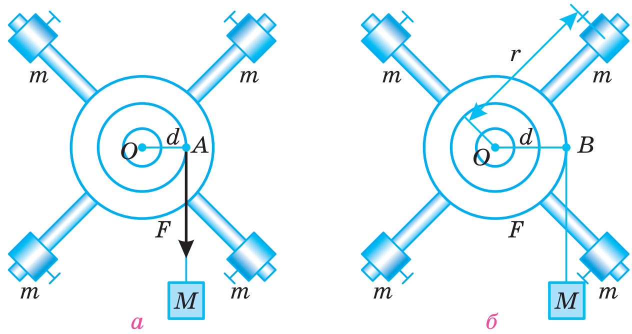
Не змінюючи положення і масу тягарців m, збільшуватимемо масу тягарця M, тим самим збільшуючи силу, що діє на маятник (*мал. 137, а*). Спостерігаючи за рухом тягарця M та обертанням маятника, можна зробити висновок, що *чим більша маса M, а отже, і діюча сила F, тим швидше обертається маятник. Це означає, що кутове прискорення тіла пропорційне діючій силі.*

Не змінюючи маси тягарців m і M та розташування малих тягарців на стержнях, намотуватимемо нитку з тягарцем M на блоки різних радіусів (*мал. 137, б*). При цьому змінюватиметься відстань d від лінії дії сили до осі обертання.

Дослід покаже, що *чим більший радіус блока, тим швидше обертатиметься маятник. Це означає, що кутове прискорення залежить не лише від значен-*

ня прикладеної сили, а й від того, як розташована лінія дії сили відносно осі обертання.

Не змінюючи масу тягарця M і відстань d, змінюватимемо маси малих тягарців m. Збільшуючи масу тягарців, помічаємо, що маятник обертається повільніше, тобто *кутове прискорення тіла залежить від маси цього тіла.*



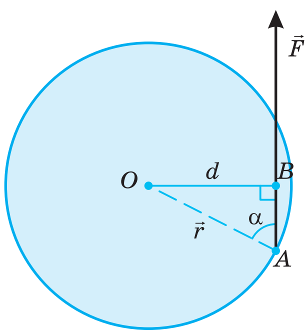
Мал. 137. Досліди з дослідження обертання твердого тіла

Не змінюючи маси всіх тягарців, змінюватимемо розташування малих тягарців на стержнях. *Чим менша відстань r, тобто, чим ближче знаходяться тягарці до осі обертання, тим більше кутове прискорення за фіксованої (сталої) сили F обертається тіло.*

Якщо проводити дослід із секундоміром, то можна помітити, що за зменшення відстані r у два рази, тягарець M опускатиметься у 4 рази швидше проходячи ту саму відстань. Це означає, що *кутове прискорення тіла, що обертається, обернено пропорційне квадрату відстані від осі обертання до цього тіла.*

На основі цих дослідів виникає необхідність введення нових величин, що характеризують обертальний рух твердого тіла: ***моменту сили*** та ***моменту інерції тіла***.

Величини, що характеризують обертальний рух твердого тіла. ***Момент сили*** **(**$\vec{M}$**)** – величина, яка характеризує обертальний ефект сили під час її дії на тверде тіло. Нехай силу $\vec{F}$ прикладено до точки А твердого тіла (*мал. 138*).



Мал. 138. Напрям дії сили та плече сили

Момент сили $\vec{M}$ відносно нерухомої точки O визначається векторним добутком радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з точки O у точку прикладання сили A, та вектором сили $\vec{F}$:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}], \text{ або } M = Fr\sin\alpha,$$

де α – кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{F}$ (*мал. 138*).

Плече сили (d) – найкоротша відстань від осі обертання до лінії дії сили: $d = r\sin\alpha$.

Тоді модуль моменту сили можна виразити як добуток модуля сили та її плеча:

$$M = Fd.$$

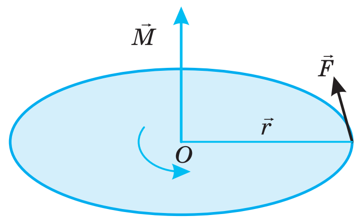
Одиниця моменту сили в СІ – ньютон на метр, $[M] = 1$ Н · м.

Момент сили називають ще ***обертальним моментом***. Прийнято вважати момент сили ***від'ємним***, якщо тіло обертається під дією цієї сили ***проти годинникової стрілки***, і ***додатним***, якщо тіло обертається ***за годинниковою стрілкою*** (з погляду читача).

Вектор моменту сили направлений вздовж осі обертання (*мал. 139*).

Виходячи з означення моменту сили, стає зрозумілим, чому обертання тіла, що має нерухому вісь, може викликати лише сила, не паралельна цій осі і така, яка її не перетинає.

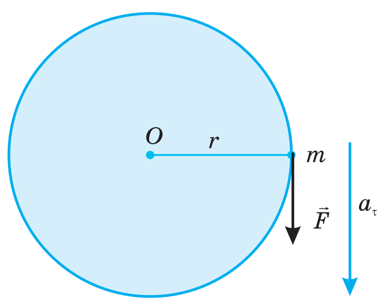
Наступною величиною, що характеризує обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі, є ***момент інерції***.



Мал. **139. Напрям вектора моменту сили**

Момент інерції (J) тіла відносно осі – скалярна величина, яка є мірою інертності тіла в обертальному русі навколо цієї осі. Відіграє таку саму роль, як і маса у поступальному русі. Момент інерції матеріальної точки (або елемента маси), що рухається по колу радіусом r визначається за формулою

$$J = mr^2.$$



Мал. **140. Обертання точки твердого тіла**

Одиниця моменту інерції кілограм-метр у квадраті, $[J] = 1$ кг·м^2.

Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі. Для виведення основного рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі виокремимо невеликий елемент маси цього тіла – точку масою m. Нехай на цю точку масою m, що розташована на відстані r від осі обертання, діє у площині обертання постійна сила F, направлена перпендикулярно до радіуса (*мал. 140*).

За другим законом Ньютона $F = ma_\tau$.

Оскільки для обертального руху суттєвим є момент сили, то помножимо обидві частини рівняння на r – відстань від осі обертання до лінії дії сили (у нашому випадку $r = d$): $Fr = ma_\tau r$.

Оскільки $Fd = M$, то, враховуючи це і те, що $a_\tau = \varepsilon r$, отримуємо: $M = m\varepsilon r^2$.

Величина mr^2 є постійною при заданому значенні m та r і є ***моментом інерції точки J***, що обертається.

Для твердого тіла, що складається з n малих елементів маси, момент інерції можна визначити, додавши моменти інерції елементів.

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Таким чином, ***основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі має вигляд $\vec{M} = J\,\vec{\varepsilon}$.***

Цей вираз тотожний формулі $F = ma$, де сила F замінена моментом сили M, замість прискорення a – кутове прискорення ε, а роль маси m виконує величина J – момент інерції тіла.

Звідси випливає, що кутове прискорення, яке отримує тверде тіло внаслідок дії моменту сили, прямо пропорційне значенню цього моменту сили та обернено пропорційне моменту інерції тіла: $\vec{\varepsilon} = \vec{M}/J$.

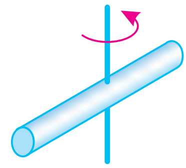
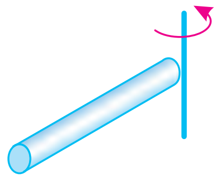
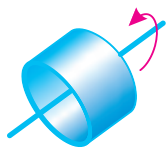
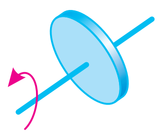
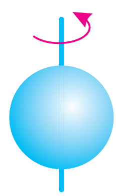
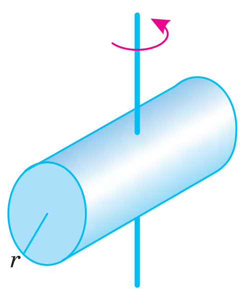
Момент інерції тіла (J) одночасно враховує вплив на кутове прискорення маси тіла, його форми, геометричних розмірів, розташування осі обертання та розподіл маси по об'єму тіла.

У таблиці на с. 148 подано моменти інерції деяких однорідних тіл.

Дайте відповіді на запитання

1. Що таке момент сили? За якою формулою він визначається? Який напрям має вектор моменту сили?
2. Що таке плече сили?
3. Що таке момент інерції тіла? Від чого залежить момент інерції певного тіла?
4. Поясніть досліди з обертання твердого тіла. Які висновки можна зробити з таких дослідів?
5. Запишіть основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла.

Моменти інерції тіл

Тіло	Як проходить вісь обертання		J
Тонкий стержень масою m і довжиною l	Перпендикулярно до стержня, через його середину		$\frac{ml^2}{12}$
Тонкий стержень масою m і довжиною l	Перпендикулярно до стержня, через його кінець		$\frac{ml^2}{3}$
Тонка трубка або кільце радіусом r	Збігається з віссю труби		mr^2
Круглий диск або циліндр масою m і радіусом r	Перпендикулярно до площини диска, через його центр		$\frac{mr^2}{2}$
Куля масою m і радіусом r	Збігається з діаметром		$\frac{2mr^2}{5}$
Круглий циліндр масою m, довжиною l і радіусом r	Перпендикулярно до осі циліндра, через його середину		$m\left(\frac{l^2}{12}+\frac{r^2}{4}\right)$

Приклади розв'язування задач

При розв'язуванні задач слід застосовувати основне рівняння динаміки та кінематичні рівняння обертального руху, а також формули, що описують властивості сил, які діють між тілами.

Задача 1. Однорідний диск масою 2500 кг та радіусом 1 м обертається навколо осі, що проходить через його центр, здійснюючи 600 об/хв. До диска притискають пластину. Якою має бути сила, що діє по дотичній до диска, щоб через 5 хв кількість обертів стала удвічі меншою?

Дано:
$m = 2500$ кг;
$r = 1$ м;
$n_1 = 600\frac{\text{об}}{\text{хв}} = 10\frac{\text{об}}{\text{с}}$;
$t = 5$ хв $= 300$ с;
$n_2/n_1 = 2$
$F - ?$

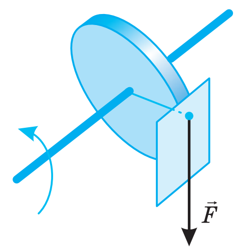
Розв'язання:

За основним рівнянням динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі $M = \varepsilon J$.

У нашому випадку (*мал. 141*):

$$M = Fr\,,\ J = \frac{mr^2}{2}\,,$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{t} = \frac{2\pi n_2 - 2\pi n_1}{t}.$$



Мал. 141.
Гальмівна дія сили

Підставляючи ці вирази в основне рівняння, отримуємо:

$$F = \frac{\pi r m(n_2 - n_1)}{t}.$$

Після підстановки числових значень: $F = -131$ Н.

Знак мінус «–» вказує на гальмівну дію сили.

Відповідь: $F = -131$ Н.

Задача 2. Через блок, що має форму диска, масою 0,1 кг та радіусом 0,025 м перекинуто нитку, до кінців якої підвішені вантажі масою 1,2 та 0,8 кг. Визначити різницю сил натягу нитки з обох боків блока та прискорення вантажів. Вважати, що нитка нерозтяжна і не може ковзати по блоку.

Дано:
$m = 0{,}1$ кг;
$r = 0{,}025$ м;
$m_1 = 1{,}2$ кг;
$m_2 = 0{,}8$ кг
$\Delta T - ?$
$a - ?$

Розв'язання:

Зробимо схематичний малюнок до задачі (*мал. 142*).

Оскільки нитка нерозтяжна, то прискорення вантажів однакові: $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$.

Враховуючи те, що за третім законом Ньютона $\vec{T}_1' = -\vec{T}_1$, $\vec{T}_2' = -\vec{T}_2$, то можна записати $|\vec{T}_1'| = |\vec{T}_1| = T_1$; $|\vec{T}_2'| = |\vec{T}_2| = T_2$.

Запишемо рівняння руху вантажів у проекціях на вибрану вісь Y (*мал. 142*):

$$T_1 - m_1 g = m_1 a \ \ (1);$$

$$T_2 - m_2 g = -m_2 a \ \ (2).$$

Моменти, що створюються силами T_1 і T_2, направлені у протилежні сторони, отже, основне рівняння динаміки обертального руху блоку набуває вигляду: $(T_1 - T_2)r = J\varepsilon$.

Оскільки нитка не ковзає, то блок під дією вантажів обертається з кутовим прискоренням $\varepsilon = \frac{a}{r}$. Момент інерції блока (диска) $J = \frac{mr^2}{2}$.

Підставляючи ці вирази в основне рівняння динаміки обертального руху, маємо:

$$(T_1 - T_2)r = \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{a}{r} \ (3).$$

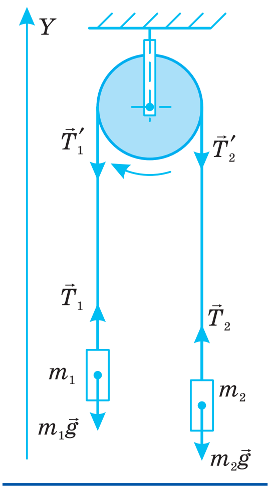
Розв'язуючи систему рівнянь (1 – 3) отримуємо:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_2 + m_1 + \frac{m}{2}}; \ T_1 - T_2 = \frac{(m_2 - m_1)mg}{2(m_2 + m_1) + m}.$$

Підставляючи числові значення, отримуємо:

$$T_1 - T_2 \approx 0{,}1 \text{ Н}, \ a \approx 1{,}9 \text{ м/с}^2 .$$

Відповідь: $T_1 - T_2 \approx 0{,}1$ Н, $a \approx 1{,}9$ м/с^2 .



***Мал.* 142. Схематичний малюнок до задачі 2**

Вправа 24

1. На барабан радіусом 0,5 м намотано нитку, до кінця якої прив'язано вантаж масою 10 кг. Визначити момент інерції барабана, якщо вантаж опускається зі сталим прискоренням 2 м/с^2.

2. Кільце масою 1 кг і радіусом 0,2 м обертається з кутовою швидкістю 100 рад/с. Кільце кладуть на горизонтальну поверхню. Внаслідок тертя кільце зупиняється через 10 с. Визначити коефіцієнт тертя.

3. Диск масою 10 кг і радіусом 10 см вільно обертається навколо осі, що проходить через центр з кутовою частотою 6 рад/с. При гальмуванні диск зупиняється за 5 с. Визначити гальмівний момент.

4. Визначити гальмівний момент, яким можна зупинити за 20 с махове колесо масою 50 кг, розподіленою по ободу колеса, і радіусом 30 см. Кутова частота обертання колеса – 20 рад/с.

5. До обода однорідного диска радіусом 0,2 м прикладена по дотичній сила 98,1 Н. При обертанні на диск діє момент сили тертя 4,9 Н · м. Визначити масу диска, якщо він обертається зі сталим кутовим прискоренням 100 рад/с^2.

6. Однорідний стержень завдовжки 1 м і масою 0,5 кг обертається у вертикальній площині навколо горизонтальної осі, що проходить через середину стержня. З яким кутовим прискоренням обертається стержень, якщо на нього діє момент сили 98,1 мН · м.

7. Маховик, момент інерції якого 63,6 кг · м^2, обертається з кутовою швидкістю 31,4 рад/с. Визначити момент сили гальмування, під дією якого маховик зупиниться за 20 с. Маховик вважати однорідним диском.

СТАТИКА

§ 27 Рівновага тіл

- ✓ *Умови рівноваги тіл.*
- ✓ *Пара сил.*
- ✓ *Центр тяжіння і центр мас*

Умови рівноваги тіл. Розділ механіки, в якому вивчаються умови рівноваги тіл, називається **статикою**.

> ***Рівновагою тіла*** називають такий стан механічної системи, в якому тіла залишаються нерухомими відносно обраної інерціальної системи відліку. (При цьому відносно будь-якої іншої інерціальної системи відліку тіло рухатиметься поступально з постійною швидкістю.)

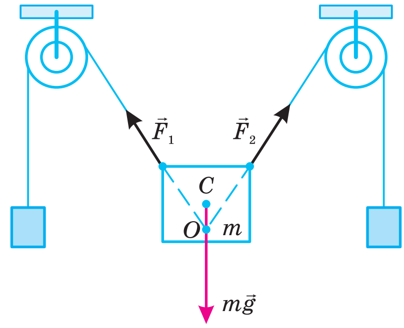
Згідно з другим законом Ньютона, для того щоб тіло залишалось в спокої (відносно обраної системи відліку), необхідно, щоб векторна сума всіх прикладених до тіла сил дорівнювала нулю.

Тому ***перша умова рівноваги*** для тіл, що не обертаються, формулюється так:

> Тіло перебуватиме в рівновазі, якщо рівнодійна прикладених сил дорівнює нулю:
>
> $$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 .$$

У координатній формі: алгебраїчна сума проекцій сил, прикладених до тіла, на довільну вісь дорівнює нулю.

На *мал. 143* показано приклад рівноваги твердого тіла під дією трьох сил. Точка перетину O ліній дії сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ не збігається з точкою прикладання сили тяжіння (центром мас C), але при рівновазі ці точки обов'язково повинні знаходитись на одній вертикалі.



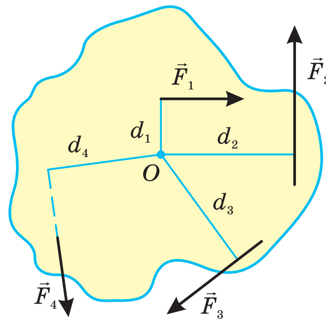
Мал. **143. Приклад виконання першої умови рівноваги**

Для обчислення рівнодійної сил, як вам уже відомо, всі сили зводяться до однієї точки.

Якщо у конкретній задачі тіло може розглядатись як матеріальна точка, виконання першої умови рівноваги достатньо для того, щоб тіло залишалось у спокої. Використовуючи першу умову рівноваги, можна розраховувати сили, які діють з боку тіла (яке перебуває в спокої) на кілька опор або підвісів.

Якщо в задачі тіло не може розглядатись як матеріальна точка, і сили, що діють на тіло, прикладені не в одній точці, то тіло може обертатися.

Обертальна дія характеризується моментом сили. Щоб тіло, закріплене на нерухомій осі, перебувало в рівновазі (*мал. 144*), необхідне виконання другої умови рівноваги:



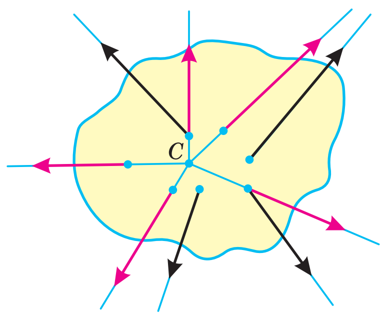
Мал.* 144. Сили, що діють на тіло, закріплене на нерухомій осі *O

Тіло перебуватиме у рівновазі, якщо алгебраїчна сума моментів на будь-який напрям нерухомої осі дорівнює нулю: $\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0;\ \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0;\ \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0.$

Нагадуємо: що прийнято вважати момент сили ***від'ємним***, якщо тіло обертається під дією цієї сили ***проти годинникової стрілки***, і ***додатним***, якщо тіло обертається ***за годинниковою стрілкою***.

Таку умову ще називають ***правилом моментів***. Так для тіла, зображеного на *мал. 155*. друга умова рівноваги має вигляд: $F_1d_1 + F_3d_3 - F_2d_2 - F_4d_4 = 0$.

Зверніть увагу! На початку вивчення динаміки поступального руху тіла (§ 16) ми домовилися так зображати вектори сил, що діють на тіло, ніби вони прикладені до однієї точки тіла. Тепер зрозуміло, щоб тіло рухалося поступально, необхідно, аби лінії дії сил (червоні вектори на *мал. 145*) перетиналися в одній точці *C* – центрі тяжіння (центрі мас).



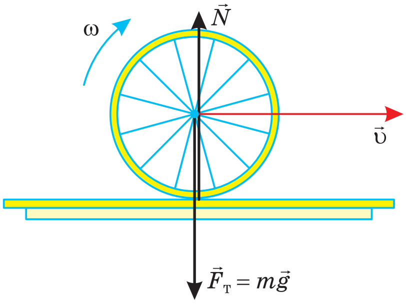
***Мал.* 145. Сумарна дія сил (вектори яких зображені червоним кольором) зумовлює поступальний рух тіла, а сумарна дія сил (вектори яких зображені чорним кольором) – обертання тіла**

Будь-яка сила, лінія дії якої не проходить через центр тяжіння (чорні вектори на малюнку), викликає обертання.

Загалом, коли тіло може одночасно рухатися поступально та обертатися, для рівноваги необхідне виконання обох умов рівноваги.

Розглянемо колесо, що котиться по горизонтальній поверхні (*мал. 146*). У будь-який момент часу для нього виконуються умови рівноваги: *рівнодійна сил і момент сил, що діють на колесо, дорівнюють нулю.*

Умови рівноваги не є умовами стану спокою тіла.



Мал. **146. Рівнодійна сил і момент сил, що діють на колесо, дорівнюють нулю**

Пара сил. Пара сил не має рівнодійної і обертає тіло, на яке вона діє.

> ***Парою сил*** називають дві рівні за модулем паралельні сили, які направлені в протилежні сторони.

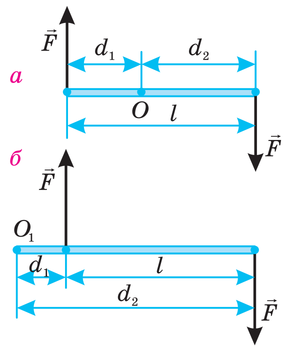
Найкоротша відстань між напрямками дії сил називається ***плечем пари***.

Розглянемо випадок, зображений на *мал. 147, а*. Обидві сили обертають тіло за годинниковою стрілкою і їх моменти $M_1 = Fd_1$ та $M_2 = Fd_2$. Тоді момент пари сил визначається алгебраїчною сумою моментів

$$M = Fd_1 + Fd_2 = F(d_1 + d_2) = Fl,$$

де l – плече пари сил. Такий самий результат отримуємо і у випадку, зображеному на *мал. 147, б*. Тут момент $M_1 = Fd_1$ від'ємний, а момент $M_2 = Fd_2$ додатний. Момент пари сил:

$$M = -Fd_1 + Fd_2 = F(d_2 - d_1) = Fl.$$



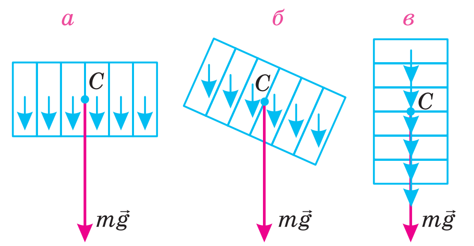
Мал. **147. Пара сил**

> Таким чином, ***момент пари сил відносно будь-якої осі обертання дорівнює добутку однієї із сил на плече пари.***

Прикладами обертання тіла під дією пари сил є обертання гайки, яку закручують; обертання звареного яйця на поверхні стола, якщо його розкрутити великим та вказівним пальцями; обертання стрілки компаса у магнітному полі Землі тощо.

Центр тяжіння. Центр мас. Ми неодноразово говорили про центр тяжіння чи центр мас. З'ясуємо суть цих понять.

> ***Центром тяжіння*** тіла називають точку *C* всередині тіла (або поза ним), відносно якої сума моментів сил тяжіння, які діють на окремі частини тіла, дорівнює нулю.



***Мал.* 148. Положення центра тяжіння при різних положення тіла не змінюється**

Положення центра тяжіння будь-якого тіла можна визначити, розбиваючи тіло на частини простішої форми і визначаючи центр прикладання рівнодійної сил тяжіння, які діють на ці частини.

Наприклад, є тонка однорідна пластинка (*мал. 148, а*).

Розіб'ємо пластинку на багато малих, рівних між собою частин. На кожну з них діє сила тяжіння – всі ці сили паралельні і рівні між собою.

Рівнодійна двох паралельних сил, направлених в одну сторону, дорівнює їх сумі й направлена в ту саму сторону. ***Точка прикладання рівнодійної ділить пряму, що сполучає точки прикладання складових сил, на відрізки, обернено пропорційні модулям цих сил.***

Оскільки у нашому випадку модулі сил однакові, то рівнодійну цих сил визначаємо послідовним додаванням спочатку двох сил, потім – їх рівнодійної і третьої сили, рівнодійної трьох сил з четвертою і т. д. Таким чином, точка прикладання рівнодійної сил тяжіння знаходиться в центрі пластини – у точці *C*.

На мал. *148, б, в* показано різні положення пластинки у просторі. При переміщенні та обертанні твердого тіла положення його центра тяжіння не змінюється.

Центр тяжіння однорідного прямокутного стержня знаходиться у його середині, трикутника – у точці перетину його медіан, паралелограма – у точці перетину його діагоналей, однорідного кільця – у його геометричному центрі.

Наведені *приклади доводять*:

якщо тіло має центр симетрії, то центр тяжіння збігається з центром симетрії. Якщо тіло має вісь симетрії, то його центр тяжіння лежить на цій осі. Якщо тіло має площину симетрії, то його центр тяжіння лежить у цій площині.

Центр тяжіння може міститись і поза тілом, наприклад, кільця, м'яча чи сірникової коробочки.

Центр мас (його ще називають центром інерції) – точка, що характеризує розподіл мас у тілі або системі тіл. Рухається він як матеріальна точка, де зосереджена вся маса системи і на яку діють усі прикладені до системи зовнішні сили.

Положення центра мас тіла в однорідному полі тяжіння збігається з положенням центра тяжіння.

Детальніше поняття центра мас буде розглянуто у § 30.

Дайте відповіді на запитання

1. Сформулюйте умови рівноваги тіла.
2. Що таке пара сил? Як визначають плече пари сил?
3. Що таке центр тяжіння тіла? Як визначити його положення?
4. Що таке центр мас?

§ 28 Види рівноваги

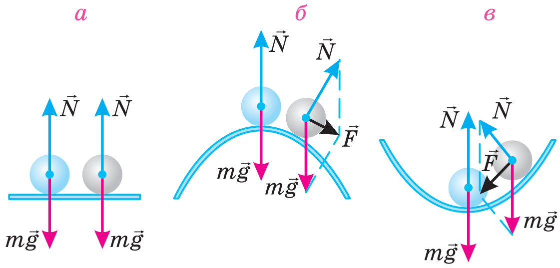
✓ *Рівновага тіл, що мають точку опори*
✓ *Рівновага тіл, що мають вісь обертання.*
✓ *Рівновага тіл на опорі.*

Рівновага тіл, що мають точку опори. Для тіл, що мають точку опори можливі три види рівноваги: байдужа, стійка і нестійка.

Байдужа рівновага – це коли за будь-якого відхилення тіло перебуває у стані рівноваги.

Рівновага називається ***стійкою***, якщо за малого відхилення тіла від цього положення рівноваги виникають сили чи моменти сил, які повертають його у стан рівноваги.

Рівновага називається ***нестійкою***, якщо за малого відхилення тіла від положення рівноваги виникають сили чи моменти сил, які віддаляють тіло від положення рівноваги.



Мал. **149. Види рівноваги:**
а **– байдужа;** ***б*** **– нестійка;** ***в*** **– стійка**

Наприклад, куля, що лежить на горизонтальній поверхні, перебуває у стані байдужої рівноваги (*мал. 149, а*), куля на поверхні сфери – приклад нестійкої рівноваги (*мал. 149, б*), а куля у ввігнутій поверхні (*мал. 149, в*) – приклад стійкої рівноваги.

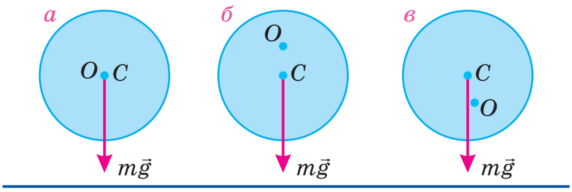
Рівновага тіл, що мають вісь обертання. Для тіл, що мають вісь обертання, також можливі всі три види рівноваги.

Рівновага тіла із закріпленою віссю обертання визначатиметься взаємним положенням центра тяжіння тіла і віссю обертання (за умови, що вони знаходяться на одній вертикальній прямій):

• ***байдужа,*** якщо вісь обертання O проходить через центр тяжіння тіла C (*мал. 150, а*);

• ***стійка***, якщо вісь обертання O знаходиться над центром тяжіння C (*мал. 150, б*);

• ***нестійка***, якщо вісь обертання O знаходиться нижче за центр тяжіння C (*мал. 150, в*).



Мал. 150. Байдужа, стійка і нестійка рівновага тіла, що має вісь обертання

Рівновага тіл на опорі. Особливим випадком є рівновага тіла на опорі. У цьому випадку сила реакції опори прикладена не до однієї точки, а розподілена по основі опори.

Тіло, що має опору, перебувають у рівновазі, якщо вертикаль, проведена з його центра тяжіння, проходить через площину опори, тобто всередині фігури, яку утворюють на площині опори тіла.

Наприклад, відома вежа у м. Піза (*мал. 151*). Вертикальна лінія CC', що проходить через центр тяжіння C, відхилена від центра основи O на 2,3 м. Вежа перекинеться, якщо лінія CC' виходитиме за межі площини основи.

Мал. 151. Умова рівноваги вежі

Дайте відповіді на запитання

1. Назвіть види рівноваги тіл і умови за яких вони можливі.
2. Виконавши пояснювальні рисунки, охарактеризуйте види рівноваги тіл, що мають: точку опори, нерухому вісь обертання, площу опори. Які види рівноваги можливі для цих тіл?
3. Поясніть умови рівноваги каменя, зображеного на *мал. 152*.

Мал. 152. Рівновага каменя

Загальні рекомендації щодо розв'язування задач із статики

У статиці використовують два типи рівнянь, які виражають умову рівноваги тіл:

1) $\sum_{i=1}^{n} F_i = 0$ – сума проекцій сил, що діють на тіло, на будь-який напрям дорівнює нулю;

2) $\sum_{i=1}^{n} M_i = 0$ – алгебраїчна сума моментів сил на будь-який напрям нерухомої осі дорівнює нулю.

Якщо тіло не обертається, а може рухатись тільки поступально і при цьому перебуває в рівновазі, то рекомендується така послідовність розв'язування задач:

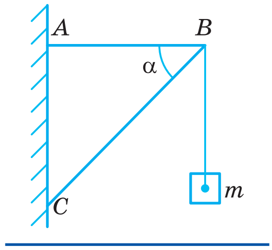
1. Виконати малюнок, вказавши на ньому всі сили, що діють на тіло.
2. Обрати систему відліку. Напрями осей координат обирати так, щоб було зручно визначати проекції сил, які діють на тіло.
3. Записати рівняння рівноваги. Якщо сил не більше трьох, то зручно побудувати трикутник сил, і, використовуючи теореми Піфагора, синусів або косинусів та інші властивості трикутника, визначити невідому величину.

Якщо тіло має вісь обертання, то під час розв'язування задач дотримуються такої послідовності:

1. Виконати малюнок, вказавши діючі сили, позначити лінії дії сил і плечі сил.
2. Скласти рівняння моментів сил відносно осі обертання з урахуванням знаків моментів. Якщо вісь обертання за умовою задачі не задано, треба вибрати таку точку тіла, яку можна вважати нерухомою. Через цю точку провести вісь, відносно якої визначати обертальні моменти.
3. Записати обидві умови рівноваги тіл: рівновагу сил і рівновагу моментів. Розв'язати складену систему відносно невідомої величини.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Вантаж масою 50 кг підвішений на кронштейні, який складається з поперечної балки AB і укосини BC (*мал. 153*). Визначити сили пружності, що виникають у балці та укосині, якщо $\angle ABC = 45°$.



Мал. **153. До задачі 1**

Дано:	***Розв'язання:***
$m = 50$ кг; $\angle ABC = 45°$	Вкажемо сили (*мал. 154*), що прикладені у точці B: сила пружності $\vec{F}_1$ стиснутої укосини BC, сила пружності $\vec{F}_2$ розтягнутої балки AB, сила тяжіння: $m\vec{g}$.
F_1 – ? F_2 – ?	

Рівнодійна сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ врівноважує силу $m\vec{g}$.

Умова рівноваги $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = 0$.

У проекціях на координатні осі ця умова рівноваги записується:

на вісь X: $F_1\cos\alpha - F_2 = 0$;

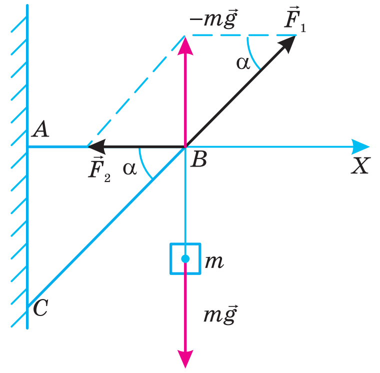
на вісь Y: $F_1\sin\alpha - P = 0$.

Розв'язуючи систему рівнянь, отримуємо:

$$F_1 = \frac{mg}{\sin\alpha}, \quad F_2 = \frac{mg\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Після обчислення: $F_1 = 343$ Н, $F_2 = 240$ Н.

Відповідь: $F_1 = 343$ Н, $F_2 = 240$ Н.



Мал. **154. Вектори сил, що прикладені до точки B**

Задача 2. Драбина завдовжки 4 м приставлена до гладенької стіни під кутом 60° до підлоги. Коефіцієнт тертя між драбиною і підлогою – 0,33. На яку висоту може піднятись людина до того, як драбина почне сковзати? Масою драбини знехтувати.

Дано:
$l = 4$ м;
$\alpha = 60°$;
$\mu = 0{,}3$
h – ?

Розв’язання:

На драбину діють сили (*мал. 155*): $\vec{F}$ – сила тиску людини на драбину; $\vec{N}_1$ та $\vec{N}_2$ – сили реакції опори стіни та підлоги; $\vec{F}_{тер}$ – сила тертя між драбиною та підлогою (за умовою задачі тертя між драбиною та стіною немає).

Ковзання драбини можна розглядати як сукупність двох рухів: обертального відносно осі, що проходить через точку O, та поступального (у напрямі, протилежному осі X).

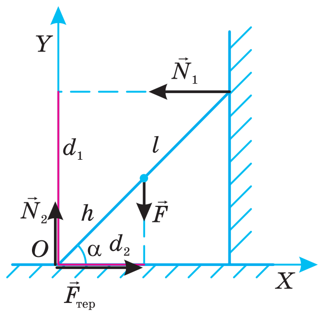
Запишемо першу умову рівноваги

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F} + \vec{F}_{тер} = 0$$

і відповідно відносно осей:

осі X: $F_{тер} - N_1 = 0$ (1);

осі Y: $N_2 - F = 0$ (2).



***Мал.* 155. Сили, що діють на драбину**

Запишемо другу умову рівноваги відносно точки O:

$$N_1 d_1 = F d_2 \text{ або } N_1 l \sin\alpha = F h \cos\alpha .$$

Звідки $h = \dfrac{N_1 l \sin\alpha}{F\cos\alpha} = \dfrac{N_1 l}{F}\operatorname{tg}\alpha$.

З рівняння (1) $N_1 = F_{тер}$.

У свою чергу $F_{тер} = \mu N_2 = \mu F$. Отже: $h = \mu l \operatorname{tg}\alpha$; $h = 0{,}33 \cdot 4м \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}8$ м.

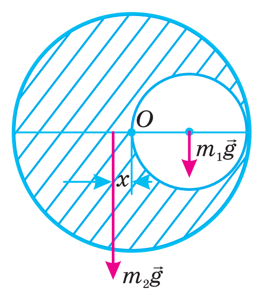
Відповідь: $h \approx 0{,}8$ м.

Задача 3. Однорідна тонка пластинка має форму круга радіусом R, в якому вирізано круглий отвір удвоє меншого радіуса, що дотикається до краю пластинки. Де буде центр тяжіння?

Дано:
R
x – ?

Розв’язання:

Очевидно, центр тяжіння пластинки знаходитиметься на її діаметрі, який проходить через центр отвору (*мал. 156*) на відстані x від центра пластинки O. Сила тяжіння пластинки з вирізаним отвором $m_1 g$ прикладена до цього центру. Якщо вставити вирізану частину пластинки на попереднє місце, то її сила тяжіння: $m_2 g$.



***Мал.* 156. До задачі 3**

З умови рівноваги пластинки: $m_1 g x = m_2 g \dfrac{R}{2}$.

Звідки $x = \dfrac{m_2 R}{2 m_1}$.

Виразимо масу однорідної пластинки через її густину і об’єм: $m = \rho\pi R^2 h$.

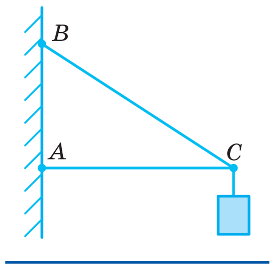
Відповідно маса вирізаної частини: $m_2 = \rho\pi\frac{R^2}{4}h$.

Тоді маса пластинки з отвором $m_1 = m - m_2 = \frac{3\rho\pi R^2 h}{4}$.

Підставляючи вирази для мас, отримуємо $x = R/6$.
Відповідь: $x = R/6$.

Вправа 25

1. До кінця стержня *AC* (*мал. 157*) завдовжки 2 м, один кінець якого шарнірно прикріплено до стіни, а інший підтримується тросом *BC* завдовжки 2,5 м, підвісили вантаж масою 120 кг. Визначити сили, що діють на трос і стержень.



Мал. 157. До задачі 1

2. На площині, що має кут нахилу до горизонту α, стоїть циліндр радіусом r. Якою має бути найбільша висота, за якої циліндр ще не перекидається, якщо він зроблений з однорідного матеріалу?

3. Чи може людина масою 60 кг підніматись по триметровій драбині масою 10 кг, яка стоїть під кутом 30° до стіни. Коефіцієнт тертя ковзання між стіною і драбиною – 0,3, а між підлогою і драбиною – 0,5.

4. Колесо радіуса R і масою m стоїть перед сходинкою, висота якої h. Яку найменшу горизонтальну силу F треба докласти до осі колеса, щоб воно могло викотитись на сходинку?

5. На дошці довжиною 4 м і масою 30 кг гойдаються двоє дітей: дівчинка, масою 30 кг і хлопчик масою 40 кг. Де має бути у дошки точка опори, якщо діти сидять на кінцях дошки?

6. З однорідного круга радіусом $R = 6$ м вирізали кружок радіусом $r = R/3$ так, що центр цього кружка розташований на відстані $2R/3$ від центра круга. Визначити положення центра тяжіння круга з вирізом.

7. П'ять куль, маси яких відповідно m, $2m$, $3m$, $4m$ і $5m$, укріплено на стержні, так, що їх центри перебувають на відстані l один від одного. Нехтуючи масою стержня, визначити положення центра тяжіння системи.

8. Двоє чоловіків несуть на плечах трубу масою 80 кг та довжиною 5 м. Перший чоловік підтримує трубу на відстані 1 м від її краю, а другий чоловік – її протилежний край. Визначити силу тиску, який чинить труба на кожного з чоловіків.

9. Дві сторони дротяної рамки у формі рівностороннього трикутника виготовлено з алюмінієвого дроту, а одну – з мідного. Визначити положення центра тяжіння рамки, якщо дріт має однаковий переріз, а сторона трикутника дорівнює 1 м.

10. Яким чином можна визначити модуль сили тяжіння неоднорідного стержня, якщо у вашому розпорядженні є: штатив з муфтою і затискачем, нитка, мідний дріт, лінійка, олівець, таблиця густини речовини і сам неоднорідний стержень.

РУХ У НЕІНЕРЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ ВІДЛІКУ

§ 29 Опис руху в неінерціальних системах відліку

- ✓ *Дія законів Ньютона в неінерціальних системах відліку, що рухаються прямолінійно.*
- ✓ *Сили інерції в системі відліку, що обертається з постійною кутовою швидкістю.*

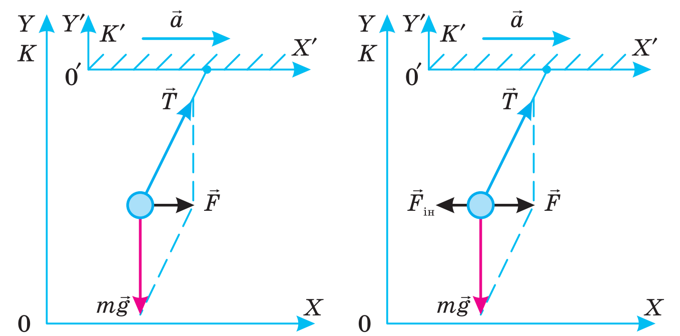
Дія законів Ньютона в неінерціальних системах відліку, що рухаються прямолінійно. Закони Ньютона у тому вигляді, як ми їх вивчили, виконуються лише в інерціальних системах відліку. У § 17 ми наводили приклад, який доводить, що рух тіла відносно інерціальної та неінерціальної систем відліку описується по-різному.

> ***Неінерціальна система відліку*** – це система відліку, що рухається з прискоренням (поступально чи обертаючись) відносно інерціальної системи відліку.

На практиці часто доводиться розв'язувати задачі, коли необхідно уміти описати рух з погляду спостерігача, який знаходиться в неінерціальній системі відліку, особливо у тих випадках, коли відносно цієї системи відліку тіло перебуватиме у стані спокою.

Розглянемо спершу випадок опису руху тіла в неінерціальній системі відліку, що рухається прямолінійно.

Нехай у вагоні потяга, що набирає швидкість, а отже, рухається з прискоренням $\vec{a}$, висить на нитці кулька (*мал. 158, а*). Відносно землі (інерціальної системи відліку *K*) кулька має таке саме прискорення, як і вагон поїзда, і воно спричинене рівнодійною $\vec{F}$ сил тяжіння $m\vec{g}$ і натягу нитки $\vec{T}$. Другий закон Ньютона у цьому випадку має вигляд: $\vec{F} = m\vec{a}$.



Мал. 158, а. Сили, що діють на кульку в інерціальній системі відліку

Мал. 158, б. Сили, що діють на кульку в неінерціальній системі відліку

Відносно вагона (неінерціальної системи відліку K') кулька перебуває у стані спокою (*мал. 158, б*). У цьому випадку сила $\vec{F}$ має бути скомпенсована. Такою силою є ***сила інерції*** $\vec{F}_{\text{ін}}$. І другий закон Ньютона у цьому випадку записується у вигляді: $\vec{F}+\vec{F}_{\text{ін}}=0$.

Сила інерції зумовлена не взаємодією тіл, а прискореним рухом самої системи відліку. Сила інерції прикладена до тіла, але не можливо вказати тіло, з яким відбувається взаємодія, тому для неї третій закон Ньютона не може бути застосований.

Основне рівняння динаміки в неінерціальних системах відліку за формою аналогічне рівнянню другого закону Ньютона, але в рівняння, крім «сил, що реально діють», вводяться сили інерції.

Дію сили інерції відчував майже кожен з вас, коли за різкого гальмування, наприклад, автобуса чи трамвая, сила інерції штовхає вперед.

Властивість сил інерції дещо схожа на силу земного тяжіння. Під дією сили тяжіння всі тіла рухаються з однаковим прискоренням, тобто $F_{\text{тяж}} \sim m$.Сили інерції надають тілу також відповідного прискорення, з яким рухається неінерціальна система відліку, тобто – $F_{\text{ін}} \sim m$. (Еквівалентність сил інерції і гравітаційних сил закладена А. Ейнштейном у загальну теорію відносності. Про це ми поговоримо з часом.)

Таким чином, властивості сил інерції полягають у тому, що:

а) вони неінваріантні відносно переходу з однієї неінерціальної системи відліку в іншу;

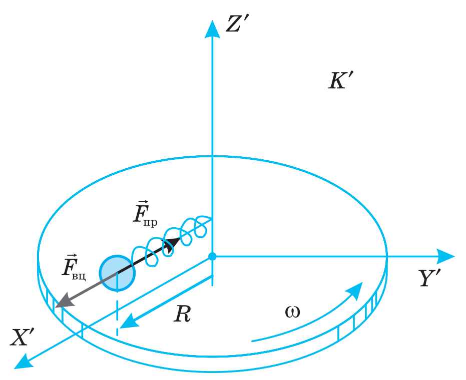
б) вони не підпорядковуються третьому закону Ньютона;

в) вони є зовнішніми силами відносно рухомого тіла;

г) вони пропорційні масі тіла;

ґ) рух тіла під дією сил інерції аналогічний рухові у гравітаційному полі.

Сили інерції в системі відліку, що обертається з постійною кутовою швидкістю. Розглянемо рух тіла в неінерціальній системі відліку (K'), що обертається відносно інерціальної з постійною кутовою швидкістю. Прикладом такого руху може бути рух кульки, що знаходиться на одному з кінців пружини, яка другим кінцем закріплена до осі диска, який може обертатись (*мал. 159*). Якщо диск не обертається – пружина не деформована. При розкручуванні диска, кулька розтягує пружину доти, доки сила пружності не набуває значення: $F_{\text{пр}} = m\omega^2 R$. Відносно інерціальної системи відліку (Землі) кулька рухається по колу з доцентровим прискоренням, яке надає йому сила пружності.



Мал. 159. Рух тіла в неінерціальній системі відліку, що обертається

Відносно неінерціальної системи відліку K' (диска) кулька нерухома. Тобто сила пружності врівноважується силою інерції (у цьому випадку її називають ***відцентровою силою інерції*** $\vec{F}_{вц}$), що направлена вздовж радіуса диска від його осі обертання. Відцентрова сила інерції, як і будь-яка сила інерції, існує лише в неінерціальній системі відліку і зникає при переході в інерціальну (тобто є неінваріантною величиною).

Ще одним прикладом є розкручування «молота», закріпленого на тросі (*мал. 160*). Відносно інерціальної системи відліку (Землі) молот рухається по колу, отже, має доцентрове прискорення, яке надає йому сила пружності (сила натягу троса). Відносно спортсмена, який обертається, кулька нерухома, отже, на неї, крім сили натягу троса, діє відцентрова сила інерції.

Мал. 160. Рух молота під дією сили натягу троса

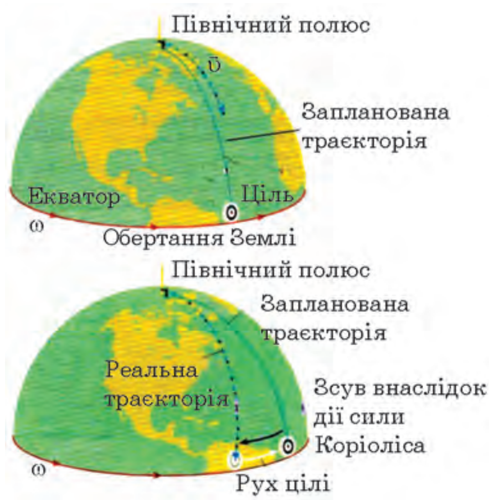
Майже в усіх розв'язаних нами задачах не враховувалося обертання Землі, бо її вважали інерціальною системою відліку. При точних розрахунках необхідно враховувати відцентрову силу інерції, що діє на тіла, які обертаються разом із Землею. Так у § 20 ми вже дослідили вплив добового обертання Землі на відмінності значення $\vec{g}$ залежно від широти місцезнаходження.

Окрім відцентрової сили інерції у неінерціальній системі відліку, що обертається, існує також сила інерції Коріоліса.

> ***Сила Коріоліса*** – сила інерції, що діє в неінерціальній системі відліку, яка обертається з кутовою швидкістю ω, на тіло, яке рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon}$.

Сила Коріоліса перпендикулярна до вектора $\vec{\omega}$ і діє у площині, перпендикулярній до осі обертання системи. Вона перпендикулярна до вектора швидкості руху тіла, а отже, змінює тільки її напрям, не змінюючи модуля швидкості.

При вільному падінні сила Коріоліса відхиляє тіла на схід. Це відхилення пропорційне синусу широти місцезнаходження, отже, максимальне на екваторі і дорівнює нулю на полюсах. Так, при падінні тіла на екваторі з висоти 30 м відхилення становить 3,6 мм. Силу Коріоліса необхідно враховувати при точному наведенні на ціль під час стрільби на далекі відстані (*мал. 161*).



Мал. 161. Дія сили Коріоліса

У Північній півкулі підмивання правих берегів рік, що течуть на південь, зумовлене також дією сил інерції Коріоліса.

Ще одним прикладом вияву дії сили Коріоліса є поворот площини коливань маятника (про це йтиметься детальніше у § 42).

Дайте відповіді на запитання

1. Яка система відліку називається неінерціальною?
2. Що таке сили інерції? У чому їх особливість?
3. Що таке сила Коріоліса? Які вияви цієї сили?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. По похилій площині завдовжки 2,5 м одночасно почали рух два тіла: перше – вгору з початковою швидкістю 50 см/с, друге – вниз без початкової швидкості. Визначити час зустрічі тіл. Тертя не враховувати.

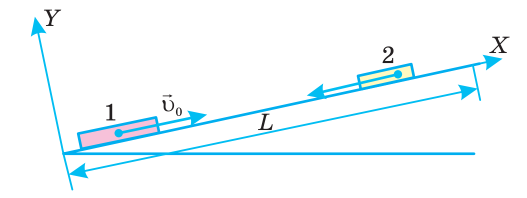
Дано:
$L = 2{,}5$ м;
$\upsilon_0 = 50$ см/с $= 0{,}5$ м/с

t – ?

Розв'язання:

1. Розв'яжемо задачу в системі відліку, пов'язаній із Землею, тобто в інерціальній системі.

Виберемо координатні осі так, як показано на *мал. 162*.



Мал. 162. Рух тіл в інерціальній системі відліку

Запишемо рівняння руху тіл відносно обраної системи координат.

Для першого тіла:

$$x_1 = \upsilon_0 t - \frac{at^2}{2},$$

для другого: $x_2 = L - \frac{at^2}{2}$.

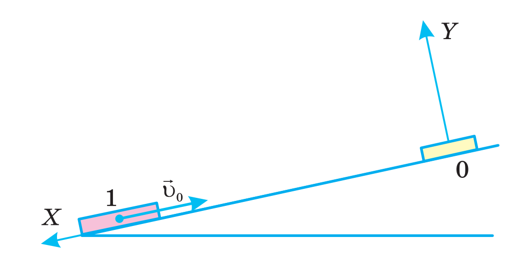
Прискорення руху тіл визначається лише кутом нахилу площини і буде однаковим за модулем для обох тіл. У момент зустрічі координати тіл дорівнюватимуть одна одній: $x_1 = x_2$.

$$\upsilon_0 t - \frac{at^2}{2} = L - \frac{at^2}{2}, \text{ звідки } t = \frac{L}{\upsilon_0}.$$

Підставляючи числові дані, отримуємо: $t = 5$ с.

2. Розв'яжемо задачу у неінерціальній системі відліку, пов'язаній з тілом 2 (*мал. 163*).

Тоді відносно такої системи відліку тіло 2 нерухоме, а перше рухається рівномірно і прямолінійно зі швидкістю υ_0. Час руху тіла: $t = \frac{L}{\upsilon_0} = 5$ с.



Мал. 163. Рух першого тіла відносно другого

Відповідь: $t = 5$ с.

Зверніть увагу! Розв'язування цієї задачі підтверджує рівність інерціальних і неінерціальних систем відліку в кінематиці. Крім того, розв'язання задачі в неінерціальній системі відліку більш спрощене.

Задача 2. Клин, на поверхні якого знаходиться брусок, рухається вертикально вгору з прискоренням $\vec{a}$. Брусок зісковзує вниз. Кут нахилу клина α. Визначити прискорення бруска під час руху по поверхні клина за умови, що поверхня клина гладенька ($\mu = 0$).

Дано:	***Розв'язання:***
a; α; $\mu = 0$	Розв'яжемо задачу в неінерціальній системі відліку (рухомий клин), яка рухається з прискоренням $\vec{a}$ вертикально вгору відносно інерціальної системи відліку (Землі).
b – ?	У неінерціальній системі відліку на брусок діють сили (*мал. 164*):

$m\vec{g}$ – сила тяжіння, $\vec{N}$ – сила реакції опори; $\vec{F}_{\text{ін}}$ – сила інерції, яка прикладена до тіла і напрям вектора якої протилежний напряму вектора прискорення рухомої системи (клину). Рівнодійна цих сил надає бруску прискорення $\vec{b}$, з яким він зісковзує вниз відносно неінерціальної системи відліку. Запишемо друге рівняння Ньютона: $\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{ін}} = m\vec{b}$.

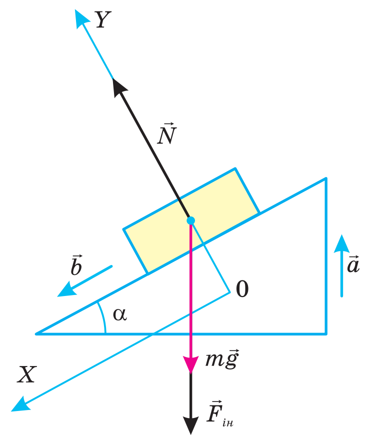
Спроектуємо вказані сили на координатні осі:

на вісь X: $mg\sin\alpha + ma\sin\alpha = mb$;

на вісь Y: $N - mg\cos\alpha - ma\cos\alpha = 0$.

Розв'язуючи систему рівнянь, отримуємо:

$$b = (g + a)\sin\alpha.$$



Мал. 164. До задачі 2

Відповідь: $b = (g + a)\sin\alpha$.

Задача 3. Відро з водою обертають у вертикальній площині на мотузці завдовжки l. З якою найменшою швидкістю необхідно обертати відро, щоб вода не виливалася при проходженні відра через крайнє верхнє положення? Розв'язати задачу в інерціальній і неінерціальній системах.

Дано:	***Розв'язання:***
l	Розв'яжемо задачу в інерціальній системі відліку (*мал. 165*) – відносно Землі.
$\upsilon_{\min}$ – ?	

У цій системі на воду діють дві сили: $m\vec{g}$ – сила тяжіння та $\vec{N}$ – сила тиску дна відра. Рівнодійна цих сил надає воді доцентрового прискорення $a = \upsilon^2/l$:

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

У проекціях на вісь X: $mg + N = \dfrac{m\upsilon^2}{l}$.

Мінімальна швидкість обертання відра визначається з умови, що $N = 0$. Отже, $\upsilon_{\min} = \sqrt{gl}$.

Розв'яжемо задачу в неінерціальній системі відліку (*мал. 166*). Оберемо за тіло відліку воду і пов'яжемо з нею систему координат. У цьому випадку сама система відліку обертатиметься навколо нерухомої Землі.

Відносно неінерціальної системи відліку вода нерухома, отже, рівнодійна сил дорівнює 0:

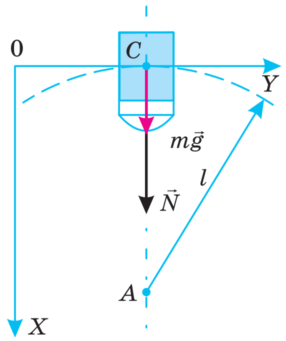
$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{ін}} = 0.$$

У проекціях на вісь X: $mg + N - F_{\text{відц}} = 0$, де відцентрова сила інерції $F_{\text{відц}} = \dfrac{m\upsilon^2}{l}$.

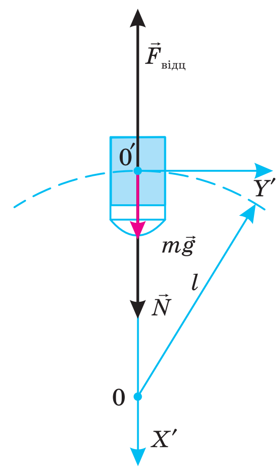
Мінімальна швидкість обертання відра визначається з умови, що $N = 0$.

Отже, $\upsilon_{\min} = \sqrt{gl}$.

Відповідь: $\upsilon_{\min} = \sqrt{gl}$.



Мал. 165. Сили, що діють на воду в інерціальній системі відліку



Мал. 166. Сили, що діють на воду в неінерціальній системі відліку

Вправа 26

1. Яким має бути горизонтальне прискорення автомобіля, щоб стійке положення пасажира відповідало куту його нахилу 45°?

2. У ліфті, який під час руху вниз має прискорення 1 м/с^2, людина випустила з рук портфель. Яке прискорення матиме портфель відносно ліфта і Землі?

3. На горизонтальній дошці лежить вантаж. Коефіцієнт тертя між дошкою і вантажем 0,1. Яке прискорення в горизонтальному напрямі слід надати дошці, щоб вантаж міг з неї зісковзнути?

4. Тіло масою m рухається вниз по похилій площині. Визначити прискорення, з яким зісковзує тіло з похилої площини, та силу реакції опори, якщо кут нахилу площини α, а коефіцієнт тертя між тілом і площиною – μ. Розв'язати задачу в неінерціальній та інерціальній системах відліку.

5. Клин, на поверхні якого знаходиться брусок, рухається вертикально вгору з прискоренням $\vec{a}$. Брусок зісковзує вниз. Кут нахилу клина α. Визначити прискорення бруска під час руху по поверхні клина за наявності тертя ($\mu \neq 0$).

6. Гладенький клин ($\mu = 0$), на поверхні якого знаходиться брусок, рухається ліворуч з прискоренням $\vec{a}$. Брусок зісковзує вниз. Кут нахилу клина α. Визначити прискорення бруска під час руху по поверхні клина.

7. Клин, на поверхні якого знаходиться брусок, рухається ліворуч. Яким має бути прискорення клина, щоб брусок не ковзав по його поверхні? Кут нахилу клина $\alpha = 45°$, коефіцієнт тертя між бруском та поверхнею клина $\mu = 0{,}2$.

8. Невелике тіло масою m зісковзує без тертя з поверхні сфери, радіус якої R. На якій висоті тіло відірветься від поверхні сфери?

Найголовніше в розділі 2

1. Закони Ньютона виконуються в інерціальних системах відліку і дають змогу наближено розв'язувати будь-які задачі механіки. Якщо відомі сили, прикладені до тіла, можна визначити його прискорення у будь-який момент часу, у будь-якій точці траєкторії.

2. Динаміка поступального руху тіла (матеріальної точки) вивчає причини виникнення прискорення тіла та дає змогу визначити його значення і напрям.

3. Динаміка обертального руху тіла (твердого) вивчає причини виникнення кутового прискорення тіла, що може обертатися навколо нерухомої осі і дає змогу визначити значення і напрям цього прискорення.

4. У механіці розрізняють і досліджують сили пружності, тертя і всесвітнього тяжіння. Сили пружності і сили тертя мають електромагнітну природу і є виявом взаємодії частинок, з яких складаються тіла. Сила всесвітнього тяжіння має гравітаційну природу і діє між усіма без винятку тілами.

5. Якщо сума прикладених до тіла сил дорівнює нулю, то тіло перебуває у стані спокою або прямолінійного рівномірного руху (але при цьому тіло може обертатись).

6. Щоб тіло перебувало у стані рівноваги – стані, за якого в системі відліку, що розглядається, немає переміщення будь-яких його точок під дією прикладених до нього сил, необхідне виконання двох умов: векторна сума прикладених до тіла сил має дорівнювати нулю і алгебраїчна сума моментів прикладених до тіла сил (відносно будь-якої нерухомої осі) – також нулю.

7. Згідно з принципом відносності Галілея координати та швидкість руху є величинами відносними. Прискорення не залежить від системи відліку лише у тому випадку, якщо системи рухаються одна відносно одної прямолінійно і рівномірно. Якщо система відліку рухається з прискоренням відносно інерціальної системи відліку, то вона називається неінерціальною системою відліку.

8. Основне рівняння динаміки в неінерціальних системах відліку за формою аналогічне рівнянню другого закону Ньютона, але в рівняння, крім «сил, що реально діють», вводяться сили інерції. Властивість сил інерції дещо схожа на силу земного тяжіння. Під дією сили тяжіння всі тіла рухаються з однаковим прискоренням, тобто $F_{тяж} \sim m$. Сили інерції надають тілу такого самого прискорення, з яким рухається неінерціальна система відліку, тобто, $-F_{ін} \sim m$.

Розділ 3

ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ В МЕХАНІЦІ

Як ми переконалися, закони Ньютона, записані через поняття сили і прискорення, дають змогу розв'язати механічну задачу, описати рух тіла в усіх деталях. Проте є і такі причини, які змушують шукати інші форми запису цих законів, а також інші форми підходу до вивчення руху матерії.

Досить часто необхідно знати кінцевий стан руху тіла, виходячи із заданих початкових умов, не досліджуючи особливості поведінки тіл під час взаємодії. Тобто ***розраховувати кінцевий результат дії сили***. Наприклад, під час забивання молотом стовпчика в землю, необхідно знати кінцевий результат удару: глибину занурення стовпчика в землю. Під час гри у більярд необхідно знати, як рухатимуться кулі після удару, якщо відомо їх початкове розташування. Як видно з цих прикладів, розв'язувати механічну задачу потрібно уже не для руху одного тіла, а ***системи тіл***.

Закони Ньютона застосовувалися до тіл, маса яких залишалась незмінною $m = \text{const}$. А як бути, ***якщо маса тіла змінюється***?

Ми розглядали випадки, коли тіла змінювали швидкість протягом деякого часу поступово – від одного значення до іншого, користуючись поняттям прискорення. Але у природі трапляються випадки, коли ця умова не виконується. Наприклад, електрони в атомі можуть змінювати стан руху дискретно (стрибками).

У розділі «Закони збереження в механіці» механічний рух розглядається з погляду перетворення і збереження енергії. ***Енергетичний підхід до вивчення механічного руху*** більш загальний, ніж кінематичний і динамічний, і ґрунтується на законах збереження.

Основні закони збереження в механіці – це закон збереження імпульсу, моменту імпульсу, енергії. Закони збереження, як і закони Ньютона, – результат теоретичного узагальнення дослідних фактів.

Закони збереження є фундаментальними законами природи, оскільки не залежать від природи і характеру сил, що взаємодіють. За їх допомогою можна досліджувати поведінку тіл навіть у тих випадках, коли сили залишаються невідомими.

Окрім названих, є інші закони збереження (наприклад, закон збереження електричного заряду), про які ми дізнаємося, вивчаючи наступні розділи фізики.

§ 30 Імпульс. Закон збереження імпульсу

✓ *Імпульс тіла та імпульс сили.*
✓ *Системи тіл. Закон збереження імпульсу.*

Імпульс тіла та імпульс сили. Термін «імпульс» походить від лат. *impulsus*, що означає «поштовх». У механіці цим терміном позначаються дві величини: імпульс тіла та імпульс сили.

Враховуючи, що $\vec{a} = \dfrac{\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0}{t}$, формулу другого закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ можна записати в такому вигляді:

$$\vec{F} = m\frac{\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0}{t},$$

де $\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0$ – зміна швидкості, t – час, за який ця зміна відбувається, а отже, і час дії сили.

Перепишемо цю формулу у такому вигляді: $\vec{F}t = m\vec{\upsilon} - m\vec{\upsilon}_0$. Добуток $m\vec{\upsilon}$ називається імпульсом тіла, а добуток $\vec{F}t$ – імпульсом сили.

Імпульс тіла (або кількість руху – так називав цю величину І. Ньютон) – фізична величина, що характеризує механічний рух:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}.$$

Одиниця імпульсу тіла – кілограм на метр за секунду, $[p] = 1$ кг · м/с.

Імпульс сили визначається добутком середнього значення сили за певний інтервал часу та тривалістю цього інтервалу: $\vec{F}t$.

Одиниця імпульсу сили – ньютон-секунда, $[Ft] = 1$ Н · с.

Імпульс сили – це фізична величина, яка одночасно враховує вплив модуля, напряму і часу дії сили на зміну стану руху тіла.

Це означає, що:

- одна і та сама сила протягом одного і того самого інтервалу часу викликає у будь-якого тіла однакову зміну імпульсу;
- одна і та сама сила, що діє протягом одного і того самого інтервалу часу, викликає у тіл різної маси різну зміну швидкості.

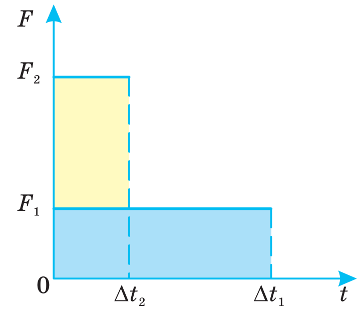
Тож ***другий закон Ньютона*** можна сформулювати й так:

у результаті дії сили змінюється імпульс тіла; або – ***зміна кількості руху тіла дорівнює імпульсу всіх сил, що на нього діють***:

$$\Delta\vec{p} = m\vec{\upsilon} - m\vec{\upsilon}_0 = \vec{F}t\,.$$

Саме у такому вигляді другий закон динаміки був сформульований самим І. Ньютоном.

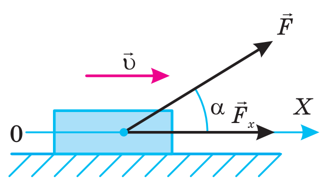
Імпульс тіла та імпульс сили є векторними величинами. Вектор імпульсу направлено так само, як і вектор швидкості руху тіла, а вектор імпульсу сили – так, як вектор сили.



Мал. 167.
Рівні імпульси сил

Як видно з наведеної формули, імпульс сили характеризується добутком сили на час її дії. Це означає, що однакові наслідки взаємодії можуть бути отримані, коли на тіло діє незначна сила, але протягом тривалого часу, і у разі, якщо велика сила діє короткочасно. Якщо відповідно в координатах F і t відобразити модуль сили F_1 і її час дії t_1 та модуль сили F_2 з її часом дії t_2 (причому $F_1\,t_1 = F_2\,t_2$), то площі заштрихованих прямокутників будуть рівними (*мал. 167*).

Цей висновок широко використовується і враховується в техніці та побуті. Так, правила роботи на баштових кранах забороняють піднімати великі вантажі ривком, оскільки для зміни імпульсу вантажу за дуже короткий час слід прикласти дуже велику силу, яка може перевищити міцність тросів. Так само пояснюється обривання гички буряка чи моркви при різкому їх вириванні із землі.

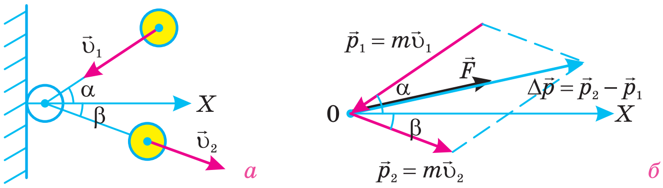


Мал. 168. Зміну імпульсу тіла визначає проекція сили $\vec{F}$ на вісь X, напрям якої збігається з напрямом руху

Для «пом'якшення удару» при гальмуванні на різних видах транспорту застосовують ресори та амортизатори: пристрої, за допомогою яких збільшується час гальмування і тим самим зменшується сила удару.

Якщо сила діє під певним кутом до напряму руху тіла, то зміна імпульсу визначається проекцією цієї сили на вісь, спрямовану вздовж напряму руху (*мал. 168*).

Якщо тіло змінює напрям руху, то зміну імпульсу визначають за діаграмою імпульсів. Наприклад, м'яч масою m вдаряється об стіну зі швидкістю υ_1 під кутом α та відлітає від неї зі швидкістю υ_2 під кутом β (кути вираховуються між напрямом руху і нормаллю X до стіни) (*мал. 169, а*).



Мал. 169: *а* – удар м'яча об стіну; *б* – діаграма імпульсів

На *мал. 169, б* показано діаграму імпульсів, де вектор зміни імпульсу $\Delta\vec{p}$ визначається за правилом паралелограма. Під час удару на стіну діє сила $\vec{F}$, напрям якої збігається з напрямом вектора зміни імпульсу $\Delta\vec{p}$.

Системи тіл. Закон збереження імпульсу. На практиці доводиться розглядати рух не одного тіла, а спільний рух декількох взаємодіючих тіл. Наприклад, рух планет Сонячної системи. Для опису поведінки руху системи тіл використовують певні величини, що характеризують ***систему в цілому***.

Такими поняттями, наприклад, є маса, імпульс і центр мас системи.

Маса системи – це сума всіх мас тіл, що входять до цієї системи $m_c = \sum_{i=1}^{N} m_i$.

Центр мас системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює сумарній масі тіл системи, а сила, що діє, – геометричній сумі зовнішніх сил, що впливають на систему.

Координату центра мас системи тіл масами m_1, m_2, ..., m_n, розміщених на одній прямій, визначають за формулою:

$$x_{\text{цм}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

де x_1, x_2, ... x_n – координати тіл.

Наприклад, необхідно визначити положення центру мас системи «Земля – Місяць». Вважатимемо, що початок відліку вісі X знаходиться в центрі Землі

$$(x_1 = 0)\text{, тоді } x_{\text{цм}} = \frac{m_З \cdot 0 + m_М \cdot l}{m_З + m_М} = 4660 \text{ км},$$

де $m_З = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг; $m_М = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг; $l = 3{,}84 \cdot 10^5$ км – середня відстань між центрами тіл.

Оскільки середній радіус Землі дорівнює 6370 км, то це означає, що центр мас планетної системи «Земля – Місяць» міститься на глибині 1710 км від поверхні Землі. Земля і Місяць обертаються коловими орбітами навколо центру мас, а центр мас, у свою чергу, рухається коловою орбітою навколо Сонця.

У природі всі тіла взаємодіють між собою. Проте взаємодія з деякими тілами настільки незначна, що її можна не враховувати. Для цього у фізиці використовують поняття ***ізольованої***, або ***замкненої, системи тіл***.

Імпульс системи – це векторна сума імпульсів тіл системи: $\vec{p}_c = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ або $\vec{p}_c = m_c\vec{\upsilon}_c$ – імпульс системи тіл дорівнює добутку маси системи m_c тіл на швидкість руху центру мас системи υ_c.

Замкнена (ізольована) система – система тіл, які взаємодіють лише між собою і не взаємодіють з тілами, що не входять до цієї системи.

Сили, з якими взаємодіють тіла, що входять до замкненої системи, називають ***внутрішніми***. Тож можна стверджувати, що на замкнену систему не діють зовнішні сили.

Нехай замкнена система містить два тіла масами m_1 та m_2, які у початковий момент у вибраній інерціальній системі відліку мали швидкості $\vec{\upsilon}_1$ та $\vec{\upsilon}_2$. Через деякий час їх швидкості внаслідок взаємодії змінилися до $\vec{\upsilon}_1'$ та $\vec{\upsilon}_2'$. За третім законом Ньютона тіла взаємодіють з силами рівними за модулем і протилежними за напрямом: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Виразимо ці сили за другим законом Ньютона, записавши його в імпульсній формі:

$$\vec{F}_1 = m_1 \frac{\vec{\upsilon}_1' - \vec{\upsilon}_1}{t}, \ \vec{F}_2 = m_2 \frac{\vec{\upsilon}_2' - \vec{\upsilon}_2}{t}. \text{ Тоді } \frac{m_1\vec{\upsilon}_1' - m_1\vec{\upsilon}_1}{t} = -\frac{m_2\vec{\upsilon}_2' - m_2\vec{\upsilon}_2}{t}.$$

Якщо перенести імпульси тіл до взаємодії по один бік рівності, а після взаємодії – по інший, то отримаємо:

$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2'$ – ***закон збереження імпульсу.***

Справедливість закону збереження імпульсу ми показали на прикладі системи, що складається з двох тіл, які взаємодіють. Закон виконується і для ізольованої системи з ***довільною кількістю тіл, що взаємодіють.***

Векторна сума імпульсів тіл, які утворюють замкнену систему, є величиною сталою під час будь-яких рухів і взаємодій тіл системи:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + \ldots + m_n\vec{\upsilon}_n = \text{const}$$

Зазначимо, що закон збереження імпульсу можна застосовувати і для неізольованих систем за умови, що сума імпульсів зовнішніх сил дорівнює нулю.

Ми отримали закон збереження імпульсу, виходячи з законів Ньютона, але слід наголосити, що закон збереження імпульсу не є наслідком законів Ньютона. Це – ***самостійний фундаментальний закон природи.*** А це означає, що він виконується для тіл макро- і мікросвіту. Згідно з цим законом, що б не відбулось у замкненій системі (співудари, вибухи, хімічні реакції тощо), імпульс системи тіл залишається незмінним. Це уможливлює аналіз руху тіл системи навіть у тих випадках, коли внутрішні сили невідомі.

Одним із прикладів дії закону збереження імпульсу є удар. Під ударом розуміють таку взаємодію тіл, яка здійснюється миттєво. Як правило, під час удару взаємодія відбувається через сили пружності, які виникають у тілах унаслідок їх деформації під час стискання. Якщо після удару розміри і форма взаємодіючих тіл повністю відновлюється, то такий удар називають ***абсолютно пружним.***

У природі спостерігаються також взаємодії, які називаються ***непружними.*** У таких випадках тіла, що взаємодіють, утворюють нове тіло, маса якого дорівнює сумі мас тіл, які взаємодіяли.

Дайте відповіді на запитання

1. Що таке імпульс тіла та імпульс сили? Який між ними зв'язок?
2. Як залежить зміна імпульсу тіла від значення сили і часу її дії?
3. Як розрахувати зміну імпульсу тіла, якщо сила діє під кутом до його переміщення?

4. Як розрахувати зміну імпульсу тіла, якщо воно змінює напрям руху?

5. Яку систему тіл називають замкненою? Які сили називають внутрішніми?

Приклади розв'язування задач

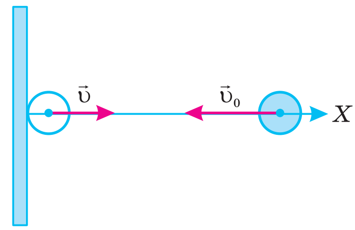
Задача 1. Молекула масою $4{,}7 \cdot 10^{-26}$ кг пружно вдаряється об стінку посудини і відбивається від неї без втрати швидкості. Визначити імпульс сили, отриманий стінкою, якщо молекула летить і відбивається: а) перпендикулярно; б) під кутом 30° до стінки.

Дано:
$m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ кг;
$\upsilon_0 = 600$ м/с

Ft – ?

Розв'язання:

а) Направимо вісь X перпендикулярно до стінки (*мал. 170*).

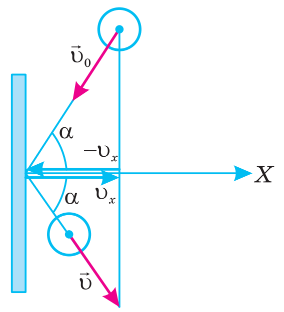


Мал. **170. Пружний удар молекули перпендикулярно до стінки**

Під час удару імпульс сили, що діє на молекулу, визначається за формулою: $\vec{F}t = m\vec{\upsilon} - m\vec{\upsilon}_0$.

Оскільки $\vec{\upsilon} = -\vec{\upsilon}_0$, то $\vec{F}t = -2m\vec{\upsilon}_0$. Знак «мінус» вказує на те, що сила, з якою стінка діє на молекулу, протилежно направлена до вектора швидкості $\vec{\upsilon}_0$. За третім законом Ньютона молекула діє на стінку з такою самою за модулем силою, але протилежно направленою.

$$Ft = 2m\upsilon_0 \approx 5{,}6 \cdot 10^{-23}\,\text{Н} \cdot \text{с}.$$



Мал. **171. Пружний удар молекули під кутом до стінки**

б) Кут, під яким молекула відбивається від стінки, дорівнює куту падіння, бо молекула відбивається від стінки пружно. Оскільки відбивається без втрати швидкості, то $\upsilon = \upsilon_0$. За умовою задачі, кут між напрямом руху молекули і стінкою дорівнює 30°, тоді кут $\alpha = 60°$ (*мал. 171*).

Під час удару імпульс сили, що діє на молекулу, визначається за формулою: $\vec{F}t = m\vec{\upsilon} - m\vec{\upsilon}_0$.

Оскільки $\vec{\upsilon} = -\vec{\upsilon}_0$ у проекціях на вісь X, то:

$$Ft = m\upsilon_x - (-m\upsilon_x) = m\upsilon_0 \cos\alpha + m\upsilon_0 \cos\alpha = 2m\upsilon_0 \cos\alpha.$$

Стінка отримує такий самий за модулем імпульс сили:

$$Ft = 2m\upsilon_0 \cos 60° = 2 \cdot 4{,}7 \cdot 10^{-26}\ \text{кг} \cdot 600\ \text{м/с} \cdot 0{,}5 = 2{,}8 \cdot 10^{-23}\ \text{Н} \cdot \text{с}.$$

Відповідь: а) $Ft = 5{,}6 \cdot 10^{-23}$ Н·с; б) $Ft = 2{,}8 \cdot 10^{-23}$ Н·с.

Задача 2. Людина масою 70 кг стоїть на кормі човна, що знаходиться на озері. Довжина човна – 5 м, а його маса – 280 кг. Людина переходить на ніс човна. На яку відстань відносно дна переміститься людина? Опором води знехтувати.

Дано:
$m_1 = 70$ кг;
$m_2 = 280$ кг; $l = 5$ м

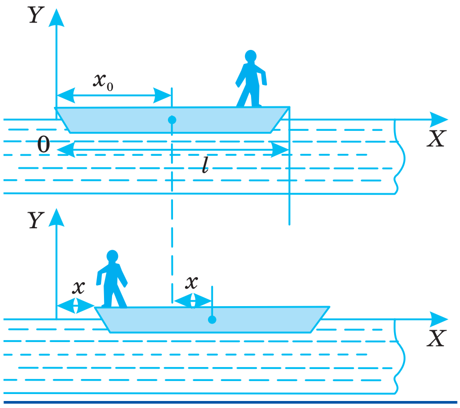
Δx – ?

Розв'язання

1-й спосіб. Імпульс ізольованої системи сталий, а її центр залишається у стані спокою або зберігає свою швидкість незмінною. Тому положення центра мас системи «човен

– людина» у системі координат, яка пов'язана з водою, під час руху людини не змінюватиметься (*мал. 172*):

$$x_{цм} = \frac{m_2 x_0 + m_1 l}{m_2 + m_1} = \frac{m_2(x_0 + x) + m_1 x}{m_2 + m_1},$$



Мал. 172. До задачі 2

де x_0 – координата центра тяжіння човна до переміщення; x – координата носа човна, після переміщення туди людини; l – довжина човна – початкова координата людини.

Отже, човен перемістився на відстань

$$x = \frac{m_1 l}{m_2 + m_1}$$

відносно дна, а людина – на відстань $\Delta x = l - x = \dfrac{m_2 l}{m_2 + m_1}$ відносно дна.

Обчислення: $\Delta x = \dfrac{280\ \text{кг} \cdot 5\ \text{м}}{350\ \text{кг}} = 4$ м.

2-й спосіб. Позначимо через υ швидкість людини відносно човна, u – швидкість човна відносно дна. Додатний напрям осі X виберемо у напрямі руху людини. Тоді $\upsilon - u$ – швидкість людини відносно дна.

За законом збереження імпульсу: $m_1(\upsilon - u) = m_2 u$. Звідки

$$\frac{u}{\upsilon} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Враховуючи, що шляхи, які проходять людина і човен, пропорційні їх швидкостям, то

$$\frac{x}{l} = \frac{u}{\upsilon} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \text{ Звідки } x = \frac{m_1 l}{m_2 + m_1}$$

– відстань, на яку перемістився човен відносно дна. Тоді $\Delta x = l - x = \dfrac{m_2 l}{m_2 + m_1}$ відстань, на яку перемістилась людина відносно дна. Обчислення:

$$\Delta x = \frac{280\ \text{кг} \cdot 5\ \text{м}}{350\ \text{кг}} = 4\ \text{м}.$$

Відповідь: $\Delta x = 4$ м.

Вправа 27

1. Координата матеріальної точки (в м) визначається рівнянням $x = 5 - 8t + 4t^2$. Вважаючи, що маса точки дорівнює 2 кг, визначити імпульс через 2 с і через 4 с після початку відліку часу.

2. М'яч масою 100 г, що летів зі швидкістю 20 м/с, ударився об горизонтальну площину. Кут падіння (кут між напрямом швидкості і перпендикуляром до площини) дорівнює 60°. Визначити зміну імпульсу, якщо удар абсолютно пружний, а кут відбивання дорівнює кутові падіння.

3. З човна масою 200 кг, який рухається зі швидкістю 1 м/с, стрибає хлопчик, що має масу 50 кг, у горизонтальному напрямі зі швидкістю 7 м/с. Яка швидкість човна після стрибка хлопчика, якщо він стрибає: а) з корми в бік, протилежний рухові човна; б) з носа човна у напрямі його руху?

4. Кулька масою 20 г падає на горизонтальну поверхню з висоти 2,5 м і потім підстрибує на висоту 60 см. Яка за величиною зміна вектора імпульсу кульки при ударі?

5. М'яч рухається зі швидкістю υ назустріч стінці, яка рухається зі швидкістю u. Якою буде швидкість м'яча після пружного удару?

6. Снаряд, що вилетів із гармати, розірвався у верхній точці траєкторії на висоті 1960 м на два однакових уламки. Швидкість снаряду перед вибухом – 100 м/с. Один з уламків полетів горизонтально у зворотному напрямі, з більшою у два рази швидкістю. На якій відстані будуть уламки один від одного при падінні на землю?

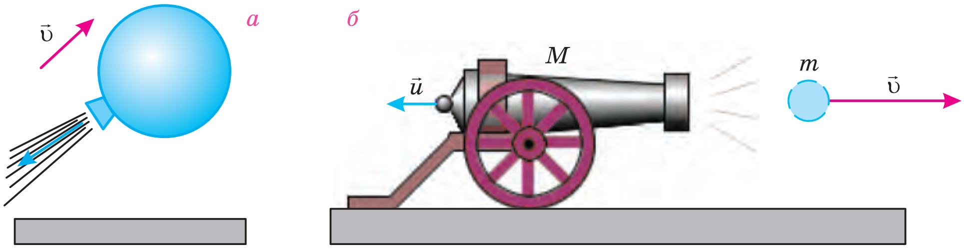
7. Два човни рухаються по інерції в стоячій воді назустріч один одному з однаковими швидкостями 0,6 м/с. Коли човни порівнялись, то з першого на другий переклали вантаж масою 60 кг. Після цього другий човен продовжував рухатись в тому ж напрямі, але з швидкістю 0,4 м/с. Визначити масу другого човна. Опором води знехтувати.

§ 31 Реактивний рух. Розвиток космонавтики

- ✓ *Взаємодії у замкненій системі.*
- ✓ *Будова ракети.*
- ✓ *Розвиток космонавтики.*

Взаємодії у замкненій системі. Ми вже знаємо, що швидкість тіла (відносно інерціальної системи відліку) може змінюватися тільки в результаті дії на це тіло інших тіл. Наприклад, автомобіль розганяється завдяки тому, що його колеса, обертаючись, «відштовхуються» від дороги. Від чого саме можна відштовхнутись, якщо навколо нічого немає – як для ракети у відкритому космосі? Що зумовлює рух гармати при пострілі? Очевидно, у таких замкнених системах мають відбуватися певні взаємодії, що зумовлюють зміну механічного стану тіл, які її утворюють.

Наприклад, розглянемо гумову кульку з газом, що лежить на столі. Її можна вважати замкненою системою, оскільки сили, що на неї діють, взаємно ком-



Мал. **173. Рух:** ***а*** **— кульки при витіканні газу з неї;** ***б*** **— гармати при вильоті ядра**

пенсуються. Газ і гумова оболонка взаємодіють між собою, але ця взаємодія не зумовлює зміни механічного стану системи.

Якщо у кульці зробити отвір, через який газ виходитиме назовні, вона почне рухатись у напрямі, протилежному напряму витікання газу (*мал. 173, а*). Газ і гумова оболонка відштовхуються одна від одної, що і зумовлює рух. Подібне спостерігається і при пострілі з гармати: штовхаючи ядро, гармата і сама відштовхується (*мал. 173, б*).

Наведені приклади руху називають ***реактивними***.

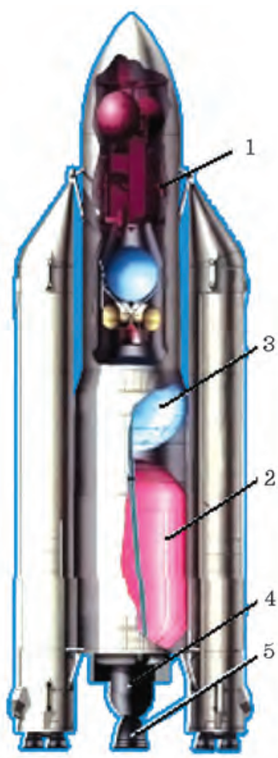
Реактивний рух виникає у зв'язку з викиданням частини маси тіла з деякою швидкістю, у результаті чого частина, що залишилась, набуває швидкості у протилежному напрямі.

Будова ракети. Приклади реактивного руху трапляються і в техніці, і в живій природі. Практичне застосування реактивного руху знайшло у реактивних видах транспорту (космічні ракети, реактивні літаки).

Загалом ракета (*мал. 174*) складається з двох основних тіл, що утворюють замкнену систему, в якій виконується закон збереження імпульсу, – робочої частини та пального.

У головній частині ракети (1) розташовані кабіна космонавтів і прилади. На початку польоту на цю частину припадає лише кілька відсотків від загальної маси ракети. Основна маса та об'єм ракети на початку польоту припадають на запас пального. У баках містяться пальне (2) та окислювач (3), які через форсунки потрапляють у камеру згоряння (4). При високій температурі і великому тиску в камері згоряння пальне перетворюється на газ (продукт згоряння). Продукти згоряння викидаються через сопло 5. За допомогою такого двигуна під час викидання продуктів згорання й утворюється реактивна тяга, що рухає транспортний засіб.

Позначимо масу оболонки ракети (тобто ракети без запасів пального) $m_{об}$, масу газу $m_г$, а швидкості руху оболонки і газу відповідно $\vec{\upsilon}_{об}$ та $\vec{\upsilon}_г$. На старті ракети



Мал. **174. Будова космічної ракети**

сума імпульсів оболонки і газу дорівнюють нулю і за законом збереження імпульсу ця сума має дорівнює нулю і після взаємодії: $0 = m_{об}\vec{\upsilon}_{об} + m_{г}\vec{\upsilon}_{г}$.

Проектуючи на вісь координат, напрямлену уздовж швидкості руху ракети, і враховуючи, що проекції швидкості ракети і газу мають протилежні знаки, одержуємо: $\upsilon_{об} = \frac{m_{г}\upsilon_{г}}{m_{об}}$.

Як бачимо, швидкість руху ракети збільшується зі збільшенням швидкості вильоту газу із сопла, а також зі збільшенням відношення маси газу до маси оболонки.

На відміну від інших транспортних засобів пристрій з реактивним двигуном може рухатись у безповітряному просторі. Здійснення реактивного руху не потребує взаємодії тіла з навколишнім середовищем.

Розвиток космонавтики. Світовий простір, який оточує Землю, називають грецьким словом ***космос***. У повсякденному житті під цим поняттям розуміють простір поза межами земної атмосфери. Космос з давніх-давен привертав до себе увагу людей, які спочатку прагнули лише піднятися у повітря, щоб оглянути Землю з висоти пташиного польоту. Коли люди навчилися літати і ця мрія збулася, постала проблема польоту за межі атмосфери, у космос. Він приваблював не тільки своєю загадковістю, а й новими можливостями для діяльності людини. В умовах космічного вакууму можна забезпечити тривалий час руху космічного апарата без витрачання пального.

Перші у світі ракети, що були використані для подолання сили земного тяжіння і виведення на орбіту Землі першого штучного супутника та польоту першого космонавта, розроблялися під керівництвом нашого співвітчизника С. П. Корольова (*мал. 175, а*). Одні з перших рідинних реактивних двигунів були розроблені під керівництвом українського радянського вченого, академі-


а


б


в

Мал. **175.** ***а*** **– С.П. Корольов;** ***б*** **– В.П. Глушко;** ***в*** **– реактивний двигун**

а

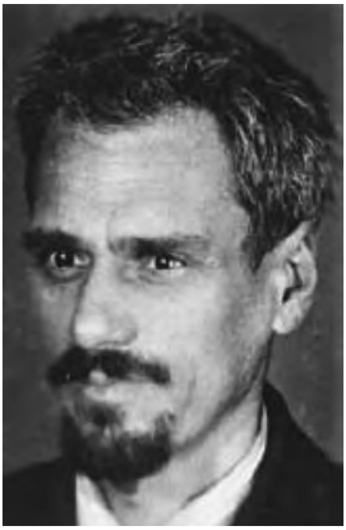
б

***Мал.* 176. *а* – К.Е. Ціолковський; *б* – модель багатоступінчатої ракети**

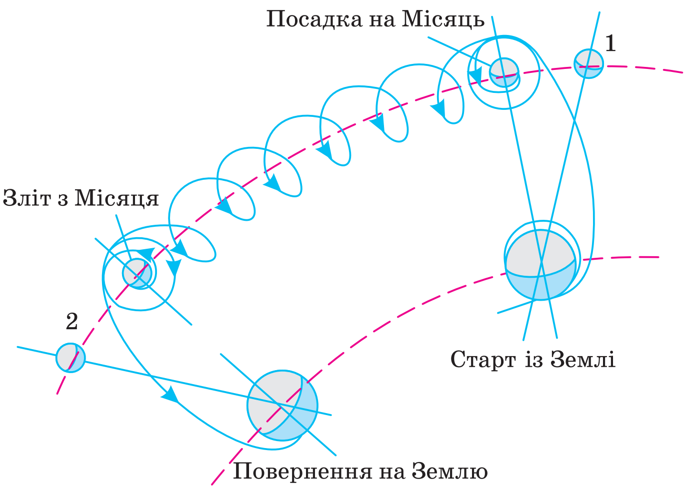
ка В. П. Глушка (*мал. 175, б*). Реактивні двигуни його конструкції (*мал. 175, в*) забезпечували надійну роботу космічних апаратів.

Велику роль у дослідженні руху ракет відіграв талановитий російський учений К. Е. Ціолковський (*мал. 176, а*), який першим запропонував узагальнену формулу для визначення швидкості руху ракети («формула ракети»), ідею багатоступінчастих ракет (*мал. 176, б*) тощо.

Наш співвітчизник Ю. В. Кондратюк (О. Г. Шаргей) (*мал. 177, а*) незалежно від К. Е. Ціолковського, іншими методами отримав рівняння руху ракети, що



а



б

***Мал.* 177. *а* – Ю.В. Кондратюк (О.Г.Шаргей); *б* – «зоряна траса»**

стало підтвердженням об'єктивного характеру розвитку вчення про реактивні пристрої, запропонував свою модель багатоступінчастої ракети. В історію світової астронавтики увійшла і «зоряна траса» (*мал. 177, б*) Ю. В. Кондратюка – схема гравітаційного маневру для польоту на інші тіла нашої планетної системи. Цю схему вдало використали американські астронавти під час польоту на природний супутник Землі – Місяць.

Мал. **178. Ракета-носій на старті**

У 1997 р. здійснив подорож у космос і громадянин незалежної України Леонід Каденюк, який провів серію наукових експериментів на космічному кораблі «Шаттл».

У цілому з 25 найвидатніших учених у галузі космонавтики 23 мають українське походження. Нині наша країна є космічною державою, однією з небагатьох, що проектують і виготовляють ракети-носії для виведення на орбіту штучних супутників, космічних кораблів на станції. Вітчизняні реактивні носії «Зеніт» щороку здійснюють польоти з наземних та морських космодромів (*мал. 178*).

Дайте відповіді на запитання

1. Який рух називають реактивним? На якому законі ґрунтується реактивний рух?
2. Для прискорення потрібна дія сили, а сила – це дія одного тіла на інше. Чому прискорюється ракета, коли в космічному просторі навколо немає інших тіл?
3. Чому для польотів у космос використовують лише апарати з реактивними двигунами?
4. Які українські вчені зробили суттєвий внесок у дослідження та освоєння космосу?

Приклад розв'язування задач

Задача. Гармата, що стоїть на горизонтальній поверхні, стріляє під кутом 30° до горизонту. Маса снаряда – 20 кг, його початкова швидкість – 200 м/с. Яка швидкість гармати після пострілу, якщо її маса 500 кг?

Дано:
$\alpha = 30°$;
$m_1 = 20$ кг;
$\upsilon_1 = 200$ м/с;
$m_2 = 500$ кг

υ_2 – ?

Розв'язання:

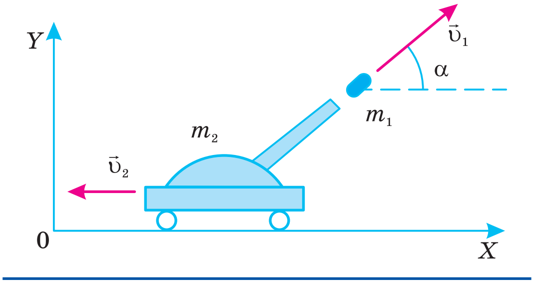
Спрямуємо вісь X у горизонтальному напрямі (*мал. 179*).
За законом збереження імпульсу: $0 = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2$.
У проекціях на вісь X закон збереження імпульсу має вигляд:

$$0 = m_1\upsilon_1 \cos\alpha - m_2\upsilon_2.$$

Звідки $\upsilon_2 = \dfrac{m_1\upsilon_1 \cos\alpha}{m_2}$.

$$\upsilon_2 = \frac{20\,\text{кг} \cdot 200\,\text{м/с} \cdot 0{,}866}{500\,\text{кг}} \approx 7\,\text{м/с}.$$

Відповідь: $\upsilon_2 \approx 7$ м/с.



Мал. **179. Напрям руху тіл після взаємодії**

Вправа 28

1. Яку швидкість відносно ракетниці матиме ракета масою 600 г, коли гази масою 15 г вилітають з неї зі швидкістю 800 м/с?

2. Сигнальна ракета масою 0,25 кг (разом з порохом) злітає на висоту 125 м. Вважаючи, що порох масою 50 г згоряє миттєво, обчисліть швидкість витікання газів.

3. До повітряно-реактивного двигуна літака входить щосекунди у середньому 25 кг повітря і пального. Швидкість газів на вході двигуна – 250 м/с, а на виході – 500 м/с. Визначте силу тяги двигуна.

4. У ракеті, загальна маса якої 600 г, є 350 г вибухової речовини. На яку висоту вона піднімається, якщо вся вибухова речовина згоряє миттєво і вилітає зі швидкістю 300 м/с? Опір повітря в шість разів зменшує теоретично розраховану висоту підйому.

5. Від двоступінчастої ракети загальною масою 1000 кг у момент досягнення швидкості 171 м/с відокремився її другий ступінь масою 400 кг, швидкість якого при цьому збільшилась до 185 м/с. Визначити, з якою швидкістю почав рухатися перший ступінь ракети. Швидкості вказано відносно спостерігача, що знаходиться на Землі.

6. Продукти згорання викидаються з сопла ракетного двигуна порціями по 200 г кожна з початковою швидкістю 1000 м/с. Яку швидкість матиме ракета після викидання третьої порції, якщо в початковий момент її маса була 300 кг, а початкова швидкість дорівнює нулю. Дію сили тяжіння не враховувати.

7. Ракета-носій летить зі швидкістю υ. Після відокремлення головної частини швидкість ракети-носія зменшилась вдвоє, а напрям їх руху залишився попереднім. У скільки разів зросла швидкість руху головної частини, якщо її маса менша маси ракети-носія в 6 разів?

§ 32 Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу

✓ *Момент імпульсу.*
✓ *Закон збереження моменту імпульсу.*

Момент імпульсу. Для вивчення матеріалу цього параграфа слід повторити величини і закони, що описують обертальний рух тіла (матеріальної точки).

Аналогічно, як і у випадку поступального руху (§ 30), внесемо в основне рівняння динаміки обертального руху матеріальної точки $\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$ вираз для кутового прискорення: $\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{\omega} - \vec{\omega}_0}{\Delta t}$. Маємо: $\vec{M} = \frac{J\vec{\omega} - J\vec{\omega}_0}{\Delta t}$ (1), або $\vec{M}\Delta t = J\vec{\omega} - J\vec{\omega}_0$.

Враховуючи, що для матеріальної точки момент інерції $J = mr^2$, а кутова швидкість $\vec{\omega} = \frac{\vec{\upsilon}}{r}$, маємо: $\vec{M}\Delta t = m\vec{\upsilon}r - m\vec{\upsilon}_0 r$.

Величину $\vec{L} = J\vec{\omega} = m\vec{\upsilon}r$ називають моментом імпульсу матеріальної точки.

Момент імпульсу ($\vec{L}$) – характеристика обертального руху матеріальної точки (чи системи матеріальних точок), що визначається відстанню точок від осі обертання, величинами їх імпульсів і напрямами імпульсів відносно осі обертання.

Напрям вектора моменту імпульсу збігається з напрямом вектора кутової швидкості.

Таким чином, формулу (1) можна записати: $\vec{M} = \Delta\vec{L}/\Delta t$ – момент сили дорівнює зміні моменту імпульсу тіла за одиницю часу.

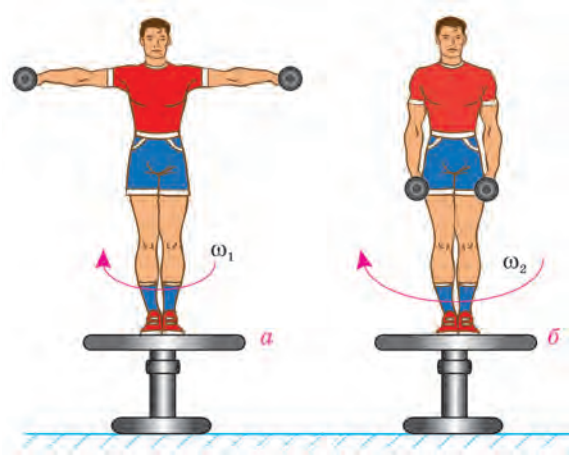
Закон збереження моменту імпульсу. Зміна моменту імпульсу тіла відбувається лише у результаті дії зовнішніх сил і залежить від моменту зовнішніх сил (обертального моменту). Якщо на тіло не діють зовнішні сили, або їх рівнодійна не створює моменту відносно осі обертання, то зміна моменту імпульсу також дорівнює нулю: $\Delta J\vec{\omega} = \vec{M}\Delta t = 0$. Якщо зміна величини $\Delta J\omega$ дорівнює нулю, то сама величина залишається незмінною: $J\vec{\omega} = \text{const}$. Отже, ми ознайомилися ще з одним законом збереження – ***законом збереження моменту імпульсу:***

Якщо на систему не діють моменти зовнішніх сил (замкнена система), то повний момент імпульсу системи тіл залишається постійним за величиною і напрямом:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \text{const}.$$

Збільшення моменту імпульсу одного з тіл має бути скомпенсоване відповідним зменшенням моменту імпульсу інших тіл системи.

Якщо розглядати окремо взяте тіло, яке не зазнає дії зовнішніх сил і не є твердим, тобто може змінюватись його момент інерції, то для такого тіла також виконується умова $J\vec{\omega} = \text{const}$. При цьому зміна моменту інерції (наприклад, збільшення) супроводжується відповідною зміною кутової швидкості (зменшення). Продемонструємо це на прикладі.



Мал. 180. Зміна кутової швидкості обертання у результаті зміни моменту інерції

Хлопчик стоїть на круглій платформі, яка може обертатися навколо нерухомої осі майже без тертя (*мал. 180*). Унаслідок зміни положення рук (краще з гантелями у руках) змінюється момент інерції тіла, в результаті чого змінюється кутова швидкість обертання (*мал. 180, б*).

Таку властивість на практиці використовують балерини, акробати, танцюристи, фігуристи під час виконання стрибків, переворотів тощо.

Дайте відповіді на питання

1. Що називають моментом імпульсу?
2. Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу.
3. За якої умови зміна моменту інерції зумовлює зміну кутової швидкості? Як практично використовується прийом зміни моменту інерції?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Горизонтальна платформа масою M і радіусом R обертається з кутовою швидкістю ω. На краю платформи стоїть людина масою m. З якою кутовою швидкістю ω_1 обертатиметься платформа, якщо людина перейде з краю платформи до її центра? Людину можна вважати матеріальною точкою, платформу – однорідним диском.

За законом збереження моменту імпульсу: $J\vec{\omega} = \text{const}$.

Дано:
M;
R;
ω;
m

ω_1 – ?

Розв'язання:

Початковою сума моментів імпульсів людини та платформи була:

$$\frac{MR^2}{2}\omega + mR^2\omega.$$

Якщо людина перейде до центра платформи, то момент імпульсу становитиме:

$$\frac{MR^2}{2}\omega_1.$$

За законом збереження моменту імпульсу:

$$\frac{MR^2}{2}\omega + mR^2\omega = \frac{MR^2}{2}\omega_1, \text{ звідки } \omega_1 = \frac{M+2m}{M}\omega.$$

Відповідь: $\omega_1 = \dfrac{M+2m}{M}\omega$.

Задача 2. Горизонтальна платформа масою 80 кг і радіусом 1 м обертається навколо вертикальної осі, що проходить через її центр. У центрі платформи стоїть людина і тримає в розставлених руках гантелі. Платформа обертається з кутовою швидкістю 2 рад/с. З якою кутовою швидкістю почне обертатися платформа, якщо людина опустить руки і зменшить при цьому свій момент інерції від 3 до 1 кг · м²? Платформу вважати круглим однорідним диском.

Дано:
$M = 80$ кг;
$R = 1$ м;
$\omega_1 = 2$ рад/с;
$J_1 = 3$ кг · м²;
$J_2 = 1$ кг · м²

ω_2 – ?

Розв'язання:

Отже:

$$\frac{MR^2}{2}\omega_1 + J_1\omega_1 = \frac{MR^2}{2}\omega_2 + J_2\omega_2.$$

Звідки: $\omega_2 = \dfrac{MR^2 + 2J_1}{MR^2 + 2J_2}\omega_1$.

Обчислення: $\omega_2 = \dfrac{80\,\text{кг}\cdot 1\,\text{м}^2 + 2\cdot 3\,\text{кг}\cdot\text{м}^2}{80\,\text{кг}\cdot 1\,\text{м}^2 + 2\cdot 1\,\text{кг}\cdot\text{м}^2}\cdot 2\,\text{рад/с} = 2{,}1\,\text{рад/с}$.

Відповідь: $\omega_2 = 2{,}1$ рад/с.

Вправа 29

1. Спортсмен знаходиться у центрі платформи, що обертається зі швидкістю 1 об/с. Спочатку спортсмен тримав гантелі на витягнутих руках (на відстані 60 см від осі обертання). Як зміниться швидкість обертання платформи, якщо спортсмен зігне руки (гантелі знаходитимуться на відстані 10 см від осі обертання).

2. Людина, що стоїть у центрі платформи, тримає у руках стержень довжиною 2,4 м і масою 8 кг у вертикальному положенні (вздовж осі обертання платформи). Платформа з людиною обертається з частотою 1 с$^{-1}$. З якою частотою буде обертатись платформа, якщо людина поверне стержень у горизонтальне положення? Сумарний момент інерції людини і платформи – 6 кг · м².

3. На краю горизонтальної платформи, що має форму диска радіусом $R = 2$ м, стоїть людина масою $m_1 = 80$ кг. Маса платформи $m_2 = 240$ кг. Платформа може обертатись навколо вертикальної осі, що проходить через її центр. З якою кутовою швидкістю буде обертатись платформа, якщо людина буде йти вздовж її краю зі швидкість $\upsilon = 2$ м/с відносно платформи?

4. Платформа у формі диска може обертатись навколо вертикальної осі. На краю платформи стоїть людина масою $m_1 = 60$ кг. На який кут повернеться платформа, якщо людина піде краєм платформи, і обійшовши її по колу повернеться у початкове положення? Маса платформи $m_2 = 240$ кг. Момент інерції людини розраховувати як для матеріальної точки.

5. Довести, що людина, яка стоїть на ідеально гладкій горизонтальній поверхні, зможе провернутись навколо вертикальної осі, якщо почне обертати руку над головою.

§ 33 Механічна робота. Потужність

- ✓ *Робота сили.*
- ✓ *Потужність.*
- ✓ *Коефіцієнт корисної дії.*

Робота сили. Другий закон Ньютона у формі $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$ дозволяє визначити, як змінюється швидкість руху тіла за модулем та напрямом, якщо на нього протягом інтервалу часу Δt діє сила $\vec{F}$.

У багатьох випадках необхідно вміти визначати зміну лише модуля швидкості, якщо тіло здійснює переміщення $\vec{s}$ під дією сили $\vec{F}$. У цьому випадку користуються поняттям роботи сили.

> Робота сили (A) – фізична величина, що характеризує дію сили на тіло. Визначається скалярним добутком сили на переміщення, яке здійснює точка прикладання сили: $A = (\vec{F}\cdot\vec{s}) = Fs\cos\alpha$, де α – кут між векторами сили і переміщення.

Робота – величина скалярна.

Одиниця роботи – джоуль, $[A] = 1$Дж $= 1$Н · м.

Часто використовують як одиницю роботи кВт · год: 1 кВт · год $= 3{,}6 \cdot 10^6$ Дж.

З формули $A = Fs\cos\alpha$ випливає, що робота може бути додатною, від’ємною або дорівнювати нулю, залежно від того, який кут утворює напрям сили з напрямом переміщення: $A > 0$, якщо $\alpha < 0$; $A = 0$, якщо $\alpha = 90°$; $A < 0$, якщо $\alpha > 90°$.

Наприклад, під час рівномірного підняття вантажу за допомогою підйомного крана, на вантаж діє сила натягу тросу, направлена вгору (у напрямі руху вантажу), і сила тяжіння – направлена вниз (проти руху вантажу). У такому випадку робота сили натягу додатна, а робота сили тяжіння – від'ємна. Оскільки рух вантажу рівномірний, то сили рівні за модулем. Роботи сил рівні за модулем і протилежні за знаком (а не за напрямом, оскільки робота – величина скалярна).

У випадку рівномірного руху тіла по колу, робота сили, що зумовлює такий рух, дорівнює нулю, оскільки вектор швидкості (а отже, і переміщення) напрямлений перпендикулярно до напряму дії сили. Наприклад, при обертанні тіла, закріпленого на мотузці, сила натягу мотузки не виконує роботи, хоча саме вона змушує тіло так рухатися. Не виконує роботи і сила всесвітнього тяжіння, під дією якої обертаються штучні супутники Землі.

Від'ємну роботу виконують, наприклад, сили тертя. Якщо тіла зміщуються одне відносно іншого, то сила тертя завжди спрямована протилежно напряму переміщення кожного тіла. Отже, кут між силою і переміщенням $\alpha = 180°$, а $\cos\alpha = -1$. Враховуючи це, роботу сили тертя можна обчислити так: $A = F_{\text{тер}} s \cos\alpha = -\mu N s$.

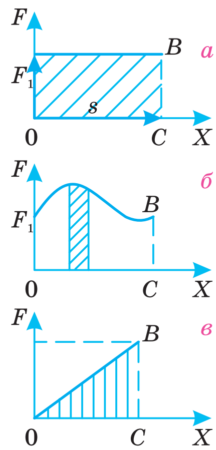
Робота сил тертя завжди супроводжується нагріванням тіл, що взаємодіють, тобто до збільшення їх внутрішньої енергії.

Якщо на тіло одночасно діє кілька сил, вони виконують роботу також одночасно. У такому випадку F у формулі для роботи означає ***модуль рівнодійної всіх сил***.

Тоді, коли траєкторія руху складна і сила змінює свій напрям, потрібно обчислити роботу на окремих послідовних ділянках траєкторії, в межах яких значення сили F і кута α є сталими.

Якщо на тіло діє змінна сила, то використовують графічний метод обчислення роботи.

Нехай на тіло діє постійна за величиною і напрямом сила F_1, під дією якої воно переміщається на відстань s. Тоді, відклавши у вибраному масштабі по осі ординат значення сили, а по осі абсцис – довжину переміщення, з'ясовуємо, що робота у вибраному масштабі дорівнює площі прямокутника OF_1BC (*мал. 181, а*).



***Мал.* 181. Графічний метод визначення роботи**

Якщо сила, що діє на тіло, змінюється, то для обчислення роботи цієї сили переміщення розбивають на елементарні ділянки, у межах яких силу можна вважати постійною величиною. Визначивши роботу на кожному елементарному переміщенні (*мал. 181, б*) і обчисливши алгебраїчну суму цих робіт, отримуємо значення повної роботи змінної сили, яка дорівнює площі фігури OF_1BC, обмеженої віссю абсцис і графіком сили (*мал. 181, б*).

У випадку, коли сила змінюється у будь-який момент часу на одну і ту саму величину, тобто сила пропорційна переміщенню $F = ks$ (наприклад, сила пружності), то значення роботи чисельно дорівнює площі трикутника OBC (*мал. 181, в*), тобто $A = Fs/2$.

Потужність. Швидкість виконання роботи характеризується такою величиною, як ***потужність***.

Потужність – скалярна фізична величина, яка характеризує швидкість перетворення енергії з одного виду в інший (іншими словами – швидкість виконання роботи):

$$N = \frac{\Delta E}{t} = \frac{A}{t}.$$

Одиницею потужності є ват, $[N] = 1\,\text{Вт} = 1\frac{\text{Дж}}{\text{с}}$.

Потужність раніше вимірювали кінськими силами: 1 к. с. = 735 Вт.

Розглянута формула описує середню потужність. Якщо зменшувати інтервал часу, протягом якого виконується робота, можна визначити миттєву потужність.

Миттєва потужність – скалярна фізична величина, яка дорівнює відношенню роботи до інтервалу часу Δt, протягом якого вона виконується, за умови, що $\Delta t \to 0$.

$$N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_x \Delta x}{\Delta t} = F_x \lim \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \upsilon_x$, то миттєва потужність визначається добутком проекції сили, що діє на тіло, і швидкістю, направленою у напрямі переміщення: $N = \upsilon_x F_x$.

Ця закономірність практично виконується під час руху транспортних засобів. За рівномірного руху транспорту двигун виконує роботу проти сил опору. І від того, наскільки великою є ця сила, залежить швидкість руху:

$\upsilon = \frac{N}{F}$ – швидкість транспортного засобу під час рівномірного руху пропорційна потужності і обернено пропорційна силі опору.

Для довільного змінного руху тіла можна також визначити середню потужність $N_{сер}$ через середню швидкість $\upsilon_{сер}$: $N_{сер} = F\,\upsilon_{сер}$.

Коефіцієнт корисної дії. Кожен вид енергії може перетворюватися повністю у довільний інший вид енергії. Однак у всіх реальних енергетичних машинах, крім перетворень енергії, для яких використовуються ці машини, відбуваються перетворення енергії, які називають втратами енергії.

Чим менше втрачається енергії, тим досконаліша машина. Ступінь досконалості машини характеризується ***коефіцієнтом корисної дії*** (***ККД***).

ККД визначають як ***відношення корисної роботи до затраченої або відношення потужностей:***

$$\eta = \frac{A_{\text{кор}}}{A_{\text{затр}}} = \frac{N_{\text{кор}}}{N_{\text{затр}}}.$$

У СІ η визначається в частках, а поза СІ – у відсотках.

Коефіцієнт корисної дії завжди менший за одиницю. Знаючи ККД певного двигуна чи машини, можна обчислити виконану корисну роботу $A_{\text{кор}} = \eta A_{\text{затр}}$ або корисну потужність $N_{\text{кор}} = \eta N_{\text{затр}}$.

Дайте відповіді на запитання

1. Яку роботу називають механічною? Яка формула виражає її зміст? У яких випадках про силу можна сказати, що вона виконує роботу?
2. Коли сила виконує додатну роботу, а коли – від'ємну? За якої умови сила, прикладена до рухомого тіла, не виконує роботу?
3. Автомобіль рухається по рівній дорозі. Чи здійснює роботу сила тяжіння, що діє на автомобіль?
4. Тіло кинуто вертикально вгору. Вкажіть, додатну чи від'ємну роботу виконує сила тяжіння: а) під час підняття тіла; б) під час його падіння.
5. Від чого залежить робота сили тертя? Чи може робота сили тертя дорівнювати нулю?
6. Що називається потужністю? Як її обчислити?
7. Що показує коефіцієнт корисної дії?

Загальні рекомендації щодо розв'язування задач на механічну роботу

Правила розв'язування задач ***про роботу постійної сили:***

- виконати малюнок, показавши на ньому сили, прикладені до тіла;
- установити, роботу якої сили потрібно визначити, і записати вихідну формулу $A = Fs\cos\alpha$, де F може бути як ***рівнодійною***, так й ***окремою силою***;
- установити, чому дорівнює кут α між вектором сили, роботу якої потрібно обчислити, і напрямом переміщення (швидкості);
- якщо ***силу*** в умові задачі не задано, ***її треба визначити з рівняння другого закону динаміки***;
- визначити значення переміщення (якщо воно невідоме) за формулами кінематики;
- підставити знайдені вирази для F і s у формулу роботи і виконати обчислення.

Розпочинаючи розв'язування задач, пов'язаних з розрахунком потужності, що розвивається постійною силою, потрібно:

- установити, яку потужність потрібно визначити, – середню чи миттєву;
- записати вихідну формулу, розуміючи під υ у першому випадку середню швидкість на заданій ділянці шляху, в другому – миттєву;

• виконати малюнок, показавши на ньому всі сили, прикладені до тіла, і задані кінематичні характеристики руху;

• скласти основне рівняння динаміки матеріальної точки і визначити з нього силу тяги F;

• якщо значення $\upsilon_{сер}$ чи $\upsilon_{мит}$ не задано, то визначити їх із формул кінематики;

• підставити у формулу потужності визначені величини і виконати остаточний розрахунок.

Для розв'язування задач ***на роботу змінної сили*** застосовують графічний метод обчислення роботи.

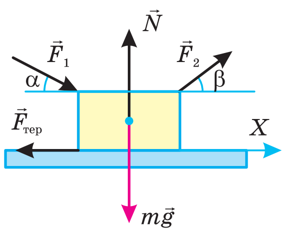
Приклади розв'язування задач

Задача 1. Двоє робітників пересувають рівномірно по підлозі ящик, при цьому один штовхає його з силою 300 Н під кутом 30° до підлоги, а інший – тягне його з такою самою силою за мотузку, що утворює з підлогою кут 45°. Яку роботу виконають робітники, рівномірно пересунувши ящик на відстань 20 м?

Дано:
$\alpha = 30°$;
$F_1 = F_2 = 300$ Н;
$\beta = 45°$;
$s = 20$ м
A – ?

Розв'язання:

Спрямуємо вісь X у напрямі руху (*мал. 182*) і вкажемо сили, що діють на ящик.



***Мал.* 182. Сили, що діють на тіло**

За другим законом Ньютона

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тер} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0,$$

оскільки рух рівномірний.

У проекції на вісь X: $F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta - F_{тер} = 0$.

Корисна робота затрачається на подолання сили тертя, тому

$$A = (F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta) \cdot s.$$

$$A = (300 \text{ Н} \cdot \cos 30° + 300 \text{ Н} \cdot \cos 45°) \cdot 20 \text{ м} = 9{,}4 \text{ кДж}.$$

Відповідь: $A = 9{,}4$ кДж.

Задача 2. Яку роботу виконує електровоз за 10 хв, переміщаючи по горизонтальній ділянці колії потяг масою 3000 т зі швидкістю 54 км/год, якщо коефіцієнт опору 0,005?

Дано:
$t = 10$ хв $= 600$ с;
$m = 3 \cdot 10^6$ кг;
$\upsilon = 54$ км/год $= 15$ м/с;
$\mu = 0{,}005$
A – ?

Розв'язання:

Оскільки рух потяга рівномірний і прямолінійний, то другий закон Ньютона має вигляд: $\vec{F} + \vec{F}_{тер} = 0$.

У проекції на горизонтальну вісь:

$$F = F_{тер},$$

де $F_{тер} = \mu mg$.

Робота дорівнює $A = Fs$, де переміщення $s = \upsilon t$.

Остаточна формула: $A = \mu mg\upsilon t$.

$$A = 0{,}005 \cdot 3 \cdot 10^6 \text{кг} \cdot 9{,}8 \text{м/с}^2 \cdot 15 \text{м/с} \cdot 600 \text{с} = 1323 \cdot 10^6 \text{Дж}.$$

Відповідь: A = 1,32 ГДж.

Вправа 30

1. Сплавник, пересуваючи багром пліт, прикладає до багра силу 200 Н. Яку роботу виконує сплавник, переміщаючи пліт на відстань 10 м, якщо кут між напрямом сили і напрямом переміщення становить 45°?

2. На яку відстань хлопчик перемістив санки, прикладаючи до мотузки санок силу 23 Н під кутом 30° до напряму руху і виконавши роботу 1,2 кДж?

3. Яку роботу треба виконати, щоб по похилій площині з кутом нахилу 30° підняти вантаж масою 400 кг на висоту 2 м при коефіцієнті тертя 0,3? Який при цьому ККД?

4. Трактор під час оранки, рухаючись зі швидкістю 4 м/с, розвиває корисну потужність 40 кВт. Яку силу опору долає трактор?

5. По горизонтальній дорозі починають везти санки з вантажем за мотузку, що утворює з горизонтом кут 30°, прикладаючи зусилля 450 Н. Визначити роботу за 10 с руху, якщо відомо, що за 20 с руху санки набувають швидкості 6 м/с.

6. Віконну штору масою 1 кг та довжиною 2 м при відкриванні вікна скручують у тонкий валик біля верхньої частини вікна. Яку при цьому виконують роботу?

7. З шахти глибиною 200 м піднімають тягар масою 500 кг на канаті, кожен метр якого має 1,5 кг/м. Яка робота виконується при підніманні тягаря? Який ККД установки?

8. Вантаж масою m піднімають на висоту h. Чи залежить при цьому робота, яку виконує піднімальний механізм, від швидкості підйому?

§ 34 Енергія. Кінетична енергія

✓ *Енергія – універсальне поняття.*
✓ *Кінетична енергія.*
✓ *Кінетична енергія тіла, що обертається.*

Енергія – універсальне поняття. Поняття «енергія» увійшло у фізику тоді, коли було встановлено, що один вид руху може змінитися на інший. «*Енергія*» з грец. означає «*дія, діяльність*».

> ***Енергія*** – це скалярна фізична характеристика всіх форм руху матерії і варіантів їх взаємодій.

Оскільки у природі можна виокремити різні форми руху, то енергія – це величина, якою можна охарактеризувати будь-яку форму руху: механічну, теплову, електромагнітну, ядерну. Тобто поняття енергії є універсальним.

Проте у фізиці замість терміна «енергія механічного руху» говорять просто «механічна енергія», замість «енергія теплового руху» – «внутрішня енергія». Вам знайомі й такі терміни, як електроенергія, ядерна енергія, світлова енергія, магнітна енергія тощо. Тому необхідно чітко розуміти, що енергія – це універсальна характеристика руху і вона не існує сама по собі, тобто окремо від тіл, які взаємодіють. Найпростішою формою руху є механічний рух.

Енергія, яка характеризує механічний рух, називається ***механічною енергією***. Розрізняють два види механічної енергії: ***потенціальну*** і ***кінетичну***.

Кінетична енергія. Розглянемо тіло, до якого прикладена постійна сила $\vec{F}$ (яка може бути і рівнодійною кількох сил, прикладених до тіла). Ця сила надає тілу прискорення, тобто змінює швидкість руху тіла і виконує роботу, оскільки тіло здійснює переміщення під дією цієї сили. Отже, між роботою і зміною швидкості має існувати зв'язок.

Розглянемо випадок, коли напрям дії сили і переміщення збігаються. Робота сили у такому випадку обчислюється за формулою: $A = Fs$. Модуль сили можна визначити за другим закон Ньютона: $F = ma$, а переміщення – за формулами кінематики:

$$s = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a},$$

де υ, υ_0 – модулі вектора швидкості на початку та в кінці ділянки s.

Таким чином $A = ma\dfrac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a} = \dfrac{m\upsilon^2}{2} - \dfrac{m\upsilon_0^2}{2}$.

Отже, для обчислення роботи достатньо знати масу тіла і його початкову та кінцеву швидкості руху. Вираз $\dfrac{m\upsilon^2}{2}$ називають ***кінетичною енергією*** і позначають E_k.

Тоді отриманий нами вираз $A = \dfrac{m\upsilon^2}{2} - \dfrac{m\upsilon_0^2}{2}$ можна записати у вигляді $A = E_k - E_{k0}$, який називають ***теоремою про кінетичну енергію***: робота сили (рівнодійної сил) дорівнює зміні кінетичної енергії тіла.

Теорема про кінетичну енергію була отримана нами з другого закону Ньютона, тому можна стверджувати, що вирази $A = \dfrac{m\upsilon^2}{2} - \dfrac{m\upsilon_0^2}{2}$ та $A = E_k - E_{k0} = \Delta E_k$ – інші форми запису другого закону Ньютона. Теорема про кінетичну енергію справедлива для будь-яких сил: сил пружності, сили тяжіння чи сил тертя.

Із теореми про кінетичну енергію випливає, що *кінетична енергія* – це фізична величина, яка характеризує рухоме тіло; зміна цієї величини дорівнює роботі сили прикладеної до тіла.

Наприклад, нехай тілу масою m, яке перебуває в стані спокою, необхідно надати швидкості υ. Для цього прикладена до тіла сила має виконати роботу: $A = \frac{m\upsilon^2}{2} - 0 = \frac{m\upsilon^2}{2}$. Іншими словами, кінетична енергія тіла масою m, яке рухається зі швидкістю υ, визначається роботою сил, які прикладені до тіла і надають йому цієї швидкості.

Одиницею енергії є джоуль.

Значення кінетичної енергії тіла залежить від вибору системи відліку. Швидкість тіла, виміряна в різних системах відліку, має різні значення, тому й кінетична енергія тіла сталої маси матиме різні значення в різних системах відліку.

Кінетична енергія тіла, що обертається. У випадку, якщо матеріальна точка масою m обертається навколо осі O зі швидкістю υ, то ця швидкість може бути виражена через кутову швидкість й радіус обертання: $\upsilon = \omega r$.

Вираз для кінетичної енергії у цьому випадку набуває вигляду: $E_k = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$.

Оскільки добуток mr^2 є моментом інерції цієї точки відносно осі O: $J = mr^2$, то вираз для кінетичної енергії набуває вигляду: $E_k = \frac{J\omega^2}{2}$.

Оскільки це справедливо для довільної точки тіла, то справедливо і для всього тіла в цілому.

Для тіла, що котиться, повна кінетична енергія складається з кінетичної енергії поступального руху центра мас та енергії обертального руху відносно осі, що проходить через центр мас:

$$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

Дайте відповіді на запитання

1. Що таке енергія?
2. Виведіть формулу для розрахунку роботи, що виконується у випадку зміни швидкості тіла.
3. Що таке кінетична енергія? Яка формула виражає її зміст? Ця величина є скалярною чи векторною?
4. Як зміниться кінетична енергія тіла, якщо сила, прикладена до тіла, виконує додатну роботу? Від'ємну роботу?

5. Виведіть формулу кінетичної енергії тіла, що обертається.
6. Якою є кінетична енергія тіла, що котиться?

Приклад розв'язування задач

Задача. Маховик масою m та радіусом R обертається навколо осі, що проходить через його центр. Кутова швидкість обертання маховика ω. Щоб зупинити маховик, до його обода притискають гальмівну колодку, яка діє на нього із силою $F_{тер}$. Скільки обертів зробить маховик до повної зупинки? Вважати, що маса маховика зосереджена по ободу.

Дано:
m;
R;
ω;
$F_{тер}$

N – ?

Розв'язання:

При розв'язуванні задачі вважатимемо обертання маховика подібним до обертання тонкого однорідного обруча радіусом R і масою m, що обертається з кутовою швидкістю ω.

Кінетична енергія такого обруча: $E_k = \frac{J\omega^2}{2}$, де $J = mR^2$.

Маховик зупиниться за умови, що вся його кінетична енергія витратиться на роботу з подолання сили тертя $F_{тер}$, що виникає між гальмівною колодкою та ободом: $E_k = F_{тер}s$, де s – гальмівний шлях, що дорівнює $2\pi RN$. Отже,

$$\frac{mR^2\omega^2}{2} = F_{тер} \cdot 2\pi RN, \text{ звідки } N = \frac{m\omega^2 R}{4\pi F_{тер}}.$$

Відповідь: $N = \frac{m\omega^2 R}{4\pi F_{тер}}$.

Вправа 31

1. Визначити кінетичну енергію штучного супутника Землі масою 1300 кг, який рухається по коловій орбіті на висоті 100 км над поверхнею Землі.

2. Імпульс тіла дорівнює 8 кг · м/с, а кінетична енергія – 16 Дж. Визначити масу і швидкість руху тіла.

3. Маса вантажівки у 18 разів більша від маси легкового автомобіля, а швидкість вантажівки у 6 разів менша від швидкості легкового автомобіля. Порівняти імпульси та кінетичні енергії вантажівки і легкового автомобіля.

4. Шофер вимкнув двигун автомобіля при швидкості 72 км/год. Пройшовши відстань 34 м, автомобіль зупинився. Якою була кінетична енергія автомобіля у момент вимкнення двигунів, якщо сила тертя коліс об дорогу 5880 Н? Яка маса автомобіля?

5. Яку роботу виконує сила тертя, коли автомобіль масою 1000 кг, що мав швидкість 90 км/год, гальмує до швидкості 54 км/год?

6. Потяг на дитячій залізниці, маса якого 15 т, рушає з місця з прискоренням 1,4 м/с^2. Визначити роботу сили тяги і роботу сили опору на перших 10 м шляху, якщо коефіцієнт опору дорівнює 0,02. Якої кінетичної енергії набув цей потяг?

7. З якою швидкістю рухався потяг масою 1500 т, якщо під дією гальмівної сили в 150 кН він пройшов з моменту початку гальмування до зупинки шлях 500 м?

8. Диск масою 2 кг котиться без тертя по горизонтальній поверхні зі швидкістю 4 м/с. Визначити кінетичну енергію диска.

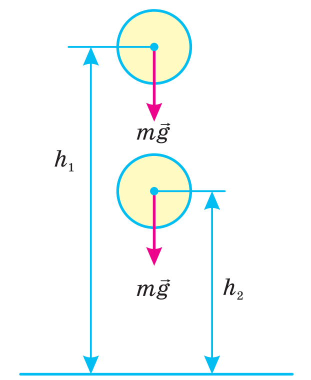
9. Мідна куля радіусом 10 см обертається з частотою 2 об/с навколо осі, що проходить через її центр. Яку роботу слід виконати, щоб збільшити кутову швидкість обертання кулі вдвічі?

10. Космічний корабель обертався у міжзоряному просторі з кутовою швидкістю ω. По команді з Землі на ньому відкрились антени, внаслідок чого момент інерції корабля збільшився в 2 рази. Як змінилась: а) кутова швидкість і б) кінетична енергія обертального руху корабля?

§ 35 Потенціальна енергія тіла

- ✓ *Робота сили тяжіння.*
- ✓ *Потенціальна енергія тіла, піднятого над землею.*
- ✓ *Робота сили пружності.*
- ✓ *Потенціальна енергія пружно деформованого тіла.*

Робота сили тяжіння. Як ми уже показали, роботу будь-яких сил, прикладених до рухомого тіла, можна обчислити за теоремою про кінетичну енергію. Роботу сили можна обчислити і за формулою $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$, підставляючи замість F вираз відповідної сили (сили тяжіння, сили пружності, сили тертя). З'ясуємо, якого виду набуває формула для обчислення роботи сили тяжіння.



Мал. 183. Робота сили тяжіння при вертикальному русі тіла

Розглянемо випадок ***вільного падіння***. Нехай тіло масою m падає з деякої висоти h_1 до висоти h_2 (*мал. 183*). При цьому воно здійснює переміщення $s = h_1 - h_2$. На тіло діє постійна сила тяжіння $F = mg$. Оскільки переміщення і напрям сили тяжіння збігаються, то робота сили тяжіння обчислюється: $A = Fs = mg(h_1 - h_2)$.

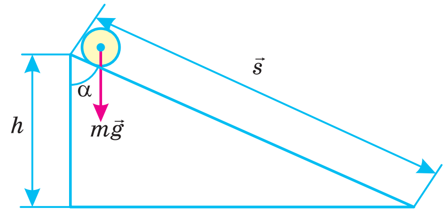
Висоти h_1 і h_2 можуть вимірюватися від будь-якого вибраного нами рівня: від рівня поверхні Землі, від дна ями, від поверхні стола тощо.

Висоту вибраного рівня називають ***нульовим рівнем***.

Якщо тіло падає з деякої висоти h до нульового рівня, то робота сили тяжіння додатна: $A = mgh$.

Якщо тіло кинуто вертикально вгору з нульового рівня і піднімається на висоту h над ним, то робота сили тяжіння від'ємна: $A = -mgh$.

Розглянемо випадки, коли тіло рухається не по вертикалі. Наприклад, нехай тіло масою m скочується ***без тертя*** по похилій площині висотою h. У такому випадку тіло здійснює переміщення s, яке дорівнює довжині похилої площини (*мал. 184*). Оскільки напрям вектора переміщення і напрям вектора сили тяжіння утворюють кут α, то робота сили тяжіння у такому випадку обчислюється: $A = Fs\cos\alpha$ або $A = mgs\cos\alpha$.



Мал. 184. Робота сили тяжіння при русі тіла похилою площиною

Як видно з малюнка $s\cos\alpha = h$, отже, $A = mgh$. Отриманий вираз для роботи сили тяжіння під час руху тіла по похилій площині збігається з відповідним виразом під час вертикального руху тіла. Це означає, що робота сили тяжіння не залежить від траєкторії руху тіла, а визначається лише різницею висот між початковим і кінцевим положенням тіла.

Якщо тіло після спуску будь-якою траєкторією повертається у початкове положення, то робота по такій замкненій траєкторії дорівнює нулю.

Потенціальна енергія тіла, піднятого над землею. Як відомо з курсу фізики 8-го класу,

> ***потенціальна енергія*** – це енергія взаємодії тіл або частин тіла, яка визначається їх взаємним положенням.

У встановленій формулі для роботи сили тяжіння $A = mgh_1 - mgh_2$ перший член характеризує початкове положення тіла, а другий – кінцеве. Це означає, що mgh_1 – це потенціальна енергія тіла у початковому стані, а mgh_2 – потенціальна енергія тіла у кінцевому стані. Позначивши $E_{п1} = mgh_1$ та $E_{п2} = mgh_2$, можна записати: $A = E_{п1} - E_{п2}$.

Якщо винести знак «мінус» за дужки, то отримуємо $A = -(E_{п2} - E_{п1})$, де вираз у дужках означає зміну потенціальної енергії, тобто

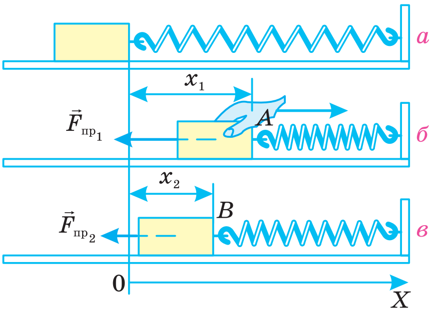
> $A = -\Delta E_п$ – ***робота сили тяжіння дорівнює зміні потенціальної енергії тіла.***

Знак «мінус» вказує на те, що коли робота сили тяжіння додатна, то потенціальна енергія тіла зменшується (у випадку падіння тіла). Якщо тіло кинути вертикально вгору, то робота сили тяжіння від'ємна, а потенціальна енергія тіла збільшується. Кінетична енергія тіла при цьому «поводиться» навпаки: при падінні – збільшується, при підніманні вгору – зменшується.

На відміну від кінетичної енергії, яка залежить від швидкості руху тіла, потенціальна енергія може бути відмінною від нуля, навіть тоді, коли тіло перебуває в стані спокою. Наприклад, вантаж, масою m, який піднятий за допомогою підйомного крана на певну висоту h і утримується в покої, має потенціальну енергію mgh. Якщо надати вантажу можливість впасти, то сила тяжіння виконує роботу, яка дорівнює потенціальній енергії вантажу.

Робота сили пружності. Сила пружності – це сила, що виникає під час деформації тіла і, як відомо, може бути обчислена за законом Гука: $F_{\text{пр}_x} = -kx$.

Виведемо формулу для визначення роботи сили пружності на прикладі деформованої пружини. Розглянемо пружину, до одного кінця якої прикріплено тягарець (*мал. 185, а*). Стискатимемо пружину у напрямі осі X. При цьому виникає сила пружності, направлена у бік, протилежний зміщенню частинок з яких вона складається. При стисканні пружини на x_1 у ній виникає сила пружності, проекція якої на вісь X: $F_{\text{пр}1} = -kx_1$ (*мал. 185, б*).



Мал. 185. До розрахунку роботи сили пружності

Відпустимо пружину. Тягарець почне рухатись у протилежному напрямі під дією сили пружності, яка виконує при цьому додатну роботу, оскільки напрям сили пружності і переміщення тягарця збігаються (*мал. 185, в*). Нехай у деякий момент часу тягарець знаходитиметься у точці B, сила пружності в цій точці уже буде $F_{\text{пр}2} = -kx_2$. Переміщення, яке здійснив тягарець $\vec{s} = x_1 - x_2$, або у проекції на вісь X: $s = -(x_1 - x_2)$ або $s = x_2 - x_1$.

Як відомо, щоб визначити роботу, необхідно перемножити модулі сили пружності і переміщення. Але оскільки під час руху тягарця видовження пружини постійно змінюється, то і сила пружності при цьому також постійно змінюється. Тому у формулу роботи підставляють середнє значення сили пружності:

$$F_c = \frac{(-kx_1)+(-kx_2)}{2} = -\frac{k}{2}(x_2 + x_1).$$

Вираз для обчислення роботи сили пружності набуває вигляду

$$A = F_c s = -\frac{k}{2}(x_2 + x_1)\cdot(x_2 - x_1).$$

Оскільки $(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = x_2^2 - x_1^2$, то

$$A = -\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2) = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right).$$

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла. У встановленій формулі для роботи сили пружності перший член характеризує кінцеве положення тягарця (або краю пружини), а другий – початкове до того ж $\left[\frac{kx^2}{2}\right] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{м}} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж}$. Це означає, що $\frac{kx_1^2}{2}$ – це потенціальна енергія пружини у початковому стані, а $\frac{kx_2^2}{2}$ – її потенціальна енергія у кінцевому стані. Позначивши $E_{n1} = \frac{kx_1^2}{2}$ і $E_{n2} = \frac{kx_2^2}{2}$, можна записати: $A = -(E_{n2} - E_{n1}) = -\Delta E_n$.

Робота сили пружності дорівнює зміні потенціальної енергії пружно деформованого тіла, взятій з протилежним знаком.

Робота сили пружності залежить лише від початкового і кінцевого положень краю пружини, тому так само, як і робота, сила тяжіння не залежить від форми траєкторії. А якщо траєкторія замкнена, то робота дорівнює нулю.

Отже робота сили тяжіння поблизу поверхні землі і робота сили пружності пружно деформованого тіла визначається зміною потенціальної енергії, взятою з протилежним знаком.

Цей висновок поширюється для будь-яких сил, які залежать від відстані між тілами (чи частинами тіла) і які не залежать від швидкості руху тіл. Такі сили називають ***консервативними*** (ті, що зберігаються).

Системи, у яких діють тільки консервативні сили, також називають консервативними. У консервативних системах не відбувається перетворень механічної енергії у інші види (внутрішню, електромагнітну, хімічну тощо).

Дайте відповіді на запитання

1. Тіло кинуто вертикально вгору. Вкажіть, додатну чи від'ємну роботу виконує сила тяжіння: а) під час підняття тіла; б) під час його падіння.
2. Чи залежить робота сили тяжіння від траєкторії руху тіла в полі тяжіння Землі? Чому дорівнює робота сили тяжіння по замкненій траєкторії?
3. Яка формула виражає зміст потенціальної енергії тіла, що знаходиться на деякій висоті над Землею? Як змінюється потенціальна енергія тіла під час його руху вгору?
4. Чому під час розрахунків роботи сили пружності використовують її середнє значення?
5. Що спільного у виразах для роботи сили пружності і роботи сили тяжіння? Що спільного в потенціальних енергіях тіла, на яке діє сила тяжіння, і тіла, на яке діє сила пружності?
6. За якою формулою визначають потенціальну енергію пружно деформованого тіла?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Яку роботу потрібно виконати: а) щоб тіло масою 20 кг підняти на висоту 20 м: б) це саме тіло підняти рівноприскорено із стану спокою на таку саму висоту за 10 с? Опором повітря знехтувати.

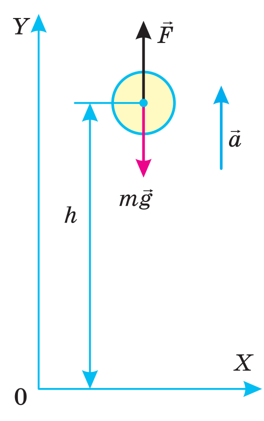
Дано:
$m = 20$ кг;
$h = 20$ м;
$t = 10$ с
а) A – ?
б) A – ?

Розв'язання:

а) У першому випадку необхідно виконати роботу з подолання лише сили тяжіння, що діє на тіло: $A = mgh$.

$$A = 20\text{ кг}\cdot 9{,}8\ \text{м/с}^2\cdot 20\text{ м} = 3920\text{ Дж}.$$

б) У другому випадку до тіла має бути прикладена сила, що долає силу земного тяжіння і надає тілу прискорення (*мал. 186*).



***Мал.* 186. Піднімання тіла з прискоренням**

Визначимо її з другого закону Ньютона: $\vec{F}+m\vec{g}=m\vec{a}$.

У проекціях на вісь Y (*мал. 186*): $F=mg+ma$.

Тоді затрачена робота: $A=mh(g+a)$.

Прискорення руху тіла визначаємо з формул кінематики: $h=\dfrac{at^2}{2}$, звідки $a=\dfrac{2h}{t^2}$. Отримуємо: $A=mh(g+\dfrac{2h}{t^2})$.

$$A=20\ \text{кг}\cdot 20\ \text{м}\left(9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2}+\frac{2\cdot 20\,\text{м}}{10^2\,\text{с}^2}\right)=4080\ \text{Дж}.$$

Відповідь: а) $A=3{,}92\,\text{кДж}$; б) $A=4{,}08\ \text{кДж}$.

Задача 2. Дві пружини, жорсткості яких 3 і 2кН/м, з'єднали послідовно і розтягнули за кінці на 10 см. Яку при цьому виконали роботу?

Дано:
$k_1=3$ кН/м;
$k_2=2$ кН/м;
$x=0{,}1$ м

$A-?$

Розв'язання:

За послідовного з'єднання кожна пружина зазнає відповідної деформації x_1 та x_2, причому $x=x_1+x_2$ (1).

Сили пружності, що виникають у пружинах у такому випадку, рівні між собою: $k_1x_1=k_2x_2$.

Виразимо з останнього рівняння x_1: $x_1=k_2x_2/k_1$.

Підставляємо отриманий вираз у формулу (1):

$$x=\frac{k_2x_2}{k_1}+x_2 \text{ і визначаємо } x_2\text{: } x_2=\frac{xk_1}{k_2+k_1}.$$

Аналогічно визначаємо $x_1=\dfrac{xk_2}{k_2+k_1}$.

Робота дорівнює зміні потенціальної енергії системи пружин:

$$A=\frac{k_1x_1^2}{2}+\frac{k_2x_2^2}{2}=\frac{x^2k_1k_2}{2(k_2+k_1)}.$$

Зверніть увагу! Задачу можна було б розв'язати, скориставшись формулою для визначення коефіцієнта пружності системи послідовно з'єднаних пружин

$$k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}.\quad A=\frac{kx^2}{2}=\frac{x^2k_1k_2}{2(k_2+k_1)}.$$

$$A=\frac{0{,}1^2\ \text{м}^2\cdot 3\cdot 10^3\ \text{Н/м}\cdot 2\cdot 10^3\ \text{Н/м}}{2\cdot(3\cdot 10^3\ \text{Н/м}+2\cdot 10^3\ \text{Н/м})}=6\ \text{Дж}.$$

Відповідь: $A=6$ Дж.

Вправа 32

1. Баштовий кран піднімає у горизонтальному положенні сталеву балку завдовжки 5 м і перерізом 100 см^2 на висоту 12 м. Яку корисну роботу виконує кран?

2. Яку роботу виконує людина, піднімаючи тіло масою 2 кг на висоту 1 м з прискоренням 3 м/с^2?

3. Автомобіль масою 10 т рухається з вимкненими двигунами по схилу, який утворює з горизонтом кут 4°. Обчислити роботу сили тяжіння на шляху 100 м.

4. На балкон, розташований на висоті 6 м, кинули з поверхні землі предмет масою 200 г. Під час польоту предмет досяг максимальної висоти 8 м від поверхні землі. Визначити роботу сили тяжіння під час польоту предмета вгору, вниз і на всьому шляху, а також результуючу зміну потенціальної енергії.

5. Щоб стиснути пружину дитячого пружинного пістолета на 3 см, приклали силу 20 Н. Визначити потенціальну енергію стиснутої пружини.

6. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину, жорсткість якої 40 кН/м, на 0,5 см?

7. Щоб розтягнути пружину на 4 мм, треба виконати роботу, яка дорівнює 0,02 Дж. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути цю саму пружину на 4 см?

8. Порівняти роботи, які виконує людина, розтягуючи пружину динамометра від 0 до 10 Н, від 10 до 20 Н, від 20 до 30 Н.

9. Потужність гідроелектростанції – 73,5 МВт, ККД – 0,75. Визначити, на який рівень гребля піднімає воду, якщо витрата води становить 10^3 м^3/с.

10. Двигун насоса, розвиваючи потужність 25 кВт, піднімає 100 м^3 нафти на висоту 6 м за 8 хв. Визначити ККД установки.

§ 36 Закон збереження енергії

- ✓ *Закон збереження і перетворення енергії.*
- ✓ *Закон збереження механічної енергії.*

Закон збереження і перетворення енергії відкритий у 1840 р. Р. Майєром. Незважаючи на те, що вчений здійснив відкриття на основі медико-біологічних досліджень, цей закон має універсальний характер.

> ***Енергія не виникає і не зникає: вона лише переходить з одного виду в інший – фундаментальний закон природи.***

Цей закон має надзвичайно важливе теоретичне і практичне значення. Енергія має багато форм: механічну, теплову, електричну, ядерну, хімічну, світлову, біологічну тощо. Одна форма енергії може змінюватися на іншу.

Закон збереження механічної енергії. Розглянемо замкнену систему, в якій тіла взаємодіють одне з одним силами пружності або (та) силами тяжіння і жодні зовнішні сили на них не діють. Така система може мати як кінетичну, так і потенціальну енергію. Кінетичну – внаслідок руху тіл системи, потенціальну – внаслідок їх взаємодії.

Як ми уже з'ясували, за будь-яких взаємодій тіл, робота сил пружності (тяжіння) визначається зміною їх потенціальної енергії, взятої з протилежним знаком: $A = -(E_{п2} - E_{п1})$.

Разом з тим робота тих самих сил, за теоремою про кінетичну енергію, визначається зміною їх кінетичної енергії: $A = E_{k2} - E_{k1}$. Прирівнюючи ці вирази, отримуємо: $-(E_{п2} - E_{п1}) = E_{k2} - E_{k1}$ або: $E_{k1} + E_{п1} = E_{k2} + E_{п2}$.

Суму кінетичної та потенціальної енергій тіла називають ***повною механічною енергію тіла:***

$$E = E_k + E_п.$$

Кінетична і потенціальна енергії тіл можуть змінюватися з часом, але в замкненій системі їх сума залишається сталою.

Закон збереження і перетворення повної механічної енергії формулюють так:

повна механічна енергія замкненої системи тіл, які взаємодіють силами тяжіння або (та) пружності, залишається незмінною за будь-яких взаємодій тіл між собою.

При формулюванні цього закону завжди підкреслюється, ***що він справджується лише тоді, коли тіла взаємодіють через силу пружності або (та) тяжіння без дії сторонніх сил*** (у консервативній системі).

Наприклад, якщо підняти над сталевою плитою сталеву кульку і випустити потім її з рук, то вона падатиме. У міру падіння кульки її потенціальна енергія зменшується, а кінетична – збільшується, бо зростає швидкість руху кульки. Від удару кульки об плиту деформуються як кулька, так і плита, а кінетична енергія, яку мала кулька, перетворюється в потенціальну енергію деформованих плити і кульки. Потім внаслідок дії пружних сил плита і кулька наберуть початкової форми, кулька відскочить від плити, а їх потенціальна енергія знову перетвориться в кінетичну енергію кульки: вона підскочить угору зі швидкістю, що дорівнює швидкості, яку вона мала в момент удару об плиту. Під час піднімання вгору швидкість кульки, а отже, і її кінетична енергія, зменшується, потенціальна енергія зростає. У верхній точці підйому вся її кінетична енергія знову перетворюється у потенціальну.

Якщо в системі ***діють сили тертя*** (опір повітря, внутрішнє тертя в речовині кульки і плити), ***повна механічна енергія не залишається сталою.***

Якщо система ***незамкнена*** і в ній діють сили тертя (опору), то зміна механічної енергії системи дорівнює сумі робіт зовнішніх сил і внутрішніх сил тертя, тобто

$$A + A_{оп} = \Delta E.$$

Закон збереження і перетворення енергії дає можливість розкрити фізичний зміст поняття роботи. Робота сил тяжіння або сил пружності, з одного боку, дорівнює збільшенню кінетичної енергії, а з другого – зменшенню потенціальної енергії тіл. Таким чином, ***робота дорівнює зміні енергії.***

Дайте відповіді на запитання

1. Що таке повна механічна енергія? Сформулюйте і запишіть закон збереження повної механічної енергії.
2. У яких системах виконується закон збереження повної механічної енергії у загальному вигляді?
3. Як впливає на енергію системи тіл дія сили тертя?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. На барабан масою $m = 9$ кг намотано шнур, до кінця якого прив'язано вантаж масою $m_0 = 2$ кг. Визначити прискорення вантажу. Барабан вважати однорідним циліндром. Тертям знехтувати.

Дано:
$m = 9$ кг;
$m_0 = 2$ кг

a-?

Розв'язання:

Під час опускання вантажу його потенціальна енергія зменшується і переходить у кінетичну енергію поступального руху вантажу та кінетичну енергію обертання барабана.

$$m_0 gh = \frac{m_0 \upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

Оскільки для циліндра момент інерції $J = \frac{mR^2}{2}$ і $\omega = \frac{\upsilon}{R}$, то можна записати:

$$m_0 gh = \frac{m_0 \upsilon^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2\cdot 2} = \frac{\upsilon^2}{2}(m_0 + \frac{m}{2}).$$

Оскільки рух рівноприскорений без початкової швидкості, то $h = \frac{at^2}{2}$, $\upsilon = at$.

Підставляючи, отримуємо $m_0 g \frac{at^2}{2} = \frac{a^2 t^2}{2}(m_0 + \frac{m}{2})$, звідки $a = \frac{2m_0 g}{2m_0 + m}$.

$$a = \frac{2\cdot 2\,\text{кг}\cdot 9{,}8\,\text{м/с}^2}{2\cdot 2\,\text{кг} + 9\,\text{кг}} = 3\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь: 3 м/с^2.

Задача 2. Молотом, який падає з висоти $h = 1{,}2$ м, забивають палю. Від удару паля заглиблюється в землю на $s = 2$ см. Визначити середню силу удару $F_с$ і його тривалість τ, якщо маса молота $m = 5\cdot 10^2$ кг, маса палі значно менша від маси молота.

Дано:
$h = 1{,}2$ м;
$s = 2$ см;
$m = 5 \cdot 10^2$ кг

F_c – ?
τ – ?

Розв'язання:

Робота, яка витрачається на подолання сил опору ґрунту, дорівнює зміні потенціальної енергії молота: $F_c s = mg(h+s)$ (*мал. 187*).

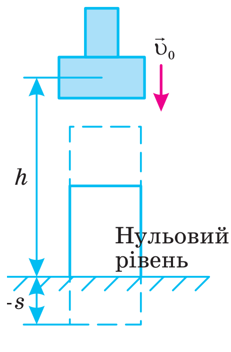
Звідси $F_c = mg(1 + \frac{h}{s})$.

Підставляючи числові значення, отримуємо: $F_c \approx 3 \cdot 10^5$ Н.

Тривалість удару визначаємо зі співвідношення: $\tau = s/\upsilon_c$. Вважаємо рух палі у ґрунті рівносповільненим, тому $\upsilon_c = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2}$, де, за законом збереження енергії, початкова швидкість палі дорівнює швидкості молота на початку удару $\upsilon_0 = \sqrt{2gh}$, у кінці руху палі $\upsilon = 0$.

Таким чином, $\tau = \frac{2s}{\sqrt{2gh}} \approx 8 \cdot 10^{-3}$ с .

Відповідь: $F_c \approx 3 \cdot 10^5$ Н, $\tau \approx 8 \cdot 10^{-3}$ с .



Мал. 187.
До задачі 2

Вправа 33

1. Куля масою 3 кг падає з висоти 3 м на пружину і стискає її. Визначити максимальне стискання пружини, якщо її жорсткість 700 Н/м. Масою пружини знехтувати.

2. Кулька масою 10 г, що вилітає горизонтально з пружинного пістолета, потрапляє у центр підвішеної на нитці пластилінової кулі масою 40 г і застряє в ній. Жорсткість пружини пістолета – 400 Н/м, стискання пружини перед пострілом – 5 см. На яку висоту піднімуться кульки?

3. Колода масою 10 кг скочується з гірки заввишки 5 м і зупиняється на горизонтальній ділянці шляху. Яку роботу необхідно виконати, щоб закотити колоду тим самим шляхом на гірку?

4. З гори, висота якої $h = 2$ м і основа $d = 5$ м , з'їжджають сани, які потім зупиняються, коли пройдуть по горизонталі шлях $l = 35$ м від основи гори. Визначити коефіцієнт тертя.

5. Угору по похилій площині починає рухатися тіло з початковою швидкістю 10 м/с. На якій відстані від нижнього краю похилої площини кінетична енергія тіла зменшиться у 2 рази? Коефіцієнт тертя між тілом та площиною 0,6. Кут нахилу площини до горизонту 30°.

6. По похилій площині, висота якої 1 м, один раз зісковзує без тертя вантаж, наступного разу – скочується без тертя обруч. Маси вантажу та обруча однакові і дорівнюють 1 кг. Радіус обруча – 10 см. Маса обруча зосереджена по ободу. Яку швидкість поступального руху матимуть вантаж та обруч після спуску з похилої площини?

7. Тіло кидають з поверхні землі вертикально вгору зі швидкістю 20 м/с. Визначити максимальну висоту підйому тіла та висоту, на якій його кінетична енергія і потенціальна енергії однакові. Опором повітря знехтувати.

8. На обід шківа, насадженого на спільну вісь з маховим колесом, намотано нитку, до кінця якої підвішений вантаж масою 1 кг. На яку відстань має опуститись вантаж, щоб махове колесо зі шківом набуло кутової швидкості 6 рад/с? Момент інерції колеса зі шківом – 0,39 кг · м^2, радіус шківа – 0,1 м.

9*. Тіло вільно ковзає з вершини нерухомої похилої площини під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту. Визначити його швидкість у кінці похилої площини і час руху, якщо висота похилої площини – 10 м, а коефіцієнт тертя – 0,05.

10. Тіло кинули зі швидкістю υ_0 під кутом до горизонту. Визначити швидкість тіла на висоті $h \leq h_{\max}$.

Загальні рекомендації щодо розв'язування задач на спільне застосування законів збереження імпульсу та енергії

Рівняння закону збереження і перетворення енергії – одна з найзагальніших формул механіки, що дає змогу розв'язувати майже всі задачі елементарної механіки. У задачах підвищеної складності це рівняння є одним з основних, яке разом з рівнянням другого закону динаміки і рівнянням закону збереження імпульсу становить повну систему рівнянь, що описують певне явище. Особливо зручно, а в другому випадку просто необхідно, використовувати закон збереження енергії для розв'язування задач, у яких: а) задається рух одного тіла; б) розглядається нерівномірний змінний рух.

Загальну схему розв'язування задач, що потребують складання рівняння закону збереження енергії, можна подати так:

- виконати схематичний малюнок і записати основну формулу;
- установити перше і друге положення тіла, що розглядається (це зазвичай початкове і кінцеве положення);
- вибрати нульовий рівень відліку потенціальної енергії. Його можна вибрати довільно, але зручніше вибирати за найнижчим положенням, яке займає тіло під час руху, чи відраховувати від рівня, на який опускається тіло, переходячи з першого положення в друге;
- зобразити сили, що діють на тіло в зазначеній точці траєкторії, або, якщо такої немає, у довільній точці, і відзначити кінематичні характеристики υ і h, що визначають механічну енергію тіла в першому і другому положеннях;
- записати вирази для роботи зовнішніх сил і повної механічної енергії в цих положеннях. Підставити ці вирази у вихідне рівняння.

У простих задачах отримане рівняння містить, як правило, одну шукану величину, у складніших – два і більше невідомих. Якщо невідомих більше одного, то до складеного рівняння закону збереження енергії потрібно додати основне рівняння динаміки матеріальної точки, формули кінематики або рівняння закону збереження імпульсу. У результаті матимемо систему рівнянь, спільне розв'язання яких дає змогу визначити шукану величину.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Для визначення початкової швидкості руху кулі масою 10 г стріляють у дерев'яний брусок масою 6 кг, підвішений на нитках. Брусок із кулею,

* Цю задачу раніше розв'язували за допомогою законів кінематики та динаміки.

що в ньому застряє, піднімається на висоту 49 мм. Визначити: а) початкову швидкість кулі; б) кінетичну енергію кулі у момент пострілу; в) яка частина механічної енергії перетворюється у внутрішню.

Дано:	***Розв'язання:***
$m_1 = 10^{-2}$ кг; $m_2 = 6$ кг; $h = 4{,}9 \cdot 10^{-2}$ м	Систему «брусок – куля» можна вважати ізольованою, оскільки у момент удару кулі в брусок усі сили, що діяли на них, зрівноважені; опором повітря нехтуємо (*мал. 188*).
υ_0 – ? $E_к$ – ? ΔE – ?	За законом збереження імпульсу: $m_1\vec{\upsilon}_0 = (m_1 + m_2)\vec{u}$. У проекціях на вісь X: $m_1\upsilon_0 = (m_1 + m_2)u$.

Звідки $\upsilon_0 = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1}u$.

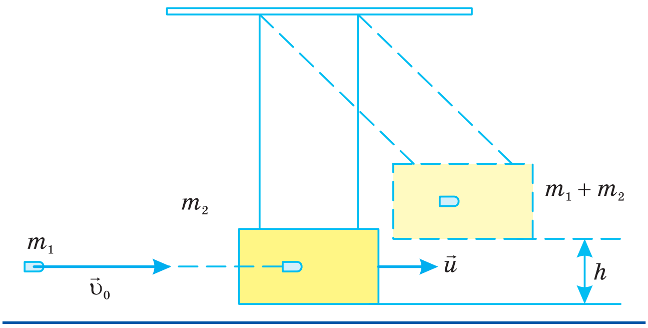
Швидкість бруска з кулею у момент удару (u) визначаємо, застосовуючи закон збереження енергії: $\dfrac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = (m_1 + m_2)gh$, звідки $u = \sqrt{2gh}$.

Початкова швидкість кулі: $\upsilon_0 = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2gh}$.

Кінетична енергія кулі у момент пострілу: $E_k = \dfrac{m_1\upsilon_0^2}{2}$.

Частина механічної енергії ΔE, що перетворюється у внутрішню, дорівнює різниці кінетичної енергії кулі у початковий момент і потенціальної енергії бруска з кулею у кінцевий момент:

$$\Delta E = \frac{m_1\upsilon_0^2}{2} - (m_1 + m_2)gh.$$



Мал. **188. До задачі 1**

Обчислення:

$$\upsilon_0 = \frac{6\text{ кг} + 10^{-2}\text{ кг}}{10^{-2}\text{ кг}}\sqrt{2 \cdot 9{,}8\text{ м/с}^2 \cdot 4{,}9 \cdot 10^{-2}\text{ м}} \approx 589\text{ м/с}.$$

$$E_k = \frac{10^{-2}\text{ кг} \cdot (589\text{ м/с})^2}{2} \approx 1734{,}6\text{ Дж}.$$

$$\Delta E = 1734{,}6\text{ Дж} - 6{,}01\text{ кг} \cdot 9{,}8\text{ м/с}^2 \cdot 0{,}049\text{ м} \approx 1731{,}7\text{ Дж}.$$

Відповідь: $\upsilon_0 \approx 589$ м/с; $E_k \approx 1734{,}6$ Дж; $\Delta E \approx 1731{,}7$ Дж.

Задача 2. Куля масою m_1, що рухається зі швидкістю υ_1, наздоганяє кулю масою m_2, яка рухається зі швидкістю υ_2. Визначити швидкості куль u_1 і u_2 після удару. Удар вважати абсолютно пружним.

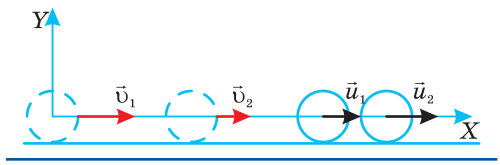
Дано:
m_1;
υ_1;
m_2;
υ_2

u_1 – ?
u_2 – ?

Розв'язання:

Виберемо вісь X у напрямі швидкості руху куль (*мал. 189*).

За законом збереження кінетична енергія куль до удару дорівнює кінетичній енергії після удару:



***Мал.* 189. Швидкість руху куль до та після удару**

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}+\frac{m_2\upsilon_2^2}{2}=\frac{m_1u_1^2}{2}+\frac{m_2u_2^2}{2}.$$

Сумарний імпульс до взаємодії дорівнює сумарному імпульсу після взаємодії:

$$m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=m_1u_1+m_2u_2.$$

Розв'язуючи систему рівнянь, отримуємо:

$$u_1=\frac{(m_1-m_2)\upsilon_1+2m_2\upsilon_2}{m_1+m_2},\ u_2=\frac{(m_2-m_1)\upsilon_2+2m_1\upsilon_1}{m_1+m_2}.$$

Проаналізуємо відповідь.

1. Якщо кулі мають однакові маси $m_1=m_2$, то $u_1=\upsilon_2$ і $u_2=\upsilon_1$, тобто кулі обмінюються швидкостями.

2. Якщо одна з куль нерухома (υ_2 = 0), то $u_1=\dfrac{(m_1-m_2)\upsilon_1}{m_1+m_2}$, $u_2=\dfrac{2m_1\upsilon_1}{m_1+m_2}$.

Якщо $m_1>m_2$, то перша куля після удару рухається в тому самому напрямі, що й до удару, і $u_2>u_1$. Якщо $m_1<m_2$, то після удару перша куля відскочить у зворотному напрямі.

Задача 3. Вантажівка масою 4000 кг, що рухається зі швидкістю 36 км/год, вдаряється у легковий автомобіль, масою 1000 кг, що стоїть перед світлофором. Тривалість удару 0,2 с. Яких прискорень вони набувають у результаті аварії? Яка частина кінетичної енергії вантажівки витрачається на деформацію автомобілів?

Дано:
$m_1=4000$ кг;
$\upsilon_{01}=36$ км/год $=$
$=10$ м/с;
$m_2=1000$ кг;
$t=0{,}2$ с

a_1 – ?; a_2 – ?;
n – ?

Розв'язання:

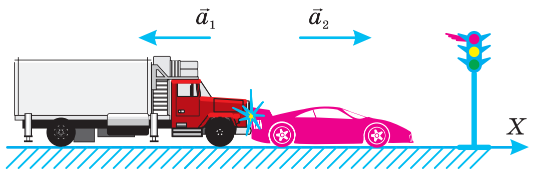
При розгляді такої взаємодії (непружний удар) (*мал. 190*) сили зчеплення коліс автомобілів з дорогою (зовнішні сили) малі, порівняно з деформаціями автомобілів (внутрішні сили), які виникають при цьому, тому систему можна вважати замкненою і застосовувати для неї закон збереження імпульсу: $m_1\vec{\upsilon}_{01}=(m_1+m_2)\vec{\upsilon}$, де $\vec{\upsilon}$ – спільна швидкість автомобілів після удару.

У проекції на вісь X: $m_1\upsilon_{01}=(m_1+m_2)\upsilon$, звідки $\upsilon=\dfrac{m_1\upsilon_{01}}{m_1+m_2}$.

Зміна швидкості вантажівки

$$\Delta\upsilon_1 = \upsilon - \upsilon_{01} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{01} - \upsilon_{01} = (\frac{m_1}{m_1+m_2} - 1)\upsilon_{01} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{01}.$$

$$a_1 = \frac{\Delta\upsilon_1}{t} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{\upsilon_{01}}{t}.$$



Мал. 190. До задачі 3

Знак «мінус» вказує на те, що прискорення вантажівки спрямовано проти швидкості її руху.

Зміна швидкості легкового автомобіля: $\Delta\upsilon_2 = \upsilon - 0 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{01}$, а його прискорення $a_2 = \frac{\Delta\upsilon_2}{t} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot\frac{\upsilon_{01}}{t}$.

Після підстановки числових значень:

$$a_1 = \frac{1000\text{ кг}}{4000\text{ кг} + 1000\text{ кг}}\cdot\frac{10\frac{\text{м}}{\text{с}}}{0,2\text{ с}} = 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2};\; a_2 = \frac{4000\text{ кг}}{4000\text{ кг} + 1000\text{ кг}}\cdot\frac{10\frac{\text{м}}{\text{с}}}{0,2\text{ с}} = 40\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Частина кінетичної енергії вантажівки, що витрачається на деформацію автомобілів, визначимо зі співвідношення: $n = \frac{E_0 - E}{E_0}$, де $E_0 = \frac{m_1\upsilon_{01}^2}{2}$ – початкова енергія вантажівки, $E = \frac{(m_1+m_2)\upsilon^2}{2}$ – кінетична енергія автомобілів після удару.

Підставивши до формули вираз $\upsilon = \frac{m_1\upsilon_{01}}{m_1+m_2}$, і провівши спрощення, отримуємо:

$$n = \frac{m_2}{m_1+m_2} = 0,2 = 20\%.$$

Відповідь: $a_1 = 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $a_2 = 40\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $n = 20\%$.

Проаналізуємо відповідь.

1. Як видно, прискорення легкового автомобіля a_2 у 4 рази більше від прискорення вантажного автомобіля a_1, це означає, що під час такого зіткнення пасажири легкового автомобіля зазнають значно більшого перевантаження, порівняно з пасажирами вантажівки.

2. Під час абсолютно непружного удару, кінетична енергія не зберігається. Наприклад, при ударі кулі об банан (*мал. 191*), банан деформується, куля втрачає частину енергії.

Мал. 191. Непружна взаємодія

Вправа 34

1. Ковзаняр масою 70 кг, що стоїть у ковзанах на льоду, кидає в горизонтальному напрямі камінь масою 3 кг зі швидкістю 8 м/с. Визначити, на яку відстань від'їде при цьому ковзаняр, якщо коефіцієнт тертя ковзанів об лід – 0,02.

2. Сталева кулька масою 20 г падає з висоти 1 м на сталеву плиту і відскакує від неї на висоту 81 см. Визначити: а) імпульс сили, яка діє на плиту під час удару; б) кількість теплоти, яка при цьому виділяється.

3. Людина стоїть на нерухомому візку і кидає горизонтально камінь масою 8 кг зі швидкістю 5 м/с відносно Землі. Визначити, яку роботу при цьому виконує людина, якщо маса візка разом з людиною 160 кг. Проаналізувати залежність роботи від маси. Тертям знехтувати.

4. Куля, що летіла горизонтально з швидкістю 40 м/с, потрапляє у брусок, підвішений на нитці завдовжки 4 м, і застряє у ньому. Визначити кут, на який відхилиться брусок, якщо маса кулі – 20 г, а бруска – 5 кг.

5. Два вантажі масами 10 і 15 кг підвішені на нитках завдовжки 2 м так, що вони дотикаються один до одного. Менший вантаж відхилили на кут 60° і відпустили. На яку висоту піднімуться обидва вантажі після удару? Удар вважати непружним. Яка кількість теплоти при цьому виділяється?

6. Дві кулі підвішені на паралельних нитках однакової довжини так, що вони дотикаються одна до одної. Маси куль – 0,2 кг і 100 г. Першу кулю відхиляють так, що її центр тяжіння піднімається на висоту 4,5 см, і відпускають. На яку висоту піднімуться кулі після удару, якщо удар: а) пружний; б) непружний?

7. Свинцева куля масою 500 г, що рухається зі швидкістю 10 см/с, вдаряється у нерухому кулю з воску масою 200 г, після чого обидві кулі рухаються разом. Визначити кінетичну енергію куль після удару.

8. Між двома тілами масами 6,5 та 2,5 кг стиснено пружину. Коли пружина розпрямилась, одне тіло пройшло у горизонтальному напрямі до повної зупинки шлях 1,2 м. Визначити кінетичну енергію другого тіла відразу після випрямлення пружини, нехтуючи масою пружини і вважаючи, що коефіцієнт тертя при русі тіл однаковий і дорівнює 0,2, а втрат енергії, коли пружина випрямляється, немає.

9. Куля, що летіла горизонтально з швидкістю 100 м/с, ударяється об нерухомий клин, що лежить на горизонтальній поверхні, і пружно відлітає вертикально вгору. Початкова швидкість клина після удару – 2 м/с. Визначити, на яку висоту підніметься куля. Опором повітря знехтувати.

§ 37 Рух рідин і газів. Закон Бернуллі

- ✓ *Рух рідини у трубі.*
- ✓ *Тиск у рухомій рідині.*
- ✓ *Підіймальна сила крила.*

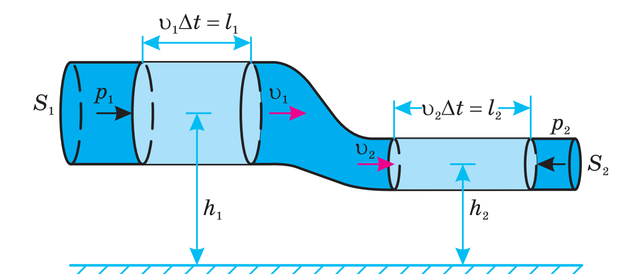
Рух рідини у трубі. Рух рідин і газів доволі складне явище, тому для його опису застосовують модель – ***ідеальну рідину***, яка вважається однорідною нестисливою і нев'язкою. Під час руху ідеальної рідини не відбувається перетворення механічної енергії у внутрішню, тому для опису її руху можна застосовувати закон збереження механічної енергії.

Рух рідин може бути ***ламінарним*** (від лат. *laminia* – шар) і ***турбулентним*** (від лат. *turbulentus* – вихор).

Для ламінарної течії є характерним те, що шари рідини ніби ковзають один по одному не змішуючись. Такий рух рідини – ***стаціонарний***. За невеликих швидкостей руху рідини можливий її стаціонарний потік. За турбулентної течії рух рідин нестаціонарний – шари рідини змішуються, утворюючи завихрення.

Розглянемо стаціонарний рух ідеальної рідини по трубі змінного перерізу (*мал. 192*).

Протягом інтервалу часу Δt рідина у трубі на ділянці перерізом S_1 змістилася на $l_1 = \upsilon_1 \Delta t$, а на ділянці перерізом S_2 на $l_2 = \upsilon_2 \Delta t$, де υ_1, υ_2 – швидкість руху рідини на відповідних ділянках труби.



Мал. **192. Рух рідини по трубі змінного перерізу**

Оскільки рідина у трубах не накопичується і не стискається, то об'єм рідини, що проходить через широку ділянку труби, дорівнює об'єму рідини, що проходить через її вузьку ділянку: $V_1 = V_2$ – ***умова неперервності течії рідини***.

Об'єм рідини, що проходить через переріз S_1 труби, дорівнює: $V_1 = l_1 S_1 = \upsilon_1 \Delta t S_1$, відповідно через переріз S_2: $V_2 = l_2 S_2 = \upsilon_2 \Delta t S_2$. Оскільки $V_1 = V_2$, то $\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2$, або

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$$ – ***швидкість руху однорідної нестисливої і нев'язкої рідини у трубі змінного перерізу обернено пропорційна площі її поперечного перерізу.***

Тиск у рухомій рідині. Як відомо, нерухома рідина у посудині, згідно з законом Паскаля, передає зовнішній тиск до всіх точок рідини без змін. Але, як показує досвід, якщо рідина тече без тертя по трубі змінного перерізу, то тиск на різних ділянках труби – неоднаковий: у вузьких ділянках труби, де швидкість руху рідини більша, – тиск менший, у широких – навпаки. Пояснимо цей факт.

У разі переходу з широкої ділянки труби у вузьку, рідина змінює швидкість, тобто рухається з прискоренням. А, за другим законом Ньютона, тіло набуває прискорення тоді, коли на нього діє сила. Це означає, що на рідину, яка в цей момент міститься у звуженій частині труби, діє з боку рідини в ширшій її частині певна сила, що може виникнути тільки внаслідок різниці тисків у різних перерізах труби. Сила напрямлена в бік вузької частини труби, отже, у вузьких місцях тиск менший, ніж у широких. Ця сила тиску, яка змушує рідину текти по трубі, – це сила пружності стиснутої рідини. Коли ми говорили про нестискуваність рідини, то мали на увазі лише те, що вона не може бути настільки стиснутою, щоб помітно змінився її об'єм. Тим часом дуже мале стиснення, яке спричиняє виникнення сил пружності, неминуче відбувається. Ці сили і створюють тиск рідини.

Встановимо зв'язок між тиском і швидкістю рідини в різних перерізах труби. Виокремимо тонкий поперечний шар рідини масою m. У перерізі S_1 потенціальна енергія шару рідини дорівнює mgh_1 і кінетична $m\upsilon_1^2/2$. Перемістившись у переріз S_2 цей шар матиме потенціальну енергію mgh_2 і кінетичну – $m\upsilon_2^2/2$.

На вибраний шар рідини в перерізі S_1 натискає рідина, що тече позаду, а рідина, що тече попереду, – заважає його переміщенню. Іншими словами, над цим шаром рідини решта рідини виконує роботу. Визначимо її.

Позначимо тиск рідини на перерізі S_1 через p_1, а зустрічний тиск на перерізі S_2 – через p_2. Сила тиску на перерізі S_1 виконує додатну роботу $p_1S_1l_1$, а сила зустрічного тиску – від'ємну роботу: $-p_2S_2l_2$. Враховуючи, що $S_1l_1 = S_2l_2 = V$, вираз роботи сили тиску має вигляд: $(p_1 - p_2)V$. У результаті виконання силами тиску роботи змінюється повна механічна енергія шару рідини:

$$(p_1 - p_2)V = \left(\frac{m\upsilon_2^2}{2} + mgh_2\right) - \left(\frac{m\upsilon_1^2}{2} + mgh_1\right).$$

Розкриємо дужки і перенесемо всі члени, що стосуються перерізу S_1, у лівий бік рівності, а що стосуються перерізу S_2, – у правий. Поділимо рівність на V і з урахуванням, що $m/V = \rho$, отримуємо:

$$p_1 + \rho g h_1 + \rho\frac{\upsilon_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \rho\frac{\upsilon_2^2}{2}.$$

Оскільки перерізи були вибрані довільно, то ця рівність виконується для всіх перерізів:

$$p + \rho g h + \rho\frac{\upsilon^2}{2} = const.$$

Отриманий вираз є ***рівнянням Бернуллі***, що описує рух ідеальної рідини.

З'ясуємо, який фізичний зміст мають доданки цього рівняння. Очевидно, ρgh – потенціальна енергія одиничного об'єму рідини, $\rho\upsilon^2/2$ – кінетична енергія того самого об'єму. Тому і перший доданок має зміст енергії: це потенціальна енергія «підтиснутого» зовнішнім тиском p одиничного об'єму рідини.

Отже, фізичний зміст рівняння Бернуллі полягає в тому, що під час протікання ідеальної рідини повна механічна енергія одиниці об'єму рідини є величиною сталою по всій довжині труби.

Закон Бернуллі відкрито у 1738 р. Цей закон справедливий і для рухомого газу, але за умови, що його тиск невеликий і густина суттєво не змінюється.

Зауважимо ще один факт. Всі доданки рівняння мають розмірність тиску. Тому в інженерій практиці їх називають: p – статичний тиск, ρgh – ваговий тиск, $\rho\upsilon^2/2$ – динамічний тиск.

З рівняння Бернуллі випливає, якщо потік горизонтальний, то

$$p_1 + \rho\frac{\upsilon_1^2}{2} = p_2 + \rho\frac{\upsilon_2^2}{2}.$$

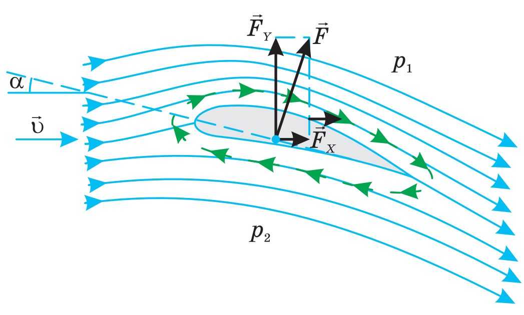
Бачимо, що значення цієї суми може бути сталим лише тоді, коли за збільшення швидкості υ зменшується тиск p, і навпаки.

Підіймальна сила крила. Рівняння Бернуллі дає змогу якісно пояснити виникнення піднімальної сили крила літака. Кожен літак має крила, які можуть бути найрізноманітнішої форми, але їх об'єднує спільна ознака: плоска нижня поверхня і опукла верхня. Завдяки цій формі і куту α (так званий кут атаки), під яким крило нахилене до зустрічного потоку повітря (*мал. 193*), швидкість руху повітряного потоку над крилом більша, ніж під крилом. Відповідно до рівняння Бернуллі тиск над крилом (p_1) менший, ніж під ним (p_2). У результаті чого виникає сила $\vec{F}$. Вертикальна складова цієї сили $\vec{F}_y$ називається ***піднімальною силою***. Піднімальна сила дає змогу компенсувати силу тяжіння, що діє на літак, а отже, забезпечує політ тяжких літальних апаратів у повітрі.

Горизонтальна складова $\vec{F}_x$ – це сила опору повітря.

Теорію піднімальної сили крила створив М. Є. Жуковський. Він показав, що при обтіканні крила суттєву роль відіграє циркуляція повітря навколо крила (зелені стрілки на *мал. 193*). У верхній частині напрям потоку повітря, що циркулює, збігається з падаючим потоком, а у нижній – потоки направлені протилежно. Це й дає різницю тисків і веде до виникнення підіймальної сили.

У переліку світових авіаційних лайнерів одне з провідних місць посідають українські літаки. Всесвітньо відомі АН-124 «Антей», АН-140 та АН-70 сконструйовані і виготовлені в Україні.



***Мал.* 193. Виникнення піднімальної сили крила**

Дайте відповіді на запитання

1. Доведіть, що швидкість руху рідини у трубі змінного перерізу обернено пропорційна площі поперечного перерізу.

2. Поясніть, чому тиск рідини більший там, де швидкість потоку менша, і менший там, де швидкість потоку більша.

3. Наведіть приклади, що підтверджують закон Бернуллі. Наведіть приклади застосування закону Бернуллі у техніці.

4. Поясніть як виникає піднімальна сила крила

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Довести теорему Торрічеллі, згідно з якою швидкість витікання з вузького отвору в широкій посудині дорівнює швидкості вільного падіння з висоти рівня рідини у посудині над отвором.

Дано:
h

$\upsilon - ?$

Розв'язання:

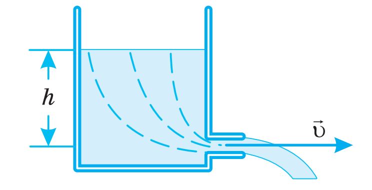
Застосовуємо рівняння Бернуллі для горизонтального потоку:

$$p_1 + \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho\upsilon_2^2}{2}.$$

У широкій частині посудини $\upsilon_1 \to 0$, $p_1 = p_{атм} + \rho gh$, при витіканні з отвору $p_2 = p_{атм}$ (*мал. 194*).

Рівняння Бернуллі набуває вигляду:

$$p_{атм} + \rho gh = p_{атм} + \frac{\rho\upsilon^2}{2}, \text{ звідси: } \upsilon = \sqrt{2gh}.$$



***Мал.* 194. До задачі 1**

Відповідь: $\upsilon = \sqrt{2gh}$.

Задача 2. Медична сестра тисне на поршень шприца діаметром 1 см із силою 0,01 Н. Визначити швидкість витікання струменя рідини зі шприца, який розташовано горизонтально. Тертям знехтувати. Густина рідини – 10^3 кг/м^3.

Дано:
$d = 0{,}01$ м;
$F = 0{,}01$ Н;
$\rho = 10^3$ кг/м^3

$\upsilon - ?$

Розв'язання:

Застосовуємо рівняння Бернуллі для горизонтального потоку:

$$p_1 + \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho\upsilon_2^2}{2}.$$

Оскільки діаметр шприца значно перевищує діаметр голки, то швидкість руху рідини у шприці $\upsilon_1 \to 0$, тиск p_1 дорівнює сумі зовнішнього тиску (F/S) та атмосферного $p_{атм}$, тиск $p_2 = p_{атм}$.

Рівняння Бернуллі набуває вигляду: $\dfrac{F}{S} + p_{атм} = p_{атм} + \dfrac{\rho\upsilon^2}{2}$, звідси: $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2F}{S\rho}}$.

Площа поперечного перерізу поршня шприца $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

$$\upsilon = \sqrt{\frac{8F}{\pi d^2 \rho}} = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{2F}{\pi\rho}}.$$

Обчислення: $\upsilon = \dfrac{2}{10^{-2}\,\text{м}}\sqrt{\dfrac{2 \cdot 0{,}01\,\text{Н}}{10^3\,\text{кг/м}^3 \cdot 3{,}14}} = 0{,}5\,\text{м/с}$.

Відповідь: $\upsilon = 0{,}5\,\text{м/с}$.

Вправа 35

1. У пожежному шлангу діаметром 7 см тече вода зі швидкістю 9 м/с. Визначити внутрішній діаметр трубки брандспойта, якщо вода витікає з нього зі швидкістю 129,6 км/год.

2. У горизонтальній трубі, діаметр якої 8 см, нафта тече зі швидкістю 2 м/с за тиску 150 кПа. Визначити, під яким тиском тече нафта у вузькій частині труби діаметром 4 см.

3. Під час польоту тиск повітря під крилом літака дорівнює 97,8 кПа. Площа крила – 20 $м^2$. Визначити піднімальну силу крила літака.

4. Якою має бути висота циліндричної посудини радіусом 5 см, заповненої водою, щоб сила тиску води на дно дорівнювала силі тиску на бічну поверхню?

5. Площа поршня у шприці – 2 $см^2$, а площа отвору – 1 $мм^2$. Скільки часу витікатиме вода зі шприца, якщо діяти на поршень із силою 8 Н і хід поршня – 5 см? Шприц розташовано горизонтально.

6. З брандспойта б'є струмина води, що дає 60 л/хв. Яка площа поперечного перерізу струмини на висоті 2 м над кінцем брандспойта, якщо поблизу нього вона дорівнює 1,5 $см^2$.

7. Тримаючи за кінчики два аркуші паперу зі шкільного зошита, щоб відстань між їх площинами була 3–5 см, подуйте у простір між ними. Опишіть і поясніть явище, що спостерігалося.

Найголовніше в розділі 3

Поняття енергії тривалий час поширювалося тільки на механічний рух і розглядалось як здатність тіла виконувати роботу: якщо на тіло діє сила і під дією цієї сили тіло переміщується, отже, виконується механічна робота; якщо тілом виконується робота, то воно має енергію.

У середині XIX ст., коли було встановлено фундаментальний закон природи – закон збереження і перетворення енергії, поняття енергії поширилося й на інші види і форми руху; водночас це поняття утвердилось як загальна характеристика руху і взаємодії.

Кожне рухоме тіло має імпульс і кінетичну енергію. Тіла, що взаємодіють, мають потенціальну енергію, яка залежить від взаємного розміщення тіл або їх частин.

Мірою зміни імпульсу тіла є імпульс сили; мірою зміни енергії – робота. Механічна робота сил пружності і тяжіння дорівнює зміні потенціальної енергії з протилежним знаком.

У замкнених системах виконуються закони збереження імпульсу, моменту імпульсу та енергії. Повна механічна енергія системи залишається сталою, якщо в ній діють лише сили тяжіння або/та пружності.

Прикладом дії закону збереження імпульсу є реактивний рух, прикладом дії закону збереження механічної енергії – закон Бернуллі.

Розділ 4

МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

Коливальний рух (або – коливання) – найпоширеніша форма руху в навколишньому світі і техніці. Коливаються дерева під дією вітру, поршні у двигуні автомобіля тощо. Ми можемо розмовляти й чути звуки завдяки коливанням голосових зв'язок, повітря і барабанних перетинок. Світло – це також коливання, але електромагнітні. За допомогою електромагнітних коливань, які поширюються у просторі, відбуваються радіозв'язок, мобільний зв'язок, радіолокація, телебачення.

Коливання різної фізичної природи мають загальні закономірності і описуються однаковими математичними рівняннями.

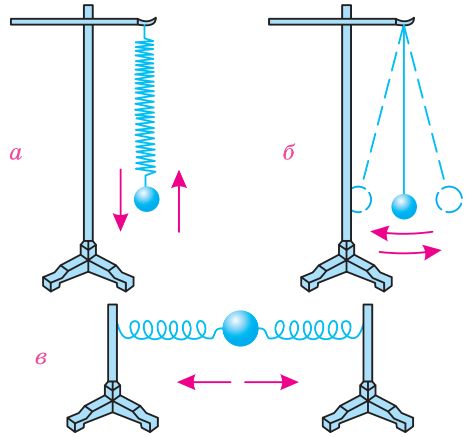
У цьому розділі ми вивчимо закономірності ***механічних коливань і хвиль***.

§ 38 Коливальний рух

- ✓ *Коливальні системи, умови виникнення вільних коливань.*
- ✓ *Характеристики коливального руху.*
- ✓ *Вільні та вимушені коливання.*

Коливальні системи, умови виникнення вільних коливань. У природі і техніці існує нескінченна кількість видів коливань. Вивчити їх усі практично не можливо. Тому ми обмежимося вивченням найпростіших випадків коливань.

Коливання – явища і процеси, в яких відбувається періодичне повторення станів системи.



Мал. **195. Коливальні системи**

На *мал. 195* наведені приклади механічних пристроїв, які здатні здійснювати коливання. Ці пристрої утворюють ***коливальні системи:*** Земля, штатив, на якому закріплена пружина з тягарцем, утворюють ***вертикальний пружинний маятник*** (*мал. 195, а*), Земля, підвішена на легкій і нерозтяжній нитці кулька – утворюють ***математичний маятник*** (*мал. 195, б*), два штативи, дві пружини і тіло масою m утворюють ***горизонтальний пружинний маятник*** (*мал. 195, в*).

Коливальні системи **– пристрої, в яких можуть здійснюватися коливання.**

Для вказаних систем характерні спільні ознаки.

1. Кожна коливальна система має стан рівноваги. У математичного маятника – це положення, за якого центр мас підвішеної кульки знаходиться на одній вертикалі з точкою підвісу; у вертикального пружинного маятника – це положення, коли сила тяжіння, що діє на тягарець, урівноважується силою пружності; у горизонтального пружинного маятника – це положення, за якого обидві пружини деформовані однаково.

2. Якщо коливальну систему вивести зі стану рівноваги, виникає сила, що повертає систему в рівноважний стан. Для кожної коливальної системи поява цієї сили зумовлена різними причинами: наприклад, для математичного маятника – це рівнодійна сил тяжіння і сили натягу нитки.

3. Повертаючись у рівноважний стан, коливальне тіло не зупиняється, а продовжує рух у результаті інерції.

Отже, вільні коливання виникають, якщо: 1) коливальне тіло вивести з положення рівноваги, тобто надати коливальній системі енергію, 2) рівнодійна всіх сил, що діють на тіло, виведене з положення рівноваги, спрямована до цього положення, і, нарешті, 3) якщо сили тертя у системі достатньо малі.

Вільні коливання **– коливання, які виникають у результаті початкового виведення системи з положення стійкої рівноваги і здійснюються за рахунок внутрішніх сил системи, не зазнаючи впливу з боку змінних зовнішніх сил.**

Наприклад, коливання розглянутих нами коливальних систем (маятників).

Власні коливання **– коливання, які відбуваються в ідеальній системі без тертя, тобто, без втрат механічної енергії.**

Власні коливання – це теоретично можливі вільні незгасаючі коливання.

Періодичними є й обертові рухи. На відміну від обертових рухів, які мають для кожної точки колові траєкторії, під час коливальних рухів точка чи тіло зміщується у протилежних напрямах по одній і тій самій траєкторії.

Характеристики коливального руху. Основними характеристиками коливального руху є амплітуда, період і частота коливань.

Амплітуда коливань **(x_{max}) – це максимальне зміщення тіла від положення рівноваги.**

Період коливань **(T) – час одного повного коливання.**

$$T = t/N,$$

де t – час, протягом якого відбувається N коливань.

Частота коливань (ν) – фізична величина, що визначається кількістю повних коливань за одиницю часу:

$$\nu = N/t,$$

де t – час, протягом якого відбувається N коливань.

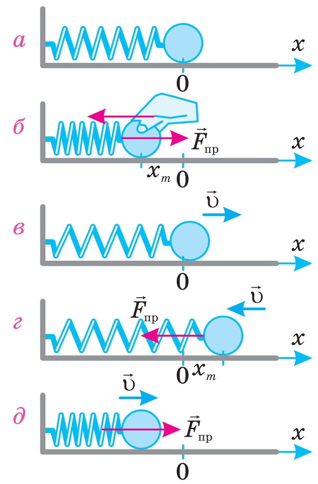
Одиниця частоти коливань – герц, $[\nu] = 1$ Гц $= 1 с^{-1}$.

Зв'язок між періодом коливань і частотою коливань:

$$\nu = 1/T \text{ або } T = 1/\nu.$$

Вільні та вимушені коливання. Розглянемо вільні коливання горизонтального пружинного маятника (*мал. 196, а*). Відхилимо коливне тіло (кульку) вліво і тим самим стиснемо пружину (*мал. 196, б*). Якщо тепер відпустити кульку, то вона під дією сили пружності почне рухатися праворуч.

Але кулька не зупиняється у положенні рівноваги, а проходить далі (*мал. 196, в*). При цьому пружина розтягується і змушує кульку рухатися ліворуч (*мал. 196, г*). Пружина знову стискається і кулька повертається у крайнє ліве положення (*мал. 196, д*), здійснивши одне повне коливання.



Мал. **196.**
Виникнення коливань

Якби не було тертя, рух кульки не припинився б ніколи. Однак тертя (зокрема, опір повітря) впливає на рух коливного тіла. Оскільки сила опору повітря направлена проти швидкості руху, то амплітуда коливань поступово зменшується, допоки рух не припиниться, тобто коливання загасають. Якщо опір незначний, то згасання стає помітним лише після того, як коливне тіло здійснить багато коливань.

Сили тертя (опору) можуть бути настільки великі, що в коливальній системі коливання можуть і не виникнути. Наприклад, якщо пружинний маятник опустити у в'язку рідину, то після відхилення коливального тіла від положення рівноваги воно плавно повернеться у це положення і зупиниться.

Під час дослідження коливального руху і розв'язування задач на коливання ми нехтуватимемо опором і вважатимемо вільні коливання незгасаючими.

Щоб коливання були незгасаючими, необхідні поповнення енергії коливальної системи ззовні, тобто щоб діяла зовнішня періодична сила.

Вимушені коливання – коливання, які виникають у системі у результаті впливу на неї зовнішньої сили, яка чинить періодичну дію.

Тому вони відбуваються під впливом не тільки внутрішніх, а й зовнішніх сил.

Наприклад, рух поршня у двигунах внутрішнього згоряння.

Основні відмінності вільних і вимушених коливань полягають у тому, що у будь-якої коливальної системи, яка здійснює вільні коливання, ***є власна частота і власний період***.

Під час вимушених коливань *зовнішня сила «нав'язує» коливальній системі свою частоту, свій період*.

Вільні коливання реальної коливальної системи внаслідок дії сил тертя ***є згасаючими***, тоді як амплітуда вимушених коливань не зменшується з часом, навіть якщо в системі є тертя. Вимушені коливання – ***незгасаючі***.

Дайте відповіді на запитання

1. Що таке коливальна система? Наведіть приклади коливальних систем.
2. За яких умов у коливальній системі виникають вільні коливання?
3. Які коливання називають вільними, а які – вимушеними?
4. Назвіть основні характеристики коливального руху.

§ 39 Гармонічні коливання

- *Гармонічні коливання.*
- *Рівняння гармонічних коливань.*
- *Фаза коливань.*

Гармонічні коливання. У попередньому параграфі ми розглянули коливальний рух горизонтального пружинного маятника. У наведеному прикладі показано, що у будь-якій точці траєкторії коливального тіла сила пружності направлена до положення рівноваги, тобто протилежно до зміщення тіла.

Такі коливання називають ***гармонічними коливаннями***. У гармонічних коливаннях сили, під дією яких вони відбуваються, завжди пропорційні до зміщення і спрямовані протилежно до нього (до положення рівноваги).

Згодом ми доведемо, що зміщення залежить від часу – за законом косинуса (чи синуса). Тому визначення гармонічних коливань таке:

Гармонічними називаються прості періодичні коливання фізичної величини, які з плином часу здійснюються за синусоїдальним або косинусоїдальним законом.

Але сили, пропорційні відхиленню від положення рівноваги, не обов'язково є пружними. Вони можуть мати різну фізичну природу, але схожі між собою тим, що викликають гармонічні (синусоїдальні) коливання.

Тому сили, пропорційні зміщенню від положення рівноваги, незалежно від їх природи, називають ***квазіпружними*** («ніби пружними»; квазі... від лат. *quasi* – ніби, майже, немовби).

Роль квазіпружної сили може відігравати рівнодійна сили всесвітнього тяжіння і сили пружності (математичний маятник), рівнодійна кількох сил різної природи.

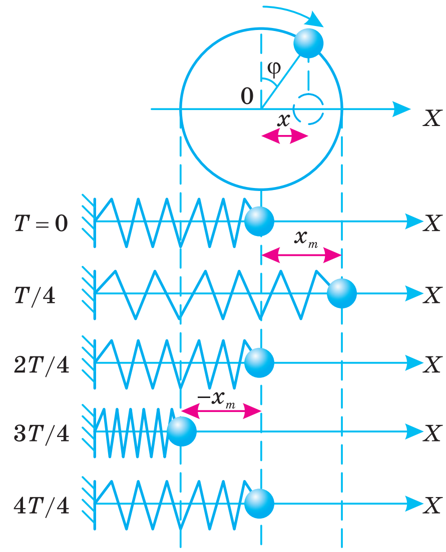
Рівняння гармонічних коливань. Як і для будь-якого руху, для коливань необхідно отримати формулу, що дасть змогу розв'язувати основну задачу механіки – визначати координату тіла у будь-який момент часу. Крім того, оскільки коливання – це періодичні рухи, то необхідно вміти визначати період цих коливань.

Щоб виявити залежність координати (швидкості і прискорення) коливального тіла від часу, необхідно розв'язати рівняння другого закону Ньютона. Оскільки сила, що діє на коливальне тіло, змінюється, то розв'язання цього рівняння потребує більш глибоких знань з математики (диференціальне числення). Тому скористаємося подібністю між коливаннями маятника і рівномірним рухом по колу.

Розглянемо рівномірний рух кульки по колу (*мал. 197*).

Спрямуємо вздовж діаметра вісь X і будемо відмічати положення проекції радіуса-вектора кульки, що рухається по колу, на обрану вісь. З малюнка видно, що під час руху кульки по колу, проекція її радіуса-вектора здійснює коливання вздовж діаметра, тобто вздовж осі X.

Якщо порівнювати коливання кульки на пружині і рух радіуса-вектора кульки під час її руху по колу (*мал. 197*), то можна вважати, що центр кола відіграє роль положення рівноваги, радіус кола – амплітуди коливань x_m, проекція радіуса-вектора у довільний момент часу відповідає зміщенню x, період обертання кульки – періоду коливань T.



***Мал.* 197. Аналогія між коливальним рухом та рухом по колу**

У довільний момент часу $x = x_m \sin\varphi$, де φ – кут повороту радіуса-вектора.

Кут φ є центральним кутом, а, як відомо, дуга l, що стягує центральний кут, дорівнює добутку кута φ (у радіанах) на радіус кола (у нашому випадку x_m): $l = \varphi x_m$.

Водночас за час, що дорівнює періоду, кулька робить один оберт, тобто проходить відстань, що дорівнює довжині кола. Швидкість кульки у такому випадку $\upsilon = \dfrac{2\pi x_m}{T}$.

Протягом інтервалу часу, коли радіус-вектор кульки повернувся на кут φ, кулька пройшла відстань $l = \upsilon t = \frac{2\pi x_m t}{T}$. Прирівнюючи обидва вирази для l, отримуємо: $\varphi = \frac{2\pi}{T}t$.

Отже, проекція радіуса-вектора на вісь X змінюється за законом $x = x_m \sin\frac{2\pi}{T}t$.

Величину $2\pi/T$ називають циклічною, або коловою частотою і позначають літерою ω.

Циклічна (або колова) частота (ω) показує, яку кількість коливань здійснює тіло за 2π секунд.

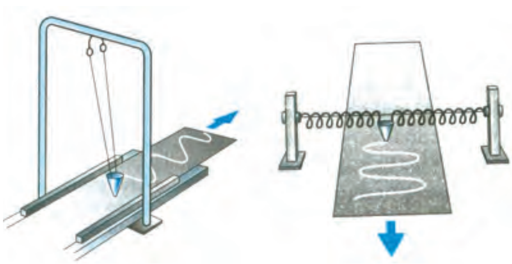
$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

Одиниця циклічної частоти – радіан за секунду, $[\omega] = 1$ рад/с.

Отже, під час механічних гармонічних коливань зміщення (координата коливального тіла) з часом змінюється за законом: $x = x_m \sin\omega t$, якщо у початковий момент тіло перебуває у стані рівноваги, або $x = x_m \cos\omega t$, якщо у момент початку відліку ($t = 0$) коливне тіло перебуває у крайньому положенні.

Зверніть увагу! У задачах найчастіше ми використовуватимемо рівняння $x = x_m \cos\omega t$, коли у момент початку відліку ($t = 0$) коливне тіло знаходиться у крайньому положенні.

Графіком залежності $x = x_m \sin\omega t$ є синусоїда. Графік гармонічного коливання можна дістати безпосередньо з досліду. Наприклад, коливальним тілом є пісочниця, з якої висипається пісок. Пісочницю підвішують на довгій нитці (*мал. 198, а*) або закріплюють на пружинах (*мал. 198, б*) і змушують здійснювати коливання. Якщо під пісочницею протягувати папір, то на ньому залишається слід, що нагадує синусоїду.



а *б*

Мал. 198. Наочний спосіб спостереження коливань

У гармонічних коливаннях швидкість і прискорення коливального тіла також змінюються за гармонічним законом, оскільки швидкість дорівнює першій похідній координати за часом, а прискорення – першій похідній від швидкості (або другій похідній координати).

З курсу математики вам буде відомо, що:

$(\cos kx)' = -k\sin kx$;

$(\sin kx)' = k\cos kx$.

Виходячи із рівняння $x = x_m \cos \omega t$, отримуємо:

$$\upsilon = (x_m \cos \omega t)' = -x_m \omega \sin \omega t,$$

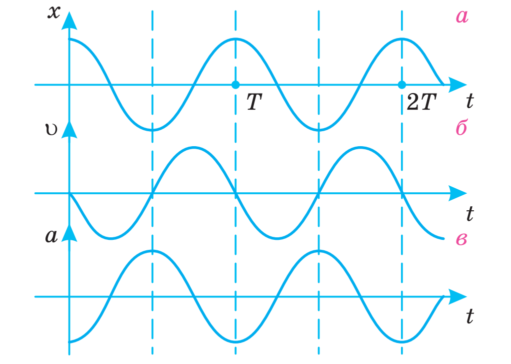
де $\upsilon_m = -x_m \omega$ – максимальна швидкість.

Для прискорення маємо:

$$a = (-x_m \omega \sin \omega t)' = -x_m \omega^2 \cos \omega t,$$

де $a_m = -x_m \omega^2$ – максимальне прискорення.

Враховуючи, що $x = x_m \cos\omega t$ вираз $a = -x_m\omega^2\cos\omega t$ набуває виду $a = -\omega^2 x$. Прискорення і координата одночасно стають максимальними за модулем, однак мають протилежні знаки.



Мал. **199: *а* – графік залежності *x*(*t*); *б* – графік залежності υ(*t*); *в* – графік залежності *a*(*t*)**

Графіки відповідних залежностей зміщення, швидкості і прискорення гармонічних коливань від часу подано на *мал. 199*.

З попередніх рівнянь видно, що прискорення прямо пропорційне зміщенню.

Отже, у довільний момент часу сила, що зумовлює коливання коливного тіла масою m також пропорційна зміщенню:

$$F = -m\omega^2 x_m \cos\omega t,$$

де $F_m = -m\omega^2 x_m$ – максимальне значення сили.

Таким чином, гармонічні коливання відбуваються під дією сили, напрямленої до середнього положення і прямо пропорційної зміщенню від цього положення.

Фаза коливань. Гармонічні коливання характеризуються ще однією важливою величиною – фазою коливань. При виведенні основного рівняння гармонічних коливань ми отримали його у вигляді $x = x_m \cos \frac{2\pi}{T} t$, де $\varphi = \frac{2\pi}{T} t$ і називають ***фазою коливань***.

У виразі $\varphi = 2\pi \frac{t}{T}$ відношення t/T показує, яка частина періоду минула з моменту початку коливань. Тобто будь-якому значенню часу, вираженого у частках періоду, відповідає значення фази, виражене у радіанах. Наприклад, для $t = \frac{1}{4}T$ (чверть періоду) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, для $t = \frac{1}{2}T$ (півперіоду) $\varphi = \pi$.

Таким чином, ***фаза коливань*** (φ) – фізична величина, що визначає миттєві значення змінних параметрів коливальної системи у певний момент часу, тобто визначає ступінь відхилення від положення рівноваги у цей момент.

Одиниця фази коливань – радіан, $[\varphi] = 1$ рад.

У наведених нами прикладах ми досліджували коливальний рух з моменту часу, коли коливальне тіло починало коливатися з крайнього положення. Оскільки, спостерігаючи за коливаннями, час можна відлічувати від будь-якого моменту, то початкове положення коливного тіла визначатиметься початковою фазою φ_0 і рівняння коливального руху набуде вигляду $x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$.

Фаза коливань у загальному випадку визначається за формулою: $\varphi = \omega t + \varphi_0$.

Для гармонічних коливань фаза є аргументом синуса чи косинуса.

Розглянемо ще раз графіки на *мал. 199* і порівняємо фази коливань координати, швидкості й прискорення.

Згідно з тригонометричними перетвореннями $\sin x = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$, тоді рівняння залежності швидкості від часу $\upsilon = -\upsilon_m \sin \omega t$ набуває вигляду

$$\upsilon = \upsilon_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) .$$

Отже, коливання швидкості випереджають за фазою коливання зміщення на $\pi/2$ (*мал. 199, б*).

А коливання прискорення випереджають за фазою коливання координати на π рад (знаходяться у протифазі) (*мал. 199, в*).

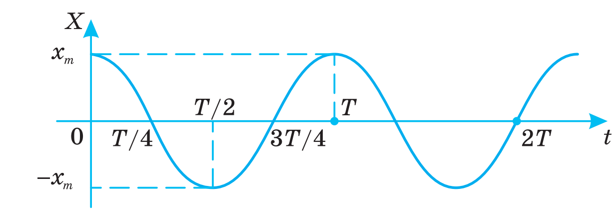
Дайте відповіді на запитання

1. Які коливання називаються гармонічними?
2. Як пов'язані прискорення і координата у гармонічних коливаннях?
3. Як змінюється з часом швидкість у гармонічних коливаннях?
4. Яку фізичну величину називають фазою коливання? Що вона характеризує?
5. Миттєве зміщення частинки в коливаннях описується функцією $x = x_m\cos(\omega t + \varphi_0)$. Якою має бути початкова фаза φ_0, щоб коливання були синусоїдними?

Загальні рекомендації щодо розв'язування задач на гармонічні коливання

Форма запису закону гармонічного коливання може бути вибрана довільно (через синус або косинус). Припустимо, що маятник спочатку відвели у крайнє положення і вільно відпустили (без поштовху), розпочавши відлік часу. Рівняння руху у цьому випадку слід записати у вигляді $x = x_m\cos\omega t$, але можна записати і так:

$$x = x_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) .$$



Мал. **200. Графік коливань**

Обидві форми запису еквівалентні, тобто, описують одне й те саме коливання, графік якого є косинусоїдою (*мал. 200*).

Якщо відлік часу починається у момент проходження коливним тілом положення рівноваги, то рівняння руху може бути записане у вигляді $x = x_m \sin \omega t$ або $x = x_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$.

Рух вивчається у межах одного періоду.

Приклад розв'язування задач

Задача. Тіло здійснює гармонічні коливання за законом $x = 0{,}05\cos 10\pi t$, де всі величини задано в СІ.

Визначити: а) амплітуду коливань, частоту коливань і період коливань. Записати рівняння залежності швидкості й прискорення від часу $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ і $a_x = a_x(t)$ та побудувати графіки залежності зміщення, швидкості, прискорення від часу;

б) зміщення при фазі $\pi/4$. У який момент часу зміщення дорівнюватиме 0,025 м?

Дано:
$x = 0{,}05\cos 10\pi t$;
$\varphi = \pi/4$;
$x = 0{,}025$ м

а) x_m – ?; ν – ?;
T – ?; $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$
$a_x = a_x(t)$
б) x – ?; t – ?

Розв'язання:

Виходячи з рівняння коливань визначаємо:

$$x_m = 0{,}05 \text{ м}, \ \omega = 10\pi.$$

Оскільки $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, то $\nu = 5$ Гц, $T = 0{,}2$ с.

Залежність проекції швидкості від часу визначаємо, обчисливши похідну від зміщення:

$$\upsilon_x = x' = -0{,}05 \cdot 10\pi \sin 10\pi t = -1{,}57 \sin 10\pi t,$$

де $\upsilon_m = -1{,}57$ м/с.

Залежність проекції прискорення від часу визначаємо, обчисливши похідну від швидкості: $a_x = \upsilon' = -1{,}57 \cdot 10\pi \cos 10\pi t = -49{,}3\cos 10\pi t$, де $a_m = -49{,}3$ м/с^2.

Відповідні графіки коливань подано на *мал. 201*.

Визначаємо зміщення при фазі $\pi/4$.

Тоді з рівняння коливань отримуємо: $x = 0{,}05\cos\frac{\pi}{4} = 0{,}05 \cdot 0{,}71 \approx 0{,}036$ м.

Визначаємо момент часу, у який зміщення дорівнює 0,025 м.

$$0{,}025 = 0{,}05\cos 10\pi t, \text{ звідси } \cos 10\pi t = 0{,}5.$$

Оскільки косинус набуває значення 0,5 при $\pi/3$, то $10\pi t = \pi/3$, звідси $t \approx 0{,}03$ с.

Відповідь: а) $x_m = 0{,}05$ м;
$\nu = 5$ Гц; $T = 0{,}2$ с;
$\upsilon_x = -1{,}57\sin 10\pi t$;
$a_x = -49{,}3\cos 10\pi t$.
б) $x = 0{,}036$ м; $t \approx 0{,}03$ с.

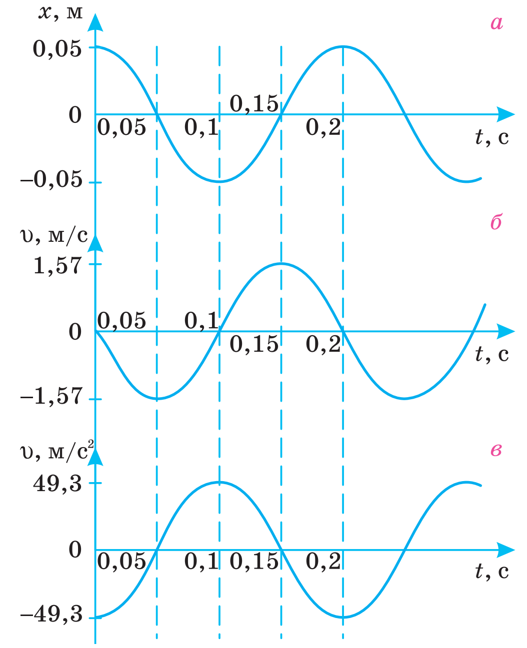
Вправа 36

1. Рівняння руху гармонічного коливання має вигляд $x = 0{,}02\cos 100\pi t$. Побудувати графік залежності $x(t)$, де всі величини задано в СІ. Обчислити зміщення через 0,25 с; через 1,25 с. Відповіді пояснити за допомогою графіка.

2. За графіком гармонічних коливань на *мал. 202* записати рівняння цього коливання.

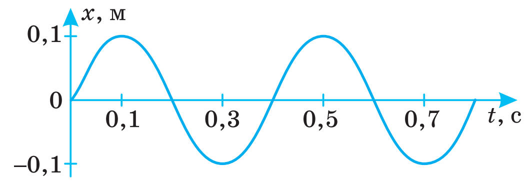
3. Написати рівняння гармонічного коливального руху з амплітудою 0,2 м, періодом 4 с і початковою фазою, що дорівнює нулю. Накреслити графік цього руху.

4. Написати рівняння гармонічного коливального руху, якщо максимальне прискорення точки – 49,3 см/с^2, період коливань – 2 с і зміщення точки від положення рівноваги у початковий момент часу – 25 мм.



Мал. **201. Графіки коливань:**
а **–** $x(t)$, ***б*** **–** $\upsilon(t)$, ***в*** **–** $a(t)$.

5. Коливальний рух точки описується рівнянням $x = 0{,}05\cos 20\pi t$ (всі величини задано в СІ). Обчисливши першу та другу похідні, написати рівняння залежності швидкості й прискорення від часу: $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ і $a_x = a_x(t)$. Визначити зміщення, швидкість і прискорення через 1/60 с від початку руху.



Мал. **202.До задачі 2**

6. Написати рівняння гармонічного коливального руху за такими його характеристиками: а) амплітуда – 5,5 см, період – 1 хв, початкова фаза – 30°; б) амплітуда – 0,1 м, частота – 10 коливань за секунду; початкова фаза дорівнює нулеві.

§ 40 Перетворення енергії у гармонічних коливаннях

✓ *Перетворення енергії у гармонічних коливаннях.*

Перетворення енергії у гармонічних коливаннях. Розглядаючи коливання горизонтального пружинного маятника ми бачили, що при початковому його відхиленні, наприклад, ліворуч на відстань x_m, коливне тіло, повертаючись, проходить положення рівноваги і відхиляється праворуч на x_m. Це пояснюється тим, що для коливального руху виконується ***закон збереження повної механічної енергії.***

У процесі гармонічних коливань повна механічна енергія коливальної системи, що дорівнює сумі потенціальної і кінетичної енергій, залишається незмінною.

На *мал. 203, а* показано, що у початковий момент (коли пружина стиснена) коливальна система має максимальну потенціальну енергію $E_{n\max} = \frac{kx_m^2}{2}$, де k – жорсткість пружини.

Примітка: як далі буде встановлено, якщо маса тягарця m, що коливається на пружині жорсткістю k, і циклічна частота коливань ω пов'язані співвідношенням $\omega^2 = \frac{k}{m}$, то вираз для максимальної потенціальної енергії можна записати у вигляді $E_{n\max} = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}$.

Рухаючись до положення рівноваги, потенціальна енергія зменшується, але при цьому збільшується кінетична енергія, яка набуває максимального значення у положенні рівноваги, де швидкість коливального тіла максимальна:

$$E_{k\max} = \frac{m\upsilon_m^2}{2}.$$

З урахуванням того, що $\upsilon_m = -x_m\omega$, маємо: $E_{k\max} = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}$.

Значення повної енергії у кожний момент часу дорівнює максимальній кінетичній або максимальній потенціальній енергії:

$$E_{\text{повна}} = E_{n\max} = E_{k\max} = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}.$$

Таким чином, кінетична енергія коливальної системи матиме максимальні значення у моменти проходження тілом положень рівноваги, а потенціальна – у моменти перебування тіла у точках найбільших відхилень від положення рівноваги.

У довільний момент часу сума потенціальної

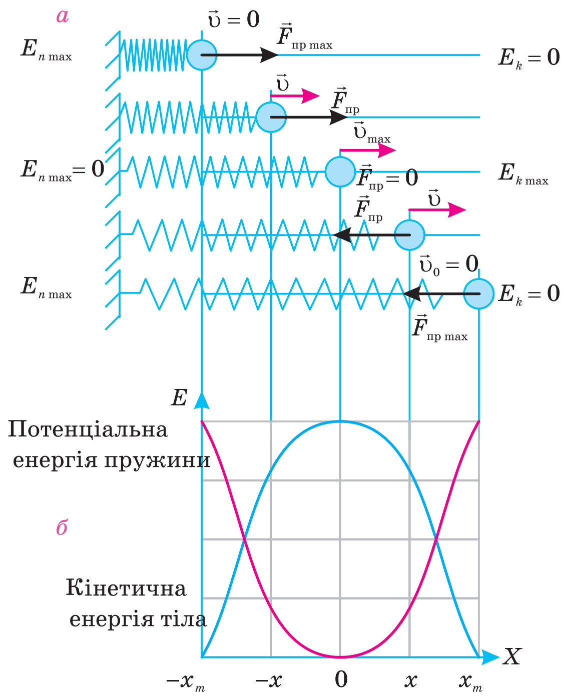
$$E_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}\cos^2 \omega t$$

і кінетичної енергії

$$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}\sin^2 \omega t$$

є сталою величиною і дорівнює повній енергії коливань:

$$E = E_n + E_k = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}\cos^2 \omega t + \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}\sin^2 \omega t = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}.$$



Мал. 203. Перетворення енергії коливальної системи

На *мал. 203, б* показано графік зміни потенціальної та кінетичної енергії коливальної системи за час одного періоду коливань.

Зверніть увагу! Виходячи із закону збереження повної механічної енергії, під час коливального руху також можна вивести рівняння коливань.

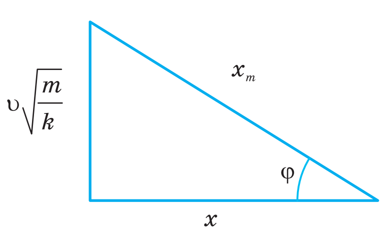
Повна енергія під час гармонічного коливання дорівнює: $\frac{kx^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2}$,

або $kx^2 + m\upsilon^2 = kx_m^2$. Розділивши на k, отримуємо:

$$x^2 + \frac{m\upsilon^2}{k} = x_m^2$$

або

$$x^2 + \left(\upsilon\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 = x_m^2 .$$



Мал. 204. Графічний спосіб отримання рівняння коливань

Побудувавши прямокутний трикутник із катетами x і $\upsilon\sqrt{\frac{m}{k}}$ та гіпотенузою x_m (*мал. 204*), отримуємо: $x = x_m\cos\varphi$.

Дайте відповіді на запитання

1. Розкажіть про перетворення енергії під час гармонічних коливань.

2. За певної амплітуди коливань повна енергія коливного тіла є сталою величиною. Чи можна так само стверджувати про кінетичну і потенціальну енергії?

3. Чи залежить енергія коливного тіла від його маси?

4. Скільки разів протягом періоду гармонічного коливання кінетична енергія частинки дорівнює її потенціальній енергії в той самий момент часу?

Приклад розв'язування задач

Задача. Тягар масою 2 кг здійснює горизонтальні коливання на пружині за законом $x = 0{,}05\cos 10\pi t$, де всі величини задано в СІ. Обчислити максимальні значення сили, кінетичної та потенціальної енергії. А також їх значення у момент, коли фаза коливань дорівнює $\pi/4$.

Дано:
$m = 2$ кг;
$x = 0{,}05\cos 10\pi t$;
$\varphi = \pi/4$

F_{max} – ?; $E_{пmax}$ – ?;
$E_{кmax}$ – ?; F – ?;
$E_п$ – ? $E_к$ – ?

Розв'язання:

Максимальне значення сили визначається за формулою: $F_m = -m\omega^2 x_m$

$F_m = -2 \cdot 100\pi^2 \cdot 0{,}05 = -100$ Н.

Максимальне значення кінетичної енергії дорівнює максимальному значенню потенціальної енергії і дорівнює повній енергії, тому

$$E_{повна} = E_{п\,max} = E_{к\,max} = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2};\ E_{повн} = 2{,}5 \text{ Дж}.$$

У момент, коли фаза коливань дорівнює $\pi/4$, значення сили визначається за формулою: $F = -m\omega^2 x_{max}\cos\omega t$, тоді $F = -71$ Н.

У момент, коли фаза коливань дорівнює $\pi/4$, значення потенціальної енергії визначається за формулою: $E_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}\cos^2\omega t = 1{,}25$ Дж, а значення кінетичної енергії можна визначити за формулою $E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}\sin^2\omega t$,

або $E_к = E_{повн} - E_п$

$$E_к = 2{,}5 \text{ Дж} - 1{,}25 \text{ Дж} = 1{,}25 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $F_m = -100$ Н; $E_{повн} = E_{пmax} = E_{кmax} = 2{,}5$ Дж; $F = -71$ Н; $E_п = E_к = 1{,}25$ Дж.

Вправа 37

1. Вантаж, маса якого 400 г, коливається у горизонтальному напрямі на пружині, що має жорсткість 250 Н/м. Амплітуда коливань 15 см. Визначити частоту, повну механічну енергію коливань і найбільшу швидкість руху вантажу.

2. Вантаж, підвішений на пружині, жорсткість якої 1 кН/м, коливається у горизонтальному напрямі з амплітудою 2 см. Визначити кінетичну і потенціальну енергію при фазі $\pi/3$ рад.

3. Скільки разів протягом періоду гармонічного коливання кінетична енергія частинки дорівнює її потенціальній енергії у той самий момент часу?

4. Пружинний маятник вивели зі стану рівноваги і відпустили. Через який час (у частинах періоду) кінетична енергія коливного тіла дорівнюватиме потенціальній енергії пружини? Коливання відбуваються у горизонтальному напрямі.

5. Вантаж масою 1 кг, підвішений до пружини з жорсткістю 100 Н/м, коливається з амплітудою 10 см. Написати рівняння руху вантажу $x = x(t)$. Написати формулу, що виражає залежність зміни сили пружності від часу: $F = F(t)$. Визначити найбільше значення сили пружності, а також значення сили пружності через 1/6 періоду. Коливання відбуваються у горизонтальному напрямі.

6. Написати рівняння гармонічного коливання тіла, якщо його повна енергія – $3 \cdot 10^{-5}$ Дж, максимальна сила, що діє на тіло, – 1,5 мН, період коливань – 2 с і початкова фаза – 60°.

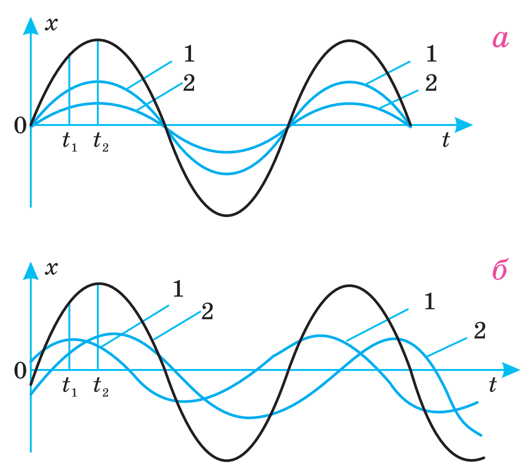
7. Тіло масою $m = 1$ кг під дією пружини жорсткістю $k = 400$ Н/м коливається без тертя у горизонтальній площині вздовж стержня. Користуючись законом збереження енергії визначити період коливання тіла.

§ 41 Додавання гармонічних коливань

✓ *Додавання коливань.*
✓ *Векторні діаграми.*

Додавання коливань. На практиці часто коливання накладаються одне на одне. Щоб визначити параметри результуючого коливання, користуються графічним методом. Для цього, побудувавши на одних і тих самих координатних осях графіки коливань, які треба додати, здійснюють послідовне додавання ординат цих графіків для певних моментів часу t_1, t_2, t_3, ... на осі абсцис.

Приклади коливань однакового періоду показані на *мал. 205* (на *мал. 205, а* – коливання 1 і 2, які збігаються за фазою, на *мал. 205, б* – коливання 1 і 2, фази яких відрізняються на $\pi/4$).



Мал. 205. Додавання коливань

Векторні діаграми. Значно зручніше додавати гармонічні коливання за допомогою векторних діаграм.

Нехай коливання задано рівняннями:

$$x_1 = a_1\cos(\omega t + \varphi_1) \text{ та } x_2 = a_2\cos(\omega t + \varphi_2),$$

де a_1, a_2 – амплітуди коливань; φ_1, φ_2 – початкові фази коливань.

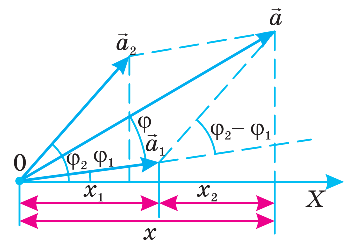
Зобразимо обидва коливання за допомогою векторів $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ (*мал. 206*).

Побудуємо за правилами додавання векторів результуючий вектор $\vec{a}$. Проекція цього вектора на вісь X дорівнює сумі проекцій векторів, які додаються: $x = x_1 + x_2$.

Результуюче коливання буде гармонічним коливанням з частотою ω, амплітудою a і початковою фазою φ, яку визначають за формулою

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2}.$$

Метод векторних діаграм широко застосовується при розв'язанні практичних завдань, зокрема в електротехніці при розрахунках параметрів електричних кіл змінного струму.



Мал. **206. Векторна діаграма**

§ 42 Маятники

- ✓ *Період коливань пружинного маятника.*
- ✓ *Період коливань математичного маятника.*
- ✓ *Період коливань фізичного маятника.*

> ***Маятник*** – тіло, що коливається під дією сили тяжіння або сили пружності. Є кілька типів маятників: математичний, фізичний, пружинний.

Період коливань пружинного маятника. З попередніх рівнянь, отриманих для коливань горизонтального пружинного маятника (§ 39), видно, що прискорення у довільний момент часу пропорційне зміщенню: $a = -\omega^2 x$. Водночас у будь-якій точці траєкторії сила пружності напрямлена до положення рівноваги і прямо пропорційна зміщенню:

$$F_{\text{пр}_x} = -kx,$$

де k – жорсткість пружини. За другим законом Ньютона: $a = \frac{F_{пр}}{m} = -\frac{k}{m}x$. Прирівнюючи обидва вирази для прискорення, отримуємо: $\omega^2 = \frac{k}{m}$ або $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Оскільки $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, то:

період вільних коливань пружинного маятника:

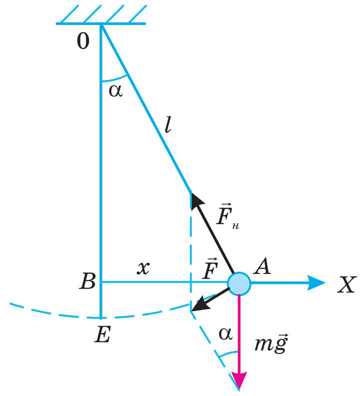
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Період коливань математичного маятника. ***Математичний маятник*** – це модель ідеальної коливальної системи.

Реальний нитковий маятник (*мал. 207*), що складається з невеликого тіла і довгої тонкої нитки великої жорсткості (наприклад, сталевого дроту) можна вважати математичним маятником.

За малих відхилень такого маятника від положення рівноваги ($\alpha < 5°$) його коливання будуть гармонічними.

Математичний маятник коливається під дією сили тяжіння $m\vec{g}$ і сили натягу нитки $\vec{F}_н$. Відведемо коливне тіло у крайнє праве положення. У цьому випадку рівнодійна сили тяжіння і сили натягу нитки направлена проти зміщення – до положення рівноваги (*мал. 207*). Із малюнка видно, що за модулем ця рівнодійна дорівнює: $F = mg\sin\alpha$.



Мал. **207. Коливання математичного маятника**

Оскільки кут відхилення малий, то дуга $\overset{\frown}{EA}$, по якій рухається кулька, мало відрізняється від напівхорди BA, тому зміщення $x = BA$. Крім того при малих кутах виконується співвідношення $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\,\alpha$. З трикутника $0BA$ $\mathrm{tg}\alpha = x/l$, де l – довжина нитки.

Таким чином, проекція рівнодійної, що діє на коливне тіло (з урахуванням того, що вона направлена проти зміщення), описується формулою $F_x = -\frac{mg}{l}x$. Як бачимо, ця сила «схожа» на силу пружності (квазіпружна) $F_{пр_x} = -kx$, де роль коефіцієнта пружності k відіграє величина mg/l.

Однакові причини виникнення коливань ведуть до однакових результатів. Виведемо формулу періоду коливань математичного маятника так само, як ми це робили під час виведення формули періоду коливань пружинного маятника. Оскільки коливання математичного маятника є гармонічними, то прискорення у довільний момент часу пропорційне зміщенню: $a = -\omega^2 x$. Водночас у будь-якій точці траєкторії рівнодійна F напрямлена до положення рівноваги і прямо пропорційна зміщенню: $F = -\frac{mg}{l}x$. За другим законом Ньютона: $a = \frac{F}{m} = -\frac{g}{l}x$.

Прирівнюючи обидва вирази для прискорення, отримуємо: $\omega^2 = \frac{g}{l}$ або $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Оскільки $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, то:

період вільних коливань математичного маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

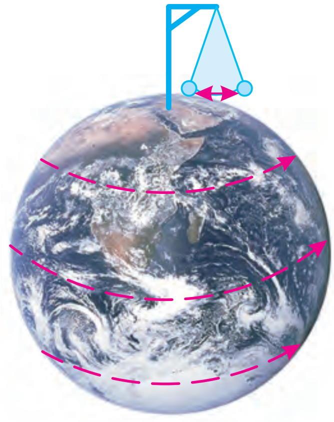
Період власних коливань математичного маятника не залежить від маси й амплітуди коливань, а характеризується прискоренням вільного падіння $\vec{g}$ для певної місцевості і довжиною маятника.

Оскільки будь-який маятник має фіксований період коливань, то маятники використовують для регулювання ходу годинників.

Маятники використовують й у геологічних розвідках. У місцях, де залягають породи металевих руд, значення g аномально велике. Точні вимірювання прискорення вільного падіння за допомогою математичного маятника дають змогу виявити такі родовища.

За допомогою математичного маятника можна виявити добове обертання Землі. Цей дослід у 1851 р. у Парижі виконав Ж. Фуко з маятником завдовжки 67 м. Тому маятники, за допомогою яких можна продемонструвати добове обертання Землі навколо своєї осі, називають маятниками Фуко.

Зміст досліду полягає у тому, що площина коливань математичного маятника залишається незмінною відносно інерціальної системи відліку (у цьому випадку відносно далеких зірок). Тоді відносно неінерціальної системи відліку, пов'язаної із Землею, внаслідок дії сили Коріоліса площина коливань маятника має повертатись (*мал. 208*).



***Мал.* 208. Модель досліду із маятником Фуко**

Пізніше цей дослід повторювали в різних містах. Очевидно, що ефект повороту площини коливань маятника залежить від широти місця проведення досліду, найбільш виражений на земних полюсах і не відбувається на екваторі.

Часто під час розв'язування задач розглядають математичний маятник, який коливається, рухаючись з певним прискоренням $\vec{a}$. У цьому разі період коливань маятника визначають з формули

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{|\vec{a} - \vec{g}|}}.$$

Період коливань фізичного маятника. ***Фізичний маятник*** – абсолютно тверде тіло, що коливається під дією сили тяжіння навколо горизонтальної осі, яка не проходить через центр тяжіння тіла C (*мал. 221*).

При малих кутах відхилення ($\alpha < 5°$) коливання маятника є гармонічними.

> Період власних коливань фізичного маятника визначається за формулою
>
> $$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}},$$

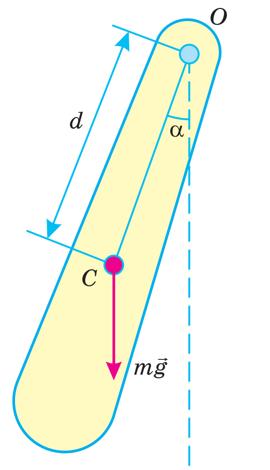
де J – момент інерції тіла відносно осі;

m – маса тіла;

g – прискорення вільного падіння;

d – відстань від осі коливання до центра тяжіння тіла.

За періодом коливань фізичного маятника просто визначити моменти інерції різноманітних деталей (твердих тіл), що використовуються в техніці.



Мал. **209.**
Фізичний маятник

Дайте відповіді на запитання

1. Яка коливальна система називається математичним маятником? Пружинним маятником? Фізичним маятником?
2. При яких відхиленнях від положення рівноваги коливання математичного і фізичного маятників будуть гармонічними?
3. Виведіть формулу періоду коливань математичного маятника. Чи залежить період коливань маятника від його маси?
4. Від чого залежить період коливань пружинного маятника?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Математичний маятник завдовжки 1 м коливається з амплітудою 1 см. За який час він пройде шлях 1 см, якщо у початковий момент маятник проходить положення рівноваги? За який час маятник пройде: а) першу половину амплітуди; б) другу половину амплітуди?

Дано:
$l = 1$ м;
$x_m = 1 \cdot 10^{-2}$ м;
$x = 1 \cdot 10^{-2}$ м;
$x_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ м;
$x_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ м

t – ?; t_1 – ?; t_2 – ?

Розв'язання:

Оскільки у початковий момент маятник проходить положення рівноваги, то рівняння його руху має вигляд $x = 0{,}01\sin \pi t$.

Шлях 1 см, який дорівнює амплітуді, маятник проходить за чверть періоду. Період коливань математичного маятника визначається за формулою $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, а час: $t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4}\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 0{,}5$ с.

Час, за який маятник проходить першу половину амплітуди, визначаємо з рівняння: $0{,}005 = 0{,}01\sin\pi t$, тоді $\sin\pi t = 0{,}5$. Синус набуває значення 0,5 при $\pi/6$, отже $\pi t = \pi/6$, звідси $t = 0{,}167$ с. Тоді час, за який маятник проходить другу половину амплітуди, становить: $t_2 = t - t_1$; $t_2 = 0{,}5$ с $- 0{,}167$ с $= 0{,}33$ с.

Відповідь: 0,5 с; 0,167 с; 0,33 с.

Задача 2. За якої швидкості потяга амплітуда коливань маятника завдовжки 11 см, підвішеного у вагоні, буде найбільшою, якщо довжина рейок між стиками 12,5 м?

Дано:
$l = 0{,}11$ м;
$L = 12{,}5$ м;
$a = 10$ м/с^2

υ – ?

Розв'язання:

Амплітуда коливань буде найбільшою за умови, що час, за який поїзд проходить відстань між стиками рейок, дорівнюватиме періоду коливань.

У випадку рівномірного руху потяга $t = \dfrac{L}{\upsilon}$, а період коливань $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

Із умови $t = T$ визначаємо $\upsilon = \dfrac{L}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$; $\upsilon \approx 18{,}78$ м/с.

Відповідь: $\upsilon \approx 18{,}78$ м/с.

Вправа 38

1. Маятник зробив 50 коливань за 1 хв 40 с. Визначити період, частоту і циклічну частоту коливань.
2. Як відносяться довжини математичних маятників, якщо за той самий час один із них робить 10, а другий 30 коливань?
3. За один і той самий час перший математичний маятник робить 50 коливань, другий – 30. Визначити довжини цих маятників, якщо один із них на 32 см коротший від іншого.
4. Як зміниться хід годинника з маятником на металевому стержні: а) з підвищенням температури; б) при піднятті на гору; в) при переміщенні від полюса до екватора?
5. У скільки разів зміниться період коливання маятника у ракеті, яка стартує з поверхні Землі вертикально вгору з прискоренням 30 м/с^2?
6. Математичний маятник на Землі має період малих коливань 1 с. Яким буде період його коливань на Місяці?
7. Визначити прискорення вільного падіння у тому місці земної поверхні, де довжина секундного маятника буде 0,995 м.

§ 43 Вимушені коливання. Резонанс. Автоколивання

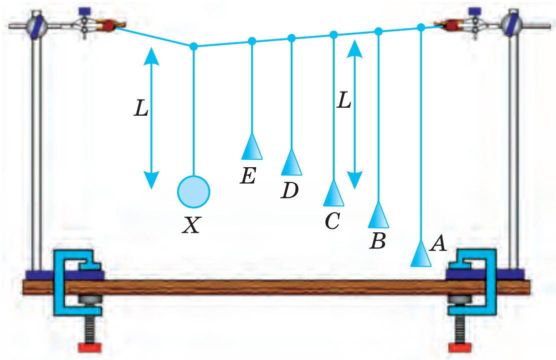
✓ *Вимушені коливання.*
✓ *Резонанс і його практичне використання.*
✓ *Автоколивальні системи.*

Вимушені коливання. Як зазначалося, для того щоб коливання не згасали, енергія коливальної системи має поповнюватися. Наприклад, щоб гойдалка не зупинялась, її необхідно підштовхувати через інтервали часу, що дорівнюють періоду коливань гойдалки.

> ***Коливання,*** які здійснюються під дією як внутрішніх, так і зовнішніх періодичних сил називають ***вимушеними.***

Вимушені коливання здійснює скло вікон у будинках, повз які проходить вантажний транспорт, корпуси машин і механізмів, що працюють. Під час розмови по телефону виникають вимушені коливання мембрани мікрофона під дією коливань повітря, а повітря – під дією коливань голосових зв'язок.

Резонанс і його практичне використання. Дослідимо деякі особливості вимушених коливань. Для цього проведемо такий дослід. Закріпимо між двох штативів трос і підвісимо до троса маятники різної довжини (*мал. 210*).



Мал. **210. Виникнення резонансу**

Виведемо зі стану спокою, наприклад, маятник X, надамо йому можливість вільно коливатися (площина коливань маятника перпендикулярна до площини малюнка). Ці коливання викликатимуть коливання троса і змусять коливатись інші маятники. При цьому маятник C, що має таку саму довжину, а отже, і такий самий період, як і маятник X, коливатиметься найсильніше; маятники B і D, періоди коливань яких наближаються до періоду коливань маятника X, коливатимуться дещо слабше, а маятники A і E майже не коливатимуться.

Отже, якщо період (частота) коливань сили, що їх викликає, дорівнює власному періоду (частоті) коливань коливальної системи, то амплітуда вимушених коливань найбільша. Це явище називають ***резонансом***.

Резонанс – явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань, коли частота зовнішньої періодичної сили збігається з частотою власних коливань.

Спробуємо це довести. Для зручності розглянемо коливальну систему – горизонтальний пружинний маятник. Уздовж осі X на коливне тіло діє сила пружності $F_{пр_x} = -kx$ і змінна зовнішня сила $F = F_m \cos \omega t$. Застосовуючи другий закон Ньютона до опису коливань тіла, отримаємо $ma = -kx + F_m \cos\omega t$. Врахуємо, що $a = -\omega^2 x_m \cos\omega t$, $x = x_m \cos \omega t$, $\omega_0{}^2 = \dfrac{k}{m}$, тобто, $k = \omega_0^2 m$, тоді отримаємо рівняння другого закону Ньютона у вигляді:

$$-m\omega^2 x_m \cos \omega t = -\omega_0^2 m x_m \cos \omega t + F_m \cos \omega t .$$

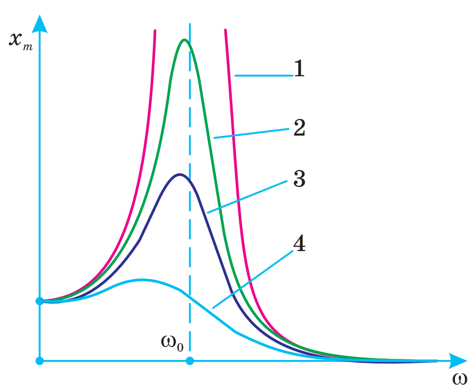
Скоротимо рівняння на $\cos \omega t$ і запишемо з нього вираз для амплітуди вимушених коливань x_m:

$$x_m = \left| \frac{F_m}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right| .$$

Проаналізуємо отриману залежність і побудуємо її графік. Зі зміною частоти ω зовнішньої сили змінюється амплітуда вимушених коливань. Якщо ця частота наближається до частоти вільних коливань системи ω_0, то знаменник дробу наближується до нуля. У цьому випадку амплітуда різко збільшується, прямуючи до нескінченності (*мал. 211, крива 1*) за умови $\omega = \omega_0$.

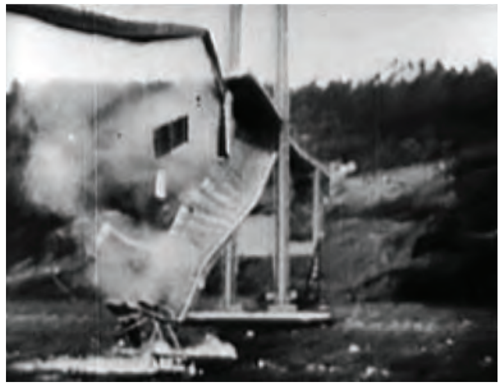
Якщо врахувати дію на коливне тіло сил опору, які перешкоджають збільшенню амплітуди коливань, то зі збільшенням сил опору значення резонансної амплітуди зменшуватиметься (*кривій 4* на *мал. 211* відповідає максимальне значення сили опору).

Резонанс відіграє важливу роль у природі і техніці. Позитивними виявами є різні резонатори, настроювання коливальних контурів при радіозв’язку; негативними – руйнування фундаментів і конструкцій унаслідок коливання. Відомі випадки, коли руйнувалися мости під час переходу по них військових, які крокували «в ногу» і при цьому частота кроку збігалася з власною частотою коливань мостів. У 1850 р. зруйнувався Анжерський підвісний міст над Луарою, по якому крокували французь-



Мал. 211. Резонансні криві

кі піхотинці. Тоді загинуло 226 осіб. У 1906 р. зруйнувався ланцюговий Єгипетський міст через річку Фонтанку у Петербурзі. У 1940 р. через, кілька місяців після введення в дію, зруйнувався Такомський підвісний міст (*США, штат Вашингтон*), в якому виникли резонансні коливання під дією вітру (*мал. 212*).



Мал. 212.
Руйнування Такомського моста

Конструюючи заводи, вокзали, мости, літаки та інші конструкції, необхідно враховувати явище резонансу: щоб їх власний період коливань не збігався з періодом коливань механізмів, які можуть викликати вимушені коливання цих конструкцій.

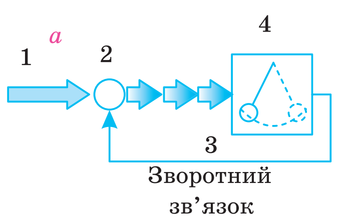
Автоколивальні системи. Отже, незгасаючі вимушені коливання можна отримати під час дії на тіло, яку можуть здійснювати вільні коливання, періодичної зовнішньої сили. Проте можна зробити так, щоб коливальна система сама керувала зовнішнім впливом, забезпечуючи узгодженість дії сили зі своїм рухом. Така система називається автоколивальною, а здійснені нею незгасаючі коливання – автоколиваннями.

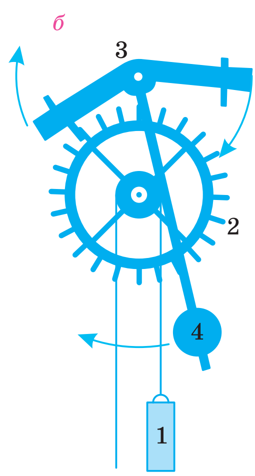
> ***Автоколивання*** – незгасаючі коливання, спричинені сталим зовнішнім впливом на систему, яка сама регулює їх частоту.

На відмінну від вимушених коливань, частота й амплітуда автоколивань визначаються властивостями самої коливальної системи. Від вільних коливань автоколивання відрізняються тим, що вони з часом не згасають, а також тим, що їх амплітуда не залежить від початкового короткочасного впливу, який збуджує коливання.

У будь-якій автоколивальній системі виокремлюють основні елементи (*мал. 213, а*): 1 – джерело енергії, 2 – передавальний пристрій зі зворотним зв'язком – 3, який регулює надходження енергії з джерела у коливальну систему, – 4.

Прикладом автоколивальної системи є годинник з маятником (*мал. 213, б*).





Мал. 213. *а* – схема автоколивальної системи; *б* – автоколивальна система (годинник з маятником)

Джерелом енергії такої системи є гиря 1, передавальним пристроєм – храпове колесо 2 та анкер 3, коливальною системою – маятник 4.

Піднята над землею гиря, опускаючись, обертає храпове колесо. Оскільки гиря вільно опускається, то її рух є рівноприскореним. Рівномірне обертання храпового колеса забезпечує маятник, який з'єднано з храповим колесом через анкер. За одну секунду маятник здійснює одне повне коливання. Завдання анкера полягає в тому, щоб храпове колесо, до якого кріпляться стрілки, могло при цьому повернутись лише на один зубець.

Маятниковий механізм нині ще використовується у годинниках на вежах або настінних годинниках. Згодом маятниковий механізм годинників змінили на пружинний, електронний, кварцовий.

У техніці застосовуються електромеханічні автоколивальні системи, в яких коливання здійснює механічна система, а надходження енергії регулюється спеціальним електричним пристроєм.

Дайте відповіді на запитання

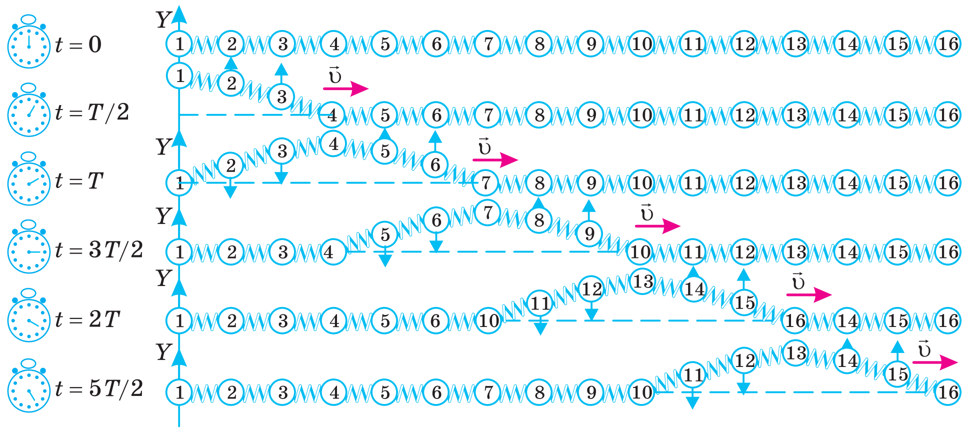
1. Які коливання називають вимушеними? Наведіть приклади вимушених коливань.
2. Від чого залежить амплітуда вимушених коливань?
3. Що називають резонансом? За яких умов він виникає?
4. Наведіть приклади позитивного і негативного резонансних виявів.
5. Які коливання називаються автоколиваннями?
6. Що входить до складу автоколивальної системи? Наведіть приклади автоколивальних систем.

§ 44 Механічні хвилі

✓ *Поширення механічних коливань у пружному середовищі.*
✓ *Види хвиль і їх характеристики.*
✓ *Рівняння плоскої гармонічної хвилі.*
✓ *Відбивання механічних хвиль.*

Досі ми розглядали коливання, які здійснювалися в окремих коливальних системах. У повсякденному житті нам більше доводиться мати справу з коливаннями, які передаються від однієї системи до іншої. Наприклад, коливання поплавка передаються частинкам води, звукові коливання – коливанням барабанної перетинки вуха.

Тому подальше вивчення коливальних явищ присвячене ***процесу поширення коливань***.



Мал. **214. Схема процесу утворення механічної хвилі**

Поширення механічних коливань у пружному середовищі. Основною фізичною моделлю речовини є сукупність атомів і молекул, які безперервно і хаотично рухаються і взаємодіють між собою. Використання цієї моделі дає змогу пояснити не тільки властивості речовини в різних агрегатних станах, а й механізм поширення механічних коливань у просторі.

Щоб зрозуміти процес поширення механічних коливань, розглянемо коливання кульок, пружно зв'язаних між собою (*мал. 214*).

Якщо відхилити від положення рівноваги першу кульку так, як показано на *мал. 214*, то вона, у результаті пружного зв'язку з іншими кульками, викличе і їх рух. Але оскільки коливання першої кульки передаються іншим не миттєво, а протягом деякого часу, то коливання інших кульок починаються з деяким запізненням і їх положення у просторі має форму хвилі.

Механічна хвиля **– процес поширення коливань у пружному середовищі з плином часу.**

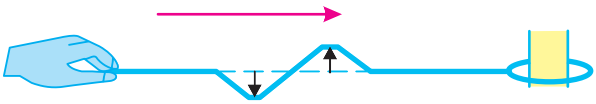
Приклад найпоширеніших механічних хвиль є звук, хвилі на поверхні рідин.

Механізм поширення пружної хвилі полягає у збудженні коливань внаслідок деформації середовища і передачі збурень у сусідні його ділянки. Коливання джерел хвиль спричинюють деформацію прилеглих до нього ділянок середовища. Унаслідок деформації в ділянках середовища виникають сили пружності. Це спричинює переміщення часток, прилеглих до деформованих ділянок. Таким чином, збудження коливань частинок біля джерела зумовлює вимушені коливання сусідніх частинок, ті, у свою чергу, збуджують коливання наступних і т. д. Під час поширення хвиль частки середовища коливаються відносно своїх положень рівноваги, тому перенесення речовини не відбувається, хоч останнє іноді може відбуватися як супутнє явище у випадку сильних збурень (***ударна хвиля***).

Види хвиль і їх характеристики. Пружна хвиля може бути ***поперечною*** (*мал. 214*), якщо частинки коливаються у площинах, перпендикулярних до напряму поширення хвилі.

Напрям поширення хвилі називають ***променем***.

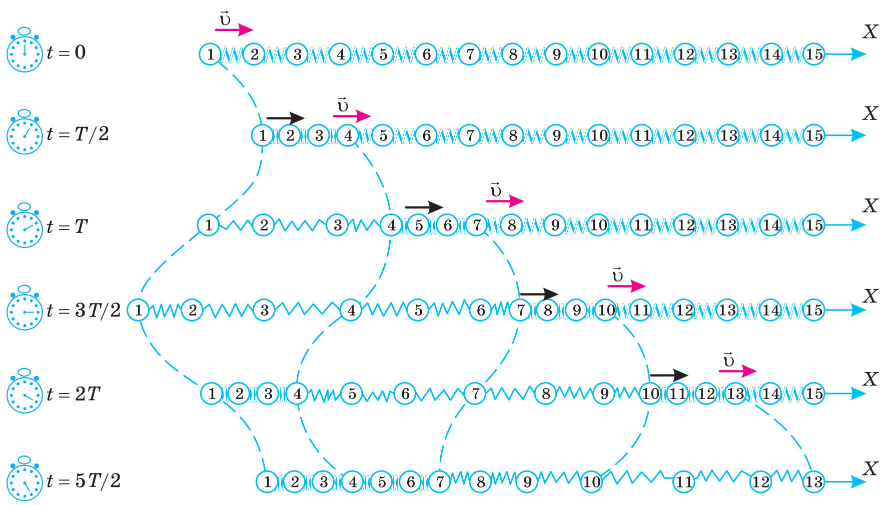
Поперечні хвилі виникають у середовищах, де можливі пружні деформації зсуву (твердих тілах і в поверхневих шарах рідин). Прикладом такої хвилі є хвиля, утворена внаслідок коливання шнура (*мал. 215*).



Мал. 215. Поперечна механічна хвиля

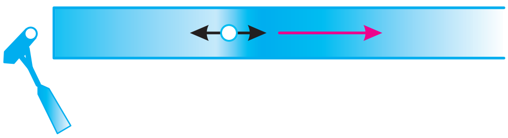
Поздовжня хвиля утворюється, якщо коливання частинок середовища відбуваються у напрямі поширення хвилі.

На моделі пружного тіла (*мал. 216*), яке складається з однакових кульок, пружно пов'язаних між собою, можна спостерігати процес поширення поздовжніх хвиль. Якщо штовхнути крайню ліву кульку вправо вздовж ряду кульок, то вона почне коливатись, до того ж приведе у коливальний рух сусідню кульку, яка у свою чергу передасть коливальний рух наступній і т. д. У результаті всі кульки поступово почнуть коливатись, однак не одночасно, а так, що кожна наступна кулька почне коливання дещо пізніше за попередню, тому коливатимуться вони з одним і тим самим періодом, але з різними фазами. На малюнку 228 пунктирними лініями зображені графіки коливань кульок 1, 4, 7, 10 і 13.

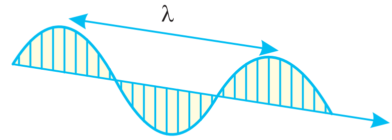


Мал. 216. Схема процесу утворення поздовжньої механічної хвилі

Поздовжні хвилі виникають у середовищах, де можливі пружні деформації стиску та розтягу. Прикладом поздовжньої механічної хвилі є звук. На *мал. 217* показано поширення звуку від удару молотка по металевому стержню.



Мал. **217. Поздовжня звукова хвиля**



Мал. **218. Графічне зображення довжини хвилі**

У газах і рідинах виникають лише поздовжні хвилі, які є чергуванням розріджень і згущень середовища. У твердих тілах можливі як поздовжні, так і поперечні пружні хвилі.

Для вивчення хвильових процесів вводяться відповідні величини:

> ***Довжина хвилі*** **(λ)** – це відстань на яку поширюється хвиля протягом одного періоду коливань:
> $$\lambda = \upsilon T,$$

де υ – швидкість поширення хвилі; T – період коливань джерела хвилі.

Точки середовища, які знаходяться одна від одної на відстані, що дорівнює довжині хвилі, коливаються в однакових фазах (*мал. 218*).

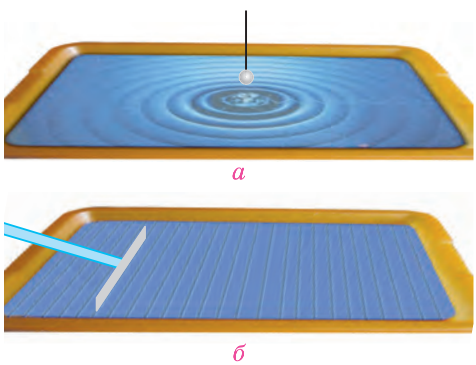
> ***Швидкість*** **(υ)** поширення пружної хвилі залежить від пружних властивостей і густини середовища:
> $$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

де E – модуль Юнга (характеризує пружні властивості середовища); ρ – густина середовища.

Швидкість звуку у повітрі при 0 °С становить 331 м/с, за температури 20 °С – 340 м/с; у виробах зі сталі – 5500 м/с. В однорідному середовищі від точки, яка коливається, коливання поширюються в усіх напрямках зі сталою швидкістю.

> ***Фронт хвилі*** – геометричне місце точок, до яких на певний момент часу дійшли коливання.

Досить наочними і знайомими є хвилі на поверхні води. Для демонстрації і дослідження таких хвиль використовують неглибоку ванночку, заповнену водою (*мал. 219*). Якщо до поверхні води дотикається точкове джерело, що періодично коливається, то утворюються



Мал. **219. Утворення: *а* – сферичної, *б* – плоскої хвиль** сферичні хвилі (*мал. 219, а*), якщо джерелом є пластина, що періодично коливається, то утворюються плоскі хвилі (*мал. 219, б*).

Фронт хвилі від точкового джерела в однорідному середовищі – сфера.

Плоска хвиля – хвиля, фронтом якої площина.

Рівняння плоскої гармонічної хвилі. Якщо коливання середовища спричинюються періодичною зовнішньою силою, яка змінюється з часом за гармонічним законом, то хвилі, які вона викликає, називають ***гармонічними***. У цьому випадку в кожній точці середовища відбуваються гармонічні коливання з частотою зовнішнього впливу. Гармонічні хвилі є найпростішим і важливим видом хвильового руху, тому обмежимось у подальшому розглядом саме цих хвиль.

Якщо джерело коливань здійснює гармонічні коливання $x = x_m \sin\omega t$, то ***рівняння хвилі*** визначає положення коливної точки, яка знаходиться на відстані l від джерела у будь-який момент часу t:

$$x = x_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\upsilon T}\right),$$

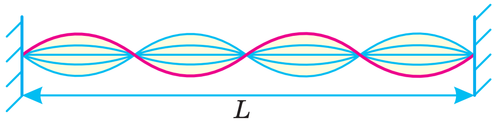
або $x = x_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right)$.

Відбивання механічних хвиль. Поширюючись у просторі, механічна хвиля може дійти до межі, де починатиметься інше середовище. У такому випадку механічні хвилі можуть відбиватися. Бувають два типові випадки відбивання: ***відбивання з втратою півхвилі***, тобто після відбивання фаза коливань фронту хвилі змінюється на протилежну (наприклад, хвиля поширюється по шнуру опуклістю вперед, а після відбивання від поверхні – біжить вперед западиною), ***відбивання без втрати півхвилі*** (якщо хвиля до відбивання поширювалась опуклістю вперед, то й після відбивання вона поширюється опуклістю вперед).

Стояча хвиля – хвиля, що утворюється в результаті накладання основної і відбитої хвиль, які поширюються назустріч одна одній, мають однакові періоди й амплітуди (*мал. 220*).

Стояча хвиля має точки, в яких амплітуда коливань найбільша (***пучності***) і в яких вона дорівнює нулю (***вузли***).

Оскільки пряма і відбита хвилі переносять енергію у взаємно протилежних напрямах, то стояча хвиля енергії не переносить, хоч між окремими точками обмін енергією відбувається.



Мал. **220. Утворення стоячої хвилі**

Стоячі хвилі утворюються за умови, що лінійні розміри тіла L, у якому поширюється хвиля, кратні $\lambda/4$, тобто на відстані від джерела хвиль до межі, від якої хвилі відбиваються, вміщується ціле число чвертей довжини хвилі.

Стоячі хвилі використовують для визначення довжини пружних хвиль, швидкості поширення хвиль, вивчення пружних властивостей тіл тощо. Механізм їх утворення покладено в основу конструювання струнних і духових музичних інструментів, органа.

Дайте відповіді на запитання

1. Поясніть механізм утворення пружних механічних хвиль.
2. У чому полягає відмінність між поздовжньою та поперечною хвилями? У яких середовищах можуть поширюватися поздовжні хвилі, а у яких – поперечні?
3. Що називають довжиною хвилі?
4. Від чого залежить швидкість поширення хвилі у пружному середовищі?
5. Що таке фронт хвилі?
6. Як утворюються стоячі хвилі?

§ 45 Звук

- ✓ *Утворення звукових хвиль. Швидкість звуку.*
- ✓ *Відбивання звукових хвиль.*
- ✓ *Акустичні (фізичні) та фізіологічні характеристики звуку.*
- ✓ *Акустичний (звуковий) резонанс.*

Утворення звукових хвиль. Швидкість звуку. ***Звук*** – це механічні хвилі, що поширюються у пружному середовищі.

Звукова хвиля (або просто звук) виникає завдяки механічним коливанням різних тіл. Проте не будь-які механічні коливання створюють звук і не за будь-яких умов. Розглядаючи коливання маятника, можна помітити, що звукові коливання в цьому випадку не виникають, хоч амплітуда таких коливань може бути й великою. Отже, амплітуда не є тією основною характеристикою, за якою відрізняють звукові коливання від просто механічних.

Сприйматися органами слуху людини як звук можуть коливання в середовищі частотою від 16 до 20 000 Гц та інтенсивністю $I = 10^{-12} \ldots 10^{2}$ Вт/м^2.

Звукові хвилі у повітрі – поздовжні.

Звукові хвилі, поширюються з певною швидкістю, яка називається *швидкістю звуку*, тобто на поширення коливань від джерела потрібен певний час. Наприклад, ми не раз помічали, що спочатку видно спалах від пострілу, а через певний час чути й звук; блискавку ми бачимо раніше, ніж чуємо гуркіт грому.

Швидкість звуку залежить від середовища, у якому він поширюється.

У таблиці наведено значення швидкості поширення звукових хвиль у різних середовищах.

Тверде тіло	υ, м/с	Рідина (при 20 °С)	υ, м/с	Газ (при 0 °С)	υ, м/с
Залізо	5850	Вода морська	1451	Повітря	331
Лід	3980	Ртуть	1451	Кисень	316
Скло	5990	Спирт	1180	Водень	1284

Швидкість поширення звуку залежить від температури середовища. Наприклад, швидкість поширення звуку в рідинах (за винятком води) з підвищенням температури зменшується, а в газах швидкість поширення звуку при незмінному тискові з підвищенням температури збільшується.

Є матеріали, які погано проводять звук, оскільки коливання у них швидко згасають. Наприклад, пористі панелі, пінопласт використовують для звукоізоляції, тобто для захисту приміщень від проникнення в них сторонніх звуків.

Відбивання звукових хвиль. Якщо звукова хвиля поширюється в якому-небудь середовищі, то рано чи пізно вона дійде до межі цього середовища, за яким починається інше. Це інше середовище складається з інших частинок, і швидкість поширення звуку в ньому інша. На такій межі спостерігається відбивання звукової хвилі подібно до відбивання світла на межі повітря і дзеркала.

Відбивання відбувається тому, що коливання звукової хвилі передаються частинкам іншого середовища. Ці частинки самі стають джерелами нової (вторинної) звукової хвилі. Вторинна хвиля поширюється не тільки в другому середовищі, а й у першому, звідки надійшла первинна хвиля. Це і є відбита хвиля.

З відбиванням звуку пов'язане відоме всім явище – ***луна***. Воно полягає в тому, що звук від джерела доходить до деякої перешкоди (краю лісу, стіни, гори тощо), відбивається від неї й повертається до місця, де виникли звукові коливання. Якщо первинний і відбитий звуки доходять до слухача не одночасно, то він чує звук двічі. Бувають випадки, коли звук відбивається кілька разів, тоді й почути його можна кілька разів (наприклад, гуркіт грому).

На межі поділу двох середовищ звук не тільки відбивається, а й поглинається, проникаючи в інше середовище. Наприклад, оштукатурена стіна поглинає майже 8 % енергії звукових хвиль, а килим – 20 % .

Акустичні (фізичні) та фізіологічні характеристики звуку. За фізичними (акустичними) параметрами звук характеризується ***частотою*** та ***інтенсивністю***.

За фізіологічним відчуттям звук має певну ***висоту***, ***гучність*** і ***тембр***.

Інтенсивність звуку (сила звуку) I – фізична величина, що характеризує перенесення енергії E звуковою хвилею за одиницю часу t через одиницю площі S, яка перпендикулярна до напряму поширення звуку: $I = E/St$.

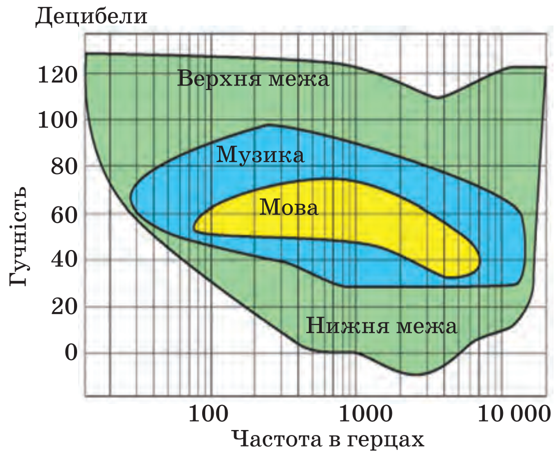
Одиницею інтенсивності є ват на квадратний метр, $[\, I \,] = 1$ Вт/м^2.

Психофізіологічна характеристика, що відповідає інтенсивності звуку, називається *гучністю звуку*.

Одиницею гучності звуку є ***децибел***, яка названа на честь американського вченого Александера Грейама Белла – винахідника телефону та слухового апарата для глухих.

Гучність звуку визначається середнім тиском звуку на органи слуху людини, тому є поняттям суб'єктивним. Один і той самий звук одній людині може здаватись гучним, а іншій – тихим.

Чутливість органів слуху людини має нижній і верхній пороги чутності. Визначено, що нижній поріг чутності залежить від частоти звуку і дорівнює $2 \cdot 10^{-5}$ Вт/м^2 у межах частот від 700 до 6000 Гц. Верхній поріг чутності (больове відчуття) досягає приблизно 100 Вт/м^2.



Мал. 221. Сприйняття людиною звуків різної гучності і частоти

На *мал. 221* показано, як сприймаються людиною звуки різної гучності (у Дб) і частоти (у Гц). Нижня лінія на малюнку відповідає нижньому порогу чутності, а верхня – верхньому.

Гучність звуку шелесту листя оцінюється 10 дБ, шепоту, вуличного шуму – 70 дБ. Шум гучністю 130 дБ відчувається шкірою і викликає больові відчуття.

Висота звуку **– фізіологічний параметр звуку, що визначається частотою звукової хвилі. Більшій частоті відповідає більша висота звуку.**

Звукові хвилі, як правило, мають складну форму. Але кожне коливання можна подати як суму синусоїдальних хвиль.

Музичні звуки – це періодичні коливання, що є сумою синусоїдальних коливань.

Окрема синусоїдальна звукова хвиля називається чистим ***тоном.***

У випадку складного музичного звуку висота визначається частотою основного тону (першої гармоніки) – найменшою частотою складного звуку. Тони, що супроводжують основний, називаються ***обертонами*** (вищими гармоніками).

Тембр звуку **– характеристика «відтінку» звуку однакової висоти, що визначається частотним складом і амплітудою обертонів.**

Завдяки тембру розрізняють звуки різних музичних інструментів, голоси людей.

Сила звуку визначається амплітудою коливань. Чим більша амплітуда коливань, тим гучніший звук.

Акустичний (звуковий) резонанс. Для кожної коливальної системи характерна власна частота коливань. Якщо на таку коливальну систему падає звукова хвиля з такою самою частотою, то у ній виникає звуковий резонанс: звукові коливання підсилюються і звучать довше. Такі коливальні системи називають ***акустичними резонаторами***. Акустичним резонатором є труби духових інструментів, органа, корпуси скрипок, гітар. Порожнина рота людини – також резонатор для голосових зв'язок.

Дайте відповіді на запитання

1. Які коливання називають звуковими?
2. Від чого залежить швидкість поширення звукових коливань?
3. Назвіть акустичні та фізіологічні характеристики звуку.

Приклад розв'язування задач

Задача. Відстань між гребенями хвиль дорівнює 5 м. Якщо моторний човен рухається проти хвилі, то частота ударів хвиль становить 4 $с^{-1}$, якщо за хвилею – 2 $с^{-1}$. Визначити швидкості руху моторного човна і хвилі.

Дано:
$\nu_1 = 4$ $с^{-1}$;
$\nu_2 = 2$ $с^{-1}$;
$\lambda = 5$ м
υ_1 – ?; υ_2 – ?

Розв'язання:

Відносна швидкість руху човна під час його руху за хвилею і проти неї визначається:

$$\begin{matrix} \upsilon_1 + \upsilon_2 = \lambda\nu_1 \\ \upsilon_1 - \upsilon_2 = \lambda\nu_2 \end{matrix}. \text{ Звідси } \upsilon_1 = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\lambda, \ \upsilon_2 = \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}\lambda.$$

Отже, $\upsilon_1 = 15$ м/с; $\upsilon_2 = 5$ м/с.

Відповідь: швидкість човна 15 м/с, хвилі – 5 м/с.

Вправа 39

1. Рибалка помітив, що за 10 с поплавок зробив на хвилях 20 коливань, а відстань між сусідніми гребенями хвиль дорівнює 1,2 м. Яка швидкість поширення хвиль?

2. Відстань між гребенями хвиль у морі дорівнює 5 м. Коли катер іде проти хвилі, то вона за 1 с ударяється об його корпус 4 рази, а коли за хвилею, – то двічі. Визначити швидкість руху катера і поширення хвилі.

3. На відстані 1068 м від спостерігача вдаряють молотком по сталевій рейці. Спостерігач, приклавши вухо до рейки, почув звук на 3 с раніше, ніж він дійшов до нього через повітря. Чому дорівнює швидкість поширення звуку в сталі? Швидкість поширення звуку в повітрі взяти рівною 333 м/с.

4. Яка глибина криниці, якщо звук плескоту чутно через 4,5 с після початку падіння каменя?

5. Звук пострілу і куля одночасно досягають висоти 680 м. Постріл здійснено вертикально вгору. Яка початкова швидкість руху кулі? Швидкість поширення звуку в повітрі – 340 м/с. Опором рухові кулі знехтувати.

6. Вимірюючи глибину моря під кораблем за допомогою ехолота, виявили, що моменти надсилання і приймання ультразвуку розділені інтервалом часу 0,6 с. Яка глибина моря під кораблем?

§ 46 Інфразвукові та ультразвукові хвилі

✓ *Інфразвук та його практичне використання.*
✓ *Ультразвук та його практичне використання.*
✓ *Шум.*

Інфразвук та його практичне використання.

Звукові хвилі з частотою, нижчою від звукового діапазону ($\nu < 16$ Гц), називають ***інфразвуком***.

Джерелами інфразвуку є землетруси, виверження вулканів, а також хвилі, які виникають під час вібрації масивних верстатів, компресорів та іншого устаткування. Ці хвилі спричинюють явища, які супроводжуються рухом і подразненням внутрішніх органів людини. Людина не чує цих коливань, але реагує на них неприємними відчуттями. Можливо, що ці коливання відчувають деякі тварини: відомо, що собаки та кішки перед землетрусом намагаються втекти з дому.

Для інфразвуку характерне слабке поглинання у різних середовищах, а тому у воді, повітрі, земній корі він поширюється на значні відстані. Це використовується для визначення місць вибухів, повідомлення про наближення цунамі та дослідження верхніх шарів атмосфери, властивостей водного середовища.

З незвичайним феноменом нерідко зустрічаються жителі півночі. Узимку, під час довгої полярної ночі, коли виникає північне сяйво, деякі люди впадають у дивний стан. Вони ніби зовсім відмежовані від навколишнього світу, збуджено розмовляють з невидимими співрозмовниками, хитаються в такт музики, яку чують лише вони. Буває, бродять, як сновиди, йдуть із дому. Коли приходять до тями, то згадують, що чули казкові звуки і підкорялися Полярній зорі, яка кликала їх у землю предків. Науковці пояснюють цей феномен так: полярні сяйва супроводжуються інфразвуком. Його людина не сприймає органами слуху, але він біологічно активний. Мозок і серцево-судинна система людини по-особливому сприймають звучання в інфразвуковому діапазоні, а тому наслідки для організму можуть бути непередбачуваними.

Ультразвук та його практичне використання.

Звукові хвилі з частотою ($\nu = 2 \cdot 10^4 \ldots 10^9$ Гц), вищою від звукового діапазону, називають ***ультразвуком***.

Ультразвукові хвилі мають безліч застосувань у науці і техніці: 1) контроль перебігу певного процесу (концентрації суміші газів, складу різних рідин тощо); 2) ультразвукові товщиноміри, прилади для визначення рівня рідин у великих, недоступних для прямих вимірювань, ємкостях; 3) дефектоскопія: контроль виробів із твердих матеріалів (рейки, прокат тощо); 4) звукобачення: перетворюючи ультразвукові коливання на електричні, а останні на світлові, виявляється, можна бачити певні предмети в непрозорих для світла середовищах; 5) ультразвукові мікроскопи; 6) на принципі відбивання ультразвукових імпульсів від перешкоди базується робота таких приладів, як ехолот, гідролокатор; 7) ультразвук дає змогу обробляти крихкі деталі (скло, кераміку).

Інші випадки використання ультразвуку: 1) польовий діагностик мастил ПДМ-1 – прилад для визначення якості мастил: за 5-6 хв оцінює концентрацію в мастилі чужорідних частинок. Чим повільніше крізь мастило проходять ультразвукові хвилі, тим більше воно забруднене; 2) аналізатор молока ФМУ-1. Швидкість поширення звуку в молоці залежить від концентрації в ньому жиру і сухих речовин; 3) виявлення тромбів: лікар натискає на вену, сканує її ультразвуком і отримує зображення внутрішніх структур за допомогою хвиль, які ними відбиваються, і вловлюються приймальним пристроєм; 4) діагностика, терапевтичне і хірургічне лікування. Ультразвукові методи у деяких випадках забезпечують більш тонке розрізнення структури тканин, ніж рентгенівські: діагностика й дослідження плоду матері, для дослідження пухлин головного мозку (нейрохірургія), вивчення геодинаміки, виявлення гіпертрофії м'язів серця (кардіологія).

Механічні коливання, що виникають при порівняно невеликій інтенсивності ультразвуку, викликають своєрідний масаж тканин, що забезпечує кращий обмін речовин і краще живлення тканин кров'ю та лімфою.

Шум. Одним із «забруднювачів» середовища є шум. Шумове забруднення, за даними австрійських учених, скорочує життя жителів великих міст на 10–20 років. Справа у тому, що у містах промисловість і транспорт, побутові пристрої, радіо і телебачення створюють сильну «шумову атаку» на людину.

Про дію звуків на людину красномовно свідчить такий приклад. У Стародавньому Китаї широко застосовувалося покарання людей, які нешанобливо ставилися до релігії: «Хто паплюжить Усевишнього, не повинен бути повішеним, але флейтисти, барабанщики та горлані повинні безперервно грати перед ним і вдень, і вночі, поки він не впаде замертво».

А що ми можемо зробити для вирішення проблеми послаблення міського шуму? Багато. Наприклад, стежити за тим, щоб удома не звучали занадто гучно аудіо- та відеопристрої; розмовляти вдома, на вулиці, в транспорті тихо, не підвищуючи голосу; насаджувати дерева й кущі, бо правильно висаджені зелені насадження можуть значно понизити міський шум: улітку його «розсіює» і «поглинає» листя, а взимку – сніг на гілках.

Дайте відповіді на запитання

1. Розкажіть про властивості, практичне використання інфра- та ультразвуку.
2. У чому полягає шкідливість шуму?

Найголовніше в розділі 4

Пристрої, у яких можуть здійснюватися коливальні процеси, називають коливальними системами.

Коливання, які виникають у системах під дією внутрішніх сил після виведення системи зі стану стійкої рівноваги за відсутності зовнішніх періодичних сил, називають ***вільними***.

Вільні коливання, які виникають у коливальних системах з малим тертям, є практично гармонічними.

Гармонічні коливання – це коливання, під час яких прискорення коливального тіла прямо пропорційне до миттєвого зміщення і протилежно напрямлене: $a = -\omega^2 x$.

Частота вільних коливань зал+ежить від параметрів коливальної системи, амплітуда – від наданої коливальній системі енергії.

Кінетична та потенціальна енергія коливальної системи, у якій відбуваються вільні коливання, періодично змінюється. Повна механічна енергія в системі без тертя залишається незмінною і дорівнює максимальній кінетичній (чи потенціальній) енергії системи.

Вимушені коливання – це коливання які здійснюються під дією зовнішньої періодичної сили. Частота таких коливань дорівнює частоті змін зовнішньої сили, яка періодично діє. Амплітуда вимушених коливань визначається амплітудою та частотою спонукальної зовнішньої сили.

Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань у результаті збігу частоти змін зовнішньої сили з власною частотою коливальної системи називають ***резонансом***.

Автоколивання – незгасаючі коливання, спричинені сталим зовнішнім впливом на систему, яка сама регулює їх частоту.

Механічна хвиля – процес поширення коливань у пружному середовищі з плином часу. Прикладами найпоширеніших механічних хвиль є звук, хвилі на поверхні рідин.

Пружна хвиля може бути ***поздовжньою***, якщо коливання частинок середовища відбуваються у напрямі поширення хвилі, і ***поперечною***, якщо частинки коливаються у площинах, перпендикулярних до напряму поширення хвилі. У газах і рідинах виникають лише поздовжні хвилі, які є чергування розріджень і згущень середовища. У твердих тілах можливі як поздовжні, так і поперечні пружні хвилі.

Швидкість поширення хвилі визначається за формулою $\upsilon = \lambda\nu = \lambda/T$, де λ – довжина хвилі.

Коливання у середовищі частотою від 16 до 20 000 Гц та інтенсивністю $I = 10^{-12}$ $\ldots10^{2}$ Вт/м^2 можуть сприйматися органами слуху людини і називаються ***звуком***.

За фізіологічними відчуттям звук має певну висоту, гучність і тембр.

Розділ 5

РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА

§ 47 Постулати спеціальної теорії відносності

✓ *Принцип відносності Галілея.*
✓ *Постулати спеціальної теорії відносності.*

Принцип відносності Галілея. Закони механіки (її ще називають класичною механікою) були встановлені з дослідів, які проводилися на Землі у таких умовах, що систему відліку, пов'язаною із Землею, можна вважати інерціальною. Відповідно, усі встановлені закони ми можемо застосовувати під час розгляду руху тіла в такій системі відліку.

Виникає питання, чи будуть механічні явища в інших інерціальних системах відліку відбуватись так само як на Землі? Наприклад, у літакові, що летить рівномірно і прямолінійно, падає предмет. Чи можна падіння цього предмета відносно літака описувати тими ж законами, що і відносно Землі? Чи можна використовувати, наприклад, запису другого закону Ньютона у формі $F = ma$?

Відповіді на запитання дає принцип відносності Галілея (***або механічний принцип відносності***) – принцип фізичної рівноправності всіх інерціальних систем відліку у механіці. За цим принципом ***у будь-якій інерціальній системі відліку всі механічні явища відбуваються однаково***.

Звідси випливає, що для будь-яких механічних явищ усі інерціальні системи відліку є рівноправними.

Механічний принцип відносності можна сформулювати і так: жодними механічними дослідами, проведеними всередині інерціальної системи відліку, не можна визначити, перебуває ця система у спокої чи рухається рівномірно й прямолінійно (тобто виявити власний рух інерціальної системи відліку). Дійсно, якщо механічне явище не залежить від швидкості руху інерціальної системи відліку, і ця швидкість не входить до формули законів, то і виявити її неможливо.

Постулати спеціальної теорії відносності. Після того, як учені переконались у тому, що в усіх інерціальних системах механічні явища відбуваються однаково, у кінці XIX ст. – на початку XX ст. були здійснені експерименти, спрямовані на виявлення таких явища природи, які змінювалися б під час переходу з однієї інерціальної системи в іншу.

Усі спроби були неуспішними. Теплові, електричні, оптичні, магнітні й атомні явища відбуваються в всіх інерціальних системах відліку однаково. Однаково відбуваються також хімічні і біологічні процеси.

У 1905 р. А.Ейнштейн висловив припущення про те, ***що незалежність явищ природи від вибору інерціальної системи відліку є одним із основних законів Всесвіту***.

Цей *постулат став першим основним положенням спеціальної теорії відносності (СТВ).*

Спеціальна теорія відносності (СТВ) – це фізична теорія простору–часу, що розглядає взаємозв'язок фізичних процесів, які відбуваються в інерціальних системах відліку.

Взаємозв'язок фізичних процесів, що відбуваються у системах, які прискорено рухаються одна відносно одної (неінерціальних системах відліку), описує ***загальна теорія відносності***.

Основою другого положення теорії відносності стали результати дослідів із вимірювання швидкості світла.

Швидкість світла у вакуумі $c=(2{,}997928\pm0{,}000004)\cdot10^{8}$ м/с. Виникає запитання: відносно якої системи відліку визначено цю величину?

У 1881 р. американські вчені А. Майкельсон і Е. Морлі провели експеримент, у якому оцінювався вплив швидкості руху Землі навколо Сонця на швидкість поширення світла від джерела, що знаходиться на Землі.

Згадаємо, що згідно з класичним законом додавання швидкостей, коли тіло рухається відносно інерціальної системи зі швидкістю $\vec{u}$, а сама система рухається зі швидкістю $\vec{\omega}$ відносно нерухомої системи, то швидкість $\vec{\upsilon}$ тіла відносно нерухомої системи відліку дорівнює: $\vec{\upsilon}=\vec{u}+\vec{\omega}$.

Оскільки Земля рухається по орбіті у світовому просторі (який вважався абсолютним і нерухомим), то на швидкість поширення світлового сигналу має впливати швидкість руху самої Землі.

У експерименті визначали час, за який світло проходить одну і ту саму відстань у прямому і зворотному напрямі, при цьому в одному випадку світловий сигнал посилався у напрямі добового обертання Землі, а в іншому – перпендикулярно до напряму обертання Землі.

Якби швидкість поширення світлового сигналу залежала від швидкості руху джерела, то цей час був би різним. Вимірювання проводилися дуже точно за допомогою спеціального приладу – інтерферометра Майкельсона. Експерименти ставились у різний час доби і в різні пори року, а результат завжди був негативним – ***швидкість поширення світлового сигналу була однаковою і не залежала від швидкості руху джерела***.

Отже, було встановлено, що класичний закон додавання швидкості не справджується для явищ, зв'язаних з поширенням світла. З цього робимо висновок і про обмеженість застосування перетворень Галілея, з яких випливає, що при складному русі швидкості руху тіл алгебраїчно додаються.

Виявились певні суперечності, які не можна було вирішити, застосовуючи закони механіки Ньютона. Вчені намагалися подолати ці труднощі різними шляхами. Найреволюційнішим шляхом до розв'язання проблем підійшов А. Ейнштейн: не потрібно придумувати різні гіпотези – необхідно ці факти сприймати як постулати (постулат – положення, яке не можна довести логічно, це результат узагальнення дослідних фактів).

Отже, основні постулати спеціальної теорії відносності сформульовано так:

1. Усі закони фізики в усіх інерціальних системах відліку однакові (принцип відносності Ейнштейна).

2. Швидкість поширення світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела чи приймача, тобто є однаковою в усіх інерціальних системах відліку.

З другого постулату випливає, що швидкість поширення світла є максимально можливою швидкістю передавання взаємодії у природі. Жодний сигнал, жодна взаємодія тіл не може поширюватися зі швидкістю, більшою від швидкості світла.

Висновки теорії відносності є основою ***релятивістської*** **(від. англ.** ***relativity*** **– відносність)** ***механіки***, яка вивчає закони руху тіл, швидкість яких наближається до швидкості світла.

У повсякденному житті ми зустрічаємося тільки з рухом тіл зі швидкостями, набагато меншими за швидкість світла, коли всі релятивістські ефекти практично непомітні. Ми звикли до повільних рухів і позбавлені можливості уявити собі процеси за швидкостей, близьких до швидкості світла. Такі процеси недоступні ні нашим органам чуттів, ні нашій уяві.

Необхідність використання співвідношень спеціальної теорії відносності виникає при описанні реальних рухів заряджених частинок (електронів, протонів, α-частинок тощо) у прискорювачах (пристрої для отримання частинок з великою кінетичною енергією – циклотрон, бетатрон, синхрофазотрон, генератор Ван-де-Граафа тощо) та частинок високих енергій у космічних променях. При цьому швидкість руху частинки наближається до швидкості поширення світла і найчастіше її виражають у частках від швидкості поширення світла (наприклад, $\upsilon = 0{,}99 \cdot c$, де c – швидкість поширення світла у вакуумі).

Дайте відповіді на запитання

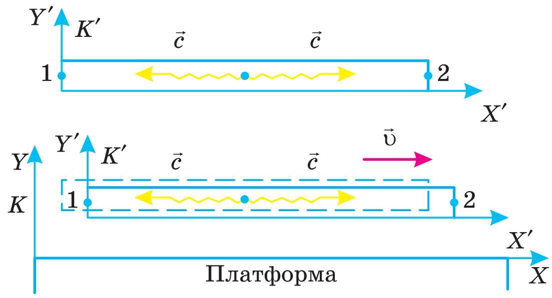
1. Сформулюйте постулати спеціальної теорії відносності.
2. Чим відрізняється перший постулат теорії відносності від принципу відносності у механіці?
3. Що показав експеримент Майкельсона-Морлі?

§ 48 Відносність часу

- *Відносність одночасності.*
- *Відносність інтервалів часу.*
- *Перетворення Лоренца.*

Відносність одночасності. Щоб відважитися на формулювання постулатів теорії відносності, А.Ейнштейну потрібна була велика наукова сміливість, оскільки ці постулати суперечили класичним уявленням про простір і час.

Наприклад, нехай із середини потяга, що рівномірно рухається, посилається світловий сигнал в обидва боки (*мал. 222*).



***Мал.* 222. Приклад, що доводить неодночасність події**

Спостерігач у потязі помітить, що світловий сигнал досягнув голови і хвоста потяга одночасно. Спостерігач, який знаходився на платформі, зазначив, що сигнал досягнув хвоста потяга раніше, ніж голови. Оскільки за другим постулатом ***швидкість поширення світлового сигналу однакова*** в обох інерціальних системах відліку, то це означає, що ***час у них не однаковий***: ***чим швидше рухається система відліку відносно спостерігача, тим повільніше, з його погляду, у ній відбуваються події.***

До початку XX ст. ніхто не сумнівався в абсолютності часу. Дві події, одночасні для жителів Землі, одночасні й для жителів будь-якої космічної цивілізації. Тобто одночасність у ньютонівській механіці вважається абсолютною. Але теорія відносності довела, що це не так. Уявлення про абсолютний час, який тече раз і назавжди заданим темпом, цілком незалежно від матерії та її руху, неправильне.

> Події, одночасні в одній інерціальній системі відліку, не одночасні в інших інерціальних системах, рухомих відносно першої. Одночасність подій відносна.

Відносність інтервалів часу. Розглянемо такий приклад. Припустимо, що на підлозі вагона розташоване джерело світла, а на стелі – дзеркало. Яким буде інтервал часу, протягом якого світло досягне стелі та, відбившись від дзеркала, повернеться назад.

Для спостерігача у вагоні (*мал. 223,а*) цей час дорівнює частці подвоєної відстані від підлоги до стелі (висота вагона BD) на швидкість світла c: $t_0 = \dfrac{2BD}{c}$.

> Час, виміряний за годинником, який рухається разом з тілом (у системі відліку, пов'язаній з цим тілом), називають ***власним часом*** t_0.

Як бачимо, цей інтервал часу не залежить від того, нерухомий вагон чи рухається він рівномірно і прямолінійно.

Розв'яжемо задачу відносно нерухомого спостерігача (в іншій інерціальній системі відліку), відносно якого вагон рухається зі швидкість $\vec{\upsilon}$ праворуч (*мал. 223, б*).

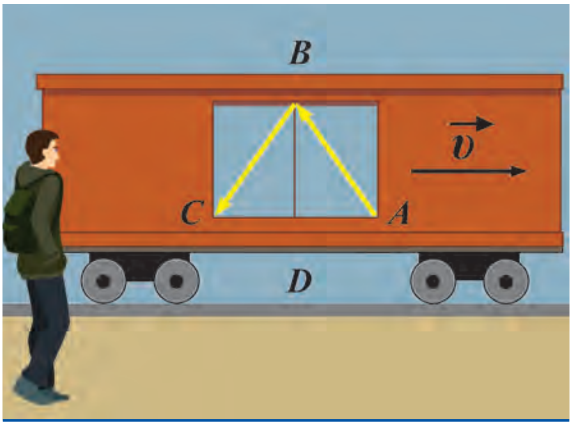
Відносно нерухомого спостерігача світло проходить відстань $2AB$. Отже, час проходження світлового сигналу дорівнює:

$$t = \frac{2AB}{c}.$$

Оскільки гіпотенуза AB більша катета BD, то $t > t_0$. І чим більша швидкість руху вагона υ, тим відчутніша ця нерівність.

Встановимо математичну залежність між t і t_0. Для цього виразимо відповідні відстані: $AB = ct$, $BD = ct_0$, $AD = \upsilon t$ і застосуємо теорему Піфагора: $(ct)^2 = (ct_0)^2 + (\upsilon t)^2$. Перетворимо цей вираз: $(c^2 - \upsilon^2)t^2 = c^2 t_0^2$, звідки $t^2 = \dfrac{c^2 t_0^2}{c^2 - \upsilon^2} = \dfrac{t_0^2}{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}$, або:

Мал. 223, а. **Поширення світлового сигналу відносно спостерігача, що рухається разом із вагоном**



Мал. 223, б. **Поширення світлового сигналу відносно нерухомого спостерігача**

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Оскільки $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} < 1$, то $t > t_0$, тобто ***відносно нерухомого спостерігача подія, що відбувається у рухомій системі відліку, триває довше.***

Або, іншими словами, власний інтервал часу менший за інтервал часу, виміряний в іншій інерціальній системі відліку $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$.

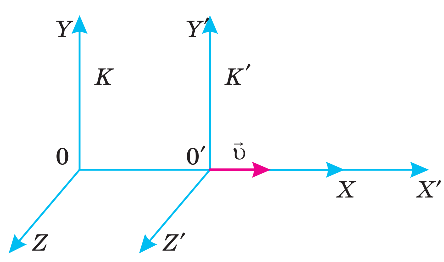
Перетворення Лоренца. Нехай відбувається деяка подія. У системі K вона характеризується значеннями координат і часу x, y, z, t. У системі K', яка рухається відносно системи K з постійною швидкістю $\vec{\upsilon}$ вздовж осі X (*мал. 224*), ця подія характеризується значеннями x', y', z', t'.

Нагадаємо, що співвідношення $x = \upsilon t + x'$, $y = y'$, $z = z'$ $t = t'$ називають ***перетвореннями Галілея***. Ці рівняння дають змогу перейти від координат і часу однієї інерціальної системи відліку до координат і часу іншої інерціальної системи відліку. Координати тіла залежать від системи відліку, тобто є величинами відносними. Рівність $t = t'$ виражає абсолютний характер часу.

Згідно з теорією відносності, час є величиною відносною, тому перетворення Галілея мають бути замінені більш загальними – перетвореннями Лоренца (Хендрик Антон Лоренц (1853–1928) – нідерландський фізик-теоретик).

Зв'язок між величинами, що характеризують подію в різних інерціальних системах відліку, називають ***перетвореннями Лоренца***:

$$x' = \frac{x \pm \upsilon t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \quad y = y', z = z'; \quad t' = \frac{t \pm \frac{\upsilon}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$



Мал. **224. Інерціальні системи відліку**

Знак «+» у чисельнику застосовується при переході від системи K' до системи K, знак «–» – при переході від системи K до системи K'. Це зумовлено тим, що система K' рухається відносно системи K зі швидкістю υ, водночас можна вважати, що система K рухається відносно системи K' зі швидкістю $-\upsilon$.

Як видно, у перетвореннях Лоренца взаємопов'язані координата x та час t.

При швидкостях $\upsilon << c$ перетворення Лоренца практично не відрізняються від перетворень Галілея.

Таким чином, простір і час, які у ньютонівській механіці вважалися незалежними, виявляються взаємопов'язаними і є чотиривимірним простором-часом. Будь-яка подія, що відбулась у просторі, характеризується чотирма величинами: координатами x, y, z, які вказують на те, ***де*** вона відбулась, і часом t, який вказує на те, ***коли*** вона відбулася. Значення цих чотирьох величин залежить від системи відліку, у якій спостерігається подія.

Дайте відповіді на запитання

1. Чому виникла необхідність у перегляді уявлень про простір і час?
2. Чому не можна стверджувати, що події, які відбуваються одночасно в одній системі відліку, водночас відбуватимуться і в іншій?
3. Яка тривалість подій у різних інерціальних системах відліку?
4. У чому відмінність між перетвореннями Галілея та Лоренца.

§ 49 Відносність довжин

✓ *Відносність довжин.*

Відносність довжин. Довжина відрізка, яка у ньютонівській механіці вважалась абсолютною, також залежить від швидкості руху тіла відносно певної системи відліку.

Адже, що означає виміряти довжину відрізка? Це означає одночасно вказати координати його початку і кінця ($l = x_2 - x_1$). Але, як ми вже знаємо, поняття одночасності є відносним. Події, одночасні в одній системі відліку, неодночасні в іншій.

А.Ейнштейн показав, що уявлення про абсолютну довжину відрізка виникає у нас лише тому, що ми зазвичай маємо справу зі швидкостями, набагато меншими від швидкості світла. Якщо ж система рухається відносно спостерігача зі швидкістю, близькою до швидкості світла, і в ній знаходиться лінійка завдовжки l_0, то з погляду такого спостерігача довжина лінійки буде меншою: $l < l_0$.

Розглянемо це детальніше. Нехай лінійка знаходиться у вагоні, що рухається рівномірно і прямолінійно зі швидкістю $\vec{\upsilon}$. Лінійка розташована вздовж прямої, у напрямі якої відбувається рух вагона. На одному кінці лінійки знаходиться джерело світла, а на іншому – дзеркало. Довжину лінійки визначають за часом проходження світла вздовж лінійки у прямому і зворотному напрямі. Для спостерігача, що знаходиться у вагоні, цей час (власний) визначається:

$$t_0 = \frac{2l_0}{c}\text{, звідки } l_0 = \frac{ct_0}{2}.$$

Для спостерігача, відносно якого вагон, а відповідно і дзеркало, віддаляється зі швидкістю $\vec{\upsilon}$, час руху світлового сигналу до дзеркала буде $t_1 = \frac{l+\upsilon t_1}{c}$, а від дзеркала: $t_2 = \frac{l-\upsilon t_2}{c}$. Загальний час руху: $t = t_1 + t_2$. Розв'язуючи систему з трьох рівнянь, отримуємо: $t = \frac{2lc}{c^2-\upsilon^2}$, звідки $l = \frac{c^2-\upsilon^2}{2c}t$ (1).

Для встановлення зв'язку між l та l_0 згадаємо, що відносно спостерігача, який знаходиться у рухомій системі відліку, час руху сигналу $t_0 = 2l_0/c$, а для спостерігача, відносно якого рухається система, ця подія відбувається повільніше:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\text{, або } t = \frac{2l_0}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Підставляючи отриманий вираз у формулу (1), отримуємо:

$$l = \frac{c^2-\upsilon^2}{2c}t = \frac{c^2-\upsilon^2}{2c}\cdot\frac{2l_0}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{c^2-\upsilon^2}{c^2}\cdot\frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = (1-\frac{\upsilon^2}{c^2})\cdot\frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = l_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}.$$

Отже, якщо система рухається відносно нерухомого спостерігача зі швидкістю, близькою до швидкості світла, і в ній знаходиться лінійка завдовжки l_0, то з погляду такого спостерігача довжина лінійки буде у $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$ разів менша:

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}.$$

Довжина відрізка не є поняттям абсолютним, вона залежить від тієї системи відліку, відносно якої відбувається вимірювання. Довжина тіла у системі відліку, відносно якої воно знаходиться в спокої, ***називається власною довжиною*** l_0.

Дайте відповіді на запитання:

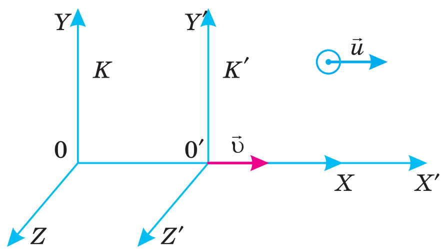
1. Чи впливає на вимірювання лінійних розмірів тіла рух системи, у якій відбувається вимірювання?
2. Що називають власним часом і власною довжиною?

§ 50 Релятивістські співвідношення

✓ *Релятивістський закон додавання швидкостей.*
✓ *Релятивістський імпульс.*

Релятивістський закон додавання швидкостей. Новим релятивістським уявленням про простір і час відповідає новий закон додавання швидкостей. Очевидно, що класичний закон додавання швидкостей вже не дійсний, бо суперечить постулату про сталість світла у вакуумі. Справді, згідно з класичним законом додавання, якщо у потязі, що рухається зі швидкістю υ, відправити у напрямі руху світловий сигнал, то відносно землі його швидкість має бути $c+\upsilon$ – а це суперечить другому постулату СТВ.

Нехай тіло рухається відносно системи K' зі швидкістю $\vec{u}$. Сама система K' рухається відносно системи K, яка вважається нерухомою, з постійною швидкістю $\vec{\upsilon}$ уздовж осі X (*мал. 225*).



Мал. 225. Швидкість руху тіла відносно рухомої і нерухомої інерціальної систем відліку

Позначимо швидкість цього самого тіла відносно нерухомої системи K літерою $\vec{\omega}$.

Тоді ***релятивістський закон додавання швидкостей*** матиме вигляд

$$\vec{\omega}=\frac{\vec{\upsilon}+\vec{u}}{1+\frac{\vec{\upsilon}\vec{u}}{c^2}},$$

де $\vec{u}$ – швидкість руху тіла відносно рухомої системи відліку K',
$\vec{\upsilon}$ – швидкість рухомої системи K', відносно нерухомої K,
$\vec{\omega}$ – швидкість руху тіла відносно нерухомої системи відліку K.

Якщо $u \ll c$ та $\upsilon \ll c$, маємо класичний закон додавання швидкостей $\vec{\omega}=\vec{\upsilon}+\vec{u}$.

Якщо $u=c$, то $\omega=\frac{\upsilon+c}{1+\frac{\upsilon c}{c^2}}=c\frac{\upsilon+c}{\upsilon+c}=c$, як цього і вимагає другий постулат СТВ.

Релятивістський імпульс. Під час руху тіл з великими швидкостями виявляються й інші специфічні властивості. Так, з новими просторово-часовими уявленнями теорії відносності не узгоджуються за великих швидкостей руху закони механіки Ньютона. Зокрема, запис другого закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ не відповідає другому постулату теорії відносності. Справді, оскільки

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

то при сталій силі $\vec{F}$ прискорення $\vec{a}$ теж буде сталим і за тривалий час ця сила могла б надати тілу як завгодно великої швидкості. Однак швидкість світла у вакуумі є граничною, і за жодних умов рухомі тіла не можуть перевищити швидкості світла у вакуумі.

Проте, А.Ейнштейн показав, що запис другого закону Ньютона в імпульсній формі у релятивістській механіці такий самий, як і у класичній механіці: $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$, але з урахуванням того, що формула для імпульсу набуває дещо іншого вигляду.

У класичній механіці імпульс тіла визначається за формулою:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} \text{ або } \vec{p} = m\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}.$$

Якщо у цій формулі замінити інтервал часу Δt власним інтервалом часу Δt_0, то отримуємо:

$$\vec{p} = m\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t_0},$$

де $\Delta\vec{s}$ - переміщення тіла у тій системі відліку, у якій визначається імпульс (власній системі), а Δt_0 - інтервал часу, виміряний за годинником, що рухається разом з тілом (власний час).

Врахувавши те, що для власного часу виконується співвідношення

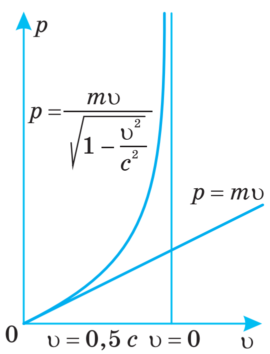
$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}},$$

отримуємо релятивістську формулу для імпульсу

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

З цієї формули видно, що залежність імпульсу від швидкості є більш складною, ніж у ньютонівській механіці.

Залежність імпульсу тіла від швидкості подано на графіку (*мал. 226*), при швидкостях руху, малих порівняно з c, графік імпульсу збігається з прямою $p = m\upsilon$, яка відображає залежність імпульсу від швидкості у класичній механіці.



Мал. **226. Графік залежності імпульсу від швидкості**

Дайте відповіді на запитання

1. Чому класичний закон додавання швидкостей та другий закон динаміки Ньютона не узгоджуються з постулатами теорії відносності?
2. Як залежить імпульс тіла від його швидкості руху у спеціальній теорії відносності?

Приклади розв'язування задач

Під час розв'язування задач треба чітко встановити, яку систему відліку вважати рухомою, а яку – нерухомою. Визначити, яке саме тіло перебуває у стані спокою відносно рухомої системи відліку і тоді параметри цього тіла вважати власними.

Задача 1. Система відліку K' рухається відносно системи відліку K зі швидкістю $\frac{2}{3}c$. Частинка рухається відносно системи відліку K' зі швидкістю $\frac{2}{3}c$. Визначити швидкість руху частинки у системі відліку K.

Дано:
$\upsilon = \frac{2}{3}c$;
$u = \frac{2}{3}c$

ω – ?

Розв'язання:

Оскільки рух усіх тіл відбувається в одному напрямі, то за релятивістським законом додавання швидкостей:

$$\omega = \frac{u+\upsilon}{1+\frac{u\upsilon}{c^2}} = \frac{\frac{2}{3}c+\frac{2}{3}c}{1+\frac{\frac{2}{3}c\cdot\frac{2}{3}c}{c^2}}; \quad \omega = \frac{4c}{3\cdot\left(1+\frac{4}{9}\right)} = \frac{12}{13}c, \text{ тобто } \omega < c.$$

Аналізуючи отриманий результат, бачимо, що за класичним законом додавання швидкостей було б $\omega = \frac{2}{3}c + \frac{2}{3}c = \frac{4}{3}c$, тобто $\omega > c$, що неприпустимо, бо швидкість поширення світла у вакуумі є максимальною швидкістю передачі сигналу.

Відповідь: 0,92 c

Задача 2. Космічні кораблі A і B віддаляються у протилежних напрямах зі швидкостями $2\cdot10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ відносно Землі. У космічному кораблі A відбувається подія, яка триває 1 с. Якою буде тривалість цієї події відносно Землі і відносно корабля B?

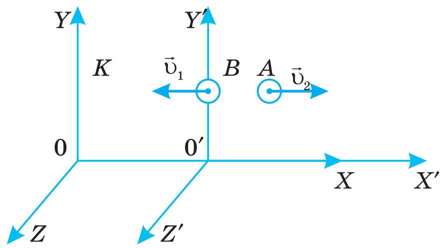
Дано:
$\upsilon = 2\cdot10^8$ м/с;
$t_0 = 1$ с

t_1 – ?; t_2 – ?

Розв'язання:

Тривалість події відносно Землі визначається за формулою

$$\Delta t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$



Мал. 227. Відносний рух кораблів

Підставляючи дані, отримуємо

$$\Delta t_1 = \frac{1\,\text{с}}{\sqrt{1 - \frac{(2\cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}})^2}{(3\cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}})^2}}} \approx 1{,}3\,\text{с}.$$

Для визначення тривалості події відносно корабля *B* слід визначити відносну швидкість руху кораблів. Оскільки за умовою задачі космічні кораблі *A* і *B* віддаляються у протилежних напрямах зі швидкостями $\vec{\upsilon}$ відносно Землі, то можна один із кораблів (наприклад, *B*) прийняти за рухому систему відліку (*мал. 227*).

Оскільки кораблі рухаються у протилежних напрямах, то проекція вектора швидкості корабля *B* відносно Землі матиме від'ємний знак $-\upsilon$. Отже, швидкість корабля *A* відносно Землі υ, швидкість корабля *B* відносно Землі $-\upsilon$. Їх відносна швидкість u.

Запишемо релятивістський закон додавання швидкостей з урахуванням умови задачі: $\upsilon = \dfrac{u-\upsilon}{1-\dfrac{u\upsilon}{c^2}}$, звідки $u = \dfrac{\upsilon+\upsilon}{1+\dfrac{\upsilon\upsilon}{c^2}}$. Після підстановки числових значень: $u = 2{,}8\cdot 10^8\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$. Отже, тривалість події відносно корабля *B:*

$$t_2 = \frac{1\,\text{с}}{\sqrt{1 - \frac{(2{,}8\cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}})^2}{(3\cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}})^2}}} \approx 2{,}8\,\text{с}.$$

Відповідь: 1,3 с; 2,8 с

Вправа 40

1. Тіло рухається відносно рухомої системи відліку зі швидкістю 0,2 *c*, а відносно нерухомої – зі швидкістю 0,8 *c*, де *c* – швидкість поширення світла у вакуумі. З якою швидкістю рухається система відліку відносно нерухомої системи?

2. Два тіла рухаються відносно нерухомого спостерігача рівномірно і прямолінійно у протилежних напрямах зі швидкостями $\upsilon_1 = 0{,}8c$ та $\upsilon_2 = -0{,}5c$. Визначити відносні швидкості цих тіл за класичним і релятивістським співвідношеннями.

3. Частинки рухаються назустріч одна одній зі швидкістю 0,9 *c*. Визначити їх відносну швидкість.

4. За якої відносної швидкості руху релятивістське скорочення довжини рухомого тіла становить 25% ?

5. Яку швидкість повинно мати рухоме тіло, щоб його поздовжні розміри зменшились удвічі?

6. У скільки разів збільшується час існування нестабільної частинки за годинником нерухомого спостерігача, якщо вона рухається зі швидкістю 0,99 c?

§ 51 Закон взаємозв'язку маси та енергії

✓ *Зв'язок між енергією спокою та масою тіла.*
✓ *Дефект маси.*
✓ *Фотон.*

Зв'язок між енергією спокою та масою тіла. Невдовзі після створення теорії відносності у замітці «Чи залежить інертність тіла від наявної у ньому енергії?» А. Ейнштейн вивів формулу $E_0 = mc^2$.

Отримана вона була в притаманному йому неповторному стилі ученого-теоретика. А саме він розглянув енергію тіла, яке випромінює рівні порції електромагнітної енергії у двох протилежних напрямках. При цьому він розрахував цю енергію як у власній системі відліку тіла, так і в системі, що рухається зі швидкістю υ відносно першої. І дійшов висновку, що інертна маса (її ще називають масою спокою тіла) зміниться на $\Delta E/c^2$. До того ж цей висновок А.Ейнштейн узагальнив для будь-яких явищ природи.

Нині достеменно доведено, що ***повна енергія рухомого тіла*** дорівнює:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Відповідно ***нерухоме тіло має енергію спокою*** $E_0 = mc^2$.

Термін «повна енергія» у релятивістській механіці має інший зміст, ніж у ньютонівській. У ньютонівській механіці, як ви уже знаєте, повна енергія тіла – це сума кінетичної та потенціальної енергії тіла. У релятивістській механіці повна енергія – це сума кінетичної енергії тіла та його енергії спокою

$$E = E_k + E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

У класичній механіці дослідження матерії ґрунтується на тому, що матерія поділяється на два види – речовину і поле. Основною характеристикою речовини є маса, а поля – енергія. Відповідно існують закон збереження маси та закон збереження енергії.

Геніальність А.Ейнштейна у тому, що він узагальнив висновок про існування енергії спокою тіла пропорційної до його маси. Тим самим Ейнштейн об'єднав закони збереження маси та енергії в один ***закон збереження маси-енергії.***

Іншими словами, ним було доведено еквівалентність маси тіла і його енергії спокою: ***маса тіла є мірою енергії, що міститься в ньому:***

$$m = \frac{E_0}{c^2}.$$

Так 1 г маси будь-якого тіла еквівалентний $9 \cdot 10^{13}$ Дж енергії. Цієї енергії вистачило б для перетворення в пару 39 000 т води.

Дефект маси. Відповідно, зміні енергії тіла відповідає зміна маси тіла:

$\Delta E_0 = \Delta mc^2$ **– закон взаємозв'язку маси та енергії спокою.**

Величина m називається ***дефектом маси.***

Наприклад, під час нагрівання тіла збільшується його внутрішня енергія, отже, збільшується і маса тіла. Куля, що летить зі швидкістю 5000 м/с, набуває кінетичної енергії, отже, і збільшує свою масу. Зрозуміло, що ці зміни практично не відчуваються у звичайних умовах. Так, у наведеному прикладі з кулею, якщо її маса у стані спокою була 1 г, то при швидкості 5000 м/с її повна маса стане 1,000 000 000 01 г.

Наочним підтвердженням правильності такого висновку стали експериментальні дані, отримані при дослідженні взаємодії елементарних частинок.

У 9-му класі при вивченні ядерних реакцій ви з'ясували, що є реакції, які відбуваються з виділенням величезної кількості енергії. Це пояснюється тим, що енергія спокою здатна перетворюватись у кінетичну енергію частинок в результаті ядерних та хімічних реакцій, якщо маса вихідної речовини більша за масу продуктів реакції.

Фотон. Досі ми зазначали, що жодне тіло не може рухатись зі швидкістю, більшою за швидкість світла у вакуумі. Але й досягти граничної швидкості також неможливо, оскільки імпульс тіла при цьому необмежено зростає. Спеціальна теорія відносності дає відповідь на це питання: рухатись зі швидкістю світла можуть ті частинки, які не потрібно розганяти до цієї швидкості. Такими є частинки світла – фотони (А.Ейнштейн називав їх квантами енергії), які «народжуються» і відразу рухаються зі швидкістю c. Фотони не можна зупинити чи загальмувати – при цьому вони зникають, поглинаючись речовиною. Таким чином, фотони – це частинки, які не мають маси спокою.

Оскільки фотони рухаються зі швидкістю c, і відповідно до основних положень спеціальної теорії відносності в усіх інерціальних системах відліку швидкість світла є сталою, то не існує таких систем відліку, відносно яких фотони можуть перебувати у стані спокою.

Те, що частинки, які рухаються зі швидкістю світла, не мають маси спокою можна довести і так. Згідно з формулою

$$p = \frac{m\upsilon}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

частинка з $m=0$ має скінченне значення імпульсу, коли чисельник та знаменник дробу одночасно прямують до нуля, тобто υ має дорівнювати c.

Квантовою природою світла пояснюються такі фізичні явища як тиск світла, виривання електронів з поверхні металу під дією світла (фотоелектричний ефект) та інші.

Зі співвідношення формул для повної енергії

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

та релятивістського імпульсу

$$p=\frac{m\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

можна записати, що $\frac{E}{p}=\frac{c^2}{\upsilon}$. Звідси імпульс фотона $p=\frac{E}{c}$.

Дайте відповіді на запитання:

1. У чому полягає закон взаємозв'язку маси та енергії?
2. Чому єдиний закон збереження маси-енергії у класичній механіці розглядаються як два закони збереження маси та енергії?
3. Що таке повна енергія тіла?
4. Чому фотон не має маси спокою?

Приклад розв'язування задач

Оскільки релятивістські співвідношення справедливі для об'єктів мікросвіту, швидкість руху яких близька до швидкості світла, то їх маси і енергії прийнято виражати через спеціальні одиниці. Так, замість одиниці маси кілограм використовують ***атомну одиницю маси:*** $1\text{ а.о.м}=1{,}667\cdot10^{-27}\text{ кг}$, а енергію виражають в ***електрон-вольтах***: $1\text{ еВ}=1{,}6\cdot10^{-19}\text{ Дж}$.

Задача. Енергія спокою деякої частинки 0,94 ГеВ. Кінетична енергія цієї частинки, яка розганяється у прискорювачі, приблизно 76 ГеВ. До якої швидкості розганяється частинка?

Дано:
$E_k=76$ ГеВ;
$E_0=0{,}938$ ГеВ
υ – ?

Розв'язання:

Повна енергія тіла $E=E_k+E_0=\frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$,

звідки $\frac{\upsilon^2}{c^2}=1-\frac{E_0^2}{(E_k+E_0)^2}=\frac{2E_0E_k+E_k^2}{(E_k+E_0)^2}$;

$$\upsilon = \frac{c}{E_k + E_0}\sqrt{E_k(2E_0 + E_k)}\ .$$

Після підстановки даних, $\upsilon \approx 0,9999\,c$.
Відповідь: $\upsilon \approx 0,9999\,c$

Вправа 41

1. Визначити швидкість частинки (в м/с), якщо її кінетична енергія вдвічі менша за її енергію спокою.

2. Визначити швидкість космічної частинки, якщо її повна енергія в k разів перевищує енергію спокою.

3. Визначити швидкість руху частинки (мезона), якщо її повна енергія в 10 разів більша за енергію спокою.

4. Яку частку швидкості поширення світла має становити швидкість руху частинки, щоб її кінетична енергія дорівнювала її енергії спокою?

5. Синхрофазотрон дає пучок протонів з кінетичною енергією 10 ГеВ. Яку частку швидкості поширення світла складає швидкість руху протонів у цьому пучку?

6. Енергія рухомого електрона вдвічі більша за його енергію спокою. Визначити кінетичну енергію електрона.

7. Визначити імпульс і кінетичну енергію електрона, який рухається зі швидкістю 0,9 c.

§ 52 Сучасні уявлення про простір і час

- ✓ *Взаємозв'язок класичної і релятивістської механіки.*
- ✓ *Загальна теорія відносності.*
- ✓ *Властивості простору і часу у загальній теорії відносності.*

Взаємозв'язок класичної і релятивістської механіки. Класична механіка – це механіка тіл, які рухаються зі швидкостями, набагато меншими від швидкості світла $\upsilon << c$. Швидкості руху тіл, з якими ми маємо справу у повсякденному житті, настільки малі порівняно зі швидкістю світла, що закони механіки Ньютона виконуються повною мірою.

У мікросвіті, світі елементарних частинок, що рухаються зі швидкостями, близькими до швидкості світла, виявляються релятивістські ефекти. Крім того, на відміну від макроскопічного тіла, для якого можна визначити положення у будь-який момент часу, для релятивістської частинки у деяких випадках поняття траєкторії незастосовне, оскільки положення частинки у просторі можна встановити лише з деякою точністю. Наприклад, положення електрона, що рухається в атомі, визначається з наближеною точністю, а рух електрона в електронно-променевій трубці можна наближено розглядати як рух по деякій траєкторії.

Загальна теорія відносності. І. Ньютон розглядав простір як абсолютний, істинний, математичний, а час – як абсолютну плинність від минулого до майбутнього. До 1915 р. простір і час сприймалися як деяка арена для подій, причому ці події ніяк не впливають на простір і час.

Спеціальна теорія відносності Ейнштейна уточнює наші уявлення про простір і час. Вона переконливо доводить,

> ***що просторово-часові властивості є відносними, релятивними.***

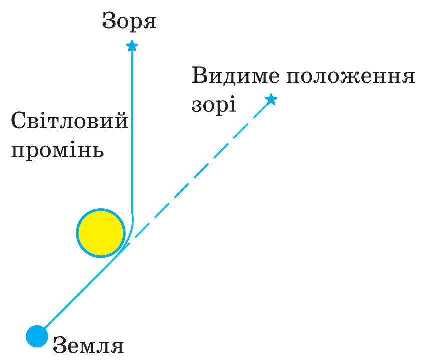
Довжина, часовий інтервал, одночасність виявилися залежними від взаємного руху тіл.

Ще більше у розкритті властивостей простору і часу заглиблюється ***загальна теорія відносності Ейнштейна (теорія тяжіння)***. Вона встановлює,

> ***що геометричні властивості простору залежать від розподілу у них тіл значної гравітаційної маси.***

Під час Першої світової війни А. Ейнштейн зробив надзвичайне і несподіване відкриття, яке вразило астрономів, фізиків і математиків усього світу. Виходячи з положень, які більшості вчених видавалися хибними, Ейнштейн за допомогою математичних розрахунків показав, що промінь світла підпорядковується силі тяжіння, і, якщо він проходить неподалік масивного тіла, то притягується і відхиляється у напрямі до цього тіла.

Підтвердженням цього припущення могло бути відхилення променів світла, що йдуть від зір неподалік Сонця. Світло зірки, яка знаходиться поблизу Сонця, відхиляється, і, як видно з *мал. 228,* зоря здається зміщеною порівняно зі своїм звичним положенням. Ейнштейн розрахував величину такого відхилення і звернувся до астрономів, аби вони перевірили це. Але як побачити зорю, що знаходяться поряд із Сонцем? Це можливо лише під час повного сонячного затемнення. Для цього необхідно зробити знімок зоряного неба поблизу Сонця у момент затемнення, а потім, через півроку, коли зорі будуть видимі вночі, зробити другий знімок і порівняти їх між собою. Першим дослідам завадила Перша світова війна, але у 1919 р. двом астрономіч-



Мал. **228. Викривлення світлового променя, що йде поблизу Сонця** ним експедиціям удалось отримати вдалі знімки. Числове значення зміщення видалося майже таким, яке розрахував Ейнштейн.

Відкриття Ейнштейна стало поштовхом до створення загальної теорії відносності.

Як зазначалося, прискорення тіл у неінерціальних системах відліку визначається не тільки взаємодією тіл, й появою сили інерції, під впливом якої тіла різних мас набувають однакового прискорення. Таку саму властивість має і сила земного тяжіння – надавати тілам різної маси однакового прискорення.

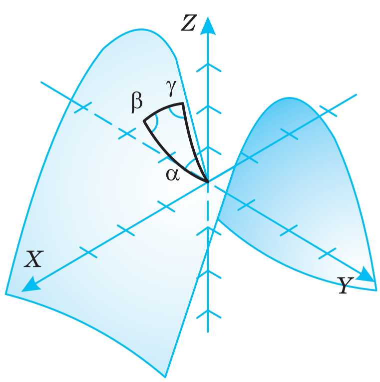
Подібність сили тяжіння до сил інерції (принцип еквівалентності) є основою загальної теорії відносності. Згідно з цією теорією характер руху тіла в неінерціальній системі відліку такий самий, як і в інерціальній за наявності гравітаційного поля.

Властивості простору і часу в загальній теорії відносності. Простір-час у загальній теорії відносності розглядаються як динамічна система: коли рухаються тіла і діють сили, то це змінює кривизну простору-часу, а викривлена структура простору-часу, у свою чергу, впливає на те, як рухаються і взаємодіють тіла. Простір і час не лише впливають на все, що відбувається у Всесвіті, а й самі змінюються під впливом того, що відбувається.

Класична фізика не наважувалася науково дослідити й розкрити властивості простору і часу. Ці властивості вважали заздалегідь заданими і визначали аксіомами математики, зокрема властивості простору описувалися знайомими для вас законами геометрії (її ще називають геометрією Евкліда). Справді, гравітаційне поле Землі порівняно слабке і тому простір, у якому ми живемо, є практично плоским (евклідовим).

Загальна теорія відносності вважає тяжіння тіл результатом структури простору. Поблизу масивних об'єктів Всесвіту (зірок, галактик, «чорних дірок») простір є викривленим і властивості такого простору описуються законами неевклідової геометрії.

Відомо кілька неевклідових геометрій. Лобачевский ще у 1826 р. стверджував, що можлива побудова такої геометрії, в основі якої будуть інші, ніж у Евкліда, положення. Так, згідно з геометрією Лобачевского: а) допускається нескінченна множина прямих, що не перетинають задану пряму і проходять через точку, що не належить цій заданій прямій; б) сума кутів трикутника менше 180° (*мал. 229, а*).

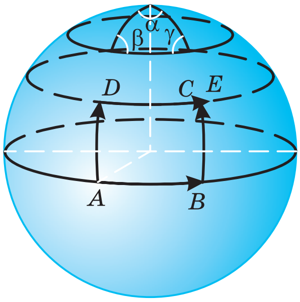


Мал. **229, *а*. Сума кутів трикутника менше 180°**

У середині XIX ст. Риман побудував іншу неевклідову геометрію, у якій стверджується, що сума кутів трикутника більше 180° (*мал. 229, б*), а паралельних ліній не існує, бо будь-які дві прямі обов'язково перетинаються.

Окрім викривлення світлового променя, загальна теорія відносності пояснює й інші експериментальні факти, які не можна було пояснити за допомогою ньютонівської механіки (обертання перигелію планет, сповільнення часу у сильних гравітаційних полях).

Ейнштейнівську загальну теорію відносності, яка твердила про викривлення простору і сповільнення часу біля масивних тіл, спочатку було сприйнято з великою обережністю. Нобелівську премію, яку А. Ейнштейнові довго боялися давати, вагаючись, мовляв, незрозуміло, чи він великий вчений або великий мрійник, дали тільки у 1921 р., та й то за менш значну, порівняно з теорією відносності, теорію фотоефекту.



Мал. **229, *б*. Сума кутів трикутника більше 180°**

Підбиваючи підсумки, зазначимо, що досі не виявлено жодних відхилень від положень загальної теорії відносності. Ця теорія не лише доведена астрофізиками, а й активно використовується на практиці, зокрема, у системі глобального позиціонування (GPS).

Мал. **230. Функція GPS мобільного телефону**

Система GPS складається з трьох основних частин: космічної (супутники), наземної (станції контролю за роботою супутників) і приймача сигналу (наприклад, мобільного телефону). Принцип роботи системи GPS полягає у визначенні відстані за часом затримки проходження сигналу від супутника до приймача.

Якщо у вашому телефоні є функція GPS (*мал. 230*), ви зможете визначити своє місцезнаходження, дізнатися швидкість вашого руху (максимальну, мінімальну, середню), найзручніший маршрут, час руху тощо.

Найголовніше в розділі 5

Спеціальна теорія відносності (СТВ) – це фізична теорія простору–часу, у якій уточнюються уявлення про простір і час.

Спеціальна теорія відносності розглядає взаємозв'язок фізичних процесів, що відбуваються тільки в інерціальних системах відліку, тобто у системах, які рухаються одна відносно одної рівномірно і прямолінійно. (Взаємозв'язок фізичних процесів, що відбуваються у системах, які прискорено рухаються одна відносно одної (неінерціальних системах відліку), описує загальна теорія відносності).

Постулати спеціальної теорії відносності:

1. Усі закони фізики в усіх інерціальних системах відліку однакові (принцип відносності Ейнштейна).

2. Швидкість поширення світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела чи приймача, тобто є однаковою в усіх інерціальних системах відліку.

З другого постулату випливає, що:

• швидкість поширення світла є максимально можливою швидкістю передавання взаємодії у природі. Жодний сигнал, жодна взаємодія тіл не може поширюватись зі швидкістю, більшою від швидкості світла;

• час не є абсолютною величиною – ***у різних інерціальних системах відліку інтервали часу є відносними.*** Звідси випливає відносність одночасності, відносність довжини і часу.

Згідно з теорією відносності Ейнштейна немає суттєвої відмінності між масою та енергією: речовина має масу, тому характеризується енергією, і, відповідно, поле має енергію, отже, характеризується масою.

Зміні енергії тіла відповідає зміна маси тіла і навпаки: $\Delta E = \Delta mc^2$.

Висновки теорії відносності є основою ***релятивістської механіки,*** яка вивчає закони руху тіл, швидкість яких наближається до швидкості світла.

§ 53 Сучасні проблеми механіки

Ми ознайомилися з основами одного із найважливіших розділів фізики – механіки. Механіка є фундаментом більшості природничих і технічних наук. Досягнення в галузі механіки завжди визначали прогрес у техніці, більш глибоке розуміння суті явищ природи. Нині, коли на порядку денному досягнення у галузі нанотехнологій, штучного інтелекту, автоматизовано-комп'ютерних технологій, механіка – наука про найпростішу форму руху матерії, здавалося б, мало чим може здивувати людство. Проте не забуваймо, що матерії без руху не існує, тому механіка безпосередньо чи опосередковано задіяна практично в усіх напрямах сучасних досліджень. А саме:

• механіка посідає одне з центральних місць серед наук, що забезпечують науково-технічний прогрес людства. Їй належить провідна роль у розробці наукової бази інженерної діяльності. Авіа- ракето-, судно-, приладо- та машинобудування базується на законах механіки;

• без знання механіки неможливі розрахунки технологічних процесів у металургії, виробництві синтетичних полімерів, у легкій і харчовій промисловості, при видобутку корисних копалин, у сільському господарстві, медицині;

• механіка супроводжує всі етапи будівництва, як простого плоту, так і грандіозного архітектурного ансамблю;

• механіка є складовою наук про Землю – наук, що вивчають рух повітряних мас, рух океанських хвиль і течій річок, геологічні перетворення земної поверхні, вулканічну та сейсмологічну діяльність тощо;

• законам механіки підпорядковуються рухи живих істот на землі, у повітрі та у воді. Процеси кровообігу і руху лімфи у живому організмі, процеси поділу клітин також підпорядковуються законам механіки.

І це ще не повний перелік того, де застосовується механіка.

Народившись у глибині віків, механіка й сьогодні стрімко розвивається і як самостійна наука, і як наука, що породжує нові напрями.

Революційний вплив на розвиток сучасної механіки мали два основні чинники: удосконалення техніки експериментів і впровадження комп'ютерної обробки експериментальних даних. Нині у механіці застосовуються оптичні, спектро- і радіометричні, електромагнітні, ультразвукові, лазерні, ядерні методи вимірювань. За допомогою цих методів стало можливим не лише дослідження явищ у цілому, а й встановлення зв'язків механічних явищ із внутрішньою структурою речовини. А використання методів комп'ютерної обробки інформації радикально змінило уявлення про можливості розв'язання математичних задач механіки. Рух рідин і газів у ємкостях складної форми, ударні хвилі, деформація і руйнування твердих тіл, рух космічних об'єктів – як природних, так і штучних, а також багато іншого стало можливим завдяки комп'ютерному моделюванню й аналізу.

Водночас сучасна механіка потребує наукових досліджень у розв'язанні проблем турбулентності, тертя, втомлюваності матеріалів, пластичності, руйнування тощо. Питання сейсмології, метеорології й гідродинаміки океанів чекають на вирішення.

Більшість задач перед механікою постає у зв'язку з розв'язанням практичних завдань різних галузей народного господарства. Наприклад:

• дослідження руху рідин і газів завжди було важливим для раціональної розробки нафтових і газових родовищ. Нові проблеми постають перед механікою у зв'язку з видобутком нафти і газу на шельфі та безпосередньо у морі. Величезні платформи мають працювати в умовах абсолютної стійкості, надійності й міцності. Усе це – задачі гідромеханіки, будівельної механіки і теорії міцності;

• проблеми хімічних технологій сприяють розвитку механіки аномальних або неньютонівських рідин;

• проблеми теорії прогнозу погоди сприяють розвиткові геофізичної гідродинаміки, основою якої є моделювання циркуляції атмосфери, дослідження потужних вихорів, процесів тепло- і масообмінів на океанській поверхні;

• масштабне дослідження підземного простору сприяє розвиткові геомеханіки, яка розв'язує практичні задачі розробки підземних територій промислових районів, мегаполісів;

• проблеми енергетики ставлять перед механікою першочергові завдання розробки альтернативних джерел енергії, зокрема таких, як вітрові електростанції.

Безсумнівно, широке і продумане впровадження методів механіки дасть змогу реалізовувати технологічні процеси, поліпшувати якість виробництва, економити матеріали та енергію, підвищувати ефективність технологічних рішень у промисловості, будівництві та на транспорті.

Важливого значення сьогодні набуває ***мехатроніка***, у якій механіка розглядається у комплексі з електронікою, електротехнікою та комп'ютерним управлінням. Основним завданням мехатроніки є управління функціональним рухом. Висока точність, гранична швидкість, складні розрахунки траєкторії руху ланок механізмів у просторі і часі визначаються інтелектуальними технологіями.

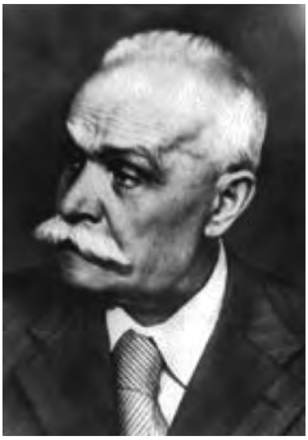
Наведений, далеко неповний, перелік проблем сучасної механіки показує, які великі та необмежені можливості стоять перед її дослідниками. Щоб бути фахівцем у відповідних галузях народного господарства, слід зі шкільних років розвивати науково-дослідницькі навички, формувати свою професійну компетентність.

§ 54 Внесок українських учених у розвиток механіки

Динамічного розвитку науково-практичні засади механіки набули в Україні наприкінці XIX – на початку XX ст. Активний розвиток техніки й виробництва потребував наукової підтримки. У 1885 р. у Харкові розпочав роботу Технологічний інститут, який упродовж 1885–1898 рр. очолював один з його організаторів Л. В. Кирпичов. В інституті працювали відомі вчені: читали лекції О. М. Ляпунов, В.А. Стєклов, М. М. Шиллер, виконував важливі дослідження з гідродинаміки відомий вітчизняний механік Г. Ф. Проскура.

У 1898 р. зусиллями знаного фахівця з теорії міцності В. Л. Кирпичова був заснований Київський політехнічний інститут, у складі якого працювали механічний, хімічний, інженерний та агрономічний факультети. Серед 35 перших кафедр було створено кафедри теоретичної і прикладної механіки. В. Л. Кирпичов запросив до роботи в Київському політехнічному інституті відомих фізиків і механіків О. М. Динника, О. Г. Котельникова, Н. Н. Симінського, С. В. Серенсена, С. П. Тимошенка. З 1901 р. на кафедрі прикладної механіки працював Д. П. Рузький. Лекції з теоретичної механіки читав О. П. Котельников, автор оригінальних підручників «Механіка», «Аналітична механіка».

Із 1905 р. в інституті працював Є. О. Патон (1870–1953), всесвітньо відомий спеціаліст із будівництва мостів (*мал. 231*), автор багатьох підручників. Він започаткував кафедру мостів, створив кабінет мостів, розвивав традиції вітчизняного мостобудування.



а

б

Мал. 231. *а* – Є. Патон; *б* – міст Патона у Києві

Мал. 232. С.П. Тимошенко

Наприкінці XIX ст. були збудовані оригінальні мости у Києві, Миколаєві, Чернігові за проектами харківського інженера М. А. Бєлопольського, лауреата Золотої медалі в Единбурзі (1890) та Почесного диплома виставки у Парижі (1900) за визначні досягнення у мостобудуванні.

На початку XX ст. у Київському політехнічному інституті формуються наукові школи гідростатики і теорії пружності.

У 1906–1911 рр. та у 1918 р. у Київському політехнічному інституті працював всесвітньо відомий механік, фахівець із теорії пружності, коливань та опору матеріалів, основоположник механіки суцільних середовищ Степан Прокопович Тимошенко (*мал. 232*).

С. П. Тимошенко (1878–1972) народився у Шпотівці Конотопського повіту Чернігівської губернії (тепер – Сумська обл.). Закінчив Петербурзький інститут шляхів сполучення, працював у Петербурзькому політехнічному інституті, а з 1906 р. – у Київському політехнічному інституті. У 1918 р. С. П. Тимошенко працював у комісії В. І. Вернадського з організації Української академії наук у Києві, був одним із перших академіків новоствореної Академії, організував та очолив Інститут механіки. З 1920 р. працював у Загребському політехнічному інституті, а потім переїхав до Сполучених Штатів Америки. З 1923 до 1927 р. – науковий консультант компанії «Вестингауз». Організував секцію механіки при Американському товаристві інженерів-механіків (1927).

Важливими досягненнями вченого, що утворили основи сучасної механіки суцільних середовищ, були фундаментальні розробки проблем міцності, стійкості й коливання механічних систем, будівельної механіки і теорії споруд, прикладної теорії пружності, теорії стійкості пружних, оболонкових і пластинчатих систем, у тому числі підкріплених ребрами жорсткості, згинання, кручення, коливання та удару сучасних інженерних конструкцій.

Наукові досягнення С. П. Тимошенка були відзначені провідними науковими центрами світу (обрано членом академій наук СРСР (1928), Польщі (1935), Франції (1939), Італії (1948), Лондонського королівського товариства (1944)). Його ім'я присвоєно лабораторії механіки Стенфордського університету, Інституту механіки НАН України.

У 1957 р. Американське товариство інженерів-механіків започаткувало почесну відзнаку за видатні досягнення у галузі механіки – медаль ім. Степана Тимошенка, першим лауреатом якої став сам видатний учений.

Науковий талант вченого-механіка давав йому можливість неординарно вирішувати складні інженерні завдання. Коли компанія з виробництва авіаційних двигунів запросила С. П. Тимошенка для з'ясування причини значного браку продукції, вчений, походивши по цеху, попросив принести йому крейду. Він, намалювавши на підлозі квадрат, запропонував на цьому місці викопати яму і залити її потім бетоном. На подив керівництва компанії брак виробів припинився. Як з'ясувалося, причина була у сильній вібрації працюючих верстатів, яка позначалася на якості продукції. Цю причину і запропонував ліквідувати оригінальним способом С. П. Тимошенко. Коли вченого попросили оцінити свою роботу, він зробив розрахунок: 3 центи вартість крейди і 9999 доларів 97 центів за те, що «знав, де копати яму», – всього 10 000 доларів.

Київський політехнічний інститут дав Україні та й усьому світові видатних учених-конструкторів: С. П. Корольова – конструктора космічних ракет, А. М. Люльку – відомого у світі конструктора реактивних двигунів, І. І. Сікорського – конструктора гелікоптерів (*мал. 233*). Випускником «київського політеха» є Л. М. Мацієвич – один з перших українських пілотів.

Над Києвом уперше у світі було здійснено «мертву петлю» льотчиком П.М. Нестеровим (*мал. 233,б*), яку згодом стали називати «петлею Нестерова».

У 1925 р. академік Д. О. Граве у Києві організував гурток «з вивчення та завоювання космосу». У червні того самого року під керівництвом Д. О. Граве відкривається виставка, присвячена вивченню світових просторів. На виставці працювали п'ять відділів: радіотелеграфний, метеорологічний, авіаповітроплавний, астрономічний, міжпланетний. На цьому заході київський інженер О. Я. Федоров представив науково-фантастичний проект крилатого атомно-ракетного міжпланетного корабля з сонячними двигунами.

Серед піонерів-дослідників космічного простору варто згадати про сина української землі, видатного дослідника й інженера, генія під чужим ім'ям – Олександра Гнатовича Шаргея (Ю. В. Кондратюка) (1897–1942), який розрахував низку цікавих результатів, які мали важливе значення для розвитку космонавтики. У роботі «Завоювання міжпланетних просторів» він висунув такі положення, які були згодом реалізовані на практиці:

а

б

***Мал.* 233. *а* – І.І. Сікорський, *б* – П.М. Нестеров і його механік Г. Нелідов, з яким він здійснив політ Київ–Гатчина**

1. Речовини, які будуть пальним для реактивного двигуна, потрібно запалювати в кисні.

2. Ракету виготовляти з крилами і летіти на ній у повітрі, як на аероплані.

3. Висунув ідею обладнання проміжної бази між Землею та іншими планетами.

4. Опір атмосфери використовувати для гальмування швидкості повернення.

5. Ввів поняття пропорційного пасиву (пасивна маса ракети – це маса, яка не стосується палива).

6. Розглянув питання керування ракетою та її орієнтації.

7. Дав опис ракетного двигуна на рідкому паливі (кисень і водень).

8. Визанчив загальні перспективи освоєння міжпланетного простору.

Ю. В. Кондратюк виконав детальне дослідження умов, за яких сили реакції в атмосфері будуть оптимальними; дослідив нагрівання передньої частини ракети при рухові в атмосфері; вивів рівняння руху тіла змінної маси.

Науковий талант Ю. В. Кондратюка підтверджується тим, що задовго до початку практичного освоєння космосу він висунув ідеї, які згодом набули широкого застосування. Зокрема, його ідея про створення космічної бази реалізована на орбітальних станціях «Салют» – «Мир»; ракета з крилами, що летить у повітрі як літак, – апарати «Буран», «Спейс Шатл», «Хобол».

Ю. В. Кондратюк запропонував і власну схему багатоступінчастої ракети. Особливо важливе значення мала його ідея гравітаційного (пертурбаційного) маневру, який вперше був здійснений у 1959 р. під час польоту автоматичної станції «Луна-3», запущеної з метою фотозйомки зворотного боку Місяця. Схема польоту до небесних тіл Ю. В. Кондратюка була використана у програмі «АПОЛЛОН», коли людина вперше вийшла на поверхню Місяця і шість експедицій доставили на Землю майже 400 кг місячних зразків.

Провідною вітчизняною науково-дослідною установою, де впродовж 90 років здійснюються фундаментальні дослідження в галузі механіки, є Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України. Він створений у 1918 р. у складі Всеукраїнської академії наук як Інститут технічної механіки.

Основними напрямами наукової роботи в Інституті є: механіка композитних і неоднорідних середовищ; механіка оболонкових систем; механіка зв'язаних полів у матеріалах і елементах конструкцій; механіка руйнування і втоми; динаміка і стійкість механічних систем.

Теоретичні й експериментальні результати досліджень науковців Інституту механіки застосовують у ракетно-космічній, авіаційній, кораблебудівній та інших галузях науки і техніки та технологій.

Цікаві факти

Цікавими є факти щодо використання механічних пристроїв на території Київської Русі.

Перші згадки про використання механічних пристроїв для метання каміння і стріл належать до X ст. Князь Святослав застосував їх у війні з візантійцями (1043). З XI ст. згадуються стінобитні механізми «тарани». Метальні машини для оборони наші предки використали у 1239 р., коли війська Батия взяли в облогу Чернігів. Простий механізм давав змогу метати каміння великої маси, яке не під силу було підняти кільком людям. У спокійні часи тарани розбирали і зберігали в містах.

В Іпатіївському літописі 1261 р. згадуються самостріли – луки особливої конструкції. Вирізняються самостріли коловоротні, в основу дії яких було покладено коловоротний механізм.

Ще раніше наші пращури почали будувати засоби пересування по суші та воді. Задовго до писемних згадок вони робили човни і кораблі для плавання. У 866 р. київські князі Аскольд і Дір «ходили водою» на греків. Зрозуміло, що це було б неможливо без містких човнів, розрахованих на велику кількість людей. У 907 р. князь новгородський та київський Олег виступив проти Візантії флотом у 2000 кораблів. З писемних джерел встановлено, що кораблі виготовлялися з дерев'яних дощок, які просмолювалися. Для різноманітних потреб будували човни – від маленьких до великих кораблів (посадів) – для далеких походів.

Унікальним витвором, що вимагає неабияких знань механіки, гідро- і аеродинаміки є козацька «чайка». Чайка – козацький човен завдовжки 17,5 м і заввишки 3,5 м з'явився у першій половині XVI ст. Судно вміщувало команду з 50 осіб і було оснащено 4 гарматами, ходити могло на веслах і під вітрилом. У будівництві чайок брали участь майже шість десятків майстрів. Її спорудження тривало два тижні. Конструктивно козацька чайка увібрала в себе досвід суднобудування часів княжої Русі, суднобудування вікінгів, морський досвід країн Середземномор'я.

Окрім водного простору, наші пращури мали неабиякі досягнення в освоєнні повітряного океану. З літописів відомий один надзвичайно цікавий факт: київський князь Олег при облозі Царграда для залякування ворога запустив у повітря паперових озброєних воїнів і коней. Подіяло!

У світлі розвитку науки і техніки для нас важливо те, що побудова повітряного змія вимагає певних знань механіки й аеродинаміки і свідчить про вміння застосовувати на практиці ці знання нашими предками.

ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

Лабораторна робота № 1

Вимірювання середньої швидкості руху тіла

Мета роботи: навчитись вимірювати середню швидкість руху тіла.

Прилади і матеріали: висока скляна трубка з водою; гумовий корок; гумові кільця; вимірювальна стрічка; секундомір.

Вказівки щодо виконання роботи

1. Надіти на скляну трубку гумові кільця на деякій відстані l одне від одного (*мал. 234*) і виміряти відстань між ними вимірювальною стрічкою.

2. Наповнити скляну трубку водою, залишивши у ній повітряний стовпчик (бажано, щоб його висота після закривання трубки корком приблизно дорівнювала діаметру трубки). Щільно закрити трубку корком.

3. Встановити трубку вертикально бульбашкою вниз. За допомогою секундоміра виміряти час, протягом якого бульбашка проходить відстань між мітками.

4. Дослід проробити п'ять-вісім разів.

5. Визначити середній час руху $t_с$: $t_с = \dfrac{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots}{n}$,

де n – кількість дослідів на визначення часу.

6. Обчислити для кожного досліду абсолютну похибку вимірювання часу: $\Delta t = t - t_с$.

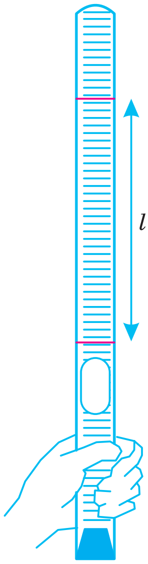
7. Обчислити середню абсолютну похибку вимірювання часу:

$$\Delta t_с = \frac{|t_1 - t_с| + |t_2 - t_с| + |t_3 - t_с| + \ldots}{n}.$$

і результати записати до таблиці:

Номер досліду	t, с	$t_с$, с	Δt, с	$\Delta t_с$, с	
1					
2					
. . .					

8. Обчислити середню швидкість руху бульбашки за формулою $\upsilon_с = \dfrac{l}{t_с}$.



Мал. 234

9. Визначити відносну похибку вимірювання часу ε_t (визначаючи відносну похибку, потрібно враховувати, що $\varepsilon_t = \frac{\Delta t_с}{t_с}$ лише тоді, коли зробити не менше 10 дослідів. Якщо було 5 дослідів, то $\varepsilon_t = \frac{3\Delta t_с}{t_с}$, коли дослідів було 7 – 8, то $\varepsilon_t = \frac{2\Delta t_с}{t_с}$).

10. Визначити відносну похибку вимірювання довжини пройденого шляху $\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l}$, де $\Delta l = 1$ мм.

11. Визначити відносну похибку вимірювань: $\varepsilon_\upsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_t = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta t_с}{t_с}$.

12. Визначити абсолютну похибку непрямих вимірювань середньої швидкості руху: $\Delta\upsilon = \upsilon_с \cdot \varepsilon_\upsilon$.

13. Результати вимірювань записати у вигляді: $\upsilon = (\upsilon_с \pm \Delta\upsilon)\frac{м}{с}$.

Контрольні запитання

1. (с) Що таке середня швидкість? Як її визначають?
2. (д) Тіло рухається прямолінійно, здійснюючи за рівні інтервали часу однакові переміщення. Чи можна з певністю твердити, що рух тіла рівномірний? Чому?
3. (в) Середню швидкість руху точки на кількох ділянках шляху обчислили як середнє арифметичне швидкостей на цих ділянках. Чи можна так робити? Пояснити.

Лабораторна робота № 2

Дослідження рівноприскореного руху

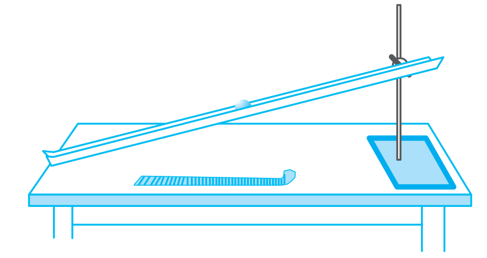
Мета роботи: дослідити закономірності рівноприскореного руху.

Прилади і матеріали: вимірювальна стрічка; секундомір; жолоб; набір кульок; штатив з муфтою та лапкою; металевий циліндр.

Вказівки щодо виконання роботи

1. Для виконання роботи необхідно закріпити жолоб за допомогою штатива у похилому положенні так, щоб висота його нахилу була не більша за 5 см на 150 см довжини (*мал. 235*). Біля нижнього кінця жолоба покласти у нього металевий циліндр.

2. Покласти кульку на верхній кінець жолоба, щоб вона доторкалась до затискача (під час повторення досліду кульку пускати з того самого місця).



Мал. 235

3. Відпустити кульку з верхнього кінця жолоба і, повторюючи дослід кілька разів з можливою старанністю, встановити, які переміщення здійснює кулька за перший інтервал часу (Δt), за два інтервали часу ($2\Delta t$), за три ($3\Delta t$) і т. д. Для кожного інтервалу часу варто зробити три вимірювання і визначити середнє значення.

4. Результати досліду записати до таблиці.

Номер досліду	**Інтервал часу, Δt с**				**Переміщення, s, м**			
	Δt, с	$2\Delta t$, с	$3\Delta t$, с	$4\Delta t$, с	s_1, м	s_2, м	s_3, м	s_4, м
1								
2								
3								
Середнє значення								

5. Перевірити характерну особливість прямолінійного рівноприскореного руху:

$$s_1 : s_2 : s_3 \ldots : s_n = 1 : 2^2 : 3^2 \ldots : n^2.$$

Зробити висновок.

Додаткові завдання

Виміряти пройдене кулькою переміщення s та час скочування t і визначити:
1) максимальну швидкість поступального руху кульки;
2) швидкість кульки в середній точці жолоба;
3) середню швидкість руху кульки по жолобу;
4) прискорення руху кульки.

Порівняти числове значення прискорення кульки з числовим значенням переміщення, що проходить кулька за першу секунду.

Контрольні запитання

1. (с) Під час будь-якого нерівномірного руху швидкість змінюється. Як характеризує цю зміну прискорення?

2. (д) Чи може швидкість руху тіла дорівнювати нулю, коли його прискорення не дорівнює нулю?

3. (в) Чи завжди при рівноприскореному прямолінійному русі матеріальної точки шляхи, пройдені нею за послідовні однакові інтервали часу, відносяться як послідовний ряд непарних чисел?

Лабораторна робота № 3

Дослідження руху тіла по колу

Мета роботи: ознайомитися з величинами, що характеризують рух тіла по колу.

Прилади та матеріали: кулька, підвішена на нитці; штатив з кільцем і муфтами; секундомір або годинник з секундною стрілкою, вимірювальна стрічка; аркуш паперу з накресленим колом (радіус 15 см).

Вказівки щодо виконання роботи

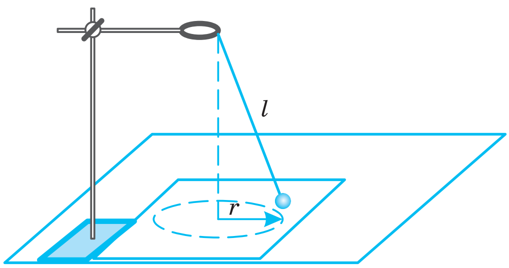
1. Прив'язати нитку завдовжки близько 45 см до кульки й підвісити до кільця штатива (*мал. 236*).

2. Привести кульку в обертання по колу радіусом r, яке намальовано на аркуші паперу.

3. Виміряти час t, наприклад, 15 обертів кульки. Дослід повторити п'ять разів.

4. Обчислити період T обертання кульки.

5. Обчислити середнє значення кутової та лінійної швидкостей руху кульки, а також доцентрового прискорення.



Мал. 236

6. Результати вимірювань та обчислень записати до таблиці:

Номер досліду	t, с	N	T, с	ω, рад/с	υ, м/с	a, м/с^2
1						
2						
3						
4						
5						
Середнє значення						

Додаткові завдання

1. З'ясувати, чи зміниться період обертання кульки, якщо рахувати не 15, а 30 обертів.

2. Чи зміниться період обертання, якщо радіус обертання зменшити у два рази (довжину нитки залишити незмінною)?

3. Як зміниться модуль кутової та лінійної швидкостей кульки та її доцентрового прискорення, якщо радіус обертання збільшити у 2 рази?

Контрольні запитання

1. (с) Чи може тіло рухатися криволінійною траєкторією без прискорення?
2. (д) Точка рухається до центра по спіралі зі сталою за модулем швидкістю. Чи змінюються її прискорення і період?
3. (в) Тонкий обруч з радіусом R розганяють по горизонтальній ділянці дороги без вибоїн. При якому значенні миттєвої швидкості $\vec{\upsilon}$ поступального руху обруча він відірветься від дороги (підскочить)?

Лабораторна робота № 4

Вимірювання сил

Мета: навчитись вимірювати сили за допомогою динамометра, визначати рівнодійну сил, переконатись у справедливості правила паралелограма при додаванні сил.

Прилади і матеріали: лабораторний штатив; дерев'яна дошка з цвяхами; динамометри; гумовий шнур; нитки; аркуш паперу; набір важків масою по 100 г; олівець; кнопки канцелярські; лінійка.

Вказівки щодо виконання роботи

Вимірювання сил, що діють уздовж однієї прямої.

1. Закріпити на штативі корпус динамометра у вертикальному положенні.
2. Підвісити до гачка динамометра три тягарці масою по 100 г. До гачка верхнього тягарця причепити інший лабораторний динамометр і потягнути за нього вгору, щоб покажчик динамометра показував 1 Н. Зафіксувати значення сили, яку показує динамометр, закріплений у штативі. Зробити висновок про додавання сил, що діють уздовж однієї прямої у протилежних напрямах.
3. Підвісити до гачка динамометра два тягарці масою по 100 г. До гачка нижнього тягарця причепити інший лабораторний динамометр і потягнути за нього вниз, щоб покажчик динамометра показував 1 Н. Зафіксувати значення сили, яку показує динамометр, закріплений у штативі. Зробити висновок про додавання сил, що діють уздовж однієї прямої в одному напрямі.

Вимірювання сил, що діють під кутом.

1. Аркуш паперу закріпити кнопками на дерев'яній дошці. Гумовий шнур і нитки зв'язати, щоб утворився вузол, і зачепити на цвяхах так, як показано на *мал. 237*. Олівцем відмітити на аркуші паперу положення вузла.
2. Скинути з цвяха одну петлю і, зачепивши її за гачок динамометра, натягнути нитку так, щоб вузол зайняв те саме положення, яке він займав до скидання петлі. Зафіксувати покази динамометра.

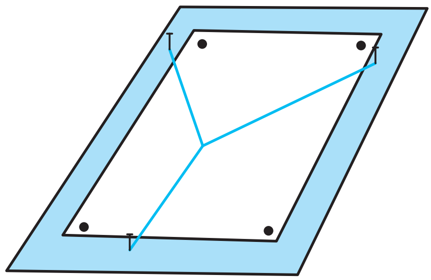
3. Аналогічні дії проробити з іншою петлею.

4. Зняти нитки з цвяхів, і на аркуші паперу побудувати паралелограм сил у масштабі 1 см = 0,5 Н.

5. Визначити модуль рівнодійної сил.

6. Зачепити гумовий шнур за цвях, а одну з петель за гачок динамометра. За допомогою динамометра натягнути нитку вздовж діагоналі паралелограма, так щоб вузол зайняв своє положення. Зафіксувати покази динамометра.

7. Порівняти останні і попередні результати вимірювання модуля рівнодійної сил. Зробити висновок.

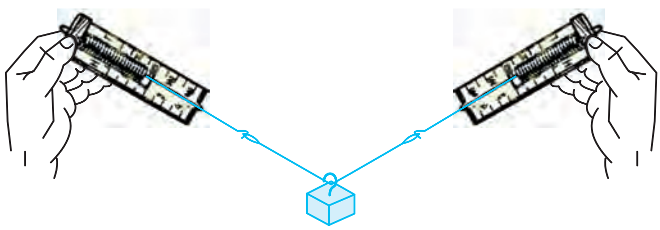


Мал. 237

Додаткове завдання

Дослідити залежність величини рівнодійної двох сил від величини кута між ними.

Два динамометри з'єднати ниткою, до якої підвісити тягарець вагою 1 Н (*мал. 238*). Змінюючи кут між нитками від 30° до 150°, визначати рівнодійну сил натягу ниток. Зробити висновок.



Мал. 238

Контрольні запитання

1. (с) Якщо на тіло діють декілька сил, як визначають рівнодійну цих сил?

2. (д) Чи можуть урівноважуватись три однакові за модулем сили, які не лежать в одній площині?

3. (в) Чи можна бути впевненим у тому, що коли на тіло діють дві протилежні сили, то воно обов'язково має рухатись у напрямі більшої за модулем сили?

Лабораторна робота № 5

Дослідження руху тіла, кинутого горизонтально

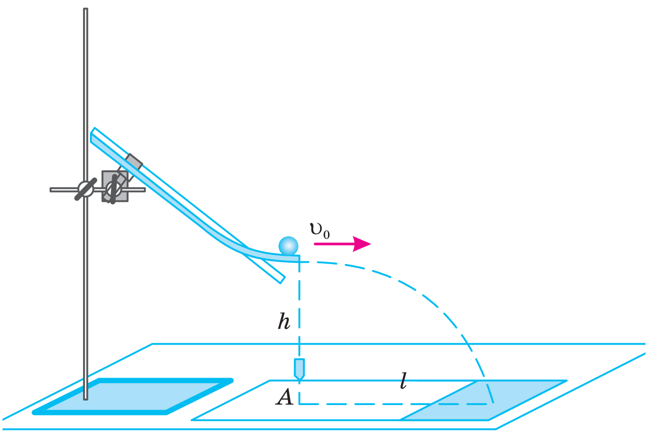
Мета роботи: дослідити рух тіла, кинутого горизонтально, і з'ясувати функціональні залежності між величинами, що його характеризують.

Прилади і матеріали: лінійка з міліметровими поділками; штатив з муфтою і лапкою; металевий жолоб для пускання кульок; кулька; папір; висок; клейка стрічка (скотч); копіювальний папір.

Вказівки щодо виконання роботи

1. За допомогою штатива закріпити жолоб. Загнутий кінець жолоба має бути розташовано горизонтально на висоті h = 3 см від поверхні столу (*мал. 239*).

2. Зафіксувати клейкою стрічкою на столі довгу смужку паперу. У місці можливого падіння кульки покласти копіювальний папір. За допомогою виска визначити точку A від якої виміряти дальність польоту l.



Мал. 239

3. Змінюючи висоту жолоба h_2 = 12 см, h_3 = 27 см, h_4 = 48 см, виміряти відповідні дальності польоту l_2, l_3, l_4. У кожному випадку дослід повторювати п'ять разів, пускаючи кульку з того самого місця жолоба і вимірюючи щоразу дальність польоту l. Обчислити середнє значення дальності польоту для кожного випадку.

Результати вимірювань і обчислень записати у таблицю:

Номер досліду	Фіксована висота	Дальність польоту, l, см					Середнє значення l_c, см
1	h_1 = 3 см						
2	h_2 = 12 см						
3	h_3 = 27 см						
4	h_4 = 48 см						

4. Довести, що під час руху тіла у полі земного тяжіння виконується співвідношення: $l_1 : l_2 : l_3 : l_4 = 1 : 2 : 3 : 4$.

5. Використовуючи дані досліду, коли кулька летіла з висоти $h_4 = 48$ см, обчислити середнє значення початкової швидкості за формулою

$$\upsilon_{0c} = l_c\sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

6. Обчислити відносну похибку вимірювань:

$$\varepsilon_\upsilon = \varepsilon_l + \frac{1}{2}\varepsilon_g + \frac{1}{2}\varepsilon_h = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta h}{h},$$

де $\Delta l = \Delta h = 1$ мм, $\Delta g = 0{,}02\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ при $g = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

7. Обчислити абсолютну похибку вимірювання швидкості $\Delta\upsilon_0 = \upsilon_{0c}\cdot\varepsilon_\upsilon$.

8. Результат вимірювання записати у вигляді $\upsilon_0 = (\upsilon_{0c} \pm \Delta\upsilon)\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Додаткове завдання

Побудувати траєкторію руху кульки.

Для цього використовуючи дані останнього досліду і користуючись формулами $l = \upsilon_{0c}t$ і $h = h_0 - \frac{gt^2}{2}$ визначити координати l та h кульки через кожні 0,05 с.

Записати значення до таблиці:

t, с	0	0,05 с	0,10 с	0,15 с	0,20 с
l, м	0				
h, м	0,48				

Накреслити траєкторію руху кульки.

Контрольні запитання

1. (с) Де – на Землі чи на Місяці – більше зміститься тіло по горизонталі, якщо його кидати горизонтально з однакової висоти з рівними за модулем швидкостями?

2. (д) Два тіла кинули з башти горизонтально зі швидкостями, одна з яких більша за другу в три рази. Яке з тіл упаде першим?

3. (в) Невеликий кубик помістили на вершині півсфери. Якої початкової швидкості треба надати кубику, щоб від поштовху він одірвався від півсфери відразу після початку руху?

Лабораторна робота № 6

Вимірювання жорсткості

Мета роботи: експериментально перевірити закон Гука і визначити жорсткість гуми.

Обладнання: гумовий шнур довжиною 20–30 см з дротяною петелькою на одному кінці; набір важків по 100 г; динамометр; лінійка; штангенциркуль; штатив.

Вказівки щодо виконання роботи

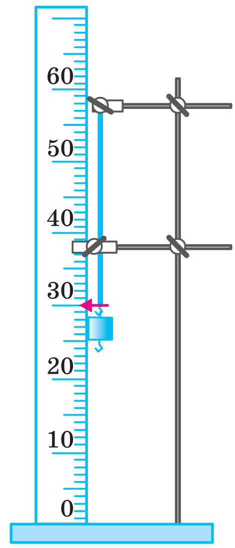
1. Гумовий шнур, із петлею на нижньому кінці, закріпити у штативі (*мал. 240*). Поряд закріпити лінійку у вертикальному положенні.

2. Коли до пружини підвісити тягарець, то внаслідок дії земного тяжіння він рухається вниз і розтягує пружину доти, доки сила тяжіння не врівноважиться силою пружності, що виникає у пружині. Тому за значення сили пружності $F_{пр}$ будемо приймати вагу тягарців.

3. Підвісити один тягарець. Номер поділки шкали лінійки, навпроти якої знаходиться гачок тягарця, вважати за початок відліку видовження гумового шнура.

4. Після цього підвішувати до гумового шнура по одному тягарцю і відмічати щоразу за шкалою лінійки положення гачка верхнього тягарця.

Результати вимірювань записати до таблиці.



Мал. 240

Номер досліду	m, кг	$F_{пр} = mg$, Н (Прийняти $g \approx 10\frac{м}{с^2}$)	$\lvert x \rvert$, м	$k = \frac{mg}{\lvert x \rvert}$, $\frac{Н}{м}$
1				
2				
3				
4				

5. За даними таблиці побудувати графік залежності сили пружності від видовження гумового шнура. При побудові графіку за результатами вимірювання експериментальні точки можуть не лежати на одній прямій, що відповідає формулі $F_{пр} = k\lvert x \rvert$. Це пов'язано з похибками вимірювань. У цьому випадку графік слід будувати так, щоб приблизно однакова кількість точок була по різні боки від прямої.

6. За тангенсом кута нахилу графіку визначити жорсткість. Це і буде шуканим середнім значенням жорсткості $k_с$. Порівняти його з даними таблиці. Зробити висновок.

7. Обчислити відносну похибку непрямих вимірювань (скориставшись даними першого досліду)

$$\varepsilon_k = \varepsilon_m + \varepsilon_g + \varepsilon_x = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta x}{x},$$

де $\Delta m = 0{,}002$ кг, $\Delta x = 1$ мм, $\Delta g = 0{,}02\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ при $g = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

8. Визначити $\Delta k = \varepsilon_k k_c$ і результат вимірювань записати у вигляді:

$$k = (k_c \pm \Delta k)\,\frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Додаткове завдання

Визначити модуль пружності гуми.

1. Олівцем (або ручкою) нанести на гумовий шнур дві мітки. Лінійкою виміряти відстань (l_0) між мітками.

2. До нижнього кінця шнура підвісити два вантажі. Виміряти відстань (l) між мітками на розтягнутому шнурі.

3. Якщо шнур має круглий переріз, то виміряти діаметр шнура (D) штангенциркулем.

Якщо шнур має прямокутний переріз, то виміряти лінійкою довжину (a) і штангенциркулем ширину (b) прямокутного перерізу шнура у розтягнутому стані.

4. Модуль Юнга обчислити за допомогою розрахункової формули: для шнура, що має круглий переріз:

$$E = \frac{4Fl_0}{\pi D^2 (l - l_0)};$$

для шнура, що має прямокутний переріз:

$$E = \frac{Fl_0}{ab(l - l_0)}.$$

5. Обчислити відносну та абсолютну похибки вимірювань.

Контрольні запитання

1. (с) Вкажіть правильний запис закону Гука: $\vec{F} = -k\vec{x}$, $(F_{\text{пр}})_x = -kx$, $F = -kx$.

2. (д) Як з'єднати чотири пружини з жорсткостями по 2 Н/м кожна для одержання загальної жорсткості 3/2 Н/м?

3. (в) Перша пружина в k разів довша від другої і виготовлена з дроту в p разів меншого діаметру. Порівняйте їх жорсткості.

Лабораторна робота № 7

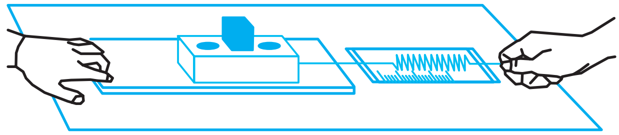
Вимірювання коефіцієнта тертя

Мета роботи: визначити коефіцієнт тертя ковзання μ дерева по дереву.

Прилади та матеріали: динамометр; дерев'яний брусок; дерев'яна дошка; набір тягарців по 100 г.

Вказівки щодо виконання роботи

1. Покласти брусок на горизонтально розміщену дерев'яну дошку. На брусок поставити один тягарець (*мал. 241*). Прикріпивши до бруска динамометр, рівномірно тягнути його вздовж дошки. Записати при цьому покази динамометра (це буде значення сили $F_{тер}$).



Мал. 241

2. Визначити вагу бруска з тягарцем (це є сила нормального тиску N на пластину).
3. Визначити коефіцієнт тертя ковзання за формулою $\mu = F_{тер}/N$.
4. До першого тягарця додавати по черзі другий, третій та проводити виміри. Результати записати до таблиці:

Номер досліду	$F_{тер}$, Н	N, Н	μ	$\mu_с$
1				
2				
3				

5. За результатами вимірювань побудувати графік залежності сили тертя від сили нормального тиску. Визначити середній коефіцієнт тертя ковзання за тангенсом кута нахилу графіку. Порівняти його з даними таблиці. Зробити висновок.
6. За даними першого досліду обчислити відносну похибку вимірювання коефіцієнта тертя

$$\varepsilon_\mu = \varepsilon_{F_{тер}} + \varepsilon_N = \frac{\Delta F_{тер}}{F_{тер}} + \frac{\Delta N}{N},$$

де $\Delta F_{тер} = \Delta N = 0{,}1\ \text{Н}$.

7. Обчислити абсолютну похибку $\Delta\mu = \varepsilon_\mu \cdot \mu_с$.
8. Результат обчислень записати у вигляді: $\mu = \mu_с \pm \Delta\mu$.

Додаткове завдання

Встановити залежність коефіцієнта тертя від параметрів тертьових поверхонь.

1. Визначити коефіцієнт тертя ковзання дерева по дереву, коли брусок треться об дерев'яну дошку вужчою гранню. Порівняти одержані значення коефіцієнта тертя. Зробити висновок про залежність коефіцієнта тертя ковзання від площі тертьових поверхонь.

2. Наклеїти на нижню грань бруска папір (або будь-який інший матеріал). Визначити коефіцієнт тертя ковзання у цьому випадку. Зробити висновок.

3. Визначити коефіцієнт тертя кочення дерева по дереву. Для цього скористатись дерев'яним циліндром із закріпленим на ньому гачком (гачок має бути закріплений так, щоб циліндр міг котитись). Порівняти коефіцієнти тертя ковзання та кочення дерева по дереву. Зробити висновок.

Контрольні запитання

1. (с) Чи можна у формулі сили тертя $F_{тер} = \mu N$, замість модулів сил $F_{тер}$ і N поставити вектори цих величин?

2. (д) Яким чином вплине на силу тертя зникнення повітря?

3. (в) Накресліть графік залежності модуля сили $\vec{F}_{тер}$, що діє з боку горизонтальної площини на брусок, розміщений на ній, від модуля горизонтальної сили $\vec{F}$, прикладеної до бруска. Модуль максимальної сили тертя спокою дорівнює F_0.

Лабораторна робота № 8

Дослідження рівноваги тіл під дією кількох сил

Мета роботи: встановити співвідношення між моментами сил, прикладених до плечей важеля під час його рівноваги.

Прилади і матеріали: лінійка; динамометр; штатив з муфтою; важіль; набір тягарців масою 100 г.

Вказівки щодо виконання роботи

1. Встановити важіль на штативі і зрівноважити його у горизонтальному положенні за допомогою пересувних гайок, розміщених на його кінцях.

2. Підвісити тягарець у певній точці одного з пліч важеля.

3. Підвісити кілька тягарців в одну або кілька точок іншого плеча важеля так, щоб важіль залишився у рівновазі. Виміряти лінійкою довжини пліч сил тяжіння, що прикладені до кожного тягарця.

4. Повторити дослід три рази, змінюючи положення і кількість тягарців.

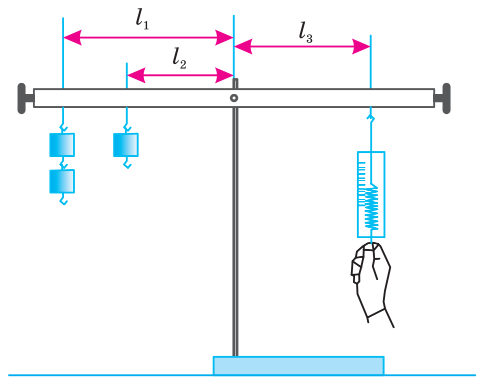
5. Визначити значення всіх моментів сил, що діють на важіль; суму моментів сил $M_{за}$, що обертають важіль за годинниковою стрілкою, та суму моментів сил $M_{проти}$, що обертають важіль проти годинникової стрілки.

6. Записати дані до таблиці:

№	F_{m1}	l_1	F_{m2}	l_2	F_{m3}	l_3	F_{m4}	l_4	M_1	M_2	M_3	M_4	$M_{за}$	$M_{проти}$
1.														
2.														
3.														

7. Порівняти відношення $M_{за}/M_{проти}$ з одиницею і зробити висновок.

8. Прикріпити до одного з пліч незрівноваженого важеля з тягарцями динамометр і визначити силу F, яку треба прикласти до важеля, щоб він був у рівновазі (*мал. 242*).



Мал. 242

9. Виміряти лінійкою довжини пліч сил тяжіння, що прикладені до кожного тягарця та плече динамометра.

10. Повторити дослід 3 рази, змінюючи положення та кількість тягарців.

11. Визначити значення всіх моментів сил, що діють на важіль; суму моментів сил $M_{за}$, що обертають важіль за годинниковою стрілкою, та суму моментів сил $M_{проти}$, що обертають важіль проти годинникової стрілки.

12. Записати дані до таблиці. Зробити висновок.

№	F_{m1}	l_1	F_{m2}	l_2	F	l_3	M_1	M_2	M_3	$M_{за}$	$M_{проти}$
1											
2											
3											

Додаткове завдання

Прикріпити до важеля у двох довільних місцях тягарці масою 100 г і більше. Визначити динамометром силу, яку треба прикласти до одного з кінців важеля вертикально вгору, щоб важіль був у рівновазі. Зробити висновок.

Контрольні запитання

1. (с) Рівнодійна прикладених до тіла сил і сума їх моментів дорівнює нулю. Яким може бути механічний стан тіла?

2. (д) Чому важіль у стані рівноваги займає горизонтальне положення?

3. (в) До тіла прикладені дві однакові за модулем і протилежні за напрямом сили. Якою може бути їхня дія на тіло?

Лабораторна робота № 9

Визначення центра мас плоских фігур

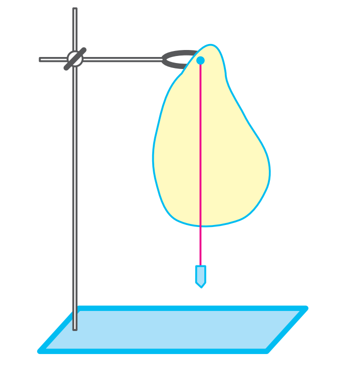
Мета роботи: навчитись експериментально визначати центр мас (тяжіння) плоских фігур.

Прилади та матеріали: фігури, вирізані з картону; лінійка; висок; булавка; дерев'яний корок; штатив із муфтою та затискачем.

Вказівки щодо виконання роботи

1. Вирізати з картону три фігури: центрально-симетричну (круг, квадрат або ромб); таку, що має форму нерівнобічного трикутника; фігуру неправильної форми.

2. Закріпити у затискачі штатива дерев'яний корок. Проколоти одну з фігур булавкою і встромити її в корок (*мал. 243*). Злегка похитуючи фігуру, переконатися, що вона перебуває у стані стійкої рівноваги.



Мал. 243

3. На булавку надіти петельку нитки виска.

4. По лінії виска поставити мітки. Зняти фігуру зі штатива і навести лінію відвісу олівцем під лінійку.

5. Повторити дослід двічі, проколовши фігуру в інших місцях. Визначити центр тяжіння фігури (точку перетину проведених прямих).

6. Визначити центр тяжіння для двох інших фігур. Зробити висновок.

Додаткове завдання

Визначити координати центра мас плоских тіл, зображених на мал. 244.

Мал. 244

Контрольні запитання

1. (с) Чим відрізняються умови рівноваги матеріальної точки від умов рівноваги тіла?

2. (д) Чому важко тримати в одній руці кінець дуже довгої палиці у горизонтальному положенні?

3. (в) За яких умов вільне тіло в інерціальній системі відліку рухається з постійним прискоренням?

Лабораторна робота № 10

Дослідження пружного удару двох тіл

Мета роботи: перевірити виконання закону збереження імпульсу під час пружного удару двох тіл.

Прилади та матеріали: лінійка з міліметровими поділками; штатив з муфтою і лапкою; дротяний жолоб для пускання кульок; металеві кульки різної маси; лоток з піском, терези.

Вказівки щодо виконання роботи

1. За допомогою штатива закріпити жолоб. Загнутий кінець жолоба повинен бути розташовано горизонтально (*мал. 245*). На стіл, у місці можливого падіння кульки, покласти лоток з піском.

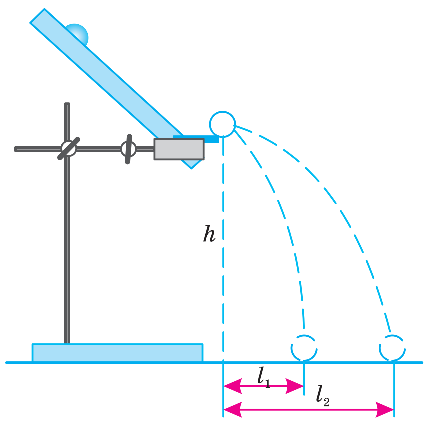
2. За допомогою терезів виміряти маси кульок m_1 та m_2.

3. Пустити кульку більшої маси вільно котитися по жолобу. Повторити дослід п'ять разів, пускаючи кульку з того самого місця жолоба.

4. Виміряти висоту h і дальність польоту l. Обчислити середнє значення початкової швидкості кульки за формулою

$$\upsilon_{0c} = l_c\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

та імпульс кульки: $p_1 = m_1\upsilon_0$



Мал. 245

5. На краю жолоба розташувати кульку меншої маси. Запустити кульку більшої маси так само, як у першому досліді. Після співударяння обидві кульки впадуть у лоток з піском. Вимірявши дальність польоту кульок l_1 і l_2 та висоту падіння, визначити швидкості кульок після удару:

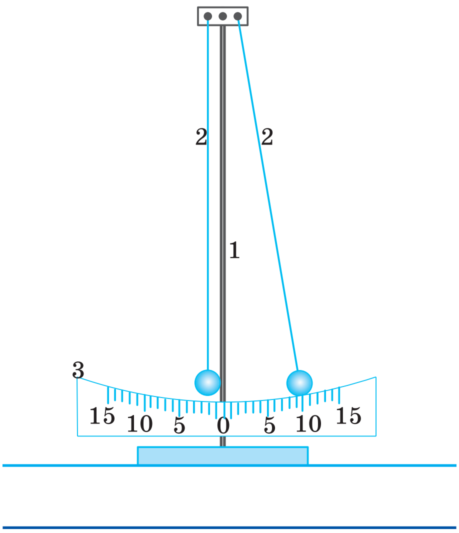
$$u_1 = l_1\sqrt{\frac{g}{2h}},\ u_2 = l_2\sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

6. Перевірити виконання закону збереження імпульсу під час пружного удару: $m_1\upsilon_0 = m_1u_1 + m_2u_2$. Для цього порівняти відношення $m_1\upsilon_0/(m_1u_1 + m_2u_2)$ з одиницею. Зробити висновок.

Додаткове завдання

Перевірити виконання закону збереження імпульсу та механічної енергії під час пружного удару двох куль за допомогою установки, зображеної на мал. 246.

Установка складається зі стойки 1, до верхнього кінця якої прикріплюються підвіси 2 для куль. Кут відхилення куль вимірюють за шкалою 3.



Мал. 246

Якщо куля 2 до взаємодії нерухома, то доударну швидкість кулі 1 можна визначити за формулою

$$\upsilon_1 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha_1}{2},$$

де l – довжина підвісу, α_1 – кут відхилення першої кулі до удару.

Якщо відбувається удар пружних куль різної маси, то аналітично можна дістати вираз для швидкості першої кулі після удару

$$u_1 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha_1'}{2}$$

та швидкості другої кулі після удару:

$$u_2 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha_2'}{2},$$

де α_1', α_2' – кути відхилення після удару відповідно першої та другої куль.

1. Вимірявши маси куль на терезах і обчисливши швидкості куль, перевірити закони збереження, справедливі при пружному ударі.
2. Пояснити як виводились формули.

Контрольні запитання

1. (с) При якому зіткненні кульки з перешкодою передається менший імпульс: пружному чи непружному?
2. (д) Числові значення швидкості руху тіла і його маси не змінились, а імпульс тіла змінився. Як це трапилось?
3. (в) Рухома кулька, зіткнувшись з перешкодою, збільшила свою швидкість. Якою була ця перешкода?

Лабораторна робота №11

Вивчення закону збереження механічної енергії

Мета роботи: порівняти зміну потенціальної енергії тіла під час його падіння зі зміною потенціальної енергії пружини, до якої прикріплено це тіло.

Прилади і матеріали: динамометр, жорсткість пружини якого дорівнює 40 Н/м; лінійка вимірювальна; тягарець масою 100 г; фіксатор; штатив з муфтою і лапкою.

Вказівки щодо виконання роботи

1. Прив'язати тягарець на нитці до гачка динамометра. Закріпити динамометр у затискачі штатива на такій висоті, щоб тягарець, піднятий до гачка, при падінні не діставав до столу (*мал. 247*).

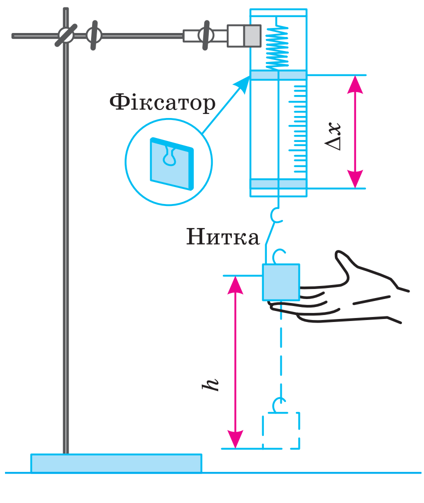
2. Підняти тягарець рукою, розвантажуючи пружину, і встановити фіксатор унизу біля гачка. Виміряти висоту підняття тягарця h.

3. Відпустити тягарець. Падаючи, тягарець розтягне пружину і опустить фіксатор. Зняти тягарець і за положенням фіксатора виміряти лінійкою максимальне видовження пружини Δx.

4. Повторити дослід п'ять разів. Обчислити середні значення x_c та h_c.

5. Визначити середні потенціальні енергії: піднятого тягарця $E_1 = mgh_c$ та деформованої пружини:

$$E_2 = \frac{k\Delta x_c^2}{2}.$$



Мал. 247

6. Результати досліду записати до таблиці.

7. Порівняти відношення $\frac{E_1}{E_2}$ з одиницею і зробити висновок.

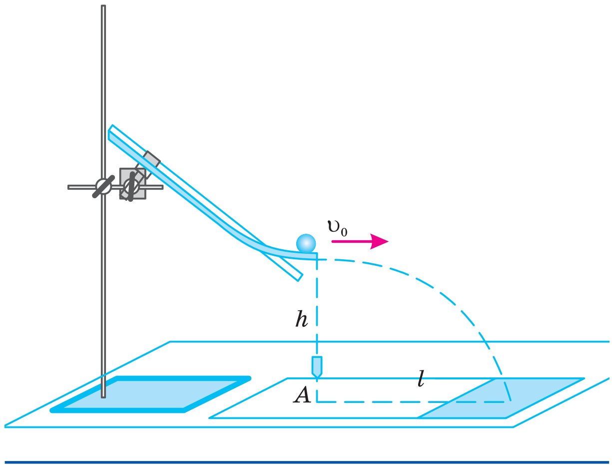
Номер досліду	h, м	h_c, м	Δx, м	Δx_c, м	E_1, Дж	E_2, Дж

Додаткове завдання

Перевірити закон збереження і перетворення механічної енергії на прикладі руху тіла, кинутого горизонтально (мал. 248).

1. Виміряти масу m кульки та висоту h. Обчислити початкову потенціальну енергію кульки $E_{п0}$.

2. Вільно пускаючи кульку рухатись по похилому жолобу, виміряти час польоту від моменту відриву кульки від жолоба до моменту її падіння у лоток з піском. Виміряти відповідну дальність польоту l. Дослід повторити тричі. Визначити середній час руху та середню дальність польоту.



Мал. 248

3. Обчислити кінетичну енергію кульки на початку польоту E_{k0} і в кінці E_k. Враховуючи, що початкова швидкість кульки у горизонтальному напрямі

$$\upsilon_0 = l/t,$$

де t – час вільного польоту, отримуємо:

$$E_{k0} = \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{ml^2}{2t^2}.$$

Кінетична енергія кульки у момент удару об пісок визначається за формулою:

$$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

де $\upsilon^2 = \upsilon_Г^2 + \upsilon_В^2$, швидкість руху кульки у горизонтальному напрямі $\upsilon_Г^2 = \frac{gs^2}{2h}$, у вертикальному: $\upsilon_В^2 = 2gh$.

4. Перевірити справедливість рівності: $E_{п0} + E_{k0} = E_k$. Для цього порівняти відношення $E_{п0} + E_{k0}/E_k$ з одиницею. Зробити висновок.

Контрольні запитання

1. (с) Швидкість автомобіля збільшилась у k разів. Як при цьому змінилась його кінетична енергія?

2. (д) Коли мішень набуває більшої кінетичної енергії від удару налітаючої частинки: при пружному чи непружному ударі?

3. (в) Тіло кинули з поверхні Землі під кутом до горизонту. У яких точках його траєкторії швидкість зміни кінетичної енергії максимальна?

Лабораторна робота №12

Дослідження коливань математичного маятника

Мета роботи: дослідити математичний маятник, з’ясувати від чого залежить його період коливань.

Прилади і матеріали: годинник із секундною стрілкою; вимірювальна стрічка; нитка; штатив; набір тягарців; транспортир.

Вказівки щодо виконання роботи

I. З’ясувати залежність між довжиною маятника і періодом його коливань.

1. На краю стола встановити штатив. Взяти нитку завдовжки 1 м і підвісити на ній тягарець (*мал. 249*).

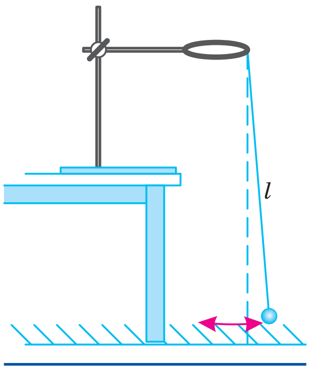
2. Відхилити маятник на невеликий кут (5°) і без поштовху відпустити. Пропустити декілька коливань, а потім за допомогою секундоміра визначити час t_1, за який маятник здійснює $N = 40–50$ повних коливань.

3. Період коливань визначити за формулою $T_1 = t_1/N$.

4. Зменшити довжину нитки у 2 рази і знову визначити період коливань T_2.

5. Виконати те саме у чотири рази коротшим маятником ($l_3 = 25$ см).

6. Зробити висновок щодо залежності періоду коливань від довжини нитки.



Мал. 249

7. Відношення квадратів періодів маятників з різними довжинами, порівняти з відношенням їх довжин. Зробити висновок.

II. З’ясувати залежність між масою маятника і періодом його коливань.

7. Зафіксувати довжину нитки маятника (наприклад, 50 см) і підвісити на ній один тягарець, виконати вимірювання (див. п. 2 і 3).

8. Не змінюючи довжини маятника, підвісити на ній два тягарці і виконати вимірювання (див. п. 2 і 3).

9. Зробити висновок щодо залежності періоду коливань маятника від його маси.

III. З’ясувати, як залежить період коливань маятника від кута відхилення.

10. Провести три досліди (див. п. 2 і 3), фіксуючи за допомогою транспортира початковий кут відхилення маятника (5°, 10°, 15°). З’ясувати, як залежить період коливань маятника від кута відхилення.

Додаткові завдання

1. *За допомогою математичного маятника визначити середнє значення прискорення вільного падіння.*

2. *Визначити найбільшу силу, яка створює доцентрове прискорення, при коливанні маятника під час проведених дослідів.*

Контрольні запитання

1. (с) Вкажіть, які фізичні величини, що характеризують коливання математичного маятника, мають найбільше значення у його крайніх положеннях.
2. (д) Як вплине на період малих коливань математичного маятника прискорений рух точки його підвісу по горизонталі?
3. (в) Початкове відхилення маятника і початкова швидкість одночасно зростають у n разів. Як зміниться амплітуда коливань маятника?

Лабораторна робота № 13

Дослідження коливань тіла на пружині

Мета роботи: експериментально перевірити закономірності коливального руху пружинного маятника та визначити частоту і період коливань.

Прилади і матеріали: набір важків; штатив; тримач із пружиною; дерев'яна демонстраційна лінійка; секундомір.

Вказівки щодо виконання роботи

1. Закріпити пружину із затискачем у штативі (*мал. 250*) і підвісити до неї важок масою 100 г. На лінійці позначити початкове положення важка.

2. Підвісити до пружини ще два важки масою по 100 г і виміряти її видовження під дією сили 2 Н. Визначити коефіцієнт жорсткості пружини. Дані вимірювань і обчислень записати до таблиці.

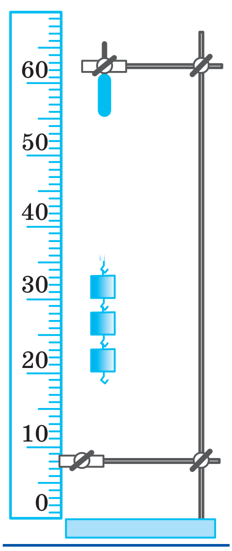
3. Знаючи k і m визначити власну частоту ν_0 і період T_0 коливань пружинного маятника.

4. Залишити на пружині два важки, вивести пружинний маятник зі стану рівноваги, змістивши його на 5–7 см униз. Виміряти час t, протягом якого маятник здійснює N коливань. Обчислити частоту коливань ν.

5. Визначити відхилення власної частоти коливань ν_0 пружинного маятника від частоти ν, визначеної експериментально:

$$\frac{\nu-\nu_0}{\nu}\cdot 100\ \%.$$

Зробити висновок.



Мал. 250

6. Повторити досліди з маятником масою 400 г. Дані вимірювань та обчислень занести до таблиці:

Номер досліду	F, Н	Δx, м	k, Н/м	m, кг	ν_0, с$^{-1}$	t, с	ν, с$^{-1}$	$\frac{\nu-\nu_0}{\nu}\cdot 100\%$

Додаткове завдання

Дослідити період коливань пружинного маятника від жорсткості пружини і маси тягарця.

1. Визначити період коливань, щоразу збільшуючи масу тягарця.
2. Побудувати графік залежності періоду коливань маятника від маси тягарців. Проаналізувати графік і зробити висновок
3. Щоб дослідити залежність періоду коливань від жорсткості пружини при незмінній масі тягарця, спочатку потрібно виміряти жорсткість кожної пружини. Визначити період коливань з кожною з пружин.
4. Побудувати графік залежності періоду коливань маятника від жорсткості пружин. Проаналізувати графік і зробити висновок

Контрольні запитання.

1. (с) Як за допомогою пружинного маятника визначити масу іншого тягарця (невідомої маси)?
2. (д) Модуль якої сили сталий, а якої змінюється під час вертикальних коливань пружинного маятника?
3. (в) Чи зміниться період коливань пружинного маятника, якщо знизу до залізної кульки маятника піднести електромагніт?

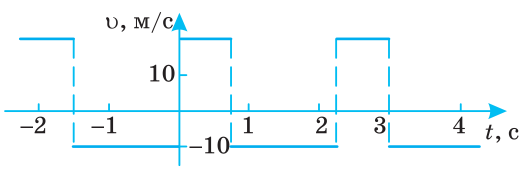
ВІДПОВІДІ ДО ВПРАВ

Вправа 2

1. 4 м, 2 м
2. т. А (20 м, 20 м); т. В (60 м, –10 м); 40 м; –30 м; 50 м
3. 5 м, 4 м, –3 м
4. 700 км, 500 км
5. 5 м
6. $x_2 = 10,7$; $y_2 = 5$

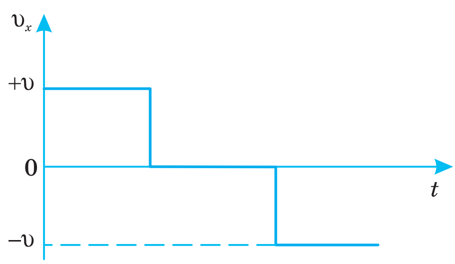
Вправа 3

1. 30с; 150 м; 60 м
4. 12 м/с, праворуч; 1,5 м/с, ліворуч; 20 с, –30 м
5. Див. мал. 251



Мал. 251.

6. Див. мал. 252



Мал. 252.

Вправа 4

1. 14 м/с
2. 40 с
3. в $\frac{n+1}{n-1}$ раз; у 3 рази; у 1,2 раза
4. 71°
5. а) 20 м/с, 90 с; б) 20 с, 30 с
6. 7,5 км/год; 17,5 км/год
7. 3 км/год
8. 600 м/с
9. $x = 4t + 8$; $x = 9t + 5$; $x = 5t + 5$
10. $\frac{\upsilon}{\sin\alpha}$

Вправа 5

1. 6 км/год
2. 8 м/с, 10 м/с, 4 м/с, 8 м/с
3. 25 км/год
4. 30 км/год
5. 7 км/год
6. 54 км/год, 36 км/год
7. 7 м/с; 11,4 м/с; 9 м/с

Вправа 6

1. 200 м/с; 20 м/с^2
2. 410 м
3. 2 м/с, 8 м/с
4. 90 см
5. у $\sqrt{2}$ рази
6. $a = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $\upsilon_4 = 40\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\upsilon_{10} = 100\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$;

   $s_2 = 15$ м; $s_5 = 45$ м; $s_2 + s_3 = 40$ м
7. $a = \frac{2(n-1)s}{(n+1)t^2} = 0,24\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
8. 58 с
9. $(2+\sqrt{2})t_0$

Вправа 7

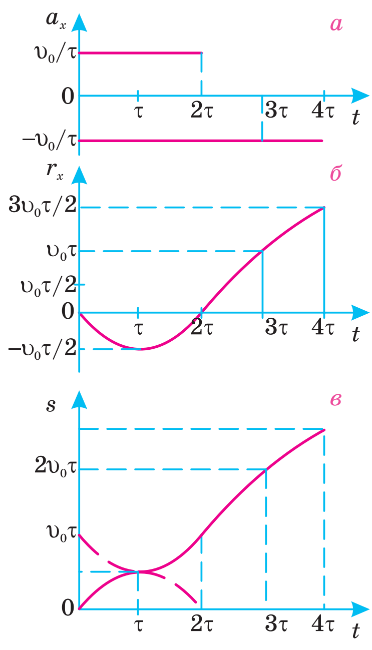
1. а) $\upsilon_{1x} = 10 + 0,8t$ – прискорений;

   б) $\upsilon_{2x} = 2 - 2t$ – сповільнений, через 1 с прискорений;

   в) $\upsilon_{3x} = -4 + 4t$ – сповільнений, через 1 с прискорений;

г) $\upsilon_{4x} = -1 - 12t$ – прискорений

2. 8 м/с, 0,8 м/с^2, -1,6 м/с^2, 15 с, 4 м/с
3. 2,6 м/с
4. До моменту t_1 рух рівномірний, далі до моменту t_2 рівносповільнений у напрямку руху, і до моменту t_3 – рівноприскорений, але у зворотному напрямі
5. $\upsilon_{1x} = 1,25t$; $\upsilon_{2x} = 5 + 5t$; $\upsilon_{3x} = 20 - 4t$; $x_1 = 0,625t^2$; $x_2 = 5t = 2,5t^2$; $x_3 = 20t - 2t^2$
7. 10 с; 40 м; 45 м; 120 м
8. $\upsilon_c = \dfrac{\upsilon}{2}$ Див. мал. 253



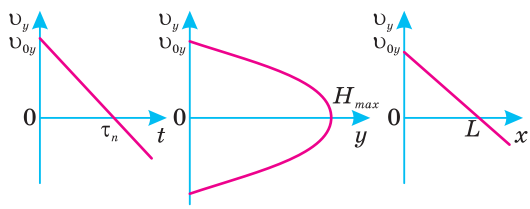
Мал. 253

Вправа 8

1. 0,45 с; 0,05 с; 24 м/с
2. 28 м
3. 35 м
4. $\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_A^2 + 2gh}$
5. $\Delta t = t_1 - t_2 =$
$= (\upsilon_1 + \upsilon_2 + \sqrt{\upsilon_1^2 + 2gh} - \sqrt{\upsilon_2^2 + 2gh}) / g$
6. $\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1 = g\Delta t$
7. $l = \dfrac{5}{3}h = 200$ м

Вправа 9

1. 20 м
2. $y = 10t$; $y = 6 - 5t^2$; $y = 6 - 0,05x^2$; $x = 10$ м; $y = 1$ м
3. Див мал. 254



Мал. 254

4. $h_1/h_2 = \text{tg}^2\alpha$
5. $s = \sqrt{\upsilon_0^2 \cos^2\alpha \cdot t^2 + (\upsilon_0 \sin\alpha - gt)^2} \approx$
≈ 156 м
6. 10,13 м

Вправа 10

1. 50 с
2. Зменшується у 2 рази
3. 1: 20
4. 1 км/с^2
5. а) 1: 2; б) 2: 1
6. 230 м/с
7. 1,5 м/с

8. $\frac{s}{\pi dt}$; $\frac{2s}{dt}$; $\frac{2s^2}{dt^2}$
9. 1, 8 м.
10. 400 м/с; 0,003 с; –133 000 м/с^2

Вправа 11

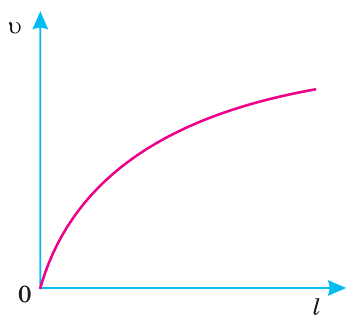
1. $\varepsilon = 0{,}21$ рад/с^2; 240
2. $\varepsilon = 2$ рад/с^2, $\omega_0 = 5$ рад/с
   $\omega = 25$ рад/с
3. 16; $\omega = 20$ рад/с
4. $N = 90$; $\varepsilon = 0{,}14$ рад/с^2
5. а) 2с; б) 2,8 с
6. 6,1 м

Вправа 12

6. Максимальний: $(3k+1)F$, мінімальний: $(k-1)F$, де $k>1$.

Вправа 13

2. Див. мал. 255.



Мал. 255

3. а) $F = 0$; б), в), г) – прискорююча сила стала $F = \text{const}$
5. 3,2 кН
6. Прискорення другої кулі у 8 разів більше
7. Однакові
8. У південно-західному напрямі, 500 кг

Вправа 15

1. 3,8 м/с^2
2. 4,4 м/с^2
3. У точці, віддаленій на 6 земних радіусів від центра Місяця
4. $g = \frac{4}{3}\pi G\rho R = 8{,}8 \text{ м}/\text{с}^2$
5. $5{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3
6. $h = 2{,}16R$

Вправа 16

1. 1,7 км/с
2. $\approx 6 \cdot 10^{24}$ кг
3. 7,7 км/с; 95 хв
5. У 8 разів
6. $\approx$ 7,2 км/с; 118 хв
7. $\approx 5 \cdot 102$ кг/м^3
8. $3{,}6 \cdot 104$ км

Вправа 17

1. 1,5 см
2. 56,8 Н/м
3. У дротині більшого діаметра в 9 разів менший
4. –0,002; 1 МПа
5. 200 МПа
6. У 1,67 раза
7. 50 Н
8. У 4 рази
9. Абсолютне видовження зменшилось у 4 рази, а відносне – в 2 рази
10. $2{,}97 \cdot 10^6$ Н/м^2

Вправа 18

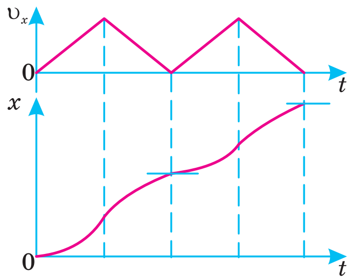
1. 740 Н
2. 140 м/с
3. 2,6 кН; триразове перевантаження
4. 720 Н; 480 Н; 480 Н; 720 Н
5. 700 Н
6. 20 м/с
7. У 0,0034 разів; 1 год 25 хв

Вправа 19

1. 20 Н, 0,04
2. 3 с
3. 0,53
4. 40 м
5. 200 кг/с
6. 800 Н
8. 9 Н
9. $a > 3$ м/с²; не зміниться

Вправа 20

1. 6 см
2. ≈ 800 кг
3. 5,9 м/с²
4. 20 м/с²
5. $x = \dfrac{m}{k\rho_1}(\rho_1 g + \rho_1 a - \rho_2 g)$
6. 8 кН
7. В обох випадках не зміниться
8. Рух тіла не періодичний – воно весь час віддаляється від початкового положення, при цьому швидкість руху тіла то зростає, то спадає до нуля (див. мал. 256.)

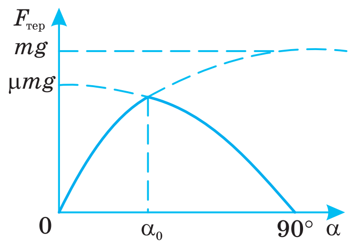


Мал. 256

Вправа 21

1. 220 Н; 20 Н
2. 3,3 м/с²
3. 0,84
4. 1,2 м/с²
5. 14 м/с; 3 с
6. 3,92 м/с²
7. $F = mg\dfrac{h}{\sqrt{l^2 - h^2}} \approx 73{,}5$ Н
8. $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g(\sin\alpha - \mathrm{tg}\,\beta\cos\alpha)\sin\alpha}} \approx 1{,}4$ с
9. $t_2 = t_1\sqrt{\dfrac{l}{gt_1^2\sin\alpha - l}} \approx 4$ с

   $\mu = \dfrac{2l}{gt_1^2\cos\alpha} - tg\alpha = 0{,}36$
10. Див. мал. 257



Мал. 257

Вправа 22

1. 15 кН
2. 1,5 Н
3. 2,2 м/с
4. 3,8 м/с; 1,4 с
5. 3,6 Н
6. 15 м; ≈ 11°
7. $\omega = \sqrt{\dfrac{2g\cdot\mathrm{tg}\,\alpha}{d}} \approx 13\,\dfrac{\text{об}}{\text{с}}$

Вправа 23

1. 0,2
2. 2 м/с², 2,4 Н
3. 32 кН; 16 кН; 8 кН
5. 10 г
6. $a = \dfrac{m_1\sin\alpha - m_2\sin\beta}{m_1 + m_2}g$;

   $T = \dfrac{m_1 m_2 g(\sin\alpha + \sin\beta)}{m_1 + m_2}$

7. $a_1 = 2\dfrac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}g$;

$a_2 = \dfrac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}g$;

$T = \dfrac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2}g$

8. $T = \dfrac{m_1 m_2 g(\mu_2 - \mu_1)\cos\alpha}{m_1 + m_2} = 2{,}3$ Н

Вправа 24

1. 10 кг · м^2
2. 0,2
3. 0,06 Н · м
4. 4,5 Н · м;
5. $m = \dfrac{2(FR - M)}{\varepsilon R^2} = 7{,}36$ кг
6. 2,35 рад/с^2
7. 100 Н·м

Вправа 25

1. 3 кН; 1,6 кН
2. $h = 2r \cdot \mathrm{ctg}\alpha$
3. Не може. Максимальна висота, на яку підніметься людина 2,4 м
4. $F = \dfrac{mg\sqrt{h(2R - h)}}{R - h}$
5. На відстані 0,2 м від середини дошки ближче до хлопчика.
6. На відстані 0,5 м від центра круга
7. На відстані $8l/3$ від центра кулі масою m.
8. 490 Н, 294 Н.

Вправа 26

1. 9,8 м/с^2
2. 8,8 м/с^2 відносно ліфта та 9,8 м/с^2 відносно Землі
3. 1 м/с^2
4. Відносно неінерціальної системи відліку тіло нерухоме $a = 0$, $N = mg\cos\alpha$; відносно інерціальної системи відліку (Землі) $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, $N = mg\cos\alpha$
5. $b = (a + g)(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$
6. $b = a\cos\alpha - g\sin\alpha$
7. 10,8 м/с^2
8. $h = 2R/3$

Вправа 27

1. $16\ \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$; $48\ \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$
2. $2\ \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$
3. а) 3 м/с; б) –0,5 м/с
4. 0,21 Н · м.
5. $\upsilon + 2u$
6. 12 000 м
7. 300 кг

Вправа 28

1. 20 м/с
2. 200 м/с
3. 6250 Н
4. 1470 м
5. 162 м/с
6. – 2 м/с
7. 4υ

Вправа 29

2. $\nu_2 = \dfrac{12J\nu_1}{12J + ml^2} = 0{,}61\,\text{с}^{-1}$
3. $\omega = \dfrac{2m_1\upsilon}{(m_2 + 2m_1)R} = 0{,}445$ рад/с
4. $\varphi = \dfrac{4\pi m_2}{m_1 + 2m_2} = \dfrac{2\pi}{3}$

Вправа 30

1. 1,4 кДж
2. 60 м
3. 12 кДж; 66 %
4. 10 кН
5. 5085 Дж
6. 9,8 Дж
7. 1274 кДж, 77%

Вправа 31

1. $4 \cdot 10^{10}$ Дж
2. 2 кг; 4 м/с
3. Імпульс самоскида в 3 рази більший, а енергія – у 2 рази менша
4. 200 кДж; 1000 кг
5. –200 кДж
6. 240 кДж; –30 кДж; 210 кДж
7. 10 м/с
8. $E = 3m\upsilon^2/4 = 24$ Дж
9. $A = 3{,}2\pi^3 R^5 \rho\nu^2 = 34{,}1$ Дж
10. а) зменшилась у 2 рази;
    б) зменшилась у 8 раз

Вправа 32

1. 47 кДж
2. 26 кДж
3. 700 кДж
4. –16 Дж; 4 Дж; –12 Дж; 12 Дж
5. 0,3 Дж
6. 0,5 Дж
7. 2 Дж
8. 1 : 3 : 5
9. 5,5 м
10. 40 %

Вправа 33

1. 0,55 м
2. 0,2 м
3. 1 кДж
4. 0,05
5. 2,5 м
6. Вантаж 4,4 м/с, обруч 3,13 м/с
7. 10 м
8. 0,72 м
9. 14 м/с; 3 с
10. $\sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh}$

Вправа 34

1. 0,3 м
2. 0,17 Н · с; $3{,}7 \cdot 10^{-2}$ Дж
3. 105 Дж. Якщо маса візка з людиною набагато більша від маси каменя, то вся робота, яку виконує людина, витрачається на те, щоб надати каменю кінетичної енергії
4. 15°
5. 0,16 м; 58,8 Дж
6. а) $5 \cdot 10^{-3}$ м; 0,08 м; б) 0,02 м
7. 1,8 кДж
8. 1,99 Дж
9. 500 м

Вправа 35

1. 3,5 см
2. 24 кПа
3. 20 кН
4. 0,05 м
5. 1,12 с
6. 4,37 см^2

Вправа 36

1. 1,4 см; –1,4 см
2. $x = 0{,}1\sin 5\pi t$; 1,36 м/с
3. $x = 0{,}2\cos\frac{\pi}{2}t$
4. $x = 5 \cdot 10^{-2}\sin(\pi t + \frac{\pi}{6})$ (м)
5. $\upsilon_x = -\pi\sin 20\pi t$; $a_x = -20\pi^2\cos 20\pi t$;
   0,25 м; –2,7 м/с; –100 м/с^2.
6. а) $x = 5{,}5 \cdot 10^{-2}\cos(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6})$;
   б) $x = 0{,}1\cos 20\pi t$.

Вправа 37

1. 2,8 Дж; 3,8 м/с.
2. 150 мДж; 50 мДж
3. У 4 рази
4. $\frac{T}{8}$; $\frac{3T}{8}$; $\frac{5T}{8}$; $\frac{7T}{8}$
5. $x = 0{,}1\cos 10t$; $F = -10\cos 10t$; 10 Н; –5 Н.
6. $x = 4 \cdot 10^{-2} \sin(\pi t + \frac{\pi}{3})$
7. 0,314 с

Вправа 38

1. 2с; 0,5 Гц; π $с^{-1}$
2. 9 : 1
3. 18 см; 50 см
4. Відставатимуть у всіх випадках
5. Зменшиться у 2 рази
6. 2,5 с
7. 9,81 $м/с^2$

Вправа 39

1. 2,4 м/с
2. 15 м/с; 5 м/с
3. 5,1 км/с
4. 105 м
5. $\upsilon_0 = \upsilon + \frac{gh}{2\upsilon} = 349{,}8$ м/с
6. 420 м

Вправа 40

1. 0,714 с
2. 1,3 с; 0,93 с
3. 0,994 с
4. 0,662 с
5. $2{,}6 \cdot 10^8$ м/с
6. У 7,1 раза

Вправа 41

1. $2{,}22 \cdot 10^8$ м/с
2. $\upsilon = \frac{c}{k}\sqrt{k^2 - 1}$
3. 0,95 с
4. 86,6 %
5. 99,6 %
6. $8{,}2 \cdot 10^{-14}$ Дж
7. $1{,}29 \cdot 10^{-20}$ Н · с; 0,66 МеВ

ДОДАТКИ

1. Основні фізичні сталі та деякі астрономічні величини

Швидкість світла у вакуумі	$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
Гравітаційна стала	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)
Прискорення вільного падіння	$g = 9{,}8$ м/с^2
Атомна одиниця маси	1 а.о.м. = $1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг
Число Авогадро	$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Універсальна газова стала	$R = 8{,}314$ Дж/(К·моль)
Стала Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Стала Фарадея	$F = 9{,}648 \cdot 10^4$ Кл/моль
Елементарний заряд	$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Маса спокою електрона	$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
Маса спокою протона	$m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг
Маса спокою нейтрона	$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг
Електрична стала	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнітна стала	$\mu_0 = 1{,}672 \cdot 10^{-6}$ Гн/м
Стала Планка	$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Деякі астрономічні величини	
Радіус і маса Землі	$6{,}37 \cdot 10^6$ м; $5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг
Радіус і маса Сонця	$6{,}95 \cdot 10^8$ м; $1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг
Радіус і маса Місяця	$1{,}74 \cdot 10^6$ м; $7{,}33 \cdot 10^{22}$ кг

2. Густина речовини

Тверді тіла, 10^3 кг/м^3

Алюміній	2,71	Корок	0,2	Скло	2,5
Вольфрам	19,1	Латунь	8,6	Сосна	0,5
Граніт	2,2	Лід	0,9	Срібло	10,5
Дуб (сухий)	0,8	Мідь	8,9	Цинк	7,1
Залізо	7,8	Нікель	8,8	Чавун	7,8
Золото	19,3	Свинець	11,3	Ялина	0,6

Рідини, 10^3 кг/м^3

Вода морська	1,03	Гліцерин	1,26	Ртуть	13,6
Вода чиста	1,00	Ефір	0,72	Спирт етиловий	0,79
Гас	0,8	Олія	0,9		

Гази (за нормальних умов), кг/м^3

Азот	1,25	Кисень	1,47	Водяна пара (при 100 °С)	0,88
Водень	0,09	Повітря	1,29	Вуглекислий газ	1,95
Гелій	0,18	Хлор	3,22		

3. Швидкість поширення звуку у різних середовищах, м/с

Сталь	5100	Свинець	1300	Вода, 0 °С	1485
Скло	5000	Корок	500	Водень, 0 °С	1286
Деревина	4000	Гума	54	Повітря, 0 °С	331

4. Межа міцності на розтяг $\sigma_м$ і модуль пружності *E*, Па

Речовина	$\sigma_м$, 10^6 Па	E, 10^9 Па	Речовина	$\sigma_м$, 10^6 Па	E, 10^9 Па
Алюміній	100	70	Свинець	15	15
Мідь	400	120	Срібло	140	80
Олово	20	50	Сталь	500	200

5. Таблиці значень синусів і тангенсів для кутів 0 – 90°

Градуси	синуси	тангенси	Градуси	синуси	тангенси	Градуси	синуси	тангенси
0	0,0000	0,0000	31	0,5150	0,6009	61	0,8746	1,804
1	0,0175	0,0175	32	0,5299	0,6249	62	0,8829	1,881
2	0,0349	0,0349	33	0,5446	0,6494	63	0,8910	1,963
3	0,0523	0,0524	34	0,5592	0,6745	64	0,8988	2,050
4	0,0698	0,0699	35	0,5736	0,7002	65	0,9063	2,145
5	0,0872	0,0875	36	0,5878	0,7265	66	0,9135	2,246
6	0,1045	0,1051	37	0,6018	0,7536	67	0,9205	2,356
7	0,1219	0,1228	38	0,6157	0,7813	68	0,9272	2,475
8	0,1392	0,1405	39	0,6293	0,8098	69	0,9336	2,605
9	0,1564	0,1584	40	0,6428	0,8391	70	0,9397	2,747
10	0,1736	0,1763	41	0,6561	0,8693	71	0,9455	2,904
11	0,1908	0,1944	42	0,6691	0,9004	72	0,9511	3,078
12	0,2079	0,2126	43	0,6820	0,9325	73	0,9563	3,271
13	0,2250	0,2309	44	0,6947	0,9657	74	0,9613	3,487
14	0,2419	0,2493	45	0,7071	1,0000	75	0,9659	3,732
15	0,2588	0,2679	46	0,7193	1,036	76	0,9703	4,011
16	0,2756	0,2867	47	0,7314	1,072	77	0,9744	4,331
17	0,2924	0,3057	48	0,7431	1,111	78	0,9781	4,705
18	0,3090	0,3249	49	0,7547	1,150	79	0,9816	5,145
19	0,3256	0,3443	50	0,7660	1,192	80	0,9848	5,671
20	0,3420	0,3640	51	0,7771	1,235	81	0,9877	6,314
21	0,3584	0,3839	52	0,7880	1,280	82	0,9903	7,115
22	0,3746	0,4040	53	0,7986	1,327	83	0,9925	8,114
23	0,3907	0,4245	54	0,8090	1,376	84	0,9945	9,514
24	0,4067	0,4452	55	0,8192	1,428	85	0,9962	11,43
25	0,4226	0,4663	56	0,8290	1,483	86	0,9976	14,30
26	0,4384	0,4877	57	0,8387	1,540	87	0,9986	19,08
27	0,4540	0,5095	58	0,8480	1,600	88	0,9994	28,64
28	0,4695	0,5317	59	0,8572	1,664	89	0,9998	57,29
29	0,4848	0,5543	60	0,8660	1,732	90	1,0000	∞
30	0,5000	0,5774						

Математичні відомості

1. Властивості степеня з натуральним показником ($a > 0$, $b > 0$)

1. $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$

2. $\dfrac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$ 3. $\dfrac{a^n}{b^n} = (\dfrac{a}{b})^n$

4. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ 5. $(\dfrac{a}{b})^{-n} = (\dfrac{b}{a})^n$

6. $(a^n)^k = a^{n \cdot k}$ 7. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ 8. $a^0 = 1$

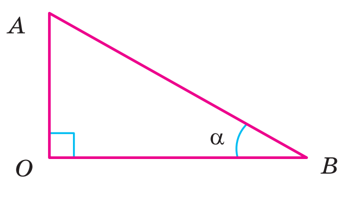
2. Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника (*мал. 258*).

$\sin\alpha = \dfrac{OA}{AB}$,

$\cos\alpha = \dfrac{OB}{AB}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{OA}{OB}$,

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{OB}{OA}$.



Мал. 258

При малих кутах (до 5°)

$\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \alpha$ рад $\alpha_{\text{рад}} = \dfrac{\alpha^\circ \cdot 3{,}14}{180^\circ}$

3. Рівняння: 1) многочлен 1-го ступеня $ax + b = 0$, корінь якого визначається за формулою $x = -\dfrac{b}{a}$.

2) многочлен 2-го ступеня (квадратне рівняння) $ax^2 + bx + c = 0$

Дискримінант: $D = b^2 - 4ac$

Корені рівняння: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Якщо $D = 0$ то $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

Якщо $D < 0$ то коренів не має.

Теорема Вієта для рівняння типу $x^2 + px + q = 0$, для коренів виконуються умови $x_1 + x_2 = -p$ та $x_1 \cdot x_2 = q$.

4. Тотожності многочленів (формули скороченого множення):

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Наближене обчислення: якщо

$b << a$ $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab$,

b^2 – нехтуємо.

5. Формули площ.

Круг: $S = \pi R^2$.

Квадрат $S = a^2$.

Трапеція $S = \dfrac{a+b}{2}h$.

6. Формули об’ємів.

Куля: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Циліндр $V = Sh = \pi R^2 \cdot h$.

7. Математичні дії:

$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$; $\dfrac{a^n}{b^m} = a^n \cdot b^{-m}$;

$\dfrac{a^n \cdot a^m}{b^k \cdot b^c} = \dfrac{a^{n+m}}{b^{k+c}}$.

8. Стандартний запис числа

$a \cdot 10^{\pm n}$, де $1 \le a < 10$

9. Основні тригонометричні тотожності:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

10. Формули подвійного кута:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ФІЗИКА

Підручник для 10 -го класу
загальноосвітніх навчальних закладів
(профільний рівень)

АВТОРИ
ЗАСЄКІНА Тетяна Миколаївна;
ГОЛОВКО Микола Васильович.

Фаховий редактор – *Д. О. Засєкін.*
Літературний редактор – *С. В. Косянчук.*
Коректор – *С. В. Бартош.*
Художнє оформлення видання
та дизайн обкладинки – *Н. Б. Михайлова, В. Ф. Михайлов.*
Верстка та дизайн видання – *Ю. П. Мирончик.*

Формат 70х100 1/16.
Гарнітура Шкільна. Друк офсетний. Папір офсетний.
Підписано до друку ------. Ум. друк. арк. 24,7. Обл.-вид. арк. 19,58.
Наклад --------- прим. Зам. №

Видано за рахунок державних коштів
Продаж заборонено

Видавництво «Педагогічна думка»
04053, м. Київ, вул. Артема, 52-а, корп. 2;
тел./факс: (044) 484–30–71.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції від 28.08.2009 р.
Серія ДК №3563.