А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

11

АЛГЕБРА

АКАДЕМІЧНИЙ РІВЕНЬ
ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

ГІМНАЗІЯ

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]
ББК 22.141я721
М52

Видано за рахунок державних коштів
Продаж заборонено

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
(наказ від 16.03.2011 № 235)

Наукову експертизу проводив
Інститут математики Національної академії наук України

Психолого-педагогічну експертизу проводив
Інститут педагогіки
Національної академії педагогічних наук України

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень, проф. рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2011. — 431 с. : іл.
ISBN 978-966-474-145-0.

Це видання — підручник з алгебри і початків аналізу для учнів 11-х класів, які навчаються за програмою академічного або профільного рівня. Книга містить увесь необхідний теоретичний матеріал, передбачений державною програмою. Цей матеріал супроводжується великою кількістю розв'язаних прикладів типових задач. Книга містить також обширний дидактичний матеріал. Для більшості вправ у підручнику наведено відповіді або вказівки.

Підручник адресовано учням загальноосвітніх навчальних закладів, учителям математики, керівникам математичних гуртків, студентам.

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]
ББК 22.141я721

ISBN 978-966-474-145-0

Від авторів

ЛЮБІ ОДИНАДЦЯТИКЛАСНИКИ!

У цьому навчальному році ви закінчуєте школу, і ми сподіваємося, що отримані знання стануть для вас надійним підґрунтям в опануванні майбутньою професією. Маємо надію, що в цьому вам допоможе підручник, який ви тримаєте в руках. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Текст підручника розділено на шість параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв’язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв’язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв’язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі. Свої знання можна перевірити, розв’язуючи задачі в тестовій формі з рубрики «Перевір себе».

Звертаємо увагу на те, що текст підручника структуровано за двома рівнями — академічним і профільним. Текст, обов’язковий для вивчення лише учнями класів профільного рівня, позначено пунктирною лінією . Відповідні частини підручника відокремлені також піктограмами . Учні класів академічного рівня можуть використовувати цей матеріал для самоосвіти. Підкреслимо, що для учнів класів профільного рівня обов’язковим для вивчення є весь навчальний матеріал підручника.

Крім навчального матеріалу, у підручнику ви зможете знайти оповідання з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків.

Бажаємо успіхів!

ШАНОВНІ КОЛЕГИ!

Ця книга є дворівневим підручником, текст якого передбачає можливість організації навчального процесу в класах як академічного, так і профільного рівнів вивчення математики.

Державна програма з алгебри і початків аналізу профільного рівня порівняно з відповідною програмою академічного рівня передбачає вивчення більш широкого переліку навчальних тем, а також суттєво вищі вимоги до навчальних досягнень учнів.

У підручнику частини тексту теоретичного матеріалу і вправ, які відповідають вимогам лише програми профільного рівня, позначено піктограмою  і пунктирною лінією ⋮ . Учителі, які працюють у класах академічного рівня, можуть використовувати цей матеріал для формування індивідуальних завдань, а також для організації роботи математичного гуртка і факультативних занять.

Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

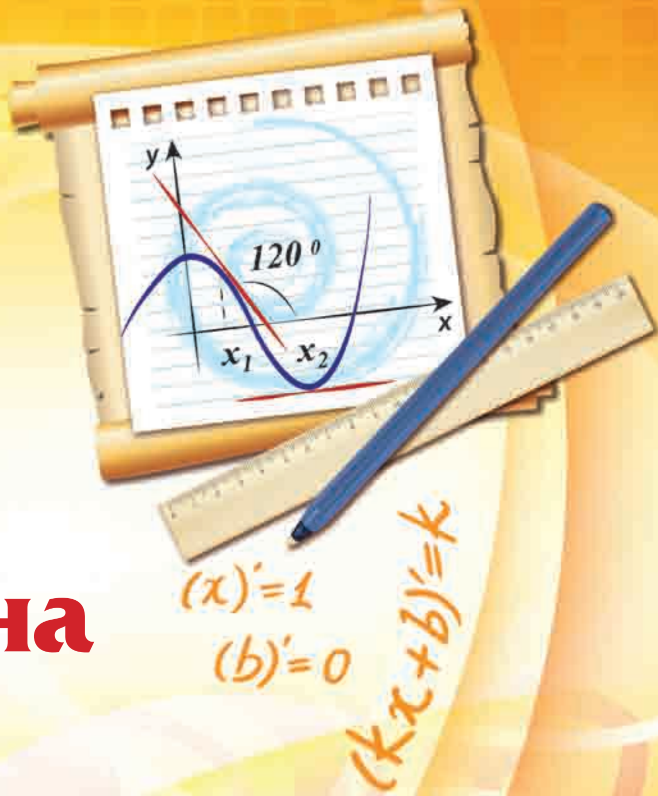
Усі задачі класифіковано за їх складністю. Рівні складності відповідають вимогам програми для класів з відповідним рівнем вивчення математики.

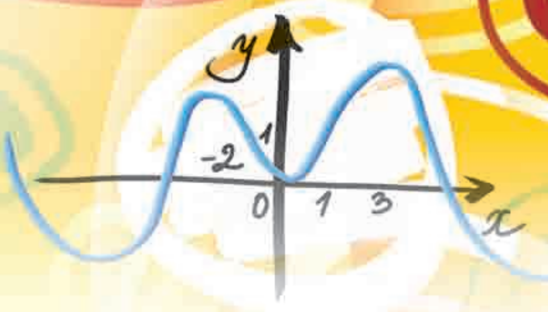
Умовні позначення

n°	завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;
$n^{\bullet}$	завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
$n^{\bullet\bullet}$	завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
n^{*}	задачі для математичних гуртків і факультативів;
⊙	доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;
(••)	доведення теореми, що відповідає високому рівню навчальних досягнень;
▲	закінчення доведення теореми;
●	закінчення розв'язування прикладу;
	матеріал, який відповідає програмі профільного рівня;
	рубрика «Коли зроблено уроки».

§ 1

Похідна та її застосування





1. Границя числової послідовності

Розглянемо послідовність (a_n), задану формулою n-го члена $a_n = \frac{n}{n+1}$ (також кажуть, що цю послідовність задано **формулою загального члена**).

Випишемо кілька перших членів цієї послідовності:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7},\ \frac{7}{8},\ \frac{8}{9},\ \dots .$$

Якщо члени цієї послідовності зображати точками на координатній прямій, то ці точки будуть розміщуватися все ближче й ближче до точки з координатою 1 (рис. 1.1).

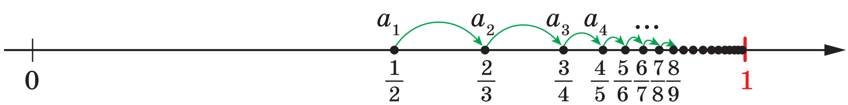


Рис. 1.1

Інакше кажучи, значення виразу $|a_n - 1|$ зі збільшенням номера n стає все меншим і меншим. Маємо:

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Тоді, наприклад, розв'язавши нерівність $\frac{1}{n+1} < 0{,}1$, установлюємо, що $|a_n - 1| < 0{,}1$ при $n \geqslant 10$, а розв'язавши нерівність $\frac{1}{n+1} < 0{,}0001$, установлюємо, що $|a_n - 1| < 0{,}0001$ при $n \geqslant 10\,000$ тощо. Узагалі, починаючи з деякого номера n_0 значення виразу $|a_n - 1|$ стає *меншим від будь-якого наперед заданого додатного числа* ε (читають «епсилон»). Знайти n_0 можна, розв'язавши нерівність $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

У цьому разі говорять, що число 1 є **границею послідовності** (a_n). Кажуть також, що зі збільшенням номера n члени послідовності (a_n) **прямують** до числа 1.

Розглянемо послідовність (b_n), задану формулою n-го члена $b_n = \frac{1}{n}$.

Випишемо кілька перших членів цієї послідовності:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \dots .$$

Зі збільшенням номера n члени послідовності (b_n) прямують до числа 0 (рис. 1.2).

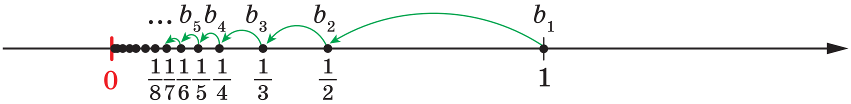


Рис. 1.2

Це означає, що для будь-якого додатного числа ε можна вказати такий номер n_0, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $|b_n - 0| < \varepsilon$. Оскільки $|b_n - 0| = \frac{1}{n}$, то номер n_0 можна знайти, розв'язавши нерівність $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Означення. **Число a називають границею послідовності (a_n), якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий номер n_0, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$.**

Пишуть: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ (тут *lim* — це початкові літери французького слова *limite* — границя).

Для прикладів, що розглядалися вище, можна записати:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Послідовність, яка має границю, називають **збіжною**.

Можна довести, що кожна збіжна послідовність має лише одну границю.

ПРИКЛАД 1 Послідовність (a_n) задано формулою $a_n = 4$. Знайдіть $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Розв'язання. Доведемо, що $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 4$. Справді, $|a_n - 4| = 0$ при всіх $n \in \mathbb{N}$. Тому для довільного додатного числа ε і для всіх $n \geqslant 1$ виконується нерівність $|a_n - 4| < \varepsilon$. Звідси $n_0 = 1$.

Відповідь. 4.

Послідовність (a_n), усі члени якої однакові, називають **стаціонарною**. Аналогічно прикладу 1 можна довести, що *кожна стаціонарна послідовність* (a_n), *де* $a_n = c$, *має границю, яка дорівнює числу* c.

Поняття границі послідовності має просту геометричну інтерпретацію[1].

Нерівність виду $|a_n - a| < \varepsilon$ рівносильна нерівностям $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, тобто

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Це означає, що коли $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться номер n_0, починаючи з якого всі члени послідовності належать інтервалу $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Іншими словами, яким би малим не був інтервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, члени послідовності, яка збігається до числа a, рано чи пізно потраплять у цей інтервал і вже ніколи не вийдуть за його межі, тобто *поза вказаним інтервалом може знаходитися лише скінченна кількість членів послідовності* (a_n).

Послідовність, яка не має границі, називають **розбіжною.**

Наприклад, послідовність (c_n), яку задано формулою $c_n = n$, є розбіжною, оскільки будь-який інтервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ містить лише скінченну кількість членів послідовності (c_n) (рис. 1.3).

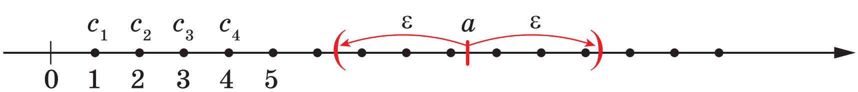


Рис. 1.3

Так само розбіжною є і послідовність (d_n), яку задано формулою $d_n = (-1)^n$. Справді, припустимо, що послідовність (d_n) є збіжною і $\lim\limits_{n \to \infty} d_n = a$. Тоді для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ поза інтервалом $\left(a - \frac{1}{2}; a + \frac{1}{2}\right)$, довжина якого дорівнює 1, має знаходитися

[1] Звертаючись до геометричних інтерпретацій, проміжок виду $(a; b)$ часто називають **інтервалом**, а проміжок виду $[a; b]$ — **відрізком**.

лише скінченна кількість членів послідовності (d_n). Виписавши кілька перших членів послідовності (d_n)

$$d_1 = -1,\ d_2 = 1,\ d_3 = -1,\ d_4 = 1,\ \ldots,$$

бачимо, що при жодному a інтервал $\left(a-\dfrac{1}{2};\,a+\dfrac{1}{2}\right)$ не може містити числа -1 і 1 одночасно (рис. 1.4). Це означає, що поза інтервалом $\left(a-\dfrac{1}{2};\,a+\dfrac{1}{2}\right)$ знаходиться нескінченна кількість членів послідовності: або d_1, d_3, d_5, ..., або d_2, d_4, d_6, ...

Отже, (d_n) — розбіжна послідовність.

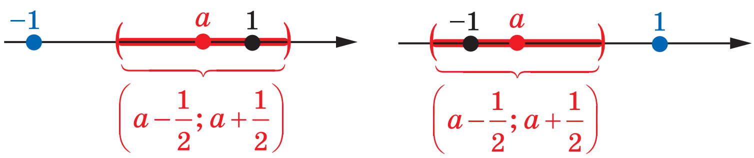


Рис. 1.4

Знаходити границі числових послідовностей допомагає така теорема.

Теорема 1.1 (про арифметичні дії з границями послідовностей). ***Якщо послідовності (a_n) і (b_n) є збіжними, то послідовності $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, (a_nb_n) також є збіжними, причому***

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Якщо, крім цього, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$ і $b_n\neq 0$ при всіх $n\in\mathbb{N}$, то збіжною також є послідовність $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$, причому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

Доведення теореми проведемо лише для послідовності $(a_n + b_n)$. Для послідовностей $(a_n - b_n)$, $(a_n b_n)$ та $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ з доведенням теореми ви зможете ознайомитися, наприклад, за підручником «Алгебра і початки аналізу. Підручник для 10 класу з поглибленим вивченням математики»[1], п. 46.

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тоді для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер n_0', що для всіх $n \geqslant n_0'$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$, тобто

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon. \qquad (1)$$

Аналогічно, нехай $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тоді для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер n_0'', що для всіх $n_0 \geqslant n_0''$ виконується нерівність $|b_n - b| < \varepsilon$, тобто

$$b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon. \qquad (2)$$

Оберемо такий номер n_0, що $n_0 \geqslant n_0'$ та $n_0 \geqslant n_0''$. Тоді для всіх $n \geqslant n_0$ одночасно виконуються нерівності (1) і (2). Додавши ці нерівності, отримаємо

$$(a + b) - 2\varepsilon < a_n + b_n < (a + b) + 2\varepsilon,$$
$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < 2\varepsilon.$$

Якщо для будь-якого числа $\varepsilon_1 > 0$ обрати $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}$, то останню нерівність можна переписати у вигляді

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon_1. \qquad (3)$$

Таким чином, для будь-якого $\varepsilon_1 > 0$ існує такий номер n_0, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність (3). Це означає, що послідовність $(a_n + b_n)$ є збіжною і

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n. \ \blacktriangle$$

[1] А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Алгебра і початки аналізу. Підручник для 10 класу з поглибленим вивченням математики. — Харків: Гімназія, 2010. Далі посилатимемося на цей підручник «Алгебра-10 з поглибленим вивченням математики».

ПРИКЛАД 2 Знайдіть $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Послідовність із загальним членом $a_n=\dfrac{2n+1}{n}$ подано у вигляді суми двох збіжних послідовностей із загальними членами $x_n=2$ і $y_n=\dfrac{1}{n}$. Тоді можна записати:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=2+0=2.$$ ●

ПРИКЛАД 3 Обчисліть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+3}{11-4n}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник і знаменник дробу $\dfrac{5n+3}{11-4n}$ на n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{11-4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\frac{11}{n}-4}.$$

У чисельнику і знаменнику отриманого дробу записано загальні члени збіжних послідовностей. Тоді:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\frac{11}{n}-4}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{11}{n}-4\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{11}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}4}=\frac{5+0}{0-4}=-\frac{5}{4}.$$ ●

Теорема 1.2. ***Якщо послідовність (a_n) є збіжною і $a_n\geqslant 0$ при всіх $n\in\mathbb{N}$, то послідовність із загальним членом $\sqrt{a_n}$ також є збіжною, причому $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$.***

З доведенням цієї теореми ви зможете ознайомитися, наприклад, за підручником «Алгебра-10 з поглибленим вивченням математики», п. 45.

ПРИКЛАД 4 Обчисліть границю $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{4n^2 + n} - 2n\right)$.

Розв'язання. Проведемо тотожні перетворення:

$$\sqrt{4n^2+n} - 2n = \frac{\left(\sqrt{4n^2+n}+2n\right)\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)}{\sqrt{4n^2+n}+2n} =$$

$$= \frac{\left(4n^2+n\right)-4n^2}{\sqrt{4n^2+n}+2n} = \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n} = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}.$$

Тепер отримуємо

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{4n^2+n} - 2n\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}.$$

Вправи

1.1.° Укажіть (без обґрунтування), яке число є границею послідовності із загальним членом x_n:

1) $x_n = 3 + \frac{1}{n}$; 2) $x_n = \frac{7}{\sqrt{n+1}}$; 3) $x_n = \frac{3+\frac{1}{n}}{5-\frac{2}{n}}$; 4) $x_n = \frac{\sin n}{n^5}$.

1.2.° Укажіть (без обґрунтування), яке число є границею послідовності із загальним членом x_n:

1) $x_n = -\frac{1}{n} + 4$; 2) $x_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$; 3) $x_n = \cos n - \cos n$.

1.3.• Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n}{n+1}$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+5}{n+4}$; 3) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1000n}{n^2+1}$.

1.4.• Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+2}{3n}$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n+3}{3n-4}$; 3) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{100\,n}{n^2+2n}$.

1.5.• Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2+3n+15}{2n^2-n+100}$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n-3n^2+44}{n^2+5n-7}$;

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4n^5 + 5n^4 + 3n - 2}{9n^5 + n^3 - 1}$.

1.6.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{-2n^2 + 7n + 1}{n^2 + 1}$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5 - n}{n^2 + 3n - 8}$;

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^4 - n^3 - n^2 - 1}{-3n^4 + n^2 + 12n}$.

1.7.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n + 1}{3 - 2n} \cdot \dfrac{n + 3}{4n + 5} \right)$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n(3n - 1)(n + 4)}{(4 + 5n)(2n + 1)(n + 1)}$;

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n + 1)(n - 2)(2n + 3)}{(4n - 1)(n + 3)(5n - 2)}$.

1.8.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n(n + 1)(n + 2)}{(n + 3)(n + 4)(n + 5)}$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(2n + 1)(3n - 1)}{2n^2 - 3}$.

1.9.° Наведіть приклади трьох послідовностей, що збігаються до числа: 1) 3; 2) $-\sqrt{2}$.

1.10.° Чи для кожного числа a існує послідовність, що збігається до a?

1.11.°° Учитель запропонував обчислити границю $\lim\limits_{n \to \infty} 1$.

Учень Василь Заплутайко розв'язав задачу так:

$$\lim_{n \to \infty} 1 = \lim_{n \to \infty} n \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} \right)}_{n \text{ доданків}} =$$

$$= \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} + \ldots + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}}_{n \text{ доданків}} = \underbrace{0 + 0 + \ldots + 0}_{n \text{ доданків}} = 0.$$

Чи погоджуєтесь Ви з розв'язанням Василя?

1.12.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{2n + 3}}{\sqrt{4n + 1} + \sqrt{n + 3}}$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{2 + n^2}}$.

1.13.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{4n^2+1}}$.

1.14.•• Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n}-n\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+2n^2}-\sqrt{n^3}}{\sqrt{n+1}}$.

1.15.•• Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+3}\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+3n}\right)$.

1.16.•• Нехай при будь-якому $\varepsilon > 0$ інтервал $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ містить безліч членів послідовності (a_n). Чи правильно, що $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$?

1.17.•• Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Чи можуть у цій послідовності:

1) бути члени, більші ніж 1 000 000;
2) усі члени бути від'ємними?

1.18.•• Зі збіжної послідовності вилучили всі члени, які мають парні номери. Чи є послідовність, що утворилася, збіжною?

1.19.•• У збіжній послідовності змінили 5 перших членів. Чи залишиться послідовність збіжною? Чи може змінитися границя послідовності?

1.20.•• Послідовність $(\sin a_n)$ є збіжною. Чи правильно, що послідовність (a_n) також є збіжною?

1.21.•• Відомо, що послідовність $(|a_n|)$ є збіжною. Чи правильно, що послідовність (a_n) також є збіжною?

1.22.•• Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. Доведіть, що:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^2=a^2$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{15}=a^{15}$.

1.23.•• Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$. Знайдіть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_na_{n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2a_n+a_{n+2}}{(a_n-n)^2+1}$.

1.24.•• Послідовність (a_n) прямує до числа 3. Знайдіть границю:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + a_{n+1})(a_n - 2)$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_{n+3} - 1}{a_n^2 + 5}$.

2. Уявлення про границю функції в точці та про неперервність функції в точці

Розглянемо функцію $f(x) = x + 1$ і точку $x_0 = 1$. Якщо значення аргументу x прямують до числа 1 (позначають $x \to 1$), то відповідні значення функції f прямують до числа 2 (позначають $f(x) \to 2$) (рис. 2.1).

Іншими словами: якщо значення аргументу обирають усе ближче й ближче до числа 1, то відповідні значення функції f усе менше й менше відрізняються від числа 2.

У цьому разі говорять, що число 2 є **границею функції f у точці** 1, і записують

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

або

$$\lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Також використовують такий запис:

$$f(x) \to 2 \text{ при } x \to 1.$$

Наприклад, за допомогою рисунка 2.2 можна зробити висновок, що $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \sin x = -1$.

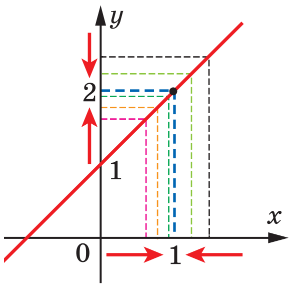


Рис. 2.1

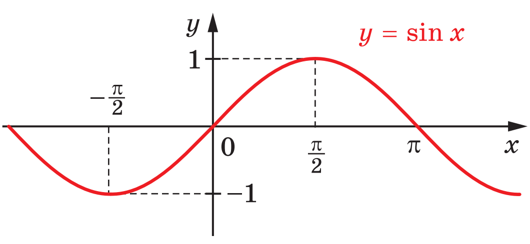


Рис. 2.2

Якщо звернутися до рисунка 2.3, то можна записати:

$$\lim_{x \to 1} \arccos x = 0, \quad \lim_{x \to -1} \arccos x = \pi.$$

На рисунку 2.4 зображено графік функції $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Ця функція не визначена в точці $x_0 = 1$, а в усіх інших точках збігається з функцією $y = x + 1$ (порівняйте рис. 2.1 і рис. 2.4). Проте якщо значення аргументу x, де $x \neq 1$, прямують до числа 1, то відповідні значення функції $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ прямують до числа 2, тобто

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Цей приклад показує, що функція може бути не визначеною в точці, але мати границю в цій точці.

Розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. При $x > 0$ отримуємо $f(x) = 1$, при $x < 0$ отримуємо $f(x) = -1$. Графік функції f зображено на рисунку 2.5.

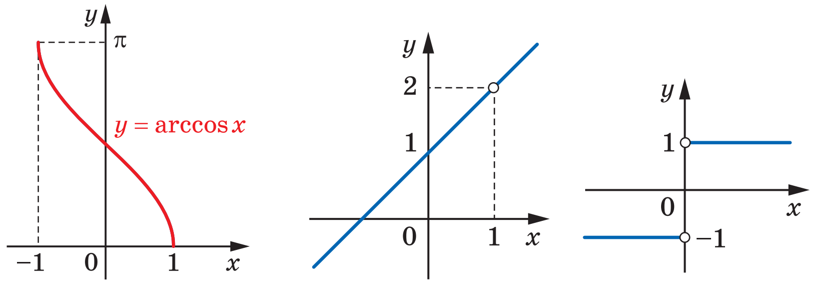


Рис. 2.3 Рис. 2.4 Рис. 2.5

Якщо значення аргументу x, де $x \neq 0$, прямують до 0, то неможливо стверджувати, що значення функції f прямують до якогось певного числа. Справді, коли значення аргументу прямують до нуля, залишаючись від'ємними, то відповідні значення функції прямують до −1, а коли значення аргументу прямують до нуля, залишаючись додатними, то відповідні значення функції прямують до 1.

Тому функція $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ у точці $x_0 = 0$ не має границі.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (рис. 2.6). Якщо значення x, де $x \neq 0$, прямують до 0, то відповідні значення функції стають усе більшими і більшими. Тому не існує числа, до якого прямують значення функції f за умови, що значення аргументу прямують до 0.

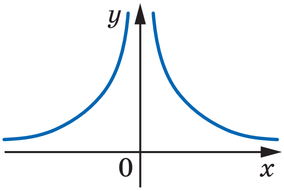


Рис. 2.6

Отже, функція $f(x) = \frac{1}{x^2}$ не має границі в точці $x_0 = 0$.

Ми навели приклади двох функцій, які не визначені в деякій точці та не мають границі в цій точці.

Помилковим було б вважати, що коли функція визначена в деякій точці x_0, то вона обов'язково має границю в цій точці. На рисунку 2.7 зображено графік функції f, яка визначена в точці x_0, але не має границі в цій точці.

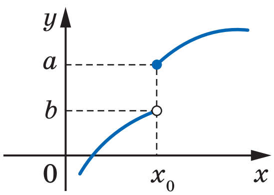


Рис. 2.7

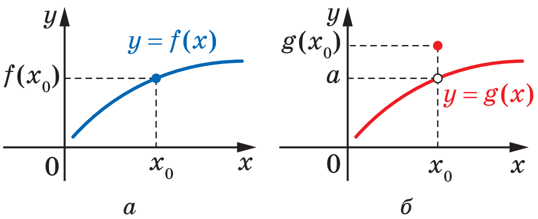


Рис. 2.8

На рисунку 2.8 зображено графіки функцій f і g, які визначені в точці x_0 і мають границю в цій точці. Проте поведінка цих функцій у точці x_0 істотно різниться. Графік функції g, на відміну від графіка функції f, у точці x_0 має *розрив*. Таку відмінність поведінки функцій f і g у точці x_0 можна охарактеризувати за допомогою границі.

Для функції g маємо: $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \neq g(x_0)$. Для функції f можна записати: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Іншими словами: *границя функції f у точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці*.

У цьому разі говорять, що **функція f є неперервною в точці x_0**.

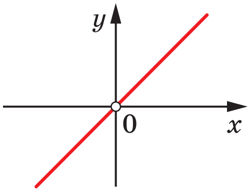


Рис. 2.9

З рівності $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ випливає, що коли функція f не має границі в точці x_0 або не визначена в цій точці, то вона не може бути неперервною в точці x_0.

Наприклад, функція, графік якої зображено на рисунку 2.7, не є неперервною в точці x_0. Також не є неперервною в точці $x_0 = 0$ функція $y = \frac{x^2}{x}$ (рис. 2.9).

Якщо функція f є неперервною в кожній точці деякої множини $M \subset \mathbb{R}$, то говорять, що **вона неперервна на множині** M.

Наприклад, функція $y = x^2$ неперервна на $\mathbb{R}$, а функція $y = \frac{1}{x^2}$ є неперервною на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Якщо функція f є неперервною на $D(f)$, то таку функцію називають **неперервною**.

Вправи

2.1.° Побудувавши графік функції f, з'ясуйте, чи має функція f границю в точці x_0:

1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x_0 = 1$;
4) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x_0 = 2$;
5) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$;
6) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$;
7) $f(x) = k$, де k — деяке число, $x_0 = 3$;
8) $f(x) = \frac{|x - 2|}{2 - x}$, $x_0 = 2$.

2.2.° Побудувавши графік функції f, з'ясуйте, чи має функція f границю в точці x_0:

1) $f(x) = 2x + 1$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = 2x + 1$, $x_0 = -2$;

3) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$, $x_0=-1$;

4) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$, $x_0=-3$;

5) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$, $x_0=2$;

6) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$, $x_0=1$.

2.3.° За допомогою графіка функції f (рис. 2.10) з'ясуйте, чи має функція f границю в точці x_0:

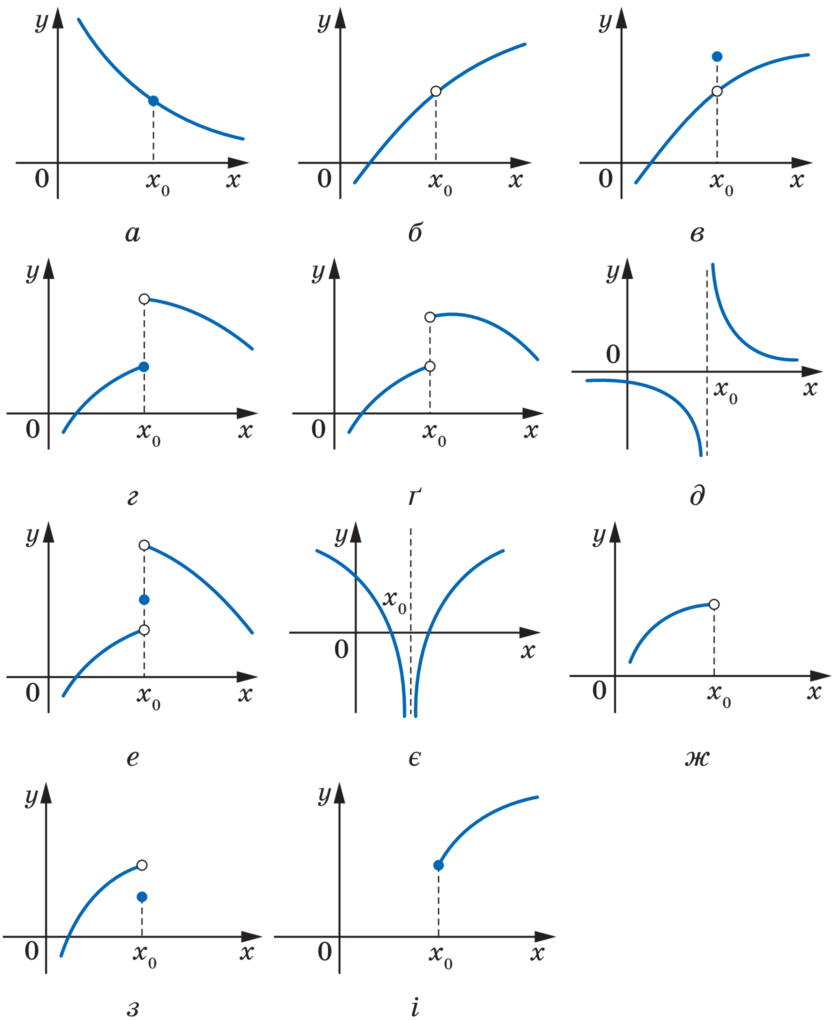


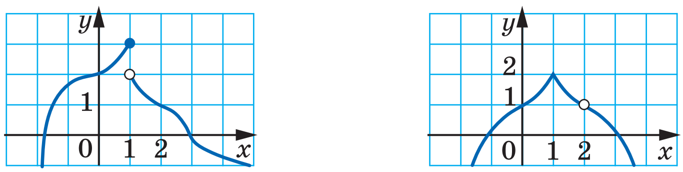
Рис. 2.10

2.4.° На рисунку 2.11 зображено графік функції $y = f(x)$.

1) Чому дорівнює значення функції f у точці $x_0 = 1$?

2) Чи існує границя функції f у точці $x_0 = 1$? У разі позитивної відповіді запишіть з використанням відповідної символіки, чому вона дорівнює.

3) Чи існує границя функції f у точці $x_0 = 2$? У разі позитивної відповіді запишіть з використанням відповідної символіки, чому вона дорівнює.



а *б*

Рис. 2.11

2.5.° Значення аргументу функції f прямують до числа x_0. З'ясуйте, до якого числа прямують відповідні значення функції f:

1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = x + 1$, $x_0 = -2$;

3) $f(x) = \frac{x}{x}$, $x_0 = 0$;

4) $f(x) = k$, $x_0 = a$, де k і a — деякі числа.

2.6.° З'ясуйте, чи є неперервною функція f у точці x_0:

1) $f(x) = x^2 - 1$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;

3) $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = \sqrt{-x}$, $x_0 = -1$.

2.7.• З'ясуйте, чи є неперервною функція f у точці x_0:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 2, \\ x + 2, & \text{якщо } x \geqslant 2, \end{cases}$ $x_0 = 2$;

2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x}, \text{ якщо } x\neq 0, \\ 1, \text{ якщо } x=0, \end{cases}$ $x_0 = 0;$

3) $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ якщо } x>1, \\ x-2, \text{ якщо } x\leqslant 1, \end{cases}$ $x_0 = 1.$

2.8.° Чи є неперервною функція f у точці x_0:

1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{6}{x}, \text{ якщо } x<-2, \\ x-1, \text{ якщо } x\geqslant -2, \end{cases}$ $x_0 = -2;$

2) $f(x)=\begin{cases} 0{,}5x^2, \text{ якщо } x\leqslant -1, \\ x+3, \text{ якщо } x>-1, \end{cases}$ $x_0 = -1?$

Готуємося до вивчення нової теми

2.9. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт прямої:
1) $y = 2x - 7;$ 3) $y = x + 10;$ 5) $y = 4;$
2) $y = -3x;$ 4) $y = 5 - x;$ 6) $3x - 2y = 4?$

2.10. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку A $(-3; 7)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює: 1) 4; 2) -3; 3) 0.

2.11. Який кут утворює з додатним напрямом осі абсцис пряма:
1) $y = x - 6;$ 2) $y = 1 - x;$ 3) $y = 3?$

2.12. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку A $(2; 6)$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут: 1) $60°$; 2) $120°$.

3. Означення границі функції в точці

У попередньому пункті ви отримали уявлення про границю функції в точці. Перейдемо до формування строгого означення.

На рисунку 3.1 зображено графік функції f і на осях абсцис і ординат позначено відповідно точки x_0 і a. Зазначимо, що $f(x_0) \neq a$.

Нехай ε — деяке додатне число. На осі ординат розглянемо інтервал $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$. На осі абсцис йому відповідає такий інтервал I, який містить точку x_0, що для будь-якого $x \in I \cap D(f)$, $x \neq x_0$, відповідні значення функції f належать проміжку $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, тобто виконуються нерівності $a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$. Іншими словами, для будь-якого $x \in I \cap D(f)$, $x \neq x_0$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

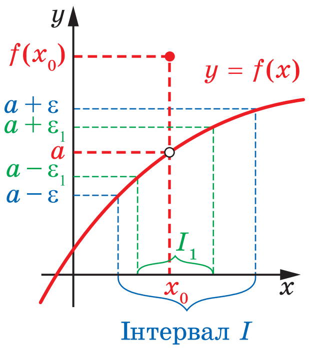


Рис. 3.1

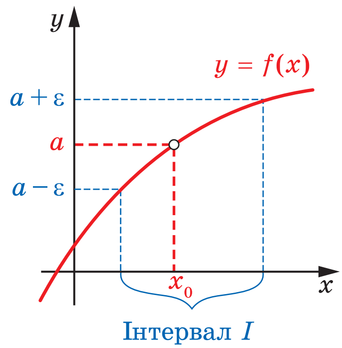


Рис. 3.2

Звузимо проміжок на осі ординат, тобто розглянемо інтервал $(a - \varepsilon_1;\ a + \varepsilon_1)$, де $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Тоді для числа ε_1 можна вказати такий інтервал I_1 осі абсцис, який містить точку x_0, що для будь-якого $x \in I_1 \cap D(f)$, $x \neq x_0$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon_1$ (рис. 3.1).

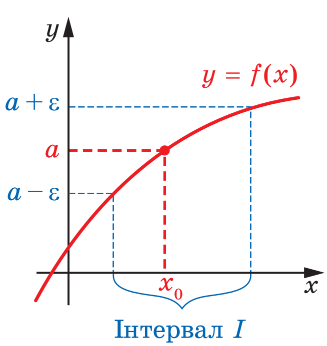


Рис. 3.3

На рисунку 3.2 зображено графік такої функції f, що $x_0 \notin D(f)$. Рисунок 3.3 відповідає функції f, для якої $f(x_0) = a$.

У кожному з випадків, зображених на рисунках 3.1–3.3, для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати такий інтервал I, який містить точку x_0, що для всіх $x \in I \cap D(f)$ і $x \neq x_0$ виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Наведені міркування дозволяють дати таке означення границі функції f у точці x_0.

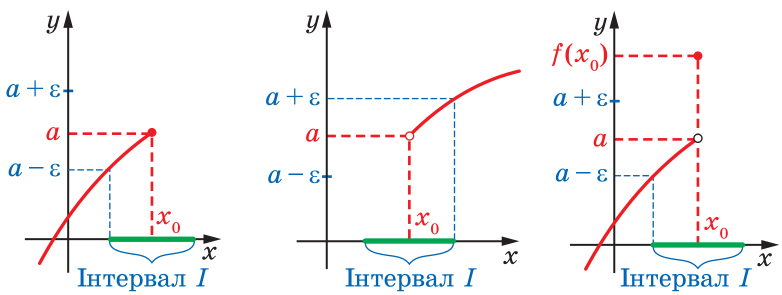
Означення. **Число a називають границею функції f у точці x_0, якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий інтервал I, який містить точку x_0, що для будь-якого $x \in I \cap D(f)$ і $x \neq x_0$ виконується нерівність**

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

Зауважимо, що границя функції в точці x_0 характеризує значення функції біля точки x_0, тоді як поведінка функції в самій точці x_0 не впливає на значення границі (зверніть увагу на умову $x \neq x_0$ в означенні границі). Тому для кожної з функцій f, графіки яких зображено на рисунках 3.1–3.3, можна записати:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

На рисунку 3.4 точка x_0 така, що ліворуч (праворуч) від неї немає точок, які належать області визначення функції f.



а *б* *в*

Рис. 3.4

У кожному з випадків, зображених на цьому рисунку, для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати такий інтервал I, який містить точку x_0, що для всіх $x \in I \cap D(f)$ і $x \neq x_0$ виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$. Це означає, що число a є границею функції f у точці x_0.

Рис. 3.5

Якщо інтервал I містить точку x_0, то існує таке додатне число δ, що проміжок $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ належить I (рис. 3.5). Інтервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$

називають **δ-околом точки** x_0. Об'єднання інтервалів $(x_0 - \delta;\ x_0) \cup (x_0;\ x_0 + \delta)$ називають **проколотим δ-околом точки** x_0 (рис. 3.6).

Очевидно, що при $\delta > 0$ множиною розв'язків нерівності $|x - x_0| < \delta$ є δ-окіл точки x_0, а множиною розв'язків подвійної нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ є проколотий δ-окіл точки x_0.

Тоді, якщо точка x_0 належить інтервалу I, то цей інтервал містить деякий проколотий δ-окіл точки x_0, тобто множину, яка є розв'язком подвійної нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, де δ — деяке додатне число (рис. 3.7).

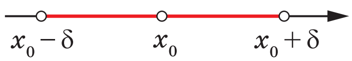


Рис. 3.6

Рис. 3.7

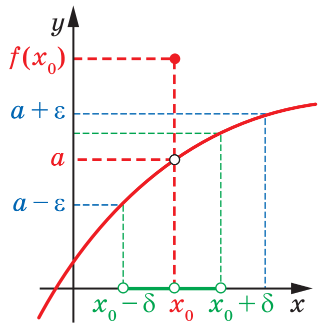


Рис. 3.8

Тепер наведене означення границі функції f у точці можна переформулювати так.

Означення. **Число a називають границею функції f у точці x_0, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке додатне число δ, що для всіх $x \in D(f)$ з нерівностей $0 < |x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.**

Рисунок 3.8 ілюструє це означення.

Зауваження. Якщо існує проколотий δ-окіл точки x_0, у якому функція не визначена (рис. 3.9), то границю функції в точці x_0 не означають.

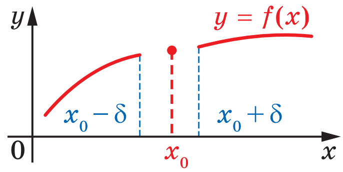


Рис. 3.9

ПРИКЛАД 1 За допомогою означення границі функції в точці доведіть, що $\lim\limits_{x \to 1}(2x+3)=5$.

Розв'язання. Для кожного додатного числа ε розглянемо нерівність $|(2x+3)-5|<\varepsilon$. Перетворивши її, запишемо: $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$. Отримана нерівність підказує, яким чином для даного $\varepsilon>0$ можна знайти потрібне число $\delta>0$.

Нехай $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. Тоді з умови $0<|x-1|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ випливає, що $|2x-2|<\varepsilon$. Звідси $|(2x+3)-5|<\varepsilon$. Сказане означає, що число $a=5$ є границею функції $y=2x+3$ в точці $x_0=1$. ●

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}}\frac{9x^2-1}{3x-1}=2$.

Розв'язання. Функція $y=\frac{9x^2-1}{3x-1}$ при $x\neq\frac{1}{3}$ збігається з функцією $y=3x+1$. А оскільки значення границі функції в точці не залежить від того, визначена чи не визначена функція в цій точці, то достатньо показати, що $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}}(3x+1)=2$.

Розглянемо нерівність $|(3x+1)-2|<\varepsilon$, де ε — деяке додатне число. Після перетворень отримуємо $\left|x-\frac{1}{3}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. Тепер зрозуміло, як можна вибрати δ. Візьмемо $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$. Тоді з умови $0<\left|x-\frac{1}{3}\right|<\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ випливає, що $|3x-1|<\varepsilon$. Звідси $|(3x+1)-2|<\varepsilon$. Тим самим доведено, що $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}}(3x+1)=2$. ●

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що функція $f(x)=\frac{|x|}{x}$ не має границі в точці $x_0=0$.

Розв'язання. Припустимо, що границя функції f у точці $x_0=0$ існує і дорівнює a. Покажемо, що, наприклад, для

$\varepsilon = 1$ неможливо підібрати таке $\delta > 0$, щоб з нерівностей $0 < |x - 0| < \delta$ випливала нерівність $\left|\frac{|x|}{x} - a\right| < 1$.

Якщо $0 < x < \delta$, то нерівність $\left|\frac{|x|}{x} - a\right| < 1$ стає такою: $|1 - a| < 1$. Звідси $0 < a < 2$.

Якщо $-\delta < x < 0$, то нерівність $\left|\frac{|x|}{x} - a\right| < 1$ стає такою: $|-1 - a| < 1$. Звідси $-2 < a < 0$.

Оскільки не існує значень a, які б задовольняли кожну з подвійних нерівностей $0 < a < 2$ і $-2 < a < 0$, то функція f у точці $x_0 = 0$ не має границі. ●

Вправи

3.1.• За допомогою означення границі функції в точці доведіть рівність:

1) $\lim\limits_{x \to -1} (2x + 1) = -1$;
2) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$;
3) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = -5$.

3.2.• За допомогою означення границі функції в точці доведіть рівність:

1) $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 2) = 8$;
2) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$;
3) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = -2$.

3.3.• Доведіть, що $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$, де c — деяке число.

3.4.•• Доведіть, що $\lim\limits_{x \to x_0} (kx + b) = kx_0 + b$.

3.5.•• Доведіть, що функція $f(x) = \frac{x - 2}{|x - 2|}$ не має границі в точці $x_0 = 2$.

3.6.•• Доведіть, що функція $f(x) = \frac{|x + 1|}{x + 1}$ не має границі в точці $x_0 = -1$.

4. Теорема про арифметичні дії з границями функцій у точці

Знаходити границю функції в точці за допомогою означення границі — задача трудомістка. Полегшити процес пошуку границі дозволяє теорема про арифметичні дії з границями функцій [1].

Теорема 4.1 (про арифметичні дії з границями функцій). ***Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають границю в точці x_0, то функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x)\,g(x)$ також мають границю в точці x_0, причому***

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_0}(f(x)\,g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Якщо, крім цього, границя функції $y = g(x)$ у точці x_0 відмінна від нуля, то функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також має границю в точці x_0, причому

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

З доведенням теореми ви можете ознайомитися, наприклад, за підручником «Алгебра і початки аналізу. Підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики»[2], п. 2.

Фактично теорема 4.1 складається з чотирьох теорем, які називають теоремами про границю суми, границю різниці, границю добутку та границю частки.

---

[1] У теоремі розглядаються функції, що визначені в одних і тих самих точках деякого проколотого δ-околу точки x_0.

[2] А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Алгебра і початки аналізу. Підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики. — Харків: Гімназія, 2011. Далі посилатимемося на цей підручник «Алгебра-11 з поглибленим вивченням математики».

Наслідок. ***Якщо функція f має границю в точці x_0 і k — довільна стала, то функція $y = kf(x)$ також має границю в точці x_0, причому***

$$\lim_{x \to x_0} kf(x) = k \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Справедливість наслідку випливає з теореми про границю добутку і ключової задачі 3.3.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$.

Розв'язання. З ключової задачі 3.4 випливає, що $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$. Тоді, якщо функцію $y = x^2$ подати у вигляді $y = x \cdot x$, то можна застосувати теорему про границю добутку. Маємо:

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = \lim_{x \to x_0} (x \cdot x) = \lim_{x \to x_0} x \cdot \lim_{x \to x_0} x = x_0^2. \bullet$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 4) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 - \lim\limits_{x \to 2} 4 = 2^2 - 4 = 0$, то не можна застосувати теорему про границю частки до функції $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$. Перетворимо вираз $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$. Маємо:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2},$$

де $x \neq 2$ та $x \neq -2$.

Розглянемо функцію $g(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$. Оскільки функції f і g відрізняються лише поведінкою в точці $x_0 = 2$, то $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} g(x)$. Використовуючи теорему про арифметичні дії з границями функцій, отримуємо:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x \to 2}(x-3)}{\lim\limits_{x \to 2}(x+2)} = \frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}. \bullet$$

ПРИКЛАД 3 Знайдіть $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$, де

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ якщо } x \neq \dfrac{1}{2}, \\ 3, \qquad\quad \text{якщо } x = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $g(x) = x^2 - 2x$. Оскільки в будь-якому проколотому δ-околі точки $x_0 = \dfrac{1}{2}$ функції f і g збігаються (рис. 4.1), то достатньо знайти $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (x^2 - 2x)$. Використовуючи теорему про арифметичні дії з границями функцій, запишемо:

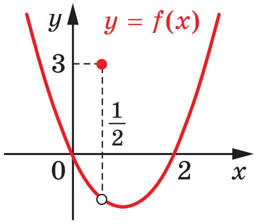


Рис. 4.1

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} (x^2 - 2x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} x^2 - \lim_{x \to \frac{1}{2}} 2x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}.$$

Вправи

4.1.° Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 - 3x - 1)$;
2) $\lim\limits_{x \to -1} x^4$;
3) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 3x - 2)$;
4) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x - 1}{3x - 2}$;
5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x^2 + 2x - 1}$;
6) $\lim\limits_{x \to -2} \left(x^2 - \dfrac{1}{x} + 2x - 3\right)$.

4.2.° Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 + 3x + 5)$;
2) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 3x^2 + 2x + 2)$;
3) $\lim\limits_{x \to -2} (2x^3 - 3x^2 + 6)$;
4) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{7x - 5}{10 + 2x}$;
5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$;
6) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 + 1}{(x - 2)^{20}}$.

4.3.• Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$;

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 8}$;

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^4 - 5x^2 - 12x - 4}{x^2 - 4}$;

4) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^5 + 1}{x + 1}$.

4.4.• Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$;

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^4 - (1 + 4x)}{x^2 + x^4}$;

4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$.

4.5.• Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{3}{1 - x^3} \right)$;

2) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2}{x^2 - 2x} - \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)$.

4.6.• Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x \to -3} \left(\dfrac{1}{x + 3} + \dfrac{6}{x^2 - 9} \right)$;

2) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2}{2x^2 - 5x + 2} + \dfrac{x - 4}{3(x^2 - 3x + 2)} \right)$.

4.7.• Знайдіть $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, де $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & \text{якщо } x \neq 0, \\ -1, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$

4.8.• Знайдіть $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, де $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x, & \text{якщо } x \neq 3, \\ 2, & \text{якщо } x = 3. \end{cases}$

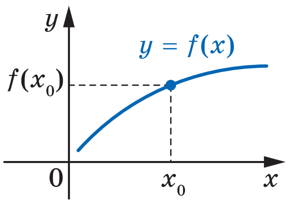
4.9.•• Знайдіть $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^m + 1}{x^n + 1}$, де m і n — непарні натуральні числа.

4.10.•• Знайдіть $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$, де m і n — натуральні числа.

5. Неперервність функції в точці. Властивості неперервних функцій

У пункті 2 ви отримали уявлення про функції, неперервні в точці. Розглянемо це поняття глибше і детальніше.

На рисунку 5.1 зображено графіки функцій f і g, які визначені в точці x_0 і мають границю в цій точці.



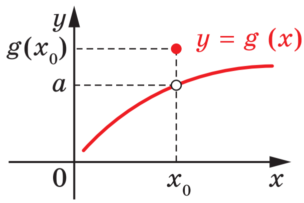


Рис. 5.1

Для функції g маємо: $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \neq g(x_0)$. Для функції f можна записати: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Означення. **Якщо виконується рівність $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функцію f називають неперервною в точці x_0.**

Якщо в деякому δ-околі точки x_0 функція f визначена лише в точці x_0 (рис. 5.2), то границю такої функції в точці x_0 не означають. Тому рівність $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ перевірити неможливо. Проте домовилися і таку функцію f вважати неперервною в точці x_0.

Наприклад, функція $y = \sqrt{-x^2}$ є неперервною в точці $x_0 = 0$, а функція $y = \sqrt{-\sin^2 x}$ є неперервною в кожній з точок виду $x_0 = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

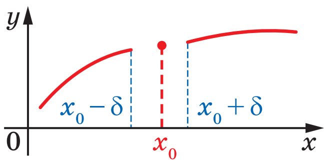


Рис. 5.2

З теореми про арифметичні дії з границями функцій випливає, що коли $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ і $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$, то:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = f(x_0) + g(x_0)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = f(x_0) - g(x_0)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)\, g(x)) = f(x_0)\, g(x_0)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$ за умови, що $g(x_0) \neq 0$.

Використовуючи ці рівності, можна довести таку теорему.

Теорема 5.1 (про арифметичні дії з неперервними функціями). ***Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервними є і функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x)\, g(x)$ і $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (остання за умови, що $g(x_0) \neq 0$).***

Використовуючи теорему про арифметичні дії з неперервними функціями, маємо, що кожна з функцій $y = f(x)$ і $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$, $g(x)$ — многочлени[1], є неперервною.

Зауважимо, що коли функція неперервна на $\mathbb{R}$, то вона неперервна на будь-якому числовому проміжку (рис. 5.3).

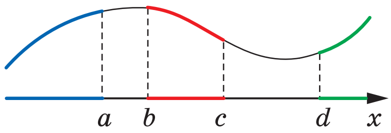


Рис. 5.3

Можна показати[2], що для будь-якого $x_0 \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$. Це означає, що функція $y = \sin x$ неперервна.

[1] Функцію виду $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени, називають **раціональною**.

[2] З доведенням цього факту ви можете ознайомитися в оповіданні на с. 42.

Нехай функції f і g визначені на деяких проміжках. З наочних міркувань очевидно, що коли графіки функцій f і g є рівними фігурами і функція f неперервна, то функція g також неперервна.

У 10 класі було показано, що графік функції $y = \cos x$ можна отримати з графіка функції $y = \sin x$ у результаті паралельного перенесення на вектор з координатами $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ (рис. 5.4). Таким чином, неперервність функції $y = \cos x$ випливає з неперервності функції $y = \sin x$.

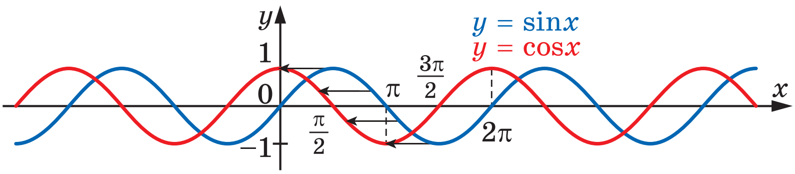


Рис. 5.4

Оскільки функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ — неперервні, то з теореми про арифметичні дії з неперервними функціями випливає, що функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ також є неперервними.

Ви знаєте, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Тому якщо оборотна функція f визначена на деякому проміжку і є неперервною, то обернена до неї функція g також буде неперервною.

Як було встановлено вище, функція $y = x^2$ є неперервною. Тоді й оборотна функція $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, є неперервною. Отже, обернена до неї функція $g(x) = \sqrt{x}$ також є неперервною.

Міркуючи аналогічно, доходимо висновку, що функція $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є неперервною. Так само встановлюємо, що неперервними є і функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$.

ПРИКЛАД 1 З'ясуйте, чи є функція

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4}, \text{ якщо } x\neq 4,\\ 2, \qquad\quad \text{якщо } x=4,\end{cases}$$

неперервною в точці $x_0 = 4$.

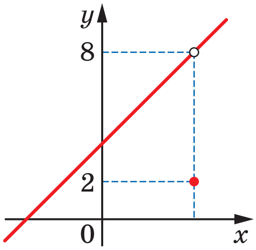


Рис. 5.5

Розв'язання. Маємо:

$$f(4) = 2.$$

Обчислимо $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$. Запишемо:

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=8.$$

Отримали, що $\lim\limits_{x\to 4} f(x)\neq f(4)$. Отже, функція f у точці $x_0 = 4$ не є неперервною. Отриманий висновок проілюстровано на рисунку 5.5. ●

Розглянемо низку важливих властивостей неперервних функцій[1].

Теорема 5.2 (про неперервність складеної функції). ***Якщо функція $t = g(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y = f(t)$ неперервна в точці t_0, де $t_0 = g(x_0)$, то складена функція $y = f(g(x))$ є неперервною в точці x_0.***

Наприклад, функція $t = 2x - 1$ неперервна в точці $x_0 = 5$, функція $y=\sqrt{t}$ неперервна в точці $t_0 = 2\cdot 5 - 1 = 9$. Тоді складена функція $y=\sqrt{2x-1}$ є неперервною в точці $x_0 = 5$. Міркуючи аналогічно, можна показати, що складена функція $y=\sqrt{2x-1}$ є неперервною в кожній точці своєї області визначення.

Ще приклади. Функції $y = \sin x$ і $y = 5x$ є неперервними. Тоді складена функція $y = \sin 5x$ також неперервна.

Кожна з функцій $y=\sqrt{x}$ і $y = x^2$ є неперервною. Тоді складена функція $y=\sqrt{x^2}$, тобто функція $y = |x|$, також є неперервною.

[1] Доведення цих властивостей виходить за межі шкільної програми.

ПРИКЛАД 2 Обчисліть $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3}$.

Розв'язання

Оскільки функція $f(x) = \sqrt{2x+1} - 3$ є неперервною, то $\lim\limits_{x \to 4} \left(\sqrt{2x+1} - 3\right) = \sqrt{2 \cdot 4 + 1} - 3 = 0$. Отже, застосувати теорему про границю частки не можна.

Перетворимо вираз, який стоїть під знаком границі:

$$\frac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3} = \frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)} = \frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(2x+1)-9} =$$

$$= \frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2(x-4)} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2x+1}+3\right).$$

Оскільки функція $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2x+1}+3\right)$ є неперервною, то можна записати: $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2x+1}+3\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2 \cdot 4+1}+3\right) = 3$. ●

Теорема 5.3 (теорема Больцано–Коші). ***Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$ і на кінцях цього проміжку набуває значень різних знаків, то існує така точка $c \in (a; b)$, що $f(c) = 0$.***

Чеський математик, філософ і логік. Очолював кафедру історії релігії в Празькому університеті. При житті надрукував (анонімно) лише 5 невеликих математичних творів, основну частину його рукописної спадщини вчені досліджували вже після його смерті. Трактат «Учення про функції», написаний у 1830 р., побачив світ тільки через 100 років. У ньому Больцано, за багато років до Вейєрштрасса і Коші, формулює і доводить низку положень математичного аналізу. У роботі «Парадокси нескінченності» Больцано опрацьовував питання потужності нескінченних множин; у роботі «Наукознавство» висунув низку ідей, які передували математичній логіці.

Бернард Больцано (1781–1848)

Ця теорема є наочно очевидною. Справді, якщо точки, які лежать у різних півплощинах відносно осі абсцис, з'єднати неперервною кривою, то ця крива обов'язково перетне вісь абсцис (рис. 5.6).

Наслідок. ***Якщо функція неперервна і не має нулів на деякому проміжку I, то вона на цьому проміжку зберігає знак*** (рис. 5.7).

Доведення. Припустимо, що дана функція f на проміжку I не зберігає знак, тобто існують такі $a \in I$ і $b \in I$, що числа $f(a)$ і $f(b)$ різних знаків (рис. 5.6). Тоді за теоремою Больцано–Коші існує точка $c \in (a; b) \subset I$ така, що $f(c) = 0$. Отримали суперечність. ▲

Нагадаємо, що цей наслідок лежить в основі методу інтервалів для розв'язування нерівностей.

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що рівняння $x^5 + 2x^2 - 11 = 0$ має корінь.

Розв'язання. Розглянемо неперервну функцію $f(x) = x^5 + 2x^2 - 11$.

Маємо: $f(0) = -11$, $f(2) = 29$. Отже, за теоремою Больцано–Коші на відрізку $[0; 2]$ рівняння $f(x) = 0$ має корінь. ●

Не будь-яка функція, визначена на відрізку $[a; b]$, досягає на цьому проміжку своїх найбільшого і найменшого значень. Це ілюструє рисунок 5.8.

Огюстен Луї Коші (1789–1887)

Французький математик. Опублікував понад 800 робіт з арифметики, теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теоретичної і небесної механіки, математичної фізики; займався також дослідженнями з тригонометрії, теорії пружності, оптики, астрономії. Був членом Паризької академії наук, Лондонського королівського товариства і майже всіх академій наук світу.

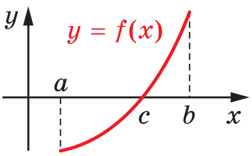


Рис. 5.6

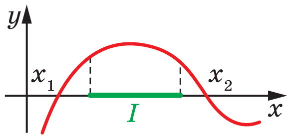


Рис. 5.7

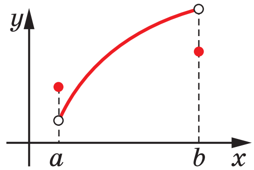
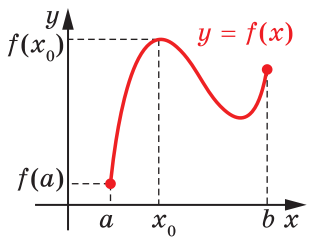


Рис. 5.8

Проте для неперервних функцій має місце така теорема.

Теорема 5.4 (теорема Вейєрштрасса). ***Якщо функція неперервна на відрізку [a; b], то вона на цьому відрізку набуває своїх найбільшого і найменшого значень.***

Ця теорема наочно очевидна. Якщо дві точки на координатній площині з'єднати неперервною кривою, то на цій кривій знайдуться точки з найбільшою і найменшою ординатами (рис. 5.9).



$$\max_{[a;b]} f(x) = f(x_0)$$

$$\min_{[a;b]} f(x) = f(a)$$

Рис. 5.9

Зазначимо, що коли в теоремі Вейєрштрасса відрізок $[a; b]$ замінити проміжком іншого виду, наприклад інтервалом $(a; b)$, то ця теорема може не виконуватись. Так, функція $y = x$, яка є неперервною на проміжку $(0; 1)$, не досягає на ньому своїх найбільшого і найменшого значень.

Німецький математик, член Берлінської академії наук, Паризької академії наук, почесний член Петербурзької академії наук. Одним з найважливіших його здобутків є система логічного обґрунтування математичного аналізу, заснована на побудованій ним теорії дійсних чисел. Вейєрштрасс приділяв значну увагу застосуванню математики до механіки та фізики і заохочував до цього своїх учнів.

Карл Теодор Вільгельм Вейєрштрасс (1815–1897)

Покажемо, як поняття неперервності допомагає знаходити область значень функції.

Нехай про функцію f відомо, що $\min\limits_{D(f)} f(x) = 1$, $\max\limits_{D(f)} f(x) = 5$.

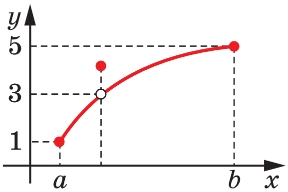


Рис. 5.10

Чи правильно, що $E(f) = [1; 5]$? Рисунок 5.10 показує, що відповідь на це запитання негативна: число 3 не належить області значень цієї функції.

Але якщо областю визначення неперервної функції є деякий проміжок, то відповідь на поставлене запитання буде позитивною.

Теорема 5.5. ***Якщо областю визначення неперервної функції f є деякий проміжок і $\min\limits_{D(f)} f(x) = a$, $\max\limits_{D(f)} f(x) = b$ і $a \neq b$, то $E(f) = [a; b]$.***

Доведення. Нехай числа x_1 і x_2 такі, що $f(x_1) = a$, $f(x_2) = b$ і $x_1 < x_2$ (випадок, коли $x_2 < x_1$, розглядають аналогічно). Розглянемо довільне число $c \in (a; b)$, тобто $a < c < b$. Доведемо, що існує точка $x_0 \in D(f)$, для якої $f(x_0) = c$. Тим самим буде показано, що $c \in E(f)$.

Розглянемо функцію $g(x) = f(x) - c$. Функція g є неперервною на $D(g) = D(f)$, отже, вона неперервна на відрізку $[x_1; x_2]$.

Маємо: $g(x_1) = f(x_1) - c = a - c < 0$;
$g(x_2) = f(x_2) - c = b - c > 0$.

Отже, згідно з теоремою Больцано–Коші існує точка $x_0 \in (x_1; x_2)$ така, що $g(x_0) = 0$, тобто $f(x_0) - c = 0$; $f(x_0) = c$. ▲

ПРИКЛАД 4 Знайдіть область значень функції

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^4}.$$

Розв'язання. Маємо: $\frac{x^2}{1 + x^4} \geqslant 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $f(0) = 0$, то $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 0$.

Застосувавши нерівність Коші, запишемо:

$$\frac{x^2}{1 + x^4} \leqslant \frac{x^2}{2\sqrt{1 \cdot x^4}} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $f(1)=\frac{1}{2}$, то $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)=\frac{1}{2}$.

Функція f неперервна на $\mathbb{R}$. З теореми 5.5 випливає, що $E(f)=\left[0;\frac{1}{2}\right]$. ●

Вправи

5.1.° Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x}$;
2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\sin x$;
3) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{4}}\operatorname{tg} x$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x$;
5) $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{arctg} x$.

5.2.° Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x}$;
2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\cos x$;
3) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\operatorname{ctg} x$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\arccos x$;
5) $\lim\limits_{x\to -1}\operatorname{arcctg} x$.

5.3.° Поясніть, чому є неперервною функція:

1) $f(x)=\sqrt{x}+3$;
2) $f(x)=\sqrt{x}-x^2$;
3) $f(x)=\sqrt{5x+2}$;
4) $f(x)=\sqrt{x}\sin x$;
5) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

5.4.° Поясніть, чому є неперервною функція:

1) $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$;
2) $f(x)=\sin x+\operatorname{ctg} x$;
3) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\cos x}$;
4) $f(x)=\operatorname{ctg} 5x$.

5.5.° Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{2x-1}$;
2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sin 3x$;
3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{5}}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{5}\right)$;
4) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\cos^2 x$.

5.6.° Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-3x}$;
2) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\cos 4x$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+1}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5.7.• Чи є неперервною в точці x_0 функція:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{якщо } x\neq 3,\\ 6, & \text{якщо } x=3,\end{cases}$ $x_0=3$;

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{\cos x}, & \text{якщо } x\neq \dfrac{\pi}{2},\\ 1, & \text{якщо } x=\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ $x_0=\dfrac{\pi}{2}$?

5.8.• Чи є неперервною в точці x_0 функція:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{x+1}, & \text{якщо } x\neq -1,\\ 0, & \text{якщо } x=-1,\end{cases}$ $x_0=-1$;

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{\sin x}, & \text{якщо } x\neq \pi,\\ -2, & \text{якщо } x=\pi,\end{cases}$ $x_0=\pi$?

5.9.• Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

5.10.• Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x}-3x}{3\sqrt{x}-2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{1-\sqrt{x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

5.11.• Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2+x}{1-\sqrt{x^2-3}}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$.

5.12.• Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

5.13.• Доведіть, що рівняння має корінь:

1) $x^6 + 2x - 13 = 0$; 2) $3\sin x = 2x - 1$.

5.14.• Доведіть, що рівняння має корінь:

1) $x^3 + 3x - 8 = 0$; 2) $2\cos x = x^2 + 4x - 6$.

5.15.• Знайдіть область значень функції:

1) $y = \sin x + 2$; 2) $y = \cos x - 3$; 3) $y = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$.

5.16.• Знайдіть область значень функції:

1) $y = \sin x - 4$; 2) $y = 3 + \cos x$; 3) $y = \pi - \arccos x$.

5.17.•• Знайдіть область значень функції $y = \dfrac{x^2}{9x^4+1}$.

5.18.•• Знайдіть область значень функції $y = \dfrac{x^2}{4x^4+3x^2+1}$.

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Перша чудова границя

Покажемо, що функція $y = \sin x$ є неперервною. Для цього доведемо таке допоміжне твердження.

Лема 5.1. ***Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $|\sin x| \leqslant |x|$.***

Доведення. Якщо $x = 0$ або $|x| \geqslant 1$, то нерівність, що доводиться, є очевидною.

Нехай $x \in (0; 1)$. На рисунку 5.11 точку P_x отримано в результаті повороту точки $P_0\,(1; 0)$ на кут x радіан. Оскільки $x \in (0; 1)$, тобто $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, то точка P_x знаходиться в першій чверті.

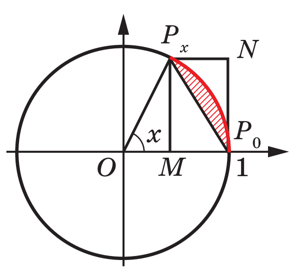


Рис. 5.11

Площа трикутника P_xOP_0 менша від площі сектора P_xOP_0. Маємо:

$$S_{\Delta P_xOP_0} = \frac{1}{2} OP_0^2 \sin x = \frac{1}{2} \sin x;$$

$$S_{\text{сект } P_xOP_0} = \frac{1}{2} OP_0^2 \, x = \frac{1}{2} x.$$

Тоді $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x$. Отримуємо $\sin x < x$.

Нехай $x \in (-1;\ 0)$. Тоді $-x \in (0;\ 1)$. Можна записати: $\sin(-x) < -x$. Звідси $\sin x > x$.

Отже, якщо $x \in (0;\ 1)$, то $0 < \sin x < x$. Тому $|\sin x| < |x|$; якщо $x \in (-1;\ 0)$, то $0 > \sin x > x$. Тому $|\sin x| < |x|$. ▲

Покажемо, що число $\sin x_0$ є границею функції $y = \sin x$ у точці x_0, де $x_0 \in \mathbb{R}$.

Використовуючи нерівність леми 5.1, маємо:

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot \left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0|.$$

Нехай ε — довільне додатне число. Оскільки $|\sin x - \sin x_0| \leqslant |x - x_0|$, то з нерівностей $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ випливає, що $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$.

Якщо покласти $\delta = \varepsilon$, то отримаємо: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що з нерівностей $0 < |x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$.

Таким чином, функція $y = \sin x$ є неперервною в кожній точці x_0, а отже, ця функція неперервна на $\mathbb{R}$.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Ця функція не визначена в точці $x_0 = 0$. Проте в цій точці існує границя функції f. Доведемо, що має місце така рівність:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \qquad (1)$$

Лема 5.2. ***Якщо*** $|x| < 1$ ***і*** $x \neq 0$, ***то***

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.$$

Доведення. Нехай $x \in (0; 1)$. Знову звернемося до рисунка 5.11. Побудуємо прямокутник MP_xNP_0, для якого відрізок P_xP_0 є діагоналлю.

Оскільки $P_xM = \sin x$ і $OM = \cos x$, то

$$S_{\Delta P_xNP_0} = \frac{1}{2}\sin x\,(1 - \cos x) = \sin x \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Оскільки $x \in (0; 1)$, то $\sin x > 0$. Тоді за лемою 5.1 отримуємо: $\sin x \leqslant x$; $\sin^2 \frac{x}{2} \leqslant \left(\frac{x}{2}\right)^2$.

Отже, $S_{\Delta P_xNP_0} = \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \leqslant x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{4}$.

Очевидно, що площа заштрихованого сегмента менша від площі трикутника P_xNP_0.

Маємо: $S_{\text{сегмента}} = S_{\text{сект } P_xOP_0} - S_{\Delta\, P_xOP_0} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x$.

Тепер можна записати: $0 < \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x < \frac{x^3}{4}$.

Звідси з урахуванням того, що $x \in (0; 1)$, отримуємо:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.$$

Оскільки функції $y = 1 - \frac{\sin x}{x}$ і $y = \frac{x^2}{2}$ є парними, то остання подвійна нерівність виконується також для всіх x з проміжку $(-1; 0)$. ▲

Тепер доведемо рівність (1).

Використовуючи лему 5.2, для $|x| < 1$ і $x \neq 0$ маємо:

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| = 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2} < x^2 < |x| = |x - 0|,$$

тобто

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x - 0|.$$

Нехай ε — довільне додатне число.

Якщо $0 < \varepsilon < 1$, то покладемо $\delta = \varepsilon$. Тоді з нерівності $0 < |x - 0| < \delta$ випливатиме $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x - 0| < \delta = \varepsilon$.

Якщо $\varepsilon \geqslant 1$, то за δ оберемо будь-яке число з проміжку $(0; 1)$. Оскільки у цьому випадку $\delta < \varepsilon$, то з нерівності $0 < |x - 0| < \delta$ випливатиме $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x - 0| < \delta < \varepsilon$.

Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що з нерівності $0 < |x - 0| < \delta$ випливає нерівність

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

Це означає, що $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Цю рівність називають **першою чудовою границею**. Вона показує, що при досить малих значеннях x виконується наближена рівність $\sin x \approx x$. Більш того, з леми 5.2 випливає, що коли $|x| < 1$, то виконується нерівність $|x - \sin x| < \frac{|x|^3}{2}$. Тому абсолютна похибка наближеної формули $\sin x \approx x$ не перевищує $\frac{|x|^3}{2}$. Наприклад, якщо $x = 0,1$, то $\sin 0,1 \approx 0,1$ з точністю не менше ніж $\frac{0,1^3}{2} = 0,0005$.

ПРИКЛАД 1 Обчисліть границю $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = 3 \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3.$ ●

ПРИКЛАД 2 Обчисліть границю $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Розв'язання

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$ ●

ПРИКЛАД 3 Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{x\to 0}\frac{m\cdot\frac{\sin mx}{mx}}{n\cdot\frac{\sin nx}{nx}}=\frac{m\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}}{n\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin nx}{nx}}=\frac{m}{n}.$$

ПРИКЛАД 4 Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=6\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=6\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}=\frac{6}{1^2}=6.$$

Вправи

5.19. Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x}$;
2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\sin 3x}$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\,\mathrm{tg}\,x}$;
5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 10x-\cos x}{4x^2}$;
6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 13x}{\sin^2 x}$.

6. Приріст функції. Задачі, які приводять до поняття похідної

Якщо функція є математичною моделлю реального процесу, то часто виникає потреба знаходити різницю значень цієї функції у двох точках. Наприклад, позначимо через

$f(t)$ суму коштів, які накопичилися на депозитному[1] рахунку вкладника до моменту часу t. Тоді різниця $f(t) - f(t_0)$, де $t > t_0$, показує прибуток, який отримає вкладник за час $t - t_0$.

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай x_0 — фіксована точка з області визначення функції f.

Якщо x — довільна точка області визначення функції f така, що $x \neq x_0$, то різницю $x - x_0$ називають **приростом аргументу функції f у точці** x_0 і позначають Δx (читають: «дельта ікс»)[2]. Маємо:

$$\Delta x = x - x_0. \text{ Звідси}$$

$$x = x_0 + \Delta x.$$

Говорять, що аргумент **отримав приріст** Δx **у точці** x_0.

Зазначимо, що приріст аргументу може бути як додатним, так і від'ємним: якщо $x > x_0$, то $\Delta x > 0$; якщо $x < x_0$, то $\Delta x < 0$.

Якщо аргумент у точці x_0 отримав приріст Δx, то значення функції f змінилося на величину

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Цю різницю називають **приростом функції f у точці** x_0 і позначають Δf (читають: «дельта еф»).

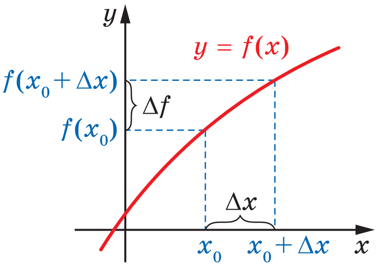


Рис. 6.1

Маємо:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ або}$$

$$\Delta f = f(x) - f(x_0).$$

Для приросту функції $y = f(x)$ також прийнято позначення Δy, тобто

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \text{ або}$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Приріст Δx аргументу в точці x_0 і відповідний приріст Δf функції показано на рис. 6.1.

[1] Депозит (банківський вклад) — кошти, які вкладник передає банку на деякий строк, за що банк виплачує вкладнику проценти.

[2] Говорячи про приріст аргументу функції f у точці x_0, тут і далі будемо припускати, що в будь-якому інтервалі $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ є точки області визначення функції f, відмінні від x_0.

Зазначимо, що для фіксованої точки x_0 приріст функції f у точці x_0 є функцією з аргументом Δx.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть приріст функції $y = x^2$ у точці x_0, який відповідає приросту Δx аргументу.

Розв'язання. Маємо:

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Відповідь: $2x_0\Delta x + \Delta x^2$.

Задача про миттєву швидкість

Нехай автомобіль, рухаючись прямолінійною ділянкою дороги в одному напрямку, за 2 год подолав шлях у 120 км. Тоді його середня швидкість руху дорівнює $v_{сер} = \frac{120}{2} =$ $= 60$ (км/год).

Знайдена величина дає неповне уявлення про характер руху автомобіля: на одних ділянках шляху автомобіль міг пересуватися швидше, на інших — повільніше, інколи міг зупинятися.

Разом з цим у будь-який момент часу спідометр автомобіля показував деяку величину — швидкість у даний момент часу. Значення швидкості в різні моменти більш повно характеризує рух автомобіля.

Розглянемо задачу про пошук швидкості в даний момент часу на прикладі рівноприскореного руху.

Нехай матеріальна точка рухається по координатній прямій і через час t після початку руху має координату $s(t)$. Тим самим задано функцію $y = s(t)$, яка дозволяє визначити положення точки в будь-який момент часу. Тому цю функцію називають **законом руху** точки.

З курсу фізики відомо, що закон рівноприскореного руху задається формулою $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, де s_0 — координата точки на початку руху (при $t = 0$), v_0 — початкова швидкість, a — прискорення.

Нехай, наприклад, $s_0 = 0$, $v_0 = 1$ м/с, $a = 2$ м/с^2. Тоді $s(t) = t^2 + t$.

Зафіксуємо який-небудь момент часу t_0 і надамо аргументу в точці t_0 приріст Δt, тобто розглянемо проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$. За цей проміжок часу матеріальна точка здійснить переміщення Δs, де

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \underbrace{(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t)}_{s(t_0+\Delta t)} - \underbrace{(t_0^2 + t_0)}_{s(t_0)} =$$

$$= t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t - t_0^2 - t_0 = 2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2.$$

Середня швидкість $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ руху точки за проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ дорівнює відношенню

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t_0 + 1 + \Delta t,$$

тобто $v_{\text{сер}}(\Delta t) = 2t_0 + 1 + \Delta t$.

Позначення для середньої швидкості $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ наголошує, що при заданому законі руху $y = s(t)$ і фіксованому моменті часу t_0 значення середньої швидкості залежить тільки від Δt.

Якщо розглядати досить малі проміжки часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$, то з практичних міркувань зрозуміло, що середні швидкості $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ за такі проміжки часу мало відрізняються одна від одної, тобто величина $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ майже не змінюється. Чим менше Δt, тим ближчим є значення середньої швидкості до деякого числа, що визначає швидкість у момент часу t_0. Іншими словами, якщо при $\Delta t \to 0$ значення $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ прямують до числа $v(t_0)$, то число $v(t_0)$ називають **миттєвою швидкістю** в момент часу t_0.

У нашому прикладі, якщо $\Delta t \to 0$, то значення виразу $2t_0 + 1 + \Delta t$ прямують до числа $2t_0 + 1$, яке є значенням миттєвої швидкості $v(t_0)$, тобто

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0}(2t_0 + 1 + \Delta t) = 2t_0 + 1.$$

Цей приклад показує, що коли матеріальна точка рухається за законом $y = s(t)$, то її миттєву швидкість у момент часу t_0 визначають за допомогою формули

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{сер}}(\Delta t), \text{ тобто}$$

$$\boxed{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}}$$

Задача про дотичну до графіка функції

Відоме означення дотичної до кола як прямої, яка має з колом тільки одну спільну точку, незастосовне у випадку довільної кривої.

Наприклад, вісь ординат має з параболою $y = x^2$ тільки одну спільну точку (рис. 6.2). Проте інтуїція підказує, що неприродно вважати цю пряму дотичною до вказаної параболи. Разом з тим у курсі алгебри ми нерідко казали, що парабола $y = x^2$ дотикається до осі абсцис у точці $x_0 = 0$.

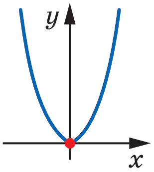


Рис. 6.2

Уточнимо наочне уявлення про дотичну до графіка функції.

Нехай M — деяка точка, яка лежить на параболі $y = x^2$. Проведемо пряму OM, яку назвемо січною (рис. 6.3). Уявимо собі, що точка M, рухаючись по параболі, наближається до точки O. При цьому січна OM буде повертатися навколо точки O. Тоді кут між прямою OM і віссю абсцис ставатиме все меншим і меншим, і січна OM прагнутиме зайняти положення осі абсцис.

Пряму, положення якої прагне зайняти січна OM при наближенні точки M до точки O, називатимемо дотичною до параболи $y = x^2$ у точці O.

Розглянемо графік деякої неперервної в точці x_0 функції f і точку M_0 $(x_0; f(x_0))$. У точці x_0 надамо аргументу приріст Δx і розглянемо на графіку точку M $(x; f(x))$, де $x = x_0 + \Delta x$ (рис. 6.4).

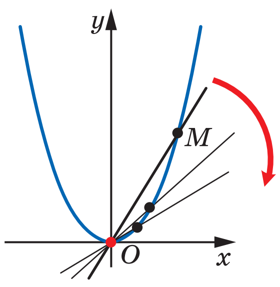


Рис. 6.3

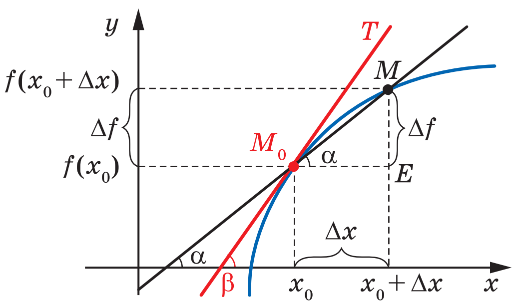


Рис. 6.4

З рисунка видно, що коли Δx стає все менше і менше, то точка M, рухаючись по графіку, наближається до точки M_0. Якщо при $\Delta x \to 0$ січна M_0M прагне зайняти положення деякої прямої (на рисунку 6.4 це пряма M_0T), то таку пряму називають **дотичною до графіка функції f у точці M_0**.

Нехай січна M_0M має рівняння $y = kx + b$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α. Як відомо, кутовий коефіцієнт k прямої M_0M дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$, тобто $k = \operatorname{tg}\alpha$. Очевидно, що $\angle MM_0E = \alpha$ (рис. 6.4). Тоді з $\Delta\, MM_0E$ отримуємо

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ME}{M_0E} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Уведемо позначення $k_{\text{січн}}(\Delta x)$ для кутового коефіцієнта січної M_0M, тим самим наголошуючи, що для даної функції f і фіксованої точки x_0 кутовий коефіцієнт січної M_0M визначається через приріст Δx аргументу.

Маємо: $k_{\text{січн}}(\Delta x) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Нехай дотична M_0T утворює з додатним напрямом осі абсцис кут β ($\beta \neq 90°$). Тоді її кутовий коефіцієнт $k(x_0)$ дорівнює $\operatorname{tg}\beta$.

Природно вважати, що чим менше Δx, тим менше значення кутового коефіцієнта січної відрізняється від значення кутового коефіцієнта дотичної. Іншими словами, якщо $\Delta x \to 0$, то $k_{\text{січн}}(\Delta x) \to k(x_0)$. Тоді кутовий коефіцієнт дотичної визначають за допомогою формули

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} k_{\text{січн}}(\Delta x), \text{ тобто}$$

$$\boxed{\boldsymbol{k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}}$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть формулу для обчислення кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2$ у точці з абсцисою x_0. Який кут з додатним напрямом осі абсцис утворює дотична, проведена до цього графіка в точці з абсцисою $x_0 = -\dfrac{1}{2}$?

Розв'язання. Маємо:

$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = -(x_0+\Delta x)^2 - (-x_0^2) = -2x_0\Delta x - \Delta x^2$.

Тоді, скориставшись формулою для обчислення кутового коефіцієнта дотичної, можна записати:

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x_0\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(-2x_0 - \Delta x).$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то значення виразу $-2x_0 - \Delta x$ прямують до числа $-2x_0$, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-2x_0 - \Delta x) = -2x_0$. Звідси $k(x_0) = -2x_0$.

Ця формула дозволяє обчислити кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = -x^2$ у будь-якій точці, зокрема в точці з абсцисою $x_0 = -\frac{1}{2}$.

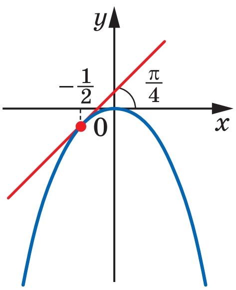


Рис. 6.5

Маємо: $k\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

Нехай дотична до параболи в точці з абсцисою $x_0 = -\frac{1}{2}$ утворює кут α $(0 \leqslant \alpha < \pi)$ з додатним напрямом осі абсцис. Тоді її кутовий коефіцієнт дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$. Вище ми встановили, що $k\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$. Звідси $\operatorname{tg}\alpha = 1$. Оскільки $0 \leqslant \alpha < \pi$, то $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (рис. 6.5). ●

Вправи

6.1.° Знайдіть приріст функції f у точці x_0, якщо:
1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}2$;
2) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$;
3) $f(x) = \frac{6}{x}$, $x_0 = 1{,}2$, $\Delta x = -0{,}3$.

6.2.° Знайдіть приріст функції f у точці x_0, якщо:
1) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}3$;
2) $f(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0{,}8$.

6.3.° Для функції $f(x) = x^2 - 3x$ виразіть приріст Δf функції f у точці x_0 через x_0 і x. Знайдіть Δf, якщо: 1) $x_0 = 3$, $x = 2{,}5$; 2) $x_0 = -2$, $x = -1$.

6.4.° Для функції $f(x) = x^3$ виразіть приріст Δf функції f у точці x_0 через x_0 і x. Знайдіть Δf, якщо $x_0 = 0{,}5$; $x = 0{,}4$.

6.5.• Для функції $f(x) = x^2 - x$ і точки x_0 знайдіть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

6.6.• Для функції $f(x) = 5x + 1$ і точки x_0 знайдіть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

6.7.• Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 2t^2 + 3$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть миттєву швидкість матеріальної точки в момент $t_0 = 2$ с.

6.8.• Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 5t^2$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть: 1) середню швидкість тіла при зміні часу від $t_0 = 1$ с до $t_1 = 3$ с; 2) миттєву швидкість тіла в момент $t_0 = 1$ с.

6.9.• Знайдіть кутовий коефіцієнт:

1) січної графіка функції $y = x^2$, яка проходить через точки графіка з абсцисами $x_0 = 1$ і $x_1 = 1{,}6$;
2) дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці $x_0 = 1$.

6.10.• Знайдіть кутовий коефіцієнт:

1) січної графіка функції $y = x^3$, яка проходить через точки графіка з абсцисами $x_0 = 2$ і $x_1 = 1$;
2) дотичної до графіка функції $y = x^3$ у точці $x_0 = 2$.

7. Поняття похідної

У попередньому пункті, розв'язуючи дві різні задачі про миттєву швидкість матеріальної точки і про кутовий коефіцієнт дотичної, ми дійшли до однієї і тієї самої математичної моделі: границі відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

До аналогічних формул приводить розв'язання цілої низки задач фізики, хімії, біології, економіки тощо. Це свідчить про те, що розглядувана модель заслуговує на особливу увагу. Їй варто присвоїти назву, увести позначення, вивчити її властивості та навчитися їх застосовувати.

Означення. Похідною функції f у точці x_0 називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції f у точці x_0 до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну функції $y = f(x)$ у точці x_0 позначають так: $f'(x_0)$ (читають: «еф штрих від ікс нульового») або $y'(x_0)$. Тоді можна записати:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

або

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

Похідну функції f у точці x_0 можна обчислити за такою схемою:

1) надавши в точці x_0 аргументу приріст Δx, знайти відповідний приріст Δf функції:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

2) знайти відношення $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$;

3) з'ясувати, до якого числа прямує відношення $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, тобто знайти границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть похідну функції $f(x) = \dfrac{1}{x}$ у точці $x_0 = 1$.

Розв'язання. Дотримуючись вищенаведеної схеми, запишемо:

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \dfrac{1}{x_0 + \Delta x} - \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{1 + \Delta x} - \dfrac{1}{1} = \dfrac{-\Delta x}{1 + \Delta x}$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = -\dfrac{1}{1 + \Delta x}$;

3) при $\Delta x \to 0$ значення виразу $-\dfrac{1}{1 + \Delta x}$ прямують до числа -1, тобто $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(-\dfrac{1}{1 + \Delta x}\right) = -1$.

Відповідь: -1.

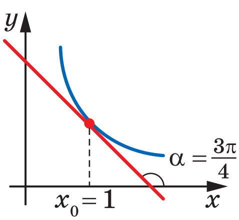


Рис. 7.1

Зазначимо, що, знайшовши значення $f'(1)$, ми тим самим знайшли кутовий коефіцієнт $k(x_0)$ дотичної, проведеної до графіка функції $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$. Він дорівнює -1, тобто $k(1) = -1$. Тоді, позначивши через α кут, утворений цією дотичною з додатним напрямом осі абсцис, можемо записати: $\operatorname{tg} \alpha = -1$. Звідси $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ (рис. 7.1).

Узагалі, можна зробити такий висновок: *кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, дорівнює похідній функції f у точці x_0*, тобто

$$\boxed{k(x_0) = f'(x_0)}$$

Ця рівність виражає **геометричний зміст похідної.**

Також зрозуміло, що *коли* $y = s(t)$ *— закон руху матеріальної точки* по координатній прямій, *то її миттєва швидкість у момент часу* t_0 *дорівнює похідній функції* $y = s(t)$ *у точці* t_0, тобто

$$\boxed{v(t_0) = s'(t_0)}$$

Ця рівність виражає **механічний зміст похідної.**

Якщо функція f має похідну в точці x_0, то цю функцію називають **диференційовною в точці** x_0.

Нехай функція f диференційовна в точці x_0. З геометричного змісту похідної випливає, що до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 можна провести *невертикальну* дотичну (рис. 7.2).

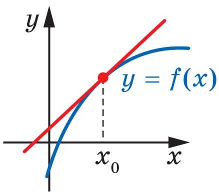


Рис. 7.2

На рисунку 7.3 зображено графіки функцій, які в точці x_0 мають розрив або «злом». До їх графіків у точці з абсцисою x_0 не можна провести дотичну. Ці функції не диференційовні в точці x_0.

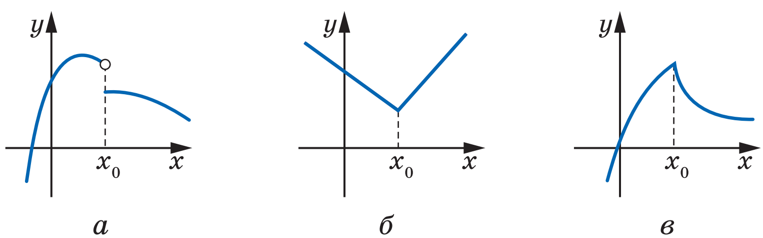


Рис. 7.3

На рисунку 7.4 зображено графіки функцій, які в точці з абсцисою x_0 мають вертикальну дотичну. Тому ці функції не диференційовні в точці x_0.

Рис. 7.4

Покажемо, наприклад, що функція $f(x) = |x|$, графік якої має «злом» у точці $x_0 = 0$, не є диференційовною в цій точці. Маємо:

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = |x_0 + \Delta x| - |x_0| =$
$= |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$;

3) у прикладі 3 пункту 3 було показано, що функція $g(t) = \dfrac{|t|}{t}$ не має границі в точці $t_0 = 0$; це означає, що не існує границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, тобто функція f не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

Теорема 7.1. ***Якщо функція f є диференційовною в точці x_0, то вона є неперервною в цій точці.***

Рис. 7.5

Доведення. Оскільки функція f диференційовна в точці x_0, то можна записати: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Маємо: $\Delta x = x - x_0$. Очевидно, що коли $\Delta x \to 0$, то $x \to x_0$. Тоді

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Маємо:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Отже, $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$. Звідси $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Це означає, що функція f є неперервною в точці x_0. ▲

Зазначимо, що неперервна в точці $x_0 = 0$ функція $f(x) = |x|$ не є диференційовною в цій точці. Цей приклад показує, що неперервність функції в точці є необхідною, але не є достатньою умовою диференційовності функції в цій точці (рис. 7.5).

Нехай M — множина точок, у яких функція f диференційовна. Кожному числу $x \in M$ поставимо у відповідність число $f'(x)$. Тим самим задано функцію з областю визначення M. Цю функцію називають **похідною функції** $y = f(x)$ і позначають f' або y'.

Якщо функція f диференційовна в кожній точці деякої множини M, то говорять, що вона **диференційовна на множині** M. Наприклад, на рисунку 7.6 зображено графік функції, диференційовної на проміжку I. На проміжку I цей графік не має розривів і зломів.

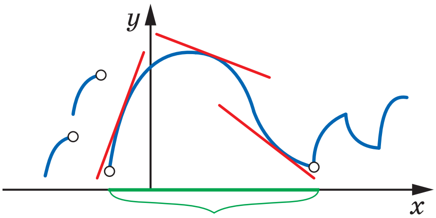


Рис. 7.6

Якщо функція f диференційовна на $D(f)$, то її називають **диференційовною**.

Знаходження похідної функції f називають **диференціюванням** функції f.

ПРИКЛАД 2 Продиференціюйте функцію $f(x) = kx + b$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f у точці x_0, де x_0 — довільна точка області визначення функції f.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{k\Delta x}{\Delta x} = k$;

3) за означенням похідної $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k$.

Отже, $f'(x_0) = k$.

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції f, то остання рівність означає, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f'(x) = k$. ●

Висновок про те, що похідна лінійної функції $f(x) = kx + b$ дорівнює k, також прийнято записувати таким чином:

$$\boxed{(kx + b)' = k} \qquad (1)$$

Якщо у формулу (1) підставити $k = 1$ і $b = 0$, то отримаємо

$$\boxed{(x)' = 1}$$

Якщо ж у формулі (1) покласти $k = 0$, то отримаємо

$$\boxed{(b)' = 0}$$

Остання рівність означає, що похідна функції, яка є константою, у кожній точці дорівнює нулю.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть похідну функції $f(x) = x^2$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f у точці x_0, де x_0 — довільна точка області визначення функції f.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$;

3) якщо $\Delta x \to 0$, то при будь-якому $x_0 \in \mathbb{R}$ значення виразу $2x_0 + \Delta x$ прямують до числа $2x_0$. Отже,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції $f(x) = x^2$, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f'(x) = 2x. \text{ ●}$$

Останню рівність також прийнято записувати у вигляді

$$\boxed{(x^2)' = 2x} \qquad (2)$$

ПРИКЛАД 4 Знайдіть похідну функції $f(x) = x^3$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f у точці x_0, де x_0 — довільна точка області визначення функції f.

1) $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0{}^3 = (x_0 + \Delta x - x_0)((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0{}^2) = \Delta x((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0{}^2)$;

2) $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x\left((x_0+\Delta x)^2+(x_0+\Delta x)x_0+x_0^2\right)}{\Delta x} =$$
$$= (x_0+\Delta x)^2+(x_0+\Delta x)x_0+x_0^2;$$

3) якщо $\Delta x \to 0$, то значення виразу $(x_0+\Delta x)^2+(x_0+\Delta x)x_0+x_0^2$ прямують до числа $3{x_0}^2$. Отже, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3{x_0}^2$.

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції f, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність
$$f'(x) = 3x^2.$$

Останню рівність можна записати так:

$$\boxed{(x^3)' = 3x^2} \qquad (3)$$

Формули (2) і (3) є окремими випадками більш загальної формули:

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1} \qquad (4)$$

Наприклад, $(x^5)' = 5x^4$, $(x^7)' = 7x^6$.

ПРИКЛАД 5 Доведіть, що похідна функції $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, дорівнює nx^{n-1}.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f у точці x_0, де x_0 — довільна точка області визначення функції f.

1) $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^n - {x_0}^n$.

2) Нагадаємо, що $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$. Тоді можна записати:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} =$$
$$= \frac{(x_0+\Delta x - x_0)((x_0+\Delta x)^{n-1}+(x_0+\Delta x)^{n-2}x_0+\ldots+x_0^{n-1})}{\Delta x} =$$
$$= (x_0+\Delta x)^{n-1}+(x_0+\Delta x)^{n-2}x_0+\ldots+x_0^{n-1}.$$

3) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}((x_0 + \Delta x)^{n-1} + (x_0 + \Delta x)^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1}) =$

$$= \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \ldots + x_0^{n-1}}_{n \text{ доданків}} = nx_0^{n-1}.$$

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції f, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Формула (4) залишається справедливою для будь-якого $n \in \mathbb{Z}$ і $x \neq 0$, тобто

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{Z}} \qquad (5)$$

Наприклад, скористаємося формулою (5) для знаходження похідної функції $f(x) = \frac{1}{x}$. Маємо:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Отже, для будь-якого $x \neq 0$ виконується рівність $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ або

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

ПРИКЛАД 6 Продиференціюйте функцію $f(x) = \sqrt{x}$.

Розв'язання. Нехай x_0 — довільна точка області визначення функції f, тобто $x_0 \geqslant 0$.

1) $\Delta f = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$.

2) Маємо: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x_0}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} =$

$$= \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}.$$

3) Знайдемо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. При $x_0 > 0$ маємо, що

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

При $x_0=0$ маємо, що $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$. Тому при $\Delta x\to 0$ значення виразу $\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$ стають все більшими і більшими. Тому не існує числа, до якого прямують значення виразу $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Отже, границі $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$ не існує.

Таким чином, функція $f(x)=\sqrt{x}$ є диференційовною на множині $(0;+\infty)$, причому $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Зазначимо, що в точці $x_0=0$ функція $f(x)=\sqrt{x}$ не є диференційовною.

Формулу (5) також можна узагальнити для будь-якого $r\in\mathbb{Q}$ і $x>0$:

$$\boxed{(x^r)'=rx^{r-1},\ r\in\mathbb{Q}}\qquad(6)$$

Наприклад, знайдемо похідну функції $f(x)=\sqrt{x}$, скориставшись формулою (6). Маємо:

$\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Отже, для $x>0$ можна записати: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ або

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Узагалі, похідну функції $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, можна знаходити за формулою

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}\qquad(7)$$

Якщо n — непарне натуральне число, то формула (7) дозволяє знаходити похідну функції f у всіх точках x таких, що $x\neq 0$.

Якщо n — парне натуральне число, то формула (7) дозволяє знаходити похідну функції f для всіх додатних значень x.

Звернемося до тригонометричних функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$. Ці функції є диференційовними і їх похідні знаходять за такими формулами:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

Як доводити ці формули, ви зможете дізнатися в рубриці «Коли зроблено уроки».

При обчисленні похідних зручно користуватися таблицею похідних, розміщеною на форзаці 2.

ПРИКЛАД 7 Доведіть, що функція $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 1, \\ 2x - 1, & \text{якщо } x \geqslant 1 \end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0 = 1$. Знайдіть $f'(1)$.

Розв'язання. Маємо: $f(x_0) = f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.

Якщо $\Delta x < 0$, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = 2 + \Delta x$.

Якщо $\Delta x > 0$, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{(2(1 + \Delta x) - 1) - 1}{\Delta x} = 2$.

Тепер зрозуміло, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2$, тобто $f'(1) = 2$. ●

Вправи

7.1.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = 5x - 6$; 2) $y = \dfrac{1 - x}{3}$; 3) $y = 9$.

7.2.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^4$; 3) $y = x^{-15}$; 5) $y = x^{-2,8}$;

2) $y = x^{20}$; 4) $y = \dfrac{1}{x^{17}}$; 6) $y = x^{\frac{1}{5}}$.

7.3.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^{10}$;
3) $y = \frac{1}{x^8}$;
5) $y = x^{\frac{7}{6}}$;
2) $y = x^{-6}$;
4) $y = 8 - 3x$;
6) $y = x^{-0,2}$.

7.4.° Продиференціюйте функцію:

1) $y = \sqrt[4]{x}$;
2) $y = \sqrt[8]{x^7}$;
3) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
4) $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$.

7.5.° Продиференціюйте функцію:

1) $y = \sqrt[9]{x}$;
2) $y = \sqrt[6]{x^5}$;
3) $y = \frac{1}{\sqrt[12]{x^7}}$.

7.6.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$;
2) $f(x) = \cos x,\ x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

7.7.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$;
2) $f(x) = \cos x,\ x_0 = -\frac{\pi}{4}$.

7.8.• Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = x\sqrt{x},\ x_0 = 81$;
3) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}},\ x_0 = 16$;
2) $f(x) = x^3\sqrt[4]{x},\ x_0 = 1$;
4) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[6]{x}},\ x_0 = 64$.

7.9.• Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = x\sqrt[4]{x},\ x_0 = 256$;
2) $f(x) = \sqrt[8]{x\sqrt{x}},\ x_0 = 1$.

7.10.• Користуючись означенням похідної, знайдіть $f'(x)$, якщо:

1) $f(x) = \frac{3}{x}$;
2) $f(x) = 4 - x^2$.

7.11.• Користуючись означенням похідної, знайдіть $f'(x)$, якщо:

1) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$;
2) $f(x) = x^2 + 3x - 2$.

7.12.• Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = x^3,\ x_0 = -1$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^2},\ x_0 = 2$;
2) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 4$;
4) $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0$.

7.13.• Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = x^4$, $x_0 = -2$;
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 27$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $x_0 = -3$;
4) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$.

7.14.• Знайдіть за допомогою графіка функції f (рис. 7.7) значення $f'(x_1)$ і $f'(x_2)$.

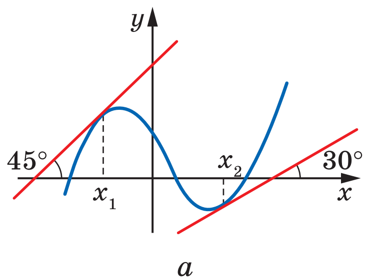


Рис. 7.7

7.15.• Знайдіть за допомогою графіка функції f (рис. 7.8) значення $f'(x_1)$ і $f'(x_2)$.

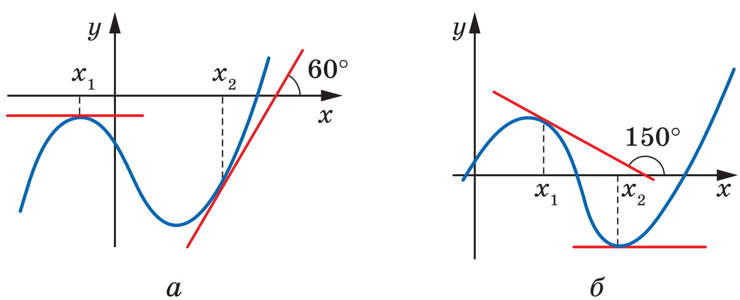


Рис. 7.8

7.16.• На рисунку 7.9 зображено графік функції f. Укажіть кілька значень аргументу x, для яких:
1) $f'(x) > 0$; 2) $f'(x) < 0$; 3) $f'(x) = 0$.

7.17.• До графіка функції f у точці з абсцисою x_0 проведено дотичну (рис. 7.10). Знайдіть $f'(x_0)$.

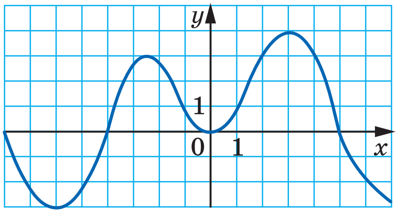


Рис. 7.9

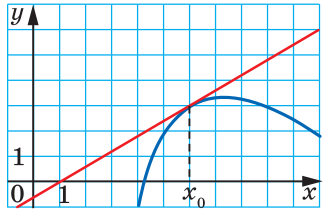


Рис. 7.10

7.18.° До графіка функції f у точці з абсцисою x_0 проведено дотичну (рис. 7.11). Знайдіть $f'(x_0)$.

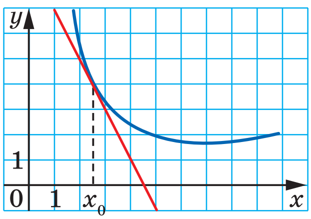


Рис. 7.11

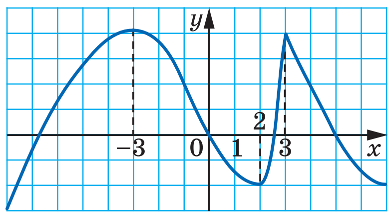


Рис. 7.12

7.19.° На рисунку 7.12 зображено графік функції f. Укажіть точки, у яких похідна дорівнює нулю, і точки, у яких похідна не існує.

7.20.° На рисунку 7.13 зображено графік функції f. Укажіть точки, у яких похідна дорівнює нулю, і точки, у яких похідна не існує.

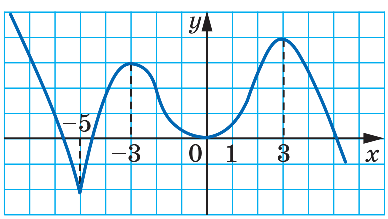


Рис. 7.13

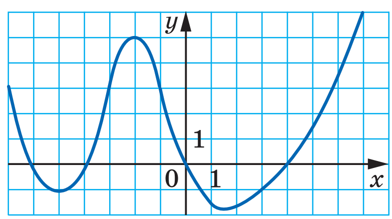


Рис. 7.14

7.21.° На рисунку 7.14 зображено графік функції f. Порівняйте:

1) $f'(-5)$ і $f'(1)$;
2) $f'(-1)$ і $f'(6)$;
3) $f'(-2)$ і $f'(4)$;
4) $f'(0)$ і $f'(5)$.

7.22.• Дотична до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 має кутовий коефіцієнт k. Знайдіть x_0, якщо:

1) $f(x) = x^3$, $k = 3$;
2) $f(x) = \sqrt{x}$, $k = \frac{1}{4}$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $k = -\frac{1}{4}$;
4) $f(x) = \sin x$, $k = 0$.

7.23.• Дотична до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 має кутовий коефіцієнт k. Знайдіть x_0, якщо:

1) $f(x) = x^4$, $k = -32$;
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $k = \frac{1}{27}$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $k = -\frac{1}{27}$;
4) $f(x) = \cos x$, $k = 1$.

7.24.• Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^2$. Знайдіть $s'\left(\frac{1}{2}\right)$. Який механічний зміст має знайдена величина?

7.25.• Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^3$. Знайдіть $s'(2)$. Який механічний зміст має знайдена величина?

7.26.•• Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{якщо } x < 0, \\ 1, & \text{якщо } x \geqslant 0 \end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$. Проілюструйте отриманий результат графічно.

7.27.•• Знайдіть похідну функції $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{якщо } x \leqslant 2, \\ 4x - 6, & \text{якщо } x > 2 \end{cases}$ у точці $x_0 = 2$.

7.28.•• Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x) = x\,|x|$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$. Проілюструйте отриманий результат графічно.

7.29.•• Знайдіть похідну функції $f(x) = x^2\,|x|$ у точці $x_0 = 0$.

7.30.•• Доведіть, користуючись означенням, що функція $y=\sqrt{1-x^2}$ не є диференційовною в точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$. Проілюструйте отриманий результат графічно.

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Доведення формул похідних функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$

Доведемо, що похідні функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ можна обчислювати за формулами

$$(\sin x)' = \cos x,$$
$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Нехай $f(x) = \sin x$.

Для довільної точки x_0 маємо:

1) $\Delta f = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x}$;

3) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right).$$

Скориставшись першою чудовою границею

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1,$$

можна записати:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x_0.$$

Формулу $(\cos x)' = -\sin x$ доводять аналогічно.

8. Правила обчислення похідних

Знайдемо, користуючись означенням, похідну функції $f(x) = x^2 + x$ у точці $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) $\Delta f = \underbrace{(x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)}_{f(x_0 + \Delta x)} - \underbrace{(x_0^2 + x_0)}_{f(x_0)} =$

$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + x_0 + \Delta x - x_0^2 - x_0 =$$

$$= 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x;$$

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x + 1;$

3) якщо $\Delta x \to 0$, то значення виразу $2x_0 + \Delta x + 1$ прямують до числа $2x_0 + 1$. Отже, при будь-якому $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x + 1) = 2x_0 + 1.$$

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції $f(x) = x^2 + x$, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f'(x) = 2x + 1, \text{ тобто}$$
$$(x^2 + x)' = 2x + 1.$$

З попереднього пункту відомо, що $(x^2)' = 2x$ і $(x)' = 1$. Таким чином, отримуємо

$$(x^2 + x)' = (x^2)' + (x)'.$$

Отже, похідну функції $f(x) = x^2 + x$ можна було знайти, не користуючись означенням похідної.

Справедливою є така теорема[1].

Теорема 8.1 (похідна суми). ***У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) + g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

[1] Умовами теорем 8.1–8.4 передбачено таке: якщо функції f і g є диференційовними в точці x_0, то відповідно функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x)\,g(x)$, $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ і $y = f(g(x))$ визначені на деякому проміжку, що містить точку x_0.

Коротко говорять: *похідна суми дорівнює сумі похідних*.

Також прийнято такий спрощений запис:

$$\boxed{(f+g)' = f' + g'}$$

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка, у якій функції f і g є диференційовними. Знайдемо приріст функції $y = f(x) + g(x)$ у точці x_0. Маємо:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0) =$$
$$= (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) + (g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)) = \Delta f + \Delta g.$$

Запишемо: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \dfrac{\Delta g}{\Delta x} \right).$

Оскільки функції f і g є диференційовними в точці x_0, то існують границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta g}{\Delta x}$. Звідси отримуємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Отже, функція $y = f(x) + g(x)$ є диференційовною в точці x_0, причому її похідна в цій точці дорівнює $f'(x_0) + g'(x_0)$. ▲

Теорему 8.1 можна поширити на будь-яку скінченну кількість доданків:

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'.$$

Дві теореми, наведені нижче, також спрощують знаходження похідної.

Теорема 8.2 (похідна добутку). ***У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x)\, g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x).$$

Також прийнято такий спрощений запис:

$$\boxed{(fg)' = f'g + g'f}$$

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка, у якій функції f і g є диференційовними. Знайдемо приріст функції $y = f(x)\,g(x)$ у точці x_0. Ураховуючи рівності $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$, $g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + \Delta g$, маємо:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x)\,g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\,g(x_0) =$$
$$= (f(x_0) + \Delta f)(g(x_0) + \Delta g) - f(x_0)\,g(x_0) =$$
$$= f(x_0)\,g(x_0) + \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g - f(x_0)\,g(x_0) =$$
$$= \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g.$$

Запишемо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} \right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x \right).$$

Оскільки функції f і g є диференційовними в точці x_0, то існують границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$. Тепер можна записати:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x =$$
$$= f'(x_0)\,g(x_0) + g'(x_0)\,f(x_0) + f'(x_0)\,g'(x_0) \cdot 0 =$$
$$= f'(x_0)\,g(x_0) + g'(x_0)\,f(x_0).$$

Таким чином, функція $y = f(x)\,g(x)$ є диференційовною в точці x_0, причому її похідна в цій точці дорівнює $f'(x_0)\,g(x_0) + g'(x_0)\,f(x_0)$. ▲

Наслідок 1. ***У тих точках, у яких є диференційовною функція $y = f(x)$, також є диференційовною функція $y = kf(x)$, де k — деяке число, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Коротко говорять: *постійний множник можна виносити за знак похідної*.

Також прийнято такий скорочений запис:

$$\boxed{(kf)' = kf'}$$

Доведення. Оскільки функція $y = k$ диференційовна в будь-якій точці, то, застосовуючи теорему про похідну добутку, можна записати:

$$(kf(x))' = (k)' f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x). \ ▲$$

Наслідок 2. ***У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) - g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Доведення. Маємо:

$$(f(x) - g(x))' = (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = (f(x))' + ((-1)\, g(x))' = f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x). \ ▲$$

Теорема 8.3 (похідна частки). ***У тих точках, у яких функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є диференційовними і значення функції g не дорівнює нулю, функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також є диференційовною, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - g'(x)\, f(x)}{(g(x))^2}.$$

Також прийнято такий спрощений запис:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}}$$

З доведенням теореми 8.3 ви можете ознайомитися на заняттях математичного гуртка.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{1}{x} - \sin x + 4x^2$;

2) $y = x^{-\frac{1}{2}}(5x - 3)$;

3) $y = x^3 \cos x$;

4) $y = \frac{2x^2 + 1}{3x - 2}$.

Розв'язання

1) Користуючись теоремою про похідну суми та наслідком з теореми про похідну добутку, отримуємо:

$$y' = \left(\frac{1}{x} - \sin x + 4x^2\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' - (\sin x)' + 4 \cdot (x^2)' =$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \cos x + 4 \cdot 2x = -\frac{1}{x^2} - \cos x + 8x.$$

2) За теоремою про похідну добутку маємо:

$$y' = \left(x^{-\frac{1}{2}}(5x-3)\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' \cdot (5x-3) + (5x-3)' \cdot x^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cdot (5x-3) + 5 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3-5x}{2\sqrt{x^3}} + \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{3-5x+10x}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3+5x}{2\sqrt{x^3}}.$$

3) Маємо: $y' = (x^3 \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x^3 =$ $= 3x^2 \cos x - \sin x \cdot x^3 = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x.$

4) За теоремою про похідну частки отримуємо:

$$y' = \left(\frac{2x^2+1}{3x-2}\right)' = \frac{(2x^2+1)'(3x-2) - (3x-2)'(2x^2+1)}{(3x-2)^2} =$$

$$= \frac{4x(3x-2) - 3(2x^2+1)}{(3x-2)^2} = \frac{12x^2 - 8x - 6x^2 - 3}{(3x-2)^2} = \frac{6x^2 - 8x - 3}{(3x-2)^2}.$$

Використовуючи теорему про похідну частки, легко довести, що:

$$\boxed{(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Справді,

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Формулу $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ доведіть самостійно.

Якщо значеннями аргументу функції f є значення функції g, то говорять, що задано **складену функцію** $y = f(g(x))$.

Наприклад, розглянемо функції $y = f(t)$ і $t = g(x)$, де $f(t) = 2t - 1$ і $g(x) = x^2 + x + 1$. Тоді $f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2(x^2 + x + 1) - 1 = 2x^2 + 2x + 1$. Отже, можна говорити, що формула $y = 2x^2 + 2x + 1$ задає складену функцію $y = f(g(x))$.

Розглянемо ще кілька прикладів.

Якщо $f(u) = \sin u$, а $g(x) = 1 - 3x$, то складена функція $y = f(g(x))$ задається формулою $y = \sin(1 - 3x)$. Функцію $y = \cos^2 x$ можна розглядати як складену функцію $y = f(g(x))$, де $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$.

Знаходити похідну складеної функції можна за допомогою такої теореми.

Теорема 8.4 (похідна складеної функції). ***Якщо функція $t = g(x)$ диференційовна в точці x_0, а функція $y = f(t)$ диференційовна в точці t_0, де $t_0 = g(x_0)$, то складена функція $y = f(g(x))$ є диференційовною в точці x_0, причому***

$$y'(x_0) = f'(t_0) \cdot g'(x_0).$$

З доведенням цієї теореми ви можете ознайомитися на заняттях математичного гуртка.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть значення похідної функції в точці x_0:

1) $y = (3x - 7)^6$, $x_0 = 2$;

2) $y = \sqrt{4x^2 + 1}$, $x_0 = 0$;

3) $y = \sin \frac{x}{2}$, $x_0 = \pi$;

4) $y = \operatorname{tg}^3 5x$, $x_0 = \frac{\pi}{15}$.

Розв'язання

1) Дана функція $y = (3x - 7)^6$ є складеною функцією $y = f(t)$ при $t = g(x)$, де $f(t) = t^6$, $g(x) = 3x - 7$.

Оскільки $f'(t) = 6t^5$, а $g'(x) = 3$, то за теоремою про похідну складеної функції можна записати:

$$y'(x) = f'(t)\, g'(x) = 6t^5 \cdot 3 \text{ при } t = 3x - 7,$$

тобто
$$y'(x) = 6(3x-7)^5 \cdot 3 = 18(3x-7)^5;$$
$$y'(2) = 18 \cdot (3 \cdot 2 - 7)^5 = -18.$$

Розв'язання цієї задачі можна оформити і так:
$$y' = ((3x-7)^6)' = 6(3x-7)^5 \cdot (3x-7)' =$$
$$= 6(3x-7)^5 \cdot 3 = 18(3x-7)^5;\ y'(2) = -18.$$

2) $y' = \left(\sqrt{4x^2+1}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{4x^2+1}} \cdot (4x^2+1)' = \dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}} = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+1}};$

$y'(0) = 0.$

3) $y' = \left(\sin\dfrac{x}{2}\right)' = \cos\dfrac{x}{2} \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2};\qquad y'(\pi) = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2} = 0.$

4) $y' = \left(\operatorname{tg}^3 5x\right)' = 3\operatorname{tg}^2 5x \cdot \left(\operatorname{tg} 5x\right)' = 3\operatorname{tg}^2 5x \cdot \dfrac{(5x)'}{\cos^2 5x} = \dfrac{15\operatorname{tg}^2 5x}{\cos^2 5x};$

$$y'\left(\frac{\pi}{15}\right) = \frac{15\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}}{\cos^2\frac{\pi}{3}} = 15 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 45 : \frac{1}{4} = 180.$$

Відповідь: 1) –18; 2) 0; 3) 0; 4) 180.

Вправи

8.1.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 10;$
2) $y = 4x^6 + 20\sqrt{x};$
3) $y = x^8 + 7x^6 + \dfrac{4}{x} - 1;$
4) $y = 4\sin x - 5\cos x;$
5) $y = -\dfrac{1}{6}x^3 + 0{,}5x^2 + 2x;$
6) $y = \operatorname{tg} x - 9x;$
7) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{8} + 2;$
8) $y = 2x^{-2} + 3x^{-3}.$

8.2.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = 2x^5 - x;$
2) $y = x^7 - 4\sqrt{x};$
3) $y = -3\sin x + 2\cos x;$
4) $y = \dfrac{2}{3}x^3 - x^2 - 7x;$
5) $y = x - \dfrac{5}{x};$
6) $y = 12 - \operatorname{ctg} x;$
7) $y = 0{,}4x^{-5} + \sqrt{3}.$

8.3.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = (x + 2)(x^2 - 4x + 5)$;
2) $y = (3x + 5)(2x^2 - 1)$;
3) $y = x^2 \sin x$;
4) $y = x \operatorname{ctg} x$;
5) $y = (2x+1)\sqrt{x}$;
6) $y = \sqrt{x} \cos x$.

8.4.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$;
2) $y = (x+5)\sqrt{x}$;
3) $y = x^4 \cos x$;
4) $y = x \operatorname{tg} x$.

8.5.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$;
2) $y = \dfrac{2x-3}{4-5x}$;
3) $y = \dfrac{5}{3x-2}$;
4) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$;
5) $y = \dfrac{5x^2-x-2}{x}$;
6) $y = \dfrac{x^3}{\cos x}$;
7) $y = \dfrac{3-x^2}{4+2x}$;
8) $y = \dfrac{x^2-5x}{x-7}$.

8.6.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = \dfrac{3x+5}{x-8}$;
2) $y = \dfrac{7}{10x-3}$;
3) $y = \dfrac{2x^2}{1-6x}$;
4) $y = \dfrac{\sin x}{x}$;
5) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;
6) $y = \dfrac{x^2+6x}{x+2}$.

8.7.° Чому дорівнює значення похідної функції f у точці x_0, якщо:

1) $f(x) = x^8 - 3x^4 - x + 6,\ x_0 = -1$;
2) $f(x) = \dfrac{8}{x} + 5x - 2,\ x_0 = 2$;
3) $f(x) = \dfrac{2-3x}{x+2},\ x_0 = -3$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2} - 2\sin x,\ x_0 = 0$;
5) $f(x) = (1+3x)\sqrt{x},\ x_0 = 9$;
6) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[5]{x},\ x_0 = 1$;
7) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)\cos x,\ x_0 = 0$;
8) $f(x) = x \sin x,\ x_0 = 0$?

8.8.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x)=\sqrt{x}-16x,\ \ x_0=\frac{1}{4}$;

2) $f(x)=\frac{\cos x}{1-x},\ \ x_0=0$;

3) $f(x)=x^{-2}-4x^{-3},\ x_0=2$;

4) $f(x)=\frac{2x^2-3x-1}{x+1},\ \ x_0=1$.

8.9.° Задайте за допомогою формул складені функції $y=f(g(x))$ і $y=g(f(x))$, якщо:

1) $f(x)=\sin x,\ g(x)=x^2-1$;

2) $f(x)=x^4,\ g(x)=5x+2$;

3) $f(x)=\sqrt{x},\ \ g(x)=\frac{x}{x-1}$;

4) $f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=2x^2-3x+1$.

8.10.° Задайте за допомогою формул складені функції $y=f(g(x))$ і $y=g(f(x))$, якщо:

1) $f(x)=x^2,\ g(x)=\operatorname{tg} x$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ \ g(x)=\frac{x+1}{x+2}$.

8.11.• Чи можуть дві різні функції мати рівні похідні? Відповідь проілюструйте прикладами.

8.12.• Знайдіть похідну функції:

1) $y=(2x+3)^5$;

2) $y=\left(\frac{1}{3}x-6\right)^{18}$;

3) $y=\cos 2x$;

4) $y=\sin^2 x$;

5) $y=3\operatorname{ctg}\frac{x}{5}$;

6) $y=\sqrt{2x+1}$;

7) $y=\sqrt[3]{1-x}$;

8) $y=\sqrt{x^2+1}$;

9) $y=\sqrt{x^3-3x}$;

10) $y=\frac{1}{4x+5}$;

11) $y=(6-7x)^{-4}$;

12) $y=\left(\frac{x^2}{2}+4x-1\right)^{-6}$;

13) $y=\sqrt{\sin x}$;

14) $y=\sin\sqrt{x}$.

8.13.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = (3x - 5)^6$;
2) $y = (2x^2 - 3x + 4)^3$;
3) $y = \sin \frac{x}{3}$;
4) $y = \cos^2 x$;
5) $y = 2 \operatorname{tg} 4x$;
6) $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;
7) $y = \sqrt{1 - x^2}$;
8) $y = \sqrt[4]{6x + 8}$;
9) $y = (9x - 2)^{-3}$;
10) $y = \sqrt{\cos x}$.

8.14.° Василь Заплутайко знаходить похідну функції $y = \sin 2x$ так:

1) робить заміну $2x = t$ і отримує функцію $y = \sin t$;
2) далі пише: $y' = (\sin t)' = \cos t$;
3) потім підставляє значення $2x = t$ і робить висновок, що $(\sin 2x)' = \cos 2x$.

У чому полягає помилка Василя?

8.15.° Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t) = \sqrt{4t^2 - 6t + 11}$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть швидкість руху тіла в момент часу $t_0 = 5$ с.

8.16.° Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = (t + 2)^2 (t + 5)$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть її швидкість руху в момент часу $t_0 = 3$ с.

8.17.° Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $x_0 = -3$;
2) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
3) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$.

8.18.° Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = \sqrt{4 - 3x}$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$;
3) $f(x) = \operatorname{ctg}^4 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

8.19.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність $f'(x) > 0$, якщо:

1) $f(x) = 6x - 3x^2$;
2) $f(x) = x^3 + 1{,}5x^2 - 1$;
3) $f(x) = x^4 - 2x^2$;
4) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + 7$;
5) $f(x) = \frac{1}{2}x - \cos x$;
6) $f(x) = x + \operatorname{tg} x$.

8.20.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leqslant 0$, якщо:

1) $f(x) = x^2 - 3x + 1$;
2) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$;
3) $f(x) = 3x^2 - x^3$;
4) $f(x) = x^4 + 2x^2$;
5) $f(x) = 2\sin x + 1$;
6) $f(x) = x - \cos x$.

8.21.$^{\bullet}$ Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{1}{x^9} - \frac{3}{x^3}$;
2) $y = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^5}$;
3) $y = x\sqrt{2x+1}$;
4) $y = \sin x \cos 2x$;
5) $y = \operatorname{tg} x \sin(2x + 5)$;
6) $y = \frac{\cos 3x}{x-1}$;
7) $y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$;
8) $y = (x + 1)^3 (x - 2)^4$;
9) $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

8.22.$^{\bullet}$ Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^8}$;
2) $y = \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{5}{x^6}$;
3) $y = x\sqrt{x+3}$;
4) $y = \sin 2x \cos x$;
5) $y = (x + 2)^5 (x - 3)^4$;
6) $y = \frac{2x-3}{\sin\frac{x}{4}}$.

8.23.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leqslant 0$, якщо:

1) $f(x) = \frac{2x+5}{x+2}$;
2) $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$;
3) $f(x) = (x - 2)^2 (x + 3)$;
4) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;
5) $f(x) = 2\sin^2 x - \sqrt{2}\,x$;
6) $f(x) = \sin 2x - x\sqrt{3}$.

8.24.• Розв'яжіть нерівність $f'(x) > 0$, якщо:

1) $f(x)=\dfrac{2x}{1-x}$;
2) $f(x)=\dfrac{3-x^2}{x+2}$;
3) $f(x)=\dfrac{4}{x}+2x$;
4) $f(x)=(x+2)^2(x-3)$;
5) $f(x)=\cos 2x$;
6) $f(x)=2x-\cos 4x$.

8.25.• Матеріальна точка масою 4 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t)=t^2+4$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть імпульс $p(t)=mv(t)$ матеріальної точки в момент часу $t_0 = 2$ с.

8.26.• Тіло масою 2 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t)=3t^2-4t+2$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть кінетичну енергію $E(t)=\dfrac{mv^2(t)}{2}$ тіла в момент часу $t_0 = 4$ с.

8.27.• Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t)=2t^2-8t+15$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Визначте координату тіла в момент часу, коли його кінетична енергія дорівнює нулю.

8.28.•• Знайдіть похідну функції:

1) $y=\cos^3 2x$;
2) $y=\sqrt{\sin\left(\dfrac{x}{5}-\dfrac{\pi}{4}\right)}$;
3) $y=\left(\sin\dfrac{x}{3}-5\right)^6$.

8.29.•• Обчисліть:

1) $f'(0)$, якщо $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{2x-1}}$;
2) $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, якщо $f(x)=\sin^2\dfrac{x}{2}$;
3) $f'(0)$, якщо $f(x)=(\cos 3x+6)^3$.

8.30.•• У точках $x_1=-1$ і $x_2=2$ знайдіть похідну функції:
1) $f(x)=x^2-4|x|+3$;
2) $f(x)=|x^2-4x+3|$.

8.31.•• У точках $x_1=-2$ і $x_2=2$ знайдіть похідну функції:
1) $f(x)=x^2-6|x|+5$;
2) $f(x)=|x^2-6x+5|$.

8.32.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$, якщо $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 18x$, $g(x) = 2\sqrt{x}$;

2) $f'(x)\,g'(x) = 0$, якщо $f(x) = x^3 - 6x^2$, $g(x) = \frac{\sqrt{-x}}{3}$.

8.33.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$, якщо $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$;

2) $f'(x)\,g'(x) = 0$, якщо $f(x) = x^3 - x^2$, $g(x) = 2\sqrt{x}$.

8.34.•• Доведіть, що похідна періодичної функції є періодичною функцією. Наведіть приклади.

8.35.•• Доведіть, що похідна парної функції є непарною функцією. Наведіть приклади.

8.36.•• Доведіть, що похідна непарної функції є парною функцією. Наведіть приклади.

8.37.•• Функції f і g визначені на $\mathbb{R}$. Що можна стверджувати про диференційовність функції $y = f(x) + g(x)$ у точці x_0, якщо:

1) f є диференційовною в точці x_0, а g — ні;

2) f і g не диференційовні в точці x_0?

8.38.•• Функції f і g визначені на $\mathbb{R}$. Що можна стверджувати про диференційовність функції $y = f(x)\,g(x)$ у точці x_0, якщо:

1) f є диференційовною в точці x_0, а g — ні;

2) f і g не диференційовні в точці x_0?

Готуємося до вивчення нової теми

8.39. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-2; -3)$ і паралельна осі абсцис.

8.40. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1; -4)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює: 1) 4; 2) 0; 3) −1.

8.41. Серед прямих, заданих рівняннями, укажіть пари паралельних:

1) $y = 3x - 5$; 3) $y = -3x$; 5) $y - 3x + 2 = 0$;

2) $y = -3x - 5$; 4) $y = 7 - 3x$; 6) $y = \frac{1}{3}x + 7$.

8.42. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A\ (-1;\ 9)$ і паралельна прямій $y = 9x - 16$.

8.43. Складіть рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = 4x + 2$ і перетинає пряму $y = -8x + 9$ у точці, що належить осі ординат.

9. Рівняння дотичної

Нехай функція f диференційовна в точці x_0. Тоді до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 можна провести невертикальну дотичну (рис. 9.1).

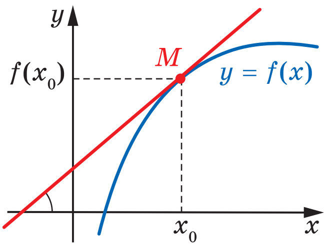


Рис. 9.1

З курсу геометрії 9 класу ви знаєте, що рівняння невертикальної прямої має вигляд

$$y = kx + b,$$

де k — кутовий коефіцієнт цієї прямої.

Виходячи з геометричного змісту похідної, отримаємо $k = f'\ (x_0)$.

Тоді рівняння дотичної можна записати так:

$$y = f'\ (x_0) \cdot x + b. \qquad (1)$$

Ця пряма проходить через точку $M\ (x_0;\ f\ (x_0))$. Отже, координати цієї точки задовольняють рівняння (1). Маємо:

$$f\ (x_0) = f'\ (x_0) \cdot x_0 + b.$$

Звідси $b = f\ (x_0) - f'\ (x_0) \cdot x_0$.

Тоді рівняння (1) можна переписати так:

$$y = f'\ (x_0) \cdot x + f\ (x_0) - f'\ (x_0) \cdot x_0.$$

Отже, **рівняння дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0**, має вигляд:

$$\boxed{y = f'\ (x_0)\ (x - x_0) + f\ (x_0)}$$

ПРИКЛАД 1 Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

Розв'язання. Маємо:

$$f(x_0) = f(-2) = 2 - 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 = -2; \; f'(x) = -4 - 6x;$$

$$f'(x_0) = f'(-2) = -4 - 6 \cdot (-2) = 8.$$

Підставивши знайдені числові значення в рівняння дотичної, отримуємо: $y = 8(x + 2) - 2$, тобто $y = 8x + 14$.

Відповідь: $y = 8x + 14$.

ПРИКЛАД 2 Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 2x^2 - 6x$ у точці його перетину з віссю абсцис.

Розв'язання. Розв'язавши рівняння $2x^2 - 6x = 0$, знайдемо абсциси точок перетину графіка функції f з віссю абсцис. Маємо: $2x(x - 3) = 0$; $x = 0$ або $x = 3$.

Запишемо рівняння дотичної в кожній із знайдених точок.

1) Якщо $x_0 = 0$, то $f(0) = 0$; $f'(x) = 4x - 6$; $f'(0) = -6$. Тоді рівняння дотичної має вигляд $y = -6x$.
2) Якщо $x_0 = 3$, то $f(3) = 0$; $f'(3) = 4 \cdot 3 - 6 = 6$. Тоді шукане рівняння має вигляд $y = 6(x - 3)$, тобто $y = 6x - 18$.

Відповідь: $y = -6x$, $y = 6x - 18$.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{x+4}{x-4}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = -2x + 4$.

Розв'язання. Маємо:

$$f'(x) = \frac{(x+4)'(x-4) - (x-4)'(x+4)}{(x-4)^2} = \frac{(x-4)-(x+4)}{(x-4)^2} = -\frac{8}{(x-4)^2}.$$

Якщо дотична паралельна прямій $y = -2x + 4$, то її кутовий коефіцієнт k дорівнює -2.

Оскільки $f'(x_0) = k$, де x_0 — абсциса точки дотику шуканої прямої до графіка функції f, то $f'(x_0) = -2$, тобто $-\frac{8}{(x_0 - 4)^2} = -2$. Звідси

$$(x_0 - 4)^2 = 4; \; \left[\begin{array}{l} x_0 - 4 = 2, \\ x_0 - 4 = -2; \end{array}\right. \; \left[\begin{array}{l} x_0 = 6, \\ x_0 = 2. \end{array}\right.$$

Отже, на графіку функції $f(x)=\dfrac{x+4}{x-4}$ є дві точки, дотичні в яких паралельні даній прямій.

При $x_0 = 6$ маємо: $f(x_0) = 5$. Тоді рівняння дотичної має вигляд $y = -2(x - 6) + 5$; $y = -2x + 17$.

При $x_0 = 2$ отримуємо: $f(x_0) = -3$. Тоді рівняння дотичної має вигляд $y = -2(x - 2) - 3$; $y = -2x + 1$.

Відповідь: $y = -2x + 17$ і $y = -2x + 1$.

ПРИКЛАД 4 Знайдіть абсцису точки графіка функції $f(x)=\sqrt{2x-1}$, у якій проведена до нього дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 45°.

Розв'язання. Маємо:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot(2x-1)'=\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}.$$

Оскільки дотична утворює кут 45° з додатним напрямом осі абсцис, то її кутовий коефіцієнт k дорівнює $\operatorname{tg} 45°$, тобто $k = 1$. Нехай x_0 — абсциса точки дотику. Тоді $f'(x_0) = 1$.

Отримуємо $\dfrac{1}{\sqrt{2x_0-1}}=1$. Звідси $\sqrt{2x_0-1}=1$; $2x_0 - 1 = 1$; $x_0 = 1$.

Відповідь: 1.

ПРИКЛАД 5 Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2 - 5x - 6$, яка проходить через точку $M(-1; -1)$.

Розв'язання. Зауважимо, що $f(-1) \neq -1$. З цього випливає, що точка $M(-1; -1)$ не належить графіку функції f.

Нехай $A(x_0; f(x_0))$ — точка дотику шуканої прямої до графіка функції f. Оскільки $f(x_0)=-x_0^2-5x_0-6$; $f'(x_0) = -2x_0 - 5$, то рівняння дотичної має вигляд

$$y=(-2x_0-5)(x-x_0)+(-x_0^2-5x_0-6).$$

Урахувавши, що координати точки $M(-1; -1)$ задовольняють отримане рівняння, маємо:

$$-1=(-2x_0-5)(-1-x_0)+(-x_0^2-5x_0-6).$$

Звідси, розкривши дужки і розв'язавши квадратне рівняння, отримаємо $x_0 = 0$ або $x_0 = -2$. Таким чином, через точку M проходять дві дотичні до графіка функції f: $y = -5x - 6$ і $y = -x - 2$.

Відповідь: $y = -5x - 6$, $y = -x - 2$.

Вправи

9.1.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = x^3 - 27$, $x_0 = 2$;
3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$;
4) $f(x) = 4\sqrt{x} - 3$, $x_0 = 9$;
5) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$;
6) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$;
7) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
8) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x_0 = -2$;
9) $f(x) = \sqrt{2x+5}$, $x_0 = 2$.

9.2.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 2$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{5\pi}{2}$;
5) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$;
6) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x}$, $x_0 = -1$;
7) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}$, $x_0 = 3$.

9.3.• Запишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в точці його перетину з віссю ординат:

1) $f(x) = x^2 - 3x - 3$;
2) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

9.4.• Запишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в точці його перетину з віссю ординат:

1) $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$; 2) $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

9.5.• Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці його перетину з віссю абсцис:

1) $f(x) = 8x^3 - 1$; 2) $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

9.6.• Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці його перетину з віссю абсцис:

1) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$; 2) $f(x) = 3x - x^2$.

9.7.• Знайдіть координати точки параболи $y = 2x^2 - x + 1$, у якій дотична до неї паралельна прямій $y = 7x - 8$.

9.8.• У яких точках дотичні до графіка функції $y = \frac{1}{x}$ паралельні прямій $y = -x$?

9.9.• До графіка функції $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ проведено дотичні в точках з абсцисами $x_1 = \frac{\pi}{2}$ і $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Яке взаємне розміщення цих дотичних?

9.10.• Знайдіть таку точку графіка функції f, що проведена в цій точці дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α, якщо:

1) $f(x) = x^2 - 7x + 3$, $\alpha = 45°$;
2) $f(x) = -3x^2 + 2\sqrt{3}x - 2$, $\alpha = 60°$;
3) $f(x) = \sqrt{3x+2}$, $\alpha = 45°$;
4) $f(x) = \frac{x+7}{x-2}$, $\alpha = 135°$.

9.11.• Знайдіть таку точку графіка функції f, що проведена в цій точці дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α, якщо:

1) $f(x) = \sqrt{3}x - \frac{x^3}{3}$, $\alpha = 60°$;
2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, $\alpha = 45°$.

9.12.$^{\bullet}$ Доведіть, що будь-яка дотична до графіка функції f утворює тупий кут з додатним напрямом осі абсцис:

1) $f(x) = 6 - x - x^3$; 2) $f(x)=\frac{5-x}{x-3}$.

9.13.$^{\bullet}$ Доведіть, що будь-яка дотична до графіка функції f утворює гострий кут з додатним напрямом осі абсцис:

1) $f(x) = x^5 + 2x - 8$; 2) $f(x)=\frac{4}{1-x}$.

9.14.$^{\bullet}$ Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції:

1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$; 2) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^2+1$.

9.15.$^{\bullet}$ Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4$.

9.16.$^{\bullet\bullet}$ Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = x^2 - 5x$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = -x$;

2) $f(x)=x-\frac{1}{x^2}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 3x$;

3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 1$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 2x + 1$.

9.17.$^{\bullet\bullet}$ Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = -7x + 3$;

2) $f(x)=\sqrt{x}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = x$.

9.18.$^{\bullet\bullet}$ Установіть, чи є пряма $y = 12x - 10$ дотичною до графіка функції $f(x) = 4x^3$. У разі позитивної відповіді вкажіть абсцису точки дотику.

9.19.$^{\bullet\bullet}$ Установіть, чи є пряма $y = x$ дотичною до графіка функції $y = \sin x$. У разі позитивної відповіді вкажіть абсцису точки дотику.

9.20.$^{\bullet\bullet}$ Установіть, чи є пряма $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ дотичною до графіка функції $y=\sqrt{x}$. У разі позитивної відповіді вкажіть абсцису точки дотику.

9.21.•• Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = x^2 - 4$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

9.22.•• Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

9.23.•• Дотичною до графіка якої з функцій $y = x^2 - 2$, $y = x^3 - 2x$, $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$ є пряма, зображена на рисунку 9.2?

9.24.•• На графіку функції $f(x) = -\sqrt{2x+1}$ знайдіть точку, дотична в якій перпендикулярна до прямої

$$y - 2x + 1 = 0.$$

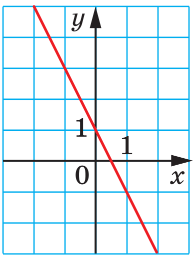


Рис. 9.2

9.25.•• Чи існують дотичні до графіка функції $f(x) = x^3 + 2x - 1$, які перпендикулярні до прямої $y = -x$?

9.26.•• При яких значеннях b і c парабола $y = x^2 + bx + c$ дотикається до прямої $y = 4x + 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$?

9.27.•• При яких значеннях a і b пряма $y = 7x - 2$ дотикається до параболи $y = ax^2 + bx + 1$ у точці $A(1; 5)$?

9.28.•• Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 2x^2 + 2$, якщо ця дотична проходить через точку $M(0; 1)$.

9.29.•• Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 4$, якщо ця дотична проходить через точку $M(2; -1)$.

9.30.•• У якій точці графіка функції $f(x) = \frac{4x-1}{x}$ потрібно провести дотичну, щоб ця дотична проходила через початок координат?

9.31.•• У якій точці графіка функції $y = x + \frac{3}{x}$ потрібно провести дотичну, щоб ця дотична перетнула вісь ординат у точці (0; 6)?

9.32.* Дві перпендикулярні дотичні до графіка функції $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x^2$ перетинаються в точці A, яка належить осі ординат. Знайдіть координати точки A.

9.33.* Дві перпендикулярні дотичні до графіка функції $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}$ перетинаються в точці A, яка належить осі ординат. Знайдіть координати точки A.

9.34.* При яких значеннях a пряма $y = ax + 1$ є дотичною до графіка функції $f(x) = \sqrt{4x+1}$?

9.35.* При яких значеннях a пряма $y = 2x + a$ є дотичною до графіка функції $f(x) = \sqrt{4x-1}$?

9.36.* Знайдіть рівняння спільної дотичної до графіків функцій $f(x) = x^2 - 2x + 5$ і $g(x) = x^2 + 2x - 11$.

9.37.* Знайдіть рівняння спільної дотичної до графіків функцій $f(x) = x^2 + 4x + 8$ і $g(x) = x^2 + 8x + 4$.

Готуємося до вивчення нової теми

9.38. Розв’яжіть нерівність:

1) $x^2 + x - 12 > 0$;

2) $x^2 - 3x - 10 \leqslant 0$;

3) $6x - x^2 \geqslant 0$;

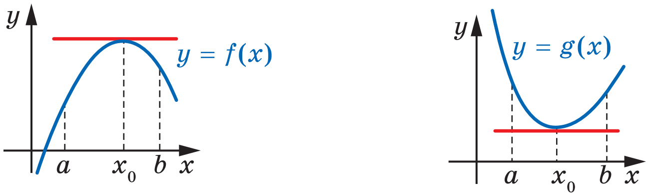
4) $\frac{x^2 + 10x + 9}{x^2 - 4x + 3} < 0$;

5) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 9} \leqslant 0$;

6) $(x + 1)^3(x - 1)^2(x - 3)^6 > 0$.

10. Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа

Розглянемо функцію f та таку точку x_0 інтервалу $(a; b)$, що $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_0)$ (рис. 10.1, *а*). На рис. 10.1, *б* зображено графік функції g, що $\min\limits_{[a;b]} g(x) = g(x_0)$.



а *б*

Рис. 10.1

Нехай функції f і g диференційовні в точці x_0. Тоді до графіків цих функцій у точці з абсцисою x_0 можна провести дотичні. З наочних міркувань очевидно, що ці дотичні будуть горизонтальними прямими. Оскільки кутовий коефіцієнт горизонтальної прямої дорівнює нулю, то $f'(x_0) = 0$ і $g'(x_0) = 0$.

Цей висновок можна проілюструвати за допомогою механічної інтерпретації.

Якщо матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $y = s(t)$ і функція $y = s(t)$ набуває в точці t_0 найбільшого (найменшого) значення, то це означає, що в момент часу t_0 матеріальна точка змінює напрям руху на протилежний. Зрозуміло, що в цей момент часу швидкість матеріальної точки дорівнює нулю, тобто $v(t_0) = s'(t_0) = 0$.

Отримані висновки підтверджує така теорема.

Теорема 10.1 (теорема Ферма). ***Нехай функція f, визначена на проміжку $[a; b]$, у точці $x_0 \in (a; b)$ набуває свого найменшого (найбільшого) значення. Якщо функція f є диференційовною в точці x_0, то $f'(x_0) = 0$.***

Доведення. Розглянемо випадок, коли $\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_0)$ (випадок $\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_0)$ розглядають аналогічно).

Нехай $x \in [a;\ b]$, тоді $\Delta f = f(x) - f(x_0) \geqslant 0$. Якщо $\Delta x = x - x_0 > 0$ (рис. 10.2), то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0$. Звідси $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0$.

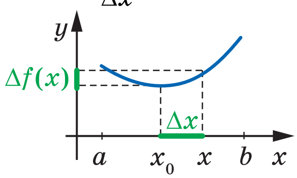


Рис. 10.2

Якщо $\Delta x < 0$ (рис. 10.3), то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0$. Звідси

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0.$$

Отже, доведено, що одночасно виконуються дві нерівності: $f'(x_0) \geqslant 0$ та $f'(x_0) \leqslant 0$. Тому $f'(x_0) = 0$. ▲

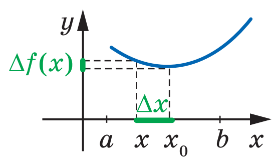


Рис. 10.3

На рисунку 10.4 зображено графік функції f, диференційовної на відрізку $[a;\ b]$, яка в точках a і b набуває однакових значень.

З рисунка видно: існує щонайменше одна така точка $x_0 \in (a;\ b)$, що дотична до графіка в точці з абсцисою x_0 є горизонтальною прямою, тобто $f'(x_0) = 0$.

Мішель Ролль
(1652–1719)

Французький математик, член Паризької академії наук.

Основні праці присвячені методам чисельного розв'язання рівнянь. Більшість наукових досягнень М. Ролля не були помічені за його життя; їх оцінили значно пізніше.

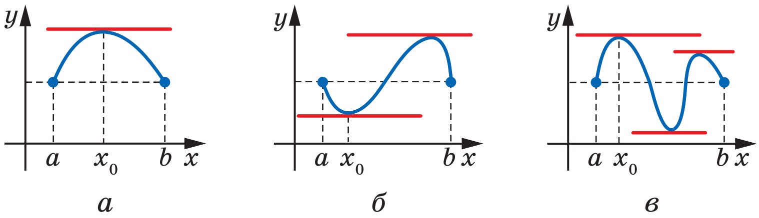


Рис. 10.4

Цей висновок можна проілюструвати за допомогою механічної інтерпретації.

Якщо матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $y = s(t)$, $t \in [a; b]$, то рівність $s(a) = s(b)$ означає, що в момент часу $t = b$ матеріальна точка повернулася в початкове положення. Отже, у деякий момент часу $t_0 \in (a; b)$ вона змінила напрям руху на протилежний, тобто $v(t_0) = s'(t_0) = 0$.

Отримані висновки підтверджує така теорема.

Теорема 10.2 (теорема Ролля). ***Якщо функція f диференційовна на відрізку $[a; b]$, причому $f(a) = f(b)$, то існує така точка $x_0 \in (a; b)$, що $f'(x_0) = 0$.***

Доведення. Оскільки функція диференційовна на відрізку $[a; b]$, то за теоремою 7.1 вона є неперервною на цьому проміжку. Тоді за теоремою Вейєрштрасса на відрізку $[a; b]$ існують такі значення аргументу, при яких функція f досягає своїх найбільшого та найменшого значень. Іншими словами, існують такі числа m і M, що $\min\limits_{[a;b]} f(x) = m$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = M$. Тоді для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується нерівність $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Якщо $m = M$, то функція f є константою на проміжку $[a; b]$. Отже, $f'(x) = 0$ для будь-якого $x \in [a; b]$.

Розглянемо випадок, коли $m \neq M$. Тоді функція f не може на одному кінці відрізка $[a; b]$ набувати найбільшого значення, а на другому — найменшого. Справді, $f(a) = f(b)$, а $m \neq M$. Отже, існує така точка $x_0 \in (a; b)$, що функція в цій точці набуває свого найбільшого або найменшого значення. Тоді за теоремою Ферма $f'(x_0) = 0$. ▲

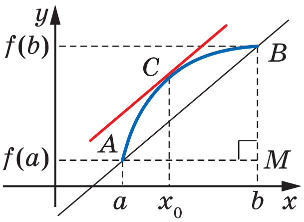


Рис. 10.5

На рисунку 10.5 зображено графік функції, диференційовної на відрізку $[a; b]$.

Проведемо пряму AB. З трикутника AMB можна знайти кутовий коефіцієнт цієї прямої:

$$\operatorname{tg} \angle BAM = \frac{BM}{AM} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Оберемо на дузі AB таку точку C, що дотична до графіка в цій точці паралельна прямій AB.

Кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$ цієї дотичної дорівнює кутовому коефіцієнту прямої AB, тобто існує $x_0 \in (a; b)$, що

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

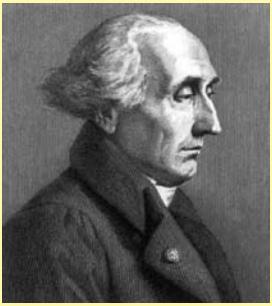
Цей висновок ілюструє також механічна інтерпретація.

Якщо матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $y = s(t)$, $t \in [a; b]$, то середня швидкість дорівнює

$$v_{\text{сер}} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

Зрозуміло, що під час руху є такий момент $t_0 \in (a; b)$, коли миттєва швидкість дорівнює середній, тобто

$$v(t_0) = s'(t_0) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$



Жозеф Луї Лагранж (1736–1813)

Французький математик, механік і астроном, президент Берлінської академії наук, член Паризької академії наук. Основні праці — у галузі математичного аналізу, варіаційного числення, алгебри, теорії чисел, диференційних рівнянь, механіки. Кавалер ордена Почесного легіону.

Отримані висновки підтверджує така теорема.

Теорема 10.3 (теорема Лагранжа). ***Якщо функція f диференційовна на відрізку $[a; b]$, то існує така точка $x_0 \in (a; b)$, що***

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію $g(x) = f(x) - \lambda x$, де $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Очевидно, що функція g є диференційовною на відрізку $[a; b]$. Легко перевірити (зробіть це самостійно), що $g(a) = g(b)$. Отже, функція g задовольняє всім умовам теореми Ролля.

Таким чином, існує точка $x_0 \in (a; b)$ така, що $g'(x_0) = 0$. Оскільки $g'(x) = f'(x) - \lambda$, то $f'(x_0) - \lambda = 0$. Звідси

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \blacktriangle$$

Зауважимо, що теореми Ролля і Лагранжа не вказують, як знайти точку x_0. Вони лише гарантують, що існує точка з певною властивістю.

Вправи

10.1.° Відомо, що функція f у точці x_0 набуває найбільшого або найменшого значення. Перевірте рівність $f'(x_0) = 0$, якщо:

1) $f(x) = x^6$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

10.2.° Відомо, що функція f у точці x_0 набуває найбільшого або найменшого значення. Перевірте рівність $f'(x_0) = 0$, якщо:

1) $f(x) = 5 - x^2$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$.

10.3.• Запишіть теорему Лагранжа для відрізка $[1; 2]$. На інтервалі $(1; 2)$ знайдіть таку точку x_0, для якої виконується рівність $f(2) - f(1) = f'(x_0)$, якщо:

1) $f(x) = x^3$; 2) $f(x) = \frac{1}{x}$; 3) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$.

10.4.° Запишіть теорему Лагранжа для відрізка [1; 3]. На інтервалі (1; 3) знайдіть таку точку x_0, для якої виконується рівність $\frac{f(3)-f(1)}{2}=f'(x_0)$, якщо:

1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x)=\sqrt{x}$; 3) $f(x)=\cos\frac{\pi x}{4}$.

10.5.° Використовуючи теорему Ферма, доведіть, що функція f не набуває в точці x_0 ні найбільшого, ні найменшого значення, якщо:

1) $f(x) = x^4 + x + 1$, $x_0 = -0,5$;

2) $f(x)=\frac{1}{1-x}-x-\frac{1}{x}$, $D(f) = (1; 3)$, $x_0 = 2$;

3) $f(x) = \sin x + \cos x^2$, $D(f) = [1; 2]$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

10.6.° Доведіть, що функція f не набуває в точці x_0 ні найбільшого, ні найменшого значення, якщо:

1) $f(x) = (x^2 + 6x + 8)(x^2 + 14x + 48)$, $x_0 = -3$;

2) $f(x)=\frac{2}{x}+x^2+\frac{1}{x+3}$, $D(f) = (0; +\infty)$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \cos x - \sin x^2$, $D(f) = [0; 2]$, $x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

10.7.•• Використовуючи теорему Лагранжа, доведіть нерівність:

1) $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$;

2) $|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geqslant |x - y|$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

10.8.•• Доведіть нерівність:

1) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$;

2) $|\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y| \geqslant |x - y|$, $x \in (0; \pi)$, $y \in (0; \pi)$.

10.9.•• Функція f диференційовна на $\mathbb{R}$. Скориставшись теоремою Ролля для функції $g(x) = f(x) \sin x$, доведіть, що рівняння $f'(x) \sin x + f(x) \cos x = 0$ має принаймні один корінь на відрізку $[0; \pi]$.

10.10.•• Функція f диференційовна на $\mathbb{R}$. Доведіть, що рівняння $f'(x) = f(x) \operatorname{tg} x$ має принаймні один корінь на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

10.11.** Василь Заплутайко хоче довести, що похідна функції $f(x) = |x|$ у точці $x_0 = 0$ дорівнює нулю. Він каже, що $f(-1) = f(1)$. Тому за теоремою Ролля існує точка $x_0 \in (-1;\ 1)$ така, що $f'(x_0) = 0$. Але на інтервалі $(0;\ 1)$ такої точки x_0 не існує, бо на цьому проміжку $f(x) = x$ і $f'(x) = 1$. Так само її немає на інтервалі $(-1;\ 0)$. Виходить, що $x_0 = 0$. Отже, $f'(x_0) = f'(0) = 0$. Чи правий Василь?

11. Ознаки зростання і спадання функції

Ви знаєте, що коли функція є константою, то її похідна дорівнює нулю. Виникає запитання: якщо функція f така, що для всіх x з проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то чи є функція f константою на проміжку I?

Звернемося до механічної інтерпретації.

Нехай $y = s(t)$ – закон руху матеріальної точки по координатній прямій. Якщо в будь-який момент часу t від t_1 до t_2 виконується рівність $s'(t) = 0$, то протягом розглядуваного проміжку часу миттєва швидкість дорівнює нулю, тобто точка не рухається і її координата не змінюється. Це означає, що на розглядуваному проміжку функція $y = s(t)$ є константою.

Ці міркування підказують, що справедливою є така теорема.

Теорема 11.1 (ознака сталості функції). ***Якщо для всіх x з проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то функція f є константою на цьому проміжку.***

Доведення. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу функції f, узяті з проміжку I, причому $x_1 < x_2$.

Оскільки $[x_1;\ x_2] \subset I$ і функція f диференційовна на I, то для відрізка $[x_1;\ x_2]$ виконуються всі умови теореми Лагранжа. Тоді існує точка $x_0 \in (x_1;\ x_2)$ така, що

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Оскільки $x_0 \in I$, то $f'(x_0) = 0$. Отже, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$. Звідси $f(x_2) = f(x_1)$. Ураховуючи, що числа x_1 і x_2 вибрано довільним чином, можемо зробити висновок: функція f є константою на проміжку I. ▲

На рисунку 11.1 зображено графік деякої функції f, яка є диференційовною на проміжку $[a; b]$. Цей графік має таку властивість: будь-яка дотична до графіка утворює гострий кут з додатним напрямом осі абсцис.

Оскільки тангенс гострого кута є додатним числом, то кутовий коефіцієнт будь-якої дотичної також є додатним. Тоді, виходячи з геометричного змісту похідної, можна зробити такий висновок: для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f'(x) > 0$.

З рисунка 11.1 видно, що функція f зростає на розглядуваному проміжку.

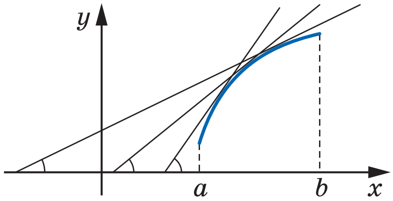


Рис. 11.1

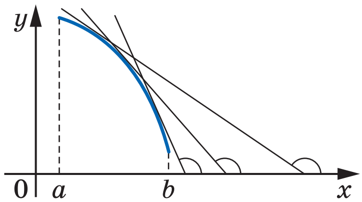


Рис. 11.2

На рисунку 11.2 зображено графік деякої функції f, яка є диференційовною на проміжку $[a; b]$. Будь-яка дотична до графіка утворює тупий кут з додатним напрямом осі абсцис.

Оскільки тангенс тупого кута є від'ємним числом, то кутовий коефіцієнт будь-якої дотичної також є від'ємним. Тоді для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f'(x) < 0$.

З рисунка 11.2 видно, що функція f спадає на розглядуваному проміжку.

Ці приклади показують, що знак похідної функції на деякому проміжку I впливає на те, чи є ця функція зростаючою (спадною) на проміжку I.

Зв'язок між знаком похідної та зростанням (спаданням) функції можна побачити і за допомогою механічної інтерпретації. Справді, якщо швидкість, тобто похідна функції $y = s(t)$, є додатною, то точка на координатній прямій рухається вправо (рис. 11.3). Це означає, що з нерівності $t_1 < t_2$ випливає нерівність $s(t_1) < s(t_2)$, тобто функція $y = s(t)$ є зростаючою. Аналогічно, якщо швидкість є від'ємною, то точка рухається вліво, тобто функція $y = s(t)$ є спадною.

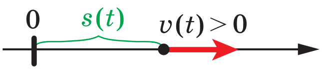


Рис. 11.3

Цей зв'язок установлюють такі дві теореми.

Теорема 11.2 (ознака зростання функції). ***Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку.***

Теорема 11.3 (ознака спадання функції). ***Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.***

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що функція $f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x - 100$ зростає на множині дійсних чисел.

Розв'язання. Маємо: $f'(x) = x^4 + x^2 + 1$. Оскільки $x^4 + x^2 + 1 > 0$ при всіх $x \in \mathbb{R}$, то функція f зростає на множині дійсних чисел. ●

Доведемо теорему 11.2 (теорему 11.3 доводять аналогічно).

Доведення. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу функції f, узяті з проміжку I, причому $x_2 > x_1$.

Оскільки $[x_1; x_2] \subset I$ і функція f диференційовна на I, то для відрізка $[x_1; x_2]$ виконуються всі умови теореми Лагранжа. Тоді існує точка $x_0 \in (x_1; x_2)$ така, що

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Оскільки $x_0 \in I$, то $f'(x_0) > 0$. Отже, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$. Тоді з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, тобто функція f зростає на I. ▲

Зауважимо, що має місце і таке твердження: якщо диференційовна на проміжку I функція f зростає (спадає), то для всіх x з цього проміжку виконується нерівність $f'(x_0) \geqslant 0$ ($f'(x_0) \leqslant 0$).

Якщо функція f визначена на проміжку $[a, b)$ і зростає на інтервалі (a, b), то це не означає, що вона зростає на проміжку $[a, b)$ (подумайте чому). Досліджувати зростання і спадання функції на різних проміжках допомагає така ключова задача.

ЗАДАЧА Нехай для довільного $x \in (a; b)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, і функція f має похідну в точці a. Доведіть, що функція f зростає на проміжку $[a; b)$.

Розв'язання. З теореми 11.2 випливає лише те, що функція f зростає на інтервалі $(a; b)$. Доведення зростання функції f на проміжку $[a; b)$ вимагає додаткового дослідження.

Нехай x — довільна точка проміжку $(a; b)$. Доведемо, що $f(x) > f(a)$. З теореми Лагранжа для функції f на відрізку $[a; x]$ випливає існування такої точки $x_0 \in (a; x)$, що

$$f'(x_0) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Оскільки $x_0 \in (a; b)$, то $f'(x_0) > 0$. Звідси $f(x) > f(a)$.

Таким чином, доведено, що функція f зростає на проміжку $[a; b)$. ●

Зауваження 1. Насправді сформульовану в даній задачі умову можна послабити, замінивши вимогу диференційовності функції f у точці $x = a$ на її неперервність у цій точці. Тобто має місце таке твердження: якщо для всіх $x \in (a; b)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$ і функція f неперервна в точці $x = a$, то функція f зростає на проміжку $[a; b)$.

Зауваження 2. Використовуючи відповідні твердження, можна обґрунтувати зростання (спадання) функції f на проміжках іншого виду, наприклад $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$, $[a; b]$.

Наприклад, якщо для всіх $x \in (a;\ +\infty)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$ і функція f неперервна в точці $x = a$, то функція f зростає на проміжку $[a;\ +\infty)$.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть проміжки зростання (спадання) функції $f(x) = x^2 - 2x$.

Розв'язання. Маємо: $f'(x) = 2x - 2$. Розв'язавши нерівності $2x - 2 > 0$ і $2x - 2 < 0$, доходимо до такого: $f'(x) > 0$ на проміжку $(1;\ +\infty)$; $f'(x) < 0$ на проміжку $(-\infty;\ 1)$. Отже, функція f зростає на проміжку $(1;\ +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty;\ 1)$.

На рисунку 11.4 зображено графік функції f. З рисунка видно, що насправді функція f зростає на проміжку $[1;\ +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty;\ 1]$.

При записі відповіді керуватимемося таким правилом: якщо функція f є неперервною в якомусь з кінців проміжку зростання (спадання), то цю точку приєднують до цього проміжку. У нашому прикладі функція $f(x) = x^2 - 2x$ є неперервною в точці $x = 1$, тому цю точку приєднали до проміжків $(1;\ +\infty)$ і $(-\infty;\ 1)$.

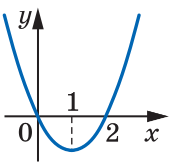


Рис. 11.4

Відповідь: зростає на $[1;\ +\infty)$, спадає на $(-\infty;\ 1]$.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}$;

2) $f(x) = -\dfrac{3}{4}x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5$; 4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$.

Розв'язання

1) Маємо: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$.

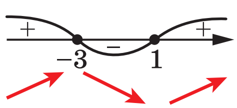


Рис. 11.5

Дослідивши знак похідної методом інтервалів (рис. 11.5) і врахувавши неперервність функції f у точках $x = -3$ і $x = 1$, отримуємо, що вона зростає на кожному з проміжків $(-\infty;\ -3]$ і $[1;\ +\infty)$ та спадає на проміжку $[-3;\ 1]$.

2) Маємо: $f'(x) = -3x^3 + 12x^2 - 12x = -3x(x^2 - 4x + 4) =$
$= -3x(x-2)^2$.

Дослідивши знак похідної (рис. 11.6), доходимо висновку, що функція зростає на проміжку $(-\infty; 0]$ і спадає на проміжку $[0; +\infty)$.

3) Маємо: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Обчисливши похідну функції f, отримуємо:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}.$$

Дослідимо знак функції $y = f'(x)$ (рис. 11.7). Отже, дана функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -1]$ і $[3; +\infty)$ та спадає на проміжках $[-1; 1)$ і $(1; 3]$.

4) Маємо $D(f) = (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$. Знайдемо похідну функції f: $f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 3x}\right)' = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$. Зауважимо, що в точках $x = 0$ та $x = 3$ функція f не є диференційовною, але є неперервною.

Нерівність $\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}} > 0$ рівносильна системі $\begin{cases} 2x - 3 > 0, \\ x^2 - 3x > 0. \end{cases}$

Отримуємо, що множиною розв'язків розглядуваної нерівності є проміжок $(3; +\infty)$.

Далі легко встановити, що множиною розв'язків нерівності $\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}} < 0$ є проміжок $(-\infty; 0)$.

Отже, якщо $x < 0$, то $f'(x) < 0$; якщо $x > 3$, то $f'(x) > 0$ (рис. 11.8).

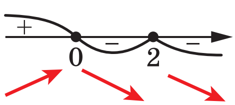


Рис. 11.6

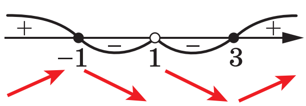


Рис. 11.7

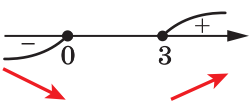


Рис. 11.8

Тому функція f зростає на проміжку $[3; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty; 0]$. ●

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0.$

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4$, $D(f) = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. Для всіх $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ маємо: $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + \frac{3}{2\sqrt{1-3x}}$. Очевидно, що $f'(x) > 0$ при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, тобто функція f зростає на проміжку $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. Оскільки функція f є неперервною в точці $x = \frac{1}{3}$, то ця функція зростає на $D(f) = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. Тоді функція f набуває кожного свого значення тільки один раз, а отже, дане рівняння не може мати більше ніж один корінь.

Оскільки $f(-1) = 0$, то $x = -1$ є єдиним коренем даного рівняння.

Відповідь: -1.

ПРИКЛАД 5 Доведіть, що для всіх $x > -1$ виконується нерівність $x^9 + 4x + 3 > 2x^5$.

Розв'язання. Доведемо, що для всіх $x > -1$ виконується нерівність $x^9 - 2x^5 + 4x + 3 > 0$.

Розглянемо функцію $f(x) = x^9 - 2x^5 + 4x + 3$. Оскільки $f(-1) = 0$, то нерівність можна подати у вигляді $f(x) > f(-1)$, де $x \in (-1; +\infty)$. Маємо: $f'(x) = 9x^8 - 10x^4 + 4$. Оскільки квадратний тричлен $9t^2 - 10t + 4$ має від'ємний дискримінант, то $f'(x) > 0$. Тому функція f є зростаючою. Звідси для будь-якого $x \in (-1; +\infty)$ виконується нерівність $f(x) > f(-1)$. ●

Вправи

11.1.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$;
3) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$;
4) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;
5) $f(x) = x^3 + 4x - 8$;
6) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x + 9$.

11.2.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$;
2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$;
3) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$;
4) $f(x) = x^4 + 4x - 20$.

11.3.• Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$;
2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$;
3) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 9x - 6$;
4) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$;
5) $f(x) = x + \frac{9}{x}$;
6) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$;
7) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3 - x}$;
8) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$.

11.4.• Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 36x^2 - 4$;
2) $f(x) = 9 + 4x^3 - x^4$;
3) $f(x) = \frac{2x - 9}{x - 5}$;
4) $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x - 4}$;
5) $f(x) = 3x + \frac{12}{x^2}$;
6) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

11.5.• На рисунку 11.9 зображено графік похідної диференційовної на $\mathbb{R}$ функції f. Укажіть проміжки спадання функції f.

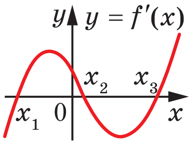


Рис. 11.9

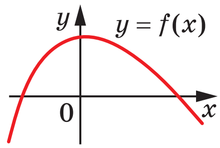


Рис. 11.10

11.6.° На рисунку 11.10 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на $\mathbb{R}$. Серед наведених на рисунку 11.11 графіків укажіть той, який може бути графіком функції $y = f'(x)$.

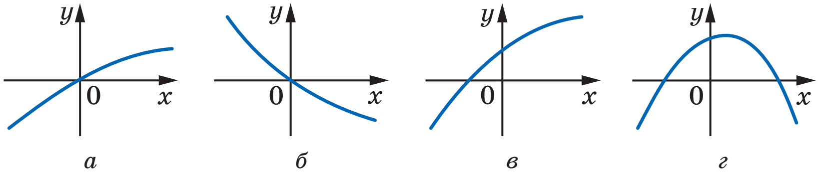


Рис. 11.11

11.7.° На рисунку 11.12 зображено графік похідної диференційовної на $\mathbb{R}$ функції f. Укажіть проміжки зростання функції f.

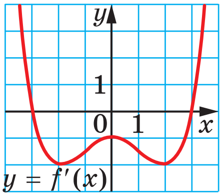


Рис. 11.12

11.8.° На рисунку 11.13 зображено графіки похідних диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій f, g і h. Яка з функцій f, g, h спадає на відрізку $[-1; 1]$?

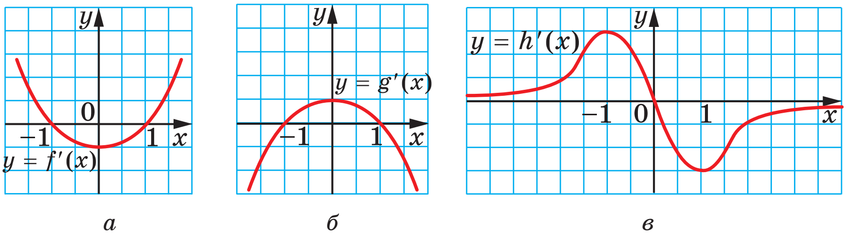


Рис. 11.13

11.9.° На рисунку 11.14 зображено графіки похідних диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій f, g і h. Яка з функцій f, g, h спадає на $\mathbb{R}$?

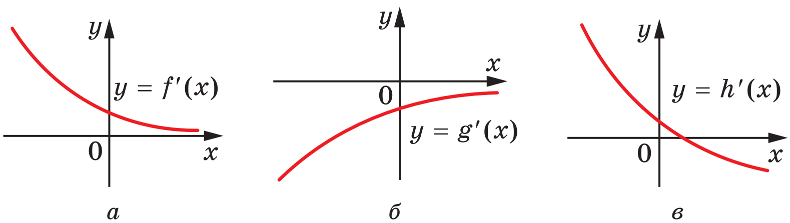


Рис. 11.14

11.10.• Доведіть, що функція спадає на множині дійсних чисел:

1) $f(x) = 6 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$; 3) $f(x) = \sin 2x - 3x$.

2) $f(x) = -2x^3 + 2x^2 - 10x + 80$;

11.11.• Доведіть, що функція зростає на множині дійсних чисел:

1) $f(x) = 10x^3 - 9x^2 + 24x - 90$; 3) $f(x) = \cos 3x + 4x$.

2) $f(x) = \sin x + x^3 + x$;

11.12.• Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x\sqrt{2} + \sin x$; 3) $y = \cos x + \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

2) $f(x) = x - \cos x$;

11.13.• Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = \sin x - x$; 2) $f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{2} - \sin x$.

11.14.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$; 2) $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$.

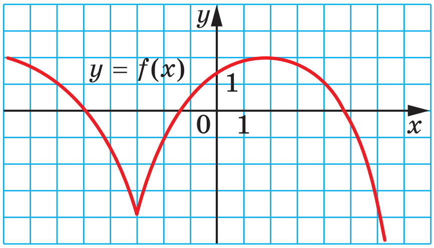
11.15.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

11.16.• На рисунку 11.15 зображено графіки функцій f і g, визначених на $\mathbb{R}$. Використовуючи ці графіки, розв'яжіть нерівність: 1) $f'(x) \leqslant 0$; 2) $g'(x) \geqslant 0$.

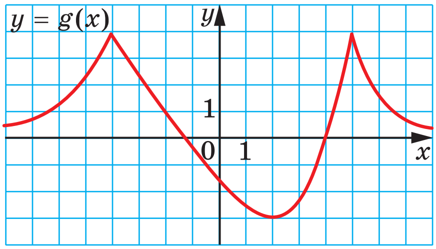
11.17.• На рисунку 11.16 зображено графіки функцій f і g, визначених на $\mathbb{R}$. Використовуючи ці графіки, розв'яжіть нерівність: 1) $f'(x) \geqslant 0$; 2) $g'(x) \leqslant 0$.

11.18.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$.

11.19.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $f(x) = \operatorname{ctg} x + 4x$.

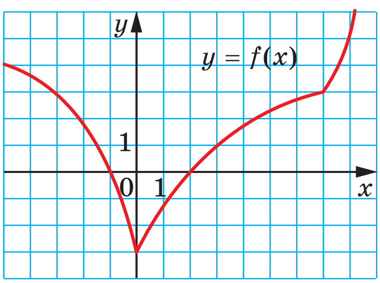


а

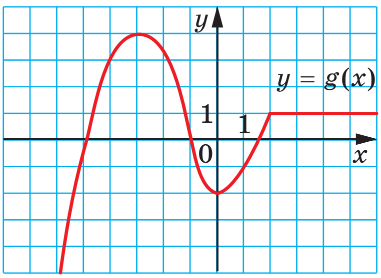


б

Рис. 11.15



а



б

Рис. 11.16

11.20.•• При яких значеннях параметра a є зростаючою функція:

1) $y = x^3 - ax$;

2) $y = 3\sin 4x + ax$;

3) $y = -2\sqrt{1-x} + ax$;

4) $y = \frac{x^3}{3} + 2(a+1)x^2 + 9x - 4$?

11.21.•• При яких значеннях параметра a є спадною функція:

1) $y = ax - x^5$;

2) $y = 2\cos 3x + ax$;

3) $y = -2\sqrt{x+3} + ax$;

4) $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - 4x + 21$?

11.22.•• При яких значеннях параметра c функція

$$f(x) = (c - 12)x^3 + 3(c - 12)x^2 + 6x + 7$$

зростає на $\mathbb{R}$?

11.23.•• При яких значеннях параметра a функція

$$y = (a + 2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$$

спадає на $\mathbb{R}$?

11.24.•• При яких значеннях параметра a функція

$$y = (a + 3)x^3 + 3(a + 3)x^2 - 5x + 12$$

спадає на $\mathbb{R}$?

11.25.•• Доведіть нерівність $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$.

11.26.•• Доведіть нерівність $x < \operatorname{tg} x$, де $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

11.27.•• Розв'яжіть рівняння $3x^7 + x + 7 = \sqrt{1 - 8x}$.

11.28.•• Розв'яжіть рівняння $x^5 + 4x + \cos x = 1$.

11.29.•• Розв'яжіть рівняння $x^3 + 2x = \sin x$.

11.30.•• Розв'яжіть нерівність $x^7 + 3x > 2x^4 + 2$.

11.31.•• Розв'яжіть нерівність $x^5 + 4x < 2x^3 + 3$.

11.32.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - y = \sin x - \sin y, \\ 3x + 4y = 7. \end{cases}$

11.33.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x - 2y = \cos y - \cos x, \\ x + y = 8. \end{cases}$

12. Точки екстремуму функції

Знайомлячись з такими поняттями як границя і неперервність функції в точці, ми досліджували поведінку функції поблизу цієї точки або, як прийнято говорити, в її **околі**.

Означення 1. Інтервал $(a; b)$, який містить точку x_0, називають околом точки x_0.

Зрозуміло, що будь-яка точка має безліч околів. Наприклад, проміжок $(-1; 3)$ — один з околів точки 2,5. Разом з тим цей проміжок не є околом точки 3.

На рисунку 12.1 зображено графіки чотирьох функцій. Усі ці функції мають спільну особливість: існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$.

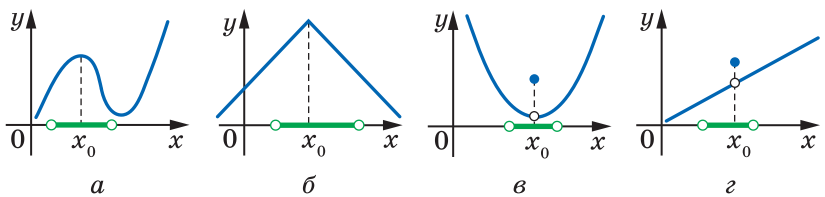


Рис. 12.1

Означення 2. Точку x_0 називають точкою максимуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Наприклад, точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ є точкою максимуму функції $y = \sin x$ (рис. 12.2). Пишуть $x_{\max} = \frac{\pi}{2}$.

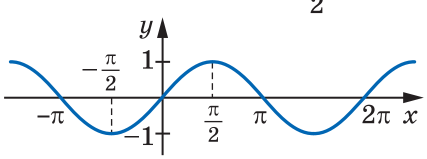


Рис. 12.2

На рисунку 12.1 $x_{\max} = x_0$.

Означення 3. **Точку x_0 називають точкою мінімуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$.**

Наприклад, точка $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ є точкою мінімуму функції $y = \sin x$ (рис. 12.2). Пишуть $x_{\min} = -\frac{\pi}{2}$.

На рисунку 12.3 зображено графіки функцій, для яких x_0 є точкою мінімуму, тобто $x_{\min} = x_0$.

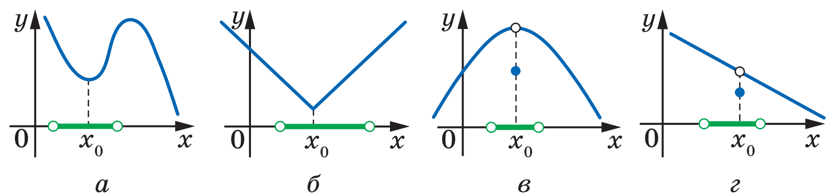


Рис. 12.3

Точки максимуму і мінімуму мають спільну назву: їх називають **точками екстремуму** функції (від латинського *extremum* — крайній).

На рисунку 12.4 точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 є точками екстремуму.

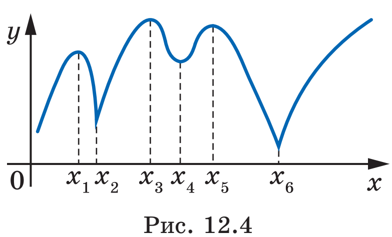


Рис. 12.4

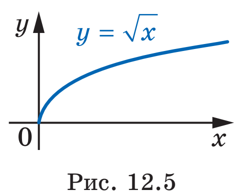


Рис. 12.5

З означень 2 і 3 випливає, що точки екстремуму є внутрішніми точками[1] області визначення функції. Тому, наприклад, точка $x_0 = 0$ не є точкою мінімуму функції $y = \sqrt{x}$ (рис. 12.5), а точка $x_0 = 1$ не є точкою максимуму функції

[1] Точку $x_0 \in M$ називають *внутрішньою* точкою множини M, якщо існує окіл точки x_0, який є підмножиною множини M.

$y = \arcsin x$ (рис. 12.6). Разом з тим найменше значення функції $y = \sqrt{x}$ на множині $[0; +\infty)$ дорівнює нулю, тобто $\min\limits_{[0; +\infty)} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$, а $\max\limits_{[-1; 1]} \arcsin x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

На рисунку 12.7 зображено графік деякої функції f, яка на проміжку $[x_1; x_2]$ є константою.

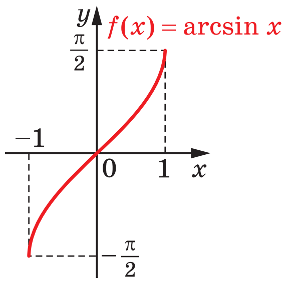


Рис. 12.6

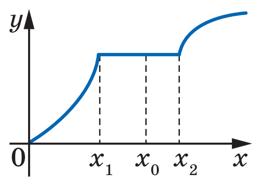


Рис. 12.7

Оскільки нерівності $f(x_0) \geqslant f(x)$ і $f(x_0) \leqslant f(x)$, які використовуються в означеннях 2 і 3, є нестрогими, то можна зробити такий висновок: точка x_1 є точкою максимуму, точка x_2 — мінімуму, а будь-яка точка інтервалу $(x_1; x_2)$ є одночасно як точкою максимуму, так і точкою мінімуму функції f.

Графіки функцій, зображених на рисунках 12.8 і 12.9, показують, що точки екстремуму можна поділити на два види: ті, у яких похідна дорівнює нулю (на рис. 12.8 дотична до графіка в точці з абсцисою x_0 є горизонтальною прямою), і ті, у яких функція недиференційовна (рис. 12.9).

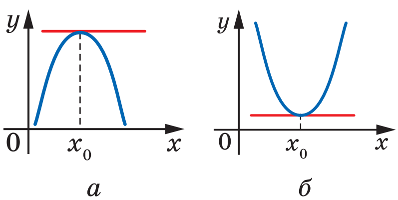


Рис. 12.8

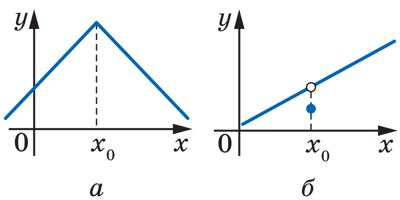


Рис. 12.9

Дійсно, справедливою є така теорема.

Теорема 12.1. ***Якщо x_0 є точкою екстремуму функції f, то або $f'(x_0) = 0$, або функція f не є диференційовною в точці x_0.***

Учні профільних класів можуть, використовуючи теорему Ферма, довести теорему 12.1 самостійно.

Виникає природне запитання: чи обов'язково є точкою екстремуму внутрішня точка області визначення функції, у якій похідна дорівнює нулю або не існує?

Відповідь на це запитання заперечна.

Наприклад, на рисунку 12.10 зображено графік функції, недиференційовної в точці x_0. Проте точка x_0 не є точкою екстремуму.

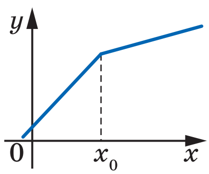


Рис. 12.10

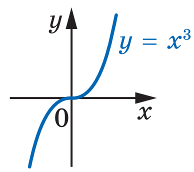


Рис. 12.11

Наведемо ще один приклад. Для функції $f(x) = x^3$ маємо: $f'(x) = 3x^2$. Тоді $f'(0) = 0$. Проте точка $x_0 = 0$ не є точкою екстремуму функції f (рис. 12.11).

Ці приклади показують, що теорема 12.1 дає необхідну, але не достатню умову існування екстремуму в даній точці.

Означення 4. **Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають критичними точками функції.**

Наприклад, точка $x_0 = 0$ є критичною точкою функцій $y = x^3$ і $y = |x|$; точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ є критичною точкою функції $y = \sin x$.

Із сказаного вище випливає, що *кожна точка екстремуму функції є її критичною точкою, проте не кожна* *критична точка є точкою екстремуму*. Іншими словами, *точки екстремуму слід шукати серед критичних точок*. Цей факт проілюстровано на рисунку 12.12.

Рис. 12.12

На рисунку 12.13 зображено графіки функцій, для яких x_0 є критичною точкою.

На рисунках 12.13, *а*, *б*, *в*, *г* критична точка x_0 є точкою екстремуму, на рисунках 12.13, *ґ*, *д* критична точка x_0 не є точкою екстремуму.

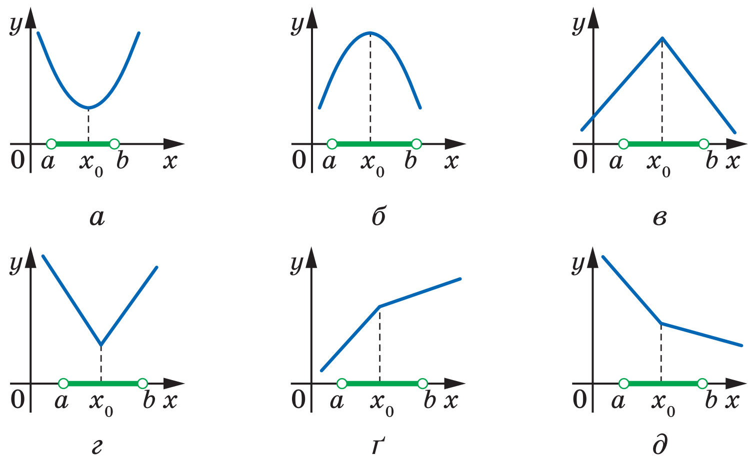


Рис. 12.13

Наявність екстремуму функції в точці x_0 пов'язана з поведінкою функції в околі цієї точки. Так, для функцій, графіки яких зображено на рисунках 12.13, *а*–*г*, маємо: функція зростає (спадає) на проміжку $(a; x_0]$ і спадає (зростає) на проміжку $[x_0; b)$.

Функції, графіки яких зображено на рисунках 12.13, *ґ*, *д*, такої властивості не мають: перша з них зростає на кожному з проміжків $(a; x_0]$ і $[x_0; b)$, друга — спадає на цих проміжках.

Узагалі, якщо область визначення неперервної функції розбито на скінченну кількість проміжків зростання і спадання, то легко знайти всі точки екстремумів (рис. 12.14).

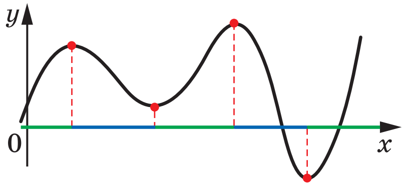


Рис. 12.14

Ви знаєте, що за допомогою похідної можна знаходити проміжки зростання (спадання) диференційовної функції. Дві теореми, наведені нижче, показують, як за допомогою похідної можна знаходити точки екстремуму функції.

Теорема 12.2 (ознака точки максимуму функції). ***Нехай функція f є диференційовною на інтервалі $(a;\ b)$ і x_0 — деяка точка цього інтервалу. Якщо для всіх $x \in (a;\ x_0]$ виконується нерівність $f'(x) \geqslant 0$, а для всіх $x \in [x_0;\ b)$ виконується нерівність $f'(x) \leqslant 0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції f*** (рис. 12.13, *а*).

Теорема 12.3 (ознака точки мінімуму функції). ***Нехай функція f є диференційовною на інтервалі $(a;\ b)$ і x_0 — деяка точка цього інтервалу. Якщо для всіх $x \in (a;\ x_0]$ виконується нерівність $f'(x) \leqslant 0$, а для всіх $x \in [x_0;\ b)$ виконується нерівність $f'(x) \geqslant 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції f*** (рис. 12.13, *б*).

Доведемо теорему 12.2 (теорему 12.3 доводять аналогічно).

Доведення. Нехай x_1 — довільна точка інтервалу $(a;\ x_0)$. З теореми Лагранжа для відрізка $[x_1;\ x_0]$ випливає існування такої точки $c \in (x_1;\ x_0)$, що

$$f'(c) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}.$$

Оскільки $c \in (a;\ x_0]$, то $f'(c) \geqslant 0$. З нерівностей $f'(c) \geqslant 0$ і $x_0 - x_1 > 0$ отримуємо: $f(x_0) \geqslant f(x_1)$.

Аналогічно для довільної точки $x_2 \in (x_0;\ b)$ можна довести, що $f(x_0) \geqslant f(x_2)$.

Звідси випливає, що x_0 — точка максимуму. ▲

Інколи зручно користуватися спрощеними формулюваннями цих двох теорем: *якщо при переході через точку* x_0 *похідна змінює знак з плюса на мінус, то* x_0 *— точка максимуму*; *якщо похідна змінює знак з мінуса на плюс, то* x_0 *— точка мінімуму*.

Для функції f точки екстремуму можна шукати за такою схемою.

1) Знайти $f'(x)$.
2) Дослідити знак похідної в околах критичних точок.
3) Користуючись відповідними теоремами, стосовно кожної критичної точки з'ясувати, чи є вона точкою екстремуму.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$;

2) $f(x) = 2x^2 - x^4$; 4) $f(x) = \dfrac{x + 2}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. 1) Маємо: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x + 1)(x - 2)$. Методом інтервалів дослідимо знак похідної в околах критичних точок $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (рис. 12.15). Отримуємо, що $x_{max} = -1$, $x_{min} = 2$.

2) $f'(x) = 4x - 4x^3 = -4x(x^2 - 1) = -4x(x + 1)(x - 1)$.

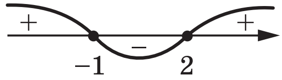


Рис. 12.15

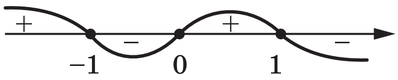


Рис. 12.16

Дослідивши знак похідної (рис. 12.16), отримуємо:

$$x_{max} = -1,\ x_{min} = 0 \text{ і } x_{max} = 1.$$

3) Маємо:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x + 4)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} =$$

$$= \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}.$$

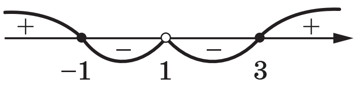


Рис. 12.17

Дослідимо знак похідної в околах критичних точок $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ (рис. 12.17). Маємо, що $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 3$.

4) Маємо:

$$f'(x) = \frac{(x+2)' \cdot \sqrt{x} - \left(\sqrt{x}\right)' \cdot (x+2)}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x+2)}{x} =$$

$$= \frac{2x - (x+2)}{2x\sqrt{x}} = \frac{x-2}{2x\sqrt{x}}.$$

Якщо $0 < x \leqslant 2$, то $f'(x) \leqslant 0$; якщо $x \geqslant 2$, то $f'(x) \geqslant 0$. Отже, критична точка $x = 2$ є точкою мінімуму, тобто $x_{\min} = 2$.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть точки екстремуму функції

$$f(x) = \sin\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} - \frac{x-3}{2}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}.$$

Знайдемо критичні точки даної функції:

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} = 0; \quad \left[\begin{aligned} &\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ &\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}; \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &x = 4\pi k, \\ &x = -\frac{4\pi}{3} + 4\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

Функція $f'(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right) - \dfrac{1}{2}$ є періодичною з періодом $T = 4\pi$. Методом інтервалів дослідимо її знак на проміжку

[-2π; 2π] завдовжки в період. Цьому проміжку належать дві критичні точки: $x = 0$ і $x = -\frac{4\pi}{3}$.

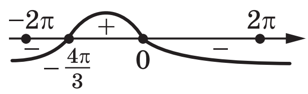


Рис. 12.18

На рисунку 12.18 показано результат дослідження знака похідної на проміжку [-2π; 2π]. Тепер можна зробити висновок: $x_{max} = 0$, $x_{min} = -\frac{4\pi}{3}$.

Узагальнюючи отриманий результат, дістаємо відповідь: $x_{max} = 4\pi k$, $x_{min} = -\frac{4\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. ●

Вправи

12.1.° На рисунку 12.19 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку [-10; 9]. Укажіть: 1) критичні точки функції; 2) точки мінімуму; 3) точки максимуму.

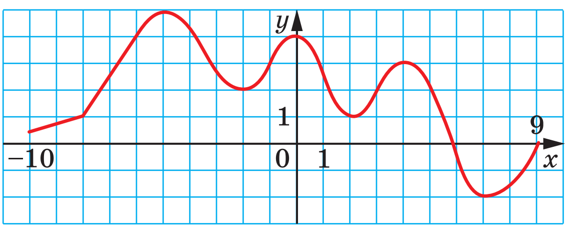


Рис. 12.19

12.2.° На рисунку 12.20 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку [-7; 7]. Укажіть: 1) критичні точки функції; 2) точки мінімуму; 3) точки максимуму.

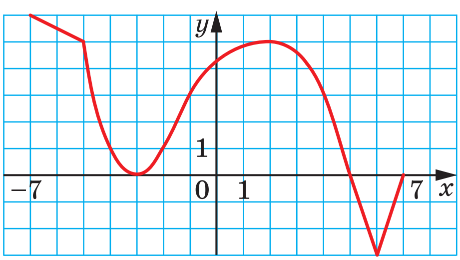


Рис. 12.20

12.3.° На рисунку 12.21 укажіть графік функції, для якої точка x_0 є точкою мінімуму.

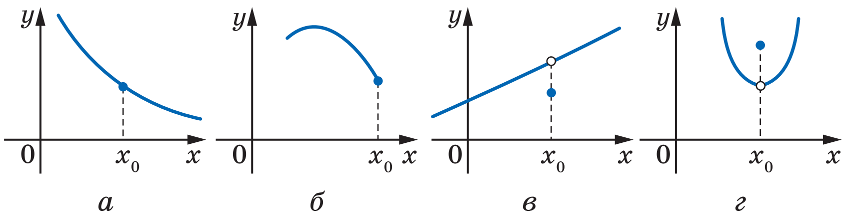


Рис. 12.21

12.4.° Чи має критичні точки функція:

1) $f(x) = x$;
2) $f(x) = x^5 + 1$;
3) $f(x) = 5$;
4) $f(x) = \sin x$;
5) $f(x) = \operatorname{tg} x$;
6) $f(x) = \sqrt{x}$?

12.5.° На рисунку 12.22 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Чи є правильною рівність:

1) $f'(-3) = 0$;
2) $f'(-2) = 0$;
3) $f'(0) = 0$;
4) $f'(1) = 0$;
5) $f'(2) = 0$;
6) $f'(3) = 0$?

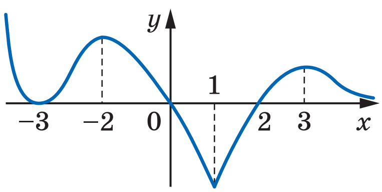


Рис. 12.22

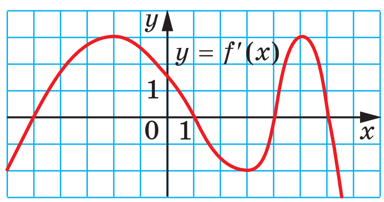


Рис. 12.23

12.6.° Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

1) $f(x) = 0{,}5x^4$;
2) $f(x) = x^2 - 6x$;
3) $f(x) = 12x - x^3$;
4) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$;
5) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$;
6) $f(x) = x^2 - \dfrac{x^4}{2}$.

12.7.° Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

1) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x$;
2) $f(x) = 4x - \dfrac{1}{3}x^3$;

3) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$;
4) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 4$;
5) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2$;
6) $f(x) = 2 + x^2 + 2x^3 - 2x^4$.

12.8.° Функція $y = f(x)$ диференційовна на множині дійсних чисел. На рисунку 12.23 зображено графік її похідної. Укажіть точки максимуму і мінімуму функції $y = f(x)$.

12.9.° Функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел і має похідну в кожній точці області визначення. На рисунку 12.24 зображено графік функції $y = f'(x)$. Скільки точок екстремуму має функція $y = f(x)$?

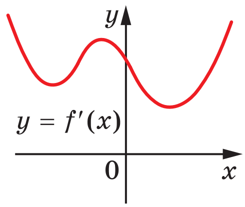


Рис. 12.24

12.10.° Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 7$;
2) $f(x) = (x - 1)^3 (x - 2)^2$;
3) $f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{5}x^5 + x^4 + 3$.

12.11.° Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 9$;
2) $f(x) = (x + 4)^4 (x - 3)^3$.

12.12.° Доведіть, що дана функція не має точок екстремуму:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 10$;
2) $f(x) = \sin x - x$.

12.13.° Доведіть, що дана функція не має точок екстремуму:

1) $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 20$;
2) $f(x) = \cos x + x$.

12.14.° Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$;
2) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$;
4) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{9}{x^2}$;
5) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2}$;
6) $f(x) = -\frac{1}{(x - 3)^2}$;
7) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 16}$;
8) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.

12.15.• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x)=\frac{x^2-6x}{x+2}$; 3) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$; 5) $f(x)=\frac{1}{16-x^2}$;

2) $f(x)=x+\frac{9}{x}$; 4) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$; 6) $f(x)=2x-\sqrt{x}$.

12.16.• Чи є правильним твердження:

1) значення функції в точці максимуму може бути меншим від значення функції в точці мінімуму;
2) функція в точці екстремуму може бути недиференційовною;
3) якщо похідна в деякій точці дорівнює нулю, то ця точка є точкою екстремуму функції?

12.17.• Чи є правильним твердження:

1) у точці екстремуму похідна функції дорівнює нулю;
2) якщо функція в деякій точці недиференційовна, то ця точка є точкою екстремуму функції?

12.18.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x)=\frac{x}{2}-\sin x$; 2) $f(x)=\cos 2x-x\sqrt{3}$.

12.19.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x)=\cos x+\frac{x}{2}$; 2) $f(x)=\sin 2x-x\sqrt{2}$.

12.20.•• При яких значеннях a функція $y=x^3-3ax^2+27x-5$ має тільки одну критичну точку?

12.21.•• При яких значеннях a функція $y=\frac{1}{3}x^3-2ax^2+4x-15$ має тільки одну критичну точку?

12.22.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x)=x^2\sqrt{1-x}$; 3) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$;

2) $f(x)=(1-x)\sqrt{x}$; 4) $f(x)=\frac{2x-7}{\sqrt{3-x}}$.

12.23.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x^2\sqrt{x+2}$;

2) $f(x) = (x-2)^2\sqrt{x}$;

3) $f(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x-1}}$.

12.24.• Чи є правильним твердження: якщо $\max\limits_{M} f(x) = f(x_0)$, $x_0 \in M$, і функція f диференційовна в точці x_0, то $f'(x_0) = 0$?

12.25.• Чи може мати тільки одну точку екстремуму: 1) парна функція; 2) непарна функція; 3) періодична функція?

12.26.• Для всіх $x \in D(f)$ виконується нерівність $f(x) \geqslant f(x_0)$. 1) Чи є правильним твердження, що x_0 — точка мінімуму функції f? 2) Чи зміниться відповідь, якщо $D(f) = \mathbb{R}$?

12.27.•• Точка x_0 — критична точка функції f. Для всіх $x < x_0$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, а для всіх $x > x_0$ виконується нерівність $f'(x) < 0$. Чи може точка x_0 бути точкою мінімуму?

12.28.•• Точка x_0 — критична точка функції f. Для всіх u і v таких, що $u < x_0$ і $v > x_0$, виконується нерівність $f'(u)f'(v) < 0$. Чи обов'язково точка x_0 є точкою екстремуму?

12.29.•• Точка x_0 — критична точка функції f. Для всіх u і v таких, що $u < x_0$ і $v > x_0$, виконується нерівність $f'(u)f'(v) > 0$. Чи може точка x_0 бути точкою екстремуму?

12.30.•• Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

1) $f(x) = \sin x \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

2) $f(x) = \sin x - \cos x + x$;

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x - \dfrac{\sin 2x}{4} - \dfrac{1-\sqrt{3}x}{2}$;

4) $f(x) = \sin^2 x - \cos x$.

12.31.•• Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

1) $f(x) = \cos x \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

2) $f(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x - x$;

3) $f(x) = 5\sin x + 12\cos x - 13x$.

12.32.•• При яких значеннях параметра a функція

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{3a+1}{2}x^2 + (2a^2 + 2a)x - 17$$

має додатну точку мінімуму?

12.33.•• При яких значеннях параметра a функція

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{3a-1}{2}x^2 + (2a^2 - a)x + 19$$

має додатну точку мінімуму?

12.34.•• При яких значеннях параметра a точка $x_0 = 1$ є точкою мінімуму функції $y = \frac{x^3}{3} + ax^2 + (a^2 - 4)x + 7$?

12.35.•• При яких значеннях параметра a точка $x_0 = 0$ є точкою максимуму функції $y = \frac{x^3}{3} - ax^2 + (a^2 - 1)x - 9$?

12.36.•• При яких значеннях параметра a точка $x_0 = 1$ є точкою екстремуму функції $y = x^3 - ax^2 + (a^2 - 2a)x - 7$?

12.37.•• При яких значеннях параметра a точка $x_0 = 2$ є точкою екстремуму функції $y = x^3 - 2ax^2 + (2a^2 - 2a)x + 9$?

Готуємося до вивчення нової теми

12.38. Знайдіть найменше значення функції $y = 3x^2 - 18x + 2$ на відрізку:

1) $[-1; 4]$; 2) $[-4; 1]$; 3) $[4; 5]$.

12.39. Знайдіть найбільше значення функції $y = -x^2 - 8x + 10$ на відрізку:

1) $[-5; -3]$; 2) $[-1; 0]$; 3) $[-11; -10]$.

13. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Як добитися найменшої маси конструкції, не зашкодивши її міцності? Як, маючи обмежені ресурси, виконати виробниче завдання в найкоротший час? Як організувати доставку товару по торговельних точках так, щоб витрати палива були найменшими?

Такі й подібні задачі на пошук найкращого або, як говорять, оптимального розв'язку займають значне місце в практичній діяльності людини.

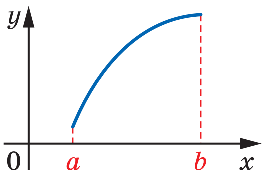
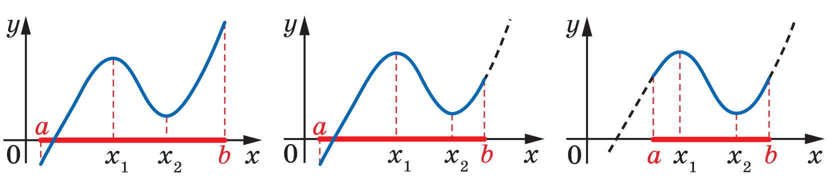


Рис. 13.1

Уявімо, що відомо функцію, яка описує, наприклад, залежність маси конструкції від її міцності. Тоді задача звелася до пошуку аргументу, при якому функція набуває найменшого значення.

У цьому пункті ми з'ясуємо, як можна знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку $[a; b]$. Обмежимося розглядом лише неперервних функцій.

Зауважимо, що точка, у якій функція набуває свого найменшого значення, не обов'язково є точкою мінімуму. Наприклад, на рисунку 13.1 $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$, а точок мінімуму функція f не має. Також точка мінімуму не обов'язково є точкою, у якій функція набуває найменшого значення. На рисунку 13.2, *а* точка x_2 — єдина точка мінімуму, а найменше значення $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ досягається в точці a.



$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$
$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$

а

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$
$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$

б

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_2)$
$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$

в

Рис. 13.2

Аналогічне зауваження стосується і точок максимуму та точок, у яких функція набуває найбільшого значення.

На рисунку 13.2 подано різні випадки розташування точок екстремумів і точок, у яких функція набуває найбільшого та найменшого значень.

Тут важливо зрозуміти, що властивість функції мати точку екстремуму x_0 означає таке: функція набуває в точці x_0 найбільшого (найменшого) значення порівняно зі значеннями функції в усіх точках деякого, можливо, дуже малого околу точки x_0. Тому, якщо хочуть наголосити на цьому факті, то точки екстремуму ще називають **точками локального максимуму** або **точками локального мінімуму** (від латинського *locus* — місце).

Неперервна на відрізку $[a; b]$ функція набуває на цьому проміжку своїх найбільшого і найменшого значень[1] або на кінцях відрізка, або в точках екстремуму (рис. 13.2).

Тоді для такої функції пошук найбільшого і найменшого значень на відрізку $[a; b]$ можна проводити, користуючись такою схемою.

1. Знайти критичні точки функції f, які належать відрізку $[a; b]$.

2. Обчислити значення функції в знайдених критичних точках і на кінцях розглядуваного відрізка.

3. З усіх знайдених значень обрати найбільше і найменше.

Зрозуміло, що цей алгоритм можна реалізувати лише тоді, коли розглядувана функція f має скінченну кількість критичних точок на відрізку $[a; b]$.

Зазначимо, що коли визначити, які з критичних точок є точками екстремуму, то кількість точок, у яких слід шукати значення функції, може бути зменшена. Проте виявлення точок екстремуму, як правило, потребує більшої технічної роботи, ніж пошук значень функції в критичних точках.

[1] Учням профільних класів нагадаємо, що існування найбільшого та найменшого значень неперервної на відрізку функції гарантує теорема Вейєрштрасса (теорема 5.4).

ПРИКЛАД 1 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$ на відрізку $[-2; 0]$.

Розв'язання. Знайдемо критичні точки даної функції:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12;$$
$$12x^2 - 18x - 12 = 0;$$
$$2x^2 - 3x - 2 = 0;$$
$$x = 2 \text{ або } x = -\frac{1}{2}.$$

Отже, функція f має дві критичні точки, а проміжку $[-2; 0]$ належить одна: $x = -\frac{1}{2}$.

Маємо: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $f(-2) = -38$, $f(0) = 6$.

Отже, $\max\limits_{[-2;\,0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $\min\limits_{[-2;\,0]} f(x) = f(-2) = -38$.

Відповідь: $\frac{37}{4}$; -38.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 4\sin 2x - 2\sin 4x$ на проміжку $[0; \pi]$.

Розв'язання. Маємо: $f'(x) = 8\cos 2x - 8\cos 4x = 8(\cos 2x - \cos 4x) = 16\sin 3x \sin x$. Знайдемо критичні точки даної функції:

$$\sin 3x \sin x = 0;$$
$$\sin 3x = 0 \text{ або } \sin x = 0;$$
$$x = \frac{\pi k}{3} \text{ або } x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Звідси $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Отже, точки виду $x = \frac{\pi k}{3}$ є критичними точками функції f, з них проміжку $[0; \pi]$ належать чотири точки: 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; π.

Обчислюємо:

$$f(0) = f(\pi) = 0,\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3},\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}.$$

Таким чином,

$$\max_{[0;\,\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}, \quad \min_{[0;\,\pi]} f(x) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}.$$

Відповідь: $3\sqrt{3}$, $-3\sqrt{3}$.

ПРИКЛАД 3 Подайте число 8 у вигляді суми двох невід'ємних чисел так, щоб сума куба першого числа і квадрата другого була найменшою.

Розв'язання. Нехай перше число дорівнює x, тоді друге дорівнює $8 - x$. З умови випливає, що $0 \leqslant x \leqslant 8$.

Розглянемо функцію $f(x) = x^3 + (8 - x)^2$, визначену на відрізку $[0; 8]$, і знайдемо, при якому значенні x вона набуває найменшого значення.

Маємо: $f'(x) = 3x^2 - 2(8 - x) = 3x^2 + 2x - 16$. Знайдемо критичні точки даної функції:

$$3x^2 + 2x - 16 = 0;$$

$$x = 2 \text{ або } x = -\frac{8}{3}.$$

Серед знайдених чисел проміжку $[0; 8]$ належить тільки число 2. Обчислюємо:

$$f(2) = 44, \; f(0) = 64, \; f(8) = 512.$$

Отже, функція f набуває найменшого значення при $x = 2$.

Відповідь: $8 = 2 + 6$.

ПРИКЛАД 4 Знайдіть сторони прямокутника, вписаного в коло радіуса R, якщо площа прямокутника набуває найбільшого значення.

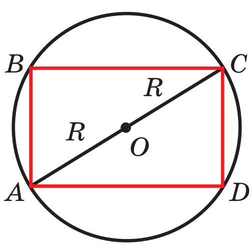


Рис. 13.3

Розв'язання. Розглянемо прямокутник $ABCD$, вписаний у коло радіуса R (рис. 13.3). Нехай $AB = x$, тоді

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4R^2 - x^2}.$$

Звідси площа прямокутника $ABCD$ дорівнює $x\sqrt{4R^2 - x^2}$. З умови задачі випливає, що значення змінної x задовольняють нерівність $0 < x < 2R$. Таким чином, задача звелася до знаходження найбільшого значення функції

$S(x)=x\sqrt{4R^2-x^2}$ на інтервалі $(0;\ 2R)$. Розглянемо неперервну функцію $f(x)=x\sqrt{4R^2-x^2}$, $D(f)=[0;\ 2R]$, і будемо шукати її найбільше значення на відрізку $[0;\ 2R]$.

Знайдемо критичні точки функції f:

$$f'(x)=(x)'\sqrt{4R^2-x^2}+x\ \frac{1}{2\sqrt{4R^2-x^2}}\ (4R^2-x^2)'=$$

$$=\sqrt{4R^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}=\frac{(4R^2-x^2)-x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}=\frac{4R^2-2x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}.$$

Функція f має одну критичну точку $x=R\sqrt{2}$.

Маємо: $f\left(R\sqrt{2}\right)=2R^2$, $f(0)=f(2R)=0$. Отже,

$$\max_{[0;\,2R]} f(x)=f\left(R\sqrt{2}\right)=2R^2.$$

Звідси отримуємо, що функція $S(x)=x\sqrt{4R^2-x^2}$ на інтервалі $(0;\ 2R)$ набуває найбільшого значення при $x=R\sqrt{2}$. Тоді $AB=R\sqrt{2}$,

$$BC=\sqrt{4R^2-2R^2}=R\sqrt{2}.$$

Отже, серед прямокутників, вписаних у коло радіуса R, найбільшу площу має квадрат зі стороною $R\sqrt{2}$. ●

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}=2$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}$, $D(f)=[2;\ 4]$. Для всіх $x\in(2;\ 4)$ маємо:

$$f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}}-\frac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}}.$$

Розв'яжемо рівняння $f'(x)=0$. Запишемо:

$$\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}}-\frac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}}=0.$$

Звідси легко знайти, що $x=3$. Отримали, що функція f на відрізку $[2;\ 4]$ має єдину критичну точку $x=3$.

Оскільки функція f є неперервною на відрізку [2; 4], то її найбільше і найменше значення знаходяться серед чисел $f(3)$, $f(2)$, $f(4)$. Маємо: $f(3) = 2$, $f(2) = f(4) = \sqrt[4]{2}$.

Отже, $\max\limits_{[2;4]} f(x) = f(3) = 2$, причому найбільшого значення функція f набуває лише при $x = 3$.

Оскільки нам потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 2$, то отримуємо, що $x = 3$ є його єдиним коренем.

Відповідь: 3.

ПРИКЛАД 6 Пункти A, B і C розміщені у вершинах прямокутного трикутника ($\angle ACB = 90^\circ$), $BC = 3$ км, $AC = 5$ км. З пункту A до пункту C веде шосейна дорога. Турист починає рухатися з пункту A по шосе. На якій відстані від пункту A турист має звернути із шосе, щоб за найменший час дійти з пункту A до пункту B, якщо швидкість туриста по шосе дорівнює 5 км/год, а поза шосе — 4 км/год?

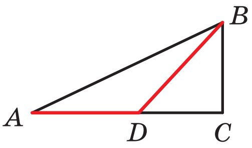


Рис. 13.4

Розв'язання. Позначимо через D точку, у якій турист має звернути із шосе, щоб найшвидше подолати шлях (рис. 13.4).

Нехай $AD = x$ км. Маємо: $DC = (5 - x)$ км, $DB = \sqrt{DC^2 + BC^2} = \sqrt{(5-x)^2 + 9}$. Тоді час, за який турист подолає шлях, дорівнює $\frac{x}{5} + \frac{\sqrt{(5-x)^2+9}}{4}$. Тепер зрозуміло, що для розв'язання задачі достатньо знайти найменше значення функції $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{(5-x)^2+9}}{4}$, заданої на відрізку [0; 5]. Маємо: $f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{5-x}{4\sqrt{(5-x)^2+9}}$. Розв'язавши рівняння $\frac{1}{5} - \frac{5-x}{4\sqrt{(5-x)^2+9}} = 0$ (зробіть це самостійно), установлюємо, що число $x = 1$ є його єдиним коренем. Порівнюючи числа $f(0) = \frac{\sqrt{34}}{4}$, $f(1) = \frac{29}{20}$

і $f(5)=\frac{7}{4}$, установлюємо, що $f(1)=\frac{29}{20}$ — найменше значення функції f на відрізку $[0; 5]$.

Відповідь: 1 км.

Вправи

13.1.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $[-1; 3]$;
2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $[0; 2]$;
3) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 3$, $[1; 3]$;
4) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3$, $[-1; 4]$;
5) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 60x - 7$, $[-1; 3]$;
6) $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$, $[-3; 0]$.

13.2.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$, $[0; 3]$;
2) $f(x) = x - 1 - x^3 - x^2$, $[-2; 0]$;
3) $f(x) = 2x^4 - 8x$, $[-2; 1]$;
4) $f(x)=\frac{x^4}{4}-8x^2$, $[-1; 2]$.

13.3.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x)=\sqrt{100-x^2}$, $[-6; 8]$;
2) $f(x)=\sqrt{0,5x^2+3x+5}$, $[2; 4]$;
3) $f(x) = (x + 1)^2 (x - 2)^2$, $[-2; 4]$;
4) $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$, $[-4; -1]$.

13.4.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x)=\sqrt{9+8x-x^2}$, $[0; 7]$;
2) $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$, $[-2; 4]$;

3) $f(x) = (x-1)^2(x+5)^2$, $[-3;\ 2]$;

4) $f(x) = -x - \frac{9}{x}$, $[-6;\ -1]$.

13.5.$^\bullet$ Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = \sin x - \cos x$, $[0;\ \pi]$;

2) $f(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$, $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$;

3) $f(x) = x\sqrt{3} - \cos 2x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

13.6.$^\bullet$ Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$, $[0;\ \pi]$;

2) $f(x) = 2\cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$, $\left[-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{3}\right]$.

13.7.$^\bullet$ Подайте число 8 у вигляді суми двох невід'ємних чисел так, щоб добуток куба одного з цих чисел на друге число був найбільшим.

13.8.$^\bullet$ Подайте число 12 у вигляді суми двох невід'ємних чисел так, щоб добуток квадрата одного з цих чисел на подвоєне друге число був найбільшим.

13.9.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть найбільше і найменше значення даної функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = 2\sin 2x + \cos 4x$, $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$;

2) $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x - 5$, $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$;

3) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

13.10.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть найбільше і найменше значення даної функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = 2\cos x - \sin 2x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $f(x) = 2\sqrt{3}\cos x + 2\sin x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

13.11.•• Розбийте число 180 на три невід'ємних доданки так, щоб два з них відносились як 1 : 2, а добуток усіх трьох доданків був найбільшим.

13.12.•• Подайте число 18 у вигляді суми трьох невід'ємних чисел так, щоб два з них відносились як 8 : 3, а сума кубів цих трьох чисел була найменшою.

13.13.•• У трикутник ABC вписано прямокутник так, що дві його вершини лежать на стороні AC, а дві інші — на сторонах AB і BC. Знайдіть найбільше значення площі такого прямокутника, якщо $AC = 12$ см, $BD = 10$ см, де BD — висота трикутника ABC.

13.14.•• У прямокутний трикутник з гіпотенузою 16 см і гострим кутом 30° вписано прямокутник, дві вершини якого лежать на гіпотенузі, а дві інші — на катетах. Якими мають бути сторони прямокутника, щоб його площа була найбільшою?

13.15.•• У півколо радіуса 20 см вписано прямокутник найбільшої площі. Знайдіть сторони прямокутника.

13.16.•• У півколо радіуса 6 см вписано прямокутник найбільшого периметра. Знайдіть сторони прямокутника.

13.17.•• Дві вершини прямокутника належать графіку функції $y = 12 - x^2$, $D(y) = \left[-2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}\right]$, а дві інші — осі абсцис. Яку найбільшу площу може мати такий прямокутник?

13.18.•• Дві вершини прямокутника належать графіку функції $y = 0{,}5x^2$, $D(y) = \left[-3\sqrt{2};\ 3\sqrt{2}\right]$, а дві інші — прямій $y = 9$. Яку найбільшу площу може мати такий прямокутник?

13.19.•• Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. Якою має бути довжина основи трикутника, щоб його площа набувала найбільшого можливого значення?

13.20.•• Василь Заплутайко вирішив знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на відрізку $[-1; 1]$. Він знайшов похідну $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ і встановив, що рівняння $-\frac{1}{x^2} = 0$ не має розв'язків. Порівнявши значення $f(-1) = -1$ і $f(1) = 1$, Василь стверджує, що найбільше значення функції f на відрізку $[-1; 1]$ дорівнює 1, а найменше дорівнює -1. Чи правильно міркує Василь?

13.21.•• У трапеції менша основа і бічні сторони дорівнюють a. Знайдіть більшу основу трапеції, при якій її площа набуває найбільшого значення.

13.22.•• У рівнобедрений трикутник вписано коло радіуса r. Яким має бути кут при основі трикутника, щоб його площа була найменшою?

13.23.•• Яким має бути кут при вершині рівнобедреного трикутника заданої площі, щоб радіус вписаного в цей трикутник кола був найбільшим?

13.24.•• На колі радіуса R позначено точку A. На якій відстані від точки A треба провести хорду BC, паралельну дотичній у точці A, щоб площа трикутника ABC була найбільшою?

13.25.•• Фігуру обмежено графіком функції $y = \sqrt{x}$, прямою $y = 2$ і віссю ординат. У якій точці графіка функції $y = \sqrt{x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$ треба провести дотичну, щоб вона відтинала від вказаної фігури трикутник найбільшої площі?

13.26.•• На координатній площині розміщено прямокутний трикутник ABC ($\angle ABC = 90°$). Вершина A має координати $(-2; 0)$, вершина B належить відрізку $[2; 3]$ осі абсцис, а вершина C — параболі $y = x^2 - 4x + 1$. Якими мають бути координати точки C, щоб площа трикутника ABC була найбільшою?

13.27.•• Пункти A, B і C знаходяться у вершинах прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$), $AC = 285$ км, $BC = 60$ км. Пункти A і C зв'язує залізниця. У яку точку відрізка AC слід провести ґрунтову дорогу з пункту B, щоб час перебування в дорозі від пункту A до пункту B був найменшим, якщо відомо, що швидкість руху залізницею дорівнює 52 км/год, а ґрунтовою дорогою — 20 км/год?

13.28.•• Завод A розміщено на відстані 50 км від прямолінійної ділянки залізниці, яка йде в місто B, і на відстані 130 км від міста B. Під яким кутом до залізниці слід провести шосе від заводу A, щоб доставка вантажів з A до B була найдешевшою, якщо вартість перевезення по шосе у 2 рази більша, ніж залізницею?

13.29.•• Доведіть нерівність $-20 \leqslant x^3 - 3x^2 \leqslant 16$, де $x \in [-2; 4]$.

13.30.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = -5x^3 + x\,|x - 1|$ на проміжку $[0; 2]$.

13.31.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 4x^3 - x\,|x - 2|$ на проміжку $[0; 3]$.

13.32.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}=x^2-8x+18$.

13.33.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+7}+\sqrt{1-x}=x^2+6x+13$.

Готуємося до вивчення нової теми

13.34. Накресліть графік якої-небудь неперервної функції такої, що: областю визначення є проміжок $[-4; 3]$; областю значень є проміжок $[-5; 3]$; нулі функції дорівнюють -2 і 2; функція спадає на проміжках $[-4; -1]$ і $[2; 3]$, зростає на проміжку $[-1; 2]$.

13.35. Накресліть графік якої-небудь диференційовної функції такої, що: областю визначення є проміжок $[-3; 4]$; областю значень є проміжок $[-2; 3]$; нулі функції дорівнюють -1 і 2; $f'(x) > 0$ для будь-якого x з проміжків $[-3; 0)$ і $(2; 4]$; $f'(x) < 0$ для будь-якого x з проміжку $(0; 2)$.

14. Друга похідна. Поняття опуклості функції

Нехай матеріальна точка рухається за законом $y = s\ (t)$ по координатній прямій. Тоді миттєва швидкість $v\ (t)$ у момент часу t визначається за формулою

$$v\ (t) = s'\ (t).$$

Розглянемо функцію $y = v\ (t)$. Її похідну в момент часу t називають прискоренням руху і позначають $a\ (t)$, тобто

$$a\ (t) = v'\ (t).$$

Таким чином, функція прискорення руху — це похідна функції швидкість руху, яка у свою чергу є похідною функції закон руху, тобто

$$a\ (t) = v'\ (t) = (s'\ (t))'.$$

У таких випадках говорять, що функція прискорення руху $y = a\ (t)$ є **другою похідною функції** $y = s\ (t)$. Пишуть:

$$a\ (t) = s''\ (t)$$

(запис $s''\ (t)$ читають: «ес два штрихи від те»).

Наприклад, якщо закон руху матеріальної точки задано формулою $s\ (t) = t^2 - 4t$, то маємо:

$$s'\ (t) = v\ (t) = 2t - 4;$$
$$s''\ (t) = v'\ (t) = a\ (t) = 2.$$

Ми отримали, що матеріальна точка рухається зі сталим прискоренням. Як ви знаєте з курсу фізики, такий рух називають рівноприскореним.

Узагальнимо сказане.

Розглянемо функцію $y = f\ (x)$, диференційовну на деякій множині M. Тоді її похідна також є деякою функцією, заданою на цій множині. Якщо функція f' є диференційовною у деякій точці $x_0 \in M$, то похідну функції f' у точці x_0 називають **другою похідною функції $y = f\ (x)$ у точці x_0** і позначають $f''\ (x_0)$ або $y''\ (x_0)$. Саму функцію f називають **двічі диференційовною в точці** x_0.

Функцію, яка числу x_0 ставить у відповідність число $f''\ (x_0)$, називають **другою похідною функції** $y = f\ (x)$ і позначають f'' або y''.

Наприклад, якщо $y = \sin x$, то $y'' = -\sin x$.

Якщо функція f є двічі диференційовною в кожній точці множини M, то її називають **двічі диференційовною на множині** M. Якщо функція f двічі диференційовна на $D(f)$, то її називають **двічі диференційовною**.

Ви знаєте, що функцію характеризують такі властивості як парність (непарність), періодичність, зростання (спадання) тощо. Ще однією важливою характеристикою функції є поняття опуклості вгору і опуклості вниз.

Звернемося до прикладів.

Про функції $y = x^2$, $y = |x|$ кажуть, що вони є опуклими вниз (рис. 14.1), а функції $y = -x^2$, $y = \sqrt{x}$ є опуклими вгору (рис. 14.2). Функція $y = \sin x$ є опуклою вгору на проміжку $[0; \pi]$ і опуклою вниз на проміжку $[\pi; 2\pi]$ (рис. 14.3). Лінійну функцію вважають як опуклою вгору, так і опуклою вниз.

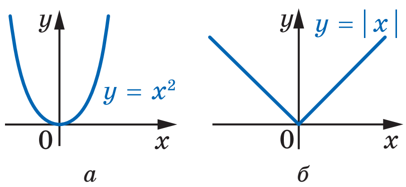


Рис. 14.1

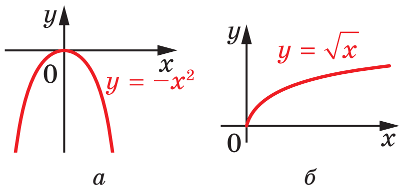


Рис. 14.2

Надалі, вивчаючи поняття опуклості функції на проміжку I, обмежимося випадком, коли функція f диференційовна[1] на цьому проміжку.

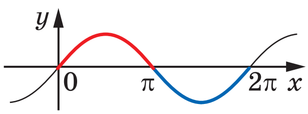


Рис. 14.3

Нехай функція f диференційовна на проміжку I. Тоді в будь-якій точці її графіка з абсцисою $x \in I$ можна провести невертикальну дотичну. Якщо при цьому графік функції на проміжку I розміщений не вище будь-якої такої дотич-

[1] У вищій школі поняття опуклості узагальнюють і на більш широкі класи функцій, наприклад неперервні.

ної (рис. 14.4), то функцію f називають **опуклою вгору на проміжку** I; якщо ж графік на проміжку I розміщений не нижче будь-якої такої дотичної (рис. 14.5) — то **опуклою вниз на проміжку** I.

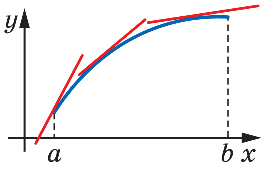


Рис. 14.4

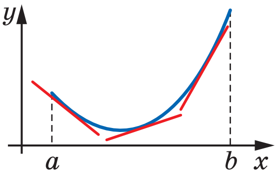


Рис. 14.5

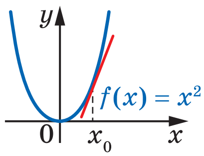


Рис. 14.6

Наприклад, доведемо, що функція $f(x) = x^2$ є опуклою вниз на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Проведемо дотичну до графіка функції $f(x) = x^2$ у точці з абсцисою x_0 (рис. 14.6). Рівняння цієї дотичної має вигляд:

$$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2.$$

Розглянемо різницю

$$f(x) - (2x_0(x - x_0) + x_0^2) = x^2 - (2x_0(x - x_0) + x_0^2) =$$
$$= x^2 - 2x_0x + x_0^2 = (x - x_0)^2.$$

Оскільки ця різниця набуває лише невід'ємних значень, то це означає, що графік функції f лежить не нижче будь-якої дотичної. Отже, $f(x) = x^2$ є опуклою вниз на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Аналогічно можна довести, що функція $y = x^3$ є опуклою вгору на проміжку $(-\infty; 0]$ і опуклою вниз на проміжку $[0; +\infty)$ (рис. 14.7).

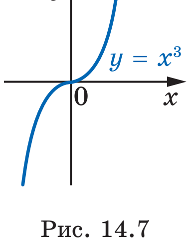
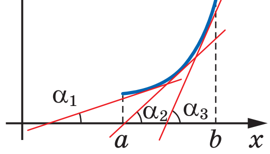
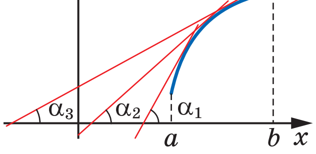


Рис. 14.7



$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$

Рис. 14.8



$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots$

Рис. 14.9

На рисунку 14.8 зображено графік функції f, яка є опуклою вниз на проміжку $[a; b]$. З рисунка видно, що зі збільшенням аргументу x кут нахилу відповідної дотичної збільшується. Це означає, що функція f' зростає на проміжку $[a; b]$.

Нехай функція f є опуклою вгору на проміжку $[a; b]$ (рис. 14.9). З рисунка видно, що зі збільшенням аргументу x кут нахилу відповідної дотичної зменшується. Це означає, що функція f' спадає на проміжку $[a; b]$.

Ці приклади показують, що характер опуклості функції f на деякому проміжку I пов'язаний зі зростанням (спаданням) функції f' на цьому проміжку.

Для двічі диференційовної на проміжку I функції f зростання (спадання) функції f' визначається знаком її другої похідної на проміжку I. Таким чином, характер опуклості двічі диференційовної функції f пов'язаний зі знаком її другої похідної.

Цей зв'язок установлюють такі дві теореми.

Теорема 14.1 (ознака опуклості функції вниз). ***Якщо для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f''(x) \geqslant 0$, то функція f є опуклою вниз на проміжку I.***

Теорема 14.2 (ознака опуклості функції вгору). ***Якщо для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f''(x) \leqslant 0$, то функція f є опуклою вгору на проміжку I.***

Доведемо теорему 14.1 (теорему 14.2 доводять аналогічно).

Доведення. У точці з абсцисою $x_0 \in I$ проведемо дотичну до графіка функції f. Рівняння цієї дотичної має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Розглянемо функцію $r(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0))$.

Значення цієї функції показують, наскільки відрізняється ордината точки графіка функції f від ординати відповідної точки, яка лежить на проведеній дотичній (рис. 14.10).

Якщо ми покажемо, що $r(x) \geqslant 0$ для всіх $x \in I$, то таким чином доведемо, що на проміжку I графік функції f лежить не нижче проведеної до нього дотичної.

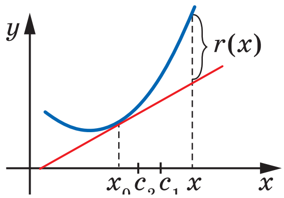


Рис. 14.10

Нехай $x \in I$ і $x > x_0$ (випадок, коли $x \leqslant x_0$, розглядають аналогічно). Маємо: $r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Для функції f і відрізка $[x_0; x]$ застосуємо теорему Лагранжа: $f(x) - f(x_0) = f'(c_1)(x - x_0)$, де $c_1 \in (x_0; x)$.

Звідси $r(x) = f'(c_1)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$;

$$r(x) = (f'(c_1) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Оскільки функція $y = f'(x)$ є диференційовною на відрізку $[x_0; c_1]$, то можна застосувати теорему Лагранжа: $f'(c_1) - f'(x_0) = = f''(c_2)(c_1 - x_0)$, де $c_2 \in (x_0; c_1)$.

Звідси $r(x) = f''(c_2)(c_1 - x_0)(x - x_0)$.

На рисунку 14.10 показано розміщення точок c_1 і c_2.

З нерівностей $x_0 < c_2 < c_1 < x$ випливає, що $(c_1 - x_0)(x - - x_0) > 0$. Оскільки $c_2 \in I$, то з урахуванням умови теореми отримуємо: $f''(c_2) \geqslant 0$. Звідси для всіх $x \in I$ виконується нерівність $r(x) \geqslant 0$. Тому функція f є опуклою вниз на проміжку I. ▲

ПРИКЛАД 1 Дослідіть на опуклість функцію $f(x) = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Маємо: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Звідси

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = (\cos^{-2} x)' = -2(\cos x)^{-3}(\cos x)' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

Нерівність $f''(x) \geqslant 0$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується при $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. Отже, функція $y = \operatorname{tg} x$ є опуклою вниз на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 14.11).

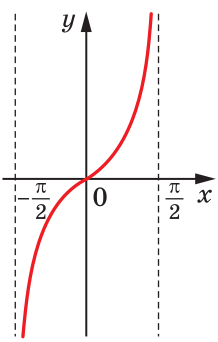


Рис. 14.11

Нерівність $f''(x) \leqslant 0$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується при $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0$. Отже, функція $y = \operatorname{tg} x$ є опуклою вгору на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ (рис. 14.11). ●

На рисунку 14.12 зображено графіки функцій та дотичні, проведені до них у точках з абсцисою x_0. Ці функції на проміжках $(a; x_0]$ і $[x_0; b)$ мають різний характер опуклості. Тому на цих проміжках графік функції розташований у різних півплощинах відносно дотичної. У цьому разі говорять, що точка x_0 є **точкою перегину** функції.

Рис. 14.12

Наприклад, точка $x_0 = 0$ є точкою перегину функції $y = x^3$ (рис. 14.7); точки виду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, є точками перегину функції $y = \cos x$ (рис. 14.13).

ПРИКЛАД 2 Дослідіть характер опуклості і знайдіть точки перегину функції $f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{12}$.

Розв'язання

Маємо: $f'(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}$; $f''(x) = x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$.

Використовуючи метод інтервалів, дослідимо знак функції $y = f''(x)$ (рис. 14.14).

Маємо, що функція f опукла вгору на проміжку $(-\infty; 1]$ і опукла вниз на проміжку $[1; +\infty)$.

Функція f на проміжках $(-\infty; 1]$ і $[1; +\infty)$ має різний характер опуклості. У точці з абсцисою $x_0 = 1$ до графіка функції f можна провести дотичну. Отже, $x_0 = 1$ є точкою перегину функції f. ●

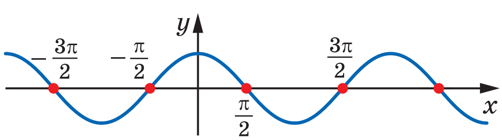


Рис. 14.13

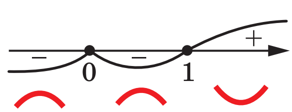


Рис. 14.14

Вправи

14.1.° Знайдіть другу похідну функції:

1) $y = x^3$;
2) $y = x^2 - 2x + 5$;
3) $y = \frac{1}{x}$;
4) $y = \sqrt{x}$;
5) $y = \cos x$;
6) $y = (2x - 1)^5$;
7) $y = \sin 3x$;
8) $y = \cos^2 x$;
9) $y = \sin \frac{x}{4}$;
10) $y = x \sin x$.

14.2.° Знайдіть другу похідну функції:

1) $y = x^4$;
2) $y = 3 - 5x + x^3$;
3) $y = \frac{1}{x-1}$;
4) $y = \sqrt[3]{x}$;
5) $y = (1 - 3x)^3$;
6) $y = \cos 2x$;
7) $y = \sin^2 x$;
8) $y = x \cos x$.

14.3.° Чому дорівнює значення другої похідної функції $y = 5 \sin x - 3 \cos 4x$ у точці: 1) $x = \frac{\pi}{6}$; 2) $x = -\frac{\pi}{2}$?

14.4.° Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть її прискорення в момент часу $t_0 = 2$ с.

14.5.° Одне тіло рухається по координатній прямій за законом $s_1(t) = t^3 - t^2 + 3t - 2$, а друге — за законом $s_2(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 5t - 8$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть прискорення кожного тіла в момент часу, коли їх швидкості рівні.

14.6.° Тіло масою 5 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^3 - 6t + 4$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть силу $F(t) = ma(t)$, що діє на тіло через 3 с після початку руху.

14.7.° Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:

1) $y = x^3 - 3x + 2$;
2) $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - x + 1$.

14.8.° Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:
1) $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$; 2) $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 3x + 4$.

14.9.° Знайдіть точки перегину функції
$$y = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 12x + 3.$$

14.10.° Знайдіть точки перегину функції
$$y = 3x^5 + 10x^4 + 10x^3 - 5x - 4.$$

14.11.° Доведіть, що функція $f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 11x - 7$ є опуклою вниз на $\mathbb{R}$.

14.12.° Доведіть, що функція $f(x) = \sin^2 x - 2x^2$ є опуклою вгору на $\mathbb{R}$.

14.13.• Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:

1) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$; 2) $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$.

14.14.• Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:

1) $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; 2) $y = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

14.15.• Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції $y = x^2 + 4\sin x$.

14.16.• Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції $y = x^2 - 4\cos x$.

15. Побудова графіків функцій

Коли в попередніх класах вам доводилося будувати графіки, ви, як правило, поступали так: позначали на координатній площині деяку кількість точок, які належать графіку, а потім з'єднували їх. Точність побудови залежала від кількості позначених точок.

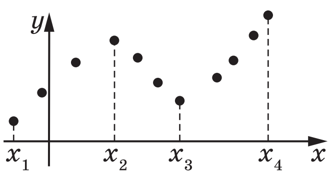


Рис. 15.1

На рисунку 15.1 зображено кілька точок, які належать графіку деякої функції $y = f(x)$. Ці точки можна з'єднати по-різному, наприклад так, як показано на рисунках 15.2 і 15.3.

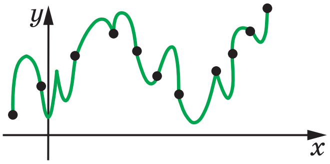


Рис. 15.2

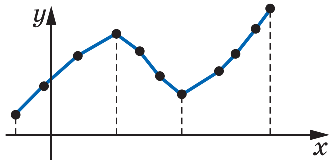


Рис. 15.3

Проте якщо знати, що функція f зростає на проміжках $[x_1; x_2]$ та $[x_3; x_4]$, спадає на проміжку $[x_2; x_3]$ і є диференційовною, то, скоріше за все, буде побудовано графік, показаний на рисунку 15.4.

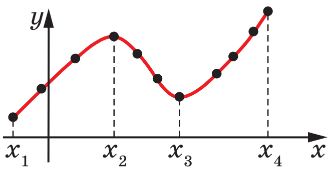


Рис. 15.4

Ви знаєте, які особливості притаманні графікам парної, непарної, періодичної функцій тощо. Узагалі, чим більше властивостей функції вдалося з'ясувати, тим точніше можна побудувати її графік.

Дослідження властивостей функції будемо проводити за таким планом.

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність.
3. Знайти нулі функції.
4. Знайти проміжки знакосталості.
5. Знайти проміжки зростання і спадання.
6. Знайти точки екстремуму і значення функції в точках екстремуму.
7. Виявити інші особливості функції (періодичність функції, поведінку функції в околах окремих важливих точок тощо).

Зауважимо, що наведений план дослідження носить рекомендаційний характер та не є сталим і вичерпним. Важливо при дослідженні функції виявити такі її властивості, які дозволять коректно побудувати графік.

ПРИКЛАД 1 Дослідіть функцію $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3$ і побудуйте її графік.

Розв'язання. 1. Функція визначена на множині дійсних чисел, тобто $D(f)=\mathbb{R}$.

2. $f(-x)=\frac{3}{2}(-x)^2-\frac{1}{4}(-x)^3=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3$. Звідси $f(-x)\neq f(x)$ і $f(-x)\neq -f(x)$, тобто функція $y=f(x)$ не збігається ні з функцією $y=f(-x)$, ні з функцією $y=-f(x)$. Таким чином, дана функція не є ні парною, ні непарною.

3–4. Маємо: $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3=\frac{x^2}{4}(6-x)$. Числа 0 та 6 є нулями функції f. Застосувавши метод інтервалів (рис. 15.5), знаходимо проміжки знакосталості функції f, а саме: установлюємо, що $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 6)$ і $f(x)<0$ при $x\in(6;\ +\infty)$.

5–6. Маємо: $f'(x)=3x-\frac{3x^2}{4}=\frac{3x}{4}(4-x)$. Дослідивши знак похідної (рис. 15.6), доходимо висновку, що функція f зростає на проміжку $[0;\ 4]$, спадає на кожному з проміжків $(-\infty;\ 0]$ і $[4;\ +\infty)$, $x_{max}=4$, $x_{min}=0$. Маємо: $f(4)=8$, $f(0)=0$.

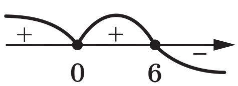


Рис. 15.5

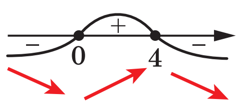


Рис. 15.6

7. Маємо: $f''(x)=3-\frac{3x}{2}$. Дослідивши знак другої похідної (рис. 15.7), доходимо висновку, що функція f є опуклою вниз на проміжку $(-\infty;\ 2]$, опуклою вгору на проміжку $[2;\ +\infty)$, $x=2$ є точкою перегину і $f(2)=4$.

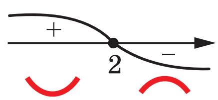


Рис. 15.7

Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції (рис. 15.8). ●

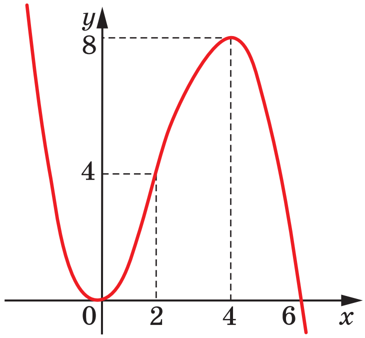


Рис. 15.8

ПРИКЛАД 2 Дослідіть функцію $f(x)=\dfrac{4}{x^2+4x}$ і побудуйте її графік.

Розв'язання. 1. Функція визначена на множині $D(f) = (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Область визначення функції несиметрична відносно початку координат, отже, дана функція не є ні парною, ні непарною.

3. Функція не має нулів.

4. $f(x)=\dfrac{4}{x(x+4)}$. Звідси $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-4; 0)$ (рис. 15.9).

5–6. Маємо:

$$f'(x)=\frac{(4)'\cdot(x^2+4x)-4\cdot(x^2+4x)'}{x^2(x+4)^2}=-\frac{4(2x+4)}{x^2(x+4)^2}=-\frac{8(x+2)}{x^2(x+4)^2}.$$

Дослідивши знак f' (рис. 15.10), доходимо висновку, що функція f спадає на кожному з проміжків $[-2; 0)$ і $(0; +\infty)$, зростає на проміжках $(-\infty; -4)$ і $(-4; -2]$, $x_{max} = -2$, $f(-2) = -1$.

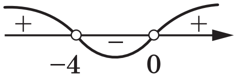


Рис. 15.9

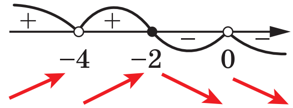


Рис. 15.10

7. Зауважимо, що коли значення аргументу x обирають усе більшими й більшими, то відповідні значення функції $f(x)=\dfrac{4}{x^2+4x}$ усе менше й менше відрізняються від числа 0 і можуть стати як завгодно малими. Цю властивість прийнято записувати так: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x^2+4x}=0$ або $\dfrac{4}{x^2+4x}\to 0$ при $x\to+\infty$. Якщо $x\to+\infty$, то відстані від точок графіка функції f до прямої $y=0$ стають усе меншими й меншими і можуть стати меншими від довільного наперед заданого додатного числа. У цьому разі пряму $y=0$ називають *горизонтальною асимптотою* графіка функції f при $x\to+\infty$. Аналогічно можна встановити, що пряма $y=0$ є горизонтальною асимптотою графіка функції f при $x\to-\infty$.

Якщо значення аргументу x прямують до нуля, залишаючись додатними, то відповідні значення функції $f(x)=\dfrac{4}{x^2+4x}$ стають усе більшими й більшими, тобто відстані від точок графіка функції f до прямої $x=0$ стають усе меншими й меншими і можуть стати меншими від довільного наперед заданого додатного числа. У цьому разі пряму $x=0$ називають *вертикальною асимптотою* графіка функції f, коли x прямує до нуля справа. Пряма $x=0$ також є *вертикальною асимптотою* графіка функції f, коли x прямує до нуля зліва. Функція f має ще одну вертикальну асимптоту — пряму $x=-4$, коли x прямує до -4 як зліва, так і справа.

Маємо:

$$f''(x)=-\frac{8x^2(x+4)^2-8(x+2)(2x(x+4)^2+2x^2(x+4))}{x^4(x+4)^4}.$$

Спростивши дріб, отримаємо

$$f''(x)=\frac{8(3x^2+12x+16)}{x^3(x+4)^3}.$$

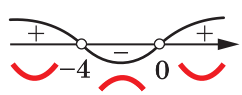


Рис. 15.11

Дослідивши знак f'' (рис. 15.11), доходимо висновку, що функція є опуклою вниз на проміжках $(-\infty; -4)$ і $(0; +\infty)$, є опуклою вгору на проміжку $(-4; 0)$, точок перегину не має.

Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції f (рис. 15.12).

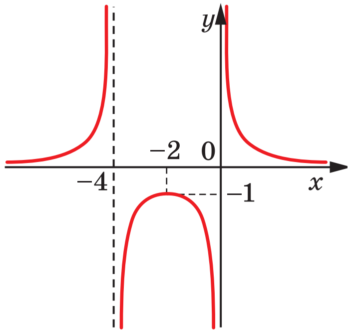


Рис. 15.12

ПРИКЛАД 3 Користуючись графіком функції $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$, установіть, скільки коренів має рівняння $f(x) = a$ залежно від значення параметра a.

Розв'язання. Функція f визначена на множині дійсних чисел, тобто $D(f) = \mathbb{R}$.

Маємо: $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 4x\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$.

Отже, функція f має три критичні точки: $-\sqrt{2}$; 0; $\sqrt{2}$. Дослідивши знак похідної (рис. 15.13), отримуємо: функція f зростає на проміжках $\left[-\sqrt{2}; 0\right]$ і $\left[\sqrt{2}; +\infty\right)$, спадає на проміжках $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right]$ і $\left[0; \sqrt{2}\right]$, $x_{min} = -\sqrt{2}$, $x_{min} = \sqrt{2}$, $x_{max} = 0$. Маємо: $f\left(-\sqrt{2}\right) = f\left(\sqrt{2}\right) = -1$, $f(0) = 3$.

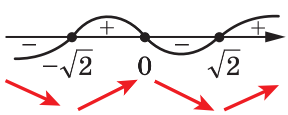


Рис. 15.13

Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції f (рис. 15.14).

Користуючись побудованим графіком, установлюємо кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значення параметра a (рис. 15.15):

якщо $a < -1$, то коренів немає;

якщо $a = -1$ або $a > 3$, то 2 корені;

якщо $a = 3$, то 3 корені;
якщо $-1 < a < 3$, то 4 корені.

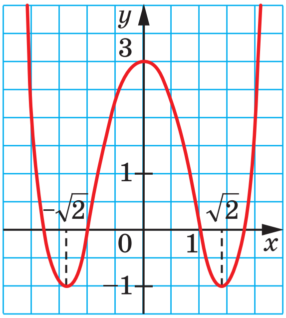


Рис. 15.14

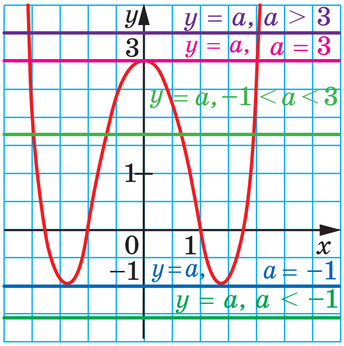


Рис. 15.15

З а у в а ж е н н я. З розв'язання даної задачі вилучено пункти 2–4, 7 плану дослідження властивостей функції. Властивості функції, які досліджуються в цих пунктах, не використовуються при з'ясуванні кількості коренів рівняння $f(x) = a$.

ПРИКЛАД 4 Дослідіть функцію $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 - 2}$ і побудуйте її графік.

Розв'язання

1. Функція визначена на множині

$$D(f) = \left(-\infty; \sqrt[3]{2}\right) \cup \left(\sqrt[3]{2}; +\infty\right).$$

2. Функція не є ні парною, ні непарною.

3. Розв'язавши рівняння $\dfrac{x^4}{x^3 - 2} = 0$, установлюємо, що $x = 0$ — єдиний нуль даної функції.

4. $f(x) > 0$ при $x \in \left(\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$, $f(x) < 0$ при

$$x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \sqrt[3]{2}\right).$$

5–6. Маємо:

$$f'(x) = \frac{x^6 - 8x^3}{(x^3 - 2)^2} = \frac{x^3(x^3 - 8)}{(x^3 - 2)^2}.$$

Дослідивши знак f' (рис. 15.16), доходимо висновку, що функція f спадає на проміжках $\left[0; \sqrt[3]{2}\right)$ і $\left(\sqrt[3]{2}; 2\right]$, зростає на проміжках $(-\infty; 0]$ і $[2; +\infty)$, $x_{min} = 2$, $f(2) = \frac{8}{3}$, $x_{max} = 0$, $f(0) = 0$.

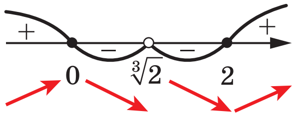


Рис. 15.16

7. Маємо: $f''(x) = \dfrac{12x^2(x^3+4)}{(x^3-2)^3}$.

Дослідивши знак f'' (рис. 15.17), доходимо висновку, що $x = -\sqrt[3]{4}$ — точка перегину і $f\left(-\sqrt[3]{4}\right) = -\dfrac{2\sqrt[3]{4}}{3}$, функція f є опуклою вниз на проміжках $\left(-\infty; -\sqrt[3]{4}\right]$ і $\left(\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$, опуклою вгору на $\left[-\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2}\right)$.

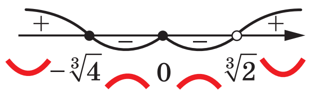


Рис. 15.17

Пряма $x = \sqrt[3]{2}$ — вертикальна асимптота графіка даної функції.

Маємо: $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3-2} = \dfrac{(x^4-2x)+2x}{x^3-2} = x + \dfrac{2x}{x^3-2}$.

Оскільки $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^3-2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x^2 - \dfrac{2}{x}} = 0$, то при $x \to +\infty$ відстані від точок графіка функції f до відповідних точок прямої $y = x$ стають усе меншими й меншими і можуть стати меншими від довільного наперед заданого додатного числа. У цьому разі пряму $y = x$ називають *похилою асимптотою* графіка функції f при $x \to +\infty$. Також можна показати, що пряма $y = x$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \to -\infty$.

Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції (рис. 15.18). ●

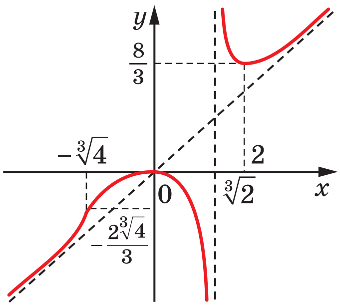


Рис. 15.18

Вправи

15.1.• Дослідіть дану функцію і побудуйте її графік:

1) $f(x) = 3x - x^3 - 2$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$;
3) $f(x) = 3x - \frac{x^3}{9}$;
4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;
5) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^3$;
6) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$;
7) $f(x) = (x + 3)^2 (x - 1)^2$.

15.2.• Дослідіть дану функцію і побудуйте її графік:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2$;
2) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$;
3) $f(x) = x - x^3$;
4) $f(x) = \frac{x^4}{2} - 4x^2$;
5) $f(x) = 8x^2 - 7 - x^4$.

15.3.•• Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \frac{4-x}{x+2}$;
2) $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$;
3) $f(x) = \frac{6x-6}{x^2+3}$;
4) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4}$;
5) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$;
6) $f(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$;

7) $f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x^2}$; 8) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$.

15.4.•• Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}$; 5) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-9}$;

3) $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$; 6) $f(x)=\dfrac{2x}{(x+1)^2}$.

15.5.•• Побудуйте графік функції $f(x)=x^2(2x-3)$ і встановіть, користуючись ним, кількість коренів рівняння $f(x)=a$ залежно від значення параметра a.

15.6.•• Побудуйте графік функції $f(x)=-x^2(x^2-4)$ і встановіть, користуючись ним, кількість коренів рівняння $f(x)=a$ залежно від значення параметра a.

15.7.•• Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$;

2) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-1}$; 4) $f(x)=\dfrac{x^4-8}{(x+1)^4}$.

15.8.•• Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$;

2) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$;

3) $f(x)=\dfrac{x^3-4}{(x-1)^3}$.

Готуємося до вивчення нової теми

15.9. Подайте вираз у вигляді степеня або добутку степенів:

1) $\dfrac{(a^3)^6 \cdot a^4}{a^{16}}$;

2) $(a^2)^{-4} \cdot (a^{-3})^{-2} : (a^{-8})^3$;

3) $\left(\dfrac{a^{10}b^{-7}}{c^6 d^{-14}}\right)^{-2}$;

4) $\dfrac{a^{-\frac{5}{2}} b^{\frac{1}{12}}}{a^{-\frac{17}{4}} b^{\frac{1}{3}}}$;

5) $\left(a^{\frac{5}{9}}\right)^{1,8} \cdot \left(a^{-\frac{3}{8}}\right)^{2,4}$.

15.10. Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{3^{10} \cdot 27^3}{9^9}$;

2) $\dfrac{(-36)^{-3} \cdot 6^8}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}}$;

3) $\dfrac{14^5 \cdot 2^{-7}}{28^{-2} \cdot 7^8}$;

4) $\left(4^{-\frac{1}{8}}\right)^{1,6} \cdot 16^{0,6}$;

5) $\dfrac{12^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{6}}} \cdot \dfrac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{5}{3}}}{8^{\frac{1}{2}}}$;

6) $\left(\dfrac{5^{-\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{15^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{16}{3}}}\right)^{-1,5}$.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 1

1. Знайдіть похідну функції $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}$.

А) $f'(x)=\frac{x^2}{3}+\frac{x}{2}$; В) $f'(x)=x^2+x$;

Б) $f'(x)=3x^2+2x$; Г) $f'(x)=x^3+x^2$.

2. Знайдіть похідну функції $f(x)=\frac{5}{x^4}$

А) $f'(x)=-\frac{20}{x^5}$; В) $f'(x)=\frac{5}{4x^3}$;

Б) $f'(x)=-\frac{20}{x^3}$; Г) $f'(x)=\frac{5}{4x^5}$.

3. Укажіть похідну функції $f(x)=\operatorname{tg} 4x$.

А) $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 4x}$; В) $f'(x)=\operatorname{ctg} 4x$;

Б) $f'(x)=\frac{4}{\cos^2 4x}$; Г) $f'(x)=4\operatorname{ctg} 4x$.

4. Обчисліть значення похідної функції $f(x)=(3x-2)^5$ у точці $x_0=1$.

А) 5; Б) 15; В) −5; Г) −15.

5. Знайдіть похідну функції $f(x)=\sqrt{6x-7}$.

А) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{6x-7}}$; В) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{6x-7}}$;

Б) $f'(x)=\frac{6}{\sqrt{6x-7}}$; Г) $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{6x-7}}$.

6. Знайдіть похідну функції $f(x)=\cos\frac{x}{4}$.

А) $f'(x)=\sin\frac{x}{4}$; В) $f'(x)=-\sin\frac{x}{4}$;

Б) $f'(x)=\frac{1}{4}\sin\frac{x}{4}$; Г) $f'(x)=-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{4}$.

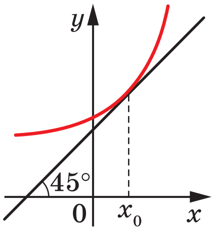
7. Тіло рухається по координатній прямій за законом

$$s(t) = 3t^2 - 2t + 1$$

(переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Чому дорівнює швидкість тіла через 3 с після початку руху?

А) 16 м/с; Б) 17 м/с; В) 18 м/с; Г) 20 м/с.

8. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$ і дотичну до нього в точці з абсцисою x_0. Знайдіть $f'(x_0)$.



А) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

Б) 1;

В) $\sqrt{3}$;

Г) знайти неможливо.

9. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = x^3 - 2x$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$?

А) −5; Б) −1; В) 5; Г) 1.

10. Яке рівняння має дотична до графіка функції $f(x) = \frac{3x+4}{x-3}$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$?

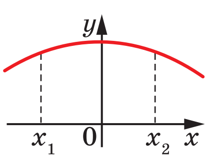
А) $y = 13x - 36$; В) $y = -13x - 36$;

Б) $y = -x - 8$; Г) $y = -13x + 16$.

11. Знайдіть абсцису точки графіка функції $f(x) = x^2 + 4x$, у якій дотична до цього графіка паралельна прямій $y = 10x - 6$.

А) 3; Б) −1; В) 7; Г) −5.

12. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$. Користуючись графіком, порівняйте $f'(x_1)$ і $f'(x_2)$.



А) $f'(x_1) > f'(x_2)$;

Б) $f'(x_1) < f'(x_2)$;

В) $f'(x_1) = f'(x_2)$;

Г) порівняти неможливо.

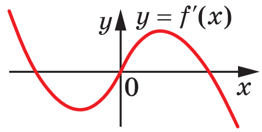
13. Знайдіть проміжки зростання функції

$$f(x) = 4 - 3x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

А) $[-3; -1]$; В) $(-\infty; 1]$ і $[3; +\infty)$;

Б) $[1; 3]$; Г) $(-\infty; -3]$ і $[-1; +\infty)$.

14. Диференційовна функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел. На рисунку зображено графік функції $y = f'(x)$. Скільки проміжків зростання має функція $y = f(x)$?



А) жодного;

Б) один;

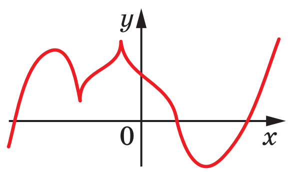
В) два;

Г) визначити неможливо.

15. Скільки критичних точок має функція $y = f(x)$, $D(f) = \mathbb{R}$, графік якої зображено на рисунку?

А) 2; В) 4;

Б) 3; Г) жодної.

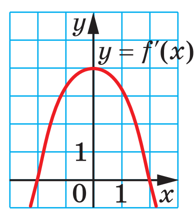


16. Скільки точок екстремуму має функція

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 8?$$

А) одну; Б) дві; В) безліч; Г) жодної.

17. Диференційовна функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел. На рисунку зображено графік функції $y = f'(x)$. Знайдіть точку максимуму функції $y = f(x)$.



А) -2; В) 2;

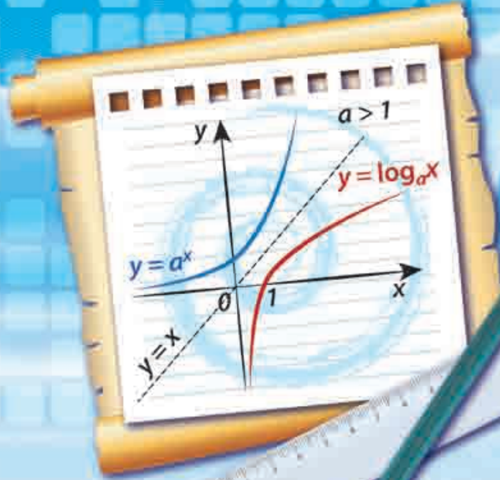
Б) 0; Г) визначити неможливо.

18. Чому дорівнює найменше значення функції $y = x + \frac{4}{x}$ на проміжку $[1; 3]$?

А) 3; Б) 4; В) $4\frac{1}{3}$; Г) 5.

§2

Показникова і логарифмічна функції



16. Степінь з довільним дійсним показником. Показникова функція

У 10 класі ви ознайомилися з поняттям степеня додатного числа з раціональним показником. Тепер ми з'ясуємо, що являє собою степінь додатного числа з дійсним показником.

Строге означення степеня з дійсним показником та доведення його властивостей виходить за межі шкільного курсу. Текст цього пункту слід розглядати лише як загальні пояснення до того, як можна провести необхідні обґрунтування.

Почнемо з окремого випадку. З'ясуємо, що розуміють під степенем числа 2 з показником π.

Ірраціональне число π можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу:

$$\pi = 3{,}1415\ldots\ .$$

Розглянемо послідовність раціональних чисел

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ \ldots\ . \qquad (1)$$

Зрозуміло, що ця послідовність збігається до числа π.

Відповідно до послідовності (1) побудуємо послідовність степенів з раціональними показниками:

$$2^{3},\ 2^{3,1},\ 2^{3,14},\ 2^{3,141},\ 2^{3,1415},\ \ldots\ . \qquad (2)$$

Можна показати, що члени послідовності (2) зі збільшенням номера прямують до деякого додатного числа. Це число і називають степенем числа 2 з показником π і позначають 2^{π}.

Аналогічно можна діяти в загальному випадку, означаючи зміст виразу b^{α}, де $b > 0$, α — довільне дійсне число. Для числа α будують збіжну до нього послідовність раціональних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Далі розглядають послідовність $b^{\alpha_1},\ b^{\alpha_2},\ b^{\alpha_3},\ \ldots$ степенів з раціональними показниками (нагадаємо, що степінь додатного числа з раціональним показником є визначеним). Можна довести, що ця послідовність збігається до додатного числа c, яке не залежить від вибору збіжної до α послідовності раціональних чисел α_1, α_2, α_3, ... Число c називають степенем додатного числа b з дійсним показником α і позначають b^α.

Якщо основа b дорівнює одиниці, то $1^\alpha = 1$ для всіх дійсних α.

Якщо основа b дорівнює нулю, то степінь 0^α означають тільки для $\alpha > 0$ і вважають, що $0^\alpha = 0$. Наприклад, $0^{\sqrt{2}} = 0$, $0^\pi = 0$, а вираз $0^{-\sqrt{3}}$ не має змісту.

При $b < 0$ вираз b^α, де α — ірраціональне число, не має змісту.

Степінь з дійсним показником має ті самі властивості, що й степінь з раціональним показником.

Отже, для $x > 0$, $y > 0$ і будь-яких дійсних α і β справедливі такі рівності:

1) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$;

2) $x^\alpha : x^\beta = x^{\alpha-\beta}$;

3) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$;

4) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$;

5) $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$.

Доведемо, наприклад, властивість 1.

Нехай α і β — дійсні числа, причому $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$, де (α_n) і (β_n) — послідовності раціональних чисел. Маємо:

$$\alpha + \beta = \lim_{n\to\infty} \alpha_n + \lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} (\alpha_n + \beta_n).$$

Для додатного числа x розглянемо три послідовності: $(x^{\alpha_n}), (x^{\beta_n})$ і $(x^{\alpha_n} \cdot x^{\beta_n})$.

Маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\alpha_n} = x^\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\beta_n} = x^\beta$.

Оскільки властивість 1 має місце для раціональних показників α_n і β_n, то $x^{\alpha_n} \cdot x^{\beta_n} = x^{\alpha_n + \beta_n}$.

Послідовність раціональних чисел $\alpha_1 + \beta_1$, $\alpha_2 + \beta_2$, $\alpha_3 + \beta_3$, ... збігається до числа $\alpha + \beta$. Тому можна записати, що

$$x^{\alpha} \cdot x^{\beta} = \lim_{n \to \infty} x^{\alpha_n} \cdot \lim_{n \to \infty} x^{\beta_n} = \lim_{n \to \infty} (x^{\alpha_n} \cdot x^{\beta_n}) = \lim_{n \to \infty} x^{\alpha_n + \beta_n} = x^{\alpha + \beta}.$$

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз $\dfrac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}} = \frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}+1\right)a^{\sqrt{7}}}{\left(a^{3\sqrt{7}}+1\right)a^{\sqrt{7}}} =$$

$$= \frac{a^{3\sqrt{7}}+1}{a^{3\sqrt{7}}+1} = 1.$$

Оберемо деяке додатне число a, відмінне від 1. Кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність додатне число a^x. Тим самим задано функцію $f(x) = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, з областю визначення $\mathbb{R}$.

Цю функцію називають **показниковою функцією**.

З'ясуємо деякі властивості показникової функції.

При $a > 0$ і будь-якому x виконується нерівність $a^x > 0$. Тому область значень показникової функції складається тільки з додатних чисел.

Можна показати, що для даного числа a, де $a > 0$ і $a \neq 1$, і для будь-якого додатного числа b існує таке число x, що виконується рівність $a^x = b$.

- Сказане означає, що *областю значень показникової функції є множина* $(0; +\infty)$.
- *Показникова функція не має нулів, і проміжок* $(-\infty; +\infty)$ *є її проміжком знакосталості.*
- *Показникова функція є неперервною.*
- Покажемо, що *при* $a > 1$ *показникова функція є зростаючою*. Для цього скористаємося лемою.

Лема. ***Якщо*** $a > 1$ ***і*** $x > 0$, ***то*** $a^x > 1$; ***якщо*** $0 < a < 1$ ***і*** $x > 0$, ***то*** $0 < a^x < 1$.

Наприклад, $2^{\frac{1}{\pi}} > 1$, $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < 1$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_2 > x_1$, і функцію $f(x) = a^x$, де $a > 1$.

Оскільки $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Тоді за лемою маємо: $a^{x_2 - x_1} > 1$, тобто $\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1$. Оскільки $a^{x_1} > 0$, то $a^{x_2} > a^{x_1}$. Звідси $f(x_2) > f(x_1)$.

Отже, ми показали, що з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$. Це означає, що функція f є зростаючою.

- Аналогічно можна показати, що *при* $0 < a < 1$ *показникова функція є спадною*.
- Оскільки показникова функція є або зростаючою (при $a > 1$), або спадною (при $0 < a < 1$), то вона *не має точок екстремуму*.
- *Показникова функція є диференційовною.* Детальніше про похідну показникової функції ви дізнаєтеся в п. 23.

На рисунках 16.1 і 16.2 схематично зображено графік показникової функції для випадків $a > 1$ і $0 < a < 1$ відповідно.

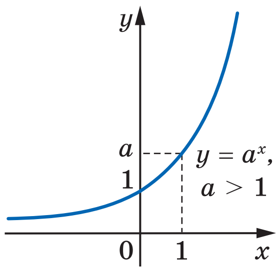


Рис. 16.1

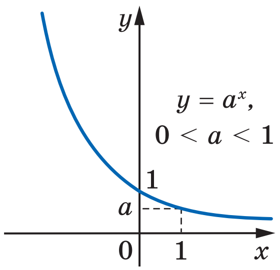


Рис. 16.2

Зокрема, на рисунках 16.3 і 16.4 зображено графіки функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

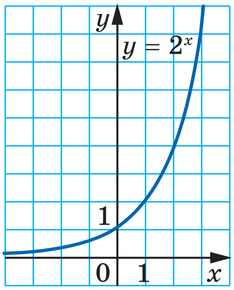


Рис. 16.3

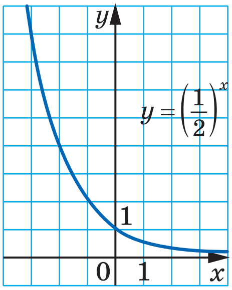


Рис. 16.4

Зауважимо, що при $a > 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$. Аналогічно при $0 < a < 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$.

Показникова функція є математичною моделлю цілої низки процесів, які відбуваються в природі та в діяльності людини.

Наприклад, біологам відомо, що колонія бактерій у певних умовах за рівні проміжки часу збільшує свою масу в одну й ту саму кількість разів.

Це означає, що коли, наприклад, у момент часу $t = 0$ маса дорівнювала 1, а в момент часу $t = 1$ маса дорівнювала a, то в моменти часу $t = 2$, $t = 3$, ..., $t = n$, ... маса дорівнюватиме відповідно a^2, a^3, ..., a^n, ... Тому природно вважати, що в будь-який момент часу t маса дорівнюватиме a^t. Можна перевірити (зробіть це самостійно), що значення функції $f(t) = a^t$ збільшується в одну й ту саму кількість разів за рівні проміжки часу.

Таким чином, розглянутий процес описують за допомогою показникової функції $f(t) = a^t$.

З курсу фізики відомо, що під час радіоактивного розпаду маса радіоактивної речовини за рівні проміжки часу зменшується в одну й ту саму кількість разів.

Якщо покласти гроші в банк під певний процент, то кожного року кількість грошей на рахунку буде збільшуватися в одну й ту саму кількість разів.

Тому показникова функція описує і ці процеси.

У таблиці наведено властивості функції $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$(0; +\infty)$
Нулі функції	–
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на $\mathbb{R}$
Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Неперервність	Неперервна
Диференційовність	Диференційовна
Асимптоти	Якщо $a > 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$; якщо $0 < a < 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть найменше і найбільше значення функції $f(x) = 3^x$ на відрізку $[-4; 3]$.

Розв'язання. Оскільки функція f зростає на відрізку $[-4; 3]$, то найменшого значення вона набуває при $x = -4$, а найбільшого — при $x = 3$.

Отже,

$$\min_{[-4;3]} f(x) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81},$$

$$\max_{[-4;3]} f(x) = f(3) = 3^3 = 27.$$

Відповідь: $\frac{1}{81}$, 27.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{2}-1\right)^{|x|}=\sin^2 x+1.$

Розв'язання. Оскільки $0<\sqrt{2}-1<1$, а $|x|\geqslant 0$, то $\left(\sqrt{2}-1\right)^{|x|}\leqslant\left(\sqrt{2}-1\right)^{0}=1.$ Водночас $\sin^2 x+1\geqslant 1$. Таким чином, дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}\left(\sqrt{2}-1\right)^{|x|}=1,\\ \sin^2 x+1=1.\end{cases}$$

Звідси $x = 0$.

Відповідь: 0.

Вправи

16.1.° Обчисліть значення виразу:

1) $3^{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}:3^{2\sqrt{2}}$;
3) $\sqrt[3]{6^{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}\cdot 36^{-\sqrt{5}}}$;
2) $\left(\left(3\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;
4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$.

16.2.° Знайдіть значення виразу:

1) $5^{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}:\left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}}$; 2) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$; 3) $\left(\left(\sqrt[5]{10}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$.

16.3.° Доведіть, що:

1) $\frac{5^{\sqrt{8}}}{5^{\sqrt{2}}}=5^{\sqrt{2}}$; 2) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}}=\left(16^{\sqrt{3}}\right)^{-2}$; 3) $\frac{12^{\sqrt{48}}\cdot 2^{4\sqrt{12}}}{4^{\sqrt{108}}\cdot 6^{\sqrt{27}}}=6^{\sqrt{3}}$.

16.4.° Порівняйте з числом 1 степінь:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$;
3) $0{,}6^{2\sqrt{5}}$;
5) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\pi}$;
2) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\pi}$;
4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$;
6) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{6}}$.

16.5.° Які з даних чисел більші за 1, а які менші від 1?

1) $1{,}8^{\sqrt{1{,}8}}$; 2) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{10}}$; 3) $7^{-\sqrt{2}}$; 4) $0{,}3^{\pi}$.

16.6.° Яка з даних функцій є показниковою:

1) $y = x^6$; 2) $y = \sqrt[6]{x}$; 3) $y = 6^x$; 4) $y = 6$?

16.7.° Ґрунтуючись на якій властивості показникової функції можна стверджувати, що:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$?

16.8.° Укажіть, які з даних функцій є зростаючими, а які — спадними:

1) $y = 10^x$; 3) $y = 2^{-x}$; 5) $y = 2^x \cdot 3^x$;

2) $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$; 6) $y = 12^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x$.

16.9.° Побудуйте графік функції $y = 3^x$. У яких межах змінюється значення функції, коли x зростає від -1 до 3 включно?

16.10.° Побудуйте графік функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. У яких межах змінюється значення функції, коли x зростає від -2 до 2 включно?

16.11.° Порівняйте:

1) $5^{3,4}$ і $5^{3,26}$; 3) 1 і $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$; 5) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}$ і $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}}$;

2) $0,3^{0,4}$ і $0,3^{0,3}$; 4) $0,17^{-3}$ і 1; 6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,7}$ і $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,8}$.

16.12.° Порівняйте з числом 1 значення виразу:

1) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $\left(\frac{6}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 5) $0,62^{-0,4}$;

2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$; 4) $\left(\frac{7}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 6) $3,14^{-0,4}$.

16.13.° Порівняйте з числом 1 додатне число a, якщо:

1) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$; 3) $a^{-0,3} > a^{1,4}$;

2) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$; 4) $a^{-\sqrt{7}} < a^{1,2}$.

16.14.° Порівняйте числа m і n, якщо:

1) $0{,}8^m < 0{,}8^n$;

2) $3{,}2^m > 3{,}2^n$;

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n$;

4) $\left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n$.

16.15.• Спростіть вираз:

1) $\left(a^{\sqrt{5}}+2\right)\left(a^{\sqrt{5}}-2\right)-\left(a^{\sqrt{5}}+3\right)^2$;

2) $\dfrac{a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{3\sqrt{7}}}$;

3) $\dfrac{a^{2\sqrt{3}}-b^{2\sqrt{2}}}{\left(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}\right)^2}+1$;

4) $\dfrac{a^{\sqrt[3]{24}}-1}{a^{\sqrt[3]{3}}-1}-\dfrac{a^{\sqrt[3]{81}}+1}{a^{\sqrt[3]{3}}+1}$.

16.16.• Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\left(a^{2\sqrt{6}}-1\right)\left(a^{\sqrt{6}}+a^{2\sqrt{6}}+a^{3\sqrt{6}}\right)}{a^{4\sqrt{6}}-a^{\sqrt{6}}}$;

2) $\left((a^{\pi}+b^{\pi})^2-(a^{\pi}-b^{\pi})^2\right)^{\frac{1}{\pi}}$.

16.17.• Чи є правильним твердження:

1) найбільше значення функції $y = 0{,}2^x$ на проміжку $[-1;\ 2]$ дорівнює 5;

2) областю визначення функції $y = 4 - 7^x$ є множина дійсних чисел;

3) областю значень функції $y = 6^x + 5$ є проміжок $[5;\ +\infty)$;

4) найменше значення функції $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ на проміжку $[-2;\ 2]$ дорівнює 16?

16.18.• Знайдіть область значень функції:

1) $y = -9^x$;

2) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x+1$;

3) $y = 7^x - 4$;

4) $y = 6^{|x|}$.

16.19.• Знайдіть найбільше значення функції $y=\left(\frac{1}{6}\right)^x$ на проміжку $[-2;\ 3]$.

16.20.• На якому проміжку найбільше значення функції $y = 2^x$ дорівнює 16, а найменше — $\frac{1}{4}$?

16.21.° На якому проміжку найбільше значення функції $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ дорівнює 27, а найменше — $\frac{1}{9}$?

16.22.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2^x > -1$;
2) $2^{\sqrt{x}} > -2$.

16.23.° Розв'яжіть нерівність $2^{\frac{1}{x}} > 0$.

16.24.° Побудуйте графік функції:

1) $y = 2^x - 1$;
2) $y = 2^{x-1}$;
3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$;
4) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$;
5) $y = -2^x$;
6) $y = 5 - 2^x$.

16.25.° Побудуйте графік функції:

1) $y = 3^x + 1$;
2) $y = 3^{x+1}$;
3) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$;
4) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$;
5) $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$;
6) $y = -3^x - 1$.

16.26.° Графік якої з функцій, зображених на рисунку 16.5, перетинає графік функції $y = 5^x$ більше ніж в одній точці?

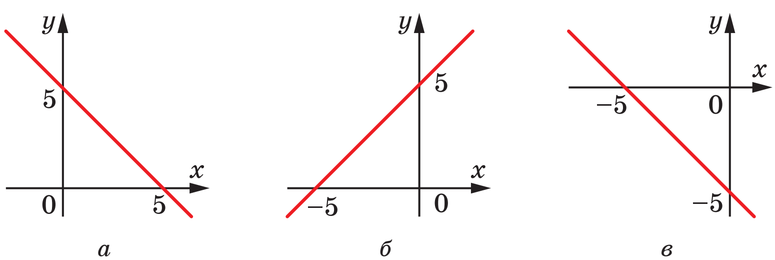


Рис. 16.5

16.27.• На рисунку 16.6 укажіть графік функції $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-1$.

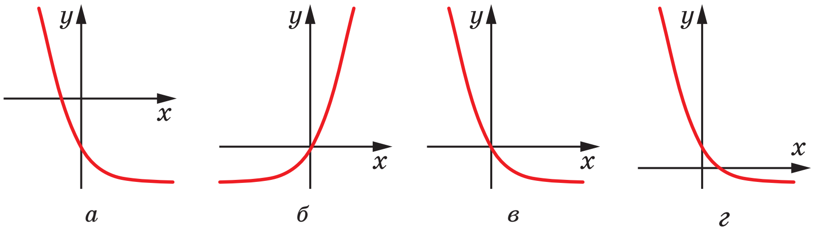


Рис. 16.6

16.28.•• Порівняйте $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-5,2}$ і $\left(7-4\sqrt{3}\right)^{5,6}$.

16.29.•• Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $2^x = x$;
2) $2^x = x^2$;
3) $2^x = \sin x$;
4) $2^{-x} = 2 - x^2$.

16.30.•• Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$;
2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \cos x$;
3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4-\frac{3}{x}$.

16.31.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = 2^{|x|}$;
2) $y = 2^{|x|} + 1$;
3) $y = |2^x - 1|$;
4) $y=\left|\frac{1}{2^x}-1\right|$.

16.32.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{1}{3^{|x|}}$;
2) $y = 3^{|x|} - 1$;
3) $y = |3^x - 1|$.

16.33.•• Побудуйте графік функції $y=\sqrt{2^{\cos x}-2}$.

16.34.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}$;
2) $y = 3^{|\sin x|} - 2$.

16.35.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y = 6^{\cos x}$;
2) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{|\cos x|}+5$.

16.36.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{\operatorname{tg} x} > 0$; 2) $2^{\arcsin x} > -\dfrac{\pi}{4}$; 3) $2^{\arccos x} > \arccos x - \pi$.

16.37.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x} > \sin x - 1$; 2) $2^{x} > \arcsin x - \dfrac{\pi}{2}$; 3) $2^{\operatorname{ctg} x} > \cos x - 1$.

16.38.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = |2^{-|x|} - 1|$; 2) $y = \dfrac{2^{|x|} - 1}{|2^{x} - 1|}$.

16.39.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = |1 - 3^{|x|}|$; 2) $y = \dfrac{|1 - 3^{-x}|}{3^{|x|} - 1}$.

16.40.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть область значень функції $f(x) = 2^{(\sin x + \cos x)^2}$.

16.41.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть область значень функції $f(x) = 3^{|\sin x \cos x|}$.

16.42.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{\cos x} = x^2 + 2$; 2) $2^{\sqrt{x}} = \cos x$.

16.43.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|} = x^2 + 1$; 2) $2^{|x|} = \cos x$.

16.44.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x^2} \geqslant \sin x$; 2) $2^{-x^2} \geqslant |\sin x| + 1$; 3) $2^{\sqrt{x}} \geqslant 1 - x^2$.

16.45.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x^2} > \cos x$; 2) $2^{-x^2} \geqslant x^2 + 1$.

16.46.$^{\bullet\bullet}$ Дослідіть на парність функцію $y = \dfrac{2^{x} - 1}{2^{x} + 1}$.

16.47.$^{\bullet\bullet}$ Дослідіть на парність функцію $y = \dfrac{2^{x} - 3^{x}}{2^{x} + 3^{x}}$.

16.48.$^{\bullet\bullet}$ Дослідіть на парність функцію $y = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{x} + \left(2 - \sqrt{3}\right)^{x}$.

16.49.$^{\bullet\bullet}$ Дослідіть на парність функцію $y = \left(\sqrt{2} + 1\right)^{x} - \left(\sqrt{2} - 1\right)^{x}$.

16.50.•• Знайдіть область значень функції $y=\dfrac{2^x-1}{2^x-4}$.

16.51.•• Знайдіть область значень функції $y=\dfrac{3^x}{3^x-9}$.

Готуємося до вивчення нової теми

16.52. Подайте числа 1; 4; 8; 16; $\dfrac{1}{32}$; $\dfrac{1}{64}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{32}$ у вигляді степеня з основою: 1) 2; 2) $\dfrac{1}{2}$.

16.53. Подайте числа 1; 9; 81; $\dfrac{1}{27}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt[5]{243}$ у вигляді степеня з основою: 1) 3; 2) $\dfrac{1}{3}$.

16.54. Спростіть вираз:

1) $7^{x+1}+7^x$;
2) $10^{x-2}-10^x$;
3) $2^{x+1}+2^{x-4}$;
4) $3^{x+1}+3^x+3^{x-1}$;
5) $2^{x+3}+3\cdot 2^{x+2}-5\cdot 2^{x+1}$;
6) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{1-x}+36^{\frac{x}{2}}-6^{x+1}$;
7) $9^{x+1}+3^{2x+1}$;
8) $\sqrt{25^{x-2}}-2\cdot 5^x+\left(\sqrt{5}\right)^{2x+4}$.

17. Показникові рівняння

Розглянемо рівняння $2^x=8$,

$$3^x\cdot 3^{x-1}=4,$$

$$0{,}3^{x-4}=0{,}3^{x^2}.$$

У всіх цих рівняннях змінна міститься тільки в показнику степеня. Наведені рівняння є прикладами **показникових рівнянь.**

Теорема 17.1. ***При*** $a>0$ ***і*** $a\neq 1$ ***рівність*** $a^{x_1}=a^{x_2}$ ***виконується тоді і тільки тоді, коли*** $x_1=x_2$.

Доведення. ⊙ Очевидно, що коли $x_1=x_2$, то $a^{x_1}=a^{x_2}$.

Доведемо, що з рівності $a^{x_1} = a^{x_2}$ випливає рівність $x_1 = x_2$. Припустимо, що $x_1 \neq x_2$, тобто $x_1 < x_2$ або $x_1 > x_2$. Нехай, наприклад, $x_1 < x_2$.

Розглянемо показникову функцію $y = a^x$. Вона є або зростаючою, або спадною. Тоді з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $a^{x_1} < a^{x_2}$ (при $a > 1$) або $a^{x_1} > a^{x_2}$ (при $0 < a < 1$). Проте за умовою виконується рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$. Отримали суперечність.

Аналогічно розглядають випадок, коли $x_1 > x_2$. ▲

Наслідок. ***Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння***

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \qquad (1)$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = g(x). \qquad (2)$$

Доведення. ⊙ Нехай x_1 — корінь рівняння (1), тобто $a^{f(x_1)} = a^{g(x_1)}$. Тоді за теоремою 17.1 отримуємо, що $f(x_1) = g(x_1)$. Отже, x_1 — корінь рівняння (2).

Нехай x_2 — корінь рівняння (2), тобто $f(x_2) = g(x_2)$. Звідси $a^{f(x_2)} = a^{g(x_2)}$.

Ми показали, що кожний корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2) і навпаки, кожний корінь рівняння (2) є коренем рівняння (1). Отже, рівняння (1) і (2) рівносильні. ▲

Розглянемо приклади розв'язування показникових рівнянь.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $(0{,}125)^x = 128$.

Розв'язання. Подамо кожну з частин рівняння у вигляді степеня з основою 2. Маємо: $0{,}125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$ і $128 = 2^7$. Запишемо:

$$(2^{-3})^x = 2^7;\ 2^{-3x} = 2^7.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню

$$-3x = 7.$$

Звідси $x = -\frac{7}{3}$.

Відповідь: $-\frac{7}{3}$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot(10^{x-1})^3$.

Розв'язання. Скориставшись властивостями степеня, подамо кожну з частин рівняння у вигляді степеня з основою 10. Маємо:

$$(2\cdot 5)^{x^2-3}=10^{-2}\cdot 10^{3x-3};$$

$$10^{x^2-3}=10^{3x-5}.$$

Переходимо до рівносильного рівняння:

$$x^2-3=3x-5.$$

Звідси $x^2-3x+2=0$; $x_1=1$, $x_2=2$.

Відповідь: 1; 2.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння

$$2^{12x-1}-4^{6x-1}+8^{4x-1}-16^{3x-1}=1280.$$

Розв'язання. Маємо:

$$2^{12x-1}-2^{12x-2}+2^{12x-3}-2^{12x-4}=1280;$$

$$2^{12x-4}(2^3-2^2+2^1-1)=1280;\quad 2^{12x-4}\cdot 5=1280;$$

$$2^{12x-4}=256;\quad 2^{12x-4}=2^8;\quad 12x-4=8;\ x=1.$$

Відповідь: 1.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння

$$2\cdot 3^{x+2}-3^{x+1}=5^{x+1}+4\cdot 5^x.$$

Розв'язання. Маємо:

$$3^x(2\cdot 3^2-3)=5^x(5+4);\quad 3^x\cdot 15=5^x\cdot 9;$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{9}{15};\quad \left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{3}{5};\quad x=1.$$

Відповідь: 1.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $25^x+4\cdot 5^x-5=0$.

Розв'язання. Оскільки $25^x=(5^2)^x=5^{2x}=(5^x)^2$, то дане рівняння зручно розв'язувати методом заміни змінної.

Нехай $5^x=t$. Тоді задане рівняння можна переписати так:

$$t^2+4t-5=0.$$

Звідси $t=1$ або $t=-5$.

Якщо $t=1$, то $5^x=1$. Звідси $5^x=5^0$; $x=0$.

Якщо $t=-5$, то $5^x=-5$. Оскільки $5^x>0$ при будь-якому x, то рівняння $5^x=-5$ не має коренів.

Відповідь: 0.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$.

Розв'язання. Маємо: $4 \cdot 2^{2x} - 2^x \cdot 3^x - 18 \cdot 3^{2x} = 0$.

Оскільки $3^{2x} \neq 0$ при будь-якому x, то, поділивши обидві частини рівняння на 3^{2x}, отримаємо рівняння, рівносильне даному:

$$4 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} - \frac{2^x}{3^x} - 18 = 0; \; 4 \cdot \left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 - \frac{2^x}{3^x} - 18 = 0.$$

Нехай $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$. Тоді можна записати $4t^2 - t - 18 = 0$.

Звідси $\left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = \frac{9}{4}. \end{array}\right.$ Маємо: $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x = -2, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}. \end{array}\right.$

Оскільки $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$ при будь-якому x, то перше рівняння сукупності розв'язків не має. Друге рівняння сукупності перепишемо так:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}. \text{ Звідси } x = -2.$$

Відповідь: -2.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $2^x + 5^x = 7^x$.

Розв'язання. Очевидно, що $x = 1$ — корінь даного рівняння. Покажемо, що цей корінь — єдиний.

Поділивши обидві частини початкового рівняння на 7^x, отримаємо: $\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1$.

Розглянемо функцію $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$. Оскільки функції $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ і $y = \left(\frac{5}{7}\right)^x$ є спадними, то функція f також є спадною, а отже, кожного свого значення вона набуває тільки один раз. Тому рівняння $f(x) = 1$ має єдиний корінь.

Відповідь: 1.

ПРИКЛАД 8 При яких значеннях параметра a рівняння $4^x - (a + 3)\,2^x + 4a - 4 = 0$ має єдиний корінь?

Розв'язання. Нехай $2^x = t$. Маємо:

$$t^2 - (a + 3)\,t + 4a - 4 = 0.$$

Звідси $t_1 = 4$, $t_2 = a - 1$. Отже, початкове рівняння рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 4, \\ 2^x = a - 1. \end{array}\right.$$

Перше рівняння сукупності має єдиний корінь $x = 2$. Друге рівняння сукупності при кожному значенні параметра a або має один корінь, або взагалі не має коренів.

Для виконання умови задачі друге рівняння сукупності повинно або не мати коренів, або мати єдиний корінь, який дорівнює 2.

Якщо $a \leqslant 1$, тобто $a - 1 \leqslant 0$, то рівняння $2^x = a - 1$ коренів не має.

Число 2 є коренем другого рівняння сукупності, якщо $2^2 = a - 1$. Звідси $a = 5$.

Відповідь: $a \leqslant 1$ або $a = 5$.

Вправи

17.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $4^x = 64$;
2) $3^x = \frac{1}{81}$;
3) $0{,}6^{2x-3} = 1$;
4) $10^{-x} = 0{,}001$;
5) $2^{5-x} = 2^{3x-7}$;
6) $8^x = 16$;
7) $0{,}16^x = \frac{5}{2}$;
8) $\sqrt{5^x} = 25$;
9) $0{,}25^{x^2-4} = 2^{x^2+1}$;
10) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$;

11) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot (10^{x-1})^5$;
12) $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{3x-7} = \left(\dfrac{7}{4}\right)^{7x-3}$;
13) $36^x = \left(\dfrac{1}{216}\right)^{2-x}$;
14) $5^{x^2-2x} = 6^{x^2-2x}$;
15) $3^{x-1} = 6^x \cdot 2^{-x} \cdot 3^{x+1}$.

17.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}4^{x^2-x-6} = 1$;
2) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x = \dfrac{5}{3}$;
3) $0{,}7^x = 2\dfrac{2}{49}$;
4) $9^{-x} = 27$;
5) $\sqrt{2^x} = 8^{-\frac{2}{3}}$;
6) $\left(\dfrac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4{,}5^{x-2}$;
7) $100^x = 0{,}01\sqrt{10}$;
8) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\dfrac{25}{8}\right)^x = \dfrac{125}{64}$;
9) $2^{x-1} \cdot 3^{x-1} = \dfrac{1}{36} \cdot 6^{2x+5}$;
10) $32^{\frac{3}{5}x-2} = 4^{6-\frac{3}{2}x}$;
11) $3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}$;
12) $16^{5-3x} = 0{,}125^{5x-6}$.

17.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{x+2} + 3^x = 30$;
2) $4^{x+1} + 4^{x-2} = 260$;
3) $2^{x+4} - 2^x = 120$;
4) $7^{x+1} + 4 \cdot 7^x = 77$;
5) $5^x + 7 \cdot 5^{x-2} = 160$;
6) $6^{x+1} - 4 \cdot 6^{x-1} = 192$.

17.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1} + 5^x = 150$;
2) $2^x + 2^{x-3} = 18$;
3) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$;
4) $4^x - 3 \cdot 4^{x-2} = 52$.

17.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$;
2) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$;
3) $25^x - 5^x - 20 = 0$;
4) $100 \cdot 0{,}3^{2x} + 91 \cdot 0{,}3^x - 9 = 0$.

17.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $6^{2x} - 3 \cdot 6^x - 18 = 0$;
2) $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$.

17.7.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{1}{9} \cdot \sqrt{3^{3x-1}} = 81^{-\frac{3}{4}}$;
2) $4^x \cdot 3^{x+1} = 0{,}25 \cdot 12^{3x-1}$;

3) $4 \cdot 2^{\cos x} = \sqrt{8}$;
4) $0{,}25 \cdot 2^{x^2} = \sqrt[3]{0{,}25 \cdot 4^{2x}}$;
5) $5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1}$;
6) $\sqrt[3]{9^{2x+1}} = \dfrac{3}{\sqrt[5]{3}}$.

17.8.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{\sqrt{32}}{16^{x^2}} = 8^{3x}$;
2) $9 \cdot 3^{\sin x} = \sqrt{27}$;
3) $2^{x-1} = 12^{2x} \cdot 3^{-2x} \cdot 2^{x+1}$;
4) $\sqrt[5]{7^{x+1}} = \dfrac{49}{\sqrt{7}}$.

17.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 56$;
2) $6 \cdot 5^x - 5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-1} = 10$;
3) $2 \cdot 7^x + 7^{x+2} - 3 \cdot 7^{x-1} = 354$;
4) $4^{x-2} - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^{2x} = 228$;
5) $4 \cdot 9^{1,5x-1} - 27^{x-1} = 33$;
6) $0{,}5^{5-2x} + 3 \cdot 0{,}25^{3-x} = 5$;
7) $2^{2x+1} + 4^x - \left(\dfrac{1}{16}\right)^{1-0,5x} = 47$;
8) $4 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{x-1} - 6 \cdot 3^{x-2} = 15 \cdot 9^{x^2-1}$.

17.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31$;
2) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 17$;
3) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} = 9$;
4) $2 \cdot 3^{2x+1} + 3^{2x-1} - 5 \cdot 3^{2x} = 36$;
5) $6^{x-2} - \left(\dfrac{1}{6}\right)^{3-x} + 36^{\frac{x-1}{2}} = 246$;
6) $5 \cdot 2^{x-1} - 6 \cdot 2^{x-2} - 7 \cdot 2^{x-3} = 8^{x^2-1}$.

17.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$;
2) $4^{x+1} + 4^{1-x} = 10$;
3) $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} = 3$;
4) $9^x - 6 \cdot 3^{x-1} = 3$;
5) $3^{x+1} + 3^{2-x} = 28$;
6) $\dfrac{9}{2^x - 1} - \dfrac{21}{2^x + 1} = 2$.

17.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$;
2) $2^{3-2x} - 3 \cdot 2^{1-x} + 1 = 0$;
3) $5^x - 0{,}2^{x-1} = 4$;
4) $4^{x+0{,}5} + 7 \cdot 2^x = 4$;
5) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0{,}2$;
6) $\frac{5}{3^x - 6} + \frac{5}{3^x + 6} = 2$.

17.13.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$;
2) $3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} = 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1}$;
3) $7^x - 5^{x+2} = 2 \cdot 7^{x-1} - 118 \cdot 5^{x-1}$.

17.14.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $6^x + 6^{x-1} - 6^{x-2} = 7^x - 8 \cdot 7^{x-2}$;
2) $5^x - 2 \cdot 5^{x-1} = 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2}$;
3) $2^{\sqrt{x}+1} - 3^{\sqrt{x}} = 3^{\sqrt{x}-1} - 2^{\sqrt{x}}$.

17.15.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $27^{\frac{2}{x}} - 2 \cdot 3^{\frac{x+3}{x}} - 27 = 0$;
2) $\sqrt[3]{49^x} - 50\sqrt[3]{7^{x-3}} + 1 = 0$;
3) $2^{\sqrt{x+1}} = 3 \cdot 2^{2-\sqrt{x+1}} + 1$;
4) $3^{\sqrt{x-5}} + 3^{2-\sqrt{x-5}} = 6$;
5) $5 \cdot 2^{\cos^2 x} - 2^{\sin^2 x} = 3$;
6) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$;
7) $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0$.

17.16.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{2x+3}{x}} - 32 = 0$;
2) $5^{\sqrt{x-2}} - 5^{1-\sqrt{x-2}} - 4 = 0$;
3) $2^{\cos 2x} - 3 \cdot 2^{\cos^2 x} + 4 = 0$.

17.17.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0$;
2) $2^{2x+1} - 7 \cdot 10^x + 25^{x+0{,}5} = 0$;
3) $7 \cdot 49^x + 3 \cdot 28^x = 4 \cdot 16^x$;
4) $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$.

17.18.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0$;
2) $5 \cdot 2^x + 2 \cdot 5^x = 7 \cdot 10^{\frac{x}{2}}$.

17.19.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4^x - 2^x - 3} = \sqrt{4 \cdot 2^x - 7}$.

17.20.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1 + 3^x - 9^x} = \sqrt{4 - 3 \cdot 3^x}$.

17.21.•• Розв’яжіть рівняння $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}=4.$

17.22.•• Розв’яжіть рівняння $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{x}+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^{x}=8.$

17.23.•• Розв’яжіть рівняння:

1) $4^{x+\frac{1}{2}}+\frac{2}{4^{x}}+14=9\left(2^{x}+\frac{1}{2^{x}}\right);$

2) $9^{x+\frac{1}{2}}+\frac{3}{9^{x}}+26=16\,(3^{x}+3^{-x}).$

17.24.•• При яких значеннях параметра a рівняння $9^x - (a + 1) \cdot 3^x + 3a - 6 = 0$ має єдиний корінь?

17.25.•• При яких значеннях параметра a рівняння $25^x + 5^{x+1} - a^2 + a + 6 = 0$ не має коренів?

17.26.•• При яких значеннях параметра a рівняння $4^x - (a + 1) \cdot 2^x + 2a - 2 = 0$ має два різних корені?

17.27.•• Розв’яжіть рівняння:

1) $2^x = 3 - x;$

2) $3^x + 4^x = 5^x;$

3) $7^{6-x} = x + 2;$

4) $3^{x-1} + 5^{x-1} = 34.$

17.28.•• Розв’яжіть рівняння:

1) $3^x = 11 - x;$

2) $8^{5-x} = x + 4;$

3) $4^{x-2} + 6^{x-3} = 100;$

4) $3^{x-2} = \frac{9}{x}.$

17.29.* При яких значеннях параметра a рівняння $\left(\sqrt{x}-a\right)(3^{2x}-4\cdot 3^{x}+3)=0$ має два різних корені?

17.30.* При яких значеннях параметра a рівняння $\left(\sqrt{x}-a\right)(2^{2x}-10\cdot 2^{x}+16)=0$ має два різних корені?

17.31.* Розв’яжіть рівняння $4^x - (19 - 3x) \cdot 2^x + 34 - 6x = 0.$

17.32.* Розв’яжіть рівняння $9^{x}-(14-x)\cdot 3^{x}+33-3x=0.$

18. Показникові нерівності

Нерівності $0{,}2^x < 25$, $2^x + 5^x > 1$, $7^{x^2} > 2^x$ є прикладами **показникових нерівностей.**

При розв'язуванні багатьох показникових нерівностей застосовують таку теорему.

Теорема 18.1. ***При $a > 1$ нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1 > x_2$; при $0 < a < 1$ нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1 < x_2$.***

Справедливість цієї теореми випливає з того, що при $a > 1$ показникова функція $y = a^x$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ є спадною.

Наслідок. ***Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.***

Скориставшись ідеєю доведення наслідку з теореми 17.1, доведіть цей наслідок самостійно.

Розглянемо приклади розв'язування показникових нерівностей.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $8 \cdot 2^{3x-1} < (0{,}5)^{-1}$.

Розв'язання. Маємо:

$$2^3 \cdot 2^{3x-1} < (2^{-1})^{-1};\ 2^{3x+2} < 2^1.$$

Оскільки основа степенів 2^{3x+2}, 2^1 більша за одиницю, то остання нерівність рівносильна такій:

$$3x + 2 < 1.$$

Звідси $3x < -1$; $x < -\frac{1}{3}$.

Відповідь: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{147}{20}\right)^x \geqslant \left(\frac{81}{625}\right)^x$.

Розв'язання. Маємо:

$$\left(\frac{4}{49}\right)^x \cdot \left(\frac{147}{20}\right)^x \geqslant \left(\frac{81}{625}\right)^x;\ \left(\frac{4}{49} \cdot \frac{147}{20}\right)^x \geqslant \left(\frac{81}{625}\right)^x;$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x \geqslant \left(\left(\frac{3}{5}\right)^4\right)^x; \ \left(\frac{3}{5}\right)^x \geqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{4x}.$$

Оскільки $0<\frac{3}{5}<1$, то остання нерівність рівносильна такій: $x \leqslant 4x$; $x \geqslant 0$.

Відповідь: $[0; +\infty)$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} > 52$.

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність так:

$$2^{2x} - 2^{2x-2} + 2^{2x-4} > 52.$$

Звідси

$$2^{2x-4}(2^4 - 2^2 + 1) > 52;$$
$$2^{2x-4} \cdot 13 > 52; \ 2^{2x-4} > 4;$$
$$2^{2x-4} > 2^2; \ 2x - 4 > 2; \ x > 3.$$

Відповідь: $(3; +\infty)$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$.

Розв'язання. Маємо:

$$(2^2)^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0;$$
$$2^{-2x+1} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0;$$
$$2 \cdot 2^{-2x} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0.$$

Нехай $2^{-x} = t$. Тоді $2t^2 - 7t - 4 < 0$.

Розв'язавши цю нерівність, отримаємо $-\frac{1}{2} < t < 4$. Звідси $-\frac{1}{2} < 2^{-x} < 4$.

Оскільки $2^{-x} > 0$, то $2^{-x} > -\frac{1}{2}$ при всіх x. Тому достатньо розв'язати нерівність $2^{-x} < 4$.

Маємо: $2^{-x} < 2^2$; $-x < 2$; $x > -2$.

Відповідь: $(-2; +\infty)$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $4^x - 2 \cdot 5^{2x} + 10^x > 0$.

Розв'язання. Маємо: $2^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} + 2^x \cdot 5^x > 0$. Оскільки $5^{2x} > 0$ при будь-якому x, то, поділивши обидві частини останньої нерівності на 5^{2x}, отримуємо рівносильну нерівність $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 2 + \left(\frac{2}{5}\right)^x > 0$.

Нехай $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$. Тоді $t^2 + t - 2 > 0$. Розв'язавши цю нерівність, отримуємо $\left[\begin{array}{l} t > 1, \\ t < -2. \end{array}\right.$ Звідси:

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{5}\right)^x > 1, \\ \left(\frac{2}{5}\right)^x < -2. \end{array}\right.$$

З нерівності $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 1$ знаходимо, що $x < 0$. Нерівність $\left(\frac{2}{5}\right)^x < -2$ не має розв'язків.

Відповідь: $(-\infty; 0)$.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $3^x + 4^x > 5^x$.

Розв'язання. Маємо: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$.

Розглянемо функцію $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$. Зауважимо, що $f(2) = 1$. Оскільки функція f — спадна, то при $x < 2$ виконується нерівність $f(x) > f(2)$, а при $x > 2$ виконується нерівність $f(x) < f(2)$. Отже, множиною розв'язків нерівності $f(x) > f(2)$, тобто нерівності $f(x) > 1$, є проміжок $(-\infty; 2)$. ●

Вправи

18.1.° Чи рівносильні нерівності:

1) $7^{2x+4} > 7^{x-1}$ і $2x + 4 > x - 1$;
2) $0{,}9^{x^2-4} < 0{,}9^{x^2+2}$ і $x^2 - 4 < x + 2$;
3) $a^x > a^5$, де $a > 1$, і $x > 5$;
4) $a^x < a^{-3}$, де $0 < a < 1$, і $x < -3$?

18.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$;
2) $5^x < \frac{1}{5}$;
3) $11^{x-5} < 11^{3x+1}$;
4) $0{,}4^{6x+1} \geqslant 0{,}4^{2x+5}$;
5) $2^{x^2-1} < 8$;
6) $27^{2x+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$;
7) $0{,}3^{4x-8} > 1$;
8) $0{,}1^{3x-1} < 1000$;
9) $\left(\frac{1}{36}\right)^{2-x} < 216^{x+1}$.

18.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $6^{7x-1} > 6$;
2) $10^x < 0{,}001$;
3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{3}{2}\right)^4$;
4) $3^{2x^2-6} > \frac{1}{81}$;
5) $49^{x+1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x$;
6) $0{,}2^{2x-9} < 1$.

18.4.° Скільки цілих розв'язків мають нерівності:

1) $0{,}2 \leqslant 5^{x+4} \leqslant 125$; 2) $\frac{1}{36} \leqslant 6^{3-x} < 6$; 3) $2 < 0{,}5^{x-1} \leqslant 32$?

18.5.° Знайдіть суму цілих розв'язків нерівностей:

1) $\frac{1}{3} < 3^{x+3} < 9$;
2) $\frac{1}{8} < 2^{2-x} \leqslant 16$.

18.6.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x}$;
2) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3^{x+2} - 27}}$.

18.7.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^x - 16}$;
2) $f(x) = \sqrt{1 - 6^{x-4}}$.

18.8.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5$;
2) $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \geqslant \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$;
3) $0{,}6^{\frac{x+5}{x^2-9}} < 1$;
4) $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{x-0{,}5} > \sqrt{2}$;
5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3} \leqslant \frac{9}{4}$;
6) $4 \cdot 0{,}5^{x(x+3)} \geqslant 0{,}25^{2x}$.

18.9.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-x} < \frac{9}{49}$;

2) $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$;

3) $0{,}3^{\frac{x^2-4}{x-1}} > 1$;

4) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{x-1} > 9^{-0{,}5}$.

18.10.° Розв'яжіть нерівність:

1) $7^{x+2} - 14\cdot 7^x > 5$;

2) $9\cdot 3^{x-1} + 3^x < 36$;

3) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} > 56$;

4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \geqslant 26$;

5) $2\cdot 6^x + 3\cdot 6^{x+3} \leqslant 650$;

6) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x} - \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} > \frac{3}{16}$.

18.11.° Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{x+2} - 4\cdot 3^x < 45$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \leqslant 3$;

3) $5^x + 5^{x-1} - 5^{x-2} > 145$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} < 1\frac{2}{3}$.

18.12.° Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{2x} - 4\cdot 3^x - 45 > 0$;

2) $4^x + 2^{x+3} - 20 < 0$;

3) $49^x - 8\cdot 7^x + 7 \leqslant 0$;

4) $0{,}25^x - 12\cdot 0{,}5^x + 32 \geqslant 0$;

5) $6^{2x-1} - \frac{1}{3}\cdot 6^x - 4 \leqslant 0$;

6) $25^x + 5^x - 30 \geqslant 0$.

18.13.° Розв'яжіть нерівність:

1) $9^{x+1} - 2\cdot 3^x - 7 \leqslant 0$;

2) $2^x + 2^{\frac{x}{2}} - 72 \geqslant 0$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 2 > 0$;

4) $25^x - 26\cdot 5^x + 25 \leqslant 0$.

18.14.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{5^x - 125}{x^2 - 4x + 4} \leqslant 0$;

2) $\frac{2^x - 1}{x - 1} > 0$.

18.15.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{16 - 4^x}{9x^2 + 12x + 4} \geqslant 0$;

2) $\frac{5^x - 0{,}04}{5 - x} \geqslant 0$.

18.16.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{3x+1} + 0{,}25^{\frac{1-3x}{2}} - 4^{\frac{3x}{2}} > 192$;

2) $2^{2x-1} + 2^{2x-3} - 2^{2x-5} > 2^{7-x} + 2^{5-x} - 2^{3-x}$.

18.17.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}+3}>84$; 2) $2\cdot16^x-3\cdot2^{4x-1}+7\cdot4^{2x-2}\leqslant120$.

18.18.•• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $3^x-9\cdot3^{-x}-8>0$; 3) $6^{x+2}+6^{-x}-37\geqslant0$;

2) $2^{x+3}+2^{1-x}<17$; 4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}+\left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}\leqslant\frac{6}{5}$.

18.19.•• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $3^{x+1}-2\cdot3^{1-x}>7$; 2) $4^{1-x}-0{,}5^{1-2x}\geqslant1$.

18.20.•• Розв'яжіть нерівність $2^{\sqrt{x}}-2^{1-\sqrt{x}}\leqslant1$.

18.21.•• Розв'яжіть нерівність $3^{\sqrt{x}}-3^{2-\sqrt{x}}\leqslant8$.

18.22.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $3\cdot4^x+2\cdot9^x-5\cdot6^x<0$; 2) $5\cdot25^{\frac{1}{x}}+3\cdot10^{\frac{1}{x}}\geqslant2\cdot4^{\frac{1}{x}}$.

18.23.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $3\cdot16^x+2\cdot81^x-5\cdot36^x<0$; 2) $2\cdot49^{\frac{1}{x}}-9\cdot14^{\frac{1}{x}}+7\cdot4^{\frac{1}{x}}\geqslant0$.

18.24.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2\cdot2^x+1>x^2+2^x$; 2) $25\cdot2^x-10^x+5^x>25$.

18.25.•• Розв'яжіть нерівність $x^2\cdot3^x+9<x^2+3^{x+2}$.

18.26.•• Розв'яжіть рівняння $|3^x-1|+|3^x-9|=8$.

18.27.•• Розв'яжіть рівняння $|2^x-1|+|2^x-2|=1$.

18.28.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $5^x>6-x$; 2) $5^x+12^x<13^x$.

18.29.•• Розв'яжіть нерівність $10^{4-x}>7+x$.

18.30.•• Розв'яжіть нерівність $(2^x-2)\sqrt{x^2-x-6}\geqslant0$.

18.31.•• Розв'яжіть нерівність $(3^x-9)\sqrt{x^2-2x-8}\leqslant0$.

18.32.* Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(x-a)\sqrt{3\cdot2^x-2\cdot3^x}\geqslant0$.

18.33.* Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(x-a)\sqrt{6\cdot5^x-5\cdot6^x}\leqslant0$.

19. Логарифм і його властивості

Легко розв'язати рівняння $2^x = 4$ і $2^x = 8$. Їх коренями будуть відповідно числа 2 і 3.

Проте для рівняння $2^x = 5$ одразу вказати його корінь складно.

Виникає природне запитання: чи є взагалі корені у цього рівняння?

Звернемося до графічної інтерпретації. На рисунку 19.1 зображено графіки функцій $y = 2^x$ і $y = 5$. Вони перетинаються в деякій точці A (x_0; 5). Отже, рівняння $2^x = 5$ має єдиний корінь x_0.

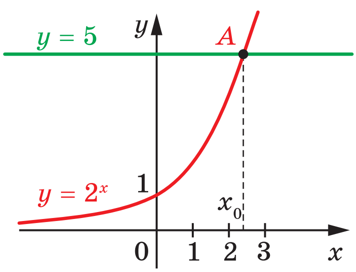


Рис. 19.1

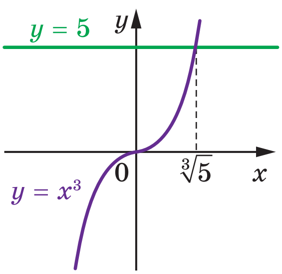


Рис. 19.2

Проте графічний метод не дозволяє встановити точне значення x_0.

З подібною ситуацією ми зустрічалися, розв'язуючи в 10 класі рівняння $x^3 = 5$. Графічна інтерпретація також показує, що це рівняння має єдиний корінь (рис. 19.2). Потреба називати і записувати цей корінь свого часу призвела до нового поняття «кубічний корінь» з числа 5 і позначення $\sqrt[3]{5}$.

Корінь рівняння $2^x = 5$ домовилися називати **логарифмом числа** 5 **з основою** 2 і позначати $\log_2 5$. Таким чином, число $\log_2 5$ — це показник степеня, до якого треба піднести число 2, щоб отримати число 5. Можна записати:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

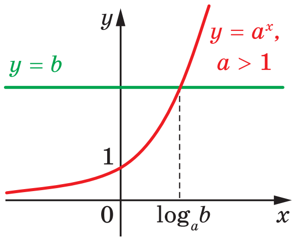


Рис. 19.3

Розглянемо рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$. Оскільки для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $a^x > 0$, то при $b \leqslant 0$ це рівняння не має розв'язків. Якщо $b > 0$, то це рівняння має єдиний корінь (рис. 19.3). Його називають логарифмом числа b з основою a і позначають $\log_a b$.

Означення. Логарифмом додатного числа *b* з основою *a*, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число *a*, щоб отримати число *b*.

Наприклад, $\log_3 9$ — це показник степеня, до якого потрібно піднести число 3, щоб отримати число 9. Маємо: $\log_3 9 = 2$, оскільки $3^2 = 9$.

Ще кілька прикладів:

$\log_2 \dfrac{1}{8} = -3$, оскільки $2^{-3} = \dfrac{1}{8}$;

$\log_{25} 5 = \dfrac{1}{2}$, оскільки $25^{\frac{1}{2}} = 5$;

$\log_{17} 17 = 1$, оскільки $17^1 = 17$;

$\log_{100} 1 = 0$, оскільки $100^0 = 1$.

З означення логарифма випливає, що при $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$ виконується рівність

$$\boxed{\boldsymbol{a^{\log_a b} = b}}$$

Її називають **основною логарифмічною тотожністю.**

Наприклад, $7^{\log_7 3} = 3$, $0{,}3^{\log_{0{,}3} 5} = 5$.

Також з означення логарифма випливає, що при $a > 0$ і $a \neq 1$

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

Розглянемо рівність $a^c = b$.

Ви знаєте, що дію знаходження числа b за даними числами a і c називають піднесенням числа a до степеня c.

Дію знаходження числа c за даними числами a і b, де $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$, називають **логарифмуванням числа b за основою a**. Справді, $c = \log_a b$.

Зазначимо, що при $a > 0$ ліва частина рівності $a^c = b$ є додатною. Отже, $b > 0$.

Тому при $b \leqslant 0$ вираз $\log_a b$ не має змісту.

Логарифм з основою 10 називають **десятковим логарифмом**. Замість $\log_{10} b$ пишуть $\lg b$.

Використовуючи це позначення та основну логарифмічну тотожність, для кожного $b > 0$ можна записати $10^{\lg b} = b$.

Розглянемо основні властивості логарифмів.

Теорема 19.1 (логарифм добутку). ***Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

Коротко формулюють: *логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів*.

Доведення. Розглянемо два вирази: $a^{\log_a xy}$ і $a^{\log_a x + \log_a y}$. Доведемо, що вони рівні.

Використовуючи основну логарифмічну тотожність, запишемо:

$$a^{\log_a xy} = xy;$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

Отже, $a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$. Звідси за теоремою 17.1 отримуємо, що $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. ▲

Теорема 19.2 (логарифм частки). ***Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Коротко формулюють: *логарифм частки дорівнює різниці логарифмів*.

Скориставшись ідеєю доведення теореми 19.1, доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 19.3. ***Якщо $x > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то для будь-якого $\beta \in \mathbb{R}$ виконується рівність***

$$\boxed{\log_a x^\beta = \beta \log_a x}$$

Доведення. Розглянемо два вирази: $a^{\log_a x^\beta}$ і $a^{\beta \log_a x}$. Доведемо, що вони рівні.

Маємо: $$a^{\log_a x^\beta} = x^\beta;$$

$$a^{\beta \log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^\beta = x^\beta.$$

Отже, $a^{\log_a x^\beta} = a^{\beta \log_a x}$. Звідси за теоремою 17.1 отримуємо: $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$. ▲

Теорема 19.4 (перехід від однієї основи логарифма до іншої). ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Доведення. Розглянемо вираз $\log_a b \cdot \log_c a$. Перетворимо його, скориставшись теоремою 19.3 при $\beta = \log_a b$. Маємо:

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c a^{\log_a b} = \log_c b.$$

Отже, $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$. Оскільки $a \neq 1$, то легко показати, що $\log_c a \neq 0$. Тепер можна записати:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \ ▲$$

Наслідок 1. ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Доведіть цей наслідок самостійно.

Наслідок 2. ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то для будь-якого $\beta \neq 0$ виконується рівність***

$$\boxed{\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b}$$

Доведення. У виразі $\log_{a^\beta} b$ перейдемо до основи a:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^\beta} = \frac{\log_a b}{\beta \log_a a} = \frac{1}{\beta}\log_a b. \ \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння: 1) $3^x = 7$; 2) $0{,}4^{2x-5} = 9$.

Розв'язання. 1) З означення логарифма випливає, що $x = \log_3 7$.

2) Маємо: $2x - 5 = \log_{0,4} 9$; $2x = \log_{0,4} 9 + 5$; $x = \frac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$.

Відповідь: 1) $\log_3 7$; 2) $\frac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$.

ПРИКЛАД 2 Обчисліть значення виразу:

$$1)\ 10^{2 + 2\lg 7};\ 2)\ 9^{\log_3 4 - 0,5}.$$

Розв'язання. 1) Застосовуючи властивості степенів і основну логарифмічну тотожність, отримуємо:

$10^{2+2\lg 7} = 10^2 \cdot 10^{2\lg 7} = 100 \cdot (10^{\lg 7})^2 = 100 \cdot 7^2 = 4900.$

2) Маємо:

$$9^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4} : (3^2)^{0,5} = (3^{\log_3 4})^2 : 3 = 4^2 : 3 = \frac{16}{3}. \ \bullet$$

ПРИКЛАД 3 При якому значенні x виконується рівність: 1) $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$; 2) $\log_x 16 = 4$?

Розв'язання. 1) Вираз $\log_{\frac{1}{2}} x$ визначено при $x > 0$. З означення логарифма випливає, що $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = x$, тобто $x = 32$.

2) Вираз $\log_x 16$ визначено при $x > 0$ і $x \neq 1$. Згідно з означенням логарифма маємо: $x^4 = 16$. Звідси $x = 2$. $\bullet$

ПРИКЛАД 4 Обчисліть значення виразу:

1) $\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15$; 2) $\frac{1}{2}\log_{36} 9 + \frac{1}{3}\log_{36} 8$.

Розв'язання. 1) Використовуючи теореми про логарифм добутку і логарифм частки, отримуємо:

$$\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15 = \log_2 (20 \cdot 12) - \log_2 15 =$$

$$= \log_2 \frac{20 \cdot 12}{15} = \log_2 16 = 4.$$

2) Маємо:

$$\frac{1}{2}\log_{36} 9+\frac{1}{3}\log_{36} 8=\frac{1}{2}\log_{36} 3^2+\frac{1}{3}\log_{36} 2^3=$$

$$=\log_{36} 3+\log_{36} 2=\log_{36} 6=\frac{1}{2}.$$ ●

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції $f(x)=5^{\log_5 (x-3)}$.

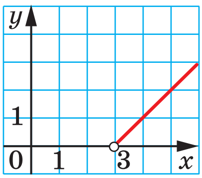


Рис. 19.4

Розв'язання. Дана функція визначена на множині $D(f) = (3; +\infty)$. Оскільки $5^{\log_5 (x-3)}=x-3$ для всіх значень $x \in D(f)$, то доходимо висновку, що графіком функції f є частина прямої $y = x - 3$ (рис. 19.4). ●

ПРИКЛАД 6 Відомо, що $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$. Знайдіть $\lg 56$.

Розв'язання. Маємо:

$$\lg 56=\lg(8\cdot 7)=\lg 8+\lg 7=\lg 2^3+\frac{\log_2 7}{\log_2 10}=$$

$$=3\lg 2+\log_2 7\cdot \lg 2=3a+ba.$$ ●

Вправи

19.1.° Чи є правильною рівність:

1) $\log_7 \frac{1}{49}=-3$;
2) $\log_{25} 5 = 2$;
3) $\log_5 125=\frac{1}{3}$;
4) $\log_3 \frac{1}{81}=-4$;
5) $\log_{0,01} 10 = 2$;
6) $\lg 0{,}0001 = -4$;
7) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3}=\frac{2}{3}$;
8) $\log_{\sqrt{5}} 0{,}2=-2$?

19.2.° Знайдіть логарифм з основою 2 числа:

1) 1; 2) 2; 3) 32; 4) $\sqrt{2}$; 5) 0,5; 6) $\frac{1}{8}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $2\sqrt{2}$.

19.3.° Знайдіть логарифм з основою 3 числа:

1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 81; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{243}$; 7) $\sqrt{3}$; 8) $3\sqrt{3}$.

19.4.° Знайдіть логарифм з основою $\frac{1}{2}$ числа:

1) 1; 2) 2; 3) 8; 4) 0,25; 5) $\frac{1}{16}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\sqrt{2}$; 8) 64.

19.5.° Знайдіть логарифм з основою $\frac{1}{3}$ числа:

1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{27}$; 3) 3; 4) 81; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; 6) $\sqrt[3]{3}$.

19.6.° Знайдіть десятковий логарифм числа:

1) 1; 3) 100; 5) 0,1; 7) 0,00001;
2) 10; 4) 1000; 6) 0,01; 8) 0,000001.

19.7.° Чому дорівнює логарифм числа 10 000 з основою:

1) 10; 2) 100; 3) $\sqrt{10}$; 4) 0,1; 5) 1000; 6) 0,0001?

19.8.° Знайдіть логарифм числа 729 з основою:

1) 27; 2) 9; 3) 3; 4) $\frac{1}{27}$; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{3}$.

19.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_7 x = -1$; 4) $\log_2 x = 0$; 7) $\log_x 2 = 2$;
2) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; 5) $\log_x 9 = 2$; 8) $\log_x 5 = \frac{1}{3}$.
3) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$; 6) $\log_x 0{,}25 = -2$;

19.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6 x = 2$; 3) $\log_{0,2} x = -3$; 5) $\log_x 81 = 4$;
2) $\log_{\sqrt[3]{5}} x = \frac{3}{2}$; 4) $\log_x 6 = 5$; 6) $\log_x 11 = -1$.

19.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $6^x = 2$; 3) $0{,}4^x = 9$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$;
2) $5^x = 10$; 4) $2^{x-3} = 5$; 6) $0{,}3^{3x+2} = 7$.

19.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^x = 2$; 2) $10^x = \frac{1}{6}$; 3) $7^{x+5} = 9$; 4) $0{,}6^{5x-2} = 20$.

19.13.° Обчисліть:

1) $2^{\log_2 32}$; 3) $7^{2\log_7 2}$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$; 7) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 8-2}$;

2) $5^{\log_5 0{,}45}$; 4) $64^{0{,}5\log_2 12}$; 6) $6^{1+\log_6 5}$; 8) $6^{\log_{\frac{1}{6}} 3}$.

19.14.° Обчисліть:

1) $3^{\log_3 \frac{1}{27}}$; 3) $4^{\log_2 9}$; 5) $10^{2+\lg 8}$;

2) $5^{\frac{1}{2}\log_5 49}$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 12}$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 6-3}$.

19.15.° Знайдіть значення виразу:

1) $\log_6 3+\log_6 2$;

2) $\log_5 100-\log_5 4$;

3) $\log_{49} 84-\log_{49} 12$;

4) $\log_2 5-\log_2 35+\log_2 56$;

5) $\dfrac{\log_5 64}{\log_5 4}$;

6) $2\lg 5+\frac{1}{2}\lg 16$.

19.16.° Обчисліть значення виразу:

1) $\lg 8+\lg 12{,}5$;

2) $\log_3 162-\log_3 2$;

3) $\dfrac{\log_7 125}{\log_7 5}$;

4) $3\log_6 2+\frac{3}{4}\log_6 81$.

19.17.• Подайте:

1) число 2 у вигляді степеня числа 5;

2) число $\frac{1}{9}$ у вигляді степеня числа 10;

3) число $\sqrt{14}$ у вигляді степеня числа 7;

4) число 0,17 у вигляді степеня числа 18.

19.18.• Подайте:

1) число 3 у вигляді степеня числа 8;

2) число $\sqrt[3]{6}$ у вигляді степеня числа $\frac{1}{2}$.

19.19.• Подайте:

1) число 6 у вигляді логарифма з основою 2;

2) число -1 у вигляді логарифма з основою 0,4;

3) число $\frac{1}{2}$ у вигляді логарифма з основою 9;

4) число $\frac{2}{7}$ у вигляді логарифма з основою 10.

19.20.• Подайте:

1) число 4 у вигляді логарифма з основою $\frac{1}{3}$;

2) число −2 у вигляді логарифма з основою $\sqrt{2}$.

19.21.• Обчисліть:

1) $2^{3\log_2 5+4}$;

2) $8^{1-\log_2 3}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2-3}$;

4) $7^{2\log_7 3+\log_{\sqrt{7}} 4}$;

5) $9^{2\log_3 2+4\log_{81} 2}$;

6) $2\cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 8-2\lg 2}$;

7) $\lg\left(25^{\log_5 0,8}+9^{\log_3 0,6}\right)$;

8) $27^{\frac{1}{\log_5 3}}+25^{\frac{1}{\log_2 5}}-36^{\frac{1}{\log_9 6}}$.

19.22.• Обчисліть:

1) $2^{4\log_2 3-1}$;

2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 9+2}$;

3) $8^{1-\frac{1}{3}\log_2 12}$;

4) $6^{\frac{1}{2}\log_6 9-\log_{\frac{1}{6}} 3}$;

5) $12^{\log_{144} 4+\log_{12} 5}$;

6) $1000^{\frac{1}{2}\lg 25-3\lg 2}$;

7) $\log_{13}\left(100^{\frac{1}{\log_7 10}}+2^{\log_2 15+3}\right)$;

8) $5^{\log_5 4\cdot\log_2 3}$.

19.23.• Обчисліть:

1) $\log_2\log_5\sqrt[8]{5}$;

2) $\log_{\frac{2}{3}}\log_{49} 343$;

3) $\log_9\log_2 8$;

4) $\log_2\sin 135°$;

5) $\log_3 \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

6) $\log_{\frac{1}{2}}\cos 315°$;

7) $\log_4\sin\frac{\pi}{4}$;

8) $\log_{\frac{1}{3}}\operatorname{tg}(-120°)$.

19.24.• Обчисліть:

1) $\log_3\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{125}$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}\log_4 64$;

3) $\log_6 \operatorname{tg} 225°$; 4) $\log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$.

19.25. Знайдіть x, якщо:

1) $\log_7 x = 2 \log_7 8 - 4 \log_7 2$;

2) $\lg x = 2 + \lg 3 - \lg 5$;

3) $\log_3 x = \frac{2}{3} \log_3 216 + \frac{1}{2} \log_3 25$;

4) $\lg x = \frac{2}{3} \lg 32 - \frac{1}{3} \lg 128 + 1$;

5) $\log_2 x = 3 \log_2 5 - 2 \log_2 25 - \lg 10$.

19.26. Знайдіть x, якщо:

1) $\log_a x = 3 \log_a 2 + 2 \log_a 3$;

2) $\log_a x = \frac{1}{4} \log_a 16 + 3 \log_a 0{,}5$;

3) $\lg x = \frac{2}{5} \lg 32 - \frac{1}{3} \lg 64 + 1$.

19.27. Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{\log_7 27 - 2 \log_7 3}{\log_7 45 + \log_7 0{,}2}$; 2) $\frac{\log_9 125 + 3 \log_9 2}{\log_9 1{,}2 - \log_9 12}$.

19.28. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{3 \lg 4 + \lg 0{,}5}{\lg 9 - \lg 18}$; 2) $\frac{\lg 625 - 8 \lg 2}{\frac{1}{2} \lg 256 - 2 \lg 5}$.

19.29. Обчисліть значення виразу:

1) $\log_7 \sin \frac{\pi}{5} \cdot \log_{\sin \frac{\pi}{5}} 49$; 2) $\log_3 \cos^2 \frac{\pi}{9} \cdot \log_{\cos \frac{\pi}{9}} 9$.

19.30. Спростіть вираз:

1) $\log_{\sqrt{b}} a \cdot \log_a b^3$; 2) $\log_{\sqrt[3]{2}} 5 \cdot \log_5 8$.

19.31. Обчисліть значення виразу

$$5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2} \log_5 4} + 36 \log_2 \sqrt[4]{2 \sqrt[3]{2}}.$$

19.32. Обчисліть значення виразу

$$6^{\frac{6}{\log_{\sqrt{2}} 6} + \frac{1}{3} \log_6 27} - 12 \log_7 \sqrt[5]{7 \sqrt[4]{7}}.$$

19.33.•• Спростіть вираз $\dfrac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b+\log_b a+1)\log_a \dfrac{a}{b}}$.

19.34.•• Спростіть вираз $\dfrac{\log_a ab\,(\log_b a-1+\log_a b)}{1+\log_a^3 b}$.

19.35.•• Доведіть, що значення виразу $\log_{7+4\sqrt{3}}(7-4\sqrt{3})$ є цілим числом.

19.36.•• Доведіть, що значення виразу $\log_{9-4\sqrt{5}}(9+4\sqrt{5})$ є цілим числом.

19.37.•• При яких значеннях x є правильною рівність:

1) $\log_2(1-x^2)=\log_2(1-x)+\log_2(1+x)$;

2) $\lg\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\lg(x^2-2x+1)-\lg(x^2+1)$;

3) $\log_5(x^2-4x+4)=2\log_5(2-x)$;

4) $\log_5(x^2-4x+4)=2\log_5|x-2|$?

19.38.•• Чому дорівнює значення виразу:

1) $\lg\sin 1°\cdot\lg\sin 2°\cdot\lg\sin 3°\cdot\ldots\cdot\lg\sin 89°\cdot\lg\sin 90°$;

2) $\lg\operatorname{tg} 10°\cdot\lg\operatorname{tg} 15°\cdot\lg\operatorname{tg} 20°\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg} 75°\cdot\lg\operatorname{tg} 80°$;

3) $\lg(\operatorname{tg} 30°\cdot\operatorname{tg} 32°\cdot\operatorname{tg} 34°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg} 58°\cdot\operatorname{tg} 60°)$;

4) $\lg\operatorname{tg} 1°+\lg\operatorname{tg} 2°+\lg\operatorname{tg} 3°+\ldots+\lg\operatorname{tg} 88°+\lg\operatorname{tg} 89°$?

19.39.•• Спростіть вираз $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\ldots\cdot\log_{10} 9$.

19.40.•• Обчисліть значення виразу $\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 32$.

19.41.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\lg\operatorname{tg} x+\lg\operatorname{ctg} x$;

2) $y=\log_x 1$;

3) $y=3^{\log_3(x+3)}$;

4) $y=5^{-\log_5 x}$;

5) $y=10^{\frac{1}{\log_x 10}}$;

6) $y=2^{\log_2 x^2}$;

7) $y=\dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} x}$;

8) $y=\log_{\frac{1}{2}}\log_{3-x}(3-x)^4$;

9) $y=2^{\log_4 x^2}$.

19.42.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = 7^{\log_7 (x+2)}$;

2) $y = \frac{1}{3}^{\log_{\frac{1}{3}} (x-1)}$;

3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 x^2}$;

4) $y = \log_x x$;

5) $y = \frac{\lg (x^2+1)}{\lg (x^2+1)}$;

6) $y = x^{\log_x 2^x}$;

7) $y = \log_3 \log_{x+1} (x+1)^{27}$;

8) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x-2) \cdot \log_{x-2} \frac{1}{3}$.

19.43.•• Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівність:

1) $\lg xy = \lg x + \lg y$;

2) $\lg xy = \lg (-x) + \lg (-y)$;

3) $\lg x^2 + \lg y^2 = 2\lg|x| + 2\lg|y|$;

4) $\log_{x^2} y^2 = \log_x (-y)$.

19.44.•• Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівність:

1) $\lg \frac{x}{y} = \lg (-x) - \lg (-y)$;

2) $\lg x^2 + \lg y^2 = 2 \lg x + 2 \lg (-y)$;

3) $\log_{x^2} y^2 = \log_x y$.

19.45.•• Члени геометричної прогресії є додатними числами. Доведіть, що логарифми послідовних членів цієї прогресії з будь-якою основою утворюють арифметичну прогресію.

19.46.•• Виразіть $\log_{ab} x$ через $\log_a x$ і $\log_b x$.

19.47.•• Доведіть, що $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$.

19.48.•• Знайдіть $\log_{ab} b$, якщо $\log_{ab} a = 4$.

19.49.•• Знайдіть $\log_{45} 60$, якщо $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$.

19.50.* Знайдіть:

1) $\log_8 9$, якщо $\log_{12} 18 = a$;

2) $\log_5 6$, якщо $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

19.51.* Знайдіть $\log_{30} 8$, якщо $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$.

20. Логарифмічна функція та її властивості

Оберемо додатне число a, відмінне від 1. Кожному додатному числу x можна поставити у відповідність число y таке, що $y = \log_a x$. Тим самим задано функцію $f(x) = \log_a x$ з областю визначення $D(f) = (0; +\infty)$.

Цю функцію називають **логарифмічною**.

Покажемо, що логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$ є оберненою до показникової функції $g(x) = a^x$.

Для будь-якого $y_0 \in \mathbb{R}$ рівняння $\log_a x = y_0$ має корінь (він дорівнює a^{y_0}).

Це означає, що *областю значень логарифмічної функції є множина* $\mathbb{R}$.

Маємо: $D(f) = E(g) = (0; +\infty)$;

$E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Для будь-якого $x \in D(f) = (0; +\infty)$ виконується рівність $a^{\log_a x} = x$. Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Оскільки графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$, то, користуючись графіком показникової функції $y = a^x$, можна побудувати графік логарифмічної функції $y = \log_a x$ (рис. 20.1).

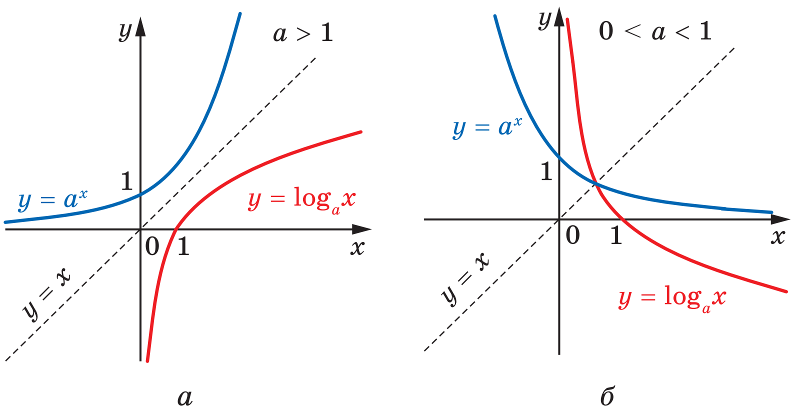


Рис. 20.1

- *Функція* $y = \log_a x$ *має єдиний нуль* $x = 1$.
- *Функція* $y = \log_a x$ *має два проміжки знакосталості. Якщо* $a > 1$, *то* $y < 0$ *на* $(0; 1)$; $y > 0$ *на* $(1; +\infty)$; *якщо* $0 < a < 1$, *то* $y < 0$ *на* $(1; +\infty)$; $y > 0$ *на* $(0; 1)$.

Коли функція є зростаючою (спадною), то обернена до неї функція є також зростаючою (спадною). Показникова функція $y = a^x$ є зростаючою при $a > 1$ та є спадною при $0 < a < 1$.

- Тому *функція* $y = \log_a x$ *є зростаючою при* $a > 1$ *та є спадною при* $0 < a < 1$.
- Оскільки логарифмічна функція є або зростаючою (при $a > 1$), або спадною (при $0 < a < 1$), то вона *не має точок екстремуму*.

Ви знаєте, що коли визначена на деякому проміжку функція є оборотною і неперервною, то обернена до неї функція також є неперервною. Показникова функція $y = a^x$ є неперервною.

- Тому *функція* $y = \log_a x$ *є неперервною.*
- *Логарифмічна функція є диференційовною.* Детальніше про похідну логарифмічної функції ви дізнаєтеся в п. 23.
- *Функція* $y = \log_a x$ *має вертикальну асимптоту* $x = 0$, *коли* x *прямує до нуля справа*.

У таблиці наведено властивості функції $y = \log_a x$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	$(0; +\infty)$
Область значень	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 1$
Проміжки знакосталості	Якщо $a > 1$, то $y < 0$ на $(0; 1)$, $y > 0$ на $(1; +\infty)$; якщо $0 < a < 1$, то $y < 0$ на $(1; +\infty)$, $y > 0$ на $(0; 1)$
Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною

Неперервність	Неперервна
Диференційовність	Диференційовна
Асимптоти	Пряма $x = 0$ — вертикальна асимптота, коли x прямує до нуля справа

ПРИКЛАД 1 Порівняйте з одиницею основу a логарифма, коли відомо, що $\log_a 5 < \log_a 4$.

Розв'язання. Оскільки $5 > 4$, а $\log_a 5 < \log_a 4$, то доходимо висновку, що $a < 1$. ●

ПРИКЛАД 2 Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \log_{0,3}(x^2 + 3x)$; 3) $f(x) = \log_{x-4}(16 - x)$.

2) $f(x) = \dfrac{\lg(9 - x^2)}{\lg(x+2)}$;

Розв'язання. 1) Оскільки областю визначення логарифмічної функції є множина додатних чисел, то областю визначення даної функції є множина розв'язків нерівності $x^2 + 3x > 0$.

Маємо: $x(x + 3) > 0$; $x < -3$ або $x > 0$.

Отже, $D(f) = (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

2) Вираз $\lg(9 - x^2)$ має зміст при $9 - x^2 > 0$, вираз $\lg(x + 2)$ — при $x + 2 > 0$. Крім того, знаменник дробу не може дорівнювати нулю, тому $\lg(x + 2) \neq 0$. Таким чином, область визначення $D(f)$ даної функції є множиною розв'язків системи нерівностей:

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x + 2 \neq 1. \end{cases}$$

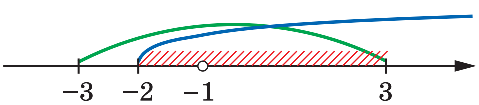


Рис. 20.2

Маємо: $\begin{cases} x^2 < 9, \\ x > -2, \\ x \neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} -3 < x < 3, \\ x > -2, \\ x \neq -1. \end{cases}$ Звернувшись до рисунка 20.2, доходимо висновку, що остання система рівносильна сукупності

$$\left[\begin{array}{l}-2<x<-1,\\ -1<x<3.\end{array}\right.$$

Отже, $D(f) = (-2; -1) \cup (-1; 3)$.

3) Область визначення даної функції знайдемо, розв'язавши систему нерівностей:

$$\begin{cases}16-x>0,\\ x-4>0,\\ x-4\neq 1.\end{cases}$$

Тоді $\begin{cases}x<16,\\ x>4,\\ x\neq 5;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}4<x<5,\\ 5<x<16.\end{array}\right.$

Звідси $D(f) = (4; 5) \cup (5; 16)$. ●

ПРИКЛАД 3 Порівняйте:

1) $\log_2 6$ і $\log_2 7$; 3) $\log_6 7$ і $\log_7 6$; 5) $\log_{\frac{1}{6}} 38$ і -2.

2) $\log_{0,2} 6$ і $\log_{0,2} 7$; 4) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$ і 0;

Розв'язання

1) Оскільки логарифмічна функція $y = \log_2 x$ є зростаючою, то $\log_2 6 < \log_2 7$.

2) Оскільки логарифмічна функція $y = \log_{0,2} x$ є спадною, то $\log_{0,2} 6 > \log_{0,2} 7$.

3) Маємо: $\log_6 7 > \log_6 6$, тобто $\log_6 7 > 1$. Разом з тим $\log_7 7 > \log_7 6$, тобто $1 > \log_7 6$. Отже, $\log_6 7 > 1 > \log_7 6$.

4) Ураховуючи, що $0<\frac{\pi}{4}<1$, маємо: $\log_{\frac{\pi}{4}} 4<\log_{\frac{\pi}{4}} 1$. Отже, $\log_{\frac{\pi}{4}} 4<0$.

5) Маємо: $-2=\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{6}} 36$.

Оскільки $\log_{\frac{1}{6}} 38<\log_{\frac{1}{6}} 36$, то $\log_{\frac{1}{6}} 38<-2$. ●

Вправи

20.1.° Зростаючою чи спадною є функція:

1) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$;
2) $y = \log_3 x$;
3) $y = \log_{0,1} x$;
4) $y = \lg x$;
5) $y = \log_{\sqrt{5}} x$;
6) $y = \log_{\frac{\pi}{3}} x$;
7) $y = \log_{\sqrt{2}-1} x$;
8) $y = \log_{\frac{\pi}{6}} x$?

20.2.° Спираючись на яку властивість логарифмічної функції можна стверджувати, що:

1) $\lg 7 > \lg 5$;
2) $\log_{0,6} 4 < \log_{0,6} 3$?

20.3.° Порівняйте:

1) $\log_{12} 5$ і $\log_{12} 6$;
2) $\log_5 \frac{1}{2}$ і $\log_5 \frac{1}{3}$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ і $\log_{\frac{1}{3}} 4$;
4) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{4}{5}$ і $\log_{\frac{1}{9}} \frac{5}{6}$;
5) $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,7$ і $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,6$;
6) $\log_{\frac{2\pi}{5}} 8,4$ і $\log_{\frac{2\pi}{5}} 8,3$.

20.4.° Порівняйте:

1) $\log_{0,9} \sqrt{3}$ і $\log_{0,9} \sqrt{2}$;
2) $\log_7 \frac{2}{3}$ і $\log_7 \frac{1}{2}$;
3) $\log_{\frac{2}{3}} 6,8$ і $\log_{\frac{2}{3}} 6,9$;
4) $\lg \frac{\pi}{3}$ і $\lg \frac{\pi}{4}$.

20.5.° Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

1) $\log_a 0,5 > \log_a 0,4$;
2) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a 1$;
3) $\log_a \sqrt{5} < \log_a \sqrt{6}$;
4) $\log_a \frac{\pi}{4} < \log_a \frac{\pi}{3}$.

20.6.° Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

1) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a \frac{1}{2}$;
2) $\log_a 2 < \log_a \sqrt{3}$.

20.7.° Додатним чи від'ємним числом є:

1) $\log_{0,5} 0,6$;
2) $\log_{0,3} 3$;
3) $\log_2 0,27$;
4) $\log_{\pi} 3$?

20.8.° Порівняйте з нулем:

1) $\log_4 5$;
2) $\log_2 \frac{1}{3}$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$;
4) $\log_{\frac{\pi}{3}} 2$.

20.9.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному відрізку:

1) $y = \log_2 x$, $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$;

2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\left[\frac{1}{16}; 8\right]$;

3) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$, $\left[\frac{4}{9}; \frac{81}{16}\right]$.

20.10.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному відрізку:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $\left[\frac{1}{9}; 3\right]$;

2) $y = \lg x$, $[1; 1000]$.

20.11.° На якому проміжку функція $y = \log_2 x$ набуває найбільшого значення, яке дорівнює 3, і найменшого, яке дорівнює -1?

20.12.° На якому проміжку функція $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ набуває найбільшого значення, яке дорівнює -1, і найменшого, яке дорівнює -2?

20.13.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \log_3 (x + 1)$;

2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 1)$;

3) $f(x) = \log_4 (-x)$;

4) $f(x) = \lg x^2$;

5) $f(x) = \log_5 (x^2 + x + 1)$;

6) $f(x) = \log_{0,6} (5x - 6 - x^2)$;

7) $f(x) = 2 \lg x + 3 \lg (2 - x)$;

8) $f(x) = \log_2 \frac{2x-3}{x+7}$.

20.14.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \log_7 (6 - x)$;

2) $f(x) = \log_{12} |x|$;

3) $f(x) = \lg (x^2 - 1)$;

4) $f(x) = \log_{0,4} (7x - x^2)$;

5) $f(x) = \lg (x + 2) - 2 \lg (x + 5)$;

6) $f(x) - \lg \frac{2x+1}{x-1}$.

20.15.° Побудуйте на одній координатній площині графіки функцій $y = \log_2 x$ і $y = \log_2 \frac{1}{x}$. Яке взаємне розміщення побудованих графіків?

20.16.° Побудуйте на одній координатній площині графіки функцій $y = \log_3 x$ і $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. Яке взаємне розміщення побудованих графіків?

20.17.• Порівняйте:

1) $\log_9 2$ і 3;
2) $\log_{\frac{1}{5}} 27$ і -2;
3) $\log_{\sqrt{3}} 26$ і 6;
4) $\log_{16} 0{,}1$ і $-\dfrac{3}{4}$.

20.18.• Порівняйте:

1) $\log_{0,1} 12$ і 1; 2) $\log_4 3$ і $-\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{2}{3}$ і $\log_{125} 30$.

20.19.• Між якими двома послідовними цілими числами міститься на числовій прямій число:

1) $\log_3 10$; 2) $\log_2 5$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 7$; 4) $\log_{0,1} 2$?

20.20.• Між якими двома послідовними цілими числами міститься на числовій прямій число:

1) $\log_2 29$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

20.21.• Порівняйте:

1) $\log_4 5$ і $\log_5 4$;
2) $\log_{1,5} 1{,}3$ і $\log_{1,3} 1{,}5$;
3) $\log_{0,7} 0{,}8$ і $\log_{0,8} 0{,}7$;
4) $\log_{0,2} 0{,}1$ і $\log_{0,1} 0{,}2$.

20.22.• Порівняйте:

1) $\log_{1,7} 1{,}8$ і $\log_{1,8} 1{,}7$; 2) $\log_{0,2} 0{,}3$ і $\log_{0,3} 0{,}2$.

20.23.• Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \dfrac{1}{\lg x}$;
2) $f(x) = \dfrac{4}{\log_5 (10 - x)}$;
3) $f(x) = \log_2 \cos x$;
4) $f(x) = \log_3 \operatorname{tg} x$.

20.24.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \dfrac{5}{\lg (x + 3)}$; 2) $y = \lg \sin x$.

20.25.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \log_2 (x - 1)$;
2) $y = \log_2 (x + 3)$;
3) $y = \log_2 x - 1$;
4) $y = \log_2 x + 3$;
5) $y = -\log_2 x$;
6) $y = \log_2 (-x)$.

20.26.• Побудуйте графік функції:

1) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$; 3) $y=\log_{\frac{1}{3}}x-2$; 5) $y=-\log_{\frac{1}{3}}x$;

2) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$; 4) $y=\log_{\frac{1}{3}}x+1$; 6) $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x)$.

20.27.• Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\log_2 x = 3 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}x=x-1$; 3) $\log_2 x = -x - 0{,}5$.

20.28.• Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{2}}x=x+\frac{1}{2}$; 2) $\log_3 x = 4 - x$.

20.29.• Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\log_2 x = -x$; 2) $\log_3 x = -x^2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}}x=\sqrt{x}$.

20.30.• Скільки коренів має рівняння:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\log_2 x$; 2) $\log_2 x=\frac{1}{x}$?

20.31.•• Порівняйте $\log_2 3 + \log_3 2$ і 2.

20.32.•• Доведіть, що $\log_{\frac{1}{3}}4+\log_4\frac{1}{3}<-2$.

20.33.•• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \lg x^2$;

2) $y = \lg(1 - \sin x)$;

3) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(1+x^2)}$;

4) $y=\sqrt{\lg\cos x}$;

5) $y=\frac{1}{\log_6(x-3)}+\sqrt{6-x}$;

6) $y=\frac{4}{\lg(x+2)}+\lg(3-x)$;

7) $y=\sqrt{\frac{(x+1)(3-x)}{\lg(x^2+1)}}$;

8) $y=\log_5(x^2-4x+3)+\frac{1}{\log_5(7-x)}$;

9) $y=\lg(6x-x^2)+\dfrac{1}{\lg(3-x)}$;

10) $y = \log_{x+3}(x^2+x)$.

20.34.•• Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\dfrac{1}{\lg(x^2+1)}$;

2) $y = \lg(1+\sin x)$;

3) $y=\sqrt{\lg(1+x^2)}$;

4) $y=\sqrt{\lg\sin x}$;

5) $y=\lg(x+8)-\dfrac{5}{\lg(-x-1)}$;

6) $y=\lg(10x-x^2)-\dfrac{1}{\lg(8-x)}$;

7) $y=\dfrac{x}{\lg(4-x^2)}$;

8) $y=\lg(9x-x^2)-\dfrac{1}{\lg(5-x)}$;

9) $y = \log_{2-x}(8+7x-x^2)$;

10) $y=\sqrt{\dfrac{(x+5)(2-x)}{\lg(x^2+1)}}$.

20.35.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$;

2) $y=\log_{\frac{1}{2}}|x|$;

3) $y=\dfrac{|\log_{0,2} x|}{\log_{0,2} x}$;

4) $y=\sqrt{\log_3^2 x}\log_x 3$.

20.36.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = |\log_3 x|$; 2) $y = \log_3 |x|$; 3) $y=\dfrac{\log_2 x}{\sqrt{\log_2^2 x}}$.

20.37.•• Знайдіть найбільше значення функції:

1) $y = \log_{0,1}(x^2+100)$; 2) $y=\log_{\frac{1}{5}}(x^2-6x+14)$.

20.38.•• Знайдіть найменше значення функції:

1) $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x^2+8}$; 2) $y=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{x^2-4x+7}$.

20.39.•• Дослідіть на парність функцію $y=\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

20.40.•• Дослідіть на парність функцію $y=\lg\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

21. Логарифмічні рівняння

Рівняння виду $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають **найпростішим логарифмічним рівнянням.**

Оскільки графіки функцій $y = \log_a x$ і $y = b$ перетинаються в одній точці (рис. 21.1), то найпростіше логарифмічне рівняння має єдиний корінь при будь-якому b. Цей корінь можна знайти, використовуючи означення логарифма. Маємо: $x = a^b$.

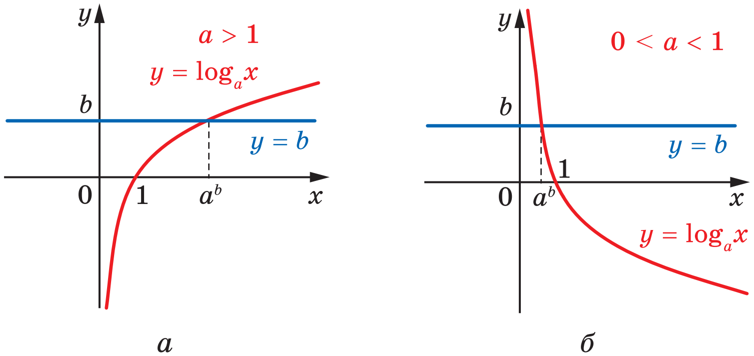


Рис. 21.1

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\log_3 (3x - 1) = 2$.

Розв'язання. За означенням логарифма можна записати $3x - 1 = 3^2$. Звідси $3x - 1 = 9$; $x = \frac{10}{3}$.

Відповідь: $\frac{10}{3}$.

Розв'язане рівняння є окремим випадком рівняння виду $\log_a f(x) = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$. Міркуючи, як у прикладі 1, можна показати, що це рівняння рівносильне рівнянню $f(x) = a^b$.

При розв'язуванні багатьох логарифмічних рівнянь застосовують таку теорему.

Теорема 21.1. ***Нехай $a > 0$, $a \neq 1$. Якщо $\log_a x_1 = \log_a x_2$, то $x_1 = x_2$, і навпаки, якщо $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ і $x_1 = x_2$, то $\log_a x_1 = \log_a x_2$.***

Оскільки логарифмічна функція є зростаючою або спадною, то для доведення цієї теореми можна скористатися ідеєю доведення теореми 17.1. Переконайтеся в цьому самостійно.

Наслідок. ***Нехай $a > 0$, $a \neq 1$. Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне будь-якій із систем***

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Вибір відповідної системи, як правило, пов'язаний з тим, яку з нерівностей, $f(x) > 0$ чи $g(x) > 0$, розв'язати легше.

Скориставшись ідеєю доведення наслідку з теореми 17.1, доведіть наслідок з теореми 21.1 самостійно.

Тепер розв'язання рівняння прикладу 1 можна оформити і так:

$$\log_3 (3x - 1) = 2 \log_3 3,$$
$$\log_3 (3x - 1) = \log_3 3^2,$$
$$3x - 1 = 3^2, \quad x = \frac{10}{3}.$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння

$$\lg (x^2 - 4x + 2) = \lg (2x - 3).$$

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 2x - 3, \\ 2x - 3 > 0. \end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x > \frac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 5, \end{array} \right. \\ x > \frac{3}{2}. \end{cases}$

Звідси $x = 5$.

Відповідь: 5.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння

$$\log_3 (2x - 1) + \log_3 (x - 2) = 3.$$

Розв'язання. Природно перетворити це рівняння так:

$$\log_3 ((2x - 1)(x - 2)) = 3.$$

Звідси $(2x - 1)(x - 2) = 3^3$; $2x^2 - 5x - 25 = 0$;

$$x = 5 \text{ або } x = -\frac{5}{2}.$$

Легко переконатися, що число $-\frac{5}{2}$ не входить до області визначення даного рівняння.

У чому ж полягає причина появи стороннього кореня?

Область визначення початкового рівняння задається системою нерівностей $\begin{cases} 2x - 1 > 0, \\ x - 2 > 0, \end{cases}$ множиною розв'язків якої є проміжок $(2; +\infty)$. Замінивши вираз $\log_3 (2x - 1) + \log_3 (x - 2)$ на вираз $\log_3 ((2x - 1)(x - 2))$, ми розширили область визначення початкового рівняння. Справді, область визначення рівняння $\log_3 ((2x - 1)(x - 2)) = 3$ задається нерівністю $(2x - 1)(x - 2) > 0$, множиною розв'язків якої є $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Отже, розширення області визначення рівняння від множини $(2; +\infty)$ до множини $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$ і стало причиною появи стороннього кореня $-\frac{5}{2}$.

Насправді рівняння $\log_3 (2x - 1) + \log_3 (x - 2) = 3$ рівносильне системі

$$\begin{cases} \log_3 ((2x - 1)(x - 2)) = 3, \\ 2x - 1 > 0, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} (2x - 1)(x - 2) = 3^3, \\ x > 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - 5x - 25 = 0, \\ x > 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -\frac{5}{2}, \end{array}\right. \\ x > 2. \end{cases}$

Отримуємо $x = 5$.

Відповідь: 5.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$, то дане рівняння рівносильне рівнянню

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{5}{2}.$$

Нехай $\log_2 x = t$. Тоді отримуємо: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$.

Звідси $\begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 = 0, \\ t \neq 0. \end{cases}$ Отже, $\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2}, \\ t = 2. \end{array}\right.$

Тоді початкове рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = \frac{1}{2}, \\ \log_2 x = 2. \end{array}\right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x = 2^{\frac{1}{2}}, \\ x = 2^2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2}, \\ x = 4. \end{array}\right.$

Відповідь: $\sqrt{2}$; 4.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $x^{\frac{\lg x + 2}{3}} = 10^{2 + \lg x}$.

Розв'язання. Оскільки на області визначення рівняння, тобто на множині $(0; +\infty)$, обидві його частини набувають додатних значень, то можемо записати рівняння, рівносильне даному:

$$\lg x^{\frac{\lg x + 2}{3}} = \lg 10^{2 + \lg x}.$$

Далі маємо: $\frac{\lg x + 2}{3} \cdot \lg x = 2 + \lg x$.

Нехай $\lg x = t$. Тоді $\frac{(t + 2)\,t}{3} = 2 + t$.

Звідси $t = -2$ або $t = 3$; $\left[\begin{array}{l} \lg x = -2, \\ \lg x = 3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 10^{-2}, \\ x = 10^3. \end{array}\right.$

Відповідь: 0,01; 1000.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння

$$2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0. \qquad (1)$$

Розв'язання. Зазначимо, що перехід від рівняння (1) до рівняння

$$2\log_3(x-2)+2\log_3(x-4)=0. \qquad (2)$$

може призвести до втрати розв'язків.

Справді, областю визначення початкового рівняння є множина $(2;\,4)\cup(4;\,+\infty)$, а область визначення рівняння (2) — це множина $(4;\,+\infty)$. Отже, такий перехід звужує область визначення початкового рівняння на множину $(2;\,4)$, яка може містити корені рівняння (1).

Насправді рівняння (1) рівносильне такому рівнянню:

$$2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0.$$

Звідси $\log_3(x-2)+\log_3|x-4|=0$.

Це рівняння рівносильне сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ \log_3(x-2)+\log_3(4-x)=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ \log_3(x-2)+\log_3(x-4)=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Далі маємо: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ \log_3((x-2)(4-x))=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ \log_3((x-2)(x-4))=0;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ (x-2)(4-x)=1,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ (x-2)(x-4)=1;\end{cases}\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ x^2-6x+9=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ x^2-6x+7=0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ x=3,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ \left[\begin{array}{l}x=3-\sqrt{2},\\ x=3+\sqrt{2};\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=3+\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $3;\ 3+\sqrt{2}$.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$.

Розв'язання. Перейдемо до логарифмів з основою 2:

$$\frac{\log_2 16}{\log_2 x^2} + \frac{\log_2 64}{\log_2 2x} = 3.$$

Оскільки з умови випливає, що $x > 0$, то $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$. Далі маємо:

$$\frac{4}{2\log_2 x} + \frac{6}{\log_2 2 + \log_2 x} = 3.$$

Нехай $\log_2 x = t$, тоді отримаємо $\frac{2}{t} + \frac{6}{1+t} = 3$.

Звідси $t = 2$ або $t = -\frac{1}{3}$. Маємо:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2, \\ \log_2 x = -\frac{1}{3}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 2^2, \\ x = 2^{-\frac{1}{3}}. \end{array}\right.$$

Відповідь: 4; $2^{-\frac{1}{3}}$.

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть рівняння $\log_7 (x + 8) = -x$.

Розв'язання. Розглянемо функції $f(x) = \log_7 (x + 8)$ і $g(x) = -x$. Функція f є зростаючою, функція g — спадною. Тоді рівняння $f(x) = g(x)$ має не більше одного кореня. Оскільки $f(-1) = g(-1)$, то $x = -1$ — єдиний корінь даного рівняння.

Відповідь: -1.

ПРИКЛАД 9 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} \log_3 (x-2) = 0$.

Розв'язання. Помилково вважати, що рівняння виду $f(x) \cdot g(x) = 0$ рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{array}\right.$ При такому переході існує небезпека отримати у відповіді сторонні корені. Наприклад, немає гарантії, що всі корені рівняння $f(x) = 0$ належать області визначення функції g.

Насправді рівняння $f(x) \cdot g(x) = 0$ рівносильне системі

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0, \end{array}\right. \\ x \in D(f), \\ x \in D(g). \end{cases}$$

Скориставшись цим, запишемо систему, рівносильну рівнянню $\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} \log_3 (x-2) = 0$:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3 (x-2)=0, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ x > 2, \\ \sin x \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Єдиним коренем першого рівняння сукупності є число 3. Оскільки $\sin 3 < \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (рис. 21.2), то $x = 3$ не є коренем початкового рівняння.

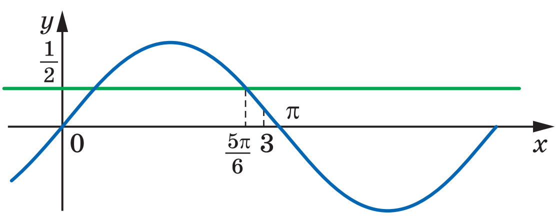


Рис. 21.2

Усі числа виду $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, є коренями другого рівняння сукупності. Серед них слід вибрати лише ті, які задовольняють умову $x > 2$. Для цього достатньо вимагати, щоб $n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{N}$.

ПРИКЛАД 10 Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = 32, \\ \log_3 (x-y) = 1 - \log_3 (x+y). \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо: $\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}} = 2^5, \\ \log_3 (x-y) + \log_3 (x+y) = 1. \end{cases}$

З першого рівняння системи випливає, що $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}$. Звідси $\frac{x}{y} = 2$ або $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$. Отже, дана система рівносильна сукупності двох систем.

1) $\begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ \log_3 (x-y) + \log_3 (x+y) = 1. \end{cases}$

Маємо: $\log_3 y + \log_3 3y = 1$; $\log_3 y + (\log_3 3 + \log_3 y) = 1$; $2\log_3 y = 0$; $y = 1$. Тоді $x = 2$.

2) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2}, \\ \log_3 (x-y) + \log_3 (x+y) = 1. \end{cases}$

Легко переконатися (зробіть це самостійно), що ця система розв'язків не має.

Відповідь: (2; 1).

Вправи

21.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2 (x - 1) = 1$;
2) $\log_3 (2x + 1) = 3$;
3) $\lg (3 - 2x) = 2$;
4) $\log_{\frac{1}{6}} (4x - 8) = -2$;
5) $\log_7 (x^2 - 2x - 8) = 1$;
6) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4x - 5) = -4$.

21.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{5}} (x + 7) = -3$;
2) $\log_4 (2x - 5) = 0{,}5$;
3) $\log_{\sqrt{3}} (x^2 - 5x - 3) = 2$;
4) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 5x + 6) = -1$.

21.3.° Розв’яжіть рівняння:

1) $\log_\pi (x + 1) = \log_\pi (4x - 5)$;

2) $\log_5 (3x - 5) = \log_5 (x - 3)$;

3) $\lg (x^2 + 2) = \lg (3x + 6)$.

21.4.° Розв’яжіть рівняння:

1) $\log_9 (4x - 6) = \log_9 (x - 2)$; 2) $\log_{\frac{1}{4}} (x+7) = \log_{\frac{1}{4}} (x^2 + 5)$.

21.5.• Розв’яжіть рівняння:

1) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \frac{1}{x} = 6$;

2) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;

3) $\log_6 x + 2 \log_{36} x + 3 \log_{216} x = 3$;

4) $\log_7 \log_4 (x - 2) = 0$;

5) $\log_4 \log_3 \log_2 x = \frac{1}{2}$;

21.6.• Розв’яжіть рівняння:

1) $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 \sqrt[3]{x} = \frac{4}{3}$;

2) $\log_5 x - \log_{25} x + \log_{625} x = \frac{3}{4}$;

3) $\lg \lg \lg x = 0$.

21.7.• Розв’яжіть рівняння:

1) $\log_2 (3^{5x-3} + 1) = 2$;

2) $\log_3 (3^{x-1} + 6) = x$;

3) $\log_2 (2^x + 7) = 3 - x$;

4) $\log_6 (6^{-x} - 5) = x + 1$.

21.8.• Розв’яжіть рівняння:

1) $\log_6 (6^{x+1} - 30) = x$;

2) $\log_5 (6 - 5^x) = 1 - x$.

21.9.• Розв’яжіть рівняння:

1) $\lg (x^2 - 2x) = \lg (2x + 12)$;

2) $\log_4 (x - 1) = \log_4 (x^2 - x - 16)$;

3) $\log_{0,5} (x^2 + 3x - 10) = \log_{0,5} (x - 2)$;

4) $\log_6 (x^2 - x - 2) = \log_6 (2 - x)$;

5) $2 \log_{0,4} x = \log_{0,4} (2x^2 - x)$;

6) $2 \log_7 (-x) = \log_7 (x + 2)$;

7) $2 \log_8 (1 - x) = \log_8 (2,5x + 1)$;

8) $2 \log_3 x = 1 + \log_3 (x + 6)$.

21.10.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6 (9 - x^2) = \log_6 (1 - 2x)$;
2) $\lg (x^2 + 2x - 3) = \lg (2x^2 - 2)$;
3) $\log_{0,7} (2x^2 - 9x + 4) = 2 \log_{0,7} (x + 2)$;
4) $2 \log_2 (-x) - \log_2 (3x + 8) = 1$.

21.11.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{2}\log_6 (5x+1) = \log_6 (x-1)$;
2) $\log_5 (25^x - 2 \cdot 5^x) = 2 \log_{25} 15$;
3) $\log_{\sqrt{5}} (16^x - 6) = 2 + \log_{\sqrt{5}} (4^x - 2)$;
4) $x \lg 3 - 1 = 2 \lg 3 - \lg (3^x + 1)$.

21.12.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{2}\log_{0,1} (2x+3) - \log_{0,1} (2x-3) = 0$;
2) $\log_3 (2^{2x} + 2^x) = 2 \log_9 12$;
3) $x - \lg 5 = x \lg 5 + 2 \lg 2 - \lg (1 + 2^x)$.

21.13.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_4 (x - 3) + \log_4 x = 1$;
2) $\log_{0,5} (4 - x) + \log_{0,5} (x - 1) = -1$;
3) $\lg (x - 2) + \lg (x - 3) = 1 - \lg 5$;
4) $\log_3 (2x - 1) + \log_3 (x - 4) = 2$;
5) $\lg \sqrt{5x-4} + \lg \sqrt{x+1} = 2 + \lg 0,18$;
6) $\lg (x - 1) + \lg (x - 3) = \lg (1,5x - 3)$;
7) $\log_2 (5 - x) - \log_2 (x - 1) = 1 - \log_2 (x + 2)$;
8) $2 \log_5 (x + 1) - \log_5 (x + 9) = \log_5 (3x - 17)$.

21.14.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_7 x + \log_7 (x + 6) = 1$;
2) $\log_3 (5 - x) + \log_3 (3 - x) = 1$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} (4x-1) + \log_{\frac{1}{2}} (x+1) = \log_{0,5} 3,5$;
4) $\log_{0,6} (x + 2) + \log_{0,6} (6 - x) = \log_{0,6} (x + 8)$;
5) $\log_2 (2x - 1) - \log_2 (x + 2) = 2 - \log_2 (x + 1)$;
6) $2 \lg (x + 1) - \lg (4x - 5) = \lg (x - 5)$.

21.15.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3 (5^x + 2) + \log_3 (5^x - 1) = 2 + \log_3 2$;
2) $\log_2 (2^x + 3) + \log_2 (5 - 2^x) = 4$.

21.16.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{\sqrt{3}} (2^x - 3) + \log_{\sqrt{3}} (2^x - 1) = 2$;
2) $\lg (3^x - 4) + \lg (3^x - 2) = 1$.

21.17.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4 = 0$;
2) $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$;
3) $\lg^2 x - 2 \lg x^2 + 3 = 0$;
4) $\log_5 x + \log_x 5 = 2{,}5$;
5) $2\log_{\frac{1}{6}} x + 3\sqrt{\log_{\frac{1}{6}} x} - 5 = 0$;
6) $\dfrac{2}{\lg (x+2) - 3} + \dfrac{4}{\lg (x+2) + 1} = 1$.

21.18.• Розв'яжіть рівняння:

1) $3\log_8^2 (-x) - 2\log_8 (-x) - 1 = 0$;
2) $2\log_7 \sqrt{x} = \log_7^2 x - 6$;
3) $3 \log_3 x + 3 \log_x 3 = 10$;
4) $\dfrac{\lg x}{\lg x + 2} - \dfrac{2}{\lg x - 1} = 1$.

21.19.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{2\lg x}{\lg (8x - 7)} = 1$;
2) $\dfrac{\log_4 (x^2 + x - 2) - 1}{\log_4 (x - 1)} = 0$;
3) $\log_x (2x^2 - 7x + 12) = 2$;
4) $\log_{x+1} (x + 3) = 2$;
5) $\log_{x-2} (2x^2 - 11x + 16) = 2$.

21.20.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{2\log_2 x}{\log_2 (3 - 2x)} = 1$;
2) $\dfrac{\log_5 (x^2 - 9x + 25) - 1}{\lg (x - 3)} = 0$;
3) $\log_{x-1} (x^2 - 5x + 7) = 1$;
4) $\log_x (x + 6) = 2$;
5) $\log_{2x-3} (3x^2 - 7x + 3) = 2$.

21.21.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2 (x-5)^2 - 2\log_2 (x+2) = 2$; 2) $\frac{1}{2}\lg x^2 + \lg (x+7) = 1$.

21.22.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{4}\log_2 x^4 + \log_2 (x+10) = 3 + \log_2 3$;

2) $\frac{1}{2}\log_6 x^2 + \log_6 (5-x) = 1$.

21.23.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3^2 x^3 + 4\log_3 x - 5 = 0$;

2) $\lg (10x^2)\cdot\lg x = 1$;

3) $\log_4 x^2 \cdot \log_4 \frac{16}{x} = 2$;

4) $\log_2 (4x)\cdot\log_2 (0{,}25x) = 5$;

5) $\lg^2 (100x) + 2\lg x = 20$;

6) $\log_5^2 (5x) + \log_5 \frac{x}{25} = 3$;

7) $\lg (\lg x) + \lg (\lg x^2 - 1) = 0$;

8) $2\lg (\lg x) = \lg (2\lg x + 8)$.

21.24.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $3\lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$;

2) $\log_3 x^2 \cdot \log_3 \frac{x}{27} + 4 = 0$;

3) $\log_7 (7x)\cdot\log_7 \frac{x}{7} = \log_7 x^2 - 1$;

4) $\lg^2 (10x) + \lg (10x) = 6 + 3\lg x$;

5) $\log_6^2 (36x) + \log_6 \frac{x^2}{216} = 8$;

6) $\log_5 (\log_2 x) + \log_5 (\log_2 x^3 - 14) = 1$.

21.25.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\log_5 x} = 5$;

2) $x^{\lg x + 2} = 1000$;

3) $x^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9}$;

4) $x^{\log_6 x} = 216x^2$.

21.26.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\log_3 x} = 81$;

2) $x^{\lg x} = 100x$;

3) $x^{\log_2 x - 2} = 256$;

4) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\lg x} = 10^{6 + \lg x}$.

21.27.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x 4 + \log_{x^2} 64 = 5$;

2) $3 \log_x 16 - 4 \log_{16} x = 2 \log_2 x$;

3) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$;

4) $3 \log_{3x} x = 2 \log_{9x} x^2$;

5) $2 \log_{4x} x^3 = 5 \log_{2x} x$;

6) $\log_{4x} 2 + \log_2 x = 0$.

21.28.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x (9x^2) \log_3^2 x = 4$;

2) $5 \log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8 \log_{9x^2} x^2 = 2$;

3) $\dfrac{2 - 4 \log_{12} 2}{\log_{12} (x + 2)} - 1 = \dfrac{\log_6 (8 - x)}{\log_6 (x + 2)}$;

4) $\log_{x+1} (x^3 - 9x + 8) \log_{x-1} (x + 1) = 3$.

21.29.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x 9 + \log_{x^2} 729 = 10$;

2) $\log_x (125x) \log_{25}^2 x = 1$;

3) $3 \log_x 4 + 2 \log_{4x} 4 + 3 \log_{16x} 4 = 0$.

21.30.•• Доведіть, що при $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$ виконується рівність $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$.

21.31.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\lg 5} + 5^{\lg x} = 250$;

2) $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 18$.

21.32.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\log_2 10} + 10^{\log_2 x} = 200$;

2) $7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} = 14$.

21.33.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 9^x - 4 \cdot 3^{5-y} + 27 = 0, \\ \lg (2y - 3x) = \lg (4 - 4x + y); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 18, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2}, \\ xy = 27; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3 (x+2y) + \log_{\frac{1}{3}} (x-2y) = 1, \\ x^2 + y^2 = 4 + \dfrac{1}{2} y; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^{\lg y} = 2, \\ xy = 20. \end{cases}$

21.34.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4^x + 2^y = 12, \\ \lg (3x - 2y) = \lg (5 + x - 3y); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 16, \\ \log_2 x - \log_2 y = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_x (3x + 2y) = 2, \\ \log_y (2x + 3y) = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2 - \log_2 y = 2\log_2 (x+y), \\ \log_2 (x+y) + \log_2 (x^2 - xy + y^2) = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x+y)\, 3^{y-x} = \dfrac{5}{27}, \\ 3 \log_5 (x+y) = x - y. \end{cases}$

21.35.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_7 (x + 8) = -x$;

2) $\log_2^2 x + (x-1) \log_2 x = 6 - 2x$.

21.36.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{3}} (x-5) = x - 9$;

2) $\log_3^2 x + (x-1) \log_3 x = 12 - 3x$.

21.37.•• Розв'яжіть рівняння

$$\lg^2 (x + 1) = \lg (x + 1) \lg (x - 1) + 2 \lg^2 (x - 1).$$

21.38.•• Розв'яжіть рівняння

$$2\lg^2(2x-1)=\lg^2(2x+1)-\lg(2x-1)\cdot\lg(2x+1).$$

21.39.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2\log_x 27\cdot\log_9 x=x+4$;

2) $\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}-2=\lg\sqrt{1-x^2}$.

21.40.•• Розв'яжіть рівняння.

1) $x\log_{x+1}5\cdot\log_{\sqrt[3]{\frac{1}{5}}}(x+1)=\dfrac{x-4}{x}$;

2) $\log_{1+x+\sin x}(x^2+x-1)=\log_{1+x+\sin x}(3x+2)$.

21.41.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\operatorname{tg}x+1}\cdot\log_{\frac{1}{2}}(3-x)=0$.

21.42.•• Скільки розв'язків має рівняння

$$\left(\log_2(x+1)-3\right)\sqrt{x-a}=0$$

залежно від значення параметра a?

21.43.•• Скільки розв'язків має рівняння

$$\left(\log_3(x-2)-2\right)\sqrt{x-a}=0$$

залежно від значення параметра a?

21.44.•• При яких значеннях параметра a рівняння $(x-a)\log_2(3x-7)=0$ має єдиний розв'язок?

21.45.•• При яких значеннях параметра a рівняння $(x+a)\log_3(2x-5)=0$ має єдиний розв'язок?

22. Логарифмічні нерівності

При розв'язуванні багатьох логарифмічних нерівностей застосовують таку теорему.

Теорема 22.1. ***При $a>1$ нерівність $\log_a x_1>\log_a x_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1>x_2>0$; при $0<a<1$ нерівність $\log_a x_1>\log_a x_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли $0<x_1<x_2$.***

Справедливість цієї теореми випливає з того, що при $a>1$ логарифмічна функція $y=\log_a x$ є зростаючою, а при $0<a<1$ — спадною.

Наслідок. ***Якщо*** $a > 1$, ***то нерівність*** $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ***рівносильна системі***

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Якщо $0 < a < 1$, ***то нерівність*** $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ***рівносильна системі***

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Скориставшись ідеєю доведення наслідку з теореми 17.1, доведіть цей наслідок самостійно.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $\log_2 x > 3$.

Розв'язання. Оскільки $3 = \log_2 2^3$, то можна записати:

$$\log_2 x > \log_2 2^3.$$

Ця нерівність рівносильна такій: $x > 2^3$. Звідси $x > 8$.

Відповідь: $(8; +\infty)$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\log_{0,3} x \geqslant 1$.

Розв'язання. Маємо: $\log_{0,3} x \geqslant \log_{0,3} 0,3$.

Ця нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x \leqslant 0,3; \\ x > 0. \end{cases}$$

Відповідь: $(0; 0,3]$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність

$$\log_{\frac{1}{2}} (3x-4) < \log_{\frac{1}{2}} (x-2).$$

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 3x-4 > x-2, \\ x-2 > 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x > 1, \\ x > 2; \end{cases}$ $x > 2$.

Відповідь: $(2; +\infty)$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність

$$\log_2^2 (x-1)^2 - \log_{2^{-1}} (x-1) - 5 > 0.$$

Розв'язання. Оскільки областю визначення даної нерівності є проміжок $(1; +\infty)$, то виконується рівність

$$\log_2 (x-1)^2 = 2\log_2 (x-1).$$

Тоді дану нерівність можна переписати так:

$$4\log_2^2 (x-1) + \log_2 (x-1) - 5 > 0.$$

Нехай $\log_2 (x-1) = t$. Отримуємо:

$$4t^2 + t - 5 > 0; \quad \left[\begin{array}{l} t < -\dfrac{5}{4}, \\ t > 1. \end{array}\right.$$

Маємо: $\left[\begin{array}{l} \log_2 (x-1) < -\dfrac{5}{4}, \\ \log_2 (x-1) > 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_2 (x-1) < \log_2 2^{-\frac{5}{4}}, \\ \log_2 (x-1) > \log_2 2; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} 0 < x-1 < 2^{-\frac{5}{4}}, \\ x-1 > 2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 1 < x < 1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{32}}, \\ x > 3. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left(1; 1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{32}}\right) \cup (3; +\infty)$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\log_x 3 - \dfrac{5}{2} - \log_{\frac{1}{3}} x > 0$.

Розв'язання. Маємо: $\dfrac{1}{\log_3 x} - \dfrac{5}{2} + \log_3 x > 0$.

Нехай $\log_3 x = t$. Тоді $\dfrac{1}{t} - \dfrac{5}{2} + t > 0$. Звідси

$$\frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} > 0; \quad \frac{(2t-1)(t-2)}{2t} > 0.$$

Скориставшись методом інтервалів (рис. 22.1), отримуємо: $\left[\begin{array}{l} 0 < t < \dfrac{1}{2}, \\ t > 2. \end{array}\right.$

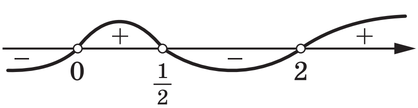


Рис. 22.1

Далі маємо: $\left[\begin{array}{l}0<\log_3 x<\dfrac{1}{2},\\ \log_3 x>2;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}1<x<\sqrt{3},\\ x>9.\end{array}\right.$

Відповідь: $\left(1;\sqrt{3}\right)\cup(9;+\infty)$.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $\log_x \dfrac{3x-1}{x^2+1}>0$.

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність так: $\log_x \dfrac{3x-1}{x^2+1}>\log_x 1$. Ця нерівність рівносильна сукупності двох систем.

1) $\begin{cases}0<x<1,\\ \dfrac{3x-1}{x^2+1}>0,\\ \dfrac{3x-1}{x^2+1}<1.\end{cases}$

Звідси

$\begin{cases}0<x<1,\\ 3x-1>0,\\ x^2-3x+2>0;\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{1}{3}<x<1,\\ x^2-3x+2>0;\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{1}{3}<x<1,\\ \left[\begin{array}{l}x>2,\\ x<1;\end{array}\right.\end{cases}$ $\dfrac{1}{3}<x<1.$

2) $\begin{cases}x>1,\\ \dfrac{3x-1}{x^2+1}>1.\end{cases}$ Звідси $\begin{cases}x>1,\\ x^2-3x+2<0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>1,\\ 1<x<2;\end{cases}$ $1<x<2$.

Відповідь: $\left(\dfrac{1}{3};1\right)\cup(1;2)$.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть нерівність $\log_3(x+7)<4-x$.

Розв'язання. Маємо: $\log_3(x+7)+x-4<0$.

Розглянемо функцію $f(x)=\log_3(x+7)+x-4$. Вона зростає на $D(f)=(-7;+\infty)$. Зауважимо, що $f(2)=0$. Отже, при $x>2$ отримуємо, що $f(x)>f(2)=0$, а при $-7<x<2$ отримаємо, що $f(x)<f(2)=0$.

Відповідь: $(-7;\ 2)$.

Вправи

22.1.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,1} x < \log_{0,1} 9$;
2) $\log_{11} x > \log_{11} 12$;
3) $\log_{0,8} x > \log_{0,8} 14$;
4) $\log_7 x < \log_7 15$;
5) $\log_{\frac{3}{7}} (x+5) < \log_{\frac{3}{7}} 8$;
6) $\log_8 (2x - 3) > \log_8 7$;
7) $\log_{\frac{2}{9}} (x-4) > \log_{\frac{2}{9}} 2$;
8) $\lg (1 + 3x) < \lg 16$.

22.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg x < \lg 4$;
2) $\log_{\frac{5}{6}} x > \log_{\frac{5}{6}} \frac{6}{7}$;
3) $\log_{12} (x - 8) > \log_{12} 3$;
4) $\log_{16} (4x - 6) < \log_{16} 10$;
5) $\log_{\frac{8}{11}} (2-x) < \log_{\frac{8}{11}} 2$;
6) $\log_{0,9} (2x + 1) > \log_{0,9} 5$.

22.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_7 x > 2$;
2) $\log_5 x \leqslant -1$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} x \leqslant 5$;
4) $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$;
5) $\log_2 (5x + 1) > 4$;
6) $\log_{0,6} (x - 2) < 2$;
7) $\log_3 (2x - 1) \leqslant 3$;
8) $\log_7 (9x + 4) \leqslant 2$;
9) $\log_{0,5} (2x + 1) \geqslant -2$;
10) $\log_{0,2} (x + 6) \geqslant -1$.

22.4.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{1}{7}} x < -1$;
2) $\log_4 x > 2$;
3) $\lg x < 5$;
4) $\log_{\frac{1}{6}} x > -3$;
5) $\log_{\frac{1}{3}} (2x-3) \geqslant -2$;
6) $\log_9 (5x + 6) \leqslant 2$.

22.5.• Скільки цілих розв'язків має нерівність:

1) $\log_{0,25} (3x - 5) > -3$;
2) $\log_3 (7 - x) < 3$?

22.6.• Знайдіть цілі розв'язки нерівності:

1) $\log_{0,5} (1 - x) > -1$;
2) $\log_{36} (x + 1) \leqslant 0,5$.

22.7.• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\lg (2x + 3) > \lg (x - 1)$;
2) $\log_5 2x < \log_5 (x + 1)$;
3) $\log_{0,2} (2x - 1) > \log_{0,2} (3x - 4)$;
4) $\log_{0,4} (x^2 - 3) < \log_{0,4} (x + 3)$;

5) $\log_{0,7}(x^2-2x-3)\leqslant\log_{0,7}(9-x)$;

6) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+31)\leqslant\log_{\frac{1}{3}}(10x+11)$.

22.8.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2(2x-3)<\log_2(x+1)$;

2) $\log_{0,6}(3-2x)>\log_{0,6}(5x-2)$;

3) $\lg(x^2-2)\geqslant\lg(4x+3)$;

4) $\log_{0,1}(10-2x)\geqslant\log_{0,1}(x^2-x-2)$.

22.9.• Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

1) $\log_{\frac{1}{4}}(x+1)>-\frac{3}{2}$;

2) $\log_{\sqrt{3}}(12-x^2)>2$;

3) $\log_{\frac{1}{7}}(3-x)>-1$;

4) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)>\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$.

22.10.• Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

1) $\log_{\frac{1}{6}}(x+2)\leqslant 0$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}(6-x)>-2$;

3) $\log_{0,3}(4x-3)\geqslant\log_{0,3}(x+3)$;

4) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1)\geqslant-1$.

22.11.• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\log_8(x^2-4x+3)\leqslant 1$;

2) $\log_{0,5}(x^2+x)>-1$;

3) $\log_{0,7}(x^2+10x+25)>0$;

4) $\log_2(x^2-3x)\leqslant 2$;

5) $\log_2\frac{4x-5}{4x+7}>0$;

6) $\lg\frac{x^2-1}{(x-2)^2}>0$;

7) $\log_3\frac{2x+5}{x+1}\leqslant 1$;

8) $\log_4\frac{3x-1}{x}\leqslant 0,5$.

22.12.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7)>0$;

2) $\log_9(x^2-6x+8)\leqslant 0,5$;

3) $\log_{0,5}(x^2+3x)\geqslant-2$;

4) $\log_{0,3}(x^2-2x+1)\geqslant 0$;

5) $\log_4\frac{3x-1}{x-1}\leqslant 1$;

6) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{3x+1}>1$.

22.13.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,3}(x^2 + x - 12) \geqslant \log_{0,3}(6x - 6)$;

2) $\lg(x^2 - x) \leqslant \lg(3x - 3)$;

3) $\log_{0,8}(1 - x^2) > \log_{0,8}(x^2 + 5x - 2)$;

4) $2\log_2(2x + 7) \geqslant 5 + \log_2(x + 2)$;

5) $\log_3(x^2 + 2x - 3) \leqslant \log_3(x + 9)$;

6) $\log_{\frac{1}{7}}(2x^2 + 3x + 1) \geqslant 2\log_{\frac{1}{7}}(1 - x)$.

22.14.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{2}{3}}(6 - 2x) < \log_{\frac{2}{3}}(x^2 - 2x - 3)$;

2) $\log_{0,1}(x^2 - 3x - 4) \geqslant \log_{0,1}(x + 1)$;

3) $2\log_2(x + 5) \leqslant 3 + \log_2(11 + x)$;

4) $\lg(2x^2 - 9x + 4) \leqslant 2\lg(x + 2)$.

22.15.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg x + \lg(x - 3) > 1$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}(x + 2) + \log_{\frac{1}{3}} x < -1$;

3) $\log_2 x + \log_2(x + 4) < 5$;

4) $\log_{0,1}(x - 5) + \log_{0,1}(x - 2) \geqslant -1$;

5) $\log_6(5x + 8) + \log_6(x + 1) \leqslant 1 - \log_6 3$;

6) $\log_3(1 - x) + \log_3(-5x - 2) \geqslant 2\log_3 2 + 1$.

22.16.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2(-x) + \log_2(1 - x) \leqslant 1$;

2) $\log_{0,2}(x - 1) + \log_{0,2}(x + 3) \geqslant -1$;

3) $\log_3(x - 2) + \log_3(x - 10) \geqslant 2$;

4) $\log_7 x + \log_7(3x - 8) \geqslant 1 + 2\log_7 2$.

22.17.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,2}^2 x \leqslant 1$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x \geqslant 4$;

3) $\lg^2 x + 3\lg x - 4 < 0$;

4) $\log_{\frac{1}{4}}^2 x + 2\log_{\frac{1}{4}} x - 8 \leqslant 0$;

5) $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 \geqslant 0$;

6) $2\log_{\frac{1}{9}}^2 x - 5\log_{\frac{1}{9}} x + 2 \geqslant 0$.

22.18.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,5}^2 x \geqslant 9$;
2) $\lg^2 x - 2\lg x - 3 \geqslant 0$;
3) $2\log_4^2 x - \log_4 x - 1 < 0$;
4) $\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x - 2 \leqslant 0$.

22.19.•• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\log_2^2 (4x) + 2\log_2 x - 11 < 0$;
2) $\log_3^2 (27x) + 3\log_3 x - 19 \geqslant 0$;
3) $\dfrac{\lg^2 x + \lg x - 6}{\lg x} \geqslant 0$;
4) $2\log_5 x - \log_x 5 \leqslant 1$.

22.20.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_7^2 (7x) - \log_7 x \geqslant 3$;
2) $\log_6^2 \dfrac{x}{216} + 8\log_6 x - 12 \leqslant 0$;
3) $\dfrac{\log_3^2 x - 6\log_3 x + 8}{\log_3 x - 1} \geqslant 0$;
4) $\log_{0,5} x - 2\log_x 0,5 \leqslant 1$.

22.21.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{1,6} \log_{0,5} (x^2 - x - 6) \geqslant 0$;
2) $\log_{0,5} \log_4 (2x^2 + x - 1) < 1$;
3) $\log_{\frac{1}{9}} \log_3 \dfrac{x}{x-1} \geqslant 0$;
4) $\log_{1,5} \log_3 \dfrac{3x-5}{x+1} \leqslant 0$.

22.22.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{7}{4}} \log_5 (x^2 - 2x - 3) \leqslant 0$;
2) $\log_{0,8} \log_2 \dfrac{3x-1}{2-x} > 0$.

22.23.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{2x-3} x > 1$;
2) $\log_{x-2} (2x - 9) < 0$;
3) $\log_{x+1} (5 - x) > 1$;
4) $\log_{x-2} (2x - 7) < 1$;
5) $\log_x (x + 2) \leqslant 2$;
6) $\log_x (2x^2 - 3x) \leqslant 1$.

22.24.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{3x-2} x < 1$;
2) $\log_x (x^2 - 7x + 13) > 0$;
3) $\log_{x-1} (4 - x) < 1$;
4) $\log_x (6 - x) \geqslant 2$.

22.25.•• Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2\cdot 5^x - 1} > 5^x - 2$.

22.26.•• Розв'яжіть нерівність $\sqrt{20\cdot 3^x - 11} > 3^x - 4$.

22.27.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{-x^2+7x-10}\log_2(x-3) \leqslant 0$;

2) $\sqrt{4-x^2}\left(\log_3\frac{x+1}{x}+2\right) \leqslant 0$;

3) $(x^2-2{,}8x+1{,}8)\sqrt{\log_{\frac{1}{5}}|x-2|} \geqslant 0$.

22.28.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{-x^2+6x-5}\log_3(x-2) \leqslant 0$; 2) $\dfrac{\log^2_{\sqrt{2}}(x-3)}{x^2-4x-5} \geqslant 0$.

22.29.* Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(2^x - a)\sqrt{x-3} \geqslant 0$.

22.30.* Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(3^x - a)\sqrt{x-2} \leqslant 0$.

22.31.* Розв'яжіть систему нерівностей

$$\begin{cases}\log_x(2\sin x+1) \leqslant 0,\\ 0 < x < 2\pi.\end{cases}$$

22.32.* Розв'яжіть систему нерівностей

$$\begin{cases}\log_x(2\cos x+1) \leqslant 0,\\ 0 < x < 2\pi.\end{cases}$$

23. Похідні показникової та логарифмічної функцій

Чи існує функція, похідна якої дорівнює самій функції? Відповісти на це запитання нескладно. Наприклад, функція, яка є нульовою константою, має цю властивість.

А чи можна вказати таку функцію f, визначену на $\mathbb{R}$, відмінну від нульової константи, що $f'(x) = f(x)$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$? Відповідь на це запитання не є очевидною.

Виявляється, що серед показникових функцій $f(x) = a^x$ існує єдина функція така, що $f'(x) = f(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Для цієї функції число, яке є основою степеня, позначають буквою e, а сама функція має вигляд $f(x) = e^x$. Отже,

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Установлено, що число e — ірраціональне. Його можна записати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу:

$$e = 2{,}71828182845\ldots .$$

Функцію $f(x) = e^x$ називають **експонентою.**

Відзначимо одну особливість графіка експоненти.

Маємо: $f'(0) = f(0) = e^0 = 1$.

Отже, дотична до графіка експоненти в точці з абсцисою, рівною нулю, має кутовий коефіцієнт, який дорівнює 1. Тобто ця дотична утворює кут 45° з додатним напрямом осі абсцис (рис. 23.1).

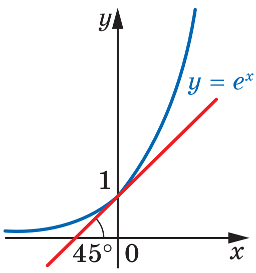


Рис. 23.1

Виведемо формулу для знаходження похідної показникової функції $f(x) = a^x$.

Маємо: $a = e^{\log_e a}$.

Тоді $a^x = e^{x \log_e a}$.

Користуючись правилом обчислення похідної складеної функції, запишемо:

$$(a^x)' = (e^{x \log_e a})' = e^{x \log_e a} \cdot (x \log_e a)' = a^x \log_e a.$$

Логарифм з основою e називають **натуральним логарифмом** і позначають $\ln a$, тобто $\log_e a = \ln a$.

Тоді при $a > 0$, $a \neq 1$ можна записати:

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

Ця формула показує, що між значенням похідної показникової функції та відповідним значенням самої функції існує прямо пропорційна залежність. Коефіцієнт пропорційності дорівнює $\ln a$.

У пункті 20 ми визначили, що логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$ є диференційовною. Знайдемо формулу для обчислення похідної логарифмічної функції.

Для будь-якого $x > 0$ виконується рівність $x = e^{\ln x}$. Тоді функції $f(x) = x$, $D(f) = (0; +\infty)$ і $g(x) = e^{\ln x}$, $D(g) = (0; +\infty)$, являють собою одну й ту саму функцію. Тому для будь-якого $x \in (0; +\infty)$ виконується рівність $f'(x) = g'(x)$, тобто $(x)' = (e^{\ln x})'$.

Ліва частина цієї рівності дорівнює 1. У правій частині отримуємо: $(e^{\ln x})' = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x(\ln x)'$. Тоді $1 = x(\ln x)'$. Звідси

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Маємо: $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Отже,

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

ПРИКЛАД 1 Знайдіть похідну функції:

1) $y = e^x(x^2 - 4x)$;
2) $y = x^3 \cdot 3^x$;
3) $y = e^{-7x}$;
4) $y = \frac{x^4}{\ln x}$;
5) $y = \log_6^2 x$;
6) $y = \log_2(3x - 4)$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи теорему про похідну добутку двох функцій, отримуємо:

$$y' = (e^x)' \cdot (x^2 - 4x) + (x^2 - 4x)' \cdot e^x =$$
$$= e^x(x^2 - 4x) + (2x - 4)e^x = e^x(x^2 - 2x - 4).$$

2) Маємо: $y' = (x^3)' \cdot 3^x + (3^x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot 3^x + 3^x \ln 3 \cdot x^3 =$ $= 3^x x^2(3 + x \ln 3)$.

3) Використовуючи теорему про похідну складеної функції, запишемо: $y' = (e^{-7x})' = e^{-7x} \cdot (-7x)' = -7e^{-7x}$.

4) Маємо:

$$y' = \frac{(x^4)' \cdot \ln x - (\ln x)' \cdot x^4}{\ln^2 x} = \frac{4x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot x^4}{\ln^2 x} =$$

$$= \frac{4x^3 \ln x - x^3}{\ln^2 x} = \frac{x^3 (4 \ln x - 1)}{\ln^2 x}.$$

5) Застосувавши теорему про похідну складеної функції, отримуємо:

$$y' = \left(\log_6^2 x\right)' = 2 \log_6 x \cdot (\log_6 x)' = \frac{2 \log_6 x}{x \ln 6}.$$

6) Маємо:

$$y' = (\log_2 (3x - 4))' = \frac{1}{(3x - 4) \ln 2} \cdot (3x - 4)' = \frac{3}{(3x - 4) \ln 2}.$$ ●

ПРИКЛАД 2 Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^{3x} + x$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 4x - 9$.

Розв'язання. Оскільки кутовий коефіцієнт прямої $y = 4x - 9$ дорівнює 4, то кутовий коефіцієнт шуканої дотичної $k = 4$. Знайдемо абсцису x_0 точки дотику. Маємо:

$f'(x) = 3e^{3x} + 1$. Оскільки $f'(x_0) = 4$, то $3e^{3x_0} + 1 = 4;$ $3e^{3x_0} = 3;$ $e^{3x_0} = 1;$ $x_0 = 0$. Звідси $f(x_0) = 1$.

Тоді шукане рівняння має вигляд $y = 4x + 1$.

Відповідь: $y = 4x + 1$.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = e^{6x - x^2 + 5}$; 3) $f(x) = \lg^3 x - 3 \lg x + 2$.

2) $f(x) = x \ln x$;

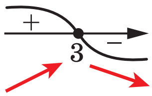


Рис. 23.2

Розв'язання. 1) Маємо:

$$f'(x) = (e^{6x - x^2 + 5})' = e^{6x - x^2 + 5} \cdot (6x - x^2 + 5)' = e^{6x - x^2 + 5} \cdot (6 - 2x).$$

Дослідивши знак похідної функції f (рис. 23.2), отримуємо, що функція f зростає на проміжку $(-\infty; 3]$, спадає на проміжку $[3; +\infty)$, $x_{max} = 3$.

2) Маємо:

$$f'(x) = (x)' \cdot \ln x + (\ln x)' \cdot x = \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1.$$

Дослідимо знак $f'(x)$ на $D(f) = (0; +\infty)$.

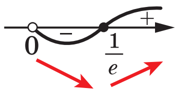


Рис. 23.3

Маємо: $f'(x) > 0$ при $\ln x > -1$. Звідси $x > \frac{1}{e}$. Аналогічно знаходимо, що $f'(x) < 0$ при $0 < x < \frac{1}{e}$.

Отримуємо, що функція f зростає на проміжку $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right)$, спадає на проміжку $\left(0; \frac{1}{e}\right]$, $x_{\min} = \frac{1}{e}$ (рис. 23.3).

3) Маємо:

$$f'(x) = 3\lg^2 x \cdot (\lg x)' - 3 \cdot \frac{1}{x \ln 10} = \frac{3\lg^2 x}{x \ln 10} - \frac{3}{x \ln 10} =$$

$$= \frac{3(\lg^2 x - 1)}{x \ln 10} = \frac{3(\lg x - 1)(\lg x + 1)}{x \ln 10}.$$

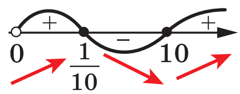


Рис. 23.4

Тоді $f'(x) = 0$ при $\lg x = -1$ або $\lg x = 1$. Отже, дана функція має дві критичні точки: $x = \frac{1}{10}$ і $x = 10$. Дослідивши знак похідної функції f на $D(f) = (0; +\infty)$ (рис. 23.4), доходимо висновку, що функція f зростає на проміжках $\left(0; \frac{1}{10}\right]$ і $[10; +\infty)$, спадає на проміжку $\left[\frac{1}{10}; 10\right]$, $x_{\max} = \frac{1}{10}$, $x_{\min} = 10$. ●

ЗАДАЧА Доведіть, що:

1) показникова функція $y = a^x$ є опуклою вниз;

2) при $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a x$ є опуклою вгору, а при $0 < a < 1$ — опуклою вниз.

Розв'язання. 1) Маємо:

$$y' = a^x \ln a, \quad y'' = a^x \ln^2 a.$$

Оскільки $y''(x) \geqslant 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, то показникова функція $y = a^x$ є опуклою вниз.

2) Запишемо:

$$y' = \frac{1}{x \ln a}, \quad y'' = -\frac{1}{x^2 \ln a}.$$

Якщо $a > 1$, то $\ln a > 0$. Тому $y''(x) \leqslant 0$ для всіх $x \in (0; +\infty)$. Отже, при $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a x$ є опуклою вгору.

При $0 < a < 1$ аналогічно доводимо, що $y''(x) \geqslant 0$ і логарифмічна функція $y = \log_a x$ є опуклою вниз. ●

Вправи

23.1.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = 4e^x$;
2) $y = e^{5x}$;
3) $y = x^3 e^x$;
4) $y = e^x \sin x$;
5) $y = \frac{e^x}{x-2}$;
6) $y = e^x + e^{-x}$;
7) $y = 5^x$;
8) $y = 2^{x^2}$;
9) $y = 7^{2x-3}$;
10) $y = x \cdot 3^x$;
11) $y = \frac{2^x - 3}{2^x + 1}$;
12) $y = 0{,}3^{\operatorname{tg} x}$.

23.2.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = e^{-2x}$;
2) $y = x^6 e^x$;
3) $y = e^x \cos x$;
4) $y = \frac{x+1}{e^x}$;
5) $y = 6^x$;
6) $y = 3^{4x+1}$;
7) $y = 10^{-x}$;
8) $y = \frac{5^x + 2}{5^x - 1}$;
9) $y = 0{,}7^{\operatorname{ctg} x}$.

23.3.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = \log_9 x$;
2) $y = \ln 2x$;
3) $y = \lg (x^2 - 4)$;
4) $y = \ln^2 x$;
5) $y = \ln \sin x$;
6) $y = \frac{\ln x}{x^3}$;
7) $y = \log_{0,2} (2x^2 + x - 4)$;
8) $y = \ln (1 - 0{,}2x)$;
9) $y = x^5 \ln x$.

23.4.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = \lg x$;
2) $y = \ln (5x - 4)$;
3) $y = \ln^3 x$;
4) $y = \lg \cos x$;
5) $y = \frac{x^5}{\ln x}$;
6) $y = \log_2 (x^2 + 6)$.

23.5.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = e^{3x} - 3x$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = e^{-2x} \cos 2x$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = 3^{3x - 4x^2 + 2}$, $x_0 = 1$.

23.6.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = e^{5x} + e^{-4x}$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = e^{-x} \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = 4^{x^2 - 3x - 4}$, $x_0 = -1$.

23.7.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = \frac{1}{6} \ln(-12x)$, $x_0 = -\frac{1}{6}$;

2) $f(x) = \frac{1}{2} x^2 - \ln x^2$, $x_0 = 4$;

3) $f(x) = \log_5 (x^2 + 3x - 2)$, $x_0 = -4$;

4) $f(x) = \ln \sin \frac{x}{2}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

23.8.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = \ln(6x - 5)$, $x_0 = 3$;

2) $f(x) = 8 \ln \frac{x}{2}$, $x_0 = \frac{1}{2}$;

3) $f(x) = \lg (x^2 - 5x + 8)$, $x_0 = 2$;

4) $f(x) = \ln \cos \frac{x}{3}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

23.9.° Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = e^{2x + 1}$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = x - \ln x$, $x_0 = 3$.

23.10.° Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = e^{1 - x}$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = \log_5 (x + 2)$, $x_0 = -1$.

23.11.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = e^{-2x}$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = e^x + \sin x$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = x \cdot 2^x$, $x_0 = 1$;
4) $f(x) = 6^{3x + 4}$, $x_0 = -1$;
5) $f(x) = 3x + \ln x$, $x_0 = 1$;
6) $f(x) = \ln(5 + 4x)$, $x_0 = -1$;
7) $f(x) = \log_3 (2x + 1)$, $x_0 = 1$;
8) $f(x) = 2 \ln(x - 2)$, $x_0 = 4$.

23.12.• Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = e^{5x}$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = 2e^x - \cos x$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = 3^{2x-3}$, $x_0 = 2$;
4) $f(x) = 4x - \ln 4$, $x_0 = 1$;
5) $f(x) = \ln(3x - 5)$, $x_0 = 2$;
6) $f(x) = \log_2(x + 3)$, $x_0 = 1$.

23.13.• Знайдіть рівняння горизонтальної дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = e^x + e^{-x}$;
2) $f(x) = (2^x - 7)(2^x - 9)$.

23.14.• Знайдіть рівняння горизонтальної дотичної до графіка функції $f(x) = (5^x - 65)(5^x + 15)$.

23.15.•• Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = e^x$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = ex - 6$;
2) $f(x) = e^{5x+2}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 5x + 7$;
3) $f(x) = e^{-2x}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = -x$;
4) $f(x) = \ln(3x - 2)$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 3x - 2$.

23.16.•• Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = e^{6-7x}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 5 - 7x$;
2) $f(x) = e^x - e^{-x}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 2x - 3$;
3) $f(x) = 6x - \ln x$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = x$;
4) $f(x) = \ln(1 - x)$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 1 - x$.

23.17.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = e^x - x$;
2) $f(x) = xe^{2x}$;
3) $f(x) = (1 - x)e^{x+1}$;
4) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$;
5) $f(x) = 4xe^{2-x}$;
6) $f(x) = e^{x^2}$;
7) $f(x) = e^{4x - x^2 + 1}$;
8) $f(x) = \dfrac{e^x}{x - 2}$;

9) $f(x)=\frac{4x}{e^x}$;

10) $f(x) = x^3 \ln x$;

11) $f(x) = \ln x - x$;

12) $f(x) = x^2 \lg x$;

13) $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$;

14) $f(x)=\frac{x}{\ln x}$;

15) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

16) $f(x) = x^2 - \ln x^2$;

17) $f(x) = 2 \ln^3 x - 3 \ln^2 x$;

18) $f(x) = \lg^2 x - \lg x$.

23.18.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x)=xe^{\frac{x}{2}}$;

2) $f(x)=e^{x^4-2x^2}$;

3) $f(x)=5^{-x^3+3x+1}$;

4) $f(x) = (4x - 1) e^{2x}$;

5) $f(x) = x^3 \cdot 3^{-x}$;

6) $f(x)=\frac{x+3}{e^x}$;

7) $f(x) = 0{,}5x^2 - \ln x$;

8) $f(x) = x \ln^2 x$;

9) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$;

10) $f(x)=\ln x^2+\frac{2}{x}$;

11) $f(x) = \ln^3 x - 12 \ln x$;

12) $f(x) = \lg^4 x - 2 \lg^2 x$.

23.19.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $f(x) = e^x + x$ на проміжку $[-1; 1]$;

2) $f(x) = x^2e^{2x}$ на проміжку $[-2; 1]$;

3) $f(x)=7^{x^2-2x}$ на проміжку $[0; 2]$;

4) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ на проміжку $[-1; 1]$.

23.20.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $f(x) = (x - 1) e^{-x}$ на проміжку $[1; 3]$;

2) $f(x)=5^{x^2+2x}$ на проміжку $[-2; 1]$.

23.21.•• Дослідіть функцію і побудуйте її графік:

1) $f(x) = xe^x$;

2) $f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$;

3) $f(x)=e^{-x^2}$;

4) $f(x) = x^2 - 2 \ln x$;

5) $f(x) = \ln (9 - x^2)$.

23.22.•• Дослідіть функцію і побудуйте її графік:

1) $f(x)=\frac{x}{e^x}$; 2) $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$; 3) $f(x) = \log_2(x^2 + x)$.

23.23.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $f(x) = e^x - x - 1$ і доведіть, що при всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $e^x \geqslant 1 + x$.

23.24.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $f(x) = \ln(1 + x) - x$ і доведіть, що при $x > -1$ виконується нерівність $\ln(1 + x) \leqslant x$.

23.25.•• При яких значеннях a функція $y = 4 \ln x - ax - 7$ є зростаючою?

23.26.•• При яких значеннях a функція $y = 2 - 3e^x - ax$ є спадною?

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Моя любов — Україна і математика

Цей патріотичний вислів видатного українського математика, академіка Михайла Пилиповича Кравчука викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника науковцеві (див. форзац 1).

Михайло Кравчук народився в с. Човниці на Волині. Закінчивши із золотою медаллю Луцьку гімназію і потім математичне відділення Київського університету, Михайло Кравчук залишився працювати в Києві.

Висока наукова продуктивність і працездатність, оригінальність і гнучкість мислення М. П. Кравчука дозволили йому отримати важливі наукові результати в алгебрі та теорії чисел, теорії функцій і математичному аналізі, диференціальних та інтегральних рівняннях, теорії ймовірностей та статистиці тощо. Відомо, що його науковий доробок був значною мірою використаний американськими вченими при створенні першого комп'ютера.

М. П. Кравчук брав активну участь у створенні української наукової термінології, одним з перших почав писати наукові праці українською мовою, хоча вільно володів російською, французькою, німецькою, італійською, польською та іншими мовами.

Великого значення надавав М. П. Кравчук навчальній роботі з молоддю, зокрема, за його ініціативою в 1935 році була проведена перша Київська математична олімпіада для школярів. Спробуйте свої сили у розв'язанні задач цієї олімпіади.

Завдання
першої Київської математичної олімпіади (1935 р.)

1. Обчисліть значення виразу $\dfrac{b^3-a^3b-b^2c+ca^3}{(b-c)^2}+\sqrt{d}$ при $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=0{,}19$, $c=0{,}18$, $d=0{,}04$.

2. Розв'яжіть рівняння $4^{x^2-\sqrt{x^2-9}-20{,}75}=\sqrt{2}$.

3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+y=4, \\ (x^2+y^2)(x^3+y^3)=280. \end{cases}$

4. Додатні числа $u_1, u_2, \ldots, u_n$ утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що

$$\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_n}}.$$

5. Нехай a і b — катети прямокутного трикутника, а c — гіпотенуза. Доведіть, що

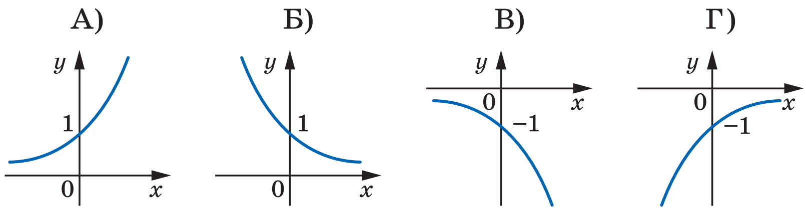
$$\log_{c+b} a+\log_{c-b} a=2\log_{c+b} a\cdot\log_{c-b} a.$$

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 2

1. Яка область визначення функції $y=\dfrac{7}{7^x-1}$?

А) $(-\infty;\ +\infty)$;　　В) $(-\infty;\ 7)\cup(7;\ +\infty)$;
Б) $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$;　　Г) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

2. На одному з рисунків зображено графік функції $y = 3^{-x}$. Укажіть цей рисунок.



3. Чому дорівнює корінь рівняння $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x\cdot\left(\dfrac{15}{4}\right)^x=\dfrac{4}{9}$?

А) 2;　　Б) –2;　　В) 1;　　Г) –1.

4. Знайдіть множину розв'язків нерівності $(0{,}6)^{x^2}>0{,}6$.

А) $(-\infty;\ 1)$;　　Б) $(1;\ +\infty)$;　　В) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$;　　Г) $(-1;\ 1)$.

5. Розв'яжіть рівняння $3^{x+3}+5\cdot3^{x-1}=86$.

А) 0;　　Б) 1;　　В) 2;　　Г) 3.

6. Обчисліть значення виразу $\log_{0,2}25-\log_3\dfrac{1}{27}$.

А) 1;　　Б) –1;　　В) 5;　　Г) –5.

7. Подайте число 3 у вигляді степеня числа 10.

А) $3=10^{\log_3 10}$;　　В) $3=10^{\lg 3}$;
Б) $3=10^{\log_3 3}$;　　Г) подати неможливо.

8. Чому дорівнює значення виразу $\log_6 108-\log_6 3$?

А) –1;　　Б) 2;　　В) –3;　　Г) 4.

9. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,2}x>\log_{0,2}5$.

А) $(-\infty;\ 5)$;　　Б) $(5;\ +\infty)$;　　В) $(0;\ 5)\cup(5;\ +\infty)$;　　Г) $(0;\ 5)$.

10. Через яку з даних точок проходить графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$?

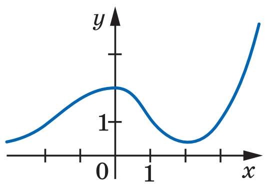
А) (2; 1); Б) (2; –1); В) $\left(2; \frac{1}{2}\right)$; Г) (2; 0).

11. При яких значеннях a і b виконується рівність

$$\lg ab = \lg(-a) + \lg(-b)?$$

А) $a > 0$, $b < 0$; В) $a < 0$, $b < 0$;
Б) $a < 0$, $b > 0$; Г) таких значень не існує.

12. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Скільки коренів має рівняння $\ln f(x) = 0$?



А) жодного кореня;
Б) два корені;
В) три корені;
Г) визначити неможливо.

13. Укажіть найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\log_{0,2}(3 - 2x) < -1.$$

А) –2; В) 1;
Б) –1; Г) такого розв'язку не існує.

14. Яка множина розв'язків нерівності $\log_x \sqrt{x} < 1$?

А) $(-\infty; +\infty)$; В) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$;
Б) $(0; +\infty)$; Г) $\varnothing$.

15. Розв'яжіть рівняння $\log_4(x - 4) + \log_4(x - 1) = 1$.

А) 0; 5; Б) 0; В) 5; Г) 1; 4.

16. Порівняйте числа $\log_4 5$, $\log_6 4$, $\log_{0,2} 3$.

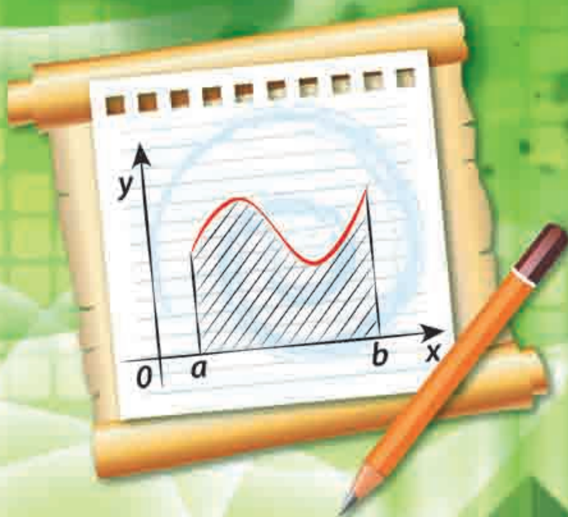
А) $\log_{0,2} 3 < \log_6 4 < \log_4 5$; В) $\log_{0,2} 3 < \log_4 5 < \log_6 4$;
Б) $\log_6 4 < \log_{0,2} 3 < \log_4 5$; Г) $\log_4 5 < \log_6 4 < \log_{0,2} 3$.

17. Знайдіть похідну функції $y = 5^{2x}$.

А) $y' = 2 \cdot 5^{2x}$; В) $y' = 2 \cdot 5^{2x} \ln 5$;
Б) $y' = 2x \cdot 5^{2x-1}$; Г) $y' = 5^{2x} \ln 5$.

18. Знайдіть проміжки спадання функції $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

А) $(-\infty; 0)$, $(1; e]$; В) $(0; e]$;
Б) $(0; 1)$, $(1; e]$; Г) $(0; 1)$.



§3

Інтеграл та його застосування

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

24. Первісна

Ви вмієте за заданою функцією знаходити її похідну, знаєте, що похідна має різноманітні застосування. Зокрема, уміючи диференціювати, за заданим законом $y = s\ (t)$ руху матеріальної точки по координатній прямій можна знайти закон $y = v\ (t)$ зміни її швидкості, а саме:

$$v\ (t) = s'\ (t).$$

Нерідко в механіці доводиться розв'язувати обернену задачу: знаходити закон руху за відомим законом зміни швидкості.

Наприклад, коли швидкість змінюється за законом $v\ (t) = gt$ і $s\ (0) = 0$, то закон руху задається формулою

$$s\,(t) = \frac{gt^2}{2}.$$

У правильності цього висновку ми можемо переконатися так:

$$s\,(0) = \frac{g \cdot 0^2}{2} = 0,$$

$$s'\,(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt = v\,(t).$$

Ви знаєте, що знаходження похідної заданої функції називають диференціюванням. Обернену операцію, тобто знаходження функції за її похідною, називають **інтегруванням**.

Означення. **Функцію F називають первісною функцією (або коротко первісною) функції f на проміжку I, якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність**

$$F'\ (x) = f\ (x).$$

Наприклад, функція $F\ (x) = x^2$ є первісною функції $f\ (x) = 2x$ на проміжку $(-\infty;\ +\infty)$, оскільки на $\mathbb{R}$ виконується рівність $(x^2)' = 2x$.

Часто в задачах, пов'язаних з первісною функції, проміжок I опускають. У таких випадках вважають, що $I = (-\infty;\ +\infty)$. Так, функція $F\ (x) = \cos x$ є первісною функції $f\ (x) = -\sin x$, оскільки виконується рівність $(\cos x)' = -\sin x$.

Розглянемо ще один приклад. Функція $F(x)=\sqrt{x}$ є первісною функції $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$, оскільки на цьому проміжку виконується рівність $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Проте на проміжку $[0;\ +\infty)$ функція $F(x)=\sqrt{x}$ не є первісною функції $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, оскільки в точці $x_0 = 0$ не виконується рівність $F'(x_0) = f(x_0)$.

Розглянемо функції $y = x^2 + 1$ і $y=x^2-\sqrt{2}$. Кожна з них має одну й ту саму похідну $y = 2x$. Тому обидві функції $y = x^2 + 1$ і $y=x^2-\sqrt{2}$ є первісними функції $y = 2x$. Зрозуміло, що кожна з функцій виду $y = x^2 + C$, де C — довільне число, є первісною функції $y = 2x$. Отже, задача знаходження первісної має безліч розв'язків.

Мета інтегрування полягає в тому, щоб для заданої функції знайти всі її первісні на заданому проміжку.

Як пов'язані між собою всі первісні даної функції, указує така теорема.

Теорема 24.1 (основна властивість первісної). ***Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та C — довільне число, то функція***

$$y = F(x) + C$$

також є первісною функції f на проміжку I.

Будь-яку первісну функції f на проміжку I можна подати у вигляді $y = F(x) + C$, де C — деяке число.

Доведення. ⊙ Оскільки функція F — первісна функції f на проміжку I, то для всіх $x \in I$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$. Тоді

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Отже, функція $y = F(x) + C$ є первісною функції f на проміжку I.

Нехай функція G — одна з первісних функції f на проміжку I. Тоді $G'(x) = f(x)$ для всіх $x \in I$. Маємо:

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Згідно з ознакою сталості функції (теорема 11.1) отримуємо, що функція $y = G(x) - F(x)$ є константою на проміжку I, тобто $G(x) - F(x) = C$, де C — деяке число.

Звідси $G(x) = F(x) + C$. ▲

Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, то запис $F(x) + C$, де C — довільне число, називають **загальним виглядом первісних** функції f на проміжку I.

З основної властивості первісної випливає, що графіки будь-яких двох первісних даної функції можна отримати один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ординат (рис. 24.1).

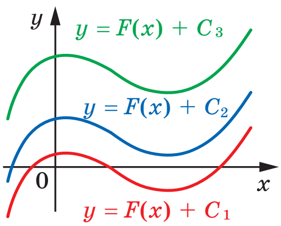


Рис. 24.1

Сукупність усіх первісних функції $y = f(x)$ на проміжку I називають її **невизначеним інтегралом** і позначають

$$\int f(x)\,dx$$

(читають: «інтеграл еф від ікс де ікс»).

При розв'язанні задач на первісну зручно користуватися таблицею, наведеною на форзаці 3.

Зауваження. Можна довести, що функція $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$, є первісною функції $f(x) = x^{\alpha}$ на проміжку $(0; +\infty)$. Користуючись цим, можна знайти, наприклад, первісну функції $f(x) = \sqrt[n]{x}$ на проміжку $(0; +\infty)$. Оскільки $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, то функція $F(x) = \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}$ є первісною функції f на проміжку $(0; +\infty)$. Ураховуючи рівності $\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} = \frac{x^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$, можна записати: $F(x) = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = x^5$.

Розв'язання. Оскільки $\left(\frac{x^6}{6}\right)' = x^5$, то однією з первісних функції $f(x) = x^5$ є функція $F(x) = \frac{x^6}{6}$. Тоді згідно з теоремою 24.1 запис $\frac{x^6}{6} + C$, де C — довільне число, є загальним виглядом первісних. ●

З розв'язання прикладу 1 випливає, що

$$\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C.$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на кожному з проміжків $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$.

Розв'язання. На проміжку $(0;\ +\infty)$ має місце рівність $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; на проміжку $(-\infty;\ 0)$ мають місце рівності

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}.$$

Отже, функція $y = \ln x$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$, а функція $y = \ln(-x)$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на проміжку $(-\infty;\ 0)$.

Оскільки $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{якщо } x \in (0; +\infty); \\ \ln(-x), & \text{якщо } x \in (-\infty; 0), \end{cases}$ то на будь-якому проміжку, який не містить точку 0, запис

$$\ln|x| + C,$$

де C — довільне число, є загальним виглядом первісних функції $f(x) = \frac{1}{x}$. ●

ПРИКЛАД 3 Для функції $f(x) = 2\cos x$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M\left(\frac{5\pi}{6}; 3\right)$.

Розв'язання. Оскільки $(2\sin x)' = 2\cos x$, то функція $y = 2\sin x$ є однією з первісних функції $f(x) = 2\cos x$. Отже, шукана первісна має вигляд $F(x) = 2\sin x + C$, де C — деяке число. Знайдемо це число.

З умови випливає, що $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3$. Тоді $2\sin\frac{5\pi}{6} + C = 3$. Звідси $C = 2$.

Таким чином, шукана первісна має вигляд $F(x) = 2\sin x + 2$. ●

Вправи

24.1.° Установіть, чи є функція F первісною функції f:

1) $F(x) = 3x^2 + x - 2$, $f(x) = 6x + 1$;

2) $F(x) = x^{-4}$, $f(x) = -4x^{-5}$ на проміжку $(0; +\infty)$;

3) $F(x) = \sin x + 3$, $f(x) = \cos x + 3$;

4) $F(x) = \cos 2x$, $f(x) = -\sin 2x$;

5) $F(x) = \sqrt{2x+1}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ на проміжку $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

6) $F(x) = 5^x$, $f(x) = 5^x \ln 5$.

24.2.° Доведіть, що функція F є первісною функції f на проміжку I:

1) $F(x) = x^4 - 2x^2 + 6$, $f(x) = 4x^3 - 4x$, $I = (-\infty; +\infty)$;

2) $F(x) = \frac{1}{x^3}$, $f(x) = -\frac{3}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$;

3) $F(x) = 5 - 3\sqrt{x}$, $f(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$;

4) $F(x) = 3\operatorname{tg}\frac{x}{3} + 6$, $f(x) = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}$, $I = \left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

24.3.° Чи є функція $F(x)=\frac{1}{x^2}$ первісною функції $f(x)=-\frac{2}{x^3}$ на проміжку:

1) $(0;\ +\infty)$; 2) $(-2;\ 2)$; 3) $(-\infty;\ 0]$; 4) $(-6;\ 0)$?

24.4.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції f:

1) $f(x) = 5$;
2) $f(x) = x$;
3) $f(x) = x^6$;
4) $f(x) = 2^x$;
5) $f(x)=\frac{1}{x^7}$ на проміжку $(-\infty;\ 0)$;
6) $f(x)=\sqrt{x}$ на проміжку $[1;\ +\infty)$;
7) $f(x)=\sqrt[5]{x}$ на проміжку $(-\infty;\ -3)$;
8) $f(x) = x^{-5}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$.

24.5.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції f:

1) $f(x) = 0$;
2) $f(x) = x^8$;
3) $f(x) = \frac{1}{3^x}$;
4) $f(x)=\frac{1}{x^{20}}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$;
5) $f(x)=\sqrt[7]{x}$ на проміжку $(4;\ +\infty)$;
6) $f(x)=\sqrt[4]{x}$ на проміжку $[0{,}5;\ +\infty)$.

24.6.• Перевірте, що:

1) $\int x\cos x\,dx=\cos x+x\sin x+C$; 2) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx=\sqrt{x^2+4}+C$.

24.7.• Перевірте, що функція $F(x)=\frac{x-2}{3x-1}$ є первісною функції $f(x)=\frac{5}{(3x-1)^2}$ на кожному з проміжків $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ і $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$, та запишіть загальний вигляд первісних функції f на кожному з указаних проміжків.

24.8.• Для функції f знайдіть первісну, графік якої проходить через указану точку:

1) $f(x) = x^2$, $A(-1;\ 3)$;
2) $f(x) = \sin x$, $B(\pi;\ -1)$;
3) $f(x) = e^x$, $C(0;\ -6)$.

24.9.• Для функції f знайдіть первісну, графік якої проходить через указану точку:

1) $f(x) = x^3$, $M\left(1;\frac{5}{4}\right)$;

2) $f(x) = \cos x$, $N\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5}{2}\right)$;

3) $f(x) = 3^x$, $K\left(2; \frac{9}{\ln 3}\right)$.

24.10.• Для функції f знайдіть на проміжку I первісну F, яка набуває даного значення у вказаній точці:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\frac{1}{3}\right) = -9$;

2) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = (-\infty; 0)$, $F(-e^3) = 7$;

4) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$, $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$.

24.11.• Для функції f знайдіть на проміжку I первісну F, яка набуває даного значення у вказаній точці:

1) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $I = (0; \pi)$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$;

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$, $F(16) = 10$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\frac{1}{e}\right) = -2$;

4) $f(x) = 2^x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(5) = 1$.

24.12.• Укажіть на рисунку 24.2 графік, який може бути графіком первісної функції $f(x) = \cos 3$.

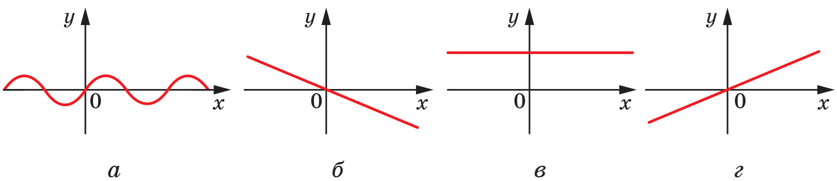


Рис. 24.2

24.13.° Укажіть на рисунку 24.3 графік, який може бути графіком первісної функції $f(x) = \ln 2$.

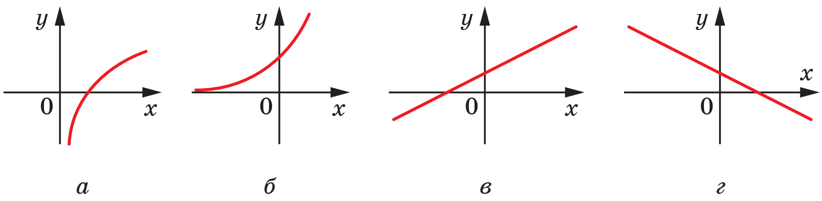


Рис. 24.3

24.14.° Для функції $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$ знайдіть які-небудь дві первісні, відстань між відповідними точками яких (тобто точками з рівними абсцисами) дорівнює 2.

24.15.•• Доведіть, що функції $F_1(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ і $F_2(x) = -\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ є первісними функції $f(x) = \cos 2x$. При якому значенні C є правильною рівність $F_1(x) = F_2(x) + C$?

24.16.•• Доведіть, що функції $F_1(x) = \sin^2 x$ і $F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$ є первісними функції $f(x) = \sin 2x$. При якому значенні C є правильною рівність $F_2(x) = F_1(x) + C$?

25. Правила знаходження первісної

При знаходженні похідних функцій ви користувалися не лише формулами, записаними в таблиці (див. форзац 2), але й правилами диференціювання. У цьому пункті ми розглянемо три правила знаходження первісних.

Теорема 25.1. ***Якщо функції F і G є відповідно первісними функцій f і g на проміжку I, то на цьому проміжку функція y = F (x) + G (x) є первісною функції y = f (x) + g (x).***

Доведення. ⊙ З умови випливає, що для будь-якого $x \in I$ виконуються рівності $F'(x) = f(x)$ і $G'(x) = g(x)$. Тоді для будь-якого $x \in I$ маємо:

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x). \blacktriangle$$

З теореми 25.1 випливає, що:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + G(x) + C,$$

де C — довільна стала.

Аналогічно можна довести, що

$$\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx = F(x) - G(x) + C.$$

Теорема 25.2. ***Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та k — деяке число, то на цьому проміжку функція $y = kF(x)$ є первісною функції $y = kf(x)$.***

Доведіть теорему 25.2 самостійно.

Тепер можна записати:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx = kF(x) + C.$$

Теорема 25.3. ***Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та k — деяке число, відмінне від нуля, то на відповідному проміжку функція $y = \frac{1}{k}F(kx + b)$ є первісною функції $y = f(kx + b)$.***

Доведення. ⊙ Використовуючи правило знаходження похідної складеної функції, запишемо:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot(kx+b)' = \frac{1}{k}f(kx+b)\cdot k = f(kx+b). \blacktriangle$$

Тепер можна записати:

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

ПРИКЛАД 1 Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x^2}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

Розв'язання. Нагадаємо, що функція $y = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ є первісною функції $y = x^{\alpha}$ на проміжку $(0; +\infty)$. Оскільки на даному проміжку виконується рівність $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, то функція

$y = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$, тобто функція $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$, є первісною для функції $y = \sqrt{x}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$.

Оскільки $\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$, то функція $y = \dfrac{x^{-2+1}}{-2+1}$, тобто функція $y = -\dfrac{1}{x}$, є первісною функції $y = \dfrac{1}{x^2}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$. Тоді за теоремою 25.2 функція $y = -\dfrac{2}{x}$ є первісною функції $y = \dfrac{2}{x^2}$.

Скориставшись теоремою 25.1, отримуємо, що функція $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} - \dfrac{2}{x}$ є первісною заданої в умові функції f. Тоді запис $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} - \dfrac{2}{x} + C$ є загальним виглядом первісних функції f. ●

Розв'язання прикладу 1 можна записати й так:

$$\int\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}\right)dx = \int\sqrt{x}\,dx + \int\frac{2}{x^2}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx + 2\int x^{-2}\,dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{x} + C.$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть одну з первісних функції:

1) $y = \cos(2x + 1)$;

2) $y = \dfrac{1}{(5x-3)^3}$ на проміжку $\left(\dfrac{3}{5};\ +\infty\right)$.

Розв'язання. 1) Оскільки функція $F(x) = \sin x$ є первісною функції $f(x) = \cos x$, то за теоремою 25.3 функція $y = \dfrac{1}{k}F(kx+b)$, тобто функція $y = \dfrac{1}{2}\sin(2x+1)$, є первісною функції $y = \cos(2x + 1)$.

2) Оскільки $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$, то первісною функції $f(x) = \frac{1}{x^3}$ є функція $F(x) = \frac{x^{-3+1}}{-3+1}$, тобто $F(x) = -\frac{1}{2x^2}$. Тоді первісна функції $y = \frac{1}{(5x-3)^3}$ має вигляд $y = \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2(5x-3)^2}\right)$, тобто $y = -\frac{1}{10(5x-3)^2}$. ●

ПРИКЛАД 3 Для функції $f(x) = \frac{1}{4x-3}$ знайдіть первісну на проміжку $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$, графік якої проходить через точку $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Розв'язання. Згідно з теоремою 25.3 запис $\frac{1}{4}\ln|4x-3| + C$, де C — довільне число, є загальним виглядом первісних функції f на заданому проміжку.

На проміжку $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$ шукана первісна має вигляд $F(x) = \frac{1}{4}\ln(3-4x) + C$. З умови випливає, що $F\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Тоді $\frac{1}{4}\ln\left(3 - 4 \cdot \frac{1}{2}\right) + C = 2$, звідси $C = 2$.

Отже, $F(x) = \frac{1}{4}\ln(3-4x) + 2$. ●

ПРИКЛАД 4 Швидкість руху матеріальної точки по координатній прямій змінюється за законом $v(t) = \frac{3}{\sqrt{2t+1}}$. Знайдіть закон руху $y = s(t)$, якщо $s(0) = 3$ м (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах).

Розв'язання. Функція $y = s(t)$ є первісною функції $y = v(t)$ на проміжку $[0; +\infty)$. Тоді можна записати

$$s(t) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2t+1} + C, \quad \text{тобто} \quad s(t) = 3\sqrt{2t+1} + C,$$

де C — деяке число. Знайдемо сталу C з умови $s(0) = 3$. Маємо:

$$3\sqrt{2 \cdot 0 + 1} + C = 3,$$

звідси $C = 0$.

Тоді шуканий закон руху задається формулою

$$s(t) = 3\sqrt{2t + 1}.$$

У пункті 8 ви дізналися, як знайти похідні добутку функцій, частки функцій та похідну складеної функції. Ознайомившись з матеріалом цього пункту, можливо, у вас виникло запитання, як знайти первісні функцій $y = f(x) g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ або $y = f(g(x))$, якщо відомо первісні функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$. На жаль, загальних правил знаходження первісних таких функцій не існує.

Вправи

25.1.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = 4 - 2x$;

2) $f(x) = 3x^2 - x + 5$;

3) $f(x) = 5 \sin x + \cos x$;

4) $f(x) = x^3 (2 - x^2)$;

5) $f(x) = 5e^x - 2 \cdot 3^x$;

6) $f(x) = \frac{6}{x} - x^3$ на проміжку $(-\infty; 0)$;

7) $f(x) = \frac{9}{\sin^2 x} + \frac{x^4}{4}$ на проміжку $(0; \pi)$;

8) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + x^3$ на проміжку $(0; +\infty)$;

9) $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}$ на проміжку $(-\infty; 0)$;

10) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{6}{x^5}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

25.2.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = x + 3$;
2) $f(x) = x^2 + 4x - 1$;
3) $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1}$;
4) $f(x) = \dfrac{1}{2}e^x + 2^x \ln 2$;
5) $f(x) = \dfrac{9}{\cos^2 x} - 3\sin x$ на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$;
6) $f(x) = 5\sqrt[4]{x} - \dfrac{3}{x}$ на проміжку $(0; +\infty)$;
7) $f(x) = 6x^2 - \dfrac{2}{x^2}$ на проміжку $(0; +\infty)$;
8) $f(x) = \dfrac{9}{x^{10}} + \dfrac{8}{x^9}$ на проміжку $(-\infty; 0)$.

25.3.• Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = \sin 5x$;
2) $f(x) = 2\cos\dfrac{x}{2}$;
3) $f(x) = \left(6x + \dfrac{1}{2}\right)^3$;
4) $f(x) = \left(\dfrac{x}{7} - 2\right)^4$;
5) $f(x) = \dfrac{1}{e^{2x}}$;
6) $f(x) = 7^{3x}$;
7) $f(x) = -\dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)$;
8) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 3x}$ на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right)$;
9) $f(x) = \dfrac{8}{\sin^2 4x}$ на проміжку $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$;
10) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 1}}$ на проміжку $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$;

11) $f(x)=\sqrt{x+4}$ на проміжку $[-4;\ +\infty)$;

12) $f(x)=\dfrac{6}{3x+2}$ на проміжку $\left(-\dfrac{2}{3};+\infty\right)$;

13) $f(x)=\dfrac{4}{(4x-3)^2}$ на проміжку $\left(-\infty;\dfrac{3}{4}\right)$;

14) $f(x)=\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}$ на проміжку $(-\infty;\ 2]$.

25.4.• Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x)=\sin\dfrac{x}{4}$;

2) $f(x)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$;

3) $f(x)=e^{5-\frac{x}{2}}$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{2^{3x+5}}$;

5) $f(x) = (2x - 3)^5$;

6) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$ на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{8};\dfrac{3\pi}{8}\right)$;

7) $f(x)=\dfrac{3}{(3x-1)^3}$ на проміжку $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$;

8) $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$ на проміжку $(-\infty;\ 3)$;

9) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{5}}$ на проміжку $(0;\ 5\pi)$;

10) $f(x)=\sqrt[4]{4x+7}$ на проміжку $\left(-\dfrac{7}{4};+\infty\right)$.

25.5.• Для функції f на проміжку I знайдіть первісну F, яка задовольняє дану умову:

1) $f(x) = 1 - 2x$, $I = (-\infty;\ +\infty)$, $F(3) = 2$;

2) $f(x) = 3x^2 - 4x$, $I = (-\infty;\ +\infty)$, $F(1) = 4$;

3) $f(x)=\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $F(\pi)=7$;

4) $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$;

5) $f(x)=4-\frac{1}{x^2}$, $I=(0;\ +\infty)$, $F\left(\frac{1}{4}\right)=1$;

6) $f(x)=\frac{7}{x-4}+\frac{1}{\sqrt{x+4}}$, $I=(4;\ +\infty)$, $F(5)=6$;

7) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{6x+1}}$, $I=\left(-\frac{1}{6};+\infty\right)$, $F(4)=7$;

8) $f(x)=e^{3x}$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $F(0)=1$;

9) $f(x)=(2-3x)^2$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $F(1)=0$;

10) $f(x)=\frac{4}{\cos^2\left(6x-\frac{\pi}{6}\right)}$, $I=\left(-\frac{\pi}{18};\frac{\pi}{9}\right)$, $F(0)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

25.6.° Для функції f на проміжку I знайдіть первісну F, графік якої проходить через дану точку:

1) $f(x)=3-6x$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $A(-1;\ 0)$;

2) $f(x)=4x^3-6x^2+1$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $B(1;\ 5)$;

3) $f(x)=2x-\frac{1}{\sqrt{x}}$, $I=(0;\ +\infty)$, $C(4;\ 10)$;

4) $f(x)=2\sin 3x$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $D\left(\frac{\pi}{3};0\right)$;

5) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{\frac{x}{2}-2}}$, $I=(4;\ +\infty)$, $E(6;\ 12)$;

6) $f(x)=e^{2x+1}$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $M\left(-\frac{1}{2};4\right)$;

7) $f(x)=\frac{1}{4x-3e^2}$, $I=\left(\frac{3e^2}{4};+\infty\right)$, $K(e^2;\ 6)$;

8) $f(x)=\frac{1}{\sin^2\frac{x}{8}}$, $I=(0;\ 8\pi)$, $N(2\pi;\ -3)$.

25.7.$^\bullet$ Для функції $f(x) = 4x^3 + 4x$ знайдіть первісну F, один з нулів якої дорівнює -1. Знайдіть решту нулів цієї первісної.

25.8.$^\bullet$ Для функції $f(x) = x^2 - 12$ знайдіть первісну F, один з нулів якої дорівнює 3.

25.9.$^\bullet$ Функції F_1 і F_2 є первісними функції f. Графік функції F_1 проходить через точку A, а функції F_2 — через точку B. Графік якої з функцій, F_1 або F_2, розташований вище, якщо:

1) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$, $A(1;\ 2)$, $B(0;\ 5)$;

2) $f(x) = (2x - 1)^2$, $A(2;\ 6)$, $B(-1;\ 1)$?

25.10.$^\bullet$ Функції F_1 і F_2 є первісними функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x-1}}$ на проміжку $\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$. Графік функції F_1 проходить через точку $M(1;\ 9)$, а функції F_2 — через точку $N(10;\ 8)$. Графік якої з функцій, F_1 або F_2, розташований вище?

25.11.$^\bullet$ Швидкість матеріальної точки, яка рухається по координатній прямій, змінюється за законом $v(t) = t^2 + 2t - 3$. Запишіть формулу залежності її координати від часу, якщо в початковий момент часу $t = 0$ точка знаходилася в початку координат (швидкість вимірюється в метрах за секунду).

25.12.$^\bullet$ Тіло рухається по координатній прямій зі швидкістю, яка визначається в будь-який момент часу t за формулою $v(t) = 6t^2 + 1$. Знайдіть формулу, яка виражає залежність координати точки від часу, якщо в момент часу $t = 3$ с тіло знаходилося на відстані 10 м від початку координат (швидкість руху вимірюється в метрах за секунду).

25.13.$^\bullet$ Задайте формулою функцію, визначену на проміжку $(-\infty; +\infty)$, графік якої проходить через точку $A(-1;\ 6)$, а кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до цього графіка в точці з абсцисою x, дорівнює $6x^2 - 5x^4$.

25.14.$^\bullet$ Задайте формулою функцію, визначену на проміжку $(0; +\infty)$, графік якої проходить через точку $B(4;\ -5)$, а кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до цього графіка в точці з абсцисою x, дорівнює $\frac{3}{\sqrt{x}}+1$.

25.15.•• Знайдіть:

1) $\int \sin^2 x\,dx$; 2) $\int \sin 5x \cdot \cos 3x\ dx$; 3) $\int \sin\frac{7x}{3}\cdot\sin\frac{5x}{3}dx$.

25.16.•• Знайдіть:

1) $\int \cos^2 2x\,dx$; 2) $\int \cos x \cdot \cos 8x\ dx$.

25.17.•• Для функції $f(x) = 2x^2 + 3x$ знайдіть таку первісну, що пряма $y = 5x - 2$ є дотичною до її графіка.

25.18.•• Для функції $f(x) = x^2 - 4$ знайдіть таку первісну, що пряма $y = -3$ є дотичною до її графіка.

25.19.•• Для функції $f(x) = -2x + 5$ знайдіть таку первісну, що її графік має тільки одну спільну точку з прямою $y = 2$.

25.20.•• Для функції $f(x) = x + 1$ знайдіть таку первісну, що її графік має тільки одну спільну точку з прямою $y = -4$.

25.21.•• Василь Заплутайко шукає первісну функції $y = \cos x^2$ так:

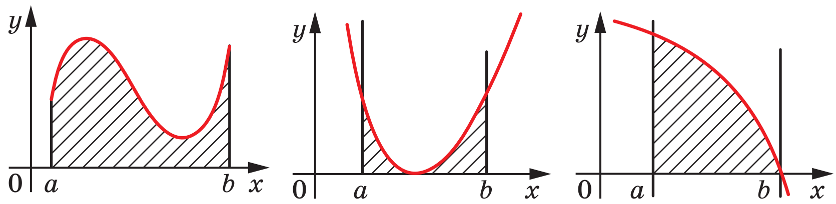
1) робить заміну $x^2 = t$ і отримує функцію $y = \cos t$;
2) далі шукає первісну функції $y = \cos t$ і отримує $y = \sin t$;
3) потім замість t підставляє значення $t = x^2$ і робить висновок, що кожна первісна має вигляд $y = \sin x^2 + C$, де C — деяке число.

У чому полягає помилка Василя?

26. Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл

Розглянемо функцію f, яка є неперервною на відрізку $[a;\ b]$ і набуває на цьому проміжку невід'ємних значень. Фігуру, обмежену графіком функції f і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$, називають *криволінійною трапецією*.

На рисунку 26.1 наведено приклади криволінійних трапецій.



а *б* *в*

Рис. 26.1

Розглянемо теорему, яка дає змогу знаходити площі криволінійних трапецій.

Теорема 26.1. ***Площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції*** $y = f(x)$ ***і прямими*** $y = 0$, $x = a$ ***і*** $x = b$ $(a < b)$, ***можна обчислити за формулою***

$$S = F(b) - F(a),$$

де F — будь-яка первісна функції f на відрізку $[a; b]$.

Доведення. Розглянемо функцію $y = S(x)$, де $x \in [a; b]$, яку визначено таким правилом.

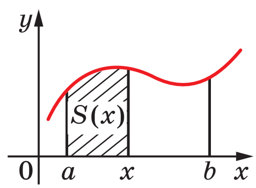


Рис. 26.2

Якщо $x = a$, то $S(a) = 0$; якщо $x \in (a; b]$, то $S(x)$ — це площа криволінійної трапеції, показаної штриховкою на рисунку 26.2.

Доведемо, що $S'(x) = f(x)$ для всіх $x \in [a; b]$.

Нехай x_0 — довільна точка відрізка $[a; b]$ і Δx — приріст аргументу в точці x_0, Обмежимося розглядом випадку, коли $\Delta x > 0$ (випадок, коли $\Delta x < 0$, розглядається аналогічно).

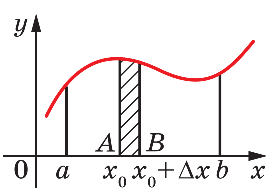


Рис. 26.3

Маємо: $\Delta S = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0)$.

Отримуємо, що ΔS — це площа криволінійної трапеції, заштрихованої на рисунку 26.3.

На відрізку AB як на стороні побудуємо прямокутник, площа якого дорівнює ΔS (рис. 26.4). Довжини сторін цього прямокутника дорівнюють Δx і $f(t)$, де t — деяка точка проміжку $[x_0;\ x_0 + \Delta x]$. Тоді $\Delta S = f(t) \cdot \Delta x$. Звідси

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = f(t).$$

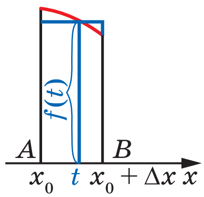


Рис. 26.4

Якщо $\Delta x \to 0$, то $t \to x_0$. Оскільки функція f є неперервною в точці x_0, то $\lim\limits_{t \to x_0} f(t) = f(x_0)$. Звідси, якщо $\Delta x \to 0$, то $f(t) \to f(x_0)$. Маємо:

$$S'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(t) = f(x_0).$$

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції $y = S(x)$, то для будь-якого $x \in [a;\ b]$ виконується рівність $S'(x) = f(x)$.

Отримали, що функція $y = S(x)$ є однією з первісних функції f на відрізку $[a;\ b]$.

Нехай F — деяка первісна функції f на відрізку $[a;\ b]$. Тоді згідно з основною властивістю первісної можна записати

$$F(x) = S(x) + C,$$

де C — деяке число.

Маємо:

$$F(b) - F(a) = (S(b) + C) - (S(a) + C) = S(b) - S(a) = S(b).$$

За означенням функції $y = S(x)$ шукана площа S криволінійної трапеції дорівнює $S(b)$. Отже,

$$S = F(b) - F(a)$$ ▲

ПРИКЛАД 1 Знайдіть площу S фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = \sin x$ і прямими $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ і $x = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. На рисунку 26.5 зображено криволінійну трапецію, площу якої потрібно знайти.

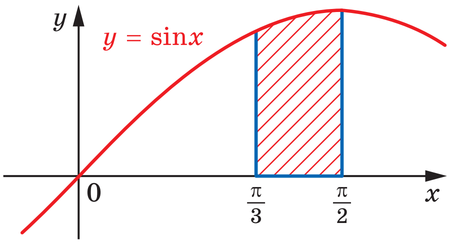


Рис. 26.5

Однією з первісних функції $f(x) = \sin x$ на відрізку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ є функція $F(x) = -\cos x$. Тоді

$$S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$ ●

ПРИКЛАД 2 Знайдіть площу S фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = 4x - x^2$ і прямою $y = 0$.

Розв'язання. Графік функції f перетинає пряму $y = 0$ у точках $x_1 = 0$ і $x_2 = 4$ (рис. 26.6). Тоді фігура, площу якої треба знайти, є криволінійною трапецією, яка обмежена графіком функції f і прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

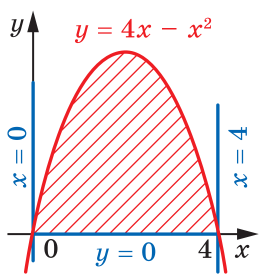


Рис. 26.6

Однією з первісних функції f на відрізку [0; 4] є функція

$$F(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}.$$

Тоді

$$S = F(4) - F(0) = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = \frac{32}{3}.$$ ●

Означення. **Нехай F — первісна функції f на проміжку I, числа a і b належать проміжку I, де $a < b$. Різницю $F(b) - F(a)$ називають визначеним інтегралом функції f на відрізку $[a; b]$.**

Визначений інтеграл функції f на відрізку $[a; b]$ позначають $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (читають: «інтеграл від a до b еф від ікс де ікс»). Отже,

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)} \qquad (1)$$

Тут F — довільна первісна функції f на проміжку I.

Наприклад, функція $F(x) = x^3$ є первісною функції $f(x) = 3x^2$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Тоді для довільних чисел a і b можна записати:

$$\int\limits_a^b 3x^2\,dx = F(b) - F(a) = b^3 - a^3.$$

Зауважимо, що значення різниці $F(b) - F(a)$ не залежить від того, яку саме первісну функції f обрано. Справді, кожну первісну G функції f на проміжку I можна подати у вигляді $G(x) = F(x) + C$, де C — деяка стала. Тоді

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Рівність (1) називають **формулою Ньютона–Лейбніца**.

Отже, для обчислення визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ за формулою Ньютона–Лейбніца потрібно:

1) знайти будь-яку первісну F функції f на відрізку $[a; b]$;
2) обчислити значення первісної F у точках $x = b$ та $x = a$;
3) знайти різницю $F(b) - F(a)$.

При обчисленні визначених інтегралів різницю $F(b) - F(a)$ позначають $F(x)\Big|_a^b$.

Використовуючи таке позначення, обчислимо, наприклад, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx$. Маємо:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}.$$

ПРИКЛАД 3 Обчисліть $\int\limits_1^2 (x^4 + x^2 - 2)\,dx.$

Розв'язання. Маємо:

$$\int\limits_1^2 (x^4 + x^2 - 2)\,dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - 2x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2\right) - \left(\frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1\right) = 6\frac{8}{15}.$$ ●

Якщо функція f має первісну F на відрізку $[a; b]$ і $c \in (a; b)$, то з формули Ньютона–Лейбніца випливає така властивість визначеного інтеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Справді,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \big(F(b) - F(c)\big) + \big(F(c) - F(a)\big) =$$

$$= \int\limits_c^b f(x)\,dx + \int\limits_a^c f(x)\,dx.$$

Якщо кожна з функцій f і g має первісну на відрізку $[a; b]$, то, використовуючи теореми 25.1 і 25.2, можна довести (зробіть це самостійно) такі властивості визначеного інтеграла:

1) $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx;$

2) $\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx,$ де k — деяке число.

Формула Ньютона–Лейбніца дозволяє встановити зв'язок між визначеним інтегралом і площею S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$.

Використовуючи теорему 26.1, можна записати:

$$\boxed{S = \int\limits_a^b f(x)\,dx}$$

Зауважимо, що в наведеній формулі розглядаються функції f, які на відрізку $[a; b]$ набувають тільки невід'ємних значень. Проте визначений інтеграл можна використати для обчислення площ більш складних фігур.

Розглянемо функції f і g, які є неперервними на проміжку $[a; b]$ і для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geqslant g(x)$.

Покажемо, як знайти площу S фігури Ф, яка обмежена графіками функцій f і g та прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 26.7).

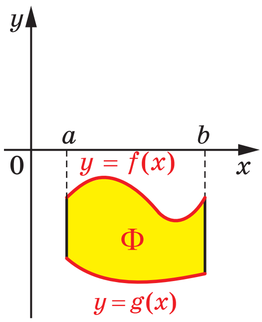


Рис. 26.7

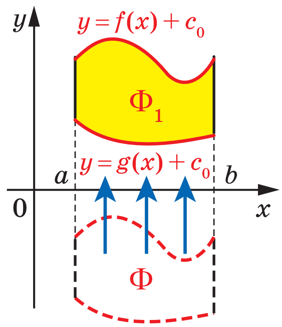


Рис. 26.8

Перенесемо фігуру Ф вгору на c_0 одиниць так, щоб отримана фігура $Ф_1$ знаходилася вище від осі абсцис (рис. 26.8). Фігура $Ф_1$ обмежена графіками функцій $y = f(x) + c_0$ і $y = g(x) + c_0$ та прямими $x = a$, $x = b$.

Оскільки фігури Ф і $Ф_1$ мають рівні площі, то шукана площа S дорівнює різниці $S_f - S_g$,

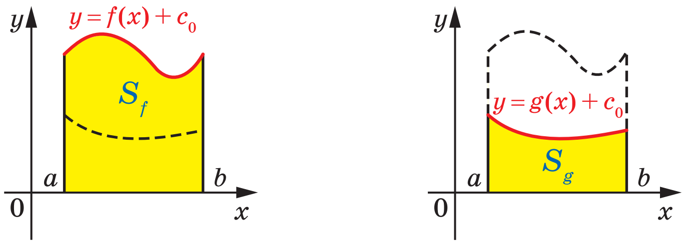
де S_f — площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x) + c_0$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ (рис. 26.9, *а*);

S_g — площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = g(x) + c_0$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ (рис. 26.9, *б*).

Таким чином, використовуючи властивості визначеного інтеграла, можемо записати:

$$S = S_f - S_g = \int_a^b \left(f(x) + c_0\right) dx - \int_a^b \left(g(x) + c_0\right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\left(f(x) + c_0 \right) - \left(g(x) + c_0 \right) \right) dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx.$$



а *б*

Рис. 26.9

Отже, *якщо функції f і g є неперервними на відрізку $[a; b]$ і для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geqslant g(x)$, то площу S фігури, яка обмежена графіками функцій f і g та прямими $x = a$ і $x = b$, можна обчислити за формулою*

$$\boxed{S = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx}$$

ПРИКЛАД 4 Знайдіть площу S фігури, обмеженої графіками функцій $f(x) = -x^2 + 6x - 6$ і $g(x) = x^2 - 2x$.

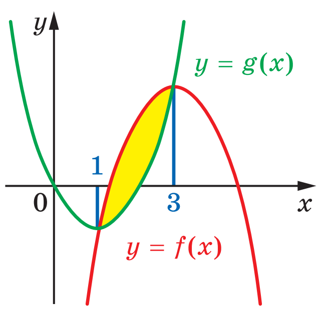


Рис. 26.10

Розв'язання. На рисунку 26.10 зображено фігуру, площу якої потрібно знайти.

Розв'язавши рівняння $f(x) = g(x)$, установлюємо, що графіки функцій f і g перетинаються у двох точках з абсцисами $x = 1$ і $x = 3$.

Тоді шукана площа S дорівнює:

$$S = \int_1^3 (f(x) - g(x))\, dx = \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)\, dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 - 6x \right) \Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(-\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 \right) - \left(-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 4 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 \right) = \frac{8}{3}.$$

Вправи

26.1.° Знайдіть площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунку 26.11.

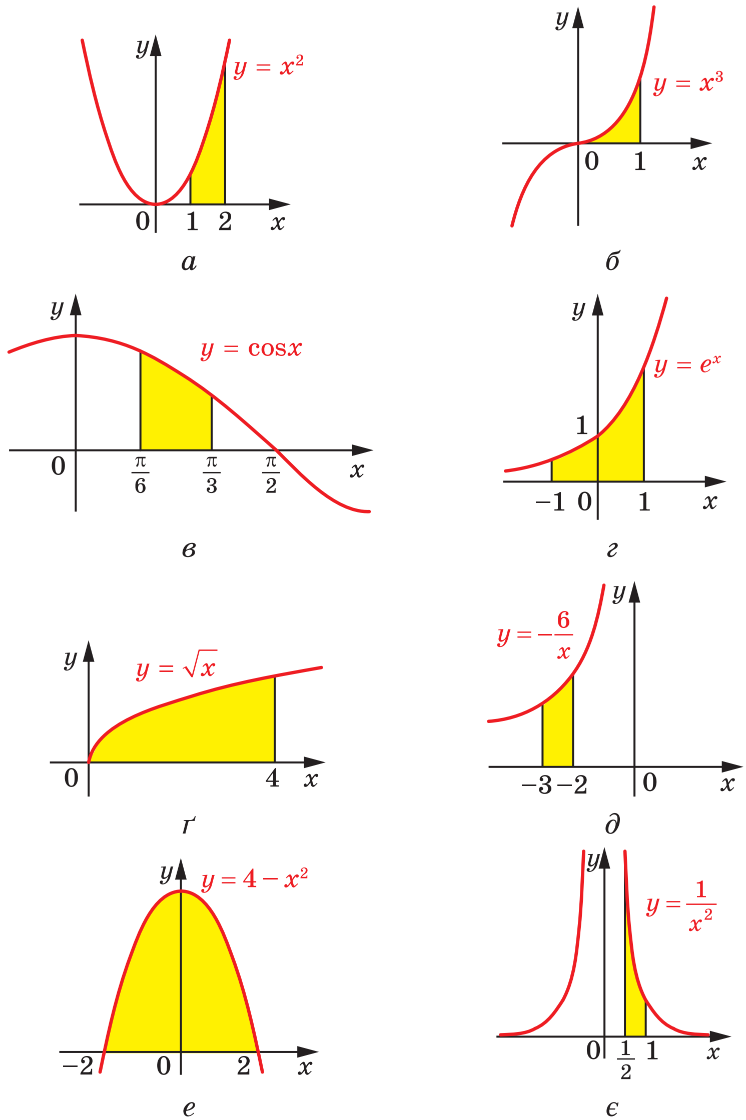


Рис. 26.11

26.2.° Знайдіть площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунку 26.12.

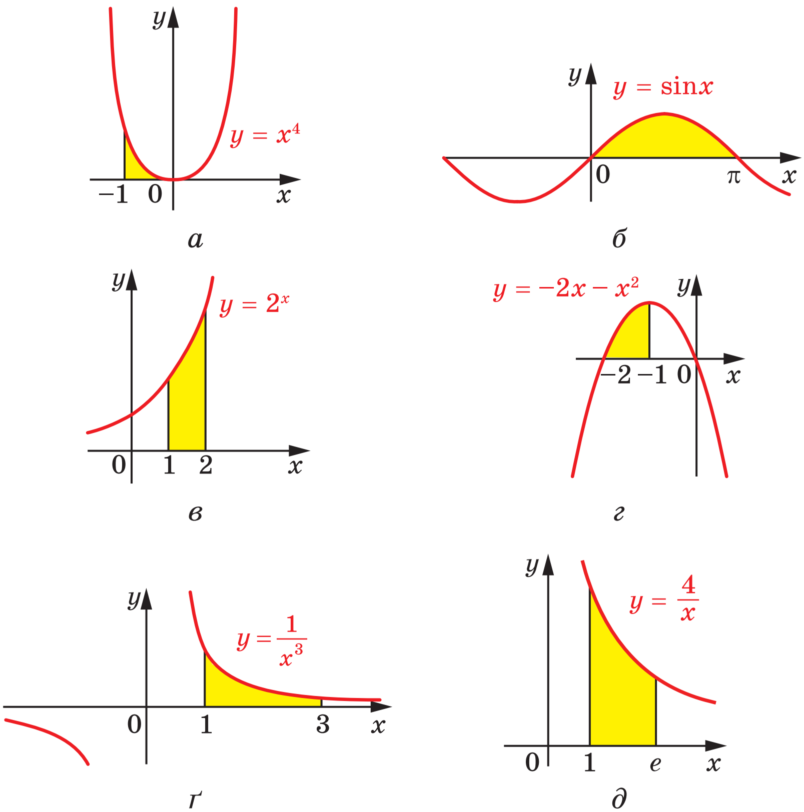


Рис. 26.12

26.3.° Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int_5^7 x\,dx$;
2) $\int_3^8 dx$;
3) $\int_{-3}^0 x^2\,dx$;
4) $\int_{-1}^2 x^4\,dx$;
5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$;
6) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;
7) $\int_{16}^{100} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;
8) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x}$;
9) $\int_1^{10} \frac{dx}{x^2}$;

10) $\int_{-2}^{3} 3^x\,dx$;

11) $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$;

12) $\int_{-4}^{-2} (2x+4)\,dx$;

13) $\int_{0}^{6} (3x^2-x)\,dx$;

14) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x+2\cos x)\,dx$.

26.4.° Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int_{-4}^{-2} 2\,dx$;

2) $\int_{1}^{2} x^3\,dx$;

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$;

4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$;

5) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^4}$;

6) $\int_{0}^{4} e^x\,dx$;

7) $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x}$;

8) $\int_{4}^{9} \sqrt{x}\,dx$;

9) $\int_{-1}^{1} (1-5x^4)\,dx$.

26.5.• Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої:

1) параболою $y = x^2 + 1$ і прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

2) косинусоїдою $y = \cos x$ і прямими $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$;

3) графіком функції $y = -x^3$ та прямими $y = 0$, $x = -2$;

4) параболою $y = 3 - 2x - x^2$ і прямими $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$;

5) гіперболою $y = \frac{1}{2x}$ і прямими $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$;

6) параболою $y = 2x - x^2$ і віссю абсцис;

7) синусоїдою $y = \sin 2x$ і прямими $y = 0$, $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{\pi}{4}$;

8) графіком функції $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ і прямими $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$;

9) графіком функції $y = e^x + 1$ і прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = -2$;

10) графіком функції $y = \sqrt{5-x}$ і прямими $y = 0$, $x = -4$.

26.6.• Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 2$;
2) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$;
3) $y = -\frac{8}{x}$, $y = 0$, $x = -4$, $x = -2$;
4) $y = \frac{1}{(x+2)^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$;
5) $y = \sqrt{x+4}$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 5$;
6) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = -4$.

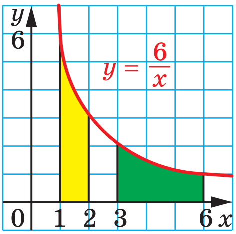


Рис. 26.13

26.7.• Доведіть, що криволінійні трапеції, зафарбовані на рисунку 26.13, рівновеликі.

26.8.• Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int\limits_1^3 (4x^3 - 4x + 3)\,dx$;
2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}\,dx$;
3) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\,dx}{\sin^2 2x}$;
4) $\int\limits_{-2}^{1} (x-3)^2\,dx$;
5) $\int\limits_{\frac{1}{5}}^{1} (5x-3)^5\,dx$;
6) $\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$;
7) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{3-2x}$;
8) $\int\limits_0^{2\pi} \left(\sin\frac{x}{6} + \cos 5x\right) dx$;
9) $\int\limits_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx$;
10) $\int\limits_{-6}^{0} e^{-\frac{x}{6}}\,dx$;
11) $\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{(4x+1)^3}$;
12) $\int\limits_{12}^{116} \sqrt[3]{\frac{x}{4} - 2}\,dx$.

26.9.° Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int\limits_1^4 \left(\frac{4}{x^2}+2x-3x^2\right)dx$; 4) $\int\limits_0^1 (2x-1)^4\,dx$; 7) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{3x+1}$;

2) $\int\limits_{\frac{4\pi}{3}}^{4\pi} \sin\frac{x}{4}\,dx$; 5) $\int\limits_4^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$; 8) $\int\limits_1^{\frac{7}{6}} \frac{dx}{(6x-5)^2}$;

3) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}$; 6) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} e^{-2x}\,dx$; 9) $\int\limits_1^4 \sqrt{7x-3}\,dx$.

26.10.° Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2$, $y = 4$;
2) $y = 2x^2$, $y = 2x$;
3) $y = e^x$, $y = 1$, $x = 2$;
4) $y = \frac{4}{x}$, $y = 1$, $x = 1$;
5) $y = \frac{4}{x}$, $y = 4$, $x = 4$;
6) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$;
7) $y = 2 + x - x^2$, $y = 2 - x$;
8) $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$;
9) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 3$;
10) $y = -x^2 + 2x$, $y = x^2$;
11) $y = x^3$, $y = x^2$;
12) $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$;
13) $y = \frac{7}{x}$, $x + y = 8$;
14) $y = \frac{2}{x^2}$, $y = 2x$, $x = 2$;
15) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

26.11.° Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) графіком функції $y = x^3$ і прямими $y = 8$, $x = 1$;
2) параболою $y = 0{,}5x^2$ і прямою $y = -x$;
3) параболою $y = 4 - x^2$ і прямою $y = 3$;
4) параболою $y = 6 + x - x^2$ і прямою $y = 6 - 2x$;
5) параболами $y = x^2 - 4x + 4$ і $y = 4 - x^2$;
6) гіперболою $y = \frac{3}{x}$ і прямими $y = 3$, $x = 3$;
7) графіком функції $y = e^{-x}$ і прямими $y = e$, $x = 0$;
8) гіперболою $y = \frac{5}{x}$ і прямою $x + y = 6$.

26.12.•• При якому додатному значенні a визначений інтеграл $\int\limits_0^a (6-2x)\,dx$ набуває найбільшого значення?

26.13.•• При яких значеннях a площа фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 0$, $x = a$, дорівнює 9?

26.14.•• При яких значеннях a площа фігури, обмеженої лініями $y = 2x^3$, $y = 0$, $x = a$, дорівнює 8?

26.15.•• При якому значенні a пряма $x = a$ розбиває фігуру, обмежену графіком функції $y = \frac{2}{x}$ і прямими $y = 0$, $x = 3$, $x = 12$, на дві рівновеликі фігури?

26.16.•• При якому значенні a пряма $x = a$ розбиває фігуру, обмежену графіком функції $y = -x^3$ та прямими $y = 0$, $x = -2$, на дві рівновеликі фігури?

26.17.•• При яких значеннях a виконується нерівність:

1) $\int\limits_0^a (4-2x)\,dx < 3\ (a > 0)$; 2) $\int\limits_{\log_{0,2} 6}^a 0{,}2^x\,dx > \frac{19}{\ln 0{,}2}\ (a > \log_{0,2} 6)$?

26.18.•• При яких додатних значеннях a виконується нерівність $\int\limits_{\frac{1}{2}}^a \left(\frac{1}{x^2}+1\right) dx > 1{,}5$?

26.19.•• Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \mathrm{tg}^2\, 3x\,dx$;

2) $\int\limits_{-\pi}^0 2\sin^2 \frac{x}{4}\,dx$;

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos x\,dx$;

4) $\int\limits_1^2 \frac{e^x + x^3}{x^3 e^x}\,dx$.

26.20.•• Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int\limits_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{15\pi}{4}} \mathrm{ctg}^2 \frac{x}{5}\,dx$;

2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x\,dx$;

3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \sin 7x \cos 3x\,dx$;

4) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x^2 - e^x}{x^2 e^x}\,dx$.

26.21.• Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 - 3x - 4$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$;
2) $y = -x^2$, $y = x - 2$;
3) $y = x^2 - 4$, $y = 4 - x^2$;
4) $y = x^2 - 2x$, $y = x$;
5) $y = 3 \sin x$, $y = -2 \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$;
6) $y = \frac{4}{x} - 2$, $y = 2$, $x = 2$, $x = 4$.

26.22.• Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 - 4x$, $y = x - 4$;
2) $y = 3 - x^2$, $y = 2x$;
3) $y = \cos x$, $y = -2 \cos x$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$;
4) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

26.23.•• Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) графіком функції $y = \begin{cases} 2 - x^2, \text{ якщо } x < 1; \\ 2x - 1, \text{ якщо } x \geqslant 1 \end{cases}$ і прямими $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$;

2) графіком функції $y = \begin{cases} \cos x, \text{ якщо } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0; \\ 1 - x, \text{ якщо } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$ і прямою $y = 0$.

26.24.•• Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) графіком функції $y = \begin{cases} x + 3, \text{ якщо } x < -1; \\ x^2 + 1, \text{ якщо } x \geqslant -1 \end{cases}$ і прямими $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$;

2) графіком функції $y = \begin{cases} x + 2, \text{ якщо } -2 \leqslant x \leqslant 0; \\ 2 \cos 2x, \text{ якщо } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{4} \end{cases}$ і прямою $y = 0$.

26.25.•• Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, прямою, яка дотикається до цієї параболи у точці з абсцисою $x_0 = 2$, та осями координат.

26.26.•• Знайдіть площу фігури, обмеженої віссю абсцис, графіком функції $y = 2x^3$ та прямою, яка дотикається до цього графіка в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

26.27.•• Обчисліть визначений інтеграл, використовуючи його геометричний зміст:

1) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$;

2) $\int\limits_{-3}^{0} \sqrt{9 - x^2}\, dx$;

3) $\int\limits_{4}^{8} \sqrt{8x - x^2}\, dx$;

4) $\int\limits_{-5}^{1} \sqrt{5 - 4x - x^2}\, dx$;

5) $\int\limits_{-4}^{1} |\, x \,|\, dx$;

6) $\int\limits_{0}^{5} |\, x - 2 \,|\, dx$.

26.28.•• Обчисліть визначений інтеграл, використовуючи його геометричний зміст:

1) $\int\limits_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx$;

2) $\int\limits_{0}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12 - x^2}\, dx$;

3) $\int\limits_{1}^{5} \sqrt{6x - x^2 - 5}\, dx$;

4) $\int\limits_{-2}^{2} |\, x + 1 \,|\, dx$.

26.29.* Обчисліть визначений інтеграл $\int\limits_{1}^{e} \ln x\, dx$.

26.30.* Обчисліть визначений інтеграл $\int\limits_{0}^{1} \arcsin x\, dx$.

27. Обчислення об'ємів тіл

У попередньому пункті ви дізналися, як за допомогою інтегрування можна обчислювати площу криволінійної трапеції та інших фігур на площині. Нагадаємо, що коли фігура обмежена графіками функцій f і g та прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 27.1), то її площу можна обчислити за формулою

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Розглянемо функцію $l(x) = f(x) - g(x)$. Величина $l(x_0) = f(x_0) - g(x_0)$ дорівнює довжині відрізка, по якому вертикальна пряма $x = x_0$ перетинає дану фігуру (рис. 27.2). Отже, можна записати:

$$S = \int_a^b l(x)\,dx.$$

Виявляється, що останню формулу можна узагальнити для розв'язування задач на обчислення об'ємів просторових тіл.

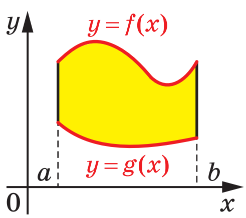


Рис. 27.1

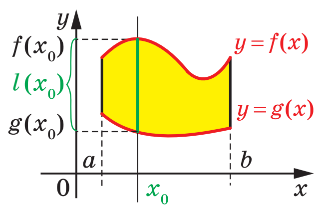


Рис. 27.2

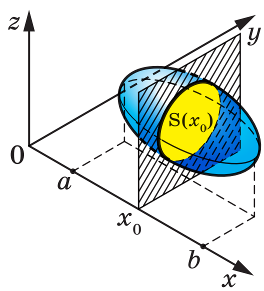


Рис. 27.3

У просторовій прямокутній декартовій системі координат розглянемо тіло Ф, об'єм якого дорівнює V. Нехай площина $x = x_0$ перетинає тіло Ф по фігурі з площею $S(x_0)$, а проекцією тіла Ф на вісь абсцис є відрізок $[a; b]$ (рис. 27.3). Тоді об'єм тіла Ф можна обчислити за формулою:

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}$$

Цю формулу можна довести, використовуючи ідею доведення теореми 26.1.

Покажемо, як за допомогою отриманої формули вивести формулу об'єму піраміди.

Нехай дано піраміду з висотою OM, рівною h, і основою площею S (рис. 27.4). Доведемо, що об'єм піраміди дорівнює $V = \frac{1}{3}Sh$. Уведемо систему координат так, щоб вершина піраміди O збіглася з початком координат, а висота піраміди OM належала додатному напряму осі абсцис (рис. 27.5). Тоді основа піраміди лежить у площині $x = h$. Тому проекцією піраміди на вісь абсцис є відрізок $[0; h]$.

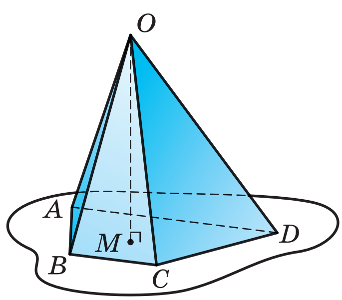


Рис. 27.4

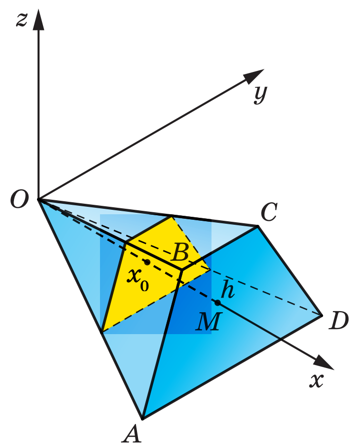


Рис. 27.5

Нехай площина $x = x_0$ перетинає піраміду по многокутнику з площею $S(x_0)$. Зрозуміло, що площина перерізу паралельна площині основи піраміди. Тому многокутник, утворений у перерізі, подібний многокутнику основи піраміди. При цьому коефіцієнт подібності дорівнює $\frac{x_0}{h}$. Скориставшись теоремою про відношення площ подібних фігур, можна записати:

$$\frac{S(x_0)}{S} = \frac{x_0^2}{h^2}.$$

Звідси $S(x_0) = \frac{x_0^2}{h^2}S$. Тепер можна записати:

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{x^2}{h^2}S\,dx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{S}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}Sh.$$

ПРИКЛАД Фігура, обмежена графіком функції $f(x) = x^2 + 1$ і прямими $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ (рис. 27.6), обертається навколо осі абсцис, утворюючи тіло об'єму V (рис. 27.7). Знайдіть V.

Розв'язання. При перетині утвореного тіла площиною $x = x_0$, де $x_0 \in [0; 1]$, утворюється круг (рис. 27.8), радіус якого дорівнює $f(x_0)$. Тоді площа цього круга дорівнює

$$S(x_0) = \pi f^2(x_0) = \pi\left(x_0^2 + 1\right)^2 = \pi\left(x_0^4 + 2x_0^2 + 1\right).$$

Тому

$$V = \int_0^1 S(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^4 + 2x^2 + 1)\,dx = \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{28\pi}{15}.$$

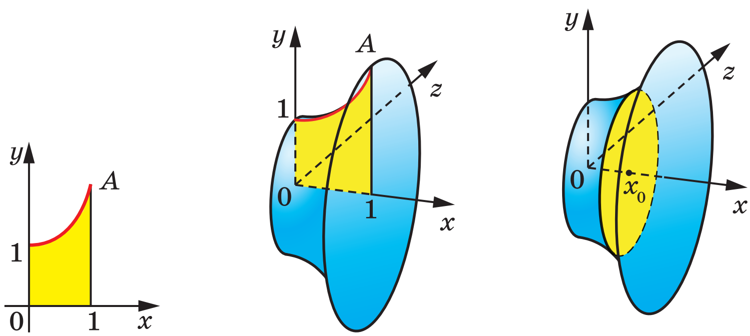


Рис. 27.6 Рис. 27.7 Рис. 27.8

Узагалі, має місце таке твердження.

Коли при обертанні фігури, обмеженої графіком неперервної та невід'ємної на відрізку $[a; b]$ функції f і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, навколо осі абсцис утворюється тіло об'єму V, то

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

Вправи

27.1.• Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями:

1) $y = 2x + 1$, $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$;
2) $y = x^2 + 1$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$;
3) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;
4) $y = x^2$, $y = x$;
5) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$, $y = x$.

27.2.• Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями:

1) $y = \sqrt{\cos x}$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$;
2) $y = x - x^2$, $y = 0$;
3) $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, $x = 2$.

27.3.• У кулі радіуса R на відстані $\frac{R}{2}$ від центра кулі проведено площину, яка розбиває кулю на дві частини. Знайдіть об'єми цих частин.

27.4.• Доведіть, що об'єм кулі радіуса R дорівнює $\frac{4}{3}\pi R^3$.

27.5.• Виведіть формулу для обчислення об'єму конуса.

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

«Розумом він перевершив рід людський»

Ці величні слова написані нащадками про видатного англійського науковця — фізика і математика Ісаака Ньютона. В історії науки поряд з І. Ньютоном стоїть ще одна гігантська фігура — французького науковця Ґотфріда Вільгельма Лейбніца, який залишив після себе немеркнучий слід у філософії, математиці, юриспруденції, логіці, дипломатії, історії, політології. Серед великої наукової спадщини цих геніальних учених особливе місце належить досягненням, пов'язаним зі створенням диференціального та інтегрального числення — науки про похідні та первісні.

Слід підкреслити, що Ньютон і Лейбніц створювали свої теорії в часи, коли звичні для нас поняття і терміни або взагалі не існували, або не мали точного змісту. Спробуйте уявити собі підручник з «Алгебри і початків аналізу»,

Ісаак Ньютон
(1643–1727)

Ґотфрід Вільгельм
Лейбніц
(1646–1716)

у якому немає термінів «множина», «функція», «дійсне число», «границя» тощо. Більш того, багато зручних сучасних позначень тоді ще не набули загальноприйнятого вжитку. Деякі з них Ньютону та Лейбніцу довелося самим винаходити, узагальнювати і пристосовувати до потреб. Наприклад, Лейбніц почав позначати операцію множення крапкою (раніше використовували символи: □, ×, *, M тощо), операцію ділення — двокрапкою (раніше часто використовували літеру D); Ньютон поширив позначення для степеня a^n на випадок цілих та дробових значень n, а позначення $\sqrt{x}$ узагальнив до $\sqrt[n]{x}$. Термін «функція» і символ інтеграла «$\int$» вперше зустрічаються в роботах Лейбніца.

Узагалі, історію розвитку математики можна сміливо розділити на епохи до і після появи похідної і інтеграла. Відкриття Ньютона та Лейбніца дозволили науковцям швидко і просто розв'язувати задачі, які раніше вважалися абсолютно неприступними.

Наведемо показовий приклад. У першій половині XVII століття видатний італійський математик Бонавентура Кавальєрі запропонував новий метод для обчислення площ. Користуючись цим методом, Кавальєрі зміг обчислити площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = x^n$, віссю абсцис і вертикальною прямою $x = 1$, при деяких значеннях n (рис. 27.9). Наполегливо працюючи протягом більш ніж 10 років, шляхом надзвичайно складних та громіздких міркувань Кавальєрі зміг розв'язати задачу лише для натуральних значень n, менших від 10.

Годі й казати, що, використовуючи формулу Ньютона–Лейбніца, шукану площу можна знайти в один рядок не тільки для натуральних, а й для всіх додатних значень n:

$$S = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

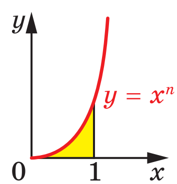


Рис. 27.9

Проте в ті часи метод, запропонований Кавальєрі, мав надзвичайно важливе значення, оскільки до XVII століття протягом кількох тисяч років усі намагання науковців розв'язати таку або подібну задачі були взагалі безрезультатними.

Для своїх розрахунків Кавальєрі сформулював такий принцип:

якщо всі прямі, паралельні між собою, перетинають фігури F_1 і F_2 по відрізках однакової довжини (рис. 27.10), *то такі фігури мають рівні площі.*

Ознайомившись із цим принципом, у 1644 році видатний італійський математик і фізик Еванджеліста Торрічеллі писав: «Без сумнівів, геометричний принцип Кавальєрі є дивовижним за своєю економією засобом для знаходження теорем... Це — справді царська дорога серед хащ математичного тернику».

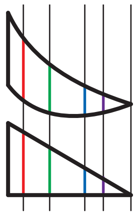


Рис. 27.10

Наприклад, з принципу Кавальєрі випливає, що прямокутник і паралелограм з однаковими стороною і висотою мають рівні площі (рис. 27.11). Але принцип Кавальєрі працює і для більш складних фігур. Наприклад, розглянемо дві фігури: одиничний квадрат і «криволінійний чотирикутник» $ABCD$, обмежений лініями $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x}+1$, $x=0$, $x=1$ (рис. 27.12). Зрозуміло, що кожна вертикальна пряма перетинає обидві фігури по відрізках одиничної довжини. Тоді з принципу Кавальєрі випливає, що площа «криволінійного чотирикутника» $ABCD$ дорівнює площі одиничного квадрата, тобто одиниці. У справедливос-

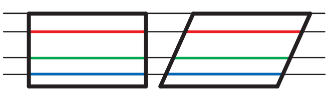


Рис. 27.11

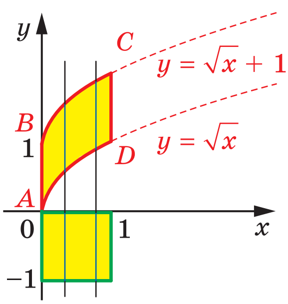


Рис. 27.12

ті цього висновку ви можете переконатися самостійно, обчисливши площу «криволінійного чотирикутника» $ABCD$ за допомогою формули Ньютона–Лейбніца.

Ідеї, близькі до сформульованого принципу Кавальєрі, наштовхнули Ньютона і Лейбніца до створення зручної загальної теорії, яка дала змогу просто і швидко будувати дотичні до найскладніших кривих, знаходити найбільші та найменші значення функцій, обчислювати площі різноманітних фігур, розв'язувати багато інших важливих і складних задач.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 3

1. Яка з наведених функцій є первісною функції $f(x) = x^4$?

А) $F(x) = 4x^3$; Б) $F(x)=\frac{x^5}{5}$; В) $F(x) = x^5$; Г) $F(x)=\frac{x^5}{4}$.

2. У якому з наведених випадків функція F є первісною функції f?

А) $f(x) = \sin x$, $F(x) = \cos x$;

Б) $f(x)=-\frac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = \operatorname{tg} x$;

В) $f(x) = x$, $F(x) = 1$;

Г) $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$.

3. Укажіть загальний вигляд первісних функції $f(x)=\frac{4}{x^5}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

А) $-\frac{1}{x^4}$; Б) $-\frac{1}{x^4}+C$; В) $-\frac{20}{x^6}+C$; Г) $-\frac{2}{3x^6}+C$.

4. Яка з наведених функцій є первісною функції $f(x)=\frac{1}{x}$ на проміжку $(-\infty; -1]$?

А) $F(x) = -1 - \ln x$; В) $F(x) = \ln(x - 1)$;

Б) $F(x) = \ln(1 - x)$; Г) $F(x) = \ln(-x) - 1$.

5. Укажіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = e^{6x}$.

А) $e^{6x} + C$; Б) $6e^{6x} + C$; В) $\frac{e^{6x+1}}{6x+1}+C$; Г) $\frac{1}{6}e^{6x}+C$.

6. Функція F є первісною функції $f(x) = x - 3$. Через яку з наведених точок проходить графік функції F, якщо $F(2) = 5$?

А) $(0; 8)$; Б) $(-2; 17)$; В) $(1; 5{,}5)$; Г) $(4; 4)$.

7. Яка з поданих функцій є первісною функції $f(x) = 7^x$?

А) $F(x)=\frac{7^x}{\ln 7}$; В) $F(x) = 7^x$;

Б) $F(x) = 7^x \ln 7$; Г) $F(x)=\frac{7^{x+1}}{x+1}$.

8. Обчисліть інтеграл $\int_0^3 x^2\,dx$.

А) 27; Б) 9; В) 6; Г) 3.

9. Обчисліть інтеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x\,dx$.

А) $\frac{1}{2}$; Б) $-\frac{1}{2}$; В) $1\frac{1}{2}$; Г) $-1\frac{1}{2}$.

10. Обчисліть інтеграл $\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}}$.

А) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; Б) $2\sqrt{3}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; Г) $\sqrt{3}$.

11. Обчисліть інтеграл $\int\limits_{-2}^{6} \frac{dx}{2\sqrt{7-x}}$.

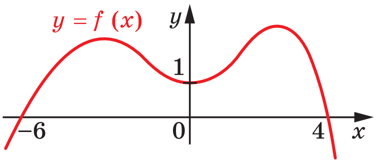
А) -4; Б) 4; В) -2; Г) 2.

12. Обчисліть інтеграл $\int\limits_{-1}^{4} (f(x)+1)\,dx$, якщо $\int\limits_{-1}^{4} f(x)\,dx = 2$.

А) 3; Б) 5; В) 7; Г) 9.

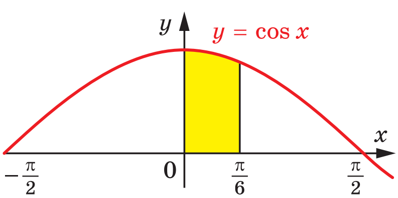
13. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$. Знайдіть значення виразу $\int\limits_{-6}^{0} f'(x)\,dx - \int\limits_{0}^{4} f'(x)\,dx$.

А) 0;
Б) 2;
В) 1;
Г) знайти неможливо.



14. Обчисліть площу зафарбованої фігури, зображеної на рисунку.

А) $\frac{\pi}{6}$;
Б) $\frac{1}{2}$;
В) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
Г) 1.



15. Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = 6x - x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

А) $12\frac{2}{3}$; Б) $14\frac{1}{3}$; В) $14\frac{2}{3}$; Г) $15\frac{1}{3}$.

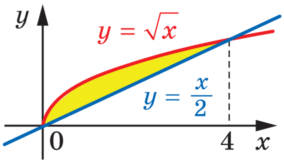
16. Значення якого з наведених інтегралів дорівнює площі зафарбованої фігури, зображеної на рисунку?

А) $\int_0^4 \frac{x}{2}\,dx$;

Б) $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$;

В) $\int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) dx$;

Г) $\int_0^4 \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right) dx$.



17. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 2 - x$.

А) 3,5; Б) 4; В) 4,5; Г) 5.

18. При якому значенні a пряма $x = a$ розбиває фігуру, обмежену графіком функції $y = \frac{10}{x}$ і прямими $y = 0$, $x = 2$, $x = 8$, на дві рівновеликі фігури?

А) 4; Б) 5; В) 10; Г) такого значення не існує.

§4

Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики

28. Комбінаторні правила суми та добутку

Скількома способами учні вашого класу можуть стати один за одним у черзі до буфету? Скількома способами можна обрати у вашому класі старосту та його заступника? Скількома способами можуть бути розподілені золоті, срібні та бронзові медалі на чемпіонаті світу з футболу?

Відповідаючи на ці запитання, потрібно підрахувати, скільки різних комбінацій, утворених за певним правилом, можна скласти з елементів заданої скінченної множини. Область математики, яка займається розв'язуванням подібних задач, називають комбінаторикою.

В основі розв'язування більшості комбінаторних задач лежать два правила: правило суми і правило добутку.

Розглянемо такий приклад. Туриста зацікавили 5 маршрутів у Криму і 7 маршрутів у Карпатах. З'ясуємо, скількома способами він може організувати свою відпустку, маючи час лише на один маршрут.

Оскільки всього є $5 + 7 = 12$ різних маршрутів, то один з них можна вибрати 12 способами.

Узагальненням цього прикладу є таке правило.

Правило суми. **Якщо елемент a можна вибрати m способами, а елемент b можна вибрати k способами, то вибір «a або b» можна здійснити $m + k$ способами.**

Знову звернемося до прикладу з вибором маршрутів. Якщо турист має час на два маршрути і хоче побувати спочатку в Криму, а потім у Карпатах, то він може організувати свій відпочинок 35 способами. Справді, якщо обрати один маршрут у Криму, то парою до цього маршруту може бути будь-який з 7 карпатських маршрутів. Оскільки маршрутів у Криму 5, то кількість пар (маршрут у Криму; маршрут у Карпатах) дорівнює $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \cdot 5 = 35$.

Ці міркування ілюструє така таблиця.

		Карпатські маршрути						
		1	2	3	4	5	6	7
Кримські маршрути	1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)
	2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	(2; 7)
	3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	(3; 7)
	4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)
	5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)	(5; 7)

Узагальненням цього прикладу є таке правило.

Правило добутку. **Якщо елемент a можна вибрати m способами і після кожного такого вибору елемент b можна вибрати k способами, то вибір «a і b» в указаному порядку, тобто вибір упорядкованої пари $(a; b)$, можна зробити mk способами.**

ПРИКЛАД 1 Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, причому так, щоб у кожному числі всі цифри були різними?

Розв'язання. Першою цифрою в такому чотиризначному числі може бути будь-яка з чотирьох цифр: 1, 2, 3 або 4. Маємо 4 варіанти.

Оскільки всі цифри в цьому чотирицифровому числі мають бути різними, то якою б не була перша цифра, другою цифрою числа може бути будь-яка з тих трьох цифр, що лишилися. Отже, для кожного з 4 варіантів першої цифри існує 3 варіанти для другої цифри. Використовуючи правило добутку, маємо, що перші дві цифри чотирицифрового числа можна вибрати $4 \cdot 3 = 12$ способами.

Міркуючи аналогічно, стверджуємо, що для кожного з цих 12 варіантів вибору перших двох цифр існує два варіанти вибору третьої цифри. Справді, якщо першими двома цифрами вибрано, наприклад, цифри 1 і 2, то третьою цифрою може бути будь-яка з двох цифр 3 або 4. Використовуючи правило добутку, доходимо висновку, що перші три цифри можна вибрати $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ способами.

Оскільки всі цифри в чотирицифровому числі мають бути різними, то зрозуміло, що перші три цифри числа однозначно визначають останню четверту цифру. Тому з цифр 1, 2, 3, 4 можна скласти $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ чотирицифрових числа так, щоб у кожному числі всі цифри були різними.

Відповідь: 24.

Розв'язуючи приклад 1, нам довелося обчислювати добуток $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. У комбінаторних задачах добуток послідовних натуральних чисел від 1 до n зустрічається настільки часто, що отримав спеціальну назву «факторіал» і позначення

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

(запис «$n!$» читають «ен факторіал»).

Наприклад, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

ПРИКЛАД 2 Для захисту інформації на комп'ютері використовують пароль — послідовність букв або цифр довжиною від 3 до 5 символів (пароль може містити декілька однакових символів). Скільки різних паролів можна утворити, використовуючи 26 букв та 10 цифр?

Розв'язання. Розглянемо кількість різних паролів з трьох символів. Першим символом можна обрати будь-яку букву або будь-яку цифру. Отже, маємо 36 варіантів. Аналогічно для вибору другого і третього символів існує по 36 варіантів. Використовуючи правило множення, маємо, що існує 36^3 різних паролів з трьох символів.

Так само доводимо, що кількість паролів з чотирьох символів дорівнює 36^4, а паролів з п'яти символів — 36^5.

Тому, використовуючи правило суми, отримуємо, що загальна кількість паролів становить $36^3 + 36^4 + 36^5$.

ЗАДАЧА Доведіть, що кількість підмножин довільної n-елементної множини M дорівнює 2^n.

Розв'язання. Пронумеруємо всі елементи множини M. Маємо:

$$M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Розглянемо скінченні послідовності, які містять n членів і складаються з нулів і одиниць.

Кожній підмножині A множини M поставимо у відповідність одну з таких послідовностей, що обирається за правилом:
якщо $a_k \in A$, то на k-му місці в послідовності стоїть число 1;
якщо $a_k \notin A$, то на k-му місці в послідовності стоїть число 0.

Наприклад,

$$A = \{a_2, a_4\} \to 0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots, 0$$
$$B = \{a_3\} \to 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots, 0$$
$$C = \{a_n\} \to 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 1$$
$$M \to 1, 1, 1, \dots, 1$$
$$\varnothing \to 0, 0, 0, \dots, 0$$

Зрозуміло, що кожній підмножині множини M відповідає єдина послідовність і, навпаки, кожна послідовність є відповідною єдиній підмножині множини M. Отже, кількість підмножин множини M дорівнює кількості послідовностей, що розглядаються.

При конструюванні послідовностей будь-який член можна вибрати тільки двома способами: записати 0 або записати 1. Отже, можна сконструювати $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\ \text{множників}} = 2^n$ різних послідовностей. ●

Вправи

28.1.• З міста A до міста B ведуть 4 дороги, а з міста B до міста C ведуть 3 дороги (рис. 28.1). Скількома способами можна проїхати з міста A до міста C?

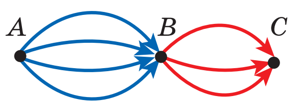


Рис. 28.1

28.2.• Кафе пропонує в меню 3 перші страви, 6 других страв і 5 третіх страв. Скільки існує способів вибрати обід з трьох страв (по одній страві кожного виду)?

28.3.• Розглядатимемо склади з двох букв, перша з яких є приголосною, а друга — голосною. Скільки таких різних складів можна утворити з букв слова:

1) шабля; 2) шаровари?

28.4.• У корзині лежать 10 яблук і 7 груш. Антон вибирає яблуко або грушу. Після цього Максим вибирає яблуко і грушу. У якому випадку у Максима більше можливостей для вибору: коли Антон узяв яблуко чи коли Антон узяв грушу?

28.5.• На рисунку 28.2 показано схему доріг, які ведуть з міста A до міста B. Скількома способами можна проїхати з міста A до міста B?

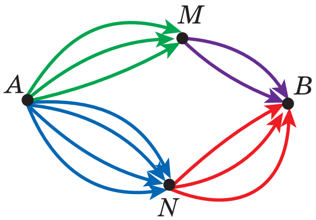


Рис. 28.2

28.6.• Кафе пропонує в меню 3 різних салати, 6 різних м'ясних страв і 5 різних десертів. Скільки існує способів вибрати обід із двох страв різного виду?

28.7.• На вершину гори веде 5 маршрутів. Скількома способами альпініст може піднятися на гору і спуститися з неї? Дайте відповідь на це запитання також за умови, коли підйом і спуск мають відбуватися за різними маршрутами.

28.8.• Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, причому так, щоб у кожному числі всі цифри були різними?

28.9.• Скільки п'ятицифрових чисел, усі цифри в яких різні, можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо ці числа мають починатися:

1) з цифри 1; 2) із запису «34»?

28.10.• Скільки чотирицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

28.11.• Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких непарні?

28.12.• Скільки чотирицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?

28.13.• Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких парні?

28.14.• Скільки існує семицифрових телефонних номерів, які не починаються з цифри 0?

28.15.• Монету кидають 4 рази. Скільки різних послідовностей гербів і цифр можна отримати?

28.16.• Гральний кубик кидають 3 рази. Скільки різних послідовностей очок можна отримати?

28.17.• Скільки трицифрових парних чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

28.18.• Скільки трицифрових непарних чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

28.19.• Скільки п'ятицифрових чисел, усі цифри яких мають бути різними, можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4?

28.20.• Скільки парних п'ятицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб у кожному числі цифри були різними?

28.21.• Скільки існує п'ятицифрових чисел, які діляться на 5?

28.22.• Скільки існує семицифрових чисел, які діляться на 25?

28.23.•• Скількома способами можна поставити на шахову дошку дві тури (білу та чорну) так, щоб вони не били одна одну?

28.24.•• У книжковому магазині є 4 різних видання поеми «Енеїда», 3 різних видання п'єси «Наталка Полтавка» і 2 різних видання п'єси «Москаль-чарівник». Крім того, є 5 різних книг, у яких містяться поема «Енеїда» і п'єса «Наталка Полтавка», і 6 різних книг, у яких містяться п'єси «Наталка Полтавка» і «Москаль-чарівник». Скількома способами можна зробити покупку, яка б містила по одному екземпляру кожного з цих творів?

28.25.•• Скільки існує семицифрових чисел, усі цифри яких мають однакову парність?

28.26.•• Для шифрування повідомлень використовують цифри 0, 1, 2, 3. Слово в повідомленні містить від 1 до 5 цифр. Яку найбільшу кількість різних слів може містити повідомлення?

28.27.•• Скількома способами можна розподілити замовлення на друкування 10 різних підручників між двома книжковими фабриками?

28.28.•• Учень має 7 книг з математики, 4 книги з фізики і 2 книги з астрономії. Скількома способами він може розставити ці книги на полиці так, щоб книги з одного предмета стояли поруч?

28.29.•• П'ять хлопців і п'ять дівчат сідають у ряд на 10 стільцях. Скількома способами вони можуть розміститися так, щоб хлопці сиділи на стільцях з парними номерами, а дівчата — на стільцях з непарними номерами?

28.30.•• Скільки існує п'ятицифрових чисел, у записі яких є хоча б одна непарна цифра?

28.31.•• Скільки існує п'ятицифрових чисел, у записі яких є хоча б одна парна цифра?

28.32.•• Скільки існує п'ятицифрових чисел, які містять хоча б дві однакові цифри?

28.33.•• Гральний кубик кидають три рази. Скільки різних послідовностей очок, серед яких є хоча б одна шістка, можна отримати?

28.34.•• Серед 10 людей є двоє знайомих. Скількома способами можна посадити цих людей на 10 стільців так, щоб знайомі сиділи поруч?

28.35.•• Скільки п'ятицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб цифри в числі не повторювалися і парні цифри не стояли поруч?

28.36.•• Будемо вважати словом будь-яку скінченну послідовність букв українського алфавіту. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи букви слова: 1) молоко; 2) математика; 3) комбінаторика?

28.37.* Скільки натуральних дільників має число $2^4 \cdot 5^3 \cdot 7^6$?

29. Перестановки, розміщення, комбінації

Ви знаєте, що при записі множини її елементи пишуть у довільному порядку. Наприклад, $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$. Але в комбінаториці розглядають також **упорядковані множини**.

Наприклад, запис (b, a, c) задає триелементну впорядковану множину, у якій на першому місці стоїть елемент b, на другому — елемент a, а на третьому — елемент c. Запис (c, b, a) задає іншу впорядковану множину з тих самих елементів a, b і c.

Означення. Перестановкою скінченної множини M називають будь-яку впорядковану множину, утворену з усіх елементів множини M.

Наприклад, існує 6 перестановок множини $M = \{a, b, c\}$. Випишемо їх:

(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

Перестановки заданої скінченної множини різняться лише порядком слідування елементів.

Тепер задачу про кількість способів, якими учні вашого класу можуть стати один за одним у черзі до буфету, можна сформулювати так: «Скільки існує перестановок множини учнів вашого класу?»

Кількість перестановок n-елементної множини M позначають символом P_n, використовуючи першу літеру французького слова *permutation* — перестановка. Наприклад, розглядаючи множину $M = \{a, b, c\}$, ми встановили, що $P_3 = 6$.

Якщо $M = \{a\}$, то існує лише один спосіб упорядкування цієї множини: a — це перший елемент. Тому $P_1 = 1$.

Доведемо, що для будь-якого натурального n справедлива формула

$$\boxed{P_n = n!}$$

Нехай множина M складається з n елементів. Записати будь-яку перестановку множини M — це фактично надати кожному елементу цієї множини певний номер від 1 до n. Тому кількість перестановок множини M дорівнює кількості способів нумерування її елементів.

Виберемо певний елемент a з цієї множини. Існує n способів присвоїти цьому елементу номер. Далі виберемо певний елемент b з множини M. Оскільки елементу a номер вже присвоєно, то існує $n - 1$ спосіб присвоїти номер елементу b. Зрозуміло, що наступний елемент можна пронумерувати $n - 2$ способами і т. д. Для останнього невибраного елемента множини M існує лише один спосіб присвоїти йому номер, оскільки до цього моменту $n - 1$ елемент уже отримали свої номери.

Отже, за правилом добутку можна записати:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \text{ тобто}$$

$$P_n = n!$$

ПРИКЛАД 1 Скількома способами можна розташувати на шаховій дошці 8 однакових тур так, щоб вони не били одна одну?

Розв'язання. Для того щоб тури не могли бити одна одну, на кожній горизонталі і на кожній вертикалі має стояти тільки одна тура (рис. 29.1).

Рис. 29.1

Нехай a_1 — номер вертикалі, на якій стоїть тура з першої горизонталі, a_2 — номер вертикалі, на якій стоїть тура з другої горизонталі, ..., a_8 — номер вертикалі, на якій стоїть тура з восьмої горизонталі.

Зрозуміло, що $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ — якась перестановка множини $\{1, 2, \ldots, 8\}$. Кожній такій перестановці відповідає деяке розташування тур, яке задовольняє умову задачі, і навпаки, кожному припустимому розташуванню тур відповідає певна перестановка цієї множини.

Отже, шукана кількість способів дорівнює P_8, тобто $8!$. ●

Розглянемо ще кілька типових комбінаторних задач.

ПРИКЛАД 2 За правилами *FIFA*[1] у фінальній частині чемпіонату світу з футболу беруть участь 32 команди. Скількома способами можуть бути розподілені золоті, срібні та бронзові медалі (три призових місця) між командами?

Розв'язання. На перше місце може потрапити будь-яка з 32 команд, на друге місце — будь-яка з решти 31 команди, на третє — будь-яка з 30 команд, що залишилися. За правилом добутку кількість можливих варіантів розподілу місць дорівнює $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$. ●

Розв'язавши цю задачу, ми з'ясували, скільки існує 3-елементних упорядкованих підмножин заданої 32-елементної множини. Кожну з таких упорядкованих підмножин називають **розміщенням з 32 елементів по 3 елементи.**

Означення. **Будь-яку k-елементну впорядковану підмножину даної n-елементної множини називають розміщенням з n елементів по k елементів.**

Кількість усіх можливих розміщень з n елементів по k елементів позначають символом A_n^k, використовуючи першу літеру французького слова *arrangement* — розміщення.

Результат, отриманий у задачі про розподіл призових місць, дозволяє зробити висновок, що

$$A_{32}^3 = 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760.$$

Доведемо, що при будь-яких натуральних n і k таких, що $k \leqslant n$, справедливою є формула

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)} \qquad (1)$$

Розглянемо n-елементну множину і сформуємо її k-елементну впорядковану підмножину.

Існує n способів вибору першого елемента підмножини. Другий елемент підмножини можна вибрати вже тільки $n - 1$ способами. Після вибору першого і другого елементів залишається $n - 2$ способи для вибору третього елемента підмножини. Узагалі, вибір k-го елемента можна здійснити $n - k + 1$ способами.

[1] Міжнародна федерація футбольних асоціацій.

Отже, за правилом добутку можна записати:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

Оскільки існує лише одна n-елементна підмножина даної n-елементної множини, то число A_n^n — це кількість перестановок n-елементної множини, тобто

$$\boxed{A_n^n = P_n}$$

Цей факт підтверджується формулою (1). Справді, при $k = n$ отримаємо:

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-n+1) = n!.$$

За означенням прийнято вважати, що $0! = 1$. Ця домовленість дозволяє формулу (1) записати більш компактно.

Помножимо і поділимо вираз, який стоїть у правій частині формули (1), на $(n - k)!$ (це можливо, оскільки $(n - k)! \neq 0$). Маємо:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Отримуємо формулу

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

ПРИКЛАД 3 Скільки існує правильних дробів, чисельник і знаменник яких — прості числа, менші від 30?

Розв'язання. Множина {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29} складається з усіх простих чисел, менших від 30. Кількість 2-елементних упорядкованих підмножин цієї множини дорівнює кількості звичайних дробів, відмінних від одиниці, чисельник і знаменник яких — зазначені прості числа. Половина з цих дробів є правильними. Отже, шукане число дорівнює $\frac{1}{2}A_{10}^2 = 45.$ ●

Розглянемо такі дві задачі. Скількома способами в класі, у якому навчаються 30 учнів, можна вибрати старосту і його заступника? Скількома способами в цьому класі можна призначити двох чергових?

Відповідь на перше запитання вам відома: це кількість 2-елементних упорядкованих підмножин 30-елементної множини, тобто A_{30}^2. Щоб відповісти на друге запитання, потрібно встановити кількість 2-елементних підмножин 30-елементної множини (саме підмножин, а не впорядкованих підмножин). Кожну з таких підмножин називають **сполукою (комбінацією)** з 30 елементів по 2 елементи.

Означення. **Будь-яку k-елементну підмножину заданої n-елементної множини називають сполукою (комбінацією) з n елементів по k елементів.**

Кількість усіх можливих комбінацій з n елементів по k елементів позначають символом C_n^k, використовуючи першу літеру французького слова *combinaison* — комбінація.

Так, задачу про кількість способів призначення чергових можна сформулювати так: чому дорівнює C_{30}^2?

Обчислимо значення C_n^k для кількох очевидних випадків. Наприклад, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$. Справді, існує n 1-елементних підмножин і одна n-елементна підмножина заданої n-елементної множини.

Оскільки будь-яка множина має лише одну підмножину, яка не містить жодного елемента (мова йде про порожню множину), то

$$C_n^0 = 1.$$

Зокрема,

$$C_0^0 = 1.$$

Доведемо, що при будь-яких натуральних n і k таких, що $k \leqslant n$, справедлива формула

$$\boxed{A_n^k = C_n^k \cdot P_k} \qquad (2)$$

Розглянемо деяку n-елементну множину. Кількість її k-елементних підмножин дорівнює C_n^k. З кожної такої підмножини можна утворити $k!$ упорядкованих k-елементних підмножин. Отже, кількість усіх k-елементних упорядкованих підмножин заданої n-елементної множини дорівнює $C_n^k \cdot k!$, тобто $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$.

З формули (2) отримуємо, що $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$.

Звідси

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}} \qquad (3)$$

Зазначимо, що ця формула залишається справедливою і для випадків, коли $k = 0$ або $n = 0$. Справді,

$$C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1,$$

$$C_0^0 = \frac{0!}{(0-0)!\,0!} = 1.$$

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що

$$\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}} \qquad (4)$$

Розв'язання. Цю формулу можна довести за допомогою формули (3). Переконайтеся в цьому самостійно.

Формула (4) має також інше, комбінаторне доведення. Вибираючи k-елементну підмножину A n-елементної множини M, ми тим самим однозначно задаємо $(n - k)$-елементну підмножину $M \setminus A$. Отже, кількість способів вибору k-елементної підмножини дорівнює кількості способів вибору $(n - k)$-елементної підмножини, тобто справедлива формула (4). ●

Вправи

29.1.° Скількома способами можна розставити на полиці 7 різних книг?

29.2.° У школі 20 класів і 20 класних керівників. Скількома способами можна розподілити класне керівництво між учителями?

29.3.° Скількома способами можуть сісти в автомобіль 5 чоловік, якщо кожний з них може бути водієм?

29.4.° У футбольній команді (11 чоловік) потрібно вибрати капітана та його заступника. Скількома способами це можна зробити?

29.5.° Комісія, що складається з 15 осіб, має вибрати голову, його заступника та секретаря. Скількома способами це можна зробити?

29.6.° У 9 класі вивчають 12 предметів. Денний розклад містить 6 уроків. Скількома способами можна скласти денний розклад так, щоб усі 6 уроків були різними?

29.7.° У фінальній частині чемпіонату Європи з футболу беруть участь 16 команд. Скількома способами можуть розподілитися золоті, срібні та бронзові нагороди?

29.8.° У дев'ятому класі вчаться 32 учні. Кожні двоє учнів обмінялись один з одним фотокартками. Скільки всього було роздано фотокарток?

29.9.° У класі вчаться 29 учнів. Скількома способами можна сформувати команду з 5 учнів для участі в математичній олімпіаді?

29.10.° Дано правильний n-кутник. Скільки існує чотирикутників з вершинами, які містяться серед вершин даного n-кутника?

29.11.° На площині позначено 10 точок так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки існує трикутників з вершинами у цих точках?

29.12.• Скільки різних шестицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, щоб цифри не повторювалися і крайні цифри були парними?

29.13.• Серед 20 робітників є 7 мулярів. Скількома способами можна скласти бригаду з 5 робітників так, щоб до неї входило рівно 2 муляри?

29.14.• Для шкільної лотереї підготовлено 100 білетів, з яких 12 є виграшними. Перший учень навмання вибирає 10 білетів. Скільки існує варіантів вибору, при яких він вибере рівно 3 виграшні білети?

29.15.• На прямій позначено 12 точок, а на паралельній їй прямій — 7 точок. Скільки існує трикутників з вершинами у цих точках?

29.16.• Пряма і коло не перетинаються. На колі позначено 9 червоних точок, а на прямій — 15 синіх точок. Відомо, що жодна пряма, яка проходить через дві червоні точки, не містить синіх точок. Скільки існує трикутників з вершинами у цих точках?

29.17.• У класі навчаються 30 учнів, серед яких 13 хлопців та 17 дівчат. Скількома способами можна сформувати команду із 7 учнів цього класу, до якої має входити принаймні одна дівчинка?

29.18.• Для підготовки до екзамену запропоновано перелік з 80 запитань. Учень знає відповіді лише на 15 з них. Екзаменаційний білет складається із 6 різних запитань даного переліку. Скільки різних екзаменаційних білетів можна скласти так, щоб учень міг відповісти принаймні на одне запитання білета?

29.19.•• Скількома способами можна розбити 12 спортсменів на 3 команди по 4 спортсмени в кожній?

29.20.•• Скількома способами можна розкласти 20 різних куль по 4 однакових ящиках так, щоб кожний ящик містив по 5 куль?

29.21.•• Скількома способами можна m білих і n чорних куль ($m \geqslant n$) розкласти в ряд так, щоб жодні дві чорні кулі не лежали поруч?

29.22.•• П'ять ящиків пронумеровані числами від 1 до 5. Скількома способами можна розкласти по цих ящиках 17 однакових куль так, щоб жодний ящик не виявився порожнім?

29.23.•• Скількома способами натуральне число n можна подати у вигляді суми k натуральних доданків (суми, які відрізняються порядком доданків, вважатимемо різними)?

30. Частота та ймовірність випадкової події

Нагадаємо основні відомості про частоту та ймовірність випадкової події, з якими ви ознайомилися в 9 класі.

Нам нерідко доводиться проводити спостереження, досліди, брати участь в експериментах або випробуваннях. Часто подібні дослідження завершуються деяким результатом, який заздалегідь передбачити неможливо.

Якщо експеримент проведено n разів і подія, яка нас цікавить, відбулася m разів, то величину $\frac{m}{n}$ називають **частотою випадкової події.**

Ймовірність випадкової події наближено дорівнює частоті цієї події, знайденій при проведенні великої кількості випробувань (*спостережень*).

Таку оцінку ймовірності випадкової події називають **статистичною.**

Для знаходження ймовірності деяких подій не обов'язково проводити випробування або спостереження. Достатньо керуватися життєвим досвідом і здоровим глуздом.

ПРИКЛАД 1 Нехай у коробці лежать 15 більярдних куль, пронумерованих числами від 1 до 15. Яка ймовірність того, що вийнята навмання куля матиме номер, кратний 3?

Розв'язання. Зрозуміло, що в цьому випробуванні є 15 *рівноможливих результатів*. З них є 5, які нас задовольняють: коли витягують кулі з номерами 3, 6, 9, 12, 15. Тому природно вважати, що ймовірність події «витягнули кулю з номером, кратним 3» дорівнює $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$. ●

Розв'язання багатьох ймовірнісних задач можна описати такою схемою.

- Нехай при випробуванні можна отримати один з n рівноможливих результатів.
- Розглядається деяка подія A, яку спричиняють m результатів. Називатимемо їх **сприятливими**.

- Ймовірність події A можна обчислити за формулою:

$$\boxed{p(A) = \frac{m}{n}}$$

Подію, яка за даним комплексом умов обов'язково відбудеться в будь-якому випробуванні, називають **достовірною (вірогідною)**. Ймовірність такої події вважають рівною 1. Подію, яка за даним комплексом умов не може відбутися в жодному випробуванні, називають **неможливою**. Ймовірність такої події вважають рівною 0.

Зауважимо, що ймовірність $p(A)$ будь-якої події A задовольняє нерівність

$$0 \leqslant p(A) \leqslant 1.$$

Для обчислення ймовірності випадкової події нам доводилося підраховувати кількість рівноможливих результатів у заданому експерименті та кількість сприятливих результатів.

Часто ці підрахунки пов'язані з визначенням кількості різних комбінацій, які за певним правилом можна скласти з елементів заданої скінченної множини. Тому застосування правил комбінаторики — ефективний прийом для розв'язування багатьох задач з теорії ймовірностей.

Розглянемо приклади.

ПРИКЛАД 2 На торговельному лотку лежать 28 яблук — 15 жовтих і 13 червоних. Покупець придбав 3 яблука, які продавець вибрав навмання. Яка ймовірність того, що всі придбані яблука жовті?

Розв'язання. Перше яблуко продавець може вибрати 28 способами, друге — 27, третє — 26 способами. Використовуючи комбінаторне правило добутку, маємо, що продавець може вибрати 3 яблука $n = 28 \cdot 27 \cdot 26$ рівноможливими способами.

Обчислимо, скільки серед цих способів таких, коли всі три яблука — жовті. Перше жовте яблуко можна вибрати 15 способами, друге — 14, третє — 13 способами. Використовуючи комбінаторне правило добутку, маємо, що продавець може вибрати 3 жовтих яблука $m = 15 \cdot 14 \cdot 13$ способами.

Отже, ймовірність випадкової події A — вибрати три жовтих яблука — дорівнює $p(A) = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{28 \cdot 27 \cdot 26} = \frac{5}{36}$. ●

ПРИКЛАД 3 У двох урнах лежать кулі, які відрізняються тільки кольором. У першій урні лежать дві білі та три чорні кулі, а в другій — три білі та дві чорні кулі. З кожної урни навмання дістають по одній кулі. Яка ймовірність того, що хоча б одна з двох куль виявиться білою?

Розв'язання. Цей дослід має три результати: кулі, які витягли, обидві білі, або обидві чорні, або одна куля біла, а друга — чорна. Проте ці результати не є рівноможливими (подумайте чому). Для того щоб мати змогу в даному досліді розглядати рівноможливі результати, пронумеруємо всі 10 куль.

Оскільки в кожній урні лежить по 5 куль, то з них можна утворити $5 \cdot 5 = 25$ таких пар, що кулі в парах узяті з різних урн. Оскільки кулі пронумеровані, то ми можемо вважати, що всі 25 пар куль різні. Кулі з урн беруть навмання. Тому в даному експерименті є 25 рівноможливих результатів.

Оскільки в першій урні лежать 3 чорні кулі, а в другій — 2 чорні, то існує $3 \cdot 2 = 6$ пар куль чорного кольору. Тому кількість пар куль, серед яких є щонайменше одна біла, дорівнює $25 - 6 = 19$. Отже, кількість результатів, сприятливих для події «хоча б одна з куль виявиться білою» (подія A), дорівнює 19.

Отже, $p(A) = \frac{19}{25}$. ●

ПРИКЛАД 4 Дослід полягає в одночасному киданні чотирьох гральних кубиків. Знайдіть ймовірність того, що:

1) випаде рівно одна шістка (подія A);
2) випадуть чотири різні цифри (подія B);

3) не випаде жодної шістки (подія C);
4) випаде хоча б одна шістка (подія D).

Розв'язання. Пронумеруємо кубики числами від 1 до 4. Будь-який результат експерименту записуватимемо у вигляді (a, b, c, d), де a, b, c і d — кількість очок, яка випала відповідно на першому, другому, третьому і четвертому кубиках.

Разом може утворитися $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$ таких четвірок. Жодний з результатів не має переваги. Тому в даному досліді є 6^4 рівноможливих результатів.

1) Єдина шістка, яка випала, може стояти на будь-якому з чотирьох місць. Нехай, наприклад, вона стоїть на першому місці. На інших трьох місцях можуть стояти будь-які цифри від 1 до 5. Тоді кількість четвірок виду $(6, b, c, d)$ дорівнює $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$. Загальна кількість сприятливих варіантів дорівнює $4 \cdot 5^3$. Отже,

$$p(A) = \frac{4 \cdot 5^3}{6^4}.$$

2) У цьому разі будь-які чотири різні цифри, що випали, утворюють 4-елементну впорядковану підмножину множини $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Отже, кількість результатів, сприятливих для настання події B, дорівнює $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. Звідси $p(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4}$.

3) На кожному з чотирьох місць може стояти будь-яка з цифр від 1 до 5. Звідси кількість результатів, сприятливих для настання події C, дорівнює $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$. Отримуємо $p(C) = \frac{5^4}{6^4}$.

4) Кількість усіх результатів дорівнює 6^4. Кількість усіх результатів, де немає жодної шістки, дорівнює 5^4. Тоді $6^4 - 5^4$ — це кількість усіх результатів, які містять хоча б одну шістку. Звідси $p(D) = \frac{6^4 - 5^4}{6^4}$.

ПРИКЛАД 5 Контролер у партії з 20 деталей навмання вибирає 5 деталей для перевірки. Якщо серед вибраних деталей немає жодної бракованої, то він приймає всю партію. Яка ймовірність того, що контролер прийме партію деталей, яка містить 7 бракованих?

Розв'язання. Оскільки контролер вибирає з 20 деталей 5 деталей навмання, то даний експеримент має C_{20}^{5} рівноможливих результатів.

Оскільки в партії з 20 деталей є 7 бракованих, то якісних виробів — 13. Контролер пропускає цю партію (подія A), якщо 5 деталей будуть вибрані з 13 якісних деталей. Отже, кількість результатів, сприятливих для настання події A, дорівнює C_{13}^{5}. Звідси $p(A)=\dfrac{C_{13}^{5}}{C_{20}^{5}}$. ●

Зауважимо, що при розв'язанні цієї задачі можна було міркувати інакше. Якщо контролер буде вибирати деталі для перевірки послідовно, тобто мати справу з упорядкованою множиною, то даний експеримент матиме A_{20}^{5} рівноможливих результатів, серед яких A_{13}^{5} є сприятливими.

ПРИКЛАД 6 У змаганнях з баскетболу беруть участь 18 команд, з яких 5 команд вважаються фаворитами. Шляхом жеребкування команди ділять на дві групи A і B, по 9 команд у кожній. Яка ймовірність потрапляння до однієї групи:

1) п'яти команд-фаворитів (подія M);
2) рівно двох команд-фаворитів (подія K)?

Розв'язання. Кожну з груп можна утворити C_{18}^{9} способами.

1) Нехай 5 команд-фаворитів потрапили до групи A. Тоді для доформування цієї групи до 9 команд потрібно вибрати 4 команди з 13 команд, що залишилися. Це можна зробити C_{13}^{4} способами. Оскільки п'ять команд-фаворитів можуть потрапити як у групу A, так і в групу B, то кількість результатів, сприятливих для події M, дорівнює $2 \cdot C_{13}^{4}$. Отже, $p(M)=\dfrac{2C_{13}^{4}}{C_{18}^{9}}$.

2) Зрозуміло, що кожну з груп, яка містить дві команди-фаворити, можна утворити $C_5^2 \cdot C_{13}^7$ способами. Звідси

$$p(K) = \frac{2 \cdot C_5^2 \cdot C_{13}^7}{C_{18}^9}.$$

Вправи

30.1.° Ймовірність купити бракований електроприлад дорівнює 0,007. Чи правильно, що в будь-якій партії з 1000 електроприладів є 7 бракованих?

30.2.° Ймовірність влучити в мішень становить 75%. Чи може бути так, що в серії з 100 пострілів було 98 влучень у мішень?

30.3.° У шухляді лежать 8 синіх і 12 червоних олівців. Яка ймовірність взяти навмання з шухляди: 1) ручку; 2) олівець?

30.4.° З цифр 2, 4, 6, 8 утворюють тризначне число. Яка ймовірність того, що це число буде ділитися: 1) на 5; 2) на 2?

30.5.° Яка ймовірність того, що, переставивши букви в слові «математика», отримаємо слово «література»?

30.6.• Експеримент полягає в киданні двох монет. Проведіть цей експеримент 50 разів. Знайдіть частоту випадкових подій A, B, C:

1) A — випали два герби;
2) B — випали один герб і одна цифра;
3) C — випали дві цифри.

Чи можна на основі зроблених спостережень *припустити*, що подія B більш ймовірна, ніж подія C? Чи можна на основі цих спостережень *гарантувати*, що подія B більш ймовірна, ніж подія C?

30.7.• Проведіть серію, яка складається з 200 експериментів, у яких підкидають кришку від пляшки з напоєм (рис. 30.1). Знайдіть частоту події

Рис. 30.1

«кришка впала емблемою напою вниз». Оцініть ймовірність події «кришка впала емблемою напою догори».

30.8.• У 2010 році 9788 учнів м. Києва брали участь у зовнішньому незалежному оцінюванні з математики, дані про яке наведено в таблиці (див. с. 304).
Оцініть ймовірність події:
1) вибраний навмання учень Голосіївського району отримав результат від 136 до 150 балів;
2) вибраний навмання учень Печерського району отримав результат, більший за 183 бали;
3) вибраний навмання учень серед тих, які отримали результат від 195,5 до 200 балів, навчається в Солом'янському районі;
4) вибраний навмання учасник тестування навчається в Шевченківському районі;
5) вибраний навмання учасник тестування отримав результат, більший за 150 балів.

30.9.• У таблиці (див. с. 305) наведено дані про кількість днів 2009 року, у яких у м. Харкові на 12:00 було зафіксовано дану температуру та даний рівень вологості повітря.
Підрахуйте частоту спостереження у 2009 році:
1) температури повітря в діапазоні від 11 °C до 20 °C серед тих днів, коли зафіксована вологість була не більшою за 40 %;
2) вологості повітря в діапазоні від 71 % до 80 % серед тих днів, коли зафіксована температура була меншою від 0 °C;
3) температури повітря в діапазоні від 11 °C до 30 °C та одночасно вологості повітря в діапазоні від 41 % до 70 %.

30.10.• Під час епідемії грипу було обстежено 80 000 жителів. Виявилося, що серед них частота хворих на грип становить 12,3 %. Крім того, було з'ясовано, що серед захворілих 2245 людей робили щеплення проти грипу. Оцініть ймовірність події «навмання вибрана людина серед тих, хто хворіє на грип, робила щеплення проти грипу».

Дані про учасників зовнішнього незалежного оцінювання з математики в м. Києві за 2010 рік

Діапазон балів, отриманих на тестуванні	Район м. Києва										Разом учнів:
	Голосіївський	Дарницький	Деснянський	Дніпровський	Оболонський	Печерський	Подільський	Святошинський	Солом'янський	Шевченківський	
від 100 до 135,5 балів	95	98	158	165	81	29	61	120	75	74	956
від 136 до 150 балів	126	156	230	291	151	89	95	181	137	124	1580
від 150,5 до 183 балів	468	557	653	736	527	597	302	525	769	602	5736
від 183,5 до 195 балів	102	122	70	151	91	160	58	64	241	106	1165
від 195,5 до 200 балів	25	23	15	50	23	86	10	14	70	35	351
Разом учнів:	816	956	1126	1393	873	961	526	904	1292	941	9788

Дані про температуру і вологість повітря на 12.00 у м. Харкові за 2009 рік

Діапазон температури повітря	Діапазон вологості повітря						Разом днів:
	від 0 % до 40 %	від 41 % до 60 %	від 61 % до 70 %	від 71 % до 80 %	від 81 % до 90 %	від 91 % до 100 %	
менше −11 °C	0	1	1	3	2	0	7
від −10° до −1 °C	0	0	11	15	13	5	44
від 0° до 10 °C	10	19	12	13	19	47	120
від 11° до 20 °C	23	27	15	6	10	2	83
від 21° до 30 °C	57	32	6	2	1	0	98
більше 31 °C	9	4	0	0	0	0	13
Разом днів:	99	83	45	39	45	54	365

30.11.• Учитель математики спостерігав за учнем Петром Спатилюбом протягом 175 навчальних днів. Виявилося, що частота спізнень Петра до школи становить 20 %. Крім того, учитель помітив, що частота отримання негативної оцінки Петром у дні спізнень становить 40 %. Знайдіть кількість негативних оцінок, які отримав Петро через спізнення.

30.12.• Яка ймовірність того, що, викликаючи учня до дошки у вашому класі, учитель викличе хлопчика?

30.13.• З множини {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} навмання вибирають одне число. Яка ймовірність того, що це число:

1) дорівнює 2;
2) дорівнює 5;
3) є непарним;
4) кратне 4;
5) не ділиться націло на 3;
6) кратне 11?

30.14.• У коробці було 17 карток, пронумерованих числами від 1 до 17. Із коробки навмання взяли одну картку. Яка ймовірність того, що на ній записано число:

1) 12;
2) парне;
3) кратне 3;
4) не кратне 5;
5) двоцифрове;
6) просте?

30.15.• У коробці лежать a синіх, b жовтих і c червоних кульок. Яка ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться: 1) жовтою; 2) синьою; 3) не червоною?

30.16.• У мішку Діда Мороза лежать n плюшевих ведмедиків, m цукерок і k мандаринів. Яка ймовірність того, що вибраний навмання подарунок виявиться: 1) ведмедиком; 2) їстівним; 3) не цукеркою?

30.17.• З множини {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} навмання спочатку вибирають парну цифру, а потім непарну. Яка ймовірність того, що ці цифри утворять число 27?

30.18.• З букв А, Б, В, Г, Ґ, Д послідовно навмання вибирають три різні букви. Яка ймовірність того, що ці букви, записані в порядку вибору, утворять слово «ДВА»?

30.19.• Зі слова «ЛАСОЩІ» послідовно навмання вибирають 4 різні букви. Яка ймовірність того, що, послідовно записавши вибрані чотири букви, складуть слово «САЛО»?

30.20.• Учень має підручники з геометрії за 7, 8, 9, 10 та 11 класи. Яка ймовірність того, що вони розставлені на його полиці в порядку зростання номера класу, якщо при останньому прибиранні він розставив книжки навмання?

30.21.•• На полиці лежать 12 зошитів, з яких 5 у клітинку. Яка ймовірність того, що вибрані навмання 2 зошити будуть у клітинку?

30.22.•• У скарбничці Андрія 40 монет різних країн, серед яких 6 українських. Андрій взяв навмання 3 монети. Яка ймовірність того, що всі ці монети будуть українськими?

30.23.•• На двох паралельних прямих площини позначено точки — 8 на одній прямій і 12 на іншій. З цих 20 точок навмання вибирають три. Яка ймовірність того, що три вибрані точки є вершинами трикутника?

30.24.•• На торговельному лотку лежать яблука — 20 жовтих і 9 червоних. Покупець придбав 3 яблука, які продавець вибрав навмання. Яка ймовірність того, що всі яблука покупця одного кольору?

30.25.•• У шухляді лежать олівці та ручки. Відомо, що олівців на 12 штук менше, ніж ручок. Скільки олівців лежить у шухляді, якщо ймовірність того, що вибраний навмання предмет:

1) є ручкою, дорівнює $\frac{5}{8}$; 2) є олівцем, дорівнює $\frac{1}{6}$?

30.26.•• Подарунковий комплект містить 12 зелених та декілька червоних надувних куль. Скільки червоних куль у комплекті, якщо ймовірність того, що вибрана навмання куля:

1) виявиться зеленою, дорівнює $\frac{3}{7}$;

2) виявиться червоною, дорівнює $\frac{2}{5}$?

30.27.•• Тридцять карток пронумеровано натуральними числами від 1 до 30. Навмання вибирають дві з них. Яка ймовірність того, що:

1) добуток номерів вибраних карток буде простим числом;
2) добуток номерів вибраних карток буде непарним числом;
3) сума номерів вибраних карток буде непарним числом;
4) номери вибраних карток будуть послідовними натуральними числами?

30.28.•• Сімнадцять карток пронумеровано натуральними числами від 7 до 21. Навмання вибирають дві з них. Яка ймовірність того, що сума номерів вибраних карток буде непарним числом?

30.29.•• Для шкільної лотереї підготовлено 100 білетів, з яких 9 виграшних. Учень вибрав навмання 7 білетів. Яка ймовірність того, що серед вибраних буде 2 виграшних білети та 5 невиграшних білетів?

30.30.•• У партії з 200 цеглин є 5 бракованих. Яка ймовірність того, що з 8 вибраних навмання цеглин цієї партії 2 будуть бракованими, а 6 — якісними?

30.31.•• На двох паралельних прямих площини позначено точки — 16 на одній прямій і 10 на іншій. З цих 26 точок навмання вибирають чотири. Яка ймовірність того, що ці чотири вибрані точки є вершинами чотирикутника?

30.32.•• Знайдіть ймовірність появи рівно 6 гербів при підкиданні 9 монет.

30.33.•• Знайдіть ймовірність того, що в серії з 10 підкидань монети герб перший раз з'явиться на четвертому підкиданні.

30.34.•• Що більш ймовірно при чотирьох підкиданнях грального кубика: поява принаймні однієї шістки чи відсутність шісток узагалі?

30.35.•• Дослід полягає в одночасному киданні чотирьох гральних кубиків. Знайдіть ймовірність того, що випадуть:
1) дві п'ятірки і дві трійки;
2) чотири різні цифри;
3) рівно три одиниці;
4) лише цифри, більші за четвірку.

30.36.•• Гральний кубик кидають тричі поспіль. Знайдіть ймовірність того, що:
1) випадуть одиниця, двійка і п'ятірка в довільному порядку;
2) не випаде жодної шістки;
3) випадуть лише трійки або двійки;
4) перша шістка випаде при другому підкиданні кубика.

30.37.•• На кожній з 10 тарілок фруктів лежать по одному яблуку, персику, апельсину, груші та сливі. З кожної тарілки навмання взяли по одному плоду. Яка ймовірність того, що серед узятих плодів не буде ні яблука, ні груші?

30.38.•• Кожне з 10 тестових запитань має 4 варіанти відповідей. Учень відповідає на тестові запитання навмання. Яка ймовірність того, що він дасть рівно 7 правильних відповідей?

30.39.•• Знайдіть ймовірність того, що жоден з 5 навмання вибраних людей не народився в неділю.

30.40.•• У ящику лежать 20 червоних, 10 жовтих і 5 зелених яблук. Навмання обирають 7 яблук. Яка ймовірність того, що серед вибраних яблук є 2 червоних, 4 жовтих і 1 зелене?

30.41.•• Для гри було підготовлено 24 картки — 12 штук із синього паперу, 8 із жовтого та 4 з червоного. Навмання вибирають 9 карток. Яка ймовірність того, що серед вибраних карток є 4 сині, 3 жовті та 2 червоні картки?

30.42.•• На складі магазину зберігають 100 пакетів борошна з написом 1 кг, серед яких 15 пакетів важать більше 1,02 кг, 12 пакетів — менше 0,98 кг, а вага решти пакетів становить від 0,98 кг до 1,02 кг. З цієї партії навмання вибирають 5 пакетів. Яка ймовірність того, що серед вибраних буде три пакети вагою більше 1,02 кг і два пакети вагою від 0,98 кг до 1,02 кг?

30.43.•• На двох паралельних прямих позначено точки — n на одній прямій і m на другій. Знайдіть ймовірність того, що чотири вибрані навмання точки є вершинами чотирикутника.

30.44.•• Пряма і коло не перетинаються. На колі позначено n червоних точок, а на прямій — m синіх точок. Відомо, що жодна пряма, яка проходить через дві червоні точки, не містить синіх точок. Знайдіть ймовірність того, що три вибрані навмання точки є вершинами трикутника.

30.45.•• На трьох паралельних прямих l_1, l_2, l_3 позначено точки — n точок на прямій l_1, m точок на l_2 і k точок на l_3. Серед даних точок навмання вибирають три точки. Знайдіть ймовірність того, що кожній з прямих l_1, l_2, l_3 належить по одній з вибраних точок.

30.46.•• Для підготовки до залікової роботи запропоновано 45 задач. Учень уміє розв'язувати тільки 35 задач. Робота складається з 5 завдань, вибраних випадковим чином, і вважається зарахованою, якщо правильно розв'язано принаймні 4 задачі. Яка ймовірність того, що учень складе залікову роботу?

30.47.•• У конверті дівчинки лежать 50 фотографій, серед яких є чотири однакові. Дівчинка збирається подарувати одну з цих чотирьох фотографій подружці. Для цього вона навмання дістає з конверта 8 фотографій. Яка ймовірність того, що серед них буде принаймні одна шукана фотографія?

30.48.•• Дослід полягає в підкиданні монети. Для статистичної оцінки ймовірності події A, яка полягає в тому, що випав герб, планується провести дослід 10 разів і обчислити частоту події A. Яка ймовірність того, що обчислена при цьому частота події A виявиться меншою від 0,3?

30.49.•• Дослід полягає в підкиданні 7 монет. Яка ймовірність того, що випаде не більше 2 гербів?

31. Статистичний аналіз даних

У 9 класі ви ознайомилися з елементами математичної статистики — науки про отримання, оброблення й аналіз даних, які характеризують масові явища.

У статистиці сукупність зібраних даних, на основі яких проводять дослідження, називають **вибіркою**. Фактично збирання даних — це певне випробування, яке проводять кілька разів.

Наприклад, для проведення ефективної рекламної кампанії деяка фірма вирішила скласти психологічний портрет свого типового клієнта. Для цього заплановано опитати деяку кількість навмання вибраних клієнтів фірми (випадковий вибір клієнта — це певне випробування).

У таких випадках говорять, що множина всіх клієнтів фірми утворює **генеральну сукупність**, а множина тих клієнтів, яких буде опитано, утворює вибірку.

Узагалі, множину всіх можливих результатів певного випробування в статистиці прийнято називати **генеральною сукупністю**. Співвідношення між генеральною сукупністю і вибіркою проілюстровано на рисунку 31.1.

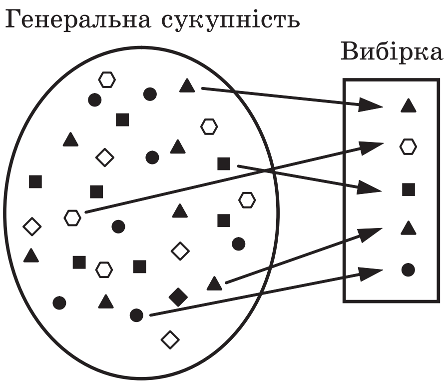


Рис. 31.1

Одна з головних задач статистики полягає в тому, щоб на основі аналізу даних вибірки зробити висновок про всю генеральну сукупність. Аналізуючи зібрані дані, виділяють один або кілька загальних показників, які характеризують найбільш важливі особливості генеральної сукупності. Одними з важливих показників вибірки є **середнє значення**, **медіана** та **мода**. Нагадаємо й уточнимо відповідні означення.

Нехай вибірка складається з числових даних x_1, x_2, ..., x_n. **Середнім значенням** цієї вибірки **(вибірковим середнім)** називають число $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

Наприклад, у таблиці подано результати виступів українських школярів на Міжнародних математичних олімпіадах протягом 2001–2010 рр. (команда учасників на Міжнародних математичних олімпіадах складається не більше ніж із 6 осіб).

Рік	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Кількість медалей	6	4	6	6	6	5	6	6	6	6

Для даної вибірки середнє значення дорівнює:

$$\overline{x} = \frac{6+4+6+6+6+5+6+6+6+6}{10} = \frac{57}{10} = 5{,}7.$$

Оскільки за рік можна вибороти не більше 6 медалей, то вибіркове середнє 5,7 свідчить про те, що команда України гідно виступає на цьому престижному форумі.

Зверніть увагу на те, що середнє значення вибірки визначають лише у випадку, коли зібраними даними є числа.

Розглянемо вибірку, що складається з таких даних, які можна порівнювати одне з одним. Якщо кількість даних непарна і їх упорядковано: $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n-1}$, то **медіаною** даної вибірки називають x_n, тобто те з даних, яке в переліку x_1, x_2, ..., x_{2n-1} розміщене посередині.

Наприклад, у багатьох університетах України запроваджено оцінювання знань студентів не за числовою шкалою, а за шкалою букв: A, B, C, D, E, F (A — найвища, F — найнижча оцінка). Нехай при опитуванні 9 студентів про результати складання ними останнього екзамену було отримано таку вибірку (послідовність оцінок):

$$F,\ F,\ D,\ D,\ C,\ C,\ C,\ B,\ A.$$

Бачимо, що посередині розміщена літера C. Отже, медіаною даної вибірки є оцінка «C».

Якщо вибірка складається з парної кількості даних: $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n}$, то **медіаною** даної вибірки називають будь-яке з даних x_n або x_{n+1}, тобто ті двоє даних, що розташовані посередині в переліку $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$.

Наприклад, якщо до 9 наведених вище оцінок студентів додати ще одну оцінку E, то отримаємо таку вибірку (послідовність оцінок):

$$F,\ F,\ E,\ D,\ D,\ C,\ C,\ C,\ B,\ A.$$

Бачимо, що посередині знаходяться літери D і C. Отже, медіаною даної вибірки є оцінки D і C.

Зверніть увагу на те, що в наведених прикладах знаходження медіани вибірки досліджувані дані не є числами.

Якщо досліджуваними даними є числа, то у випадку парної кількості даних $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n}$ **медіаною** вибірки допускається вважати і величину $\dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}$. Наприклад, якщо розглянути вибірку з чотирьох числових даних:

$$1,\ 2,\ 3,\ 7,$$

то число $\dfrac{2+3}{2} = 2{,}5$ можна вважати медіаною цієї вибірки.

Нехай вибірка складається з даних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. **Модою** даної вибірки називають те з даних, яке зустрічається в переліку $x_1, x_2, \ldots, x_n$ найчастіше. Якщо таких найчастіших даних декілька, то кожне з них є модою даної вибірки. Наприклад, якщо вибірка складається з п'яти різних даних: 1, 2, 3, 4, 5, то кожне з цих п'яти чисел є модою даної вибірки.

Звернемо увагу на те, що моду вибірки можна визначити для даних будь-якої природи, на відміну від даних, необхідних для визначення середнього значення (числові дані) або медіани (дані, які можна порівнювати одне з одним).

Розглянемо приклад. Нехай у виборах до шкільного парламенту беруть участь три партії: «За математику», «За сучасну музику» і «За красунь дівчат». Опитавши 30 навмання вибраних учнів, з'ясували, що партію «За математику» підтримує 7 осіб, «За сучасну музику» — 15 осіб, «За красунь дівчат» — 9 осіб. Це означає, що серед 30 отриманих даних, що утворюють вибірку, найбільшу підтримку має партія «За сучасну музику». Тому ця партія є модою даної вибірки.

Зауважимо, що в наведеному прикладі неможливо визначити ні середнє значення, ні медіану вибірки.

Незважаючи на те що описані вище узагальнюючі показники (середнє значення, медіана, мода) по-різному характеризують вибірку, часом їх недостатньо для того, щоб дати коректну оцінку всієї генеральної сукупності.

Нехай потрібно з'ясувати середній рівень заробітної плати в Україні. За інформацією одного зі статистичних досліджень відомо такі дані про заробітну плату в трьох регіонах України.

Регіон України	**Рівень заробітної плати населення у січні 2011 року**
Центральний регіон України	2 319 грн
Південно-східний регіон України	2 410 грн
Західний регіон України	1 934 грн

Якщо для трьох наведених даних $x_1 = 2319$, $x_2 = 2410$, $x_3 = 1934$ обчислити середнє значення, медіану і моду вибірки x_1, x_2, x_3, то отримаємо такі значення:

$$\text{Середнє значення } = \frac{2319+2410+1\,934}{3} = 2\,221.$$

$$\text{Медіана} = 2\,319.$$

$$\text{Мода} = 2\,319, \text{ або } 2\,410, \text{ або } 1\,934.$$

Насправді жодне з цих значень не відображає коректно або, як ще кажуть, адекватно середній рівень заробітної плати в Україні. Причина полягає в тому, що в різних регіонах живе і працює різна кількість людей. Так, у центральному регіоні України працює близько 7 млн українців, у південно-східному — 10 млн, а в західному — 5 млн. Це означає, що працівники центрального регіону заробили $7x_1$ млн грн, південно-східного — $10x_2$ млн грн, а західного — $5x_3$ млн грн. Отже, у січні 2011 року українці всього заробили $7x_1 + 10x_2 + 5x_3$ млн грн. Оскільки загальна кількість працюючого населення України складає близько $7 + 10 + 5 = 22$ млн людей, то середню заробітну плату в Україні можна оцінити так:

$$\frac{7x_1 + 10x_2 + 5x_3}{22} \approx 2273 \text{ грн.}$$

Величину $\frac{7x_1 + 10x_2 + 5x_3}{22}$ називають **середнім зваженим значенням** чисел x_1, x_2, x_3 з **ваговими коефіцієнтами** 7, 10 і 5 відповідно.

Узагалі, **середнім зваженим значенням** чисел x_1, x_2, ..., x_n з додатними ваговими коефіцієнтами m_1, m_2, ..., m_n називають число

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Якщо серед даних вибірки зустрічаються однакові, то для обчислення середнього значення вибірки зручно скористатися середнім зваженим значенням.

Наприклад, нехай вибірка складається зі 100 числових даних, серед яких число $x_1 = 2$ зустрічається 40 разів, число $x_2 = 3$ — 50 разів, а число $x_3 = 4$ — 10 разів. Тоді середнє значення даної вибірки зі 100 чисел дорівнюватиме середньому зваженому значенню чисел $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ та $x_3 = 4$ з ваговими коефіцієнтами $m_1 = 40$, $m_2 = 50$, $m_3 = 10$. Справді,

$$\bar{x} = \frac{\underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{40 \text{ доданків}} + \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{50 \text{ доданків}} + \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{10 \text{ доданків}}}{100} =$$

$$= \frac{40 \cdot 2 + 50 \cdot 3 + 10 \cdot 4}{40 + 50 + 10} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

ПРИКЛАД 1 **У деякому місті для визначення величини витрат однієї людини на лікарські засоби було проведено опитування 1000 осіб, серед яких 400 були молодші від 20 років, а 600 — старші за 20 років. З'ясувалося, що люди, молодші від 20 років, у середньому витрачають на місяць на лікарські засоби 22 грн, а люди, старші за 20 років, — 47 грн. Що в даному статистичному дослідженні є генеральною сукупністю? Що є вибіркою? Оцініть рівень витрат на лікарські засоби на місяць для однієї людини.**

Розв'язання. У даному статистичному дослідженні множина всіх мешканців міста є генеральною сукупністю, а 1000 опитаних осіб утворюють вибірку.

Знайдемо середнє значення цієї вибірки.

$$\bar{x} = \frac{\underbrace{22+22+\ldots+22}_{400 \text{ доданків}} + \underbrace{47+47+47+\ldots+47}_{600 \text{ доданків}}}{1000} = 37.$$

Те саме середнє значення вибірки можна обчислити як середнє зважене значення чисел 22 і 47 з ваговими коефіцієнтами 400 і 600 відповідно. Маємо:

$$\bar{x} = \frac{400 \cdot 22 + 600 \cdot 47}{1000} = 37 \text{ грн.}$$

Число 37 грн показує, що серед опитаних людей середній рівень витрат складає 37 грн на місяць. ●

Середнє зважене значення у статистиці часто використовують тоді, коли зібрані дані не є рівноцінними, тобто деякі дані мають більшу важливість (значущість), а деякі — меншу.

Наприклад, якщо в умові прикладу 1 додатково відомо, що частка людей віком до 20 років складає 24 % усіх мешканців цього міста, то відповідь на поставлене в задачі запитання слід змінити.

Отримані 1000 даних не є рівноцінними. Річ у тім, що співвідношення осіб віком до 20 років і після 20 років у нашій вибірці не відповідає їх співвідношенню в цьому місті. Тому для розрахунків потрібно дібрати вагові коефіцієнти таким чином, щоб вони відображали реальний розподіл населення міста за цими віковими групами.

Оскільки в цьому місті частки людей віком до 20 років і після 20 років складають 24 % і 76 % відповідно, то треба обчислити середнє зважене значення чисел 22 грн і 47 грн з ваговими коефіцієнтами 24 і 76. Маємо:

$$\bar{y} = \frac{24 \cdot 22 + 76 \cdot 47}{100} = 41 \text{ грн.}$$

Величину $y = 41$ грн можна вважати оцінкою середнього рівня витрат на лікарські засоби для однієї людини на місяць у цьому місті.

Вправи

31.1.° Запишіть прізвища учнів, яких було опитано вчителем на вашому останньому уроці під час перевірки домашнього завдання. Що є генеральною сукупністю і вибіркою в статистичному дослідженні вчителя з перевірки домашнього завдання?

31.2.° Результатом роботи комп'ютерної програми, що моделює статистичне дослідження, є деяке ціле число в діапазоні від −128 до 128. У результаті п'яти послідовних запусків програма видала такі результати: 62, −15, 31, 103, −22. Що в даному статистичному дослідженні є генеральною сукупністю? Що є вибіркою?

31.3.° Учнів опитали про їх улюблений предмет у школі. Які статистичні показники (середнє значення, середнє зважене значення, медіана, мода) можна визначити для зібраних даних?

31.4.° На замовлення підприємств легкої промисловості проведено дослідження, результатами якого є розміри одягу в міжнародному форматі (символи: XS, S, M, L, XL, XXL, XXXL). Які статистичні показники (середнє значення, середнє зважене значення, медіана, мода) можна визначити для зібраних даних?

31.5.° Користуючись таблицею середніх температур повітря в січні в деяких містах світу, обчисліть середнє значення, медіану і моду даної вибірки.

Місто	Температура, °C	Місто	Температура, °C
Амстердам	3	Москва	–10
Афіни	8	Найробі	27
Буенос-Айрес	23	Нью-Йорк	0
Гонконг	24	Ріо-де-Жанейро	30
Єрусалим	8	Рим	8
Київ	–6	Сінгапур	27
Монреаль	–11	Токіо	3

31.6.° Користуючись таблицею урожайності насіння соняшнику в Україні, обчисліть середнє значення, медіану і моду даної вибірки.

Рік	Урожайність, ц/га	Рік	Урожайність, ц/га
1991	15	2003	11
1993	13	2004	9
1995	14	2005	13
1997	12	2006	14
1999	10	2007	12
2001	9	2008	15
2002	12	2009	15

31.7.° У чемпіонаті України з футболу 2009–2010 рр. команда «Шахтар» зіграла 30 матчів, серед яких один раз забила 5 голів, 3 рази — 4 голи, 6 разів — 3 голи, 9 разів — 2 голи, 9 разів — один гол і у 2 матчах не забила жодного голу. Обчисліть, скільки в середньому команда «Шахтар» забивала м'ячів в одному матчі.

31.8.° Студент протягом навчання в інституті отримав 45 оцінок, серед яких 7 п'ятірок, 22 четвірки та 16 трійок. Обчисліть середній бал студента.

31.9.• На учнівських олімпіадах, визначаючи рейтинг команд, індивідуальні результати учасників оцінюються таким чином: диплом першого ступеня приносить команді 5 балів, диплом другого ступеня — 3 бали, диплом третього ступеня — 1 бал, диплом учасника олімпіади — 0 балів. У таблиці подано дані про результати деякої олімпіади. Знайдіть моду, медіану і середнє значення командних балів, набраних учасниками олімпіади.

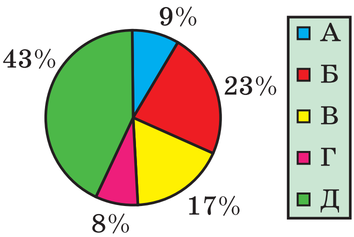
Кількість балів, які учасник приніс команді	Кількість учасників
5	14
3	29
1	46
0	88

31.10.• На незалежному оцінюванні школярів з математики 2010 року було запропоновано тестове завдання: «Розв'яжіть нерівність $10 - 3x > 4$.

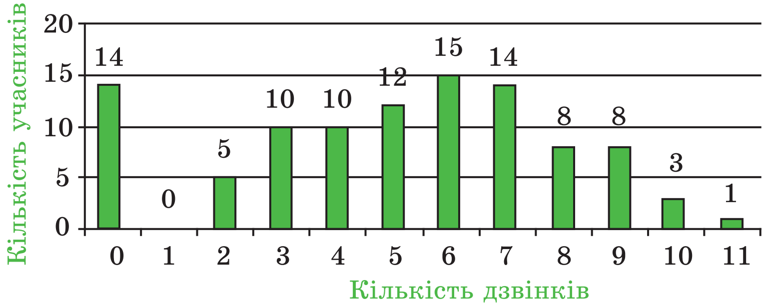
А	Б	В	Г	Д
$(-2; +\infty)$	$(2; +\infty)$	$(-3; +\infty)$	$(-\infty; -2)$	$(-\infty; 2)$

»

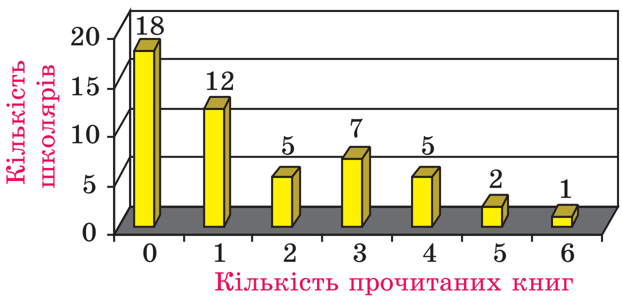
На діаграмі наведено дані про кількість учнів, які розв'язували це завдання. Знайдіть моду відповідей учнів. За правильну відповідь нараховувався 1 бал, а за неправильну відповідь — 0 балів. Обчисліть середнє значення і медіану кількості балів, яку набрали учасники тестування за це завдання.



31.11.° Телефонна компанія хоче дізнатися про кількість телефонних дзвінків, які робить людина протягом доби. Дані щодо 100 людей подано на діаграмі. Обчисліть середнє значення, медіану і моду цієї вибірки.



31.12.° На діаграмі наведено дані про кількість книжок, які прочитали протягом місяця 50 опитаних школярів. Обчисліть середнє значення, медіану і моду даної вибірки.



31.13.° У деякому ліцеї одинадцятикласники, які навчаються в класах фізичного, економічного та філологічного профілів, написали контрольну роботу з математики за єдиними текстами. Виявилося, що середній бал учнів фізичного профілю дорівнює 8,9, економічного — 7,7, а філологічного — 7,1.

1) Оцініть середній бал учнів цієї школи за контрольну роботу з математики.
2) Як потрібно змінити відповідь, якщо додатково відомо, що в класі фізичного профілю навчаються 23 учні,

економічного— 25 учнів, а у двох класах філологічного профілю — 46 учнів?

31.14.• У школі опитали деяких хлопців і дівчат про час, який вони витрачають на допомогу батькам по домашньому господарству. Виявилося, що хлопці в середньому витрачають 1,1 год на добу, а дівчата — 1,7 год на добу.

1) Користуючись цими даними, оцініть середній час, який витрачає учень школи на допомогу батькам на добу.
2) Як потрібно змінити відповідь, якщо додатково відомо, що в школі навчаються 400 дівчат і 560 хлопців?

31.15.• У таблиці наведено дані про частоту випадіння герба при підкиданні монети в дослідах, проведених деякими вченими.

Дослідник	Частота випадіння герба
Жорж Бюффон	0,5069
Огастес Де Морган	0,5005
Вільям Джевонс	0,5068
Всеволод Романовський	0,4923
Карл Пірсон	0,5005
Вільям Феллер	0,4979

1) На основі цих даних оцініть ймовірність випадіння герба при підкиданні монети.
2) Якою буде відповідь, якщо додатково врахувати дані про кількість кидків монети в цих дослідах?

Дослідник	Кількість кидків монети
Жорж Бюффон	4040
Огастес Де Морган	4092
Вільям Джевонс	20 480
Всеволод Романовський	80 640
Карл Пірсон	24 000
Вільям Феллер	10 000

Відповідь дайте з точністю до сотих процента.

31.16.° У таблиці наведено розміри процентних ставок деяких банків України за строковими депозитами населення в національній валюті та суми вкладів у цих банках.

Номер банку у вибірці	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Розмір процентної ставки, %	11	17,2	11,3	14,5	14	14	11,9	15,8	12	15,5
Сума вкладів, млн грн	2242	783	42	4793	2222	239	296	1204	2768	5564

1) Оцініть середнє значення вибірки розміру процентної ставки банків.
2) Який середній прибуток (у процентах) отримують вкладники цих банків від вкладів у національній валюті?

Відповідь дайте з точністю до сотих процента.

31.17.° У третьому стовпці таблиці наведено дані Міжнародного валютного фонду щодо внутрішнього валового продукту (ВВП) деяких країн у 2010 році на душу населення у грошовому еквіваленті.

1) Користуючись даними лише третього стовпця, оцініть середній рівень ВВП у 2010 році на душу населення у світі.
2) Як потрібно змінити відповідь, якщо врахувати інформацію про кількість населення відповідних країн (четвертий стовпець таблиці)? Відповідь дайте з точністю до сотень доларів США.

№	Країна	ВВП на душу населення, тис. доларів США	Кількість населення, млн
1	Гамбія	2,0	1,8
2	Греція	28,8	11,3

№	Країна	ВВП на душу населення, тис. доларів США	Кількість населення, млн
3	Індонезія	4,4	237,6
4	Китай	7,5	1 341,0
5	Коста-Рика	10,7	4,6
6	Латвія	14,3	2,2
7	Люксембург	80,3	0,5
8	Росія	15,8	141,9
9	США	47,1	311,0
10	Україна	6,7	45,8

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 4

1. У коробці лежать 15 кульок: 10 синіх та 5 зелених. Яка ймовірність того, що навмання взята з коробки кулька виявиться жовтою?

А) 1; Б) 0,5; В) 0; Г) −1.

2. У якому випадку подію A називають достовірною?

А) $p(A) = 0$; Б) $p(A) > 0$; В) $p(A) > 0{,}99$; Г) $p(A) = 1$.

3. Ймовірність купити браковану пару чобіт деякої відомої фірми складає 0,023. Скільки бракованих пар взуття гарантовано містить партія з 1000 пар чобіт цієї фірми?

А) менше 23; В) рівно 23;
Б) більше 23; Г) відповідь дати неможливо.

4. Під час проведення екзітполу було опитано 15 тисяч виборців, серед яких 600 проголосували «Проти всіх». Оцініть ймовірність події, що виборець голосує «Проти всіх».

А) 4 %; Б) 0,04 %; В) 25 %; Г) 0,25 %.

5. Набираючи номер телефону, абонент забув другу цифру номеру. Яка ймовірність того, що він з першої спроби набере правильний номер?

А) 0,01; Б) 0,1; В) 0,5; Г) 1.

6. У класі навчаються 18 дівчаток і 12 хлопців. Навмання вибирають одного учня для участі в шкільних зборах. Яка ймовірність того, що буде вибрано хлопчика?

А) $\frac{2}{3}$; Б) $\frac{1}{2}$; В) $\frac{3}{5}$; Г) $\frac{2}{5}$.

7. Футболіст з ймовірністю 0,95 влучає у ворота при виконанні 11-метрового штрафного удару. Яка ймовірність того, що при виконанні такого удару футболіст не влучить у ворота?

А) 0; Б) 0,05; В) $\frac{1}{0{,}95}$; Г) $(0{,}95)^2$.

8. Картки з числами 1, 3, 5, 7 навмання послідовно викладають у ряд. Яка ймовірність того, що останньою покладуть картку з числом 5?

А) $\frac{1}{24}$; Б) $\frac{1}{12}$; В) $\frac{1}{6}$; Г) $\frac{1}{4}$.

9. Яка ймовірність того, що при підкиданні двох гральних кубиків на одному з них випаде одиниця, а на іншому — трійка?

А) $\frac{2}{6}$; Б) $\frac{1}{6}$; В) $\frac{2}{36}$; Г) $\frac{1}{36}$.

10. Чому дорівнює медіана сукупності даних: 2, 2, 3, 4, 5, 6, 13?

А) 5; Б) 4; В) 3; Г) 2.

11. При підкиданні монети 20 раз поспіль випав «герб». Яка ймовірність того, що при наступному підкиданні знову випаде «герб»?

А) 0,5; Б) $\frac{1}{21}$; В) $\frac{1}{2^{21}}$; Г) 0.

12. За даними Всеукраїнського перепису населення 2001 року віковий склад населення характеризувався такими даними:

Вік	Кількість постійного населення, тис. осіб
0–9	4533,3
10–19	7308,1
20–29	6891,6
30–39	6621,2
40–49	7298,7
50–59	5245,3
60–69	5522,2
70–79	3740,0
80 і старші	1060,8

Яка вікова група визначала моду вікового складу населення України у 2001 році?

А) 0–9; Б) 10–19; В) 40–49; Г) 80 і старші.

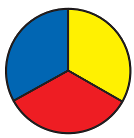
13. Одночасно підкинули три монети. Яка ймовірність того, що рівно на двох із цих монет випаде герб?

А) $\frac{2}{3}$; Б) $\frac{1}{8}$; В) $\frac{3}{8}$; Г) $\frac{1}{3}$.

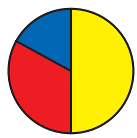
14. У сукупних витратах деякої української родини 33 % займають витрати на продукти харчування, 25 % — комунальні послуги; 42 % — решта витрат. Яка з наведених кругових діаграм відповідає структурі витрат цієї родини?

А)

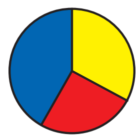
Б)



В)



Г)



15. У ящику лежать яблука трьох сортів: 20 жовтих, 10 зелених і 30 червоних. Яку найменшу кількість яблук потрібно взяти з ящика навмання, щоб гарантовано дістати принаймні одне жовте і два червоних яблука?

А) 3; Б) 13; В) 32; Г) 41.

16. Гральний кубик кидають два рази. Яка ймовірність того, що випадуть числа, сума яких дорівнює 8?

А) $\frac{1}{36}$; Б) $\frac{3}{36}$; В) $\frac{5}{36}$; Г) $\frac{7}{36}$.

17. Монету підкидають доти, доки не випаде герб. Знайдіть таке натуральне значення k, що ймовірність підкинути монету k разів дорівнює $\frac{1}{8}$.

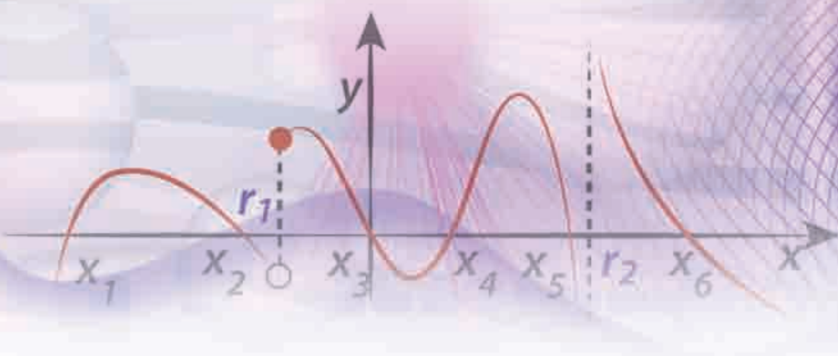
А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

18. У ящику лежать 7 червоних, 2 синіх і 3 зелених кулі. Навмання обирають 6 куль. Яка ймовірність того, що серед вибраних будуть 4 червоні та 2 зелених кулі?

А) $\frac{5}{44}$; Б) $\frac{3}{55}$; В) $\frac{3}{77}$; Г) $\frac{1}{132}$.

§5

Рівняння і нерівності. Узагальнення та систематизація



32. Про появу сторонніх коренів і втрату розв'язків рівнянь

Ви знаєте, що далеко не кожне перетворення рівняння зберігає незмінною множину його коренів. В одному випадку ця множина може звузитися, тобто корені будуть втрачені, в іншому — розширитися, тобто з'являться сторонні корені.

Наведемо кілька прикладів.

- При переході від рівняння $\log_2 (x-1)^2 = 0$ до рівняння $2\log_2 (x-1) = 0$ втрачається корінь $x = 0$.
- Піднесення обох частин рівняння $\sqrt{x} = -x$ до квадрата призводить до появи стороннього кореня $x = 1$.
- Заміняючи рівняння $\log_x 4 = 2$ рівнянням $x^2 = 4$, отримуємо сторонній корінь $x = -2$.

Метод розв'язування рівняння, при якому дане рівняння замінюють на рівняння-наслідок, а потім отримані корені піддають перевірці, називають **методом наслідків.** Його застосовують тоді, коли виконати перевірку нескладно. Проте так буває не завжди. Наприклад, число $\frac{-2+6\sqrt{11}}{7}$ є коренем рівняння $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}$, але щоб у цьому переконатися, потрібно провести значну обчислювальну роботу.

Для подібних ситуацій можливий інший шлях розв'язування — **метод рівносильних перетворень.** Із цим методом ви ознайомилися в 10 класі.

Наголосимо, що, застосовуючи як метод наслідків, так і метод рівносильних перетворень, важливо знати причини втрати коренів і появи сторонніх коренів. Розглянемо деякі з цих причин.

Зміна області визначення рівняння

Поза областю визначення рівняння коренів немає (рис. 32.1). Тому перетворення рівняння, при якому розширюється область його визначення, може призвести до появи сторонніх коренів.

Рис. 32.1

Наприклад, областю визначення рівняння $\log_x 4 = 2$ є множина $(0; 1) \cup (1; +\infty)$. Користуючись означенням логарифма, отримуємо рівняння $x^2 = 4$, областю визначення якого є множина $\mathbb{R}$. Розширення області визначення початкового рівняння призвело до появи стороннього кореня $x = -2$.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} = \cos^2 x - \sin 2x.$$

Розв'язання. Якщо дріб у лівій частині даного рівняння скоротити на $(\sin x + \cos x)$, то отримаємо рівняння $\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = \cos^2 x - \sin 2x$. При такому перетворенні область визначення початкового рівняння розширюється на множину чисел, які є коренями рівняння $\sin x + \cos x = 0$. Тому насправді дане в умові рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = \cos^2 x - \sin 2x, \\ \sin x + \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Знайдемо корені рівняння системи. Маємо:

$$\sin^2 x - \sin x \cos x + \sin 2x = 0;$$
$$\sin^2 x - \sin x \cos x + 2 \sin x \cos x = 0;$$
$$\sin x (\sin x + \cos x) = 0.$$

Оскільки $\sin x + \cos x \neq 0$, то отримуємо $\sin x = 0$. Звідси $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Залишилося зауважити, що при $x = \pi n$ значення виразу $\sin x + \cos x$ відмінне від нуля.

Відповідь: πn, $n \in \mathbb{Z}$.

Якщо розширення області визначення рівняння може призвести до появи сторонніх коренів, то її звуження є можливою причиною втрати коренів.

Наприклад, областю визначення рівняння $\log_2 (x-1)^2 = 0$ є множина $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, а областю визначення рівняння $2 \log_2 (x-1) = 0$ є множина $(1; +\infty)$. У множині $(-\infty; 1)$ міститься корінь $x = 0$ першого рівняння. Тому під час переходу від рівняння $\log_2 (x-1)^2 = 0$ до рівняння $2 \log_2 (x-1) = 0$ цей корінь втрачено.

Часто причиною зміни множини коренів рівняння є застосування рівностей, права і ліва частини яких мають різні області визначення.

Наведемо приклади таких рівностей:

- $x = \dfrac{xy}{y}$;
- $x = \left(\sqrt{x}\right)^2$;
- $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$;
- $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$;
- $\sin 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$;
- $\log_a x^2 = 2 \log_a x$.

У кожній з цих рівностей область визначення виразу, який стоїть у правій частині, є підмножиною області визначення виразу, який стоїть у лівій частині. Тому застосування цих рівностей зліва направо може призвести до втрати коренів, а справа наліво — до появи сторонніх коренів.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{(x-1)^2 (x-3)} = x - 1$.

Розв'язання. Областю визначення даного рівняння є множина $\{1\} \cup [3; +\infty)$. Очевидно, число 1 є коренем даного рівняння.

Проте застосування формули $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ призводить до рівняння

$$|x-1| \sqrt{x-3} = x - 1,$$

область визначення якого — множина $[3; +\infty)$. Тому число 1 не є коренем отриманого рівняння, тобто такий перехід веде до втрати цього кореня.

Розв'яжемо дане рівняння методом рівносильних переходів.

Дане в умові рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}(x-1)^2(x-3)=(x-1)^2,\\ x\geqslant 1.\end{cases}$$

Звідси $\begin{cases}(x-1)^2(x-4)=0,\\ x\geqslant 1;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=4.\end{array}\right.$

Відповідь: 1; 4.

Множення обох частин рівняння на вираз, який містить змінну

Інколи буває доцільно помножити обидві частини рівняння на деякий вираз. Розглянемо наслідки такого перетворення.

Перейдемо від рівняння

$$f(x) = g(x)$$

до рівняння

$$f(x)\,\varphi(x) = g(x)\,\varphi(x).$$

При такому переході множина коренів рівняння може змінитися під впливом двох факторів: області визначення функції φ і множини коренів рівняння $\varphi(x) = 0$.

Наприклад, якщо обидві частини рівняння $x^2 = 4$ помножити на вираз $\sqrt{x}+1$ і перейти до рівняння $x^2\left(\sqrt{x}+1\right)=4\left(\sqrt{x}+1\right)$, то тим самим втрачаємо корінь -2. Якщо ж обидві частини цього рівняння помножити на $\sqrt{x}$, то втрачаємо корінь -2 та одночасно отримуємо сторонній корінь 0.

Отже, якщо при розв'язуванні рівняння виникла потреба помножити обидві його частини на вираз $\varphi(x)$, то слід ураховувати як область визначення цього виразу, так і множину коренів рівняння $\varphi(x) = 0$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння

$$\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x.$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини даного рівняння на вираз $\sqrt{1+x}-1$. Оскільки $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)=x$, то отримаємо:

$$x\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x\left(\sqrt{1+x}-1\right). \qquad (1)$$

Це перетворення не змінює області визначення початкового рівняння. Поява ж сторонніх коренів можлива за рахунок коренів рівняння $\sqrt{1+x}-1=0$. Отже, отримане рівняння (1) — наслідок рівняння, даного в умові.

Рівняння (1) рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ \sqrt{1+x}+2x-5=\sqrt{1+x}-1. \end{array}\right.$$

Розв'яжемо друге рівняння сукупності. Його наслідком буде рівняння $2x - 5 = -1$. Звідси $x = 2$.

Залишилося виконати перевірку. Легко переконатися, що число 2 є коренем даного в умові рівняння, а число 0 — ні.

Відповідь: 2.

Перехід від рівняння $f(x) = g(x)$ до рівняння $\varphi(f(x)) = \varphi(g(x))$

Чому рівняння

$$x = 2x - 1 \quad \text{і} \quad 2^x = 2^{2x-1} \qquad (2)$$

є рівносильними, а рівняння

$$x = 2x - 1 \quad \text{і} \quad \sin x = \sin(2x - 1) \qquad (3)$$

не є рівносильними?

Справа в тому, що властивості функції $y = 2^t$ відрізняються від властивостей функції $y=\sin t$.

Якщо визначена на $\mathbb{R}$ функція $y = \varphi(t)$ є оборотною, то рівність $t_1 = t_2$ справджується тоді і тільки тоді, коли $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Тому в цьому разі рівняння $f(x) = g(x)$ і $\varphi(f(x)) = \varphi(g(x))$ є рівносильними.

Коли ж визначена на $\mathbb{R}$ функція $y = \varphi(t)$ не є оборотною, то з рівності $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ не обов'язково випливає, що $t_1 = t_2$. Тому рівняння $\varphi(f(x)) = \varphi(g(x))$ є наслідком рівняння $f(x) = g(x)$.

Так, рівняння (2) є рівносильними, тому що функція $\varphi(t) = 2^t$ є оборотною. Оскільки функція $\varphi(t) = \sin t$ не є оборотною, то рівняння (3) не є рівносильними.

Ви знаєте, що піднесення обох частин рівняння до парного степеня призводить до рівняння-наслідку, а піднесення до непарного степеня — до рівносильного рівняння.

Це пов'язане з тим, що функція $y = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, не є оборотною, а функція $y = x^{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, — оборотна.

Функція $y = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, є оборотною на множині $[0; +\infty)$. У 10 класі ви користувалися цим фактом у вигляді такої теореми.

Теорема 32.1. ***Якщо для будь-якого $x \in M$ виконуються нерівності $f(x) \geqslant 0$ і $g(x) \geqslant 0$, то рівняння $f(x) = g(x)$ і $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, рівносильні на множині M.***

Цю теорему ви використовували при розв'язуванні ірраціональних рівнянь.

Розглянемо приклад, у якому поява стороннього кореня пов'язана з необоротністю функції $y = \sin t$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння

$$\arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \arccos(5x - 2).$$

Розв'язання. Оскільки визначена на $\mathbb{R}$ функція $y = \sin t$ не є оборотною, то рівняння $\sin\left(\arcsin\left(x\sqrt{3}\right)\right) = \sin(\arccos(5x-2))$ є наслідком даного. Тому розв'язання рівняння має завершитися перевіркою коренів. Отже, можна не боятися далі переходити до нових рівнянь-наслідків.

Нагадаємо, що мають місце рівності $\sin(\arcsin a) = a$ і $\sin(\arccos a) = \sqrt{1-a^2}$. Тому можна записати:

$$x\sqrt{3} = \sqrt{1-(5x-2)^2}.$$

Звідси $3x^2 = 1 - (5x - 2)^2$. Далі маємо:

$$28x^2 - 20x + 3 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}, \\ x = \dfrac{3}{14}. \end{array}\right.$$

Перевіримо отримані корені.

При $x = \frac{1}{2}$ маємо:

$$\arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3};$$

$$\arccos(5x - 2) = \arccos\left(\frac{5}{2} - 2\right) = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Отже, число $\frac{1}{2}$ є коренем початкового рівняння.

При $x = \frac{3}{14}$ маємо:

$$\arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \arcsin\frac{3\sqrt{3}}{14} < \frac{\pi}{2};$$

$$\arccos(5x - 2) = \arccos\left(\frac{15}{14} - 2\right) = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right) > \frac{\pi}{2}.$$

Отже, число $\frac{3}{14}$ не є коренем початкового рівняння.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Вправи

32.1.° Чи є рівносильними рівняння:

1) $x - 5 = 0$ і $x(x - 5) = 0$;

2) $\frac{6}{x} = 0$ і $x^2 = -4$;

3) $x + 1 = 1 + x$ і $\frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$;

4) $x^{100} = 1$ і $x^{1000} = 1$;

5) $\frac{x}{x} = 1$ і $x = x$;

6) $\frac{x^2-1}{x+1} = 0$ і $x - 1 = 0$;

7) $\frac{x^2-9}{x+2}=0$ і $x^2 - 9 = 0$;

8) $\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = 2x+5$ і $x + 2 = 2x + 5$;

9) $\sqrt{(x-1)(x-3)}=0$ і $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-3}=0$;

10) $\sin x = 2$ і $2^x = -1$;

11) $\sin x = 0$ і $\cos x = 1$;

12) $\cos x = 0$ і $\sin^2 x = 1$;

13) $\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=-1$ і $\cos 2x = -1$;

14) $\log_3 x^2 = 2$ і $\log_3 x = 1$;

15) $\log_5 (x^2 - 1) = \log_5 (x - 1)$ і $\log_5 (x + 1) = 0$;

16) $\frac{\log_x (x+1)}{\log_x 2}=1$ і $\log_2 (x + 1) = 1$?

32.2.° Чи є рівносильними рівняння:

1) $x^2 = x$ і $x = 1$;

2) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{2}=0$ і $4x^2 - 1 = 0$;

3) $x^2 + 1 = 0$ і $\frac{3}{x-1}=0$;

4) $\frac{x+1}{x+1}=1$ і $\frac{x^2+1}{x^2+1}=1$;

5) $\frac{x+1}{x+1}=0$ і $\frac{x^2-1}{x^2-1}=0$;

6) $\cos x = -1{,}2$ і $e^x = 0$;

7) $\cos x = 0$ і $\sin x = 1$;

8) $\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=0$ і $\sin 2x = 0$;

9) $\sqrt{x^2(x-1)}=0$ і $|x|\sqrt{x-1}=0$;

10) $\log_{x^2} x^2 = 1$ і $\log_x x = 1$?

32.3.° Чи буде в результаті даного перетворення отримано рівняння, рівносильне даному:

1) у рівнянні $3(2x - 1) - 5(4x + 2) = 1$ розкрити дужки і звести подібні доданки;
2) у рівнянні $x^2 + \frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-7} = 49$ різницю $\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-7}$ замінити на нуль;
3) у рівнянні $\frac{x^2-1}{x-1} + 3x - 5 = 0$ скоротити дріб;
4) обидві частини рівняння $x^3 = x$ поділити на x;
5) обидві частини рівняння $(x + 1)(x^2 + 4) = x^2 + 4$ поділити на $x^2 + 4$;
6) обидві частини рівняння $\frac{x^2}{x} = 2$ помножити на x;
7) обидві частини рівняння $2x + 1 = 5$ помножити на $x + 1$?

32.4.° Яке з двох рівнянь є наслідком іншого:

1) $x^2 = x$ і $x = 1$;
2) $\frac{x}{x} = 1$ і $0x = 0$;
3) $x^3 = 1$ і $x^2 = 1$;
4) $|x| = 1$ і $x^3 = 1$;
5) $\frac{x^2}{x-6} = \frac{36}{x-6}$ і $x^2 = 36$;
6) $x^2 = 4$ і $x^2 - \frac{1}{x+2} = 4 - \frac{1}{x+2}$;
7) $\frac{x^2-1}{x+1} = 0$ і $x^2 - 1 = 0$;
8) $\sqrt{x^2-2} = \sqrt{3x}$ і $x^2 - 2 = 3x$;
9) $\sqrt{x^2(x-1)} = x$ і $|x|\sqrt{x-1} = x$;
10) $\sqrt{x+3} = x$ і $x + 3 = x^2$;
11) $\sin x = 3$ і $\log_2 x = 1$;
12) $\lg(x^2 - 1) = \lg(x - 1)^2$ і $x^2 - 1 = (x - 1)^2$;

13) $\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^2\,x}=0$ і $\mathrm{tg}\,2x = 0$;

14) $\frac{1}{\log_x 2}=0$ і $\log_2 x = 0$?

32.5.° Яке з двох рівнянь є наслідком іншого:

1) $\frac{x^2}{x}=1$ і $x^2 = x$;

2) $(x + 1)^2 = 1$ і $x^2 + 1^2 = 1$;

3) $\frac{x^2}{x+8}=\frac{64}{x+8}$ і $x^2 = 64$;

4) $x^2+\frac{1}{x+3}=9+\frac{1}{x+3}$ і $x^2 = 9$;

5) $\sqrt{x^2-x-1}=\sqrt{5x}$ і $x^2 - x - 1 = 5x$;

6) $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{x+2}$ і $\sqrt{x-2}\,\sqrt{x+2}=\sqrt{x+2}$;

7) $\sqrt{x+7}=-x$ і $x + 7 = x^2$;

8) $\cos x = -2$ і $e^{x^2-x-11}=1$;

9) $\log_3 |x + 2| = 1$ і $\log_x |x + 2| \cdot \log_3 x = 1$?

32.6.• Як може змінитися (розширитися чи звузитися) множина коренів заданого рівняння, якщо:

1) рівняння $(|x| + 3)\,f(x) = 2|x| + 6$ замінити на рівняння $f(x) = 2$;

2) рівняння $(\mathrm{tg}^2\,x + 1)\,f(x) = \mathrm{tg}^2\,x + 1$ замінити на рівняння $f(x) = 1$;

3) рівняння $\frac{f(x)}{x^2+1}=0$ замінити на рівняння $f(x) = 0$;

4) рівняння $\frac{f(x)}{\lg^2 x+1}=0$ замінити на рівняння $f(x) = 0$;

5) рівняння $(x + 1)\,f(x) = x + 1$ замінити на рівняння $f(x) = 1$;

6) рівняння $(\sqrt{x}-1)\,f(x)=\sqrt{x}-1$ замінити на рівняння $f(x) = 1$;

7) рівняння $\frac{f(x)}{x+1}=\frac{g(x)}{x+1}$ замінити на рівняння $f(x) = g(x)$;

8) рівняння $f(x) = g(x)$ замінити на рівняння
$$(x + 1) f(x) = (x + 1) g(x);$$

9) рівняння $\log_2 f(x) = 0$ замінити на рівняння $f(x) = 1$;

10) рівняння $\log_x f(x) = 0$ замінити на рівняння $f(x) = 1$?

32.7.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+5}{x^2-5x}-\frac{x-5}{2x^2+10x}=\frac{x+25}{2x^2-50}$;

2) $\frac{9x+12}{x^3-64}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x^2+4x+16}$.

32.8.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4y+24}{5y^2-45}+\frac{y+3}{5y^2-15y}=\frac{y-3}{y^2+3y}$;

2) $\frac{y+2}{8y^3+1}-\frac{1}{4y+2}=\frac{y+3}{8y^2-4y+2}$.

32.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2+\left(\sqrt{x-2}\right)^2-5=0$;

2) $2x^2+9\left(\sqrt{x+1}\right)^2-27=0$.

32.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-\left(\sqrt{x+3}\right)^2-8=0$;

2) $x^2-4\left(\sqrt{x+2}\right)^2-13=0$.

32.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\sin 2x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=0$;

2) $\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$;

3) $\frac{2\sin^2 x+3\sin x}{1-\cos x}=0$.

32.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\sin 2x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}=0$;

2) $\frac{\sin 2x}{1-\sin x}=2\cos x$.

32.13.•• Розв'яжіть рівняння
$$\sqrt{16-9x^2}\,(3\sin 2\pi x+8\sin \pi x)=0.$$

32.14.•• Розв'яжіть рівняння
$$\sqrt{25-4x^2}\left(\sin \pi x+3\cos\frac{\pi x}{2}\right)=0.$$

32.15.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x^2-x+4}+\sqrt{2x^2-7x+10}=3x-3$;

2) $\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+10}-4\right)=x$.

32.16.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-x+1}=4x-3$;

2) $\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+x^2+x-7\right)=x$.

32.17.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{1+\cos x+\sin x}{\cos x}=0$;

2) $\dfrac{\cos x+\cos\frac{3x}{2}-2}{\sin\frac{x}{8}}=0$.

32.18.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{\cos 3x-1}=0$;

2) $\dfrac{\cos x+\cos 3x+2}{\sin\frac{x}{2}-1}=0$.

32.19.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)=2\cos\frac{2\pi}{3}-5\operatorname{ctg}x$;

2) $\operatorname{tg}2x+\sin 2x=-\frac{3}{2}\operatorname{ctg}x$.

32.20.•• Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}2x-\sin 2x=-\frac{9}{2}\operatorname{ctg}x$.

32.21.•• Розв'яжіть рівняння $\log_x\cos 2\pi x=0$.

32.22.•• Розв'яжіть рівняння $\log_x\sin\frac{\pi x}{2}=0$.

32.23.•• Розв'яжіть рівняння $\log_9\sin 2x=\log_3\sqrt{\sin x}$.

32.24.•• Розв'яжіть рівняння $\log_4\sin 2x=\log_2\sqrt{-\sin x}$.

32.25.•• Розв'яжіть рівняння $\arccos\left(x\sqrt{3}\right)=\arcsin(3x-2)$.

32.26.•• Розв'яжіть рівняння $\arcsin x=\arccos(3x-1)$.

33. Основні методи розв'язування рівнянь

У таблиці наведено схеми розв'язування деяких типових рівнянь.

Тип рівняння	Умова, рівносильна даному рівнянню
$\lvert f(x) \rvert = \lvert g(x) \rvert$	$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$
$\lvert f(x) \rvert = g(x)$	$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{array}\right. \\ g(x) \geqslant 0 \end{array}\right.$
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} = g(x)$	$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$
$a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$	$f(x) = g(x)$
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Часто розв'язування рівнянь зводиться до розв'язування типових рівнянь, наведених у таблиці. Це ілюструють вправи №№ 33.1, 33.2. До тих рівнянь, які не зводяться до типових, застосовують спеціальні методи і прийоми. Розглянемо деякі з них.

Метод розкладання на множники

Добре, коли вдається ліву частину рівняння $f(x) = 0$ подати у вигляді добутку кількох виразів. Як правило, цей крок є корисним, оскільки дозволяє замість даного рівняння розв'язати сукупність більш простих рівнянь.

Розглянемо приклади.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Розв'язання. Очевидно, що число 1 є коренем даного рівняння. Тоді ліву частину рівняння можна подати у вигляді добутку $(x - 1)\,Q(x)$, де $Q(x)$ — квадратний тричлен. Для знаходження $Q(x)$ поділимо «куточком» многочлен $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ на двочлен $x - 1$:

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\ \cline{3-3}
 & \underline{x^3 - x^2} & x^2 - 5x + 6 \\
 & - \; -5x^2 + 11x - 6 & \\
 & \underline{-5x^2 + 5x} & \\
 & - \; 6x - 6 & \\
 & \underline{6x - 6} & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Отримали, що $Q(x) = x^2 - 5x + 6$.

Маємо: $(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$.

Це рівняння рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l} x - 1 = 0, \\ x^2 - 5x + 6 = 0. \end{array}\right.$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2, \\ x = 3. \end{array}\right.$

Відповідь: 1; 2; 3.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння

$$3\sqrt{x-2} \cdot 2^{x^2-3} + 2x = x \cdot 2^{x^2-3} + 6\sqrt{x-2}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$3\sqrt{x-2} \cdot 2^{x^2-3} - x \cdot 2^{x^2-3} + 2x - 6\sqrt{x-2} = 0;$$

$$2^{x^2-3}\left(3\sqrt{x-2}-x\right)-2\left(3\sqrt{x-2}-x\right)=0;$$

$$\left(3\sqrt{x-2}-x\right)(2^{x^2-3}-2)=0.$$

Помилковим було б вважати, що це рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l}3\sqrt{x-2}-x=0,\\ 2^{x^2-3}-2=0.\end{array}\right.$$

Справді, корінь −2 другого рівняння сукупності не входить до області визначення початкового рівняння. Насправді початкове рівняння рівносильне системі

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}3\sqrt{x-2}-x=0,\\ 2^{x^2-3}-2=0,\end{array}\right.\\ x\geqslant 2.\end{array}\right.$$

Звідси $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}3\sqrt{x-2}=x,\\ 2^{x^2-3}=2,\end{array}\right.\\ x\geqslant 2;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}9x-18=x^2,\\ x^2-3=1,\end{array}\right.\\ x\geqslant 2;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=6,\\ x=2,\\ x=-2,\end{array}\right.\\ x\geqslant 2.\end{array}\right.$

Відповідь: 2; 3; 6.

Метод заміни змінної

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння

$$x^4-8x^3+15x^2+4x-2=0.$$

Розв'язання. Перетворимо дане рівняння так:

$$x^4-8x^3+16x^2-x^2+4x-2=0;$$

$$(x^2-4x)^2-(x^2-4x)-2=0.$$

Зробивши заміну $x^2-4x=t$, отримуємо рівняння $t^2-t-2=0$. Звідси $\left[\begin{array}{l}t=2,\\ t=-1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2-4x=2,\\ x^2-4x=-1.\end{array}\right.$

Відповідь: $2+\sqrt{6}$; $2-\sqrt{6}$; $2+\sqrt{3}$; $2-\sqrt{3}$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\frac{2x}{x^2-4x+2}+\frac{3x}{x^2+x+2}=-\frac{5}{4}.$

Розв'язання. Оскільки число 0 не є коренем даного рівняння, то, поділивши чисельник і знаменник кожного з дробів лівої частини рівняння на x, отримуємо рівняння, рівносильне заданому:

$$\frac{2}{x-4+\frac{2}{x}}+\frac{3}{x+1+\frac{2}{x}}=-\frac{5}{4}.$$

Зробимо заміну $x+\frac{2}{x}=t$. Тоді

$$\frac{2}{t-4}+\frac{3}{t+1}+\frac{5}{4}=0; \quad \frac{t^2+t-12}{(t-4)(t+1)}=0;$$

$$\begin{cases} t^2+t-12=0, \\ (t-4)(t+1)\neq 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} t=-4, \\ t=3. \end{array}\right.$$

Маємо: $\left[\begin{array}{l} x+\frac{2}{x}=-4, \\ x+\frac{2}{x}=3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2+4x+2=0, \\ x^2-3x+2=0. \end{array}\right.$

Відповідь: $-2+\sqrt{2}$; $-2-\sqrt{2}$; 1; 2.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння

$$\sin^2 x+\frac{4}{\sin^2 x}+3\left(\sin x-\frac{2}{\sin x}\right)-2=0.$$

Розв'язання. Нехай $\sin x-\frac{2}{\sin x}=t$. Тоді

$$\sin^2 x-4+\frac{4}{\sin^2 x}=t^2.$$

Звідси $\sin^2 x+\frac{4}{\sin^2 x}=t^2+4$. Початкове рівняння набуває вигляду $t^2+4+3t-2=0$.

Звідси $t^2+3t+2=0$; $\left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t=-2. \end{array}\right.$

Отримуємо, що дане рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} \sin x-\dfrac{2}{\sin x}=-1, \\ \sin x-\dfrac{2}{\sin x}=-2. \end{array}\right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} \sin^2 x+\sin x-2=0, \\ \sin^2 x+2\sin x-2=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin x=1, \\ \sin x=-2, \\ \sin x=-1-\sqrt{3}, \\ \sin x=-1+\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Оскільки $|\sin x| \leqslant 1$, то отримуємо $\left[\begin{array}{l} \sin x=1, \\ \sin x=\sqrt{3}-1. \end{array}\right.$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \\ x=(-1)^k \arcsin\left(\sqrt{3}-1\right)+\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$ ●

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3.$$

Розв'язання. Нехай $\sqrt[3]{2-x}=a$, $\sqrt[3]{7+x}=b$. Тоді

$\begin{cases} a^2+b^2-ab=3, \\ a^3+b^3=9; \end{cases}$ $\begin{cases} a^2+b^2-ab=3, \\ (a+b)(a^2+b^2-ab)=9; \end{cases}$ $\begin{cases} (a+b)^2-3ab=3, \\ a+b=3; \end{cases}$

$\begin{cases} ab=2, \\ a+b=3; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1, \\ b=2; \end{cases} \\ \begin{cases} a=2, \\ b=1. \end{cases} \end{array}\right.$

Тепер можна записати $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=1, \\ \sqrt[3]{7+x}=2; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=2, \\ \sqrt[3]{7+x}=1; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-6. \end{array}\right.$

Відповідь: 1; −6.

Застосування властивостей функцій

Пошук області визначення функції f може бути ключем до розв’язування рівняння $f(x) = 0$.

ПРИКЛАД 7 Розв’яжіть рівняння

$$\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_3 x+\sqrt{4x-x^2-3}=1.$$

Розв’язання. Застосування будь-яких прийомів, пов’язаних з перетворенням лівої частини даного рівняння, навряд чи призведе до успіху. Разом з тим знаходження області визначення рівняння — шлях цілком природний.

Маємо: $\begin{cases} x^2-4x+3 \geqslant 0, \\ 4x-x^2-3 \geqslant 0, \\ x>0. \end{cases}$

Розв’язавши цю систему, отримаємо, що областю визначення розглядуваного рівняння є двоелементна множина $\{1, 3\}$. Перевірка показує, що число 1 не підходить, а число 3 є коренем заданого рівняння.

Відповідь: 3.

Нехай функції f і g є такими, що для будь-якого $x \in D(f) \cap D(g)$ виконуються нерівності $f(x) \leqslant a$ і $g(x) \geqslant a$, де a — деяке число. Тоді рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x)=a; \\ g(x)=a. \end{cases}$$

За допомогою цих очевидних міркувань можна розв’язати цілу низку рівнянь.

ПРИКЛАД 8 Розв’яжіть рівняння

$$\log_2(5+3\cos 4x)=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Розв’язання. Оскільки $\cos 4x \geqslant -1$, то $5 + 3\cos 4x \geqslant 2$. Звідси $\log_2(5 + 3\cos 4x) \geqslant 1$.

Водночас $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1.$

Тому початкове рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}\log_2(5+3\cos 4x)=1,\\ \sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1.\end{cases}$$

Звідси $\begin{cases}\cos 4x=-1,\\ \cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z},\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ви знаєте, що коли функція f є зростаючою (спадною), то рівняння $f(x) = a$ має не більше ніж один корінь. Якщо вдається корінь вгадати, то розв'язування такого рівняння завершене.

ПРИКЛАД 9 Розв'яжіть рівняння $2x - \sin x = 0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = 2x - \sin x$. Маємо: $f'(x) = 2 - \cos x$. Оскільки для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на $\mathbb{R}$. Отже, рівняння $f(x) = 0$ має не більше ніж один корінь. Очевидно, що число 0 є коренем заданого рівняння.

Відповідь: 0.

ПРИКЛАД 10 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{4x-1}=1$.

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x)=\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{4x-1}.$$

Легко встановити, що $D(f)=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Кожна з функцій $g(x)=\sqrt{4x^2-1}$ і $h(x)=\sqrt{4x-1}$ є зростаючою на $D(f)$. Отже, функція f також зростає на $D(f)$.

Очевидно, що число $\dfrac{1}{2}$ є коренем початкового рівняння. Цей корінь єдиний.

Відповідь: $\dfrac{1}{2}$.

Вправи

33.1.• Розв'яжіть рівняння:

1) $|x^2 - 7x + 3| = |x - 4|$;
2) $|x^2 - 3x - 1| = x - 1$;
3) $\sqrt{4x^2 - 5x} = \sqrt{3x^2 - 2x - 2}$;
4) $\sqrt{3x + 7} = 7 - x$;
5) $7^{2x+3} = 7^{3-x}$;
6) $\log_3 (x^2 - 7) = \log_3 (-x - 1)$.

33.2.• Розв'яжіть рівняння:

1) $|x^2 - 2x - 5| = |x - 1|$;
2) $|x^2 + 6x - 16| = 8 - 4x$;
3) $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$;
4) $2\sqrt{x + 5} = x + 2$;
5) $2^{8 - 2x^2} = 2^{x^2 - 1}$;
6) $\lg (x^2 + 2x - 10) = \lg (3x + 2)$.

33.3.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - 7x - 6 = 0$;
2) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x + 3 = 0$;
3) $x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = 0$.

33.4.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 + x^2 + x + 6 = 0$;
2) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$.

33.5.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$;
2) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 4) = -5$;
3) $\dfrac{3x^2 - 9x}{2} - \dfrac{12}{x^2 - 3x} = 3$;
4) $\dfrac{1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{12}$.

33.6.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 + 8x + 3)(x^2 + 8x + 5) = 63$;
2) $\dfrac{x^4}{(x-2)^2} - \dfrac{4x^2}{x-2} - 5 = 0$;
3) $\dfrac{3}{1 + x + x^2} = 3 - x - x^2$;
4) $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{8}{(x-1)(x+4)} = 1$.

33.7.• Розв'яжіть рівняння:

1) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1}=6$; 3) $4^{\operatorname{tg}^2 x}+8=3\cdot 2^{\frac{1}{\cos^2 x}}$.

2) $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$;

33.8.• Розв'яжіть рівняння:

1) $4^{x^2-x}-17\cdot 2^{x^2-x+2}+256=0$; 2) $2^{\cos 2x}=3\cdot 2^{\cos^2 x}-4$.

33.9.•• Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right)=3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}+1}+6\sqrt{x}-18.$$

33.10.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$;

2) $x(x+3)(x+5)(x+8)=100$.

33.11.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-4)(x+2)(x+8)(x+14)=1204$;

2) $(x+3)(x+1)(x+5)(x+7)=-16$.

33.12.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x^2-5x+2)(2x^2+7x+2)=-20x^2$;

2) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$.

33.13.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2=0$;

2) $(x-4)(x+5)(x+10)(x-2)=18x^2$.

33.14.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47$; 2) $2\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{3}\right)=\frac{2}{x^2}+\frac{x^2}{18}+\frac{4}{3}$;

33.15.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2+5x+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}=16$; 2) $x^2+\frac{36}{x^2}=\frac{112}{5}\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}\right)$.

33.16.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$;

2) $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{4x}{x^2-12x+15}$.

33.17.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3x}{x^2+1-4x}-\frac{2x}{x^2+1+x}=\frac{8}{3}$; 2) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-7x+4}+\frac{x^2-x+4}{x^2+x+4}+\frac{13}{3}=0$.

33.18.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$;

2) $4x^2+12x\sqrt{1+x}=27(1+x)$.

33.19.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4+5x^2(x+1)=6(x+1)^2$; 2) $6x^2-5x\sqrt{x+3}+x+3=0$.

33.20.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $3\sin^2 x+2\sin x\cos x=2$; 2) $5\cos^3 x=\sin x-\cos x$.

33.21.•• Розв'яжіть рівняння $22\cos^2 x+4\sin 2x=7$.

33.22.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=4$;

2) $18\cos^2 x+5(3\cos x+\cos^{-1} x)+2\cos^{-2} x+5=0$;

33.23.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}^3 x=4$;

2) $4\sin^2 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}+4\sin x+\dfrac{2}{\sin x}=11$.

33.24.•• Розв'яжіть рівняння

$$\sin 2x+3(\sin x+\cos x)+1=0.$$

33.25.•• Розв'яжіть рівняння

$$\sin 2x+4\sin x-4\cos x-1=0.$$

33.26.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$; 2) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x-1}=5$.

33.27.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4$; 2) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

33.28.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $2\cos\dfrac{x^2-4x}{3}=x^2-8x+18$;

2) $5\sin x-12\cos x=x^2-2x+14$.

33.29.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\dfrac{\pi x}{6}=x^2-6x+10$; 2) $\sin 2x=x-x^2-1$.

33.30.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x+\cos\dfrac{5x}{2}=2$; 2) $\sin 6x+\cos\dfrac{12x}{5}=-2$.

33.31.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\frac{13x}{6}\cos\frac{5x}{6}=1;$ 2) $\sin 2x+\cos\frac{8x}{3}=2.$

33.32.•• Розв'яжіть рівняння

$$(4x - x^2 - 3)\log_2(\cos^2 \pi x + 1) = 1.$$

33.33.•• Розв'яжіть рівняння

$$2^{-|x-2|}\log_2(4x - x^2 - 2) = 1.$$

33.34.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3+2x\sqrt{x-1}=12;$ 2) $\frac{17}{x^2+1}=\frac{\sqrt{x}}{2}.$

33.35.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sqrt{x}+\sqrt{x-5}+\sqrt{2x+7}=13;$ 2) $x^2+5x+15\sqrt{x+2}=44.$

33.36.•• Розв'яжіть рівняння $\cos x - 2x = 1$.

33.37.•• Розв'яжіть рівняння $\sin x - \cos x = 2x - 1$.

34. Основні методи розв'язування нерівностей

У таблиці наведено схеми розв'язування деяких типових нерівностей.

Тип нерівності	Умова, рівносильна даній нерівності
$\lvert f(x)\rvert < g(x)$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$
$\lvert f(x)\rvert > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$
$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$

Тип нерівності	Умова, рівносильна даній нерівності
$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \end{array}\right.$
$a^{f(x)} > a^{g(x)},\ a > 1$	$f(x) > g(x)$
$a^{f(x)} > a^{g(x)},\ 0 < a < 1$	$f(x) < g(x)$
$\log_a f(x) > \log_a g(x),\ a > 1$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$
$\log_a f(x) > \log_a g(x),\ 0 < a < 1$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Часто розв'язування нерівностей зводиться до розв'язування типових нерівностей, наведених у таблиці. Це ілюструють вправи №№ 34.1–34.10. До тих нерівностей, які не зводяться до типових, застосовують спеціальні методи і прийоми. Розглянемо деякі з них.

Метод рівносильних перетворень

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $(x^2-9)\sqrt{x-2} \geqslant 0$.

Розв'язання. Зауважимо, що помилковими є такі міркування: «Оскільки при $x \geqslant 2$ виконується нерівність $\sqrt{x-2} \geqslant 0$, то дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x^2-9 \geqslant 0. \end{cases}$

Звідси $x \in [3; +\infty)$». Неважко побачити, що при такому «розв'язуванні» втрачається розв'язок $x = 2$.

Правильним розв'язуванням даної нерівності є, наприклад, перехід до сукупності:

$$\left[\begin{array}{l}(x^2-9)\sqrt{x-2}=0,\\(x^2-9)\sqrt{x-2}>0.\end{array}\right.$$

Розв'язком рівняння сукупності є числа 2 і 3, розв'язком нерівності — проміжок $(3; +\infty)$.

Відповідь: $[3; +\infty) \cup \{2\}$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+2}>1$.

Розв'язання. Одразу підносити обидві частини нерівності до квадрата не є раціональним кроком, оскільки цей перехід вимагає враховувати таку додаткову умову:

$$\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+2}\geqslant 0.$$

Дану в умові нерівність доцільно записати так:

$$\sqrt{5x-1}>1+\sqrt{x+2}.$$

Оскільки обидві частини останньої нерівності можуть набувати лише невід'ємних значень, то можна перейти до рівносильної нерівності:

$$\left(\sqrt{5x-1}\right)^2>\left(1+\sqrt{x+2}\right)^2.$$

Далі отримуємо:

$$5x-1>1+2\sqrt{x+2}+(x+2),$$

$$2(x-1)>\sqrt{x+2},$$

$$\begin{cases}4(x-1)^2>x+2,\\x>1,\\x+2\geqslant 0;\end{cases}\qquad\begin{cases}4x^2-9x+2>0,\\x>1.\end{cases}$$

Звідси $x > 2$.

Відповідь: $(2; +\infty)$.

Метод інтервалів

Нехай нулі функції та її точки розриву розбивають область визначення функції на деякі проміжки (рис. 34.1). Тоді з наслідку теореми Больцано–Коші (див. пункт 5) випливає, що ці проміжки є проміжками знакосталості функції. Визначити знак функції на кожному з таких проміжків можна за допомогою «пробних точок».

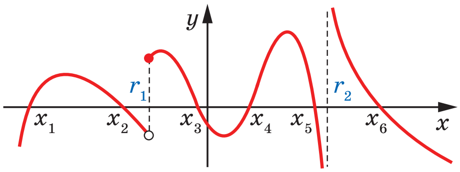


Рис. 34.1

Ці міркування є основою для розв'язування широкого класу нерівностей.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\sqrt[3]{2-x}>1-\sqrt{x-1}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x)=\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1.$$

Маємо: $D(f)=[1;\ +\infty)$. Знайдемо нулі функції f. Для цього розв'яжемо рівняння $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0$.

Зробимо заміну: $\sqrt[3]{2-x}=a$, $\sqrt{x-1}=b$. Маємо: $2-x=a^3$, $x-1=b^2$. Звідси $a^3+b^2=1$. Отримуємо систему:

$$\begin{cases} a+b-1=0,\\ a^3+b^2=1. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} b=1-a,\\ a^3+(1-a)^2=1; \end{cases}$ $\begin{cases} b=1-a,\\ a^3+a^2-2a=0. \end{cases}$

Ця система має три розв'язки: (0; 1), (1; 0), (−2; 3).

Тепер можна записати $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=0,\\ \sqrt{x-1}=1, \end{cases}\\ \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=1,\\ \sqrt{x-1}=0, \end{cases}\\ \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=-2,\\ \sqrt{x-1}=3. \end{cases} \end{array}\right.$ Звідси $\left[\begin{array}{l} x=2,\\ x=1,\\ x=10. \end{array}\right.$

Оскільки функція f є неперервною, то її нулі, тобто числа 1, 2, 10, розбивають її область визначення $D(f) = [1; +\infty)$ на проміжки знакосталості: $(1; 2)$, $(2; 10)$, $(10; +\infty)$.

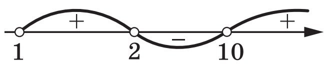


Рис. 34.2

Маємо: $\frac{3}{2} \in (1; 2)$; $f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$;

$3 \in (2; 10)$; $f(3) < 0$;

$17 \in (10; +\infty)$; $f(17) > 0$.

Знаки функції на проміжках знакосталості показано на рисунку 34.2.

Відповідь: $(1; 2) \cup (10; +\infty)$.

Застосування властивостей функцій

При розв'язуванні прикладу 3 було використано таку властивість функції, як неперервність. Нерідко ключем до розв'язування можуть бути й інші властивості функцій: періодичність, парність (непарність), зростання (спадання), найбільше і найменше значення функції тощо.

Наприклад, якщо $\min\limits_{D(f)} f(x) = a$ і $\max\limits_{D(f)} f(x) = b$, то множиною розв'язків кожної з нерівностей $f(x) \geqslant a$ і $f(x) \leqslant b$ є множина $D(f)$ (рис. 34.3).

Ще один приклад: якщо функція f зростає на проміжку $D(f) = [a; +\infty)$ і $f(x_0) = 0$, то множиною розв'язків нерівності $f(x) \geqslant 0$ є проміжок $[x_0; +\infty)$ (рис. 34.4).

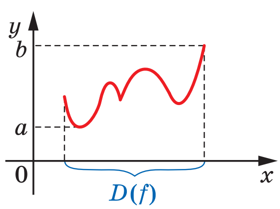


Рис. 34.3

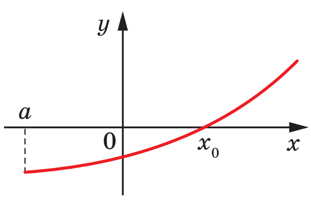


Рис. 34.4

Розглянемо приклади, що ілюструють вищесказане.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\sqrt[4]{19-x} + \sqrt[4]{x+13} \leqslant 4$.

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x) = \sqrt[4]{19-x} + \sqrt[4]{x+13}, \quad D(f) = [-13; 19].$$

Маємо: $f'(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(19-x)^3}} + \dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x+13)^3}}$. Розв'язавши рівняння $f'(x) = 0$, отримаємо $x = 3$.

Порівнюючи числа $f(-13)$, $f(3)$, $f(19)$, доходимо висновку, що $\max\limits_{[-13;\,19]} f(x) = f(3) = 4$.

Тоді нерівність $f(x) \leqslant 4$ виконується для всіх $x \in D(f)$.

Відповідь: $[-13;\ 19]$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність

$$\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right)\log_3(x^2+x+21) \geqslant 6.$$

Розв'язання. Областю визначення даної нерівності є проміжок $[2;\ +\infty)$.

Оскільки $\sqrt{x-2}+4 \geqslant 4$, то $\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right) \geqslant \log_2 4 = 2$.

При $x \geqslant 2$ отримуємо, що $x^2 + x + 21 \geqslant 27$. Тоді $\log_3(x^2 + x + 21) \geqslant 3$.

Маємо: $\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right) \geqslant 2$ і $\log_3(x^2 + x + 21) \geqslant 3$.

Звідси для всіх $x \in [2;\ +\infty)$ виконується нерівність $\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right)\log_3(x^2+x+21) \geqslant 6$.

Відповідь: $[2;\ +\infty)$.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність

$$\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{5x^3+9x+6} \geqslant 5.$$

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt[3]{5x^3+9x+6} - 5.$$

Легко показати, що ця функція зростає на $D(f) = [1;\ +\infty)$. Очевидно, що $f(2) = 0$. Тоді множиною розв'язків нерівності $f(x) \geqslant 0$ є проміжок $[2;\ +\infty)$.

Відповідь: $[2;\ +\infty)$.

Вправи

34.1.° Розв'яжіть нерівність:

1) $|2x - 5| \leqslant x$;
2) $|3x - 2| > 2x + 1$.

34.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $|3x-1| < \frac{x}{2}$;
2) $|3x - 5| > 9x + 1$.

34.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $|x^2+3x| < x + 4$;
2) $\left|\frac{x+1}{2x-1}\right| < 1$;
3) $x^2 - x - 2 < |5x - 3|$;
4) $|x^2 + 3x| \geqslant 2 - x^2$.

34.4.° Розв'яжіть нерівність:

1) $|4x^2 - 1| < x + 2$;
2) $\left|\frac{3x+1}{x-5}\right| \geqslant 1$;
3) $|x^2 - 3x| \geqslant x + 5$.

34.5.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2x^2+5x-6} > \sqrt{-x-3}$;
2) $\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}$;
3) $\sqrt{2x^2+6x+3} \geqslant \sqrt{-x^2-4x}$;
4) $\sqrt{\frac{8-x}{x-10}} \leqslant \sqrt{\frac{2}{2-x}}$.

34.6.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x^2-7x+5} \geqslant \sqrt{3x-4}$;
2) $\sqrt{x^2+5x} < \sqrt{1-x^2+4x}$;
3) $\sqrt{\frac{2x-3}{4x-1}} \geqslant \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$;
4) $\sqrt{3-x} \geqslant \sqrt{\frac{1}{2-x}}$.

34.7.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x+7} < x$;
2) $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x$;
3) $\sqrt{5-|x+1|} \leqslant 2+x$.

34.8.° Розв'яжіть нерівність:

1) $x+4 > 2\sqrt{4-x^2}$;
2) $\sqrt{x^2-3x-18} \leqslant 4-x$;
3) $\sqrt{(x-3)(2-x)} < 3+2x$.

34.9.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2x+4}>x+3$;

2) $\sqrt{2x^2+5x-6}\geqslant 2-x$;

3) $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}}>x-2$.

34.10.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x^2-2x}>4-x$;

2) $\sqrt{-x^2-8x-12}\geqslant x+4$;

3) $\sqrt{\dfrac{x^3+27}{x}}>x-3$.

34.11.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+10)\sqrt{x-4}\leqslant 0$;

2) $(x+1)\sqrt{x+4}\,\sqrt{x+7}\leqslant 0$;

3) $(x+8)\sqrt{x^2-5x+4}\leqslant 0$;

4) $(x^2+3x-10)\sqrt{2x^2+5x+2}\geqslant 0$.

34.12.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-12)\sqrt{x-3}\leqslant 0$;

2) $(x+2)^2(x-1)^2\sqrt{x-7}\geqslant 0$;

3) $(x+3)\sqrt{x^2+x-2}\leqslant 0$;

4) $\dfrac{\sqrt{2x^2+15x-17}}{10-x}\geqslant 0$.

34.13.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{1-3x}-\sqrt{5+x}>1$;

2) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+15}\leqslant 5$.

34.14.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+5}>3$;

2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}\leqslant\sqrt{10-x}$.

34.15.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin^6 x+\cos^6 x<\dfrac{2}{3}$;

2) $2\cos^2 x-\sin x>1$;

3) $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x-2>0$;

4) $2+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{ctg} 2x<0$.

34.16.• Розв'яжіть нерівність:

1) $2\sin^2 x-7\sin x+3>0$;

2) $\sin x+\cos 2x>1$;

3) $\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x+2<0$.

34.17.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos 2x \operatorname{tg} x < 0$;
2) $\sin^2 x \cos x + \cos^2 x \sin x < 0$;
3) $(\sin x + \cos x)\left(\sqrt{3} \sin x - \cos x\right) > 0$;
4) $\left(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\right) \sin x \leqslant 0$.

34.18.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos x - \sin 2x - \cos 3x < 0$;
2) $\operatorname{ctg} x > \operatorname{ctg} 3x$;
3) $(2 \cos x - 1) \operatorname{ctg} x \geqslant 0$.

34.19.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[3]{3-x} + \sqrt{x-2} \leqslant 1$;
2) $\dfrac{\sqrt{21+x} + \sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x} - \sqrt{21-x}} \geqslant \dfrac{21}{x}$.

34.20.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[3]{10-x} + \sqrt{x-1} \geqslant 3$;
2) $\dfrac{\sqrt{6+x} + \sqrt{6-x}}{\sqrt{6+x} - \sqrt{6-x}} \leqslant \dfrac{6}{x}$.

34.21.•• Розв'яжіть нерівність:

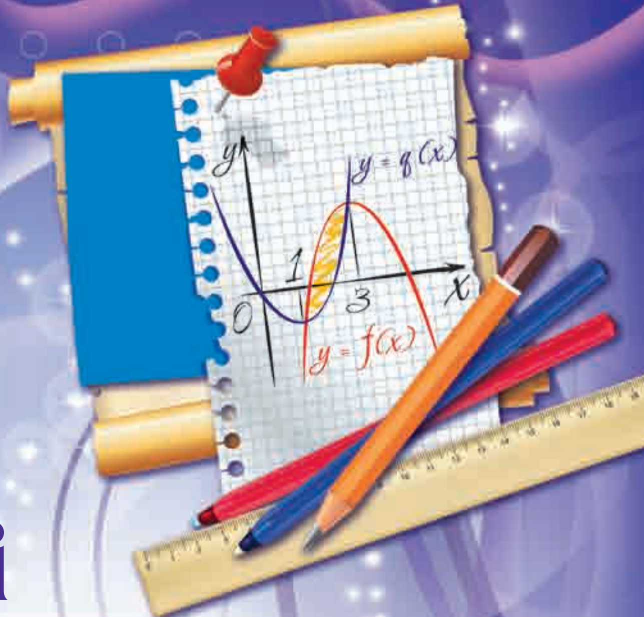
1) $\sqrt[4]{83-x} + \sqrt[4]{79+x} \leqslant 6$;
2) $\sqrt[4]{11-x} + \sqrt[4]{x+5} \geqslant 2$;
3) $3x^5 + \sqrt[3]{3x^3 + 4x + 1} < 5$;
4) $\left(\sqrt{x+2} + 1\right) \log_3 (x^2 + 4x + 13) \geqslant 2$;
5) $\log_3 \left(\sqrt{x-1} + 3\right) \log_5 (x^2 + x + 3) \geqslant 1$.

34.22.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[6]{71-x} + \sqrt[6]{57+x} \leqslant 4$;
2) $\sqrt[6]{33-x} + \sqrt[6]{31+x} \geqslant 2$;
3) $2\sqrt{x-3} + \sqrt[3]{x^3 + 9x + 10} \geqslant 4$;
4) $\log_2 \left(\sqrt{x+3} + 2\right) \log_3 (x^2 + 6x + 18) \geqslant 2$.

§6

Тестові завдання для повторення курсу алгебри



Подільність натуральних чисел та числові вирази

Завдання в тестовій формі «Перевір себе» № 5

1. Яку цифру треба поставити замість зірочки, щоб число 1845* ділилося націло на 9, але не ділилося націло на 6?

А) 0; Б) 3; В) 6; Г) 9.

2. Групу туристів можна розмістити в наметах по 4 особи або в більших наметах по 6 осіб, причому в обох випадках вільних місць у наметах не залишиться. Скільки туристів було в групі, якщо відомо, що їх більше за 40, але менше від 50?

А) 42; Б) 44; В) 46; Г) 48.

3. Яке з наведених чисел ділиться націло на 3, але не ділиться націло ні на 2, ні на 5?

А) 3547; Б) 2601; В) 7335; Г) 6228.

4. Чому дорівнює остача при діленні на 8 значення виразу $(15n + 7) - (7n + 3)$, де n — довільне натуральне число?

А) 7; Б) 6; В) 4; Г) 10.

5. Яке найменше натуральне число треба додати до числа 832, щоб отримана сума була кратна одночасно числам 3 і 5?

А) 3; Б) 5; В) 8; Г) 9.

6. На таці лежать пиріжки з м’ясом і пиріжки з вишнями, кількості яких відносяться як 5 : 2 відповідно. Укажіть серед наведених чисел те, яким може виражатися загальна кількість пиріжків.

А) 15; Б) 16; В) 21; Г) 24.

7. Яка з даних рівностей хибна?

А) $\frac{5}{7} = \frac{35}{49}$; Б) $\frac{14}{24} = \frac{2}{3}$; В) $\frac{7}{9} = \frac{56}{72}$; Г) $\frac{4}{5} = \frac{36}{45}$.

8. Якому з наведених проміжків належить число $\frac{15}{18}$?

А) (0; 0,25); Б) (0,25; 0,5); В) (0,5; 0,75); Г) (0,75; 1).

9. Укажіть, скільки можна скласти нерівних між собою правильних дробів, чисельниками і знаменниками яких є числа 2, 4, 5, 6, 8, 9.

А) 12; Б) 13; В) 14; Г) 15.

10. Визначте, на скільки $\frac{3}{7}$ числа 350 більше за 0,12 числа 500.

А) 90; Б) 150; В) 160; Г) 170.

11. Один робітник може виконати певну роботу за годину, а другий — за півтори години. За який час вони виконають цю роботу, працюючи разом?

А) 36 хв; Б) 40 хв; В) 48 хв; Г) 60 хв.

12. Серед наведених чисел укажіть найбільше:

А) $\frac{2002}{2001}$; Б) $\frac{2003}{2002}$; В) $\frac{2004}{2003}$; Г) $\frac{2005}{2004}$.

13. Натуральне число a — парне, а натуральне число b — непарне. Яка з наступних рівностей можлива?

А) $\frac{a-1}{b+1}=1$; Б) $ab = 35$; В) $\frac{a}{b}=9$; Г) $\frac{a}{b}=4$.

14. Додатне число a менше від 1, а число b більше за 1. Який з виразів набуває найбільшого значення?

А) ab; Б) a^2; В) $a + b$; Г) $\frac{a}{b}$.

15. З послідовності чисел −9, −7, −5, 2, 3, 6 вибрали два числа і знайшли їх добуток. Якого найменшого значення може набути цей добуток?

А) −54; Б) 6; В) −10; Г) 12.

16. Відомо, що $a > 0$, $b < 0$. Про який з виразів можна стверджувати, що він приймає лише додатні значення?

А) $b^2 - a^2$; Б) $a - b$; В) $(b - a)^3$; Г) $a^4 - b^4$.

17. Поїзд пройшов 105 км, що становить $\frac{5}{7}$ усього шляху. Скільки кілометрів становить довжина всього шляху?

А) 75 км; Б) 140 км; В) 147 км; Г) 210 км.

18. Обчисліть значення виразу

$$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 2009 - 2010.$$

А) 1005; Б) −1005; В) 2010; Г) −2010.

19. Установіть відповідність між заданими числами (1–4) і цифрами (А–Д), які треба підставити замість зірочки, щоб дане число ділилося націло на 9.

1) 628*
2) 57*57
3) 7*51
4) 90*2

А) 5
Б) 3
В) 7
Г) 4
Д) 2

20. Установіть відповідність між заданими виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}$

2) $\left(2{,}5-1\frac{5}{6}\right)\cdot(-1{,}2)$

3) $2{,}8\cdot\frac{4}{7}-2{,}8:\frac{4}{7}$

4) $\dfrac{8-\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}}{8+\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}}$

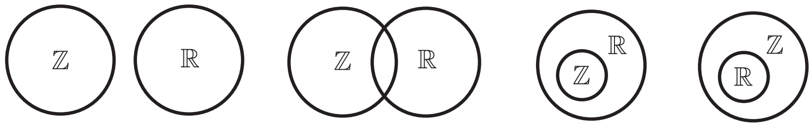
А) 0,7
Б) −0,8
В) $\frac{1}{7}$
Г) −3,3
Д) $1\frac{3}{7}$

Множини, відсоткові розрахунки, елементи статистики

Завдання в тестовій формі «Перевір себе» № 6

1. Укажіть діаграму Ейлера, на якій правильно зображено співвідношення між множинами $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{R}$.

А) Б) В) Г)



2. Дано три твердження:

1) будь-яке натуральне число є дійсним;
2) будь-яке ірраціональне число є дійсним;
3) будь-яке дійсне число є раціональним або ірраціональним.

Скільки з цих тверджень є правильними?

А) жодного; Б) одне; В) два; Г) три.

3. Відомо, що $A \subset B$ і $A \neq B$. Укажіть правильне твердження:

А) $A \cap B = B$; Б) $A \cup B = A$; В) $A \cap B = \varnothing$; Г) $A \cup B = B$.

4. До сплаву масою 400 кг, що містить 15 % міді, додали 25 кг міді. Яким став відсотковий вміст міді в новому сплаві?

А) 20 %; Б) 25 %; В) 30 %; Г) 40 %.

5. Видобуток вугілля на деякій шахті спочатку зменшився на 20 %, а потім підвищився на 20 %. Збільшився чи зменшився видобуток вугілля внаслідок цього порівняно з початковим рівнем і на скільки відсотків?

А) збільшився на 4 %; В) збільшився на 10 %;
Б) зменшився на 4 %; Г) не змінився.

6. Вміст солі в морській воді становить 5 %. Скільки кілограмів прісної води треба додати до 30 кг морської води, щоб вміст солі в утвореному розчині становив 3 %?

А) 10 кг; Б) 15 кг; В) 20 кг; Г) 25 кг.

7. Бригада з 12 робітників може відремонтувати школу за 36 днів. Скільки потрібно робітників, щоб відремонтувати школу за 9 днів, якщо продуктивність праці всіх робітників однакова?

А) 3; Б) 24; В) 36; Г) 48.

8. У саду ростуть яблуні і груші, причому яблунь у 4 рази більше, ніж груш. Скільки відсотків усіх дерев становлять груші?

А) 20 %; Б) 25 %; В) 50 %; Г) установити неможливо.

9. Першого дня хлопчик прочитав 30 % сторінок книжки, а другого — 18 %. Скільки сторінок у книжці, якщо першого дня він прочитав на 6 сторінок більше, ніж другого?

А) 200; Б) 500; В) 50; Г) 20.

10. Деякі величини a, b і c, які набувають тільки додатних значень, такі, що $ac = b$. Як зміниться величина a, якщо величину b збільшити у 12 разів, а величину c збільшити в 3 рази?

А) збільшиться в 36 разів; В) збільшиться в 4 рази;
Б) зменшиться в 4 рази; Г) не зміниться.

11. У 160 г води розчинили 40 г солі. Знайдіть відсотковий вміст солі в розчині.

А) 20 %; Б) 25 %; В) $33\frac{1}{3}$ %; Г) 40 %.

12. У таблиці наведено розподіл оцінок, отриманих учнями класу за контрольну роботу з алгебри і початків аналізу.

Оцінка	6	7	8	9	10	11
Кількість учнів	3	8	4	5	3	2

Знайдіть відносну частоту, яка відповідає оцінці 9 балів.

А) 36 %; Б) 20 %; В) 25 %; Г) 30 %.

13. Банк сплачує своїм вкладникам 8 % річних. Скільки грошей треба покласти в банк, щоб через рік на рахунку було 21 600 грн?

А) 20 300 грн; В) 20 100 грн;
Б) 20 200 грн; Г) 20 000 грн.

14. Ціна товару становила 80 грн. Через деякий час вона зменшилася на 8 грн. На скільки відсотків відбулося зниження ціни?

А) на 10 %; Б) на 8 %; В) на 12 %; Г) на 15 %.

15. Стілець, початкова ціна якого становила 400 грн, двічі подешевшав, причому кожного разу на 50 %. Скільки тепер коштує стілець?

А) 100 грн; Б) 150 грн; В) 200 грн; Г) 250 грн.

16. Відомо, що 7 кг печива коштують стільки, скільки 5 кг цукерок. Скільки кілограмів цукерок можна купити замість 28 кг печива?

А) 14 кг; Б) 16 кг; В) 10 кг; Г) 20 кг.

17. На графіку, зображеному на рисунку, відображено обсяги продажу зошитів у крамничці канцтоварів протягом 6 місяців. Скільки в середньому продавали зошитів за один місяць?

А) 1050; Б) 1100; В) 1200; Г) 1250.

18. У травні магазин продав прохолодних напоїв на суму m грн, а в червні — на $2m$ грн. На скільки відсотків збільшився виторг магазину від продажу прохолодних напоїв у червні порівняно з травнем?

А) на 50 %; В) на 200 %;

Б) на 100 %; Г) залежить від числа m.

19. Установіть відповідність між заданими вибірками (1–4) та їх медіанами (А–Д).

1) 2, 2, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 9
2) 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9
3) 2, 4, 4, 6, 9, 3, 8, 9, 10
4) 3, 10, 4, 9, 13, 9, 19, 3

А) 7
Б) 4
В) 6
Г) 9
Д) 5

20. Установіть відповідність між соляним розчином (1–4) і кількістю солі, яку він містить (А–Д).

1) 300 г 4-відсоткового розчину
2) 40 г 9-відсоткового розчину
3) 20 г 8-відсоткового розчину
4) 40 г 6-відсоткового розчину

А) 1,6 г
Б) 12 г
В) 2,4 г
Г) 3,6 г
Д) 37 г

Раціональні вирази

Завдання в тестовій формі «Перевір себе» № 7

1. При якому значенні змінної не має змісту вираз $\frac{4}{3x-21}$?

А) 7; Б) −7; В) 4; Г) −4.

2. Скоротіть дріб $\frac{12a^{10}b^2}{16a^5b^6}$.

А) $\frac{3a^2}{4b^3}$; Б) $\frac{3a^5b^4}{4}$; В) $\frac{3a^2}{4b^4}$; Г) $\frac{3a^5}{4b^4}$.

3. Скоротіть дріб $\frac{6m-mn}{18m}$.

А) $\frac{6-mn}{18}$; Б) $\frac{1-mn}{3}$; В) $\frac{6-n}{18}$; Г) $\frac{m-n}{3}$.

4. Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{a-5b}{2b}-\frac{b-5a}{2a}$.

А) $\frac{a^2-b^2}{2ab}$; Б) $\frac{a^2-b^2}{4ab}$; В) $\frac{a-b}{2}$; Г) $\frac{a-b}{4}$.

5. Спростіть вираз $\frac{a+b}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}$.

А) $\frac{ab}{a+b}$; Б) $\frac{a+b}{ab}$; В) $\frac{ab}{a-b}$; Г) $\frac{a-b}{ab}$.

6. Якщо $a=2-\frac{b}{c}$, то b дорівнює:

А) $c\ (2-a)$; Б) $c\ (a-2)$; В) $\frac{c}{2-a}$; Г) $\frac{2-a}{c}$.

7. Знайдіть значення виразу $\frac{2}{a-2}+\frac{a+2}{a^2-10a+25}\cdot\frac{6a-30}{a^2-4}$ при $a = 4{,}75$.

А) 2,5; Б) −2,5; В) 8; Г) −8.

8. Знайдіть значення виразу $\left(\frac{2a+6}{a^2-1}-\frac{2}{a^2+a}\right)\cdot\frac{a^2-a}{2a+2}$ при $a = 0{,}125$.

А) 1; Б) –0,5; В) 0,25; Г) 0,125.

9. Коренем якого з даних рівнянь є будь-яке число?

А) $\frac{x^2-25}{x^2-25}=1$; В) $\frac{x^2+25}{x^2+25}=1$;

Б) $\frac{x^2-25}{x+5}=x-5$; Г) $\frac{x^2-25}{x-5}=x+5$.

10. Скоротіть дріб $\frac{x^2+x-6}{x^2+3x-10}$.

А) $\frac{x-3}{x-5}$; Б) $\frac{x+3}{x+5}$; В) $\frac{x+3}{x-5}$; Г) $\frac{x-3}{x+5}$.

11. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 + 2x - 5 = 0$. Знайдіть значення виразу $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$.

А) –1,2; Б) 1,2; В) –2,8; Г) 2,8.

12. Якого найбільшого значення набуває вираз $x + y$, якщо пара чисел $(x; y)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x-3y=4, \\ xy-6y=1? \end{cases}$

А) 10; Б) 8; В) 6; Г) $2\frac{2}{3}$.

13. Пари чисел $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$ є розв'язками системи рівнянь $\begin{cases} 2x-xy=5, \\ y+xy=6. \end{cases}$ Знайдіть значення виразу $|x_1y_1 - x_2y_2|$.

А) 1; Б) 11; В) 70; Г) 10.

14. З одного міста в інше, відстань між якими дорівнює 350 км, виїхали одночасно вантажний і легковий автомобілі. Швидкість вантажівки на 20 км/год менша від швидкості легкового автомобіля, через що вона прибула до пункту призначення на 2 год пізніше за легковий автомобіль. Нехай швидкість вантажного автомобіля дорівнює x км/год. Яке з рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові задачі?

А) $\frac{350}{x}-\frac{350}{x+20}=2;$

Б) $\frac{350}{x}+\frac{350}{x+20}=2;$

В) $\frac{350}{x+20}-\frac{350}{x}=2;$

Г) $\frac{350}{x}-\frac{350}{x-20}=2.$

15. Катер проплив 30 км за течією річки, швидкість якої дорівнює 1 км/год, і повернувся назад, витративши на весь шлях 3 год 10 хв. Нехай власна швидкість катера становить x км/год. Яке з рівнянь відповідає умові задачі?

А) $\frac{30}{x+1}+\frac{30}{x-1}=3{,}1;$

Б) $\frac{30}{x+1}-\frac{30}{x-1}=3{,}1;$

В) $\frac{30}{x+1}+\frac{30}{x}=3\frac{1}{6};$

Г) $\frac{30}{x+1}+\frac{30}{x-1}=3\frac{1}{6}.$

16. Двоє працівників разом можуть виконати комп'ютерний набір підручника з алгебри за 8 днів. Якщо перший працівник набере $\frac{2}{3}$ підручника, а потім другий працівник завершить набір, то весь підручник буде набрано за 16 днів. Нехай перший працівник може набрати текст підручника за x днів, а другий — за y днів. Яка з наведених систем рівнянь відповідає умові задачі?

А) $\begin{cases} x+y=8, \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=16; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3x}+\frac{1}{3y}=\frac{1}{16}; \end{cases}$

В) $\begin{cases} x+y=8, \\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=16; \end{cases}$

Г) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=16. \end{cases}$

17. Відомо, що при деяких від'ємних значеннях a і b $a^2+b^2=68$, $ab=16$. Знайдіть значення виразу $a+b$ при тих самих значеннях a і b.

А) 10; Б) −10; В) −8; Г) −6.

18. Відомо, що $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$. Знайдіть значення виразу $\left|x - \frac{1}{x}\right|$.

А) $2\sqrt{5}$;
Б) $-2\sqrt{5}$ або $2\sqrt{5}$;
В) 6;
Г) 4.

19. Установіть відповідність між заданими виразами (1–4) та виразами, що їм тотожно дорівнюють (А–Д):

1) $\frac{3a-12}{a^2-16}$;
2) $\frac{1}{a} - \frac{4}{a^2+4a}$;
3) $\frac{a^2+8a+16}{a^2-16} : (a+4)$;
4) $\frac{3a}{a-4} - \frac{a+2}{2a-8} \cdot \frac{96}{a^2+2a}$.

А) $\frac{1}{a-4}$;
Б) $\frac{3a+12}{a}$;
В) $\frac{3}{a+4}$;
Г) $\frac{1}{a+4}$;
Д) $\frac{a+4}{a-4}$.

20. Установіть відповідність між заданими рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д):

1) $x^2 - 6x - 16 = 0$;
2) $\frac{x^2-3x}{x+2} = \frac{3x+16}{x+2}$;
3) $x^4 - x^2 - 12 = 0$;
4) $\frac{x+2}{x^2-4} = 0$.

А) $\{-2,\ 8\}$;
Б) $\{-2,\ 2\}$;
В) $\{-2\}$;
Г) $\varnothing$;
Д) $\{8\}$.

Нерівності, степені, ірраціональні рівняння

Завдання в тестовій формі «Перевір себе» № 8

1. Яка з наведених нерівностей обов'язково виконується, якщо $a > b$ і $c < 0$?

А) $ac > b$; Б) $a > bc$; В) $a > b + c$; Г) $a + c > b$.

2. Оцініть значення виразу $\frac{a}{b}$, якщо $3 \leqslant a \leqslant 5$, $5 \leqslant b \leqslant 6$.

А) $15 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 30$; В) $\frac{1}{2} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 1$;

Б) $\frac{3}{5} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant \frac{4}{5}$; Г) $18 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 25$.

3. Яка з поданих систем нерівностей має єдиний розв'язок?

А) $\begin{cases} 2x+6 \geqslant 0, \\ 1-x \geqslant 3; \end{cases}$ В) $\begin{cases} \frac{x+9}{3} > 2, \\ \frac{x}{4}-\frac{x}{2} > 0{,}75; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} 0{,}5x > -1, \\ 2x-5 > 4x+7; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} \frac{1}{3}x-1 \leqslant \frac{2}{3}x, \\ 0{,}7x+2 \leqslant 0{,}3x+0{,}8. \end{cases}$

4. Скільки натуральних розв'язків має нерівність

$$(3x - 2)(3x + 2) - 9x(x - 1) \leqslant 6?$$

А) один; Б) два; В) жодного; Г) безліч.

5. Укажіть множину розв'язків нерівності $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{2}$.

А) $[2; +\infty)$; В) $(-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$;

Б) $(-\infty; 2]$; Г) $(0; 2]$.

6. Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності

$$(2x + 3)^2 - (x + 2)(x - 5) < 37.$$

А) знайти неможливо; В) 15;

Б) –20; Г) –15.

7. Чому дорівнює значення виразу $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{12{,}5}\cdot\sqrt[3]{0{,}016}$?

А) 0,25; Б) 0,5; В) 1; Г) 2.

8. Спростіть вираз $\left(1-\sqrt{8}\right)^2+4\sqrt{2}$.

А) 9; Б) $9+8\sqrt{2}$; В) -7; Г) $-7+8\sqrt{2}$.

9. Обчисліть значення виразу $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$.

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

10. Знайдіть значення виразу

$$\frac{3}{2+\sqrt{7}}+\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{13}}+\frac{3}{\sqrt{13}+4}.$$

А) 4; Б) 3; В) 2; Г) 1.

11. При якій з наведених умов виконується рівність

$$\left(\sqrt[4]{a}\right)^4\cdot\sqrt[4]{b^4}=-ab?$$

А) $a>0$ і $b>0$; В) $a<0$ і $b>0$;
Б) $a>0$ і $b<0$; Г) $a<0$ і $b<0$.

12. Знайдіть значення виразу $\dfrac{3x^{\frac{1}{6}}+x}{x^{\frac{5}{6}}+3}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}}$ при $x=12$, $y=64$.

А) 2; Б) -2; В) 4; Г) -4.

13. Укажіть проміжок, якому належить число $\sqrt[3]{32}$.

А) (0; 1); Б) (1; 2); В) (2; 3); Г) (3; 4).

14. Обчисліть значення виразу $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-1\right)^3}$.

А) $3-2\sqrt{5}$; Б) $1-2\sqrt{5}$; В) -1; Г) 1.

15. Розв'яжіть нерівність $\dfrac{x^3}{x}\leqslant 1$.

А) $[-1;\ 0)\cup(0;\ 1]$; В) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1]$;
Б) $(-\infty;\ 1]$; Г) $[-1;\ 1]$.

16. Укажіть множину розв'язків рівняння $\left(\sqrt{-x}\right)^2 = \sqrt{(-x)^2}$.

А) $\varnothing$; Б) $\{0\}$; В) $(-\infty;\ 0]$; Г) $\{-1,\ 0\}$.

17. Знайдіть суму коренів рівняння $\sqrt[6]{x+2} \cdot \sqrt[5]{x+3} \cdot \sqrt[4]{4-x} = 0$.

А) 5; Б) 2; В) −1; Г) −3.

18. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x+7} - \sqrt{2-x} = 2$.

А) 1; Б) −1; В) $-\frac{31}{9}$; 1; Г) −1; $\frac{31}{9}$.

19. Установіть відповідність між заданими нерівностями (1–4) та їх множинами розв'язків (А–Д):

1) $\frac{2x-1}{x} \leqslant 1$;
2) $x \geqslant x^2$;
3) $\frac{x^2+x-2}{x^2} \leqslant 0$;
4) $x^3 \leqslant x^2$.

А) $(0;\ 1]$;
Б) $[-2;\ 0) \cup (0;\ 1]$;
В) $[0;\ 1]$;
Г) $(-\infty;\ 1]$;
Д) $[-1;\ 0) \cup (0;\ 1]$.

20. Установіть відповідність між заданими виразами (1–4) та виразами, що їм тотожно дорівнюють (А–Д):

1) $\frac{\left(a^{-\frac{5}{4}}\right)^{-8} \cdot a^{2,5}}{a^{-3,5}}$;
2) $\frac{9}{4}a^{-5}b^{-4} \cdot \left(\frac{3}{2}a^{-1}b^{-2}\right)^{-2}$;
3) $\left(\frac{a^3}{b^{-2}}\right)^{-3} : \left(\frac{a^4}{b^{-3}}\right)^{-2}$;
4) $\frac{\sqrt{a\sqrt[4]{a}} \cdot \sqrt[16]{a^{12}}}{\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}$.

А) a^{16};
Б) $\frac{1}{a}$;
В) $\frac{1}{a^3}$;
Г) a;
Д) $\frac{b}{a^3}$.

Функції і послідовності

Завдання в тестовій формі «Перевір себе» № 9

1. Знайдіть область визначення функції $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4x+4}$.

А) $[-1;\ +\infty)$; В) $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$;
Б) $(-1;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$; Г) $[-1;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$.

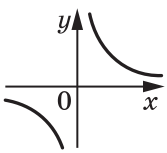
2. Скільки нулів має функція $y = x^4 - x^2 - 2$?

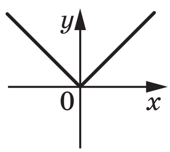
А) жодного; Б) один; В) два; Г) три.

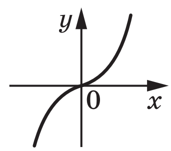
3. Графік непарної функції $y = f(x)$ проходить через точку $A\,(2;\ -7)$. Чому дорівнює $f(-2)$?

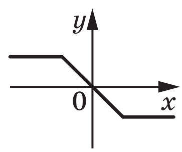
А) -7; Б) 7; В) 2; Г) визначити неможливо.

4. На одному з рисунків зображено графік парної функції. Укажіть цей рисунок.

А)


Б)


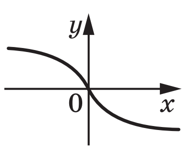
В)


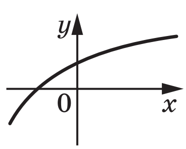
Г)


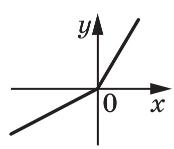
5. Яка з наведених функцій спадає на проміжку $(-\infty;\ +\infty)$?

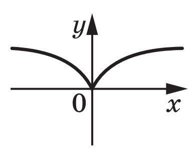
А) $y=\dfrac{1}{x}$; Б) $y = -x^2$; В) $y=-\sqrt{x}$; Г) $y=\sqrt[3]{-x}$.

6. На якому рисунку зображено графік необоротної функції?

А)


Б)


В)


Г)


7. Яка функція є оберненою до функції $y = x - 2$?

А) $y = -x + 2$; В) $y = x - 2$;
Б) $y = -x - 2$; Г) $y = x + 2$.

8. Чому дорівнює найбільше значення функції $y = x^{-2}$ на проміжку [3; 5]?

А) $\frac{1}{9}$; Б) $\frac{1}{25}$; В) 9; Г) 25.

9. Графік лінійної функції $y = kx + b$ містить точки в першій, другій і четвертій координатних чвертях. Укажіть правильне твердження.

А) $k > 0$, $b > 0$;
Б) $k > 0$, $b < 0$;
В) $k < 0$, $b > 0$;
Г) $k < 0$, $b < 0$.

10. Графіком якої з наведених функцій може бути зображена на рисунку парабола?

А) $y = -x^2 + 2x$;
Б) $y = -x^2 - 2x - 2$;
В) $y = -x^2 - 2x + 2$;
Г) $y = -x^2 + 2x + 2$.

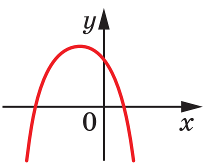


Рис. до завдання 10

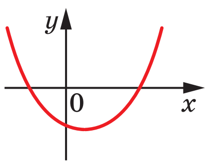


Рис. до завдання 12

11. При якому значенні a найменше значення функції

$$y = 2x^2 - 8x + a$$

дорівнює 3?

А) 3; Б) 11; В) −21; Г) такого значення не існує.

12. На рисунку зображено графік квадратичної функції

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Укажіть правильне твердження.

А) $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$;
Б) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$;
В) $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$;
Г) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$.

13. На рисунку зображено графік функції $y = \dfrac{x+a}{bx-c}$. Укажіть правильне твердження.

А) $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$;
Б) $a < 0,\ b > 0,\ c > 0$;
В) $a > 0,\ b > 0,\ c < 0$;
Г) $a < 0,\ b < 0,\ c < 0$.

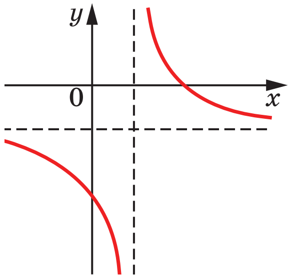


Рис. до завдання 13

14. Скільки додатних членів містить арифметична прогресія 5,2; 4,9; 4,6; ... ?

А) 17; Б) 18; В) 19; Г) 20.

15. Місця в цирку розташовані так, що в першому ряду кожного сектора 8 місць, а в кожному наступному на 2 місця більше, ніж у попередньому. Скільки всього місць в одному секторі, якщо в ньому 15 рядів?

А) 270 місць; Б) 330 місць; В) 285 місць; Г) 345 місць.

16. Чому дорівнює сума тридцяти п'яти перших членів арифметичної прогресії, якщо її вісімнадцятий член дорівнює 20?

А) 350; Б) 700; В) 1400; Г) визначити неможливо.

17. Другий член геометричної прогресії з додатним знаменником дорівнює 48, а восьмий член дорівнює $\dfrac{1}{3}$. Знайдіть п'ятий член цієї прогресії.

А) 4; Б) 2; В) $\dfrac{1}{4}$; Г) $\dfrac{1}{2}$.

18. Чому дорівнює сума нескінченної геометричної прогресії (b_n), якщо $b_3 = -12,\ b_6 = \dfrac{3}{2}$?

А) 24; Б) 48; В) −96; Г) −32.

19. Установіть відповідність між заданими функціями (1–4) та їх областями визначення (А–Д):

1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;
2) $y=\sqrt[4]{x+1}$;
3) $y=\sqrt{x^2-1}$;
4) $y=\dfrac{1}{\sqrt[6]{1-x}}$.

А) $(-\infty;\ -1]\cup[1;\ +\infty)$;
Б) $(-\infty;\ 1)$;
В) $(-\infty;\ +\infty)$;
Г) $[-1;\ +\infty)$;
Д) $[1;\ +\infty)$.

20. Установіть відповідність між заданими функціями (1–4) та їх областями значень (А–Д):

1) $y = x^2 + 4$;
2) $y = 4 - |x|$;
3) $y=\sqrt{x+4}$;
4) $y=\sqrt{4-x^2}$.

А) $[0;\ 2]$;
Б) $[2;\ +\infty)$;
В) $[0;\ +\infty)$;
Г) $(-\infty;\ 4]$;
Д) $[4;\ +\infty)$.

Тригонометричні функції

Завдання в тестовій формі «Перевір себе» № 10

1. Обчисліть значення виразу $2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+4\cos\frac{2\pi}{3}$.

А) -4; Б) 2; В) 0; Г) -1.

2. Укажіть правильну нерівність.

А) $\sin 160° < 0$; В) $\operatorname{tg} 140° > 0$;
Б) $\cos 250° > 0$; Г) $\operatorname{ctg} 200° > 0$.

3. Яка з даних функцій є непарною?

А) $y=\frac{1}{\cos x}$; В) $y = x + \cos x$;
Б) $y=\sqrt{\cos x}$; Г) $y = x\cos x$.

4. Чому дорівнює найменше значення виразу $1 - 2\cos\alpha$?

А) -2; Б) -1; В) 0; Г) 3.

5. Спростіть вираз $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

А) -1; Б) 1; В) $\operatorname{tg}^2\alpha$; Г) $\operatorname{ctg}^2\alpha$.

6. Знайдіть значення виразу $\cos 37° \cos 23° - \sin 37° \sin 23°$.

А) $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; В) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; Г) 1.

7. Спростіть вираз $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)$.

А) $\cos\alpha + \sin\alpha$; Б) $2\sin\alpha$; В) $\cos\alpha - \sin\alpha$; Г) 0.

8. Відомо, що $\cos(\alpha + \beta) = 0$ і $\sin\alpha = 1$. Знайдіть значення $\sin\beta$.

А) 2; Б) 1; В) 0; Г) -1.

9. Спростіть вираз $\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$.

А) 2; Б) $2\cos\alpha$; В) $2\sin\alpha$; Г) $\sin\alpha\cos\alpha$.

10. Обчисліть значення виразу $\frac{\cos 20° - \cos 80°}{\sin 20° + \sin 80°}$.

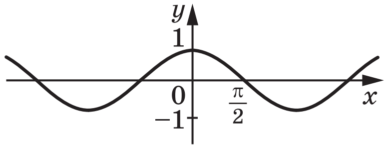
А) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; Б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; В) $\sqrt{3}$; Г) $-\sqrt{3}$.

11. Яке з наведених рівнянь не має коренів?

А) $\sin x = \frac{1}{7}$; Б) $\cos x = \frac{8}{7}$; В) $\text{tg}\, x = \frac{1}{7}$; Г) $\text{ctg}\, x = \frac{8}{7}$.

12. Графік якої функції зображено на рисунку?

А) $y = \sin x$;
Б) $y = \sin(\pi + x)$;
В) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;
Г) $y = \sin(2\pi - x)$.



13. Знайдіть корені рівняння $\text{tg}\, 2x = 0$.

А) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; В) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

Б) $\frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$; Г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

14. Розв'яжіть рівняння $\cos \frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

А) $\pm\frac{5\pi}{2} + 6\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; В) $\pm\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}$;

Б) $\pm\frac{\pi}{2} + 6\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; Г) $\pm\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

15. Розв'яжіть рівняння $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 0$.

А) $\frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$; В) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

Б) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; Г) коренів немає.

16. Укажіть множину розв'язків нерівності $\sin x > -\frac{1}{2}$.

А) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

Б) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

В) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

Г) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

17. Знайдіть cos 2α, якщо $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$.

А) $\frac{7}{8}$; Б) $\frac{3}{4}$; В) $\frac{15}{16}$; Г) $\frac{5}{8}$.

18. Розв'яжіть рівняння $1 - \cos 6x = \sin 3x$.

А) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$; В) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

Б) πk; $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; Г) $\frac{\pi k}{3}$; $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

19. Установіть відповідність між заданими виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д):

1) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$;
2) $(\sin\alpha + \cos\alpha)(-\cos\alpha + \sin\alpha)$;
3) $\sin 3\alpha \sin\alpha - \cos 3\alpha \cos\alpha$;
4) $\sin 2\alpha + \sqrt{3}\cos 2\alpha$.

А) $\cos 4\alpha$;
Б) $2\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$;
В) $-\cos 4\alpha$;
Г) $-\cos 2\alpha$;
Д) $1 + \sin 2\alpha$.

20. Установіть відповідність між тригонометричними рівняннями (1–4) та їх розв'язками (А–Д):

1) $\cos x = -1$;
2) $\mathrm{ctg}\, x = -1$;
3) $|\sin x| = 1$;
4) $|\mathrm{tg}\, x| = 1$.

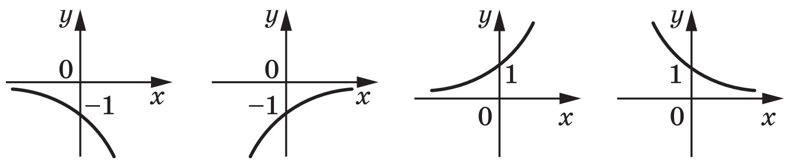
А) πk, $k \in \mathbb{Z}$;
Б) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
В) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
Г) $\frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
Д) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Показникова та логарифмічна функції

Завдання в тестовій формі «Перевір себе» № 11

1. На одному з рисунків зображено графік функції $y = 2^{-x}$. Укажіть цей рисунок.

А) Б) В) Г)

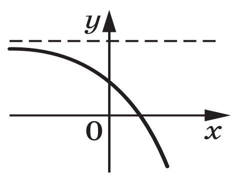


2. Серед наведених функцій укажіть спадну.

А) $y = \pi^x$; Б) $y = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$; В) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$; Г) $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$.

3. На рисунку зображено графік функції $y = a \cdot 3^x + b$. Укажіть правильне твердження.

А) $a > 0,\ b > 0$;
Б) $a > 0,\ b < 0$;
В) $a < 0,\ b > 0$;
Г) $a < 0,\ b < 0$.



4. Яка область значень функції $y = 5^{2\sin^2 x - \cos^2 x}$?

А) [1; 5]; Б) [5; 25]; В) $\left[\frac{1}{5}; 25\right]$; Г) $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$.

5. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння

$$0{,}2^{3x-2} = 0{,}0016.$$

А) [–1; 0]; Б) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; В) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; Г) (1; 2].

6. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \geqslant 6^4$.

А) $(-\infty; -4]$; Б) $[-4; +\infty)$; В) $(-\infty; 4]$; Г) $[4; +\infty)$.

7. Розв'яжіть рівняння $2^{x+2} - 2^x = 96$.

А) 3; Б) 4; В) 5; Г) 6.

8. Знайдіть значення виразу $0{,}04^{\log_{0,2} 2}$.

А) 0,2; Б) $\sqrt{2}$; В) 2; Г) 4.

9. Чому дорівнює значення виразу $\log_a \sqrt{ab}$, якщо $\log_a b = 5$?

А) 3; Б) 2; В) 5; Г) установити неможливо.

10. Розв'яжіть рівняння $2 \cdot 25^x + 5^x - 1 = 0$.

А) -1; $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{1}{5}$; В) $-\log_5 2$; Г) коренів немає.

11. Яка область визначення функції $y = \frac{e^x}{\ln x}$?

А) $(0; +\infty)$; В) $(1; +\infty)$;

Б) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; Г) $(-\infty; +\infty)$.

12. Розв'яжіть рівняння $\log_x(x + 2) = 2$.

А) -1; 2; Б) -2; 1; В) 2; Г) 1.

13. Розв'яжіть рівняння $\log_{0,1}(x + 4) + \log_{0,1}(x + 6) = \log_{0,1} 35$.

А) -11; 1; Б) -1; 11; В) 11; Г) 1.

14. Розв'яжіть нерівність $\log_5 (x - 3) \leqslant 1$.

А) $(-\infty; 8]$; Б) $(3; 8]$; В) $[3; 8]$; Г) $(-\infty; 3)$.

15. Розв'яжіть нерівність $\log_7 0{,}4 \cdot \log_7 x < 0$.

А) $(1; 7)$; Б) $(-\infty; 1)$; В) $(1; +\infty)$; Г) $(0; 1)$.

16. Знайдіть множину розв'язків нерівності

$$\log_{0,3}(x^2 + 2x - 3) > \log_{0,3}(x - 1).$$

А) $(-2; 1)$; В) $(-\infty; +\infty)$;

Б) $(-3; -2) \cup (-2; 1)$; Г) $\varnothing$.

17. Скільки цілих розв'язків має нерівність

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2+6x)\geqslant -2?$$

А) 2; Б) 4; В) 6; Г) 11.

18. Знайдіть значення виразу $\log_3\left(\sqrt{a+18}-\sqrt{a-9}\right)$, якщо $\log_3\left(\sqrt{a+18}+\sqrt{a-9}\right)=5$.

А) -2; Б) $\frac{3}{5}$; В) 1; Г) знайти неможливо.

19. Установіть відповідність між заданими функціями (1–4) та їх областями визначення (А–Д):

1) $y=\dfrac{2}{2^x-4}$;

2) $y=\sqrt{4-2^x}$;

3) $y = \log_{0,2}(2 - x)$;

4) $y=\sqrt{\log_{0,2}(2-x)}$.

А) $(-\infty;\ 2)$;

Б) $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$;

В) $(-\infty;\ 2]$;

Г) $(2;\ +\infty)$;

Д) $[1;\ 2)$.

20. Установіть відповідність між заданими виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д):

1) $\log_4\sqrt{2}$;

2) $\log_{16}\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$;

3) $\log_6 25-2\log_6\dfrac{5}{6}$;

4) $\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 81$.

А) 4;

Б) $-\dfrac{3}{4}$;

В) $\dfrac{1}{4}$;

Г) 2;

Д) 1.

Похідна та інтеграл

Завдання в тестовій формі «Перевір себе» № 12

1. Знайдіть похідну функції $f(x)=\frac{6}{x^3}$.

А) $f'(x)=-\frac{18}{x^2}$; В) $f'(x)=\frac{2}{x^2}$;

Б) $f'(x)=-\frac{18}{x^4}$; Г) $f'(x)=\frac{2}{x^4}$.

2. Укажіть похідну функції $f(x)=\sqrt{4x+1}$.

А) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{4x+1}}$; В) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{4x+1}}$;

Б) $f'(x)=\frac{4}{\sqrt{4x+1}}$; Г) $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{4x+1}}$.

3. Знайдіть абсцису точки графіка функції $f(x) = x^2 - 5x$, у якій дотична до цього графіка утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 45°.

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

4. Розв’яжіть рівняння $f'(x) = g'(x)$, якщо

$$f(x)=\frac{x^3+2}{x},\quad g(x)=\frac{6x^2+2}{x}.$$

А) 0; −3; Б) 0; 3; В) 3; Г) коренів немає.

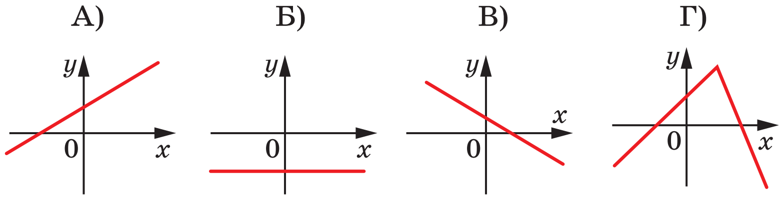
5. Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^2 + 3t - 2$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). У який момент часу t швидкість руху тіла становить 10 м/с?

А) $t = 4{,}5$ с; Б) $t = 3{,}5$ с; В) $t = 4$ с; Г) $t = 3$ с.

6. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x)=\frac{x-2}{x^2+1}$ у точці його перетину з віссю ординат?

А) 1; Б) −2; В) −3; Г) 13.

7. Укажіть рисунок, на якому може бути зображено графік похідної функції $y=\dfrac{-x^2+bx+c}{4}$.



8. Знайдіть проміжки спадання функції $f(x) = 3x^2 - x^3$.

А) $[0;\ 2]$; В) $(-\infty;\ 0]$ і $[2;\ +\infty)$;
Б) $[-2;\ 0]$; Г) $(-\infty;\ -2]$ і $[0;\ +\infty)$.

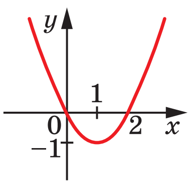
9. Функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел і диференційовна в кожній точці області визначення. На рисунку зображено графік функції $y = f'(x)$. Визначте точку мінімуму функції $y = f(x)$.

А) 2;

Б) 1;

В) 0;

Г) визначити неможливо.



10. Чому дорівнює найбільше значення функції $f(x) = x^3 - 3x$ на проміжку $[-2;\ 0]$?

А) -1; Б) -2; В) 0; Г) 2.

11. Для функції $f(x) = e^{2x} - \cos x$ знайдіть первісну F, графік якої проходить через початок координат.

А) $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}-\sin x-\dfrac{1}{2}$;

Б) $F(x) = e^{2x} - \sin x - 1$;

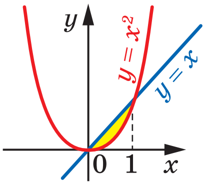
В) $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+\sin x-\dfrac{3}{2}$;

Г) $F(x)=\dfrac{e^{2x+1}}{2x+1}-\sin x-e$.

12. Знайдіть площу зафарбованої фігури, зображеної на рисунку.

А) $\frac{1}{3}$;   В) $\frac{1}{6}$;

Б) $\frac{2}{3}$;   Г) $\frac{1}{4}$.



13. Обчисліть інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos x \, dx$.

А) $\frac{1}{2}$;   Б) $-\frac{1}{2}$;   В) $\frac{1}{4}$;   Г) $-\frac{1}{4}$.

14. З натуральних чисел від 1 до 18 включно учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 18?

А) $\frac{1}{4}$;   Б) $\frac{1}{3}$;   В) $\frac{1}{6}$;   Г) $\frac{1}{18}$.

15. У лотереї розігрувалось 12 комп'ютерів, 18 фотоапаратів і 120 калькуляторів. Усього було випущено 15 000 лотерейних білетів. Яка ймовірність, придбавши один білет, не виграти жодного призу?

А) $\frac{1}{10}$;   Б) $\frac{1}{100}$;   В) $\frac{9}{10}$;   Г) $\frac{99}{100}$.

16. З двоцифрових парних чисел навмання вибирають одне число. Яка ймовірність того, що це число буде кратним числу 7?

А) $\frac{1}{9}$;   Б) $\frac{7}{45}$;   В) $\frac{1}{14}$;   Г) $\frac{2}{15}$.

17. У коробці лежать 12 білих і 16 червоних кульок. Яка ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться білою?

А) $\frac{3}{4}$;   Б) $\frac{3}{7}$;   В) $\frac{1}{12}$;   Г) $\frac{4}{7}$.

18. У коробці лежать олівці, з них 24 олівці — сині, 8 олівців — зелені, а решта — жовті. Скільки олівців лежить у коробці, якщо ймовірність того, що вибраний навмання олівець буде жовтим, становить $\frac{1}{3}$?

А) 48 олівців; Б) 54 олівці; В) 45 олівців; Г) 42 олівці.

19. Установіть відповідність між заданими функціями (1–4) та значеннями їх похідних (А–Д) у точці x_0:

1) $f(x) = 3\sin x - 2\cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$;

2) $f(x) = \frac{2}{1-x},\ x_0 = -1$;

3) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - e^{4x-4},\ x_0 = 1$;

4) $f(x) = \mathrm{ctg}^2\, x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

А) 2;

Б) $-\frac{1}{2}$;

В) $\frac{1}{2}$;

Г) −2;

Д) −4.

20. Установіть відповідність між заданими інтегралами (1–4) та їх значеннями (А–Д):

1) $\int\limits_0^1 dx$;

2) $\int\limits_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

3) $\int\limits_0^2 (x^3 - 1)\,dx$;

4) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{4}}$.

А) 2;

Б) $\frac{1}{2}$;

В) 4;

Г) 1;

Д) −4.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

1.3. 1) 2; 2) 1; 3) 0. **1.4.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0. **1.5.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -3; 3) $\frac{4}{9}$. **1.6.** 1) -2; 2) 0; 3) $-\frac{1}{3}$. **1.7.** 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) 0,1. **1.8.** 1) 1; 2) 3. **1.10.** Так. **1.11.** Рівність $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}_{n\ \text{доданків}}=$

$=\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\ldots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}_{n\ \text{доданків}}$ помилкова, оскільки теорему про границю суми можна використовувати для скінченної (фіксованої) кількості послідовностей. **1.14.** 1) 0; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) 1. **1.15.** 1) 0; 2) $-\frac{3}{2}$. **1.16.** Ні. Наприклад, у будь-якому проміжку $(0-\varepsilon;\ 0+\varepsilon)$ міститься безліч членів послідовності 0, 1, 0, 1, 0, 1, ... **1.17.** 1) Так; 2) так. **1.18.** Так. **1.19.** Послідовність залишиться збіжною; границя не зміниться. **1.20.** Ні. *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, послідовність, задану формулою $a_n=\pi n$. **1.21.** Ні. **1.22.** 1) *Вказівка*. Скористайтеся теоремою про границю добутку. **1.23.** 1) 4; 2) 2. **1.24.** 1) 6; 2) $\frac{1}{7}$.

2.10. 1) $y=4x+19$; 2) $y=-3x-2$; 3) $y=7$. **2.11.** 1) 45°; 2) 135°; 3) 0°. **2.12.** 1) $y=x\sqrt{3}+6-2\sqrt{3}$; 2) $y=-x\sqrt{3}+6+2\sqrt{3}$.

4.2. 1) 10; 2) 2; 3) -22; 4) 1,5; 5) 1; 6) 28. **4.3.** 1) 4; 2) 0,75; 3) 16; 4) 5. **4.4.** 1) 0,5; 2) 1; 3) 6. *Вказівка*. Розкрийте дужки у виразі $(1+x)^4$; 4) $\frac{5}{3}$. **4.5.** 1) -1; 2) 0,5. **4.6.** 1) $-\frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{9}$. **4.7.** 2. **4.8.** 0. **4.9.** $\frac{m}{n}$. **4.10.** $\frac{m}{n}$.

5.7. 1) Так; 2) ні. **5.8.** 1) Ні; 2) так. **5.9.** 1) -1; 2) $\frac{1}{4}$; 3) -3. **5.10.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) -2; 3) $\frac{2}{3}$. *Вказівка.* $\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=$ $=\frac{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}+1\right)}$. **5.11.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{16}$; 4) 3. *Вказівка.* $\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}=\frac{\left(\sqrt{6-x}-1\right)\left(\sqrt{6-x}+1\right)\left(3+\sqrt{4+x}\right)}{\left(3-\sqrt{4+x}\right)\left(3+\sqrt{4+x}\right)\left(\sqrt{6-x}+1\right)}$; 5) 4; 6) 3. *Вказівка.* $\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\frac{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$. **5.12.** 1) 4; 2) $-\frac{1}{56}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) $\frac{1}{144}$. **5.15.** 1) $[1; 3]$; 2) $[-4; -2]$; 3) $[0; \pi]$. **5.16.** 1) $[-5; -3]$; 2) $[2; 4]$; 3) $[0; \pi]$. **5.17.** $\left[0; \frac{1}{6}\right]$. **5.18.** $\left[0; \frac{1}{7}\right]$. *Вказівка.* Скористайтеся нерівністю $\frac{x^2}{4x^4+3x^2+1}\leqslant$ $\leqslant\frac{x^2}{2\sqrt{4x^4\cdot 1}+3x^2}$. **5.19.** 1) 2; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{9}{2}$; 5) $-\frac{99}{8}$; 6) 84.

6.7. 8 м/с. **6.8.** 1) 20 м/с; 2) 10 м/с. **6.9.** 1) 2,6; 2) 2. **6.10.** 1) 7; 2) 12.

7.6. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. **7.7.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.8.** 1) 13,5; 2) $\frac{13}{4}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{176}{3}$. **7.9.** 1) 5; 2) $\frac{3}{16}$. **7.10.** 1) $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$; 2) $f'(x)=$ $=-2x$. **7.11.** 1) $f'(x)=\frac{2}{x^3}$; 2) $f'(x)=2x+3$. **7.12.** 1) 3; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) 1. **7.13.** 1) -32; 2) $\frac{1}{27}$; 3) $-\frac{1}{27}$; 4) 1. **7.22.** 1) -1; 1; 2) 4; 3) 2; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **7.23.** 1) -2; 2) -27; 27; 3) -3; 3;

4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **7.24.** 1. Величина $s'\left(\frac{1}{2}\right)=1$ задає миттєву швидкість матеріальної точки в момент часу $t_0=\frac{1}{2}$.
7.25. 12.

8.15. $\frac{17}{9}$ м/с. **8.16.** 105 м/с. **8.19.** 2) $(-\infty;\ -1) \cup (0;\ +\infty)$; 4) $(1;\ 5)$; 6) усі числа, крім чисел виду $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **8.20.** 6) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **8.21.** 1) $y'=\frac{9}{x^4}-\frac{9}{x^{10}}$; 2) $y'=\frac{4}{x^3}-\frac{3}{x^2}-\frac{20}{x^6}$; 3) $y'=\frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$; 4) $y'=\cos x\cos 2x-2\sin x\sin 2x$; 5) $y'=\frac{\sin(2x+5)}{\cos^2 x}+2\,\mathrm{tg}\,x\cos(2x+5)$; 6) $y'=\frac{3(1-x)\sin 3x-\cos 3x}{(x-1)^2}$; 7) $y'=\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$; 8) $y'=(x+1)^2(x-2)^3(7x-2)$; 9) $y'=-\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$. **8.22.** 1) $y'=-\frac{4}{x^5}-\frac{8}{x^9}$; 2) $y'=\frac{30}{x^7}-\frac{1}{x^2}-\frac{12}{x^3}$; 3) $y'=\frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$; 4) $y'=2\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$; 5) $y'=(x-3)^3(x+2)^4(9x-7)$; 6) $y'=\dfrac{2\sin\frac{x}{4}-\frac{1}{4}(2x-3)\cos\frac{x}{4}}{\sin^2\frac{x}{4}}$.

8.23. 1) $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ +\infty)$; 2) $[-2;\ 1) \cup (1;\ 4]$; 3) $\left[-\frac{4}{3};2\right]$; 4) $[-1;\ 0) \cup (0;\ 1]$; 5) $-\frac{5\pi}{8}+\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{8}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{12}+\pi k \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{12}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **8.24.** 1) $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; 2) $(-3;\ -2) \cup (-2;\ -1)$; 3) $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2};+\infty\right)$; 4) $(-\infty;-2) \cup \left(\frac{4}{3};+\infty\right)$;

5) $\frac{\pi}{2}+\pi k<x<\pi+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}<x<\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. **8.25.** 16 кг·м/с. **8.26.** 400 Дж. **8.27.** 7 м. **8.28.** 1) $y'=-6\cos^2 2x\sin 2x$; 2) $y'=\dfrac{\cos\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{4}\right)}{10\sqrt{\sin\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{4}\right)}}$; 3) $y'=2\cos\frac{x}{3}\left(\sin\frac{x}{3}-5\right)^5$. **8.29.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 3) 0. **8.30.** 1) 2; 0; 2) −6; 0. **8.31.** 1) 2; −2; 2) −10; 2. **8.32.** 1) 3; 2) коренів немає. **8.33.** 1) 2; 2) $\frac{2}{3}$. **8.37.** 1) Не диференційовна; 2) може бути як диференційовною, так і не диференційовною. *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, функції $f(x)=|x|$, $g(x)=-|x|$. **8.38.** 1) Може бути як диференційовною, так і не диференційовною. *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, функції $f(x)=0$, $g(x)=|x|$. **8.40.** 1) $y=4x-8$; 2) $y=-4$; 3) $y=-x-3$. **8.42.** $y=9x+18$. **8.43.** $y=4x+9$.

9.1. 1) $y=x-1$; 2) $y=12x-43$; 3) $y=-4x+4$; 4) $y=\frac{2}{3}x+3$; 5) $y=x$; 6) $y=-1$; 7) $y=2x-\pi+1$; 8) $y=x+4$; 9) $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$. **9.2.** 1) $y=3x-4$; 2) $y=-2x+2$; 3) $y=-x+\frac{\pi}{2}$; 4) $y=1$; 5) $y=-2x-\pi-1$; 6) $y=-2{,}5x-1{,}5$; 7) $y=5x-18$. **9.3.** 1) $y=-3x-3$; 2) $y=\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{2}$. **9.4.** 1) $y=-5x+2$; 2) $y=\frac{3\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **9.5.** 1) $y=6x-3$; 2) $y=2x-2$, $y=2x+2$. **9.6.** 1) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$; 2) $y=-3x+9$, $y=3x$. **9.7.** (2; 7). **9.8.** (1; 1), (−1; −1). **9.9.** Дотичні перетинаються. **9.10.** 1) (4; −9); 2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{5}{4}\right)$; 3) $\left(\frac{1}{12};\frac{3}{2}\right)$; 4) (5; 4), (−1; −2). **9.11.** 1) (0; 0);

2) (0; −1), $\left(\frac{4}{3}; -\frac{23}{27}\right)$. **9.14.** 1) $y = -1$, $y = 3$; 2) $y = 1$, $y = -7$. **9.15.** $y = -5$, $y = \frac{17}{3}$. **9.16.** 1) $y = -x - 4$; 2) $y = 3x - 3$; 3) $y = 2x - 8$, $y = 2x + 19$. **9.17.** 1) $y = -7x - 9$; 2) $y = x + \frac{1}{4}$. **9.18.** Ні. **9.19.** Так, $x_0 = 0$. **9.20.** Так, $x_0 = 1$. **9.21.** 8. **9.22.** 2. **9.23.** $y = -x^2$. **9.24.** (1,5; −2). *Вказівка*. Скористайтеся тим, що прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $k_1k_2 = -1$. **9.25.** Ні. **9.26.** $b = c = 2$. **9.27.** $a = 3$, $b = 1$. **9.28.** $y = 2\sqrt{2}x + 1$, $y = -2\sqrt{2}x + 1$. **9.29.** $y = 2x - 5$, $y = 6x - 13$. **9.30.** $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. **9.31.** (1; 4). **9.32.** $\left(0; \frac{7}{2}\right)$. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що у перпендикулярних прямих добуток кутових коефіцієнтів дорівнює −1. **9.33.** (0; −3). **9.34.** 2. **9.35.** 0. **9.36.** $y = 8x - 20$. *Вказівка*. Запишіть рівняння дотичних до графіків функцій f і g у точках A $(x_1; f(x_1))$ і B $(x_2; g(x_2))$ відповідно, а потім установіть, за яких умов ці дотичні збігаються. **9.37.** $y = 8x + 4$. **9.38.** 4) (−9; −1) ∪ (1; 3); 5) [1; 3) ∪ (3; 4]; 6) (−1; 1) ∪ (1; 3) ∪ (3; +∞).

10.3. 1) $\sqrt{\frac{7}{3}}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $2 - \frac{2}{\pi}\arccos\frac{2}{\pi}$. **10.4.** 1) 2; 2) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{4}{\pi}\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

11.1. 1) Зростає на [−2; +∞), спадає на (−∞; −2]; 2) зростає на (−∞; 0] і [1; +∞), спадає на [0; 1]; 3) зростає на [−1; 7], спадає на (−∞; −1] і [7; +∞); 4) зростає на [−1; 0] і [1; +∞), спадає на (−∞; −1] і [0; 1]; 5) зростає на $\mathbb{R}$; 6) зростає на [2; +∞), спадає на (−∞; 2]. **11.2.** 1) Зростає на (−∞; 3], спадає на [3; +∞); 2) зростає на (−∞; −3] і [1; +∞), спадає на [−3; 1]; 3) зростає на [−2; 0] і [2; +∞), спадає на (−∞; −2] і [0; 2]; 4) зростає на [−1; +∞), спадає на (−∞; −1]. **11.3.** 1) Зростає на [0; 1] і [2; +∞), спадає на (−∞; 0] і [1; 2];

2) зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 1]$; 3) зростає на $(-\infty; -3]$, $[-1; 1]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $[-3; -1]$ і $[1; 3]$; 4) зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0)$ і $(0; 1]$; 5) зростає на $(-\infty; -3]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $[-3; 0)$ і $(0; 3]$; 6) зростає на $(-\infty; -3]$ і $[-1; +\infty)$, спадає на $[-3; -2)$ і $(-2; -1]$; 7) зростає на $[1; 3)$ і $(3; 5]$, спадає на $(-\infty; 1]$ і $[5; +\infty)$; 8) спадає на $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$ і $(3; +\infty)$. **11.4.** 1) Зростає на $[0; 2]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$ і $[2; 3]$; 2) зростає на $(-\infty; 3]$, спадає на $[3; +\infty)$; 3) спадає на $(-\infty; 5)$ і $(5; +\infty)$; 4) зростає на $(-\infty; -2]$ і $[10; +\infty)$, спадає на $[-2; 4)$ і $(4; 10]$; 5) зростає на $(-\infty; 0)$ і $[2; +\infty)$, спадає на $(0; 2]$; 6) зростає на $(-\infty; -2)$ і $(-2; 0]$, спадає на $[0; 2)$ і $(2; +\infty)$. **11.5.** $(-\infty; x_1]$ і $[x_2; x_3]$. **11.7.** $(-\infty; -3]$ і $[3; +\infty)$. **11.12.** 1) Зростає на $\mathbb{R}$; 2) зростає на $\mathbb{R}$; 3) зростає на проміжках виду $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k; \frac{7\pi}{3}+2\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **11.13.** 1) Спадає на $\mathbb{R}$; 2) зростає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{7\pi}{4}+2\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **11.14.** 1) Зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -4]$; 2) зростає на $[0; 3]$, спадає на $[3; 6]$. **11.15.** Зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -1]$. **11.16.** 1) $(-\infty; -3) \cup \cup [2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -4) \cup [2; 5)$. **11.17.** 1) $(0; 7) \cup (7; +\infty)$; 2) $[-3; 0]$. **11.18.** Зростає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ і $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{3\pi}{4}+\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{4}+\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **11.19.** Зростає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{6}+\pi k; \frac{5\pi}{6}+\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi k; \pi k\right)$ і $\left(\pi k; \frac{\pi}{6}+\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **11.20.** 1) $(-\infty; 0]$; 2) $[12; +\infty)$; 3) $[0; +\infty)$; 4) $\left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

11.21. 1) $(-\infty; 0]$; 2) $(-\infty; -6]$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $[-4; 4]$. **11.22.** $[12; 14]$. **11.23.** $(-\infty; -3]$. **11.24.** $\left[-\frac{14}{3}; -3\right]$. **11.27.** -1. **11.28.** 0. **11.29.** 0. **11.30.** $(1; +\infty)$. *Вказівка*. Доведіть, що функція $f(x) = x^7 - 2x^4 + 3x - 2$ зростає на $\mathbb{R}$, причому $f(1) = 0$. **11.31.** $(-\infty; 1)$. **11.32.** $(1; 1)$. *Вказівка*. Розгляньте функцію $f(t) = t - \sin t$. Покажіть, що ця функція зростає на $\mathbb{R}$. Тоді з рівності $f(x) = f(y)$ випливає, що $x = y$. **11.33.** $(4; 4)$.

12.6. 1) $x_{\min} = 0$; 2) $x_{\min} = 3$; 3) $x_{\min} = -2$, $x_{\max} = 2$; 4) $x_{\min} = -2$, $x_{\min} = 2$, $x_{\max} = 0$; 5) $x_{\min} = 5$, $x_{\max} = -1$; 6) $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -1$, $x_{\max} = 1$. **12.7.** 1) $x_{\min} = 1$, $x_{\max} = -1$; 2) $x_{\min} = -2$, $x_{\max} = 2$; 3) $x_{\max} = 2$; 4) $x_{\min} = 1$, $x_{\max} = -7$; 5) $x_{\min} = \frac{3}{2}$; 6) $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -\frac{1}{4}$, $x_{\max} = 1$. **12.9.** Жодної. **12.10.** 1) Зростає на $[6; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 6]$, $x_{\min} = 6$; 2) зростає на $\left(-\infty; \frac{8}{5}\right]$ і $[2; +\infty)$, спадає на $\left[\frac{8}{5}; 2\right]$, $x_{\min} = 2$, $x_{\max} = \frac{8}{5}$; 3) зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$. **12.11.** 1) Зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$; 2) зростає на $(-\infty; -4]$ і $[0; +\infty)$, спадає на $[-4; 0]$, $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -4$. **12.14.** 1) Зростає на $(-\infty; 0)$ і $[2; +\infty)$, спадає на $(0; 2]$, $x_{\min} = 2$; 2) зростає на $(-\infty; 1]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $[1; 2)$ і $(2; 3]$, $x_{\min} = 3$, $x_{\max} = 1$; 3) зростає на $(-\infty; 0]$, спадає на $[0; +\infty)$, $x_{\max} = 0$; 4) зростає на $\left[-\sqrt{6}; 0\right)$ і $\left[\sqrt{6}; +\infty\right)$ спадає на $\left(-\infty; -\sqrt{6}\right]$ і $\left(0; \sqrt{6}\right]$, $x_{\min} = -\sqrt{6}$, $x_{\min} = \sqrt{6}$; 5) зростає на $(0; 2]$, спадає на $(-\infty; 0)$ і $[2; +\infty)$, $x_{\max} = 2$; 6) зростає на $(3; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 3)$, точок екстремуму немає; 7) зростає на $(-\infty; -4)$ і $(-4; 0]$, спадає на $[0; 4)$ і $(4; +\infty)$, $x_{\max} = 0$; 8) зростає на $[0; 1]$, спадає на $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$. **12.15.** 1) Зростає на $(-\infty; -6]$ і $[2; +\infty)$, спадає на $[-6; -2)$ і $(-2; 2]$, $x_{\max} = -6$, $x_{\min} = 2$; 2) зростає на $(-\infty; -3]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $[-3; 0)$ і $(0; 3]$, $x_{\max} = -3$, $x_{\min} = 3$; 3) зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$; 4) зростає

на $(-\infty;\ -1)$, спадає на $(-1;\ +\infty)$, точок екстремуму немає; 5) зростає на $[0;\ 4)$ і $(4;\ +\infty)$, спадає на $(-\infty;\ -4)$ і $(-4;\ 0]$, $x_{\min} = 0$; 6) зростає на $\left[\frac{1}{16}; +\infty\right)$, спадає на $\left[0; \frac{1}{16}\right]$, $x_{\min} = \frac{1}{16}$.
12.18. 1) Спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$, зростає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right]$, $x_{\max} = -\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x_{\min} = \frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) зростає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi k; -\frac{\pi}{6}+\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi k; \frac{2\pi}{3}+\pi k\right]$, $x_{\max} = -\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x_{\min} = -\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.19.** 1) Зростає на проміжках виду $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right]$, $x_{\max} = \frac{\pi}{6}+2\pi k$, $x_{\min} = \frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) зростає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{8}+\pi k; \frac{\pi}{8}+\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{8}+\pi k; \frac{7\pi}{8}+\pi k\right]$, $x_{\max} = \frac{\pi}{8}+\pi k$, $x_{\min} = -\frac{\pi}{8}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.20.** -3; 3. **12.21.** -1; 1. **12.22.** 1) Зростає на $\left[0; \frac{4}{5}\right]$, спадає на $(-\infty;\ 0]$ і $\left[\frac{4}{5}; 1\right]$, $x_{\max} = \frac{4}{5}$, $x_{\min} = 0$; 2) зростає на $\left[0; \frac{1}{3}\right]$, спадає на $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$, $x_{\max} = \frac{1}{3}$; 3) зростає на $[0;\ 1]$, спадає на $[1;\ +\infty)$, $x_{\max} = 1$; 4) зростає на $(-\infty;\ 2{,}5]$, спадає на $[2{,}5;\ 3)$, $x_{\max} = 2{,}5$. **12.23.** 1) Зростає на $\left[-2; -\frac{8}{5}\right]$ і $[0;\ +\infty)$, спадає на $\left[-\frac{8}{5}; 0\right]$, $x_{\max} = -\frac{8}{5}$, $x_{\min} = 0$; 2) зростає на $\left[0; \frac{2}{5}\right]$ і $[2;\ +\infty)$,

спадає на $\left[\frac{2}{5};2\right]$, $x_{\max}=\frac{2}{5}$, $x_{\min}=2$; 3) зростає на $\left[\frac{7}{3};+\infty\right)$, спадає на $\left(1;\frac{7}{3}\right]$, $x_{\min}=\frac{7}{3}$. **12.24.** Ні. **12.25.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **12.26.** 1) Ні; 2) так (якщо $D(f)=\mathbb{R}$, то $x_{\min}=x_0$). **12.27.** Може. *Вказівка*. Див. рисунок. **12.28.** Ні. *Вказівка*. Див. рисунок.

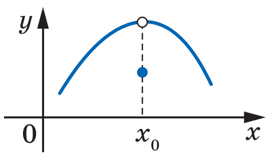


Рис. до задачі 12.27

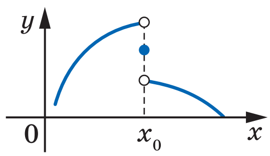


Рис. до задачі 12.28

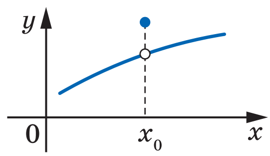


Рис. до задачі 12.29

12.29. Так. *Вказівка*. Див. рисунок. **12.30.** 1) $x_{\min}=\frac{\pi}{8}+\pi k$, $x_{\max}=-\frac{3\pi}{8}+\pi k$; $k\in\mathbb{Z}$; 2) $x_{\min}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x_{\max}=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $x_{\min}=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_{\max}=\frac{\pi}{12}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 4) $x_{\min}=\pi k$, $x_{\max}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.31.** 1) $x_{\min}=\frac{2\pi}{3}+\pi k$, $x_{\max}=\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $x_{\min}=\pi+2\pi k$, $x_{\max}=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) точок екстремуму немає. **12.32.** $(-1;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$. **12.33.** $(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$. **12.34.** 1. **12.35.** 1. **12.36.** 1. **12.37.** 2. **12.38.** 1) −25; 2) −13; 3) −22. **12.39.** 1) 26; 2) 17; 3) −10.

13.1. 1) 4; 0; 2) 13; 4; 3) 30; 4; 4) −3; −30; 5) 60; −75; 6) −4; −8. **13.2.** 1) 0; $-\frac{16}{3}$; 2) 1; −2; 3) 48; −6; 4) 0; −28. **13.3.** 1) 10; 6; 2) 5; $\sqrt{13}$; 3) 100; 0; 4) −2; −2,5. **13.4.** 1) 5; 3; 2) 2; −2; 3) 81; 0; 4) 10; 6. **13.5.** 1) $\sqrt{2}$; −1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{2+\pi\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2-\pi\sqrt{3}}{2}$. **13.6.** 1) 2; −1; 2) 2; −2. **13.7.** 8 = 6 + 2. **13.8.** 12 = 8 + 4. **13.9.** 1) $\frac{3}{2}$; 1; 2) −3; −4; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; −2.

13.10. 1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 0; 2) 4; −2. **13.11.** 180 = 40 + 80 + 60. **13.12.** 18 = 8 + 3 + 7. **13.13.** 30 см^2. **13.14.** 8 см і $2\sqrt{3}$ см. **13.15.** $20\sqrt{2}$ см і $10\sqrt{2}$ см. **13.16.** $\frac{24\sqrt{5}}{5}$ см, $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ см. **13.17.** 32. **13.18.** $12\sqrt{6}$. **13.19.** 16 см. **13.21.** $2a$. **13.22.** $\frac{\pi}{3}$. **13.23.** $\frac{\pi}{3}$. **13.24.** $1{,}5R$. **13.25.** $\left(\frac{16}{9}; \frac{4}{3}\right)$. **13.26.** $\left(\frac{7}{3}; -\frac{26}{9}\right)$. **13.27.** Шукана точка знаходиться на відстані 25 км від пункту C. **13.28.** 60°. **13.30.** $\frac{3}{25}$; −38. *Вказівка*. Дослідіть функцію на відрізках [0; 1] і [1; 2]. **13.31.** 105; $-\frac{11}{27}$. **13.32.** 4. **13.33.** −3.

14.1. 6) $80\,(2x-1)^3$; 7) $-9\sin 3x$; 8) $-2\cos 2x$; 10) $2\cos x - x\sin x$. **14.2.** 5) $54\,(1-3x)$; 6) $-4\cos 2x$; 7) $2\cos 2x$; 8) $-2\sin x - x\cos x$. **14.3.** 1) −26,5; 2) 53. **14.4.** 14 м/с^2. **14.5.** 10 м/с^2, 5 м/с^2. **14.6.** 90 Н. **14.7.** 1) Опукла вгору на $(-\infty; 0]$, опукла вниз на $[0; +\infty)$, $x = 0$ — точка перегину; 2) опукла вгору на $[1; 3]$, опукла вниз на $(-\infty; 1]$ і $[3; +\infty)$, $x = 1$ і $x = 3$ — точки перегину. **14.8.** 1) Опукла вгору на $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$, опукла вниз на $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$, $x = \frac{2}{3}$ — точка перегину; 2) опукла вгору на $[1; 2]$, опукла вниз на $(-\infty; 1]$ і $[2; +\infty)$, $x = 1$ і $x = 2$ — точки перегину. **14.9.** 0. **14.10.** 0. **14.13.** 1) Опукла вгору на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right]$ і $\left[0; \sqrt{3}\right]$, опукла вниз на кожному з проміжків $\left[-\sqrt{3}; 0\right]$ і $\left[\sqrt{3}; +\infty\right)$, $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ — точки перегину; 2) опукла вгору на $(-\infty; -2]$, опукла вниз на $[-2; 1)$ і $(1; +\infty)$, $x = -2$ — точка перегину. **14.14.** 1) Опукла вгору на $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, опукла вниз на $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ і $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$, $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ і $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ — точки перегину; 2) опукла вгору на $(-\infty; -1)$ і $(-1; 2]$, опукла вниз на $[2; +\infty)$, $x = 2$ — точка перегину. **14.15.** Опукла вгору на кожному з проміжків виду $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$, опукла вниз на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, точками перегину є точки виду $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **14.16.** Опукла вгору на кожному з проміжків виду $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right]$, опукла вниз на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right]$, точками перегину є точки виду $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

15.1. *Вказівка.* Див. рисунок. **15.2.** *Вказівка.* Див. рисунок. **15.3.** *Вказівка.* Див. рисунок. **15.4.** *Вказівка.* Див. рисунок. **15.5.** Якщо $a < -1$ або $a > 0$, то 1 корінь; якщо $a = -1$ або $a = 0$, то 2 корені; якщо $-1 < a < 0$, то 3 корені. **15.6.** Якщо $a > 4$, то коренів немає; якщо $a = 4$ або $a < 0$, то 2 корені; якщо $a = 0$, то 3 корені; якщо $0 < a < 4$, то 4 корені. **15.7.** *Вказівка.* Див. рисунок. **15.8.** *Вказівка.* Див. рисунок. **15.10.** 2) $-\frac{1}{6}$; 3) $\frac{4}{7}$; 4) 4; 5) 21; 6) $\frac{225}{256}$.

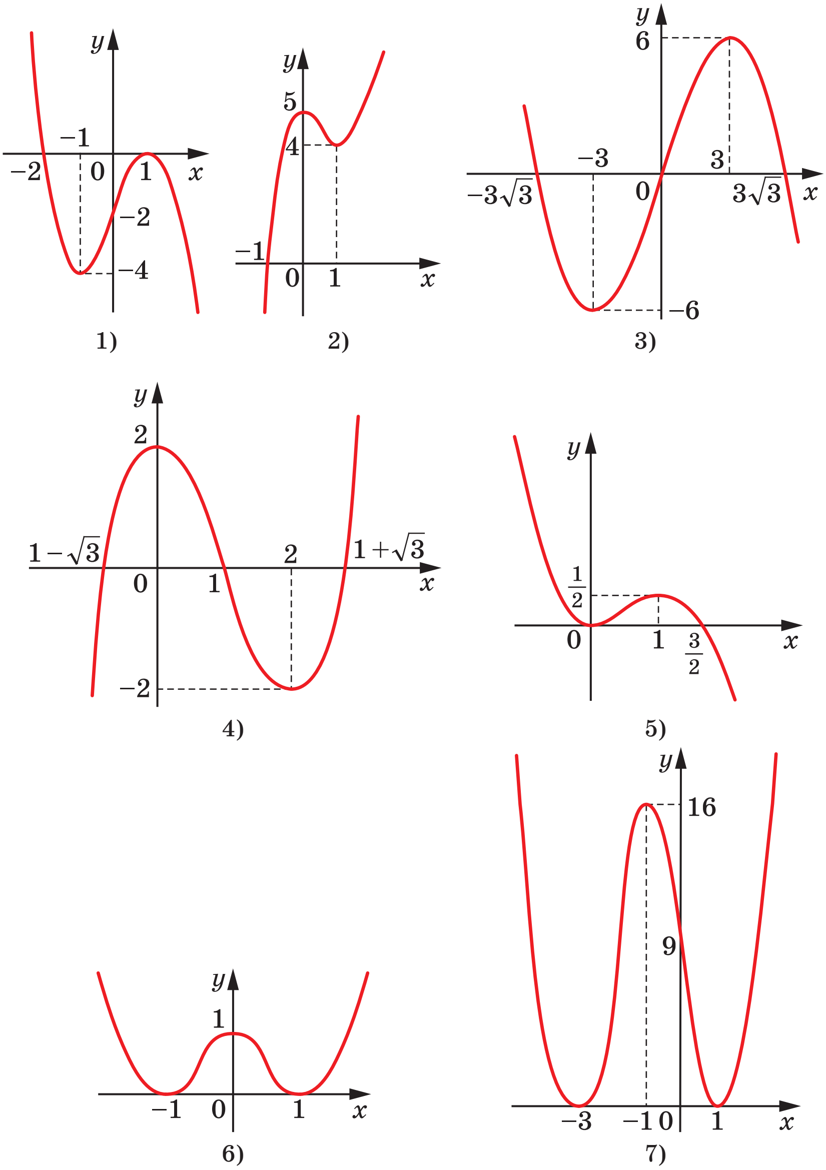


Рис. до задачі 15.1

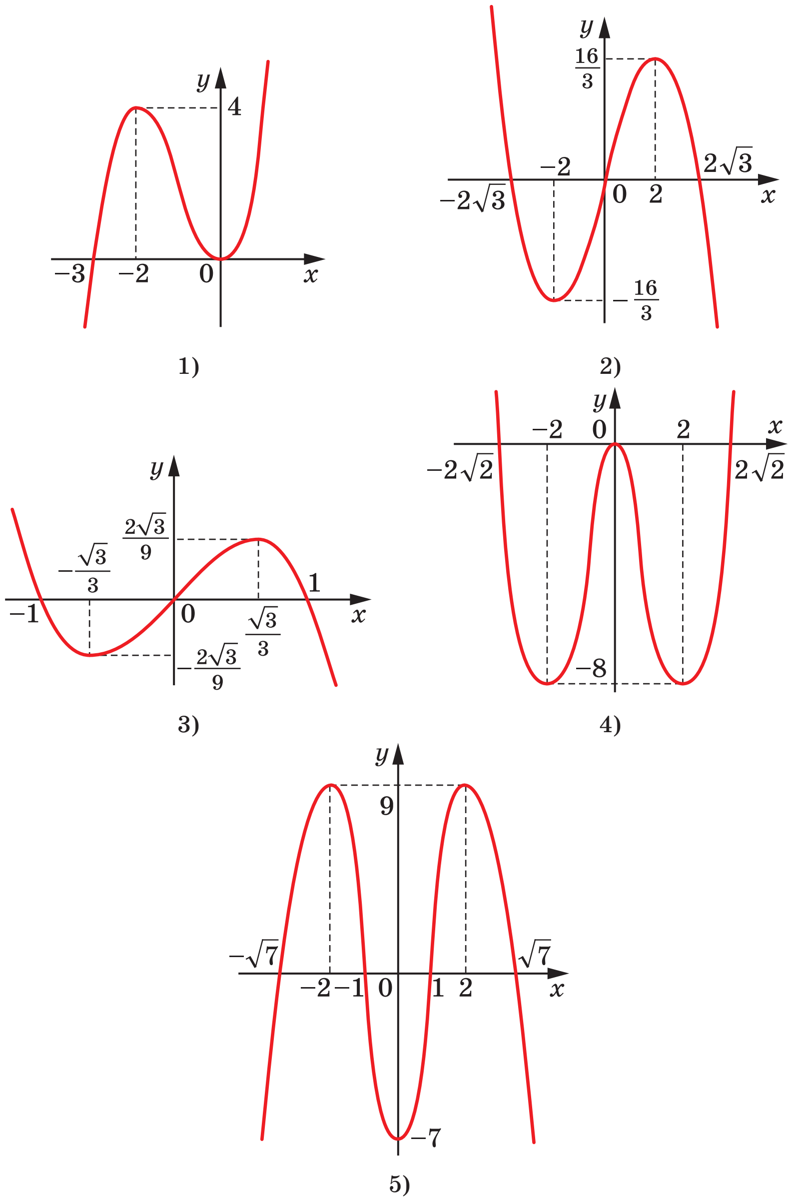


Рис. до задачі 15.2

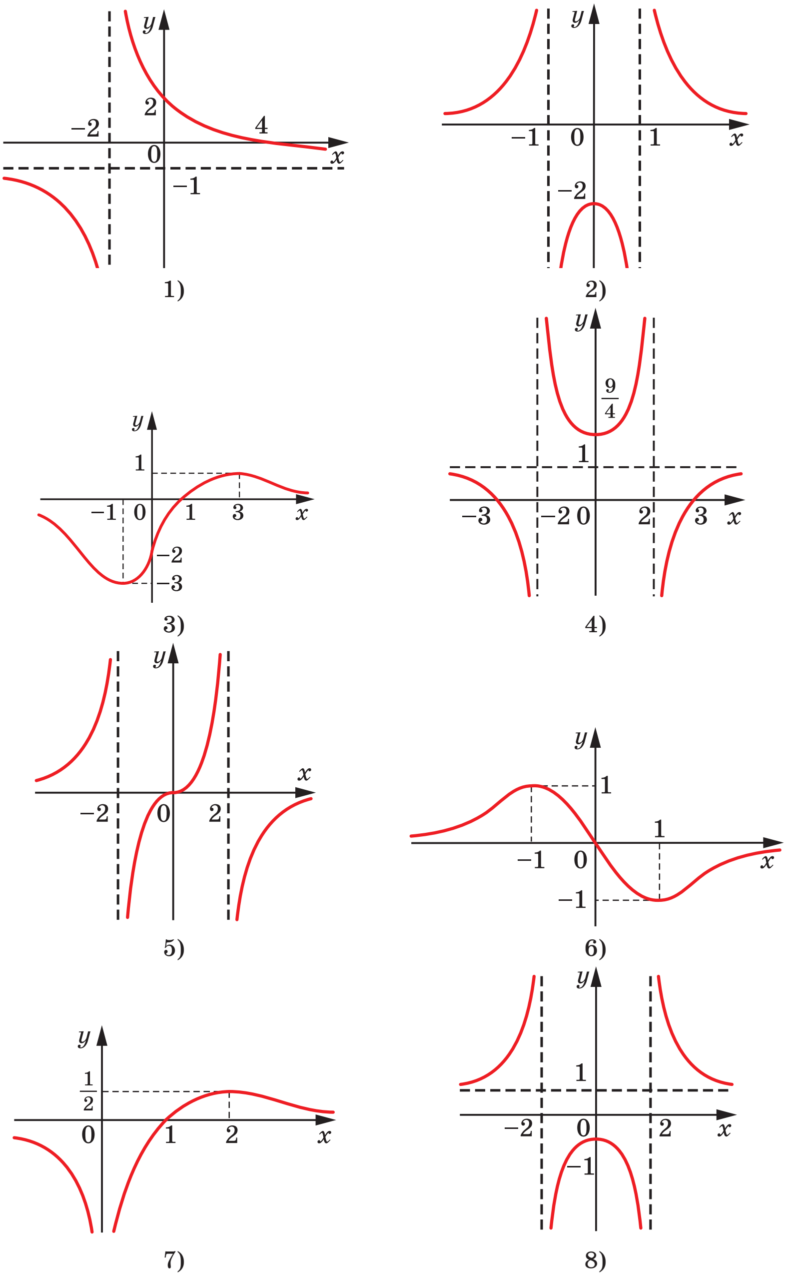


Рис. до задачі 15.3

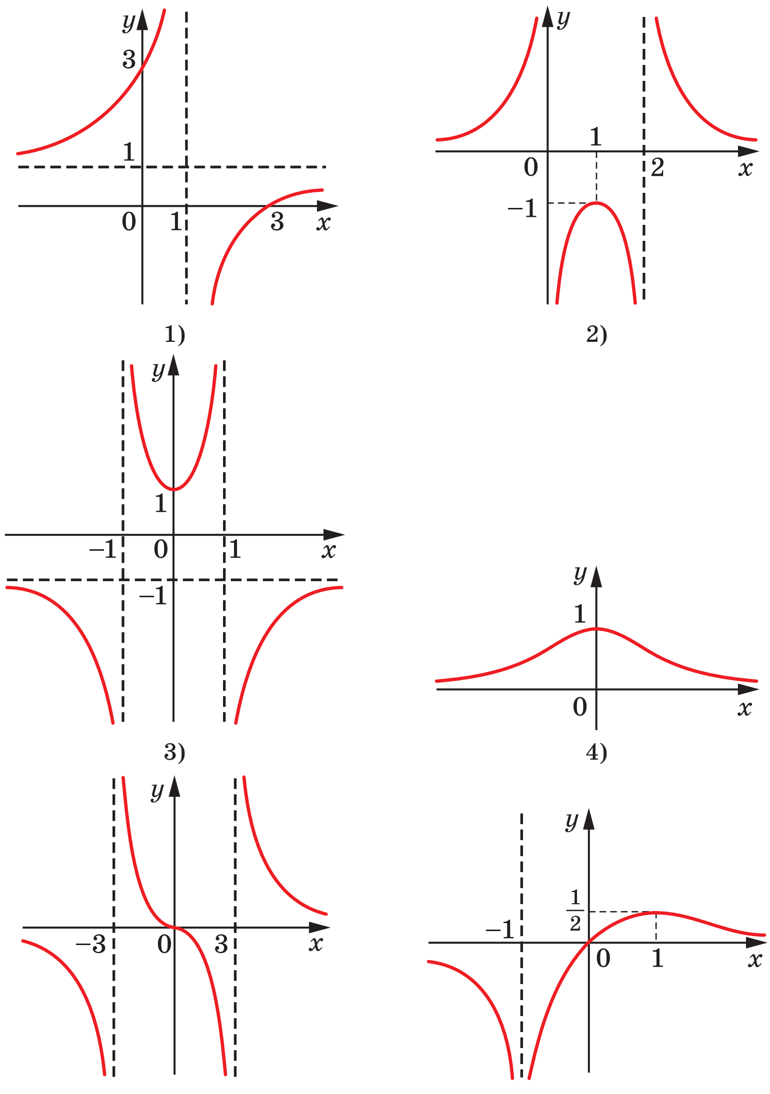
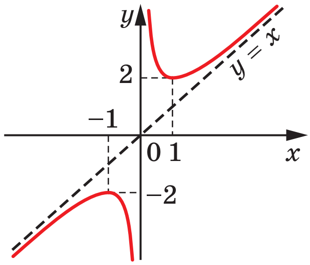
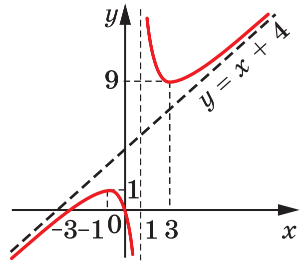


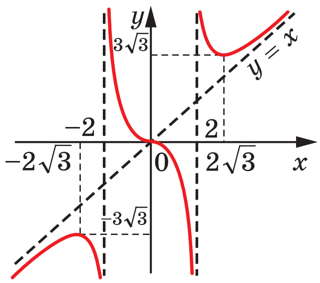
Рис. до задачі 15.4



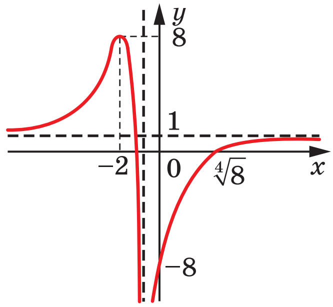
1)



2)

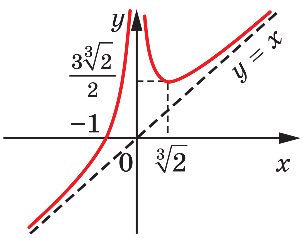


3)

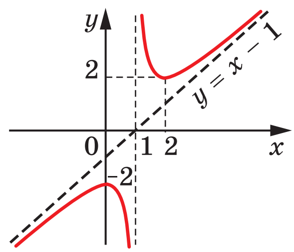


4)

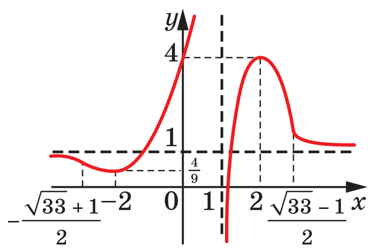
Рис. до задачі 15.7



1)



2)



3)

Рис. до задачі 15.8

16.15. 1) $-6a^{\sqrt{5}}-13$; 2) $\frac{1}{a^{2\sqrt{7}}}$; 3) $\frac{2a^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}}$; 4) $2a^{\sqrt[3]{3}}-a^{2\sqrt[3]{3}}$. **16.16.** 1) $a^{\sqrt{6}}+1$; 2) $4^{\frac{1}{\pi}}ab$. **16.17.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні. **16.18.** 3) $(-4;\ +\infty)$; 4) $[1;\ +\infty)$. **16.19.** 36. **16.20.** $[-2;\ 4]$. **16.22.** 1) $(-\infty;\ +\infty)$; 2) $[0;\ +\infty)$. **16.23.** $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. **16.28.** $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-5,2}>\left(7-4\sqrt{3}\right)^{5,6}$. *Вказівка*. Числа $7+4\sqrt{3}$ і $7-4\sqrt{3}$ є взаємно оберненими. **16.29.** 1) Коренів немає; 2) 3 корені; 3) безліч коренів; 4) 2 корені. **16.30.** 1) 1 корінь; 2) безліч коренів; 3) 2 корені. **16.33.** *Вказівка*. Знайдіть область визначення даної функції. **16.34.** 1) 4; $\frac{1}{4}$; 2) 1; –1. **16.35.** 1) 6; $\frac{1}{6}$; 2) 6; $5\frac{1}{5}$. **16.36.** 1) $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; 2) $[-1;\ 1]$; 3) $[-1;\ 1]$. **16.37.** 1) $(-\infty;\ +\infty)$; 2) $[-1;\ 1]$; 3) $\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$. **16.38.** 2) Див. рисунок.

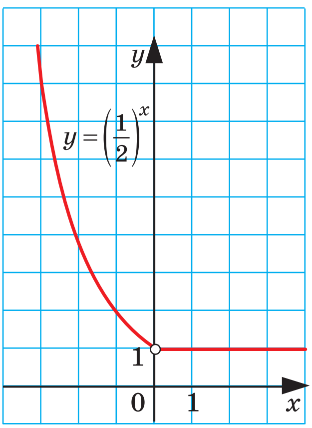


Рис. до задачі 16.38 (2)

16.42. 1) 0. *Вказівка*. $2^{\cos x}\leqslant 2$, $x^2+2\geqslant 2$; 2) 0. **16.43.** 1) 0; 2) 0. **16.44.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $\{0\}$; 3) $[0;\ +\infty)$. **16.45.** $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; 2) $\{0\}$. **16.46.** Непарна. **16.47.** Непарна. **16.48.** Парна. **16.49.** Непарна. **16.50.** $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. *Вказівка*. З'ясуйте, при яких значеннях параметра a рівняння $\frac{t-1}{t-4}=a$ має хоча б один додатний корінь. **16.51.** $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$. **16.54.** 3) $33\cdot2^{x-4}$; 4) $13\cdot3^{x-1}$; 5) $5\cdot2^{x+1}$; 6) $-29\cdot6^{x-1}$; 7) $12\cdot9^x$; 8) $576\cdot5^{x-2}$.

17.3. 1) 1; 2) 3; 3) 3; 4) 1; 5) 3; 6) 2. **17.4.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 3. **17.5.** 1) 1; 2; 2) 2; 3) 1; 4) 2. **17.6.** 1) 1; 2) −1; 2. **17.7.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 2; 5) −2; 6) $\frac{1}{10}$. **17.8.** 1) $-\frac{5}{2}$; $\frac{1}{4}$; 2) $(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) 6,5. **17.9.** 1) 5; 2) 2; 3) 1; 4) 3; 5) $\frac{4}{3}$; 6) 3; 7) 2; 8) 0; $\frac{1}{2}$. **17.10.** 1) 1; 2) 2; 3) 2; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 4; 6) 0; $\frac{1}{3}$. **17.11.** 1) −1; 1; 2) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) 1; 5) −1; 2; 6) 1. **17.12.** 1) −1; 1; 2) 1; 2; 3) 1; 4) −1; 5) 0; 6) 2. **17.13.** 1) 2; 2)−1; 1; 3) 2. **17.14.** 1) 2; 2) 3; 3) 4. **17.15.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) 3; −3; 3) 3; 4) 6; 5) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$; 7) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **17.16.** 1) 1; 2) 3; 3) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **17.17.** 1) 0; 1; 2) 0; −1; 3) −1; 4) 0. **17.18.** 1) 0; 1; 2) 0; 2. **17.19.** 2. **17.20.** 0. **17.21.** −2; 2. *Вказівка*. Числа $2+\sqrt{3}$ і $2-\sqrt{3}$ є взаємно оберненими. **17.22.** −2; 2. **17.23.** 1) −1; 0; 1. *Вказівка*. Нехай $2^x+\frac{1}{2^x}=t$. Тоді $4^x+\frac{1}{4^x}=\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)^2-2\cdot2^x\cdot\frac{1}{2^x}=t^2-2$; 2) −1; 0; 1. **17.24.** $(-\infty;\ 2]\cup\{5\}$. **17.25.** $[-2;\ 3]$. **17.26.** $(1;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$. **17.27.** 1) 1; 2) 2; 3) 5; 4) 3. **17.28.** 1) 2; 2) 4; 3) 5; 4) 3. **17.29.** $(-\infty;\ 0]\cup\{1\}$. **17.30.** $(-\infty;0)\cup\left\{1;\sqrt{3}\right\}$. **17.31.** 1; 3. **17.32.** 1; 2.

18.4. 1) 5; 2) 3; 3) 4. **18.5.** 1) −5; 2) 7. **18.6.** 1) $[0;\ +\infty)$; 2) $(1;\ +\infty)$. **18.7.** 1) $(-\infty;\ -2]$; 2) $(-\infty;\ 4]$. **18.8.** 1) $(-\infty;\ 1)\cup(5;\ +\infty)$; 2) $\left[-3;\frac{1}{3}\right]$; 3) $(-5;\ -3)\cup(3;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ 0)$; 5) $(0;\ 4]$;

6) $[-1;\ 2]$. **18.9.** 1) $(-\infty;\ -1) \cup (2;\ +\infty)$; 2) $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty;\ -2) \cup (1;\ 2)$; 4) $(-1;\ +\infty)$. **18.10.** 1) $(-1;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 2)$; 3) $(5;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ -1]$; 5) $(-\infty;\ 0]$; 6) $(-\infty;\ 1)$. **18.11.** 1) $(-\infty;\ 2)$; 2) $[0;\ +\infty)$; 3) $(3;\ +\infty)$; 4) $(1;\ +\infty)$. **18.12.** 1) $(2;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 1)$; 3) $[0;\ 1]$; 4) $(-\infty;\ -3] \cup [-2;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ 1]$; 6) $[1;\ +\infty)$. **18.13.** 1) $(-\infty;\ 0]$; 2) $[6;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -1) \cup (0;\ +\infty)$; 4) $[0;\ 2]$. **18.14.** 1) $(-\infty;\ 2) \cup (2;\ 3]$; 2) $(-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$. **18.15.** 1) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; 2\right]$; 2) $[-2;\ 5)$. **18.16.** 1) $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$; 2) $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$. **18.17.** 1) $(0;\ 1)$; 2) $\left(-\infty; \frac{7}{4}\right]$. **18.18.** 1) $(2;\ +\infty)$; 2) $(-3;\ 1)$; 3) $(-\infty;\ -2] \cup [0;\ +\infty)$; 4) $\{0\}$. **18.19.** 1) $(1;\ +\infty)$; 2) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. **18.20.** $[0;\ 1]$. **18.21.** $[0;\ 4]$. **18.22.** 1) $(0;\ 1)$; 2) $(-\infty;\ -1] \cup (0;\ +\infty)$. **18.23.** 1) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; 2) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ 1]$. **18.24.** 1) $(-1;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$; 2) $(0;\ 2)$. **18.25.** $(-\infty;\ -3) \cup (0;\ 3)$. **18.26.** $[0;\ 2]$. **18.27.** $[0;\ 1]$. **18.28.** 1) $(1;\ +\infty)$; 2) $(2;\ +\infty)$. **18.29.** $(-\infty;\ 3)$. **18.30.** $[3;\ +\infty) \cup \{-2\}$. **18.31.** $(-\infty;\ -2] \cup \{4\}$. **18.32.** Якщо $a \geqslant 1$, то $x = 1$; якщо $a < 1$, то $x \in [a;\ 1]$. **18.33.** Якщо $a < 1$, то $x \in (-\infty;\ a] \cup \{1\}$; якщо $a \geqslant 1$, $x \in (-\infty;\ 1]$.

19.21. 4) 144; 5) 64; 6) 1; 7) 0; 8) 48. **19.22.** 4) 9; 5) 10; 7) 2. **19.23.** 1) -3; 2) -1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $-\frac{1}{4}$; 8) $-\frac{1}{2}$. **19.24.** 1) 1; 2) -1; 3) 0; 4) -1. **19.25.** 1) 4; 2) 60; 3) 180; 4) 20; 5) 0,1. **19.26.** 1) 72; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 10. **19.27.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -3. **19.28.** 1) -5; 2) -2. **19.29.** 1) 2; 2) 4. **19.30.** 1) 6; 2) 9. **19.31.** 30. **19.32.** 21. **19.33.** $\log_a b$. **19.34.** $\log_b a$. **19.37.** 1) $-1 < x < 1$; 2) $x \neq 1$; 3) $x < 2$; 4) $x \neq 2$. **19.38.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **19.39.** $\lg 2$. *Вказівка.* У кожному з логарифмів перейдіть до основи 10.

19.40. $\frac{5}{2}$. **19.46.** $\frac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_a x + \log_b x}$. *Вказівка.* $\log_x ab = \log_x a + \log_x b = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x}$. **19.47.** *Вказівка.* У виразі $\log_{ab} x$ перейдіть до логарифма з основою a. **19.48** –3. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\log_{ab} b + \log_{ab} a = 1$. **19.49.** $\frac{2a+b+1}{2b+1}$. **19.50.** 1) $\frac{2(2a-1)}{3(2-a)}$; 2) $\frac{a+b}{1-a}$. **19.51.** $\frac{3-3a}{b+1}$.

20.19. 1) $2 < \log_3 10 < 3$; 2) $2 < \log_2 5 < 3$; 3) $-2 < \log_{\frac{1}{3}} 7 < -1$; 4) $-1 < \log_{0,1} 2 < 0$. **20.20.** 1) $4 < \log_2 29 < 5$; 2) $-4 < \log_{\frac{1}{2}} 9 < -3$. **20.21.** 1) $\log_4 5 > \log_5 4$; 2) $\log_{1,5} 1,3 < \log_{1,3} 1,5$; 3) $\log_{0,7} 0,8 < \log_{0,8} 0,7$; 4) $\log_{0,2} 0,1 > \log_{0,1} 0,2$. **20.23.** 1) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 9) \cup (9; 10)$; 3) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **20.24.** 1) $(-3; -2) \cup (-2; +\infty)$; 2) $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **20.27.** 1) 2; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$. **20.28.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 3. **20.29.** 1) 1 корінь; 2) 1 корінь; 3) 1 корінь. **20.30.** 1) 1 корінь; 2) 1 корінь. **20.31.** $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$. *Вказівка.* Числа $\log_2 3$ і $\log_3 2$ є додатними та взаємно оберненими. **20.33.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) усі дійсні числа, крім чисел виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\{0\}$; 4) усі числа виду $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 5) $(3; 4) \cup (4; 6]$; 6) $(-2; -1) \cup (-1; 3)$; 7) $[-1; 0) \cup (0; 3]$; 8) $(-\infty; 1) \cup (3; 6) \cup (6; 7)$; 9) $(0; 2) \cup (2; 3)$; 10) $(-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (0; +\infty)$. **20.34.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) усі дійсні числа, крім чисел виду $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\mathbb{R}$; 4) усі числа виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 5) $(-8; -2) \cup (-2; -1)$; 6) $(0; 7) \cup (7; 8)$; 7) $\left(-2; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; 2\right)$; 8) $(0; 4) \cup (4; 5)$; 9) $(-1; 1) \cup (1; 2)$; 10) $[-5; 0) \cup (0; 2]$.

20.35. 3) Див. рисунок; 4) див. рисунок. **20.36.** 3) Див. рисунок.

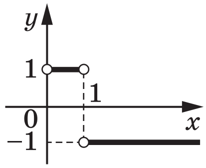


Рис. до задачі 20.35 (3)

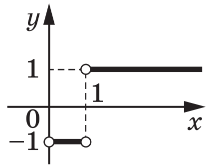


Рис. до задачі 20.35 (4) і 20.36 (3)

20.37. 1) −2; 2) −1. **20.38.** 1) 3; 2) 1. **20.39.** Непарна. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $\sqrt{x^2+1}-x=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{-1}$.

21.5. 1) 16; 2) 64; 3) 6; 4) 6; 5) 512. **21.6.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) 5; 3) 10^{10}. **21.7.** 1) 0,8; 2) 2; 3) 0; 4) −1. **21.8.** 1) 1; 2) 0; 1. **21.9.** 1) −2; 6; 2) 5; 3) коренів немає; 4) −2; 5) 1; 6) −1; 7) 0; 8) 6. **21.10.** 1) −2; 2) коренів немає; 3) 0; 13; 4) −2. **21.11.** 1) 7; 2) 1; 3) 1; 4) 2. **21.12.** 1) 3; 2) $\log_2 3$; 3) 2. **21.13.** 1) 4; 2) 2; 3; 3) 4; 4) 5; 5) 8; 6) 4; 7) 4; 8) 7. **21.14.** 1) 1; 2) 2; 3) $\frac{3}{4}$; 4) −1; 4; 5) 3; 6) 8. **21.15.** 1) $\log_5 4$; 2) 0. **21.16.** 1) 2; 2) $\log_3\left(3+\sqrt{11}\right)$. **21.17.** 1) 2; $\frac{1}{16}$; 2) 9; $\frac{1}{3}$; 3) 10; 1000; 4) 25; $\sqrt{5}$; 5) $\frac{1}{6}$; 6) 8; 10^7-2. **21.18.** 1) −8; $-\frac{1}{2}$; 2) 343; $\frac{1}{49}$; 3) 27; $\sqrt[3]{3}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **21.19.** 1) 7; 2) коренів немає; 3) 3; 4; 4) 1; 5) 4. **21.20.** 1) Коренів немає; 2) 5; 3) 4; 4) 3; 5) 3. **21.21.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) −5; −2; $\frac{\sqrt{89}-7}{2}$. **21.22.** 1) −6; −4; 2; 2) −1; 2; 3. **21.23.** 1) $\frac{1}{3}$; $3^{\frac{5}{9}}$; 2) 0,1; $\sqrt{10}$; 3) 4; 4) 8; $\frac{1}{8}$; 5) 100; 10^{-8}; 6) 5; $\frac{1}{625}$; 7) 10; 8) 10 000. **21.24.** 1) $\sqrt[3]{10}$; $\frac{1}{\sqrt[4]{10}}$; 2) 3; 9; 3) 1; 49; 4) 100; $\frac{1}{100}$; 5) 6; 6^{-7}; 6) 32. **21.25.** 1) $\frac{1}{5}$; 5; 2) 0,001; 10; 3) 3; 9; 4) 216; $\frac{1}{6}$.

21.26. 1) $\frac{1}{9}$; 9; 2) $\frac{1}{10}$; 100; 3) 16; $\frac{1}{4}$; 4) 1 000 000; 0,001. **21.27.** 1) 2; 2) $\frac{1}{4}$; 4; 3) $2^{\sqrt{2}}$; $2^{-\sqrt{2}}$; 4) 1; 9; 5) 1; 16; 6) $\frac{1}{2}$. **21.28.** 1) $\frac{1}{9}$; 3; 2) $\sqrt{3}$; 3; 3) 7; 4) 3. **21.29.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{625}$; 5; 3) $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}$. **21.30.** *Вказівка.* Розгляньте добуток $\log_a x \cdot \log_a y$. Скориставшись теоремою 19.3, можна записати: $\log_a x \cdot \log_a y = \log_a y^{\log_a x}$ або $\log_a y \cdot \log_a x = \log_a x^{\log_a y}$. Звідси $\log_a y^{\log_a x} = \log_a x^{\log_a y}$; $y^{\log_a x} = x^{\log_a y}$. **21.31.** 1) 1000; 2) $3^{\sqrt{2}}$; $3^{-\sqrt{2}}$. **21.32.** 1) 4; 2) $\frac{1}{7}$; 7. **21.33.** 1) (1; 3); 2) (9; 3), (3; 9); 3) (8; 2), $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$; 4) (3; 9), (9; 3); 5) $\left(2; \frac{1}{2}\right)$; 6) (2; 10), (10; 2). **21.34.** 1) (1,5; 2); 2) (8; 2), $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$; 3) (5; 5); 4) (1; 1), $\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{3}; \frac{2\sqrt[3]{6}}{3}\right)$; 5) (4; 1). **21.35.** 1) −1; 2) $\frac{1}{4}$; 2. *Вказівка.* Розгляньте дане рівняння як квадратне відносно $\log_2 x$. **21.36.** 1) 8; 2) 3; $\frac{1}{27}$. **21.37.** 3; $\sqrt{2}$. **21.38.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 1,5. **21.39.** 1) 2; 2) коренів немає. **21.40.** 1) 1; 2) 3. **21.41.** $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$. **21.42.** Якщо $a \leqslant -1$ або $a \geqslant 7$, то один розв'язок, якщо $-1 < a < 7$, то 2 розв'язки. **21.43.** Якщо $a \leqslant 2$ або $a \geqslant 11$, то один розв'язок, якщо $2 < a < 11$, то 2 розв'язки. **21.44.** $a = \frac{8}{3}$ або $a \leqslant \frac{7}{3}$. **21.45.** $a = -3$ або $a \geqslant -2{,}5$.

22.5. 1) 21; 2) 26. **22.6.** 1) 0; 2) 0; 1; 2; 3; 4; 5. **22.7.** 1) (1; +∞); 2) (0; 1); 3) (3; +∞); 4) (−3; −2) ∪ (3; +∞); 5) (−∞; −3] ∪ [4; 9); 6) $\left(-\frac{11}{10}; 4\right] \cup [5; +\infty)$. **22.8.** 1) $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$; 2) $\left(\frac{5}{7}; \frac{3}{2}\right)$; 3) [5; +∞); 4) (−∞; −4] ∪ [3; 5). **22.9.** 1) 6; 2) 2; 3) 2; 4) 5. **22.10.** 1) −1; 2) 3; 3) 1; 4) 0. **22.11.** 1) [−1; 1) ∪ (3; 5]; 2) (−2; −1) ∪ (0; 1);

3) $(-6;\ -5) \cup (-5;\ -4)$; 4) $[-1;\ 0) \cup (3;\ 4]$; 5) $\left(-\infty; -\frac{7}{4}\right)$; 6) $\left(\frac{5}{4}; 2\right) \cup (2; +\infty)$; 7) $(-\infty;\ -2{,}5) \cup [2;\ +\infty)$; 8) $\left(\frac{1}{3}; 1\right]$. **22.12.** 1) $(2;\ 3)$; 2) $[1;\ 2) \cup (4;\ 5]$; 3) $[-4;\ -3) \cup (0;\ 1]$; 4) $[0;\ 1) \cup (1;\ 2]$; 5) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup [3; +\infty)$; 6) $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$. **22.13.** 1) $(3;\ 6]$; 2) $(1;\ 3]$; 3) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; 4) $\left(-2; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$; 5) $[-4;\ -3) \cup (1;\ 3]$; 6) $[-5; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right]$. **22.14.** 1) $(-3;\ -1)$; 2) $(4;\ 5]$; 3) $(-5;\ 7]$; 4) $\left[0; \frac{1}{2}\right) \cup (4; 13]$. **22.15.** 1) $(5;\ +\infty)$; 2) $(1;\ +\infty)$; 3) $(0;\ 4)$; 4) $(5;\ 7]$; 5) $\left(-1; -\frac{3}{5}\right]$; 6) $\left(-\infty; -\frac{7}{5}\right]$. **22.16.** 1) $[-1;\ 0)$; 2) $(1;\ 2]$; 3) $[11;\ +\infty)$; 4) $\left[\frac{14}{3}; +\infty\right)$. **22.17.** 1) $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$; 2) $\left(0; \frac{1}{9}\right] \cup [9; +\infty)$; 3) $(0{,}0001;\ 10)$; 4) $\left[\frac{1}{16}; 256\right]$; 5) $(0;\ 4] \cup [8;\ +\infty)$; 6) $\left(0; \frac{1}{81}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **22.18.** 1) $\left(0; \frac{1}{8}\right] \cup [8; +\infty)$; 2) $(0;\ 0{,}1] \cup [1000;\ +\infty)$; 3) $(0{,}5;\ 4)$; 4) $[0{,}04;\ 5]$. **22.19.** 1) $\left(\frac{1}{128}; 2\right)$; 2) $(0;\ 3^{-10}] \cup [3;\ +\infty)$; 3) $[0{,}001;\ 1) \cup [100;\ +\infty)$; 4) $\left(0; \frac{1}{\sqrt{5}}\right] \cup (1; 5]$. **22.20.** 1) $\left(0; \frac{1}{49}\right] \cup [7; +\infty)$; 2) $\left[\frac{1}{216}; 6\right]$; 3) $(3;\ 9] \cup [81;\ +\infty)$; 4) $\left[\frac{1}{4}; 1\right) \cup [2; +\infty)$. **22.21.** 1) $\left[\frac{1-\sqrt{27}}{2}; -2\right) \cup \left(3; \frac{1+\sqrt{27}}{2}\right]$; 2) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (1; +\infty)$; 3) $[1{,}5;\ +\infty)$; 4) $(3;\ +\infty)$. **22.22.** 1) $\left[-2; 1-\sqrt{5}\right) \cup \left(1+\sqrt{5}; 4\right]$; 4]; 2) $\left(\frac{3}{4}; 1\right)$. **22.23.** 1) $(2;\ 3)$; 2) $(4{,}5;\ 5)$; 3) $(0;\ 2)$; 4) $(3{,}5;\ 5)$;

5) $(0;\ 1) \cup [2;\ +\infty)$; 6) $(1{,}5;\ 2]$. **22.24.** 1) $\left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty)$; 2) $(1;\ 3) \cup (4;\ +\infty)$; 3) $(1;\ 2) \cup (2{,}5;\ 4)$; 4) $(1;\ 2]$. **22.25.** $\left[\log_5 \frac{1}{2}; 1\right)$. **22.26.** $\left[\log_3 \frac{11}{20}; 3\right)$. **22.27.** 1) $(3;\ 4] \cup \{5\}$; 2) $\left[-\frac{9}{8}; -1\right) \cup \{2; -2\}$; 3) $\left[\frac{9}{5}; 2\right) \cup (2; 3] \cup \{1\}$. **22.28.** 1) $(2;\ 3] \cup \{5\}$; 2) $(5;\ +\infty) \cup \{4\}$. **22.29.** Якщо $a \leqslant 8$, то $x \in [3;\ +\infty)$; якщо $a > 8$, то $x \in [\log_2 a;\ +\infty) \cup \{3\}$. **22.30.** Якщо $a \leqslant 9$, то $x = 2$; якщо $a > 9$, то $x \in [2;\ \log_3 a]$. **22.31.** $(0; 1) \cup \left[\pi; \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right)$. **22.32.** $(0; 1) \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

23.5. 1) 0; 2) -2; 3) $-15 \ln 3$. **23.6.** 1) 1; 2) 1; 3) $-5 \ln 4$. **23.7.** 1) -1; 2) 3,5; 3) $-\frac{5}{2 \ln 5}$; 4) $\frac{1}{2}$. **23.8.** 1) $\frac{6}{13}$; 2) 16; 3) $-\frac{1}{2 \ln 10}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{9}$. **23.9.** 1) $\frac{2}{e}$; 2) $\frac{2}{3}$. **23.10.** 1) -1; 2) $\frac{1}{\ln 5}$. **23.11.** 1) $y = -2x + 1$; 2) $y = 2x + 1$; 3) $y = (2 + 2 \ln 2)x - 2 \ln 2$; 4) $y = 18x \ln 6 + 18 \ln 6 + 6$; 5) $y = 4x - 1$; 6) $y = 4x + 4$; 7) $y = \frac{2x}{3 \ln 3} - \frac{2}{3 \ln 3} + 1$; 8) $y = x - 4 + 2 \ln 2$. **23.12.** 1) $y = 5x + 1$; 2) $y = 2x + 1$; 3) $y = 6x \ln 3 - 12 \ln 3 + 3$; 4) $y = 4x - \ln 4$; 5) $y = 3x - 6$; 6) $y = \frac{x}{4 \ln 2} - \frac{1}{4 \ln 2} + 2$. **23.13.** 1) $y = 2$; 2) $y = -1$. **23.14.** $y = -1600$. **23.15.** 1) $y = ex$; 2) $y = 5x + 3$; 3) $y = -x + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2}$; 4) $y = 3x - 3$. **23.16.** 1) $y = -7x + 7$; 2) $y = 2x$; 3) $y = x + 1 + \ln 5$; 4) $y = -x$. **23.17.** 1) Зростає на $[0;\ +\infty)$, спадає на $(-\infty;\ 0]$, $x_{\min} = 0$; 2) зростає на $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, спадає на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$, $x_{\min} = -\frac{1}{2}$; 3) зростає на $(-\infty;\ 0]$, спадає на [0; +∞), $x_{\max} = 0$; 4) зростає на $\left[0; \frac{2}{\ln 2}\right]$, спадає на $(-\infty; 0]$ і $\left[\frac{2}{\ln 2}; +\infty\right)$, $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = \frac{2}{\ln 2}$; 5) зростає на $(-\infty; 1]$, спадає на $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$; 6) зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$; 7) зростає на $(-\infty; 2]$, спадає на $[2; +\infty)$, $x_{\max} = 2$; 8) зростає на $[3; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 2)$ і $(2; 3]$, $x_{\min} = 3$; 9) зростає на $(-\infty; 1]$, спадає на $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$; 10) зростає на $\left[e^{-\frac{1}{3}}; +\infty\right)$, спадає на $\left(0; e^{-\frac{1}{3}}\right]$, $x_{\min} = e^{-\frac{1}{3}}$; 11) зростає на $(0; 1]$, спадає на $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$; 12) зростає на $\left[e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right)$, спадає на $\left(0; e^{-\frac{1}{2}}\right]$, $x_{\min} = e^{-\frac{1}{2}}$; 13) зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(0; 1]$, $x_{\min} = 1$; 14) зростає на $[e; +\infty)$, спадає на $(0; 1)$ і $(1; e]$, $x_{\min} = e$; 15) зростає на $(0; e^2]$, спадає на $[e^2; +\infty)$, $x_{\max} = e^2$; 16) зростає на $[-1; 0)$ і $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -1]$ і $(0; 1]$, $x_{\min} = -1$, $x_{\max} = 1$; 17) зростає на $(0; 1]$ і $[e; +\infty)$, спадає на $[1; e]$, $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = e$; 18) зростає на $\left[\sqrt{10}; +\infty\right)$, спадає на $\left(0; \sqrt{10}\right]$, $x_{\min} = \sqrt{10}$. **23.18.** 1) Зростає на $[-2; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -2]$, $x_{\min} = -2$; 2) зростає на $[-1; 0]$ і $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -1]$ і $[0; 1]$, $x_{\max} = 0$, $x_{\min} = -1$, $x_{\min} = 1$; 3) зростає на $[-1; 1]$, спадає на $(-\infty; -1]$ і $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = -1$; 4) зростає на $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$, спадає на $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$, $x_{\min} = -\frac{1}{4}$; 5) зростає на $\left(-\infty; \frac{3}{\ln 3}\right]$, спадає на $\left[\frac{3}{\ln 3}; +\infty\right)$, $x_{\max} = \frac{3}{\ln 3}$; 6) зростає на $(-\infty; -2]$, спадає на $[-2; +\infty)$, $x_{\max} = -2$; 7) зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(0; 1]$, $x_{\min} = 1$; 8) зростає на $\left(0; \frac{1}{e^2}\right]$ і $[1; +\infty)$, спадає на $\left[\frac{1}{e^2}; 1\right]$, $x_{\max} = \frac{1}{e^2}$, $x_{\min} = 1$; 9) зростає на $(0; e]$, спадає на $[e; +\infty)$, $x_{\max} = e$; 10) зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0)$ і $(0; 1]$, $x_{\min} = 1$; 11) зростає на $\left(0; \frac{1}{e^2}\right]$ і $[e^2; +\infty)$, спадає на $\left[\frac{1}{e^2}; e^2\right]$, $x_{\max} = \frac{1}{e^2}$, $x_{\min} = e^2$;

12) зростає на $\left[\frac{1}{10};1\right]$ і $[10;+\infty)$, спадає на $\left(0;\frac{1}{10}\right]$ і $[1;10]$, $x_{\max}=1$, $x_{\min}=\frac{1}{10}$, $x_{\min}=10$. **23.19.** 1) $e+1$; $\frac{1}{e}-1$; 2) e^2; 0; 3) 1; $\frac{1}{7}$; 4) $2\frac{1}{2}$; 2. **23.20.** 1) $\frac{1}{e^2}$; 0; 2) 125; $\frac{1}{5}$. **23.21.** Див. рисунок.

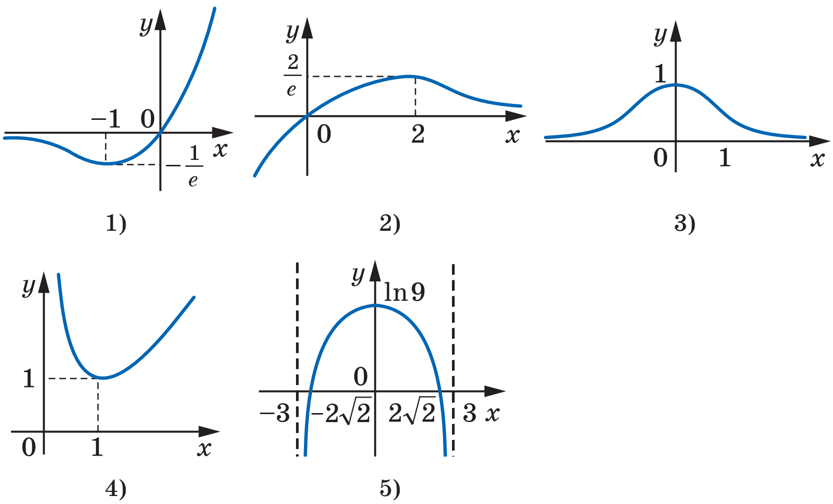


Рис. до задачі 23.21

23.22. Див. рисунок. **23.25.** $a \leqslant 0$. **23.26.** $a \geqslant 0$.

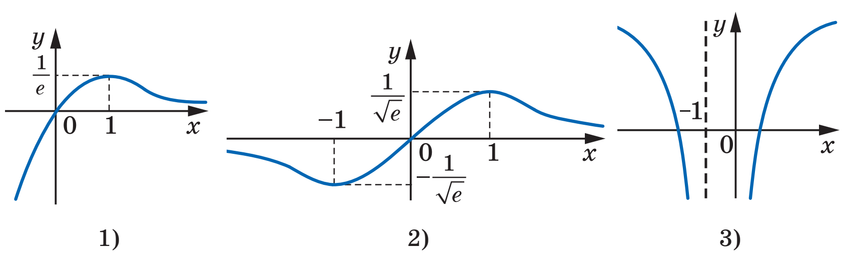


Рис. до задачі 23.22

24.8. 1) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{10}{3}$; 2) $y=-\cos x-2$; 3) $y=e^x-7$. **24.9.** 1) $y=\frac{x^4}{4}+1$; 2) $y=\sin x+2$; 3) $y=\frac{3^x}{\ln 3}$. **24.10.** 1) $y=-\frac{1}{x}-6$;

2) $y = \operatorname{tg} x + 2\sqrt{3}$; 3) $y = \ln(-x) + 4$; 4) $y = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}$.
24.11. 1) $y = -\operatorname{ctg} x + 1$; 2) $y = 2\sqrt{x} + 2$; 3) $y = \ln x - 1$; 4) $y = \frac{2^x + \ln 2 - 32}{\ln 2}$. **24.15.** $\frac{1}{2}$. **24.16.** $-\frac{1}{2}$. **25.5.** 1) $F(x) = x - x^2 + 8$; 2) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5$; 3) $F(x) = -\cos\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{2} + 6{,}5$; 4) $F(x) = \frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{5}{3}$; 5) $F(x) = 4x + \frac{1}{x} - 4$; 6) $F(x) = 7\ln(x-4) + 2\sqrt{x+4}$; 7) $F(x) = \sqrt{6x+1} + 2$; 8) $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}$; 9) $f(x) = \frac{(3x-2)^3}{9} - \frac{1}{9}$; 10) $F(x) = \frac{2}{3}\operatorname{tg}\left(6x - \frac{\pi}{6}\right)$.

25.6. 1) $F(x) = 3x - 3x^2 + 6$; 2) $F(x) = x^4 - 2x^3 + x + 5$; 3) $F(x) = x^2 - 2\sqrt{x} - 2$; 4) $F(x) = -\frac{2}{3}\cos 3x - \frac{2}{3}$; 5) $F(x) = 8\sqrt{\frac{x}{2} - 2} + 4$; 6) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} + 3{,}5$; 7) $F(x) = \frac{1}{4}\ln(4x - 3e^2) + 5{,}5$; 8) $F(x) = -8\operatorname{ctg}\frac{x}{8} + 5$. **25.7.** $F(x) = x^4 + 2x^2 - 3$, первісна має ще один нуль, який дорівнює 1. **25.8.** $F(x) = \frac{x^3}{3} - 12x + 27$. **25.9.** 1) F_2; 2) F_2. **25.10.** F_1. **25.11.** $s(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 - 3t$. **25.12.** $s(t) = 2t^3 + t - 47$ або $s(t) = 2t^3 + t - 67$. **25.13.** $y = 2x^3 - x^5 + 7$. **25.14.** $y = 6\sqrt{x} + x - 21$. **25.15.** 1) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$. *Вказівка*. Застосуйте формули пониження степеня; 2) $-\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$. *Вказівка*. Застосуйте формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму; 3) $\frac{3}{4}\sin\frac{2x}{3} - \frac{1}{8}\sin 4x + C$. **25.16.** 1) $\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x + C$; 2) $\frac{1}{14}\sin 7x +$

$+\frac{1}{18}\sin 9x+C.$ **25.17.** $F_1(x)=\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+\frac{5}{6}$, $F_2(x)=\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-\frac{323}{24}$. **25.18.** $F_1(x)=\frac{x^3}{3}-4x+\frac{2}{3}$, $F_2(x)=\frac{x^3}{3}-4x-\frac{20}{3}$. **25.19.** $F(x)=-x^2+5x-\frac{17}{4}$. **25.20.** $F(x)=\frac{x^2}{2}+x-3{,}5$.

26.5. 1) $4\frac{2}{3}$; 2) 0,5; 3) 4; 4) $7\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{2}\ln 8$; 6) $1\frac{1}{3}$; 7) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 8) $\frac{1}{2}$; 9) $\frac{3e^2-1}{e^2}$; 10) 18. **26.6.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $7\frac{1}{3}$; 3) 8 ln 2; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{52}{3}$; 6) $\frac{72-2\ln 3}{\ln 3}$. **26.8.** 1) 70; 2) 1,5; 3) $\sqrt{3}$; 4) 39; 5) 0; 6) $\frac{4}{3}$; 7) $\frac{1}{2}\ln 5$; 8) 3; 9) 0; 10) $6e-6$; 11) $-\frac{1}{9}$; 12) 240. **26.9.** 1) −45; 2) 6; 3) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{1}{5}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{7}{288}$; 7) $\frac{1}{3}\ln 10$; 8) $\frac{1}{12}$; 9) $\frac{78}{7}$. **26.10.** 1) $10\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) e^2-1; 4) 4 ln 4 − 3; 5) 12 − 4 ln 4; 6) $10\frac{2}{3}$; 7) $1\frac{1}{3}$; 8) 4,5; 9) 4,5; 10) $\frac{1}{3}$; 11) $\frac{1}{12}$; 12) 1; 13) 24 − 7 ln 7; 14) 2; 15) $\sqrt{2}-1$. **26.11.** 1) $4\frac{1}{4}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) 4,5; 5) $2\frac{2}{3}$; 6) 6 − 3 ln 3; 7) 1; 8) 12 − 5 ln 5. **26.12.** 3. **26.13.** 3; −3. **26.14.** 2; −2. **26.15.** 6. **26.16.** $-\sqrt[4]{8}$. **26.17.** 1) (0; 1) ∪ (3; +∞); 2) $(\log_{0,2} 6;\ +\infty)$. **26.18.** (1; +∞). **26.19.** 1) $\frac{4-\pi}{12}$; 2) π − 2; 3) 0; 4) $\frac{3e^2+8e-8}{8e^2}$. **26.20.** 1) $\frac{20-5\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) 0,2; 4) $e^2-e-\frac{1}{2}$. **26.21.** 1) 16,5; 2) 4,5; 3) $21\frac{1}{3}$; 4) 4,5; 5) 7,5; 6) 8 − 4 ln 2. **26.22.** 1) 4,5; 2) $10\frac{2}{3}$; 3) 4,5; 4) 9. **26.23.** 1) $5\frac{1}{3}$; 2) 1,5. **26.24.** 1) $2\frac{5}{6}$; 2) 3. **26.25.** $1\frac{1}{12}$.

26.26. $\frac{1}{6}$. **26.27.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{9\pi}{4}$; 3) 4π; 4) $\frac{9\pi}{2}$; 5) 8,5; 6) 6,5. **26.28.** 1) $\frac{25\pi}{2}$; 2) 3π; 3) 2π; 4) 5. **26.29.** 1. *Вказівка*. Зобразіть криволінійну трапецію, площа якої дорівнює шуканому інтегралу, і розгляньте функцію, обернену до підінтегральної функції. **26.30.** $\frac{\pi}{2}-1$.

27.1. 1) $\frac{13\pi}{3}$; 2) $\frac{178\pi}{15}$; 3) $\frac{15\pi}{2}$; 4) $\frac{2\pi}{15}$; 5) $\frac{19\pi}{24}$. **27.2.** 1) $\pi\sqrt{2}$; 2) $\frac{\pi}{30}$; 3) $\frac{\pi}{2}$. **27.3.** $\frac{9}{8}\pi R^3$, $\frac{5}{24}\pi R^3$.

28.3. 1) $3 \cdot 2$; 2) $3 \cdot 3$. **28.4.** Коли Антон узяв яблуко. **28.5.** $3 \cdot 2 + 4 \cdot 3$. **28.6.** $3 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 5$. **28.7.** $5 \cdot 5$, $5 \cdot 4$. **28.8.** 5!. **28.9.** 1) 4!; 2) 3!. **28.10.** 6^4. **28.11.** 5^3. **28.12.** $5 \cdot 6^3$. **28.13.** $4 \cdot 5^2$. **28.14.** $9 \cdot 10^6$. **28.15.** 2^4. **28.16.** 6^3. **28.17.** $6 \cdot 7 \cdot 4$. **28.18.** $6 \cdot 7 \cdot 3$. **28.19.** I спосіб. $4 \cdot 4!$; II спосіб. $5! - 4!$. **28.20.** $4! \cdot 2$. **28.21.** $9 \cdot 10^3 \cdot 2$. **28.22.** $9 \cdot 10^4 \cdot 4$. **28.23.** $64 \cdot 49$. **28.24.** $4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4$. **28.25.** $5^7 + 4 \cdot 5^6$. **28.26.** $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5$. **28.27.** 2^{10}. **28.28.** $(7! \cdot 4! \cdot 2!) \cdot 3!$. **28.29.** $(5!)^2$. **28.30.** $9 \cdot 10^4 - 4 \cdot 5^4$. *Вказівка*. Кількість усіх п'ятицифрових чисел дорівнює $9 \cdot 10^4$. Кількість п'ятицифрових чисел, усі цифри яких є парними, дорівнює $4 \cdot 5^4$. **28.31.** $9 \cdot 10^4 - 5^5$. **28.32.** $9 \cdot 10^4 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. *Вказівка*. Кількість п'ятицифрових чисел, усі цифри яких різні, дорівнює $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. **28.33.** $6^3 - 5^3$. **28.34.** $2 \cdot 9!$. *Вказівка*. Припустимо, що знайомі сіли на один стілець. 9 людей можна розмістити на 9 стільцях 9! способами. Оскільки знайомі можуть сісти справа або зліва один від одного, то всього варіантів $2 \cdot 9!$. **28.35.** $5! - 2 \cdot 4!$. **28.36.** 1) $\frac{6!}{3!}$. *Вказівка*. Якщо вважати всі букви цього слова різними (це умовно можна записати так: $МО_1ЛО_2КО_3$), то отримаємо 6! різних слів. Проте слова, які відрізняються лише перестановкою букв $О_1$, $О_2$, $О_3$, насправді є однаковими; 2) $\frac{10!}{3!\,2!\,2!}$; 3) $\frac{13!}{2!\,2!\,2!}$. **28.37.** 140. *Вказівка*. Будь-який дільник даного числа має вигляд $2^{k_1} \cdot 5^{k_2} \cdot 7^{k_3}$, де

k_1, k_2, k_3 — цілі числа, які задовольняють умови $0 \leqslant k_1 \leqslant 4$, $0 \leqslant k_2 \leqslant 3$, $0 \leqslant k_3 \leqslant 6$. Кількість дільників даного числа дорівнює кількості наборів, які можна скласти з чисел k_1, k_2, k_3 (при цьому набори, які відрізняються один від одного порядком елементів, вважаються різними). Число k_1 можна вибрати 5 способами, число k_2 — 4 способами, число k_3 — 7 способами. Отже, зазначений набір можна скласти $5 \cdot 4 \cdot 7 = 140$ способами.

29.1. 7!. **29.2.** 20!. **29.3.** 5!. **29.4.** A_{11}^2. **29.5.** A_{15}^3. **29.6.** A_{12}^6. **29.7.** A_{16}^3. **29.8.** A_{32}^2. **29.9.** C_{29}^5. **29.10.** C_n^4. **29.11.** C_{10}^3. **29.12.** $A_3^2 \cdot A_5^4$. **29.13.** $C_7^2 \cdot C_{13}^3$. **29.14.** $C_{12}^3 \cdot C_{88}^7$. **29.15.** $7 \cdot C_{12}^2 + 12 \cdot C_7^2$. **29.16.** I спосіб. $C_9^3 + 15 \cdot C_9^2 + 9 \cdot C_{15}^2$; II спосіб. $C_{24}^3 - C_{15}^3$. **29.17.** $C_{30}^7 - C_{13}^7$. **29.18.** $C_{80}^6 - C_{65}^6$. **29.19.** $\dfrac{C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4}{3!}$ **29.20.** $\dfrac{C_{20}^5 \cdot C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot C_5^5}{4!}$. **29.21.** C_{m+1}^n. *Вказівка.* Розмістимо в ряд m білих куль. Чорна куля може зайняти одне з $m + 1$ положень: крайня зліва, між будь-якими двома білими кулями, крайня справа (див. рисунок). **29.22.** C_{16}^4. *Вказівка.* Розмістимо кулі в ряд. Чотири «перегородки» ділять ці кулі на п'ять груп (див. рисунок). Отже, кількість способів розкладання куль по ящиках дорівнює кількості способів розміщення 4 перегородок на 16 місцях. **29.23.** C_{n-1}^{k-1}. *Вказівка.* Запишемо $n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$. Далі скористайтеся ідеєю розв'язування задачі 29.22.

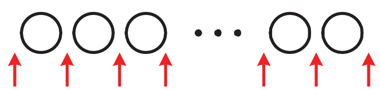


Рис. до задачі 29.21

Рис. до задачі 29.22

30.1. Ні. **30.2.** Так. **30.3.** 1) 0; 2) 1. **30.4.** 1) 0; 2) 1. **30.6.** Якщо частота події B виявилася більшою за частоту події C, то можна *припустити*, що подія B більш ймовірна, ніж подія C. Проте висновок, зроблений на основі окремих спостережень (експеримент проведено 50 разів), не може *гарантувати*, що подія B більш ймовірна, ніж подія C. **30.8.** 1) 15,4 %; 2) 25,6 %; 3) 19,9 %; 4) 9,6 %; 5) 74,1 %. **30.9.** 1) $\frac{23}{99}$; 2) $\frac{6}{17}$; 3) $\frac{16}{73}$. **30.10.** 22,8 %. **30.11.** 14. **30.13.** 3) $\frac{5}{9}$; 5) $\frac{2}{3}$. **30.14.** 5) $\frac{8}{17}$; 6) $\frac{7}{17}$. **30.15.** 1) $\frac{b}{a+b+c}$; 3) $\frac{a+b}{a+b+c}$. **30.16.** 2) $\frac{m+k}{n+m+k}$. **30.17.** $\frac{1}{12}$. **30.18.** $\frac{1}{120}$. **30.19.** $\frac{1}{360}$. **30.20.** $\frac{1}{120}$. **30.21.** $\frac{5}{33}$. **30.22.** $\frac{1}{494}$. **30.23.** $\frac{72}{95}$. **30.24.** $\frac{68}{203}$. **30.25.** 1) 18; 2) 3. **30.26.** 2) 8. **30.27.** 1) $\frac{2}{87}$; 2) $\frac{7}{29}$; 3) $\frac{15}{29}$; 4) $\frac{1}{15}$. **30.28.** $\frac{8}{15}$. **30.29.** $\frac{C_9^2 \cdot C_{91}^5}{C_{100}^7} \approx 0{,}1$. **30.30.** $\frac{C_5^2 \cdot C_{195}^6}{C_{200}^8} \approx 0{,}01$. **30.31.** $\frac{108}{299}$. **30.32.** $\frac{21}{128}$. **30.33.** $\frac{1}{16}$. **30.34.** Поява принаймні однієї шістки. **30.35.** 1) $\frac{1}{216}$; 2) $\frac{5}{18}$; 3) $\frac{5}{324}$; 4) $\frac{1}{81}$. **30.36.** 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{125}{216}$; 3) $\frac{1}{27}$; 4) $\frac{5}{36}$. **30.37.** $\frac{3^{10}}{5^{10}}$. **30.38.** $\frac{C_{10}^7\, 3^3}{4^{10}} \approx 0{,}003$. **30.39.** $\frac{6^5}{7^5}$. **30.40.** $\frac{C_{20}^2\, C_{10}^4\, C_5^1}{C_{35}^7} \approx$ $\approx 0{,}03$. **30.41.** $\frac{C_{12}^4\, C_8^3\, C_4^2}{C_{24}^9} \approx 6 \cdot 10^{-4}$. **30.42.** $\frac{C_{15}^3\, C_{73}^2}{C_{100}^5} \approx 0{,}016$. **30.43.** $\frac{C_n^2\, C_m^2}{C_{n+m}^4}$. **30.44.** $\frac{C_{n+m}^3 - C_m^3}{C_{n+m}^3}$. **30.45.** $\frac{nmk}{C_{n+m+k}^3}$. **30.46.** $\frac{C_{35}^5 + C_{35}^4\, C_{10}^1}{C_{45}^5} \approx 0{,}69$. **30.47.** $\frac{C_{50}^8 - C_{46}^8}{C_{50}^8} \approx 0{,}51$. **30.48.** $\frac{C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2}{2^{10}} \approx$ $\approx 0{,}05$. *Вказівка.* Вказана частота буде меншою від 0,3, якщо з 10 підкидань монети герб випаде менше ніж три рази. **30.49.** $\frac{29}{128}$.

31.3. Моду. **31.4.** Медіану і моду. **31.7.** $2\frac{1}{15} \approx 2{,}07$ м'яча за гру. **31.8.** 3,8. **31.13.** 1) 7,9; 2) 7,7. **31.14.** 1) 1,4 год/добу; 2) 1,35 год/добу. **31.15.** 1) 50,08 %; 2) 49,68 %. **31.16.** 1) 13,72 %. *Вказівка.* Обчисліть середнє значення даних другого рядка таблиці; 2) 14,12 % *Вказівка.* Обчисліть середнє зважене значення даних другого рядка таблиці з ваговими коефіцієнтами з третього рядка таблиці. **31.17.** 1) 21,8 тис. доларів США; 2) 13,7 тис. доларів США.

32.6. 5) Може звузитися на число −1, тобто може бути загублено корінь $x = -1$. Якщо $-1 \notin D(f)$ або $f(-1) = 1$, то множина коренів не зміниться; 7) якщо $-1 \in D(f) \cap D(g)$ і $f(-1) = g(-1)$, то буде отримано сторонній корінь −1; якщо $-1 \notin D(f) \cap D(g)$ або $f(-1) \neq g(-1)$, то множина коренів не зміниться. **32.7.** 1) Коренів немає; 2) 0. **32.8.** 1) 0,6; 2) 0. **32.9.** 1) $\frac{\sqrt{29}-1}{2}$; 2) 1,5. **32.10.** 1) $\frac{1+3\sqrt{5}}{2}$; 2) 7. **32.11.** 1) πk, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **32.12.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}+\pi k$, $-\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **32.13.** 0; 1; −1; $\frac{4}{3}$; $-\frac{4}{3}$. **32.14.** $\frac{5}{2}$; $-\frac{5}{2}$; 1; −1. **32.15.** 1) 5. *Вказівка.* Помноживши обидві частини рівняння на вираз $\sqrt{2x^2-x+4}-\sqrt{2x^2-7x+10}$, отримаємо $6(x-1)=3(x-1)\times$ $\times\left(\sqrt{2x^2-x+4}-\sqrt{2x^2-7x+10}\right)$. Зазначимо, що число 1 не є коренем початкового рівняння. Далі додамо почленно початкове рівняння і рівняння $\sqrt{2x^2-x+4}-\sqrt{2x^2-7x+10}=2$; 2) −1. *Вказівка.* Помножте обидві частини рівняння на вираз $\sqrt{x+1}-1$. **32.16.** 1) $\frac{7+\sqrt{13}}{6}$; 2) 2. **32.17.** 1) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $4\pi + 8\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\cos x = 1,\\ \cos\frac{3x}{2} = 1,\\ \sin\frac{x}{8} \neq 0.\end{cases}$ **32.18.** 1) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $3\pi + 4\pi k$,

$k \in \mathbb{Z}$. **32.19.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{5}{3}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **32.20.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **32.21.** k, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. **32.22.** $1 + 4k$, $k \in \mathbb{N}$. **32.23.** $\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **32.24.** $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **32.25.** Коренів немає. **32.26.** $\frac{3}{5}$.

33.1. 1) 1; 7; $3+\sqrt{10}$; $3-\sqrt{10}$; 2) 4; $1+\sqrt{3}$; 3) 2; 4) 3; 5) 0; 6) −3. **33.2.** 1) −2; −1; 3; 4; 2) −12; −4; 2; 3) 1; 4; 4) 4; 5) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 6) 4. **33.3.** 1) −2; −1; 3; 2) 1; 3; 3) −1; 2; −3. **33.4.** 1) −2; 2) 1; −2. **33.5.** 1) −6; −4; −1; 1; 2) −1; −3; 1; 3) −1; 1; 2; 4; 4) −3; 1. **33.6.** 1) −6; −2; $-4+2\sqrt{5}$; $-4-2\sqrt{5}$; 3) −2; 1; 3) −2; −1; 0; 1; 4) −3; 0; $\frac{-3+\sqrt{73}}{2}$; $\frac{-3-\sqrt{73}}{2}$. **33.7.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **33.8.** 1) −2; −1; 2; 3; 2) πn, $n \in \mathbb{Z}$. **33.9.** 2; 9. **33.10.** 1) −1; 12. *Вказівка*. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = (x^2-11x+28)\times$ $\times(x^2-11x+30)$; 2) $-4+\sqrt{21}$; $-4-\sqrt{21}$. **33.11.** 1) $-5+\sqrt{95}$; $-5-\sqrt{95}$; 2) $-4+\sqrt{5}$; $-4-\sqrt{5}$. **33.12.** 1) −2; $-\frac{1}{2}$. *Вказівка*. Подайте дане рівняння у вигляді $\left(2x-5+\frac{2}{x}\right)\left(2x+7+\frac{2}{x}\right)=-20$; 2) −6; −4; $\frac{-15+\sqrt{129}}{2}$; $\frac{-15-\sqrt{129}}{2}$. **33.13.** 1) −8; $-\frac{15}{2}$; $\frac{-35+\sqrt{265}}{4}$; $\frac{-35-\sqrt{265}}{4}$; 2) −4; 5; $-5+3\sqrt{5}$; $-5-3\sqrt{5}$. **33.14.** 1) $\frac{1}{2}$; 2; $\frac{-11+\sqrt{105}}{4}$; $\frac{-11-\sqrt{105}}{4}$. *Вказівка*. Заміна $x+\frac{1}{x}=$ $=t$; 2) $-3+\sqrt{15}$; $-3-\sqrt{15}$. **33.15.** 1) 1; $\frac{-11+\sqrt{85}}{6}$; $\frac{-11-\sqrt{85}}{6}$; 2) $5+\sqrt{31}$; $5-\sqrt{31}$; $\frac{3+\sqrt{159}}{5}$; $\frac{3-\sqrt{159}}{5}$. **33.16.** 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{2}$. *Вказів-*

ка. Подайте дане рівняння у вигляді $\frac{4}{4x-8+\frac{7}{x}}+\frac{3}{4x-10+\frac{7}{x}}=1;$ 2) 3; 5; $9+\sqrt{66}$; $9-\sqrt{66}$. **33.17.** 1) $\frac{5+\sqrt{21}}{2}$; $\frac{5-\sqrt{21}}{2}$; 2) 1; 4. **33.18.** 1) 2; 4; −1; $-\frac{1}{2}$. *Вказівка*. Поділіть обидві частини рівняння на $(x-1)^2$; 2) 3; $\frac{81-9\sqrt{27}}{8}$. **33.19.** 1) $-3+\sqrt{3}$; $-3-\sqrt{3}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; 2) 1; $\frac{1+\sqrt{109}}{18}$. **33.20.** 1) $\operatorname{arctg}\left(-1\pm\sqrt{3}\right)+$ $+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $\operatorname{arctg} 2+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. *Вказівка*. Помножте праву частину даного рівняння на $\sin^2 x+\cos^2 x$. **33.21.** $\operatorname{arctg}\frac{15}{7}+\pi k$, $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **33.22.** 1) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $\pm\left(\pi-\arccos\frac{2}{3}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка*. $5\left(3\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)+$ $+2\left(9\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)+5=0$. Зробіть заміну $3\cos x+\frac{1}{\cos x}=y$, тоді $9\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}=y^2-6$. **33.23.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка*. $(\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x)+(\operatorname{tg}^2+\operatorname{ctg}^2 x)-4=0$. Зробіть заміну $\operatorname{tg} x+$ $+\operatorname{ctg} x=y$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$, $(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{17}-5}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **33.24.** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. *Вказівка*. Виконайте заміну $\sin x+\cos x=t$. **33.25.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **33.26.** 1) 8; 2) 10. *Вказівка*. Заміна $\sqrt[3]{x-2}=a$, $\sqrt{x-1}=b$. Тоді $a^3-b^2=-1$. Інше розв'язання можна отримати, якщо врахувати зростання функції $f(x)=\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x-1}$. **33.27.** 1) $-\frac{17}{5}$; $\frac{63}{5}$; 2) 1; 2; 10. **33.28.** 1) 4; 2) коренів немає. **33.29.** 1) 3; 2) коренів немає.

33.30. 1) $4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{5\pi}{4}+\frac{5\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. **33.31.** 1) $6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{9\pi}{4}+3\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **33.32.** 2. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $0 \leqslant \log_2(\cos^2 \pi x + 1) \leqslant 1$, $4x - x^2 - 3 \leqslant 1$. **33.33.** 2. **33.34.** 1) 2; 2) 4. **33.35.** 1) 9; 2) 2. **33.36.** 0. **33.37.** 0.

34.1. 1) $\left[\frac{5}{3}; 5\right]$; 2) $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right) \cup (3; +\infty)$. **34.2.** 1) $\left(\frac{2}{7}; \frac{2}{5}\right)$; 2) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. **34.3.** 1) $\left(-1-\sqrt{5}; -2\right) \cup \left(-2; -1+\sqrt{5}\right)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; 3) $\left(-5; 3+2\sqrt{2}\right)$; 4) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **34.4.** 1) $\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$; 2) $(-\infty; -3] \cup [1; 5) \cup (5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$. **34.5.** 1) $\left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{15}}{2}\right)$; 2) $\left(2; 2\sqrt{2}\right]$; 3) $[-4; -3] \cup \left[-\frac{1}{3}; 0\right]$; 4) розв'язків немає. **34.6.** 1) $[9; +\infty)$; 2) $\left[0; \frac{1}{2}\right)$; 3) $[2; 4]$; 4) $\left(-\infty; \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right]$. **34.7.** 1) $\left(\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right)$; 2) $(-\infty; -2] \cup \left[5; \frac{74}{13}\right)$; 3) $[0; 4]$. **34.8.** 1) $\left[-2; -\frac{8}{5}\right) \cup (0; 2]$; 2) $(-\infty; -3]$; 3) $[2; 3]$. **34.9.** 1) Розв'язків немає; 2) $(-\infty; -10] \cup [1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$. **4.10.** 1) $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$; 2) $\left[-6; -4+\sqrt{2}\right]$; 3) $(-\infty; -3] \cup (0; +\infty)$.

34.11. 1) 4; 2) $[-4; -1]$; 3) $(-\infty; -8] \cup \{1, 4\}$; 4) $\cup [2; +\infty) \cup$ $\cup [2; +\infty) \cup \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$. **34.12.** 1) $[3; 12]$; 2) $[7; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3] \cup$ $\cup \{-2; 1\}$; 4) $\left(-\infty; -\frac{17}{2}\right] \cup [1; 10)$. **34.13.** 1) $\left[-5; -\frac{9+\sqrt{61}}{8}\right)$; 2) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. **34.14.** 1) $(2; +\infty)$; 2) 5. **34.15.** 1) $\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{9}+\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{9}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\right.$

$\left.\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; **3)** $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; -\frac{\pi}{4}+\pi k\right) \cup \left(\operatorname{arctg} 2+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; **4)** $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}; \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{2}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **34.16.** **1)** $\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; **2)** $\left(2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right) \cup$ $\cup \left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k; \pi+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; **3)** $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k; \operatorname{arctg} 2+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **34.17.** **1)** $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k; \pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; **2)** $\left(-\pi+2\pi k;\right.$ $\left.-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k; 2\pi k\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; **3)** $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k; \frac{3\pi}{4}+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; **4)** $\left[2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi k\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \pi+2\pi k\right] \cup$ $\cup \left[\frac{4\pi}{3}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **34.18.** **1)** $\left(-\pi+2\pi k; -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) \cup$ $\cup \left(2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; **2)** $\left(\pi k; \frac{\pi}{3}+\pi k\right) \cup$ $\cup \left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{2\pi}{3}+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; **3)** $\left(2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi k\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \pi+2\pi k\right) \cup$ $\cup \left[\frac{3\pi}{2}+2\pi k; \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **34.19.** **1)** $[3; 11] \cup \{2\}$; **2)** $(0; 21] \cup$ $\cup \{-21\}$. **34.20.** **1)** $[2; 10] \cup [37; +\infty)$; **2)** $[-6; 0) \cup \{6\}$. **34.21.** **1)** $[-79; 83]$; **2)** $[-5; 11]$; **3)** $(-\infty; 1)$; **4)** $[-2; +\infty)$; **5)** $[1; +\infty)$. **34.22.** **1)** $[-57; 71]$; **2)** $[-31; 33]$; **3)** $[3; +\infty)$; **4)** $[-3; +\infty)$.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ У ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ»

Номер завдання	Номер задачі																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	В	А	Б	Б	Г	Г	А	Б	Г	Г	А	А	Б	В	В	А	В	Б
2	Г	Б	Б	Г	Б	А	В	Б	Г	Б	В	В	А	В	В	А	В	Б
3	Б	Г	Б	Г	Г	Б	А	Б	А	А	Г	В	Б	Б	Г	В	В	А
4	В	Г	Г	А	Б	Г	Б	Г	В	Б	А	Б	В	Г	Г	В	В	А

Завдання № 5

Номер задачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Відповідь	Г	Г	Б	В	В	В	Б	Г	Б	А	А	А	Г	В	А	Б	В	Б

19

	А	Б	В	Г	Д
1					X
2		X			
3	X				
4			X		

20

	А	Б	В	Г	Д
1					X
2		X			
3				X	
4			X		

Завдання № 6

Номер задачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Відповідь	В	Г	Г	А	Б	В	Г	А	В	В	А	Б	Г	А	А	Г	Б	Б

19

	А	Б	В	Г	Д
1		X			
2					X
3			X		
4				X	

20

	А	Б	В	Г	Д
1		X			
2				X	
3	X				
4			X		

Завдання № 7

Номер задачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Відповідь	А	Г	В	А	В	А	Г	А	В	Б	В	Б	Б	А	Г	Г	Б	Г

19

	А	Б	В	Г	Д
1			×		
2				×	
3	×				
4		×			

20

	А	Б	В	Г	Д
1	×				
2					×
3		×			
4				×	

Завдання № 8

Номер задачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Відповідь	В	В	Г	А	Г	Г	В	А	А	В	Б	Б	Г	В	А	В	Б	А

19

	А	Б	В	Г	Д
1	×				
2			×		
3		×			
4				×	

20

	А	Б	В	Г	Д
1	×				
2			×		
3		×			
4				×	

Завдання № 9

Номер задачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Відповідь	Г	В	Б	Б	Г	Г	Г	А	В	В	Б	Б	Г	Б	Б	Б	А	Г

19

	А	Б	В	Г	Д
1			×		
2				×	
3	×				
4		×			

20

	А	Б	В	Г	Д
1					×
2				×	
3			×		
4	×				

Завдання № 10

Номер задачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Відповідь	А	Г	Г	Б	Б	А	Г	В	В	А	Б	В	Б	А	В	Б	А	Г

19

	А	Б	В	Г	Д
1					×
2				×	
3			×		
4		×			

20

	А	Б	В	Г	Д
1		×			
2				×	
3			×		
4					×

Завдання № 11

Номер задачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Відповідь	Г	Г	В	В	Г	А	В	Г	А	В	Б	В	Г	Б	В	Г	Б	А

19

	А	Б	В	Г	Д
1		×			
2			×		
3	×				
4					×

20

	А	Б	В	Г	Д
1			×		
2		×			
3				×	
4	×				

Завдання № 12

Номер задачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Відповідь	Б	Г	В	В	Б	А	В	В	А	Г	А	В	А	Б	Г	Б	Б	А

19

	А	Б	В	Г	Д
1	×				
2			×		
3				×	
4					×

20

	А	Б	В	Г	Д
1				×	
2		×			
3	×				
4			×		

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

§ 2. Показникова і логарифмічна функції

§ 3. Інтеграл та його застосування

§ 4. Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики

Видано за рахунок державних коштів
Продаж заборонено

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
НОМІРОВСЬКИЙ Дмитро Анатолійович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА
11 клас

Підручник
для загальноосвітніх навчальних закладів

Академічний рівень,
профільний рівень

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Редактор *О. В. Трефілова*
Коректор *Т. Є. Цента*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Ум. друк. арк. 27,00. Обл.-вид. арк. 24,41.
Тираж 94 852 прим. Замовлення №

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003