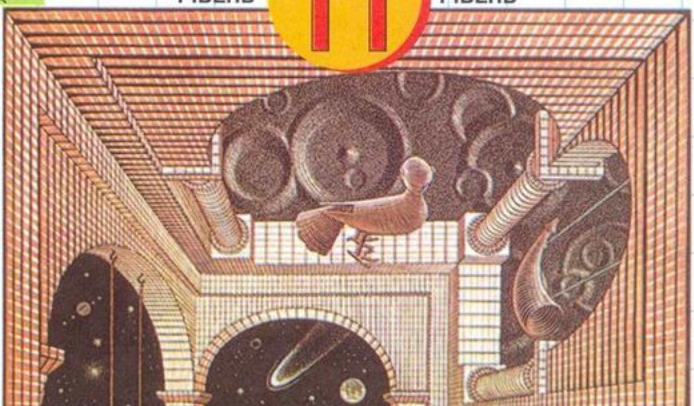
Г. В. АПОСТОЛОВА

Геометрія

11

АКАДЕМІЧНИЙ РІВЕНЬ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ



ББК 22.151я721
А76

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України № 235 від 16. 03. 2011 р.)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Упорядкування завдань: Ліпчевського Л.В., Коваленко П.М., Нивидомої Л.І.

Наукову експертизу проводив Інститут математики НАН України
Психолого-педагогічну експертизу проводив Інститут педагогіки НАПН України

Апостолова Г. В.

А76 Геометрія : 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : академ. рівень, профіл. рівень / Г. В. Апостолова; упорядкув. завдань: Ліпчевського Л.В. [та ін.]. – К. : Генеза, 2011. – 304 с. : іл.
ISBN 978-966-11-0065-6.

Пропонований підручник є *дворівневим*. Відповідає програмам загальноосвітніх навчальних закладів профільного рівня й класів з поглибленим вивченням математики. *Відрізняється*: диференціацією теоретичного та дидактичного матеріалу, виділенням опорних фактів й опорних задач; наявністю історичної інформації, узагальнюючих схем, спектром і обсягом дидактичного матеріалу.

Може бути використаний у класах загальноосвітніх навчальних закладів академічного рівня, профільного рівня та з поглибленим вивченням математики.

ББК 22.151я721

Навчальне видання

АПОСТОЛОВА Галина Вадимівна

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Академічний рівень, профільний рівень

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Редактори *Н. Дашко, О. Мовчан*. Обкладинка та художнє оформлення *Л. Кузнецової, В. Марущинця*. Технічні малюнки *О. Дружинського, В. Марущинця, Ю. Лебедєва*. Технічний редактор *Ц. Федосіхіна*. Коректори *І. Іванюсь, Л. Леуська*. Комп'ютерна верстка *Ю. Лебедєва*

Формат 70×100[1]/[16]. Ум. друк. арк. 24,7. Обл.-вид. арк. 23,33.
Тираж 90 543 пр. Вид. № 1111. Зам. № 11-0065.

Видавництво «Генеза», вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців серія ДК № 3966 від 01.02.2011.

Віддруковано з готових діапозитивів у ТОВ «ПЕТ»
вул. Ольмінського, 17, м. Харків, 61024
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців
серія ДК № 3179 від 08.05.2008 р.

ISBN 978-966-11-0065-6

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ УЧНІВ

В останньому для вас шкільному навчальному році курс стереометрії пропонує застосування здобутих раніше знань до вивчення властивостей векторів у просторі та певних просторових тіл. Жодну конструкцію, що оточує нас у повсякденному житті, не можна побудувати без володіння такими знаннями. Це не тільки мости та будинки, а ще й розрахунки різноманітних машин, літаків, ракет тощо. Для створення новітніх біотехнологій також потрібні знання із стереометрії – нещодавно з'ясувалося, що велика кількість вірусів має форму октаедра.

Перш ніж розпочати роботу за підручником, *повторіть вже вивчене* (без цього вам буде важко рухатися далі). У цьому вам допоможуть: питання *«Готуємося до заліку»*, *опорні схеми*, розміщені наприкінці підручника, та *форзаци*. Відповідний дидактичний матеріал міститься в перших двох блоках завдань тестової форми *«Перевір себе»*.

Навчальний матеріал у підручнику представлено на трьох рівнях: *обов'язковому* – для класів з академічним рівнем вивчення математики, *додатковому* – відповідає вивченню математики в класах профільного рівня і *для ознайомлення* – позапрограмний матеріал, зокрема з історії математики. Останні два рівні позначені відповідними піктограмами.

Завдання за складністю поділено на чотири рівні:

- завдання з нуликом біля номера – найпростіші,
- завдання без позначки – дещо складніші,
- зірочкою та двома зірочками біля номера позначено завдання наступних двох рівнів складності, які пропонуються для профільного й поглибленого вивчення математики, підготовки до ЗНО.

«Відповіді та поради» допоможуть вам переконатися в правильності виконання завдань, а інколи вкажуть шлях розв'язування.

Повторити, узагальнити навчальний матеріал і *перевірити рівень* його засвоєння вам допоможуть *опорні схеми* наприкінці підручника та на його форзацах і рубрики: *«Завдання на узагальнення знань»* – після кожного розділу; *«Готуємося до заліку»* і *«Перевір себе»* – наприкінці підручника.

Рубрика *«Готуємося до вступу в ВТНЗ»* пропонується тим, хто готується до навчання в ВТНЗ, – містить задачі підвищеного рівня складності.

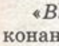
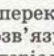
Пошук потрібного матеріалу в тексті підручника полегшить *«Предметний покажчик»*.

Зміст окремих нестандартних термінів пояснить *«Словничок нестандартних термінів»*.

Якщо вам трапиться незрозумілий *математичний символ* або *скорочення* – гляньте на зворот обкладинки підручника.

Піктограми в підручнику позначають:

 – означення; Т – теорема; Н – наслідок; З – опорна задача;

 – матеріал для поглибленого вивчення;  – позапрограмний матеріал.

МАТЕМАТИКА – ЦЕ ТЕ, ЗА ДОПОМОГОЮ ЧОГО ЛЮДИ КЕРУЮТЬ ПРИРОДОЮ І СОБОЮ.

А. М. Колмогоров

Бажаю вам досягти вміння володіти собою та навколишнім світом!

Автор

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ ВЧИТЕЛІВ

Цей підручник *є дворівневим* – за ним можна працювати як у класах академічного, так і в класах профільного вивчення математики.

Додатковий теоретичний і дидактичний матеріал, позначений відповідною піктограмою, є необов'язковим для оцінювання в класах академічного рівня вивчення математики.

Рубрика *«Поза програмою»* містить інформацію для ознайомлення, що виходить за межі шкільних програм.

Після кожного параграфа наводяться *завдання* чотирьох рівнів складності; задачі із зірочкою пропонується оцінювати в класах академічного рівня, виходячи з 12 балів; з двома зірочками можуть не розглядатися в класах академічного рівня; кольором позначено номери, пропоновані для домашнього завдання.

«Завдання на узагальнення знань» (наводяться наприкінці кожного розділу) мають за мету в пошуковій формі узагальнити вивчене. Ці завдання містять або запитання: «чи можливо, що..?», «яким чином можна..?», або пропозицію здійснити певну конструкцію, сформулювати загальний опис моделі розв'язування задач певного типу. Вони нескладні, проте вимагають переглянути та проаналізувати вивчене.

На допомогу в організації повторення курсу геометрії, зокрема підготовки учнів до атестацій за окремими темами, пропонується перелік питань *«Готуємося до заліку»* (учитель може скоротити або розширити їх перелік).

Завдання для повторення в тестовій формі «Перевір себе» (середній і підвищений рівень складності для класів академічного рівня) пропонуються для повторення та діагностики рівня засвоєння учнями певних тем курсу. Окрім того, опрацювання задач цієї рубрики допоможе адаптувати учнів до роботи з тестовими завданнями.

Завдання «Готуємося до вступу в ВТНЗ» підвищеного рівня складності пропонуються учням класів профільного навчання. Рівень задач цієї рубрики орієнтовано на рівень вимог для вступників до ВТНЗ або третьої частини завдань ЗНО. До них можна звертатися не тільки наприкінці навчального року, але й якщо є потреба в додаткових задачах підвищеного рівня складності.

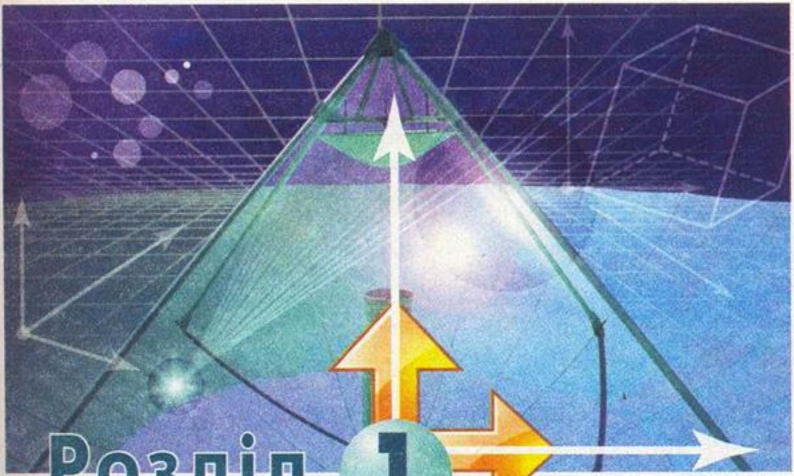
Наприкінці підручника містяться *опорні конспекти* (ОК) з певних тем курсу планіметрії та стереометрії, *«Словничок нестандартних термінів»*, *«Предметний покажчик»*.

На форзаци винесено *основні опорні факти шкільного курсу планіметрії*, на зворот обкладинки – *«Словничок символів і позначень»*.

Розуміючи специфіку викладання в класах академічного і фізико-математичного профілю (різний рівень підготовки та мету навчання учнів), важливість творчого підходу у роботі вчителя, **підручник зроблено варативним. Він надає можливість учителю врахувати особливості конкретних учнів конкретного регіону, власне бачення методики викладання курсу, реалізувати диференційований підхід у роботі з учнями, організувати позакласні заняття з підготовки до ЗНО**. Тобто вчитель може обирати рівень і кількість задач для опрацювання певних тем, звертатися чи не звертатися до задач підвищеної складності, компонувати певні блоки питань з рубрики *«Готуємося до заліку»*, обирати рівень використання додаткового та позапрограмного матеріалу тощо.

Талану вам, колеги!

З повагою, автор



Розділ 1

КООРДИНАТИ, ВЕКТОРИ, ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ У ПРОСТОРІ

У курсі планіметрії ви ознайомилися з координатним методом на площині – відкриттям французького вченого Рене Декарта (1596–1650) – та навчилися перекладати геометричні задачі мовою алгебри, а алгебраїчним задачам надавати геометричного тлумачення. Відкриття Декарта надало змогу значно спростити опис властивостей геометричних перетворень, векторних величин та їхнє використання при розв'язуванні геометричних задач.

У цьому розділі розглянемо узагальнення понять системи координат, геометричних перетворень і вектора для простору; застосування координатного і векторного методів для опису властивостей просторових фігур.

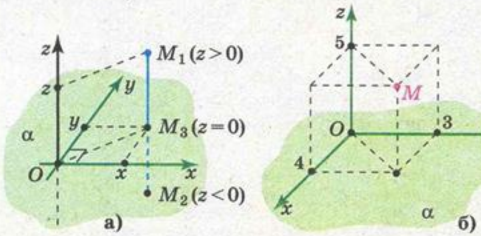
§ 1 Прямокутна система координат у просторі

КООРДИНАТИ ТОЧКИ У ПРОСТОРІ

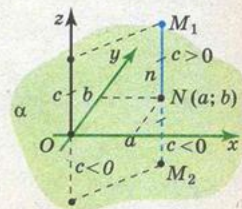
Координатами називають сукупність чисел (їх впорядковану множину), що визначає положення ***точки***. Ви ознайомилися з прямокутною (або декартовою) системою координат на площині, з географічними поняттями координат точки на поверхні земної кулі – довготою та широтою. Якщо треба визначити розміщення точки над поверхнею земної кулі (або в глибині океану), додають ще третє число – висоту над рівнем моря (або глибину під його поверхнею).

Зауважимо, що система координат – *взаємно однозначна відповідність між сукупністю чисел і точкою простору*. Тобто не тільки кожній точці повинна відповідати певна сукупність чисел, а ще й, навпаки, – кожній сукупності чисел, що розглядаються в певному порядку, відповідає єдина точка.

Існують різні просторові системи координат. Найпоширенішою є *прямокутна система координат*. Її ще називають *декартовою*, на честь французького вченого Рене Декарта, який уперше ввів координати в геометрію (на площині).



Мал. 1.1



Мал. 1.2

Візьмемо деяку площину α і введемо на ній прямокутну систему координат xOy (мал. 1.1-а).

Через її початок O проведемо перпендикулярно до даної площини пряму і вкажемо на ній напрям та одиничний відрізок.

Довільній точці M простору поставимо у відповідність три числа $(x; y; z)$, де x і y – координати точки в системі xOy, що є проекцією точки M на α, а $|z|$ – відстань від точки M до площини α. Притому: $z > 0$, якщо точка M міститься з одного боку від α; $z < 0$, – якщо з іншого; $z = 0$, – якщо M належить α.

Таким чином, **кожній точці простору однозначно поставлено у відповідність три числа, три координати – x, y, z.** Записують це так: $M(x; y; z)$. Зверніть увагу: координату x записують першою, y – другою, z – третьою. Наприклад, $M(4; 3; 5)$, або просто $(4; 3; 5)$, означає, що $x = 4$, $y = 3$, $z = 5$ (мал. 1.1-б).

Якщо задано довільні три числа a, b, c, то в заданій системі координат знайдеться точка M з координатами: $x = a$, $y = b$, $z = c$, і до того ж тільки одна.

Справді, на площині α у системі xOy, як відомо за твердженням планіметрії, існує точка $N(a; b)$, і до того ж тільки одна (мал. 1.2). Через точку N проведемо пряму $n \perp \alpha$. Вона існує, і до того ж тільки одна (це доводили в 10-му класі). На прямій n від точки N відкладемо відрізок $|c|$:

1) якщо $c \neq 0$, то отримаємо дві точки, що відповідатимуть випадкам: $z = c > 0$, $z = c < 0$;
2) якщо $c = 0$, то $M \equiv N$.

Таким чином, точка $M(a; b; c)$ визначена однозначно.

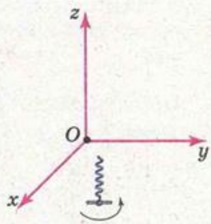
Коли кожній точці простору поставлена у відповідність трійка чисел, і навпаки, довільній трійці чисел відповідає єдина точка простору, – кажуть, що задано просторову систему координат.

Координати *x*, *y*, *z* називають відповідно: *абсцисою*, *ординатою* і *аплікатою*. А координатні осі називають:

- *Ox* – **вісь абсцис;**
- *Oy* – **вісь ординат;**
- *Oz* – **вісь аплікат.**

Координатні площини – *xOy*, *yOz*, *xOz* – поділяють простір на *октанти*. Знаки координат залежать від *октанта*, у якому міститься точка простору.

Зрозуміло, що є дві можливості задати напрям осі *Oz*. Зазвичай користуються *правою* системою координат, у якій всі координати «рівноправні». У правій системі координат напрям осі *Oz* визначається за *правилом гвинта*: якщо обертати гвинт від осі *Ox* до осі *Oy*, то він переміщуватиметься вздовж напряму осі *Oz* (мал. 1.3).



Мал. 1.3

Зауваження. Якщо обрати протилежний указаному напрям осі *Oz*, тобто систему координат, яку називають *лівою*, то це не порушить взаємну однозначність трійки чисел (*x*; *y*; *z*) точці *M*(*x*; *y*; *z*) простору. Тобто в геометрії все одно: обирати праву чи ліву систему координат.

Простір із заданою в ньому системою координат називають *координатним простором*.

ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ

Доведемо формулу для обчислення відстані між двома точками простору через їхні координати в декартовій системі координат.

Т **Теорема 1. Квадрат відстані між двома точками дорівнює сумі квадратів різниць їхніх відповідних координат.**

Доведення

Нехай дано дві точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$; проекції заданих точок на координатні осі позначимо як A_x, A_y, A_z і B_x, B_y, B_z відповідно.

За просторовою теоремою Піфагора, яку доводили в 10-му класі, квадрат відрізка *AB* дорівнює сумі квадратів довжин його проекцій на довільні три взаємно перпендикулярні прямі. Маємо:

$$|AB|^2 = |A_xB_x|^2 + |A_yB_y|^2 + |A_zB_z|^2.$$

Відстань між точками координатної прямої, як відомо з планіметрії, дорівнює модулю різниці координат точок. Тоді:

$$|A_xB_x| = |x_2 - x_1|,\ |A_yB_y| = |y_2 - y_1|,\ |A_zB_z| = |z_2 - z_1|.$$

Звідси

$$|AB| = \sqrt{|A_xB_x|^2 + |A_yB_y|^2 + |A_zB_z|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Теорему доведено.

КООРДИНАТИ СЕРЕДИНИ ВІДРІЗКА

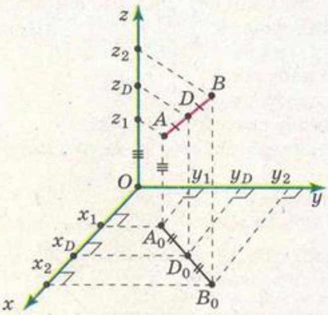
Як відомо, на площині координати середини відрізка дорівнюють півсумі відповідних координат його кінців. Доведемо аналогічне співвідношення для координат середини відрізка у просторі.

Теорема 2. **Координати середини відрізка дорівнюють півсумі відповідних координат його кінців.**

Розглянемо відрізок з кінцями в точках $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ та доведемо, що його середина D має координати $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

Доведення

Позначимо як A_0, B_0, D_0 ортогональні проекції точок A, B, D на площину xOy (мал. 1.4).



Мал. 1.4

1) За властивістю паралельного проектування середина відрізка AB проектується на площину xOy у середину своєї проекції. Тобто в площині xOy точка D_0 – середина відрізка A_0B_0.

У плоскій декартовій системі координат xOy точка D_0 має координати

$$D_0\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

2) У площині ABB_0 довжина відрізка DD_0 дорівнює півсумі довжини відрізків AA_0 і BB_0 (як середня лінія трапеції A_0ABB_0). Тоді третя координата точки D дорівнює $\frac{z_1+z_2}{2}$.

Маємо:

$$D\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

Теорему доведено.

ПОДІЛ ВІДРІЗКА У ЗАДАНОМУ ВІДНОШЕННІ

Аналогічно вищедоведеній теоремі, спираючись на формули планіметрії для обчислення координат точки, що поділяє відрізок у заданому відношенні, легко довести таке твердження.

Теорема 3. **Точка D, що поділяє відрізок з кінцями $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ у відношенні $AD : DB = n : m$, має координати**

$$D\left(\frac{mx_1+nx_2}{n+m}; \frac{my_1+ny_2}{n+m}; \frac{mz_1+nz_2}{n+m}\right).$$

Доведіть самостійно цю теорему, а також такий її наслідок.

Наслідок. **Точка D, що поділяє відрізок з кінцями $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ у відношенні $AD : DB = \lambda$, має координати**

$$D\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}; \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right).$$

Незважаючи на те, що ми тільки розпочали вивчати прямокутну систему координат у просторі, можемо вже застосувати вивчене до розв'язування геометричних задач і переконатися у перевагах *використання методу координат*.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Відрізок MC, перпендикулярний до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), дорівнює 6 см. Знайдіть відстань від точки M до середини гіпотенузи трикутника ABC, якщо катети цього трикутника дорівнюють 2 см і 4 см.

Розв'язання

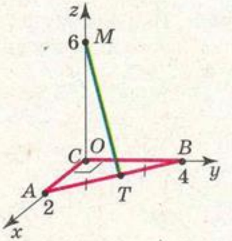
1) Введемо прямокутну систему координат так, щоб катети трикутника ABC належали осям Ox і Oy, а відрізок MC – осі Oz (мал. 1.5).

У цій системі координат точкам A, B, C, M відповідають координати: $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 0)$, $M(0; 0; 6)$.

2) Знайдемо координати точки T – середини відрізка AB: $T(1; 2; 0)$.

3) Квадрат відстані між точками $M(0; 0; 6)$ і $T(1; 2; 0)$ дорівнює: $MT^2 = 1^2 + 2^2 + 6^2 = 41$.

Відповідь: $MT = \sqrt{41}$.



Мал. 1.5

Приклад 2. Знайдіть відстань між серединою ребра BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і точкою M на його ребрі A_1D_1, якщо ребро куба дорівнює 2 см, а $D_1M : MA_1 = 2$.

Розв'язання

1) Введемо прямокутну систему координат так, щоб початок координат збігався з точкою A, а ребра AD і AB належали осям Ox і Oy відповідно (мал. 1.6).

Тоді: $B(0; 2; 0)$, $C(2; 2; 0)$, $A_1(0; 0; 2)$, $D_1(2; 0; 2)$.

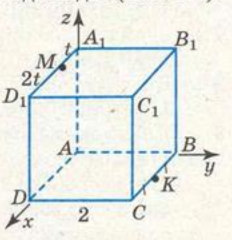
2) K – середина $[BC]$. Тоді $K(1; 2; 0)$.

3) M поділяє $[D_1A_1]$ у відношенні $2 : 1$. Тоді:

$$x_M = \frac{0\cdot 2+2}{2+1} = \frac{2}{3};\ y_M = \frac{0}{2+1} = 0;\ z_M = \frac{2\cdot 2+2}{2+1} = 2.$$

4) $$|MK|^2 = \left(\frac{2}{3}-1\right)^2 + 2^2 + 2^2 = \frac{73}{9}.$$

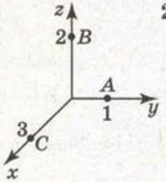
Відповідь: $MK = \dfrac{\sqrt{73}}{3}$ см.

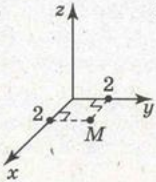


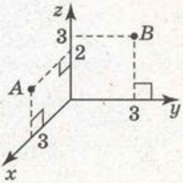
Мал. 1.6

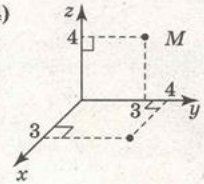
Завдання 1

1°. Запишіть координати точок A, B, C, M:

1) 

2) 

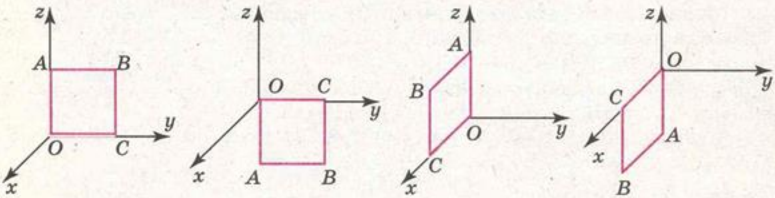
3) 

4) 

2°. Укажіть, які з даних точок належать координатній осі, та зазначте якій.
1) $M(0; 2; 1)$, $P(0; 0; -1)$, $C(5; 0; -3)$, $H(2; 0; 0)$;
2) $A(8; 6; 0)$, $B(0; -4; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $O(0; 0; 0)$.

3°. Укажіть, які з даних точок належать координатній площині, та зазначте якій.
1) $K(0; 1; 1)$, $N(0; 0; 1)$, $P(2; 0; -1)$, $T(1; 0; 0)$;
2) $C(4; 3; 0)$, $B(0; -3; 0)$, $A(0; 1; 0)$, $O(0; 0; 0)$.

4°. На малюнку 1.7 зображено квадрат $OABC$, діагональ якого дорівнює $\sqrt{2}$. Запишіть координати вершин цього квадрата.



а) б) в) г)

Мал. 1.7

5°. Запишіть координати основ ортогональних проекцій точки M на координатні площини, якщо:
1) $M(0; 3; 4)$; 2) $M(2; 3; 4)$; 3) $M(-1; 1; 3)$.

6°. Знайдіть відстань від даних точок до початку координат і відстань від даних точок до координатних площин.
1) $A(1; 1; 0)$, $B(3; 0; 0)$; 2) $C(0; -1; 0)$, $T(-5; 2; 3)$.

7°. Знайдіть довжину відрізка з кінцями в заданих точках:
1) $M(2; 1; 0)$, $N(3; 0; 1)$; 2) $K(0; 1; 0)$, $T(-4; 1; 3)$.

8°. Визначте координати середини відрізка з кінцями в заданих точках:
1) $A(7; 2; 0)$, $B(3; 0; 0)$; 2) $C(0; -1; 0)$, $T(-4; -1; 2)$.

9. Які умови задовольняють координати точки $P(x; y; z)$, що віддалена:
1) від початку координат на 4; 3) від площини yOz на 3;
2) від осі Ox на 2; 4) від осі Oy на 1 і від площини xOz на 1?

10. Укажіть координати якої-небудь точки, що віддалена від початку координат на 3 і до того ж віддалена від:
1) осі Ox на 1;

2) площини xOy на 1;
3) осі Ox на 1 і від площини yOz на 1;
4) осі Ox на 1 і від осі Oy на 2;
5) площини xOy на 1 і площини yOz на 14;
6) осі Ox на 1, осі Oy на 1 і осі Oz на 2;
7) кожної з координатних площин на 1.

11. На кожній з координатних площин знайдіть точку, відстань від якої до точки $M(-1; 2; -3)$ є найменшою.

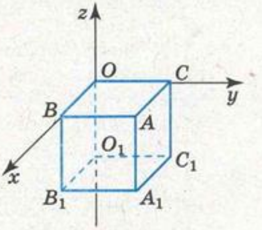
12. На кожній з координатних осей знайдіть точку, відстань від якої до точки $P(3; -4; \sqrt{7})$ є найменшою.

13. Дано точки – вершини куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть координати всіх інших вершин куба та довжини діагоналей куба, якщо:
1) $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $A_1(0; 0; 3)$;
2) $A(2; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $B_1(0; 0; 2)$.

14. На малюнку 1.8 зображено куб $ABOCA_1B_1O_1C_1$, $OA_1 = 2\sqrt{2}$. Знайдіть координати вершин цього куба.

15*. Дано чотири вершини куба: $A(1; 1; 1)$, $B(2; 1; 1)$, $C(2; 2; 1)$, $D(1; 2; 1)$. Знайдіть координати інших вершин цього куба. Розгляньте всі можливі випадки.

16. Дано точки – вершини прямокутного паралелепіпеда. Знайдіть координати всіх інших вершин паралелепіпеда та довжини діагоналей паралелепіпеда, якщо:
1) $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $A_1(0; 0; 5)$;
2) $A(4; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 6; 0)$, $B_1(0; 0; 2)$.



Мал. 1.8

17. Точка C – середина відрізка AB. Знайдіть координати точки:
1) C, якщо $A(0; 2; -1)$, $B(4; 0; 1)$;
2) B, якщо $A(14; -8; 5)$, $C(3; -2; -7)$;
3) A, якщо $B(0; 0; 2)$, $C(-12; 4; 15)$.

18*. Середина відрізка AB належить осі Ox. Знайдіть m і n, якщо:
1) $A(-3; m; 5)$, $B(2; -2; n)$;
2) $A(1; 0{,}5; -4)$, $B(1; m; 2n)$;
3) $A(0; m; n + 1)$, $B(1; n; 1 - m)$;
4) $A(7; 2m + n; -n)$, $B(-5; -3; m - 3)$.

19. Дано точки – вершини призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K – середина відрізка A_1C_1. Знайдіть:
1) координати точок C_1 і K, якщо $A(2; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 4; 0)$, $B_1(0; 0; 2)$;
2) абсцису і аплікату точки K, координати точок C_1 і D_1, якщо ордината точки K дорівнює 2, $A(3; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $A_1(3; 0; 6)$.

20*. Знайдіть довжини проекцій відрізка CB на координатні площини, якщо точка C поділяє відрізок з кінцями в точках $A(2; 0; 3)$ і $B(1; -1; -3)$ у відношенні:
1) 2 : 3; 2) 1 : 2; 3) 2 : 1.

21*. При якому значенні a точка $M(0; a; 0)$ рівновіддалена від точок $B(1; 2; 0)$ і $C(0; 1; 1)$?

22**. Точки $D_1(-1; 0; 1)$, $A(0; 0; 0)$, $D(-1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ – вершини прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть координати точки:
1) рівновіддаленої від точок B, D, D_1;

2) що належить площині $A_1B_1C_1$ і віддалена від площини xOz на 1 од. в.;

3) що поділяє відрізок TB_1 у відношенні 3 : 1, рахуючи від T, якщо T лежить на відрізку BD і $BT : TD = 1 : 3$.

23*. Точки $M(0; 0; 0)$, $P(4; 4; 0)$, $H(0; 4; 0)$, $M_1(0; 0; 6)$ – вершини призми $MPHM_1P_1H_1$; E – середина відрізка P_1H_1. Знайдіть координати точок P_1 і E.

24*. Чи існує трикутник ABC з координатами вершин $A(0; 1; 2)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 2)$? Відповідь обґрунтуйте.

25. Визначте вид трикутника ABC (за сторонами і кутами), якщо:

1) $A(-1; 2; 3)$, $B(3; -1; 2)$, $C(2; 3; -1)$;

2) $A(3; -1; 6)$, $B(-1; 7; -2)$, $C(1; -3; 2)$;

3) $A(0; 0; a)$, $B(0; a; 0)$, $C(a; 0; 0)$.

26.** Дано точки $A(4; 0; 0)$, $B(0; 0; 2)$, $C(0; 4; 0)$. Знайдіть:

1) кути, які утворює пряма AC з осями координат;

2) кут між площинами ABC і xOy.

27.** Знайдіть відстань від початку координат до площини, що проходить через точки $A(2; 0; 0)$, $B(0; 0; 2)$, $C(0; 2; 0)$.

28.** Дано точки $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $C(0; 1; 0)$, $A_1(2; 0; 0)$, $B_1(0; 0; 2)$, $C_1(0; 2; 0)$.

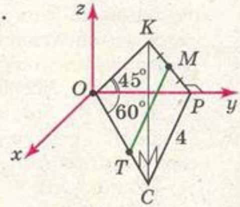
1) Доведіть паралельність площин ABC і $A_1B_1C_1$.

2) Знайдіть відстань між цими площинами.

29.** Використовуючи малюнок 1.9, знайдіть:

1) координати точки M;

2) довжину відрізка MT, якщо $OT = 2TC$.



Мал. 1.9

30*. Точки $A(-1; 0; 1)$, $B(5; 0; 1)$, $C(2; 3\sqrt{3}; 1)$, $S(2; \sqrt{3}; 3)$ – вершини піраміди $SABC$.

1) Чи є ця піраміда правильною?

2) Знайдіть координати середини ребра AC.

31.** Точки $A(1; 0; 0)$ і $B(-1; 0; 0)$ – вершини правильного тетраедра, основа якого лежить у площині xOy. Чи можете ви знайти координати двох інших вершин цього тетраедра?

32*. Відрізок PT завдовжки m перпендикулярний до площини прямокутного трикутника KMP ($\angle M = 90°$). Катети даного трикутника дорівнюють a і b ($a < b$). Знайдіть відстань між точкою T і серединою меншого з катетів трикутника KMP.

33*. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1. Знайдіть методом координат відстань між:

1) серединами ребер AB і C_1B_1;

2) серединами ребра AB і діагоналі DB_1;

3) серединою ребра BC і точкою T, що поділяє ребро A_1D_1 у відношенні 2 : 3;

4) точками P і H на ребрах DC і A_1B_1 відповідно, якщо $DP : PC = 2$, $A_1H : HB_1 = 3 : 2$.

34*. Точки $A(4; 0; 1)$, $B(4; 4; 1)$, $C(0; 0; 5)$, $S(-1; 2; 0)$ – вершини піраміди $SABC$.

1) Доведіть, що всі бічні ребра піраміди утворюють однакові кути з площиною основи.

2) Визначте вид трикутника ABC. Знайдіть координати основи висоти піраміди.

ПРО РЕНЕ ДЕКАРТА

Кажуть, що Декарт створив аналітичну геометрію – змусив алгебру працювати на геометрію, та й не лише на неї, а й на фізику, хімію, біологію, географію, кібернетику і т. д. Тепер навіть важко уявити якусь галузь знань, де б не застосовувалася в тій чи іншій формі аналітична геометрія. Координати кожної точки карти штурмана є деяка функція географічних координат (широти і довготи) відповідної точки земної поверхні. Графік температури хворого, кардіограма й інші дослідження стану здоров'я людини на медичному обладнанні – також аналітична геометрія. Завдяки кібернетиці машина працює на людину, обробляючи подану інформацію за формальними законами.

Творець аналітичної геометрії по праву може бути названий предтечею математичної кібернетики, оскільки у випадках, які ми розглянули й розглядатимемо далі, роль математичної машини виконує алгебра.

Нащадок старовинного французького дворянського роду Рене Декарт (1596–1650) був справжнім улюбленцем долі. Про такого говорять, що при народженні його поцілували всі музи. Удача супроводила його не тільки в науці. Сміливий і безстрашний, він перемагав не лише інтелектом, а й інколи зі зброєю в руках. Так, якось Декарту вдалося за допомогою шпаги, якою він володів з д'артаньянівською майстерністю, змусити піратів пристати до берега і дати можливість висадитися йому самому та його слузі.

Немає, мабуть, точної закономірності у співвідношенні між сміливістю наукового мислення й особистою мужністю вченого. Проте поєднання цих рис ми бачимо в переважній більшості відомих дослідників (Фалес, Піфагор, Архімед, Ейлер, Лобачевський, Декарт...).

Мати Декарта померла від туберкульозу через кілька днів після його народження, а з восьми років він повністю утримувався вихователями єзуїтської школи, заснованої у той час за особливого сприяння Генріха IV.

Щасливий випадок спрямував інтереси Декарта в бік математики. Під час гарнізонної служби в голландському містечку якось увагу його привернуло оголошення, наклеєне на стіні. Проте написане воно було фламандською мовою, якої Декарт не знав. З проханням перекласти текст він звернувся до найближчого з перехожих, який також зацікавився цим оголошенням. Незнайомець виявився професором математики Бекманом, який не без іронії на цікавість молодого солдата відповів, що це публічний виклик до розв'язування геометричної задачі і він перекладе зміст задачі, якщо юнак візьметься розв'язати її. Другого ж дня Декарт приніс розв'язання, і це поклало початок його заняттям математикою під керівництвом Бекмана, що тривали два роки.

Декарт – математик, закоханий у поезію, писав: «У вільний час зимою, порівнюючи таємниці природи із законами математики, я насмілююсь сподіватися, що знайшов основу дивної науки». Уся наукова діяльність Декарта розвивалася протягом лише 12 років; вона промайнула, як метеор, але залишила блискучі й міцні сліди в усій конструкції сучасної математики. Основи аналітичної геометрії Декарт опублікував у 1637 р. в книжці «Геометрія».

§ 2 Метод координат. Рівняння сфери, площини, прямої

Сутність методу координат у просторі (аналогічно методу координат на площині) двобічна. З одного боку, це запис залежності між елементами геометричної фігури за допомогою алгебраїчних співвідношень*. З іншого боку, метод координат дає змогу, спираючись на координати, надавати алгебраїчним співвідношенням геометричного тлумачення. Графічне зображення функцій та їхнє перетворення на координатній площині – яскравий приклад такого застосування методу координат.

Через метод координат ще раз бачимо взаємодію різних розділів математики, цілісність математичної науки.

Двобічність методу координат уже проілюстровано в попередньому параграфі. Розглянемо ще опис сфери, кулі, площини та прямої у просторі.

Кажуть, що фігура у просторі задана в прямокутній системі координат x, y, z рівнянням або нерівністю, якщо координати всіх точок фігури задовольняють указане співвідношення, і до того ж тільки вони.

РІВНЯННЯ СФЕРИ

Рівняння сфери отримаємо аналогічно до того, як у планіметрії виводили рівняння кола, спираючись на властивості відповідного ГМТ (геометричного місця точок).

Сфера – це геометричне місце точок (ГМТ) простору, рівновіддалених від однієї точки – центра сфери – на відстань, що називають радіусом сфери.

Тоді сфера із центром у точці $O(a;\, b;\, c)$ радіуса R – це множина точок $M(x;\, y;\, z)$, для яких виконується умова

$$|OM| = R.$$

Така рівність рівносильна співвідношенню

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R,$$

або

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.}$$

Останнє рівняння є *рівнянням сфери* із центром у точці $(a;\, b;\, c)$ і радіуса R.

Зауваження.

- Значення R не може бути від'ємним.
- Якщо $R = 0$, рівняння описує точку координатного простору $(a;\, b;\, c)$.
- Якщо центр сфери збігається з початком координат $O(0;\, 0;\, 0)$, то її рівняння має вигляд:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

---

* Таке застосування координат у поєднанні з алгеброю складає розділ геометрії, який ще називають *аналітичною геометрією*.

Розглянемо кулю із центром $O(a; b; c)$ радіуса R. За означенням – це множина точок $M(x; y; z)$, відстань від яких до точки $(a; b; c)$ не перевищує R: $|OM| \leqslant R$. Тобто $|OM|^2 \leqslant R^2$, і *множині точок кулі відповідає нерівність*

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leqslant R^2.$$

У випадку, коли центр кулі збігається з початком координат, маємо

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2.$$

РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Як відомо, на площині у прямокутній системі координат загальне рівняння прямої має вигляд

$$ax+by+c=0, \qquad (*)$$

при цьому коефіцієнти a і b одночасно не дорівнюють нулю. Правильним є й обернене твердження: кожному рівнянню виду (*) відповідає пряма у прямокутній системі координат xOy.

Аналогічно можна довести (див. далі), що *площині у координатному просторі відповідає рівняння*

$$ax+by+cz+d=0,$$

де коефіцієнти a, b, c не перетворюються на нуль одночасно.

Указане рівняння називають *загальним рівнянням площини*. (Кажуть, що рівняння площини записано у загальному вигляді.)

Доведемо відповідну теорему.

Теорема 1. I. Площині у просторовій прямокутній системі координат x, y, z відповідає рівняння

$$ax+by+cz+d=0, \qquad (**)$$

де коефіцієнти a, b, c не перетворюються на нуль одночасно.

II. І навпаки: рівнянню виду (**), за умови $a^2+b^2+c^2>0$, відповідає у координатному просторі певна площина.

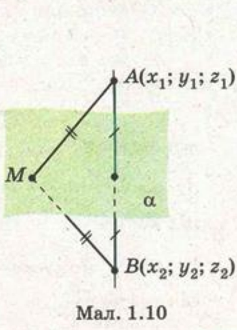
Доведення

I. Доведемо перше твердження теореми.

Нехай маємо площину α. На довільній прямій, перпендикулярній до α, позначимо дві точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$, які рівновіддалені від заданої площини на довільну відстань (мал. 1.10).

Тоді будь-яка точка $M(x; y; z)$ площини α буде рівновіддалена від точок A і B. Тобто для довільної точки $M \in \alpha$ виконується

$$|AM|=|BM|, |AM|^2=|BM|^2.$$



Мал. 1.10

Маємо $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2$.

Звідси, після розкриття дужок, якщо ввести позначення

$$a \triangleq 2(x_2-x_1),\ b \triangleq 2(y_2-y_1),\ c \triangleq 2(z_2-z_1),$$

$$d \triangleq (x_1^2+y_1^2+z_1^2)-(x_2^2+y_2^2+z_2^2),$$

маємо шукане рівняння площини α.

До того ж коефіцієнти a, b, c одночасно не перетворюються на нуль, оскільки точки A і B не збігаються.

Перше твердження теореми доведено.

II. Доведемо друге твердження теореми.

Нехай маємо рівняння $ax+by+cz+d=0$, за умови $a^2+b^2+c^2>0$. Вважатимемо, що $a \neq 0$.

Візьмемо точки $P\left(a-\frac{d}{a}; b; c\right)$ і $T\left(-a-\frac{d}{a}; -b; -c\right)$. Запишемо рівняння площини, точки якої $(x;\ y;\ z)$ рівновіддалені від точок P і T:

$$\left(x-a+\frac{d}{a}\right)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\left(x+a+\frac{d}{a}\right)^2+(y+b)^2+(z+c)^2.$$

Звідси, після розкриття дужок, отримаємо

$$ax+by+cz+d=0,$$

тобто задане умовою рівняння визначає площину.

Друге твердження теореми доведено.

Зауваження. Припущення $a \neq 0$ не обмежує загальності доведення другого твердження теореми. (Поясніть чому.)

ОКРЕМІ ВИПАДКИ РОЗМІЩЕННЯ ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ

Розглянемо розміщення площини у координатному просторі, коли певні коефіцієнти її рівняння дорівнюють нулю:

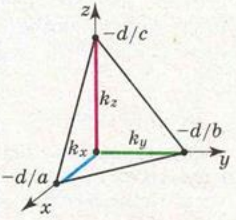
- **$d=0$ – площина проходить через початок координат (0; 0; 0);**
- **$a=0$ – площина паралельна осі Ox;**
- **$b=0$ – площина паралельна осі Oy;**
- **$c=0$ – площина паралельна осі Oz;**
- **$a=d=0$ – площина містить вісь Ox;**
- **$b=d=0$ – площина містить вісь Oy;**
- **$c=d=0$ – площина містить вісь Oz;**
- **$a=b=0$ – площина паралельна координатній площині xOy і віддалена від неї на $-\frac{d}{c}$;**
- **$a=c=0$ – площина паралельна координатній площині xOz і віддалена від неї на $-\frac{d}{b}$;**
- **$b=c=0$ – площина паралельна координатній площині yOz і віддалена від неї на $-\frac{d}{a}$.**

Якщо всі коефіцієнти у рівнянні площини не дорівнюють нулю, то це рівняння можна подати у вигляді:

$$\frac{x}{-\frac{d}{a}}+\frac{y}{-\frac{d}{b}}+\frac{z}{-\frac{d}{c}}=1.$$

За геометричним змістом модулі величин $-\frac{d}{a}$, $-\frac{d}{b}$, $-\frac{d}{c}$ дорівнюють довжинам відрізків, які відтинаються даною площиною на координатних осях (мал. 1.11). Тому такий вид рівняння площини називають *рівнянням площини у відрізках* і записують його у вигляді

$$\boxed{\frac{x}{k_x}+\frac{y}{k_y}+\frac{z}{k_z}=1,}$$



Мал. 1.11

де k_x, k_y, k_z – координати точок перетину площини з відповідними осями координат.

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Пряма у просторі – це лінія перетину двох площин. Отже, у прямокутній системі координат прямій відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0. \end{cases}$$

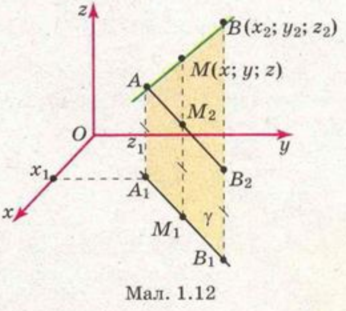
Як відомо, через дві задані точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну. Знайдемо систему рівнянь, що визначає таку пряму в координатному просторі.

Теорема 2. **Якщо пряма проходить через точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ та не паралельна жодній з координатних площин, то їй відповідає система рівнянь**

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.}$$

Доведення

Розглянемо довільну точку $M(x;\ y;\ z)$ прямої AB (мал. 1.12).



Мал. 1.12

Позначимо проекції точок A, B і M на площину xOy як A_1, B_1 і M_1 відповідно, а площину A_1AB як γ.

1) У площині γ проведемо пряму $AB_2 \parallel A_1B_1$ і позначимо точку її перетину з (MM_1) як M_2. З утворених паралелограмів маємо:

$$z_1 = |AA_1| = |M_2M_1| = |B_2B_1|.$$

2) У площині γ прямі MM_1 і BB_1 паралельні, тоді $\triangle AMM_2 \sim \triangle ABB_2$ і

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MM_2}{BB_2} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

3) Аналогічно, проектуючи точки A, M і B на дві інші координатні площини, отримаємо:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \ \frac{AM}{AB} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що для випадків іншого розміщення точки M відносно відрізка AB на прямій AB, доведення твердження теореми 2 будуть аналогічними. Проведіть їх самостійно.

Н Наслідок. **Необхідною і достатньою умовою розміщення точок $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ і $C(x_3; y_3; z_3)$ на одній прямій є співвідношення між їхніми координатами**

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Необхідність випливає безпосередньо з твердження теореми 2. Достатність цієї умови легко довести від супротивного. Зробіть це самостійно.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(0; 0; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $C(1; -1; 2)$.

Розв'язання

1) Шукана площина проходить через початок координат. Отже, її рівняння має вигляд $ax + by + cz = 0$.

2) Координати точок B і C задовольняють це рівняння. Маємо

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 0 = 0, \\ a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c \cdot 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0, \\ a - b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a, \\ c = -a. \end{cases}$$

3) Підставимо останні співвідношення у рівняння площини (див. п. 1):

$$ax - ay - az = 0.$$

Враховуючи, що всі коефіцієнти площини не можуть одночасно дорівнювати нулю, маємо:

$$x - y - z = 0.$$

Відповідь: $x - y - z = 0$.

Приклад 2. Чи перетинаються пряма $\frac{x}{3} = \frac{y - 3}{3} = z - 1$ і площина $x - y + z = 0$? Якщо вони перетинаються, то знайдіть точку їхнього перетину.

Розв'язання

Якщо задані пряма і площина перетинаються, то система рівнянь

$$\begin{cases} x = y - 3, \\ x = 3(z - 1), \\ x = y - z \end{cases}$$

має один розв'язок, який визначає координати точки їхнього перетину.

Підставивши x з першого рівняння у друге та третє, отримаємо рівносильну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = y - 3, \\ y = 3z, \\ z = 3, \end{cases}$$

розв'язком якої є $x = 6$, $y = 9$, $z = 3$.

Відповідь: Перетинаються в точці (6; 9; 3).

Завдання 2

1°. Запишіть рівняння сфери:
1) усі точки якої рівновіддалені від початку координат на 1 од.;
2) яка за центр має початок координат і перетинає вісь Oz у точці (0; 0; 1);
3) яка за центр має точку (1; 1; 1) і дотикається до площини xOy;
4) яка за центр має точку (1; 1; −1) і дотикається до координатних площин.

2°. Запишіть рівняння сфери радіуса R із центром у точці P та співвідношення, що визначає кулю, обмежену цією сферою.
1) $R = 2$, $P(0; 0; 0)$; 2) $R = 5$, $P(1; 0; 2)$; 3) $R = 3$, $P(-2; 3; -1)$.

3°. Чи належить сфері, що задана рівнянням $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4$, точка:
1) $O(0; 0; 0)$; 2) $T(1; 0; 1)$; 3) $C(0; 1; 1)$?

4. Визначте, чи описує задане рівняння сферу:
1) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$; 3) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 2z = -1$;
2) $x^2 - 2x + y^2 = 3$; 4) $x^2 + y^2 - y + z^2 - z = 0{,}5$.

5°. Чи проходить площина, задана рівнянням $2x - 3y + z + 1 = 0$, через точку:
1) $A(0; 0; 0)$; 2) $B(-1; 0; 1)$; 3) $C(0; 0; -1)$?

6°. Запишіть:
1) рівняння кожної з координатних площин;
2) системи рівнянь, які відповідають прямим, що містять осі координат.

7°. Наведіть приклад рівняння площини, що не збігається з координатною площиною і містить:
1) вісь Ox; 2) вісь Oy; 3) вісь Oz.

8. Запишіть рівняння площини, що віддалена на 1 від осі Ox і від осі Oy.

9°. Знайдіть координати точок перетину площини з осями координат, якщо цю площину задано рівнянням:
1) $3x - 3y + 2z - 1 = 0$; 2) $2x - 3y + z + 1 = 0$.

10. Зобразіть площину, що відповідає рівнянню:
1) $z=0$; 3) $z=-2$; 5) $x+y=0$; 7) $x+y+z=1$.
2) $y=1$; 4) $x=3$; 6) $x+z+1=0$;

11. Запишіть рівняння площини, що віддалена від площини:
1) xOy на 2; 2) yOz на 3; 3) xOz на 1.
Скільки розв'язків має кожна з пропонованих задач?

12. Запишіть рівняння площини, яка перпендикулярна до:
1) осі Ox; 4) площини xOy; 7) площини xOz і площини yOz.
2) осі Oy; 5) площини yOz;
3) осі Oz; 6) площини xOz;
Скільки розв'язків має кожна з пропонованих задач?

13. Знайдіть рівняння площини, що перпендикулярна до однієї з координатних осей і проходить через точку:
1) $K(0; 1; 0)$; 2) $M(2; 2; 2)$; 3) $H(4; 4; 0)$.

14*. Запишіть рівняння площини, кожна точка якої рівновіддалена від відрізка з кінцями в точках:
1) $(0; 0; -3)$ і $(0; 2; 0)$; 2) $(1; 0; 1)$ і $(0; 1; 1)$; 3) $(1; -1; -3)$ і $(3; 2; -1)$.

15*. Чи перетинаються площини:
1) $x=2$ і $x=5$; 2) $x+y=1$ і $z=1$; 3) $x+y=-1$ і $y+z=-1$?

16*. Знайдіть рівняння площини, що перетинає координатні осі в точках:
1) $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$; 2) $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; -1)$.

17*. Точки $A(-1; 1; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $D(0; 0; -1)$, $B_1(0; 0; 2)$ – вершини паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Запишіть рівняння площин, що містять грані цього паралелепіпеда.

18°. Запишіть рівняння, що відповідають прямим, які містять координатні осі прямокутної системи координат.

19. Запишіть рівняння будь-якої прямої, яка не збігається з координатною віссю і яка перпендикулярна до:
1) однієї з координатних площин; 2) осі Ox; 3) осі Ox і осі Oy.

20. Укажіть кілька точок, які належать прямій, що визначена системою рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y-z=1, \\ x-2y+z=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y-z+1=0, \\ x-2y+z-2=0. \end{cases}$

21. Укажіть взаємне розміщення двох прямих, які визначено рівняннями:

1) $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$ і $\begin{cases} y=2, \\ z=3; \end{cases}$ 2*) $\begin{cases} x+y=1, \\ z=1 \end{cases}$ і $\begin{cases} x+z=1, \\ y=1. \end{cases}$

22.** Як розміщена пряма відносно площини, які визначено відповідно рівняннями:

1) $\begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$ і $x-y=1$; 2) $\begin{cases} x+y=1, \\ z=1 \end{cases}$ і $y=3$?

23*. Укажіть кілька точок, які належать прямій:

1) $\dfrac{x-1}{2}=y+1=\dfrac{z-2}{3}$; 2) $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$.

24*. Визначте, чи лежать на одній прямій точки A, B і C, якщо:
1) $A(0; 0; 0)$, $B(0; 0; -2)$, $C(0; 0; 2)$;

2) $A(-1; 1; 1)$, $B(0; 1; 1)$, $C(1; 1; 1)$;
3) $A(-1; 2; 3)$, $B(1; -2; -3)$, $C(1; 1; 1)$;
4) $A(-1; 0; 1)$, $B(2; 3; -2)$, $C(5; 1; -1)$;
5) $A(8; 1; 5)$, $B(13; -2; 12)$, $C(-2; -1; -9)$.

25*. Визначте, чи перетинаються задані пряма і площина. Якщо вони перетинаються, то знайдіть точку їхнього перетину.

1) $\dfrac{x-1}{2} = y+1 = \dfrac{z-2}{3}$ і $x - y = 0$; 2) $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{3}$ і $x + y + z = 1$.

26.** Визначте, чи перетинаються задані пряма і сфера.

1) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{1}$ і $x^2 + y^2 + z^2 = 20$;

2) $\dfrac{x-1}{2} = y+1 = \dfrac{z-2}{2}$ і $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

27.** Фігуру F задано рівнянням $(x-2)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 1$. Знайдіть координати точки цієї фігури, що є:
1) найближчою до початку координат;
2) найвіддаленішою від початку координат;
3) найближчою до кожної з координатних площин;
4) найвіддаленішою від кожної з координатних площин;
5) найближчою до кожної з координатних осей;
6) найвіддаленішою від кожної з координатних осей;
7) найближчою до точки $(2; 2; 2)$;
8) найвіддаленішою від точки $(2; 2; 2)$.

28.** Фігуру F задано рівнянням:
1) $x + y + z = 5$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 = 5$; 3) $xyz = 5$; 4) $y^2 = xz$.
Яку фігуру утворено в перетині фігури F площиною $x = 1$?

29.** Розв'яжіть задачу 28 у випадку, коли січну площину задано рівнянням $y = 1$.

30.** Обчисліть відстань від початку координат до фігури, заданої умовою:

1) $x + y - z = 2$; 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z \geqslant 1; \end{cases}$ 5) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$;

2) $\begin{cases} x \geqslant 5, \\ y \geqslant 5z, \\ z \geqslant 5; \end{cases}$ 4) $1 \leqslant x + y \leqslant 2$; 6) $x = y^2 + z^2 + 1$.

§ 3 Про інші системи координат

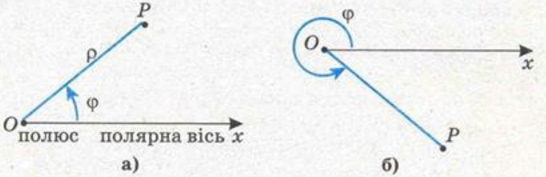
Координати на площині та у просторі можна вводити різними способами. Розглянемо деякі з координатних систем, які не є прямокутними.

ПОЛЯРНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

У планіметрії поширеною є *система полярних координат*, яка є дуже простою і зручною, наприклад для опису перетворення поворот.

Розглянемо визначення *полярних координат точки*.

Нехай у площині дано точку O (*полюс*) і півпряму Ox (*полярну вісь*), що виходить із точки O (мал. 1.13). Візьмемо на цій площині довільну точку P, побудуємо відрізок OP і позначимо довжину цього відрізка через ρ, а кут POx – через φ.



Мал. 1.13

Полярними координатами точки P називають ρ і φ: ρ – *полярним радіусом* цієї точки, а φ – її *полярним кутом*.

Зауважимо, що градусна міра полярного кута φ може мати значення, більші за 180°, наприклад, якщо точка розміщена відносно полярної осі так, як показано на малюнку 1.13-б.

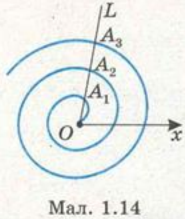
Хто займався у туристичних секціях, той легко зрозуміє, що рух за азимутом ґрунтується на тому самому принципі, що й полярні координати.

За допомогою полярних координат можна задавати на площині різні множини точок.

Наприклад, дуже простим буде **рівняння кола з центром у полюсі**. Якщо радіус кола дорівнює R, то і полярний радіус довільної точки кола (і тільки для точок цього кола) дорівнює R. Тоді рівняння даного кола має вигляд: $\rho = R$.

Розглянемо ще приклади спіралей. Зауважимо, що при описуванні спіралей міра кута φ може перевищувати повний кут. Після того як полярна вісь пройде перший повний оберт, мірою полярного кута φ буде сума радіанної міри кута POx (мал. 1.13) і повного кута, тобто 2π; після другого оберту до міри кута POx додають $2 \cdot 2\pi$ і т. д. Рівняння $\rho = \varphi$ зображує спіраль – зі збільшенням міри кута (у радіанах) збільшується значення ρ.

Іншу *спіраль* описує рівняння $\rho = \dfrac{1}{\varphi}$. Тут малим значенням φ відповідають великі значення ρ і навпаки. При збільшенні φ значення ρ зменшується – спіраль «накручується» на точку O.



Мал. 1.14

Зауваження. Значення кута φ в останніх рівняннях зручно задавати не в градусах, а в *радіанах*.

Рівняння $\rho = a\varphi$, де a – стале додатне число, визначає нескінченну лінію, яка і називається *спіраллю Архімеда* (мал. 1.14).

Проведемо на малюнку 1.14 з точки O промінь OL і позначимо точки його перетину зі спіраллю Архімеда в порядку їх розміщення на OL (рахуючи від точки O) через $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Нехай кут A_1Ox, що менший за 2π, дорівнює γ рад. Точці A_2 буде відповідати кут $\gamma + 2\pi$, A_3 – кут $(\gamma + 4\pi)$ і т. д. Тоді

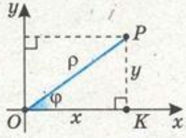
$$OA_1 = a\gamma,\ OA_2 = a(\gamma + 2\pi),\ OA_3 = a(\gamma + 4\pi),\ \dots .$$

Звідси: $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = 2\pi a$. Таким чином, відстань між сусідніми точками перетину спіралі з променем OL є сталою величиною. Зауважимо, що цей висновок не залежить від того, який саме напрям має промінь OL.

Від рівняння фігури в прямокутних декартових координатах можна перейти до рівняння тієї самої фігури в полярних координатах і навпаки.

Якщо взяти за полярну вісь додатну частину осі Ox прямокутної декартової системи координат, а за полюс O – початок координат (мал. 1.15), то можна знайти залежність між прямокутними декартовими координатами точки $(x;\ y)$ та її полярними координатами $(\rho;\ \varphi)$:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$



Мал. 1.15

З прямокутного трикутника OPK знаходимо, що

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Маємо *формули для переходу від декартової прямокутної системи координат до полярної і навпаки.*

Зауважимо, що зовсім необов'язково визначати координати точки за допомогою кутів. Можна обрати на площині ще один полюс на певній відстані від першого, а координатами точки вважати відстані до цих полюсів. Така система координат отримала назву *біполярної* (від лат. *bi* – «дво-»).

ЦИЛІНДРИЧНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Циліндрична система координат поєднує полярну систему координат у площині (зазвичай її розглядають як площину xOy) з віссю аплікат. Остання фіксує відстань від точки простору до площини xOy.

У *циліндричних координатах* (мал. 1.16) кожній точці простору відповідає три координати: ρ і φ – *полярні координати* проекції точки простору на площину xOy та *апліката* z – проекція цієї точки на вісь аплікат.

Цю систему координат називають *циліндричною*, оскільки поверхні $\rho = \text{const} > 0$ являють собою нескінченні циліндри.

У циліндричних координатах зручно описувати фігури обертання (у цьому ви переконаєтеся дещо пізніше).

Мал. 1.16

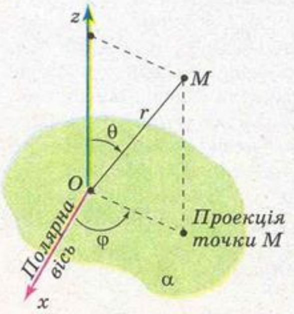
Формули переходу до прямокутних координат – це формули переходу від полярної системи координат до декартових координат у площині xOy, при цьому значення аплікати z не змінюється:

$$x = \rho\cos\varphi;\ y = \rho\sin\varphi;\ z = z.$$

Від прямокутної системи координат можна перейти до циліндричної системи координат за формулами:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \arcsin\frac{y}{\rho};\ z = z.$$

СФЕРИЧНА СИСТЕМА КООРДИНАТ



Мал. 1.17

Сферична система координат схожа на циліндричну. У ній також є площина з полярною віссю та перпендикулярна до цієї площини вісь аплікат (мал. 1.17).

Проте положення точки M простору у *сферичній системі координат* визначається такими координатами: кутом φ, як і в циліндричній системі координат; відстанню r від точки M до полюса O (саме від точки M, а не від її проекції!); кутом θ між відрізком OM і додатним напрямом осі Oz. Ці координати називають: кут φ – *довгота*, відстань r – *довжина радіус-вектора*, кут θ – *полярна відстань*. Додатні напрями відліку вказано на малюнку 1.17.

Якщо надавати сферичним координатам значень у межах:

$$0 \leqslant r < \infty,\ -\pi < \varphi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

то однозначно отримаємо всі точки простору.

Рівняння сфери у такій системі координат має дуже простий вигляд:

$$r = \text{const}.$$

У сферичній системі координат також **зручно описувати конуси**, для яких вісь Oz є віссю конуса ($\theta = \text{const}$).

Формули зв'язку з координатами прямокутної системи:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi;\ y = r\sin\theta\sin\varphi;\ z = r\cos\theta;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x};\ \theta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

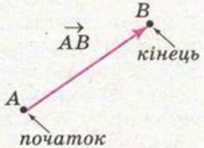
Сферична система координат найближча до *географічної* (погляньте на координатну сітку будь-якого глобуса). Але відрізняється від неї тим, що на глобусі кут θ відраховується не від вертикальної осі, а від горизонтальної площини, у якій лежить екватор. Крім того, у географічній системі додано поняття «північна (південна) широта» та «східна (західна) довгота», щоб указати напрям відліку кутів. Це дає змогу обійтися без від'ємних їх значень.

§ 4 Поняття напрямленого відрізка та вектора

Як і у планіметрії, *вектори зображають і задають напрямленими відрізками*. Саме з них і розпочнемо.

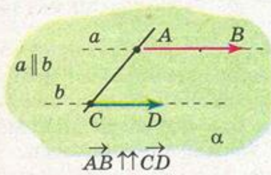
НАПРЯМЛЕНІ ВІДРІЗКИ

Напрямленим відрізком (як і у площині, так і у просторі) називають відрізок, у якого вказано порядок кінців: перший кінець вважають *початком*, а другий – *кінцем* напрямленого відрізка. На зображенні такого відрізка кінець позначають стрілочкою. Наприклад, на малюнку 1.18 точка A – початок, а точка B – кінець напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$.

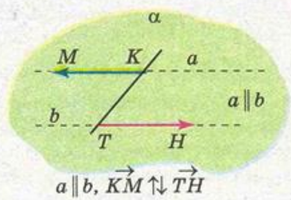


Мал. 1.18

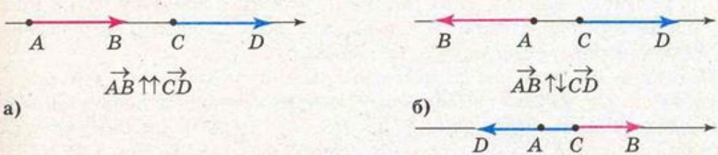
Поняття *співнапрямленості* та *протилежної напрямленості* вводиться для таких відрізків, що містяться на паралельних прямих або на одній прямій. Тоді ці поняття повторюють поняття планіметрії, оскільки паралельні прямі за означенням лежать в одній площині (див. мал. 1.19–1.21).



Мал. 1.19



Мал. 1.20



Мал. 1.21

Властивості співнапрямлених відрізків формулюються так само, як і в планіметрії:

1. Два напрямлені відрізки, співнапрямлені з третім, – співнапрямлені.

2. Усі напрямлені відрізки, співнапрямлені з одним і тим самим напрямленим відрізком, є співнапрямленими один з одним.

Ці властивості безпосередньо випливають з властивостей паралельних прямих у просторі.

ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА

Величини, якими характеризують навколишній світ, можна поділити на два види. До першого виду відносимо такі величини, як маса, енергія, довжина, площа тощо. До другого – сила, швидкість, прискорення тощо.

Величини першого виду визначаються своїми числовими значеннями у певних одиницях вимірювання. Їх називають *скалярними*, або *скалярами*.

Щоб визначити величину другого виду, треба задати не тільки її числове значення (знову-таки у певних одиницях вимірювання), а ще й напрям. Такі величини називають *векторними*, або *векторами*.

Умовно кажучи, векторна величина складається з двох частин: перша, яку можна виміряти, – скалярна частина, та друга – напрям. Таким чином, щоб задати векторну величину, треба задати одночасно її скалярне значення (або числове значення при обраній одиниці вимірювання) та напрям.

У геометрії вивчають ті вектори, скалярні частини яких є відстанями. У геометрії скалярну частину вектора називають його *довжиною*, або *модулем*. Для позначення вектора, як вам уже відомо з планіметрії, користуються стрілочками: $\vec{a}$, $\vec{b}$,...; для позначення довжини вектора використовують знак модуля: $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$,... .

З того що вектор задають довжиною і напрямом, маємо, що **рівність двох векторів означає рівність їхніх довжин та однаковий напрям**.

Особливе місце займає *нульовий вектор* (*нуль-вектор*): його довжина дорівнює нулю, а напряму він не має. Записують його як $\vec{0}$.

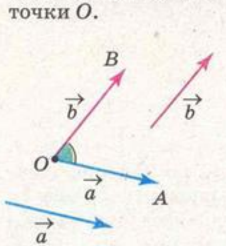
Зауваження. *У картографії* вектором називають напрями течій, руху армії тощо. Такі вектори можуть бути навіть криволінійними, для них не можна ввести поняття рівності або додавання. *У фізиці* зазвичай працюють із *зв'язаними* векторами – векторами, які, окрім скалярної частини і напряму, ще визначаються точкою прикладання.

У геометрії простору, як і в планіметрії, розглядатимемо тільки *вільні* вектори, початок яких можна перенести в довільну точку простору. Такі *вектори вважають рівними, якщо їх можна сумістити паралельним перенесенням (у якійсь площині).*

Далі, кажучи «вектор», матимемо на увазі саме «вільний» вектор.

Таким чином, **у геометрії кожному вектору відповідає нескінченна множина напрямлених відрізків, які мають одну і ту саму довжину та однаковий напрям**. Для будь-якої точки простору O існує єдина точка M, для якої напрямлений відрізок $\overline{OM}$ є представником даного вектора $\vec{a}$. Кажуть, що точку M отримали відкладанням вектора $\vec{a}$ від точки O.

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначається як величина кута AOB між відповідними напрямленими відрізками $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$, які виходять з однієї точки O (мал. 1.22). Легко побачити, що величина кута AOB не залежить від вибору точки O.



Мал. 1.22

Кут між векторами позначають (як і в планіметрії)

$$(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) \text{ або } \angle\vec{a}\vec{b}.$$

У стереометрії виділяють такі види векторів:

- *колінеарні вектори* – належать паралельним прямим (одній прямій), записують як $\vec{a} \parallel \vec{b}$;
- *протилежні вектори* – однакові за довжиною і протилежні за напрямом, записують як $\vec{a}$ та $-\vec{a}$;
- *компланарні вектори* – неколінеарні вектори, що належать паралельним площинам (одній площині), записують як $\vec{a} \div \vec{b}$;

- *одиничні вектори* – модулі дорівнюють одиниці;
- *нульові вектори* – довжина дорівнює нулю, напряму не мають, записують як $\vec{0}$;
- *координатні вектори*, або *орти*, – одиничні вектори, напрями яких збігаються з напрямами осей координат. Орти паралельні напряму осей Ox, Oy, Oz прямокутної системи координат, зазвичай їх позначають відповідно як $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ або $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Зауваження.

1. Нуль-вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.
2. Два довільні ненульові вектори є компланарними. (Поясніть чому.)
3. Три вектори, серед яких є два колінеарних, – є компланарними. (Поясніть чому).

ЗОБРАЖЕННЯ ВЕКТОРІВ

З курсу планіметрії ви вже знаєте, що нульовий вектор зображають точкою, а ненульовий – напрямленим відрізком.

Часто векторами називають самі напрямлені відрізки. Це не зовсім правильно: певний предмет і його зображення – це не одне й те саме. Відомий математик О.Д. Александров казав про зображення вектора так: «*Коли вам показують фото слона, то говорять: "Це слон", але ніхто не каже: "Це зображення слона". Так і в геометрії з векторами: малюючи напрямлений відрізок, кажуть, що це вектор, хоча це тільки зображення вектора. Аналогічно, якщо напрямлений відрізок $\overline{AB}$ зображує вектор $\vec{a}$, то пишемо $\overline{AB} = \vec{a}$ і про цей напрямлений відрізок кажемо "Вектор $\overline{AB}$"*».

ДЕЩО З ІСТОРІЇ ВЕКТОРА

Вектор – відносно нове математичне поняття. Термін «вектор» (від лат. *vector* – «несучий») уперше з'явився в 1845 р. у працях із побудови числових систем, які узагальнювали комплексні числа, ірландського математика й астронома *Уільяма Гамільтона* (1805–1865). Саме Гамільтону належать терміни: «скаляр», «скалярний добуток», «векторний добуток».

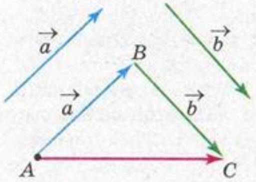
Майже одночасно з Гамільтоном дослідження у цьому напрямі, але з іншої точки зору, проводив німецький математик *Герман Грассман* (1809–1887).

Англійський математик *Уільям Кліффорд* (1845–1879) зумів об'єднати два підходи в загальній теорії, яка включала в себе і звичайне векторне числення.

Остаточного вигляду векторне числення набуло в працях американського фізика і математика *Джозайя Уілларда Гіббса* (1839–1903), який у 1901 р. опублікував ґрунтовний підручник з векторного аналізу.

§ 5 Алгебра векторів

Матеріал цього параграфа – це повторення вивченого в курсі планіметрії (до координатного представлення векторів). Нагадаємо, розглядаючи алгебру векторів у курсі планіметрії, ми не вказували, що працюємо саме на площині, та не використовували властивості її двовимірності, доки не дійшли до розкладання вектора за двома неколінеарними векторами.



Мал. 1.23

Тепер лаконічно повторимо та дещо узагальнимо ваші знання з алгебри векторів.

СУМА ВЕКТОРІВ

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – два ненульові вектори. Відкладемо вектор $\vec{a}$ від довільної точки A, тобто знайдемо таку точку B, що $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ (мал. 1.23). Потім від точки B відкладемо вектор $\vec{b}$ – побудуємо таку точку C, що $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

Вектор $\overrightarrow{AC}$ називається *сумою* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і позначається як $\vec{a} + \vec{b}$.

Інакше кажучи, для будь-яких трьох точок A, B і C справедливе **правило трьох точок:**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Отриманий вектор $\overrightarrow{AC}$ не залежить від вибору точки A (з властивості вільного вектора та першої ознаки рівності трикутників).

Відому нерівність трикутника векторною мовою записують так:

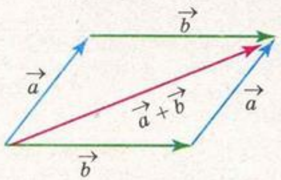
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| - \left|\overrightarrow{BC}\right| \leqslant \left|\overrightarrow{AC}\right| \leqslant \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right|.$$

Тобто для будь-яких двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

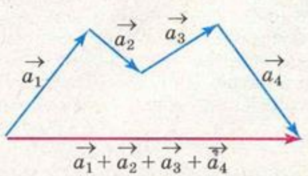
$$\left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right| \leqslant \left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leqslant \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|.$$

Нагадаємо, що суму двох неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зручно знаходити за *правилом паралелограма* (мал. 1.24).

Для побудови *суми кількох векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ потрібно відкласти їх один за одним так, щоб початок наступного збігався з кінцем попереднього. Тоді «замикаючий» вектор – той, що сполучає початок першого з кінцем останнього й напрямлений на кінець останнього, – і буде сумою $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n$ (мал. 1.25).



Мал. 1.24

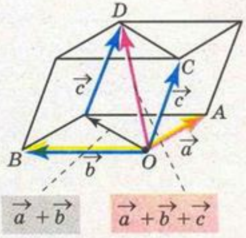


Мал. 1.25

З а у в а ж е н н я. Сума векторів не залежить від порядку, в якому вектори відкладаються, та вибору точки простору, від якої ми відклали перший з векторів суми.

Для знаходження суми трьох некомпланарних векторів можна користуватися *правилом паралелепіпеда*.

Нехай маємо три некомпланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Відкладемо від довільної точки O простору вектори $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$, $\overline{OC} = \vec{c}$ і побудуємо паралелепіпед так, щоб відрізки OA, OB і OC були його ребрами (мал. 1.26). Тоді вектор $\overline{OD}$ (OD – діагональ цього паралелепіпеда) буде сумою $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



Мал. 1.26

Наведемо **основні властивості додавання векторів:**

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

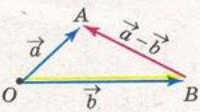
2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

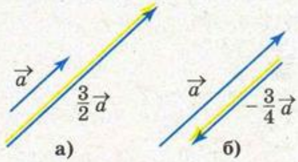
4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

РІЗНИЦЯ ВЕКТОРІВ

Вектор $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ називається *різницею* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Як вам уже відомо з курсу 9-го класу, щоб побудувати вектор $\vec{a} - \vec{b}$ геометрично, достатньо відкласти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від однієї й тієї самої точки O; якщо $\vec{a} = \overline{OA}$, а $\vec{b} = \overline{OB}$ (мал. 1.27), то $\vec{a} - \vec{b} = \overline{BA}$.



Мал. 1.27



Мал. 1.28

МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Множення вектора на число – ставить у відповідність вектору $\vec{a}$ і дійсному числу λ вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, який визначається такими умовами:

- $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, тобто $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ (зокрема, $\vec{b} = \vec{0}$, якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $\lambda = 0$);
- якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\lambda > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ (мал. 1.28-а);
- якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\lambda < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ (мал. 1.28-б).

Наведені раніше чотири властивості додавання векторів доповнимо ще чотирма **властивостями, пов'язаними з множенням вектора на число:**

5) $\lambda \cdot (\mu\vec{a}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{a}$;

6) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$;

7) $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$;

8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

ЩО ВИПЛИВАЄ З ВЛАСТИВОСТЕЙ ВЕКТОРІВ

Перераховані вісім властивостей векторів дають змогу узагальнити поняття вектора. Будь-яку множину, для елементів якої задано операції додавання та множення на число, що задовольняють указані властивості, називають *векторним простором*. У цьому розумінні послідовності чисел, функції (які неперервні на відрізку) тощо, можна розглядати як «абстрактні» вектори – елементи векторного простору.

ОЗНАКА І ВЛАСТИВІСТЬ КОЛІНЕАРНИХ ВЕКТОРІВ

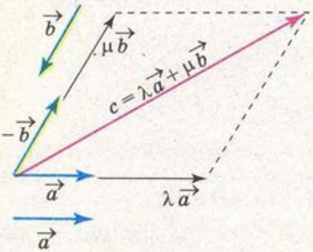
Так само як і в планіметрії, **маємо за необхідну й достатню умову колінеарності ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівність**

$$\vec{a} = \lambda\vec{b},$$

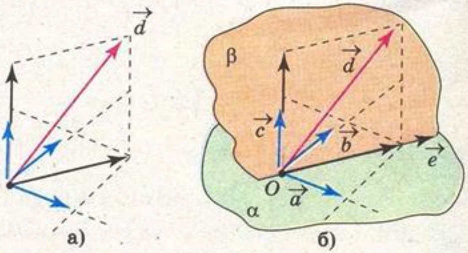
де λ – дійсне число, що не дорівнює нулю.

РОЗКЛАДАННЯ ВЕКТОРА ЗА ТРЬОМА НЕКОМПЛАНАРНИМИ ВЕКТОРАМИ

У планіметрії ми доводили, що *на площині довільний ненульовий вектор завжди можна розкласти за двома неколінеарними векторами* (мал. 1.29).



Мал. 1.29



Мал. 1.30

Спираючись на цей факт можна довести теорему.

Т Теорема. **У просторі довільний ненульовий вектор завжди можна розкласти за трьома некомпланарними векторами, і до того ж однозначно** (мал. 1.30-а).

Доведення

Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – некомпланарні вектори, $\vec{d}$ – довільний ненульовий вектор. Представимо всі чотири вектори напрямленими відрізками зі спільним початком O (мал. 1.30). Надалі саме ці напрямлені відрізки будемо називати векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$.

1) Через прямі, що містять вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, проведемо площину α, а через вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ – площину β (мал. 1.30-б). Площини α і β не збігаються, оскільки за умовою вектор $\vec{c}$ не може лежати в одній площині з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

2) У площині α від точки O відкладемо довільний вектор $\vec{e}$, що лежить на лінії перетину площин α і β. Тоді у площині α (за теоремою планіметрії) $\vec{e}$ можна розкласти за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, і до того ж однозначно:

$$\vec{e} = n\vec{a} + m\vec{b}.$$

3) У площині β (за теоремою планіметрії) $\vec{d}$ можна розкласти за векторами $\vec{e}$ і $\vec{c}$, і до того ж однозначно:

$$\vec{d} = \tau\vec{e} + \sigma\vec{c} = \tau(n\vec{a} + m\vec{b}) + \sigma\vec{c}.$$

Маємо: $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \sigma\vec{c}$.

Ми довели, що *існує шукана трійка чисел* λ, μ, σ. Те, що *вона єдино можлива*, випливає з аксіоми стереометрії (через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну) та однозначності розкладу у площині вектора за двома неколінеарними векторами.

Теорему доведено.

Трійку некомпланарних векторів простору (як двійку неколінеарних на площині), за якими розкладають вектор, називають *базисом*.

Зауваження. Розклад вектора у просторі за базисом (на складові за певними напрямами) використовують у конструюванні мостів, будівель тощо. Розрахунки будь-якого будівництва спираються на розклад сили ваги на складові, що проходять через точки опори. Пригадайте хоча б скульптуру «Мідний вершник», що має лише три точки опори.

ОЗНАКА КОМПЛАНАРНОСТІ ТРЬОХ ВЕКТОРІВ

Якщо вектор $\vec{c}$ можна розкласти за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні.

Правильним є й обернене твердження.

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, а вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – неколінеарні, то вектор $\vec{c}$ можна розкласти за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, і до того ж єдино можливим чином.

Доведіть ці твердження самостійно.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Точка C – середина відрізка AB. Доведіть, що для довільної точки простору M виконується $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$.

Доведення

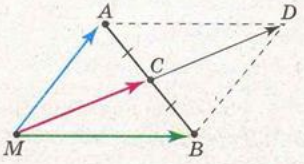
1) Побудуємо на векторах $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MB}$ паралелограм $MADB$ (мал. 1.31). Тоді

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}.$$

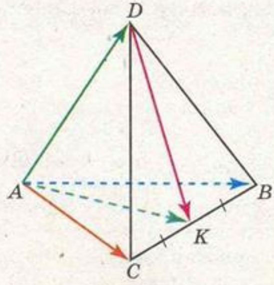
2) За властивістю паралелограма його діагоналі при перетині діляться навпіл. Тоді точка C збігається з точкою перетину діагоналей паралелограма, а $\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MC}$.

3) $2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

Щ. в. д.



Мал. 1.31



Мал. 1.32

Приклад 2. Точка K – середина ребра BC тетраедра $ABCD$. Розкладіть вектор $\overrightarrow{DK}$ за векторами $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

Розв'язання

1) K – середина вірізка BC (мал. 1.32). Тоді (за О.З. 1):

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

2) $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AD}$.

Відповідь: $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AD}$.

Приклад 3. Дано три ненульові вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, кожні два з яких неколінеарні. Знайдіть суму цих векторів, якщо вектор $\vec{a} + \vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{c}$, а вектор $\vec{b} + \vec{c}$ колінеарний вектору $\vec{a}$.

Розв'язання

1) За умовою вектор $\vec{a} + \vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{c}$, а вектор $\vec{b} + \vec{c}$ колінеарний вектору $\vec{a}$. Тоді $\vec{a} + \vec{b} = \lambda\vec{c}$, $\vec{b} + \vec{c} = \mu\vec{a}$, де λ і μ – деякі дійсні числа.

2) Маємо: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\lambda + 1) \cdot \vec{c}$,

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (1 + \mu) \cdot \vec{a}$.

Звідси, якщо вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ненульовий, маємо $(\lambda + 1) \cdot \vec{c} = (1 + \mu) \cdot \vec{a}$, тобто вектори $\vec{c}$ і $\vec{a}$ колінеарні, що суперечить умові.

Відповідь: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Завдання 3

1°. Накресліть ненульовий вектор $\overrightarrow{AB}$ і побудуйте вектори $0 \cdot \overrightarrow{AB}$; $1 \cdot \overrightarrow{AB}$; $-1 \cdot \overrightarrow{AB}$; $(1 : |AB|) \cdot \overrightarrow{AB}$. Виміряйте довжину вектора $(1 : |AB|) \cdot \overrightarrow{AB}$ і переконайтеся, що вона дорівнює одиниці.

2. Накресліть два співнапрямлені вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, за допомогою масштабної лінійки знайдіть $|a|$ і $|b|$. Побудуйте вектор: 1°) $\vec{a} + \vec{b}$; 2°) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $(|b| : |a|) \cdot \vec{a}$ і переконайтеся в тому, що він дорівнює вектору $\vec{b}$.

3. Накресліть два протилежно напрямлені вектори $\vec{c}$ і $\vec{p}$ так, щоб $|c| = 2$ см, $|p| = 4$ см. Побудуйте вектор: 1°) $\vec{c} + \vec{p}$; 2°) $\vec{c} - \vec{p}$; 3) $(-|p| : |c|) \cdot \vec{c}$ і переконайтеся, що він дорівнює вектору $\vec{p}$.

4°. Накресліть три ненульові вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте вектори: 1) $-\vec{a}$, $-\vec{b}$, $-\vec{c}$; 2) $2\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $0,5\vec{c}$; 3) виміряйте довжини цих векторів і переконайтеся в тому, що: $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$; $|0,5 \cdot \vec{c}| = 0,5|-\vec{c}|$; $|2 \cdot \vec{a}| = 2|\vec{a}|$.

5°. Накресліть ненульовий вектор $\vec{a}$. Побудуйте вектор $\vec{p} = 3\vec{a}$. Побудуйте вектори: $-\vec{a}$; $1,5\vec{a}$; $2\vec{a}$; $6\vec{a}$. Укажіть, як напрямлений кожний з отриманих векторів відносно вектора $\vec{p}$, і виразіть їхні довжини через $|p|$.

6°. Накресліть попарно колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$. Побудуйте вектори: 1) $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c} + \vec{d}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c} - \vec{d}$, $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{d}$.

7°. Накресліть неколінеарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ і $\vec{e}$. За правилом багатокутника побудуйте вектори: 1) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$; 2) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} + \vec{d} - \vec{e}$.

8°. Накресліть два неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, початки яких не збігаються:
1) позначте довільну точку A і за правилом трикутника побудуйте суму $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$;
2) позначте іншу точку M і за правилом паралелограма побудуйте суму $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{MP}$;
3) за допомогою креслярських інструментів переконайтеся, що $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MP}$.

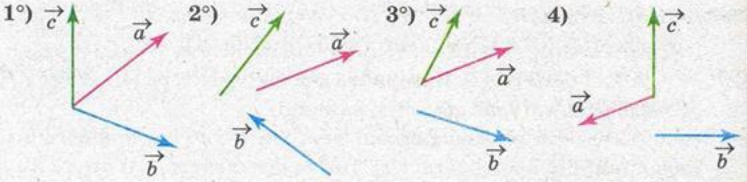
9°. Накресліть неколінеарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте вектори:
1) $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
2) переконайтеся, що вектор $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ дорівнює вектору $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

10. Накресліть два ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Доведіть (побудовою), що $|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

11°. Накресліть два ненульові вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте вектори:
1) $\vec{m} - \vec{n}$; 2) $\vec{n} - \vec{m}$.
Які вектори ви отримали?

12. Накресліть два ненульові вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$. Побудуйте вектори: 1) $\vec{x} + 2\vec{y}$; 2) $0,5\vec{y} + \vec{x}$; 3) $\vec{y} - 3\vec{x}$; 4) $-2\vec{y} + \vec{x}$; 5) $-\vec{y} - \vec{x}$; 6) $0 \cdot \vec{y} - 2\vec{x}$; 7) $1,5\vec{y} - 0 \cdot \vec{x}$.

13. Дано зображення трьох некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Знайдіть за правилом паралелепіпеда вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$:



14*. Накресліть довільний паралелограм $ABCD$. Позначте довільну точку X на цьому самому аркуші паперу. Побудуйте вектори $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}$ і $\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$. Переконайтеся, що отримані вектори рівні. Чи зміниться результат, якщо змінити положення точки X? Відповідь обґрунтуйте.

15. Чи може довжина вектора $\vec{a} - \vec{b}$:

1) бути меншою за довжину вектора $\vec{a} + \vec{b}$;

2) дорівнювати довжині вектора $\vec{a} + \vec{b}$;

3) бути більшою за довжину вектора $\vec{a} + \vec{b}$?

Якщо твердження може виконуватися, то вкажіть, для яких саме векторів.

16*. Знайдіть число x, якщо довжина вектора $\vec{b} = x\vec{a}$ дорівнює $3|\vec{a}|$ і вектор $\vec{b}$:

1) співнапрямлений з вектором $\vec{a}$;

2) протилежно напрямлений з вектором $\vec{a}$.

17*. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні. Знайдіть числа x і y, якщо:

1) вектори $x\vec{a} + y\vec{b}$ і $(y+1)\vec{a} + (2-x)\vec{b}$ рівні;

2) вектори $(2-x)\vec{a} + \vec{b}$ і $y\vec{a} + (x-3)\vec{b}$ рівні.

18*. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні. Знайдіть число x, якщо:

1) вектори $(x-1)\vec{a} + 2\vec{b}$ і $3\vec{a} + x\vec{b}$ колінеарні;

2) вектори $3\vec{a} + x\vec{b}$ і $(1-x)\vec{a} - \dfrac{2}{3}\vec{b}$ співнапрямлені.

19**. Для векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і $\vec{d}$ виконується рівність $2\vec{a} + 5\vec{b} + 0 \cdot \vec{c} - 8\vec{d} = \vec{0}$. Запишіть кожний з векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{d}$ у вигляді лінійної комбінації інших векторів. Чи правильно, що вектор $\vec{c}$ не можна подати у вигляді лінійної комбінації інших векторів? Чому?

20*. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Чи є компланарними вектори:
1) $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$; 2) $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$; 3) $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{B_1A_1}$; 4) $\overrightarrow{DD_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BB_1}$?

21**. Дано паралелограми $ABCD$ і AB_1C_1D. Доведіть, що вектори $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DA}$ компланарні.

22*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед. Укажіть вектор, що дорівнює:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$; 3) $\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{C_1B_1}$; 5) $\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}$.

2) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}$; 4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1} - \overrightarrow{AA_1}$;

23*. Діагоналі паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перетинаються в точці O. Розкладіть вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{D_1O}$ за векторами $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$.

24**. У трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ діагоналі грані BB_1C_1C перетинаються в точці M. Розкладіть вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{A_1M}$ за векторами $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BB_1}$ і $\overrightarrow{BC}$.

25**. У тетраедрі $OABC$ точки M і N – середини ребер OB і OC. Розкладіть вектори $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ і $\overrightarrow{MN}$ за векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$.

26**. $OABC$ – тетраедр, AM – медіана грані ABC. Розкладіть вектор $\overrightarrow{AM}$ за векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$.

27**. У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K – середина ребра CC_1. Розкладіть вектор:
1) $\overrightarrow{AK}$ за векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AA_1}$; 2) $\overrightarrow{DA_1}$ за векторами $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ і $\overrightarrow{CD_1}$.

§ 6 Три точки на прямій. Векторний метод

Векторна алгебра (розділ математики, що вивчає вектори) є одним з основних засобів досліджень у фізиці та в різних розділах математики. Наприклад, у векторній формі записують закони фізики, зокрема механіки. У геометрії (як планіметрії, так і стереометрії) апарат векторів дає змогу лаконічно записувати формулювання певних тверджень, їхнє доведення, спрощує розв'язування певних задач.

У цьому параграфі повернемося до застосування векторів при розв'язуванні задач – *метода векторів*, узагальнимо вже відомі вам з 9 класу факти.

В основі застосування алгебри векторів при розв'язуванні геометричних задач лежать такі два твердження.

Теорема 1. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні і $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число λ, що $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Теорема 2. Точка C лежить на прямій AB тоді і тільки тоді, коли існує таке число λ, що для довільної точки O (мал. 1.33):

$$\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}. \qquad (*)$$

Мал. 1.33

Доведення

Справді, останню рівність можна перетворити так:

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \lambda(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{BA}.$$

Тоді, за теоремою 1, твердження теореми 2 є рівносильним тому, що вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BA}$ колінеарні, тобто що точки A, B і C лежать на одній прямій.

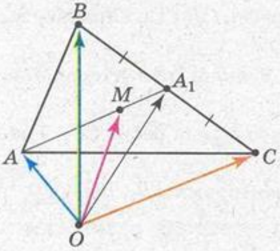
Наслідок. Векторна формула поділу відрізка у заданому відношенні.

Якщо $AC : CB = m : n$, то у формулі (*) $\lambda = \dfrac{n}{n+m}$ і маємо:

$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{n+m}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{n+m}\overrightarrow{OB}. \qquad (**)$$

Останню формулу часто використовують як у геометрії, так і у фізиці. Розглянемо кілька окремих випадків, а після того приклади її застосування.

2*



Мал. 1.34

1) C – середина відрізка AB.

Маємо: $\dfrac{n}{n+m}=\dfrac{m}{n+m}=\dfrac{1}{2}$, $\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

2) AA_1 – медіана трикутника ABC. Розглянемо точку M, що ділить AA_1 у відношенні $AM : MA_1 = 2 : 1$ (мал. 1.34). Тоді за (**) отримаємо:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{1+2}\overrightarrow{OA_1}.$$

Врахуємо, що A_1 – середина відрізка BC, тобто

$$\overrightarrow{OA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

Маємо

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

Ця формула симетрична відносно точок A, B і C. Тоді всі три медіани трикутника перетинаються в одній точці M і діляться нею у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини трикутника. Таке міркування (без сучасних позначень) було відоме ще *Архімеду*.

Зауважимо, що у наведеному доведенні ми не використовували те, що точка O належить площині трикутника ABC, тобто O може бути довільною точкою простору. Отже, ми довели, що **для довільного трикутника ABC із центроїдом M і довільної точки простору O виконується векторна рівність:**

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}). \qquad (***)$$

Ви вже ознайомилися з ефективністю застосування векторного методу при розв'язуванні задач планіметрії. Проілюструємо *векторний метод на задачах стереометрії*.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

3 Приклад 1. Доведіть, що **діагональ AC_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходить через точки перетину медіан трикутників A_1BD і CB_1D_1 і ділиться цими точками на три рівні частини.**

Доведення

Позначимо через M і N відповідно точки перетину медіан трикутників A_1BD і CB_1D_1 (мал. 1.35).

1) За формулою (***) маємо:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}).$$

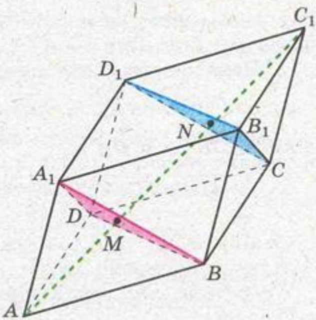
2) За формулою паралелепіпеда:

$$\overrightarrow{AC_1}=(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}).$$

Тоді вектори $\overline{AM}$ і $\overline{AC_1}$ колінеарні. Звідси: точки A, M і C_1 лежать на одній прямій; $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AA_1}$, тоді $AM = \frac{1}{3}AA_1$.

Аналогічно отримаємо, що точка N належить діагоналі AC_1 і $C_1N = \frac{1}{3}AA_1$. Тоді $AM = MN = NC_1$.

Щ. в. д.



Мал. 1.35

ПРО СЕРЕДНЮ ЛІНІЮ ТЕТРАЕДРА

Середніми лініями тетраедра називають відрізки, що сполучають середини його мимобіжних ребер.

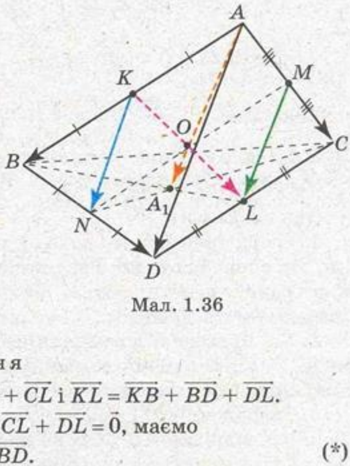
Приклад 2. У тетраедрі $ABCD$ точки K, L, M, N – середини ребер AB, CD, AC, BD відповідно; $|AC| = a$, $|BD| = b$, $(AC)\widehat{\ }(BD) = \alpha$. (мал. 1.36).

1. Знайдіть довжину середньої лінії тетраедра KL.

2. Знайдіть кути між прямим KL і AC, KL і BD.

3. Визначте, чи перетинаються середні лінії KL і MN. Якщо так, то в якому відношенні вони поділяються при перетині?

4. Доведіть, що точка перетину середніх ліній тетраедра належить відрізку, що сполучає вершину тетраедра з центроїдом протилежної грані і ділить цей відрізок у відношенні 3 : 1, починаючи з вершини.



Мал. 1.36

Доведення

1) Запишемо дві рівності $\overline{KL} = \overline{KA} + \overline{AC} + \overline{CL}$ і $\overline{KL} = \overline{KB} + \overline{BD} + \overline{DL}$.

Додамо їх і врахуємо, що $\overline{KA} + \overline{KB} = \vec{0}$ і $\overline{CL} + \overline{DL} = \vec{0}$, маємо

$$2\overline{KL} = \overline{AC} + \overline{BD}. \qquad (*)$$

Піднесемо векторну рівність (*) до скалярного квадрата:

$$4\left|\overline{KL}\right|^2 = \left|\overline{AC}\right|^2 + \left|\overline{BD}\right|^2 + 2\overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

Звідси

$$KL = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2bc\cos\alpha}.$$

2) Якщо відкласти вектори $\overline{KL}$, $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ від однієї точки, то за твердженням (*) маємо, що ці вектори належатимуть одній площині, яка паралель-

на мимобіжним прямим AC і BD. Звідси відрізки AC, BD і KL паралельні одній площині. Тоді $AC\hat{\ }KL = BD\hat{\ }KL = 0$.

3) Нехай точки M і N – середини ребер AC і BD відповідно, а точка O – середина відрізка KL (мал. 1.36). Тоді: $\overrightarrow{KN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (як середні лінії $\triangle ADB$ і $\triangle ACD$);

$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{LO};\ \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{OK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

Оскільки $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{LO}$, то маємо $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$, тобто O – середина відрізка MN. Аналогічно маємо, що O – середина всіх середніх ліній тетраедра.

Усі середні лінії тетраедра перетинаються в одній точці та діляться нею навпіл.

4) Нехай A_1 – центроїд $\triangle BCD$. Запишемо вектори $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{AA_1}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$:

1) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) =$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$;

2) $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) =$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}((\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Тоді $4\overrightarrow{AO} = 3\overrightarrow{AA_1}$. Звідси $\overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}$. Тоді точка O лежить на відрізку AA_1 і поділяє його у відношенні $AO : OA_1 = 3 : 1$.

Твердження 4 доведено.

Зауваження.

1. Зверніть увагу, ми довели, що всі середні лінії тетраедра та всі відрізки, які сполучають його вершини з центроїдами (центрами мас) протилежних граней, перетинаються в одній точці O. Цю точку O називають *центром мас тетраедра*.

2. Усі проведені доведення не залежать від того, містяться чотири точки A, B, C і D в одній площині чи ні. Тому всі доведені твердження є правильними і для плоского чотирикутника $ABCD$.

3. Твердження (*) можна узагальнити для відрізка KL, коли точки K і L ділять відрізки AB і CD не навпіл, а в деякому співвідношенні x, тобто $AK : KB = CL : LD = x$. Зробіть таке узагальнення самостійно.

4. Для найдопитливіших: спробуйте проаналізувати, за якою лінією рухається середина відрізка KL, якщо x змінюється від 0 до ∞.

Завдання 4

1*. Точки K, L і P лежать на одній прямій, а точка H не належить цій прямій. Виразіть вектор $\overrightarrow{HP}$ через вектори $\overrightarrow{HK}$ і $\overrightarrow{HL}$, якщо:

1) $\overrightarrow{LP} = 2\overrightarrow{KL}$; **2)** $\overrightarrow{KP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PL}$; **3)** $\overrightarrow{KP} = \lambda\overrightarrow{KL}$.

2*. Доведіть ТЕОРЕМУ. **Три точки A, B, C лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли існують такі числа k, n, m ($k \neq 0, n \neq 0, m \neq 0$), що для довільної точки простору O виконується співвідношення**

$$k\overline{OA} + n\overline{OB} + m\overline{OC} = \vec{0}.$$

3*. Доведіть, якщо точки M і N – відповідно середини протилежних сторін AB і CD просторового чотирикутника $ABCD$ (вершини такого чотирикутника не обов'язково лежатимуть в одній площині), то

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}).$$

4*. Доведіть, якщо точки M і N поділяють протилежні сторони AB і DC просторового чотирикутника $ABCD$ (вершини такого чотирикутника не обов'язково лежатимуть в одній площині) у відношенні $AM : MB = CN : ND = n : m$, то $\overline{MN} = \dfrac{m}{n+m}\overline{AD} + \dfrac{n}{n+m}\overline{BC}$.

5*. Доведіть, якщо M – центроїд трикутника, то

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0}.$$

6*. Доведіть, якщо $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0}$, то M – центроїд трикутника ABC.

7*. Дано точки A, B, C, D. Знайдіть таку точку M, щоб

$$\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{CD}.$$

8*. Точки M, N, P – середини сторін AB, BC, AC трикутника ABC відповідно. Точка O – довільна точка простору. Доведіть, що

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP}.$$

9.** Відрізки, що сполучають протилежні сторони чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці M. Точка O – довільна точка простору. Доведіть, що

$$\overline{OM} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

10.** Відрізки AB і CP не лежать в одній площині, точки M і N – середини цих відрізків. Доведіть, що $MN < 0,5(AC + BP)$.

11.** Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O. Доведіть, що для довільної точки M простору виконується нерівність

$$MO < \frac{1}{4}(MA + MB + MC + MD).$$

12.** У тетраедрі $ABCD$ точки M і N – центроїди граней ABD і BCD відповідно. Доведіть, що $MN \parallel AC$ і знайдіть відношення цих відрізків.

13.** Доведіть, якщо центроїди трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ збігаються, то прямі AA_1, BB_1 і CC_1 паралельні одній площині.

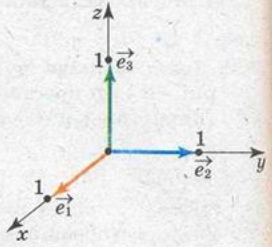
14.** Трикутники ABC, $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ розміщено так, що точки A, B, C – середини відрізків A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 відповідно. Доведіть, що центроїди трикутників ABC, $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ належать одній прямій.

15.** Доведіть, що трикутник, вершинами якого є центроїди бічних граней тетраедра, подібний основі цього тетраедра.

§ 7 Координати вектора. Дії над векторами, що задані координатами

КООРДИНАТИ ВЕКТОРА У ПРОСТОРІ

Координати вектора в просторі визначають аналогічно тому, як це робили для вектора на площині. На кожній з координатних осей від точки $O(0; 0; 0)$, початку координат, відкладемо одиничний вектор так, щоб напрям цього вектора збігався з напрямом відповідної осі. Позначимо їх так: $\vec{e}_1$ – одиничний вектор на осі абсцис, $\vec{e}_2$ – одиничний вектор на осі ординат, $\vec{e}_3$ – одиничний вектор на осі аплікат (мал. 1.37).



Мал. 1.37

Нагадаємо, що такі вектори називають *координатними векторами*, або *ортами*.

Як ви вже знаєте, будь-який вектор простору можна розкласти за трьома некомпланарними векторами. Причому коефіцієнти цього розкладу визначаються однозначно.

Координатні вектори некомпланарні, тоді довільний вектор можна подати у вигляді

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$$

При цьому коефіцієнти a_1, a_2, a_3 визначаються однозначно. Вони називаються *координатами вектора* $\vec{a}$ *в даній системі координат*. Координати вектора записують так: $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ або $\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)}$.

Орти мають координати

$$\vec{e}_1(1; 0; 0),\ \vec{e}_2(0; 1; 0),\ \vec{e}_3(0; 0; 1).$$

Нуль-вектор можна записати як

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3.$$

Тому **всі координати нуль-вектора дорівнюють нулю.**

На малюнку 1.38 зображено прозорий прямокутний паралелепіпед з вимірами 2; 3; 5. За правилом паралелепіпеда вектор

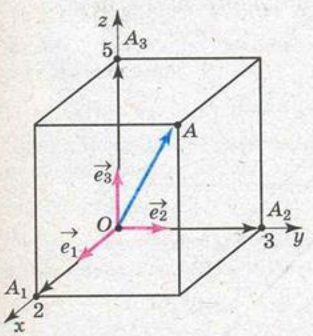
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3},$$

тобто вектор $\overrightarrow{OA}$ дорівнює сумі векторів, що колінеарні ортам.

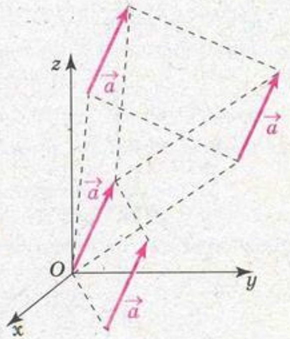
Зрозуміло, що вектору $\overrightarrow{OA}$, зображеному на малюнку 1.38, відповідають координати $\overrightarrow{OA}$ (2; 3; 5). Запишемо координати інших векторів, зображених на цьому малюнку:

$$\overrightarrow{OA_1}(2; 0; 0),\ \overrightarrow{OA_2}(0; 3; 0),\ \overrightarrow{OA_3}(0; 0; 5).$$

Зауважимо, що координати вектора $\overrightarrow{OA}$, зображеного на малюнку 1.38, такі самі, як і координати точки A у цій системі координат. Кажуть, що $\overrightarrow{OA}$ є *радіус-вектором* точки A (напрямленого відрізка $\overrightarrow{OA}$ з початком у точці $O(0; 0; 0)$).



Мал. 1.38



Мал. 1.39

З в е р н і т ь у в а г у: на малюнку 1.38 напрямлений відрізок $\overline{OA}$ з початком в точці $O(0;\ 0;\ 0)$ зображає вектор $\vec{a}$. Нагадаємо, коли кажуть «вектор $\overline{OA}$», то мають на увазі «напрямлений відрізок $\overline{OA}$, що зображає вектор». Кожному вектору відповідає нескінченна множина напрямлених відрізків, які мають одну й ту саму довжину та однаковий напрям ($\overline{OA}$ – один із них). Такі напрямлені відрізки переходять один в один паралельним перенесенням у довільних площинах, що містять відповідні напрямлені відрізки (мал. 1.39). Тоді координати вектора не повинні залежати від того, яким саме напрямленим відрізком його зображено.

Т Легко довести, що, як і у планіметрії, **координати вектора, зображеного напрямленим відрізком, дорівнюють різниці відповідних координат кінця напрямленого відрізка та його початку.**

Доведемо останнє твердження.

Д о в е д е н н я

Нехай вектор $\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ зображено напрямленими відрізками $\overline{OA}$ і $\overline{CB}$ (мал. 1.40). Точки A, B, C мають координати $A(x_a;\ y_a;\ z_a)$, $B(x_b;\ y_b;\ z_b)$, $C(x_c;\ y_c;\ z_c)$. Треба довести, що

$$a_1 = x_a = x_b - x_c;\ a_2 = y_a = y_b - y_c;\ a_3 = z_a = z_b - z_c. \qquad (*)$$

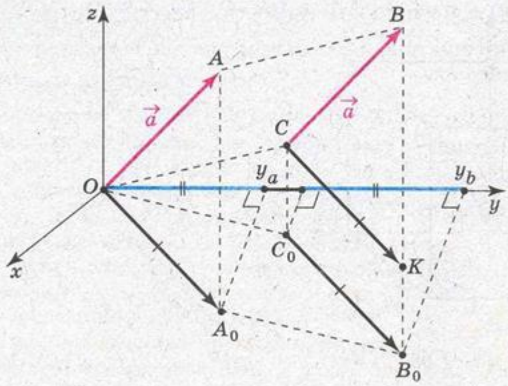
Доведемо останні співвідношення кожної рівності. (Рівність координат радіус-вектора відповідним координатам точки, що є його кінцем, вже обговорювалася раніше.)

1) Ортогональні проекції точок A, B і C на площину xOy позначимо відповідно як A_0, B_0 і C_0.

З рівності напрямлених відрізків $\overline{OA}$ і $\overline{CB}$ маємо, що $OABC$ – паралелограм. Тоді, за властивостями паралельного проектування, $OA_0B_0C_0$ – теж є паралелограмом.

У площині xOy, за твердженням планіметрії, маємо:

$$\overline{OA_0} = \overline{C_0B_0},\ \overline{(x_a;\ y_a)} = \overline{(x_b - x_c;\ y_b - y_c)};\ x_a = x_b - x_c,\ y_a = y_b - y_c.$$



Мал. 1.40

Перші два твердження (*) доведено.

2) Проведемо у площині C_0CB пряму $CK \parallel C_0B_0$.

З властивостей паралелограмів $OA_0B_0C_0$ і C_0B_0KC маємо рівність $\overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{C_0B_0} = \overrightarrow{CK}$. Тоді

$$\overrightarrow{AA_0} = \overrightarrow{OA_0} - \vec{a} = \overrightarrow{CK} - \vec{a} = \overrightarrow{BK}.$$

Рівні вектори мають рівні довжини: $AA_0 = BK$. Звідси випливає шукана рівність:

$$z_a = AA_0 = BK = BB_0 - KB_0 = BB_0 - CC_0 = z_b - z_c.$$

Теорему доведено.

РІВНІСТЬ ВЕКТОРІВ, ЗАДАНИХ КООРДИНАТАМИ

Так само, як і в планіметрії, в стереометрії виконуються такі твердження:

1. Координати рівних векторів відповідно рівні.

Тобто якщо вектори $\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ і $\vec{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ рівні, то $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$. (Поясніть чому.)

2. Якщо відповідні координати векторів рівні, то ці вектори рівні.

Тобто якщо $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, то вектори $\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ і $\vec{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ рівні. (Поясніть чому.)

За теоремою Піфагора для простору маємо: **модуль вектора, заданого координатами, дорівнює квадратному кореню із суми квадратів його координат:**

$$\left|\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Наприклад, довжина (модуль, або абсолютна величина) вектора $\vec{a}(2;\ 3;\ 5)$, зображеного на малюнку 1.38, дорівнює

$$\left|\vec{a}(2;\ 3;\ 5)\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{38}.$$

ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ, ЩО ЗАДАНО КООРДИНАТАМИ

1. Кожна координата суми двох векторів дорівнює сумі відповідних координат цих векторів:

$$\vec{a}(a_1;\, a_2;\, a_3) + \vec{b}(b_1;\, b_2;\, b_3) = \overline{(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3)}.$$

2. Кожна координата різниці двох векторів дорівнює різниці відповідних координат цих векторів:

$$\vec{a}(a_1;\, a_2;\, a_3) - \vec{b}(b_1;\, b_2;\, b_3) = \overline{(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ a_3 - b_3)}.$$

3. Кожна координата добутку вектора на число дорівнює добутку відповідної координати вектора на це число:

$$\lambda \cdot \vec{a}(a_1;\, a_2;\, a_3) = \overline{(\lambda \cdot a_1;\ \lambda \cdot a_2;\ \lambda \cdot a_3)}.$$

Твердження 1–3 доводяться так само, як і для векторів на площині.

Наведені правила дають змогу знайти координати будь-якого вектора, що поданий у вигляді алгебраїчної суми даних векторів. Наприклад, знайдемо координати вектора $\vec{n} = 3{,}5\vec{a} - 0{,}5\vec{b} + 2\vec{c}$, де $\vec{a}(2;\ 3;\ 5)$, $\vec{b}(-2;\ 0;\ -6)$, $\vec{c}(1;\ -1;\ 0)$. За правилами 1–3 маємо:

$$n_1 = 3{,}5 \cdot 2 - 0{,}5 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 10;$$
$$n_2 = 3{,}5 \cdot 3 - 0{,}5 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = 8{,}5;$$
$$n_3 = 3{,}5 \cdot 5 - 0{,}5 \cdot (-6) + 2 \cdot 0 = 20{,}5;$$
$$\vec{n}\,(10;\ 8{,}5;\ 20{,}5).$$

ВЛАСТИВІСТЬ І ОЗНАКА КОЛІНЕАРНОСТІ ВЕКТОРІВ, ЩО ЗАДАНІ КООРДИНАТАМИ

Властивість. **Якщо ненульові вектори колінеарні, то їхні відповідні координати відрізняються множенням на одне й те саме дійсне число.**

Тобто якщо $\vec{a}(a_1;\, a_2;\, a_3) \parallel \vec{b}(b_1;\, b_2;\, b_3)$, то $a_1 = \lambda \cdot b_1$, $a_2 = \lambda \cdot b_2$, $a_3 = \lambda \cdot b_3$.

Ознака. **Якщо координати ненульових векторів відрізняються множенням на одне й те саме дійсне число, то ці вектори колінеарні.**

Тобто якщо $a_1 = \lambda \cdot b_1$, $a_2 = \lambda \cdot b_2$, $a_3 = \lambda \cdot b_3$, то $\vec{a}(a_1;\, a_2;\, a_3) \parallel \vec{b}(b_1;\, b_2;\, b_3)$.

Ці твердження доводяться так само, як і для векторів на площині.

СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

Скалярний добуток векторів у просторі визначається аналогічно тому, як це було введено у планіметрії.

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}(a_1;\, a_2;\, a_3)$ і $\vec{b}(b_1;\, b_2;\, b_3)$ називається дійсне число, що дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Властивості скалярного добутку двох векторів випливають безпосередньо з означення:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2) $\vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2=\left|\vec{a}\right|^2$.

Наведені властивості скалярного добутку відомі вам з курсу планіметрії. Так само, як і в планіметрії, скалярний добуток вектора самого на себе називають *скалярним квадратом* і позначають як $\vec{a}^2$.

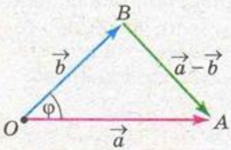
Доведемо ще одну дуже важливу властивість скалярного добутку векторів.

Знайдемо скалярний квадрат різниці двох векторів, враховуючи властивості 1–3:

$$(\vec{a}-\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=(\vec{a})^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\vec{b})^2.$$

Звідси, за властивістю 4, отримаємо

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right). \qquad (**)$$



Мал. 1.41

Відкладемо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від однієї точки O: $\overline{OA}=\vec{a}$, $\overline{OB}=\vec{b}$ (мал. 1.41).

У трикутнику OAB сторони OA і OB дорівнюють довжинам векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а сторона AB – довжині вектора $\vec{a}-\vec{b}$.

Тоді за теоремою косинусів маємо:

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi\right),$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (як це ми визначали раніше, див. с. 26).

Підставимо останній вираз у (**) і отримаємо ще одну властивість скалярного добутку векторів:

5) $$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b}).}$$

Властивість 5 показує, що скалярний добуток повністю визначається геометрією векторів, тобто їхніми довжинами та напрямом, і не залежить від вибору системи координат. Цю властивість часто приймають за визначення скалярного добутку.

З властивості 5 маємо, що **рівняння $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ виконується тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні.** (Вектор $\vec{0}$ вважається перпендикулярним до будь-якого іншого.)

ОБЧИСЛЕННЯ КУТА МІЖ ПРЯМИМИ

Властивість 5 разом з означенням скалярного добутку векторів дає змогу *обчислювати кути не тільки між векторами, а й між прямими*. Це часто використовують і математики, і фізики.

Для того щоб знайти кут між прямими m і n, достатньо відкласти на цих прямих (або прямих, паралельних даним) довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, записати їх у координатному вигляді й обчислити скалярний добуток цих векторів. Тоді косинус шуканого кута між прямими дорівнює:

$$\cos(\widehat{m\ n}) = \left|\cos(\widehat{\vec{a}\ \vec{b}})\right| = \frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}.$$

Тут враховано, що кут між прямими не може бути тупим, тобто косинус його невід'ємний.

З а у в а ж е н н я. Підкреслимо, що рівність $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ рівносильна $\vec{a}\perp\vec{b}$ ($\vec{0}$ перпендикулярний до будь-якого іншого). Тоді з рівності $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ випливає тільки те, що вектор $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярний до $\vec{c}$, а зовсім не те, що $\vec{a}=\vec{c}$. *Скорочувати на спільний множник у випадку скалярного множення не можна.*

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

П р и к л а д 1. Знайдіть значення m і n, при яких вектори $\overline{(4;\ m;\ -1)}$ і $\overline{(2;1;n)}$:

1) колінеарні;
2) перпендикулярні.

Р о з в' я з а н н я

1) Задані вектори колінеарні за умови пропорційності їхніх координат:

$$\frac{4}{2}=\frac{m}{1}=\frac{-1}{n}.$$

Звідси $m=2$, $n=0{,}5$.

2) Задані вектори перпендикулярні за умови рівності нулю їхнього скалярного добутку:

$$4\cdot 2+m\cdot 1+(-1)\cdot n=0.$$

Звідси $n=m+8$, де m – довільне дійсне число.

Відповідь: 1) $m=2$, $n=0{,}5$; 2) $n=m+8$, де $m\in R$.

П р и к л а д 2. Чи є компланарними вектори $\vec{a}(1;\ -2;\ 1)$, $\vec{b}(2;\ 0;\ 1)$, $\vec{c}(4;\ -1;\ 0)$?

Р о з в' я з а н н я

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, оскільки їхні координати не пропорційні. Тоді вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{c}$ можна розкласти за $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Тобто якщо існують такі числа m і n, що

$$\vec{c}=n\vec{a}+m\vec{b}.$$

Запишемо останню рівність через координати даних векторів:

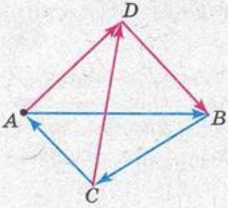
$$\begin{cases}4=n+2m,\\ -1=-2n,\\ 0=n+m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=0{,}5,\\ m=-n,\\ n=4-2m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=0{,}5,\\ m=-0{,}5,\\ 0{,}5=4-2(-0{,}5).\end{cases}$$

Система не має розв'язку, тому дані вектори некомпланарні.

Відповідь: ні.

ПРАВИЛО ЧОТИРЬОХ ТОЧОК

Приклад 3. *Правило чотирьох точок.* **Доведіть, що для довільних точок простору A, B, C і D виконується рівність**



Мал. 1.42

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}=0.$$

Розв'язання

Запишемо (орієнтуючись на трикутники бічних граней тетраедра $DABC$ на малюнку 1.42.):

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}\\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}\\ \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}\end{array}\right|\left.\begin{array}{l}\cdot\overrightarrow{DC}\\ \cdot\overrightarrow{DA}\\ \cdot\overrightarrow{DB}\end{array}\right|\rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}=$$

$$=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB}=0.$$

Щ. в. д.

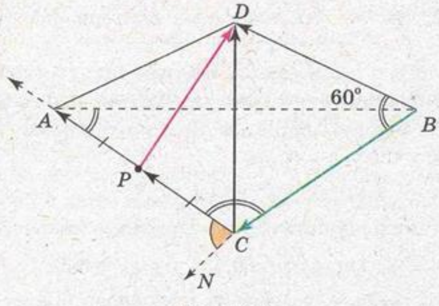
Зауваження. Під час розв'язування задач на вектори майте на увазі правило, відоме вам ще з курсу 9 класу: $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}$ (перший вектор закінчується на «M», другий – починається з «M», тоді «M» – «зникає»).

Правильним буде й обернене твердження. Будь-який вектор $\overrightarrow{AC}$ можна подати у вигляді $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}$, де M – довільна точка простору. Таке твердження ще називають *методом проколу*, а точку M – *полюсом*.

Приклад 4. $DABC$ – правильний тетраедр з ребром 1, P – середина ребра AC. Знайдіть скалярний добуток $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{PD}$.

Розв'язання

Правильний тетраедр – це тетраедр, у якого всі грані – правильні трикутники. Тоді довжини всіх ребер даного тетраедра 1, а всі кути трикутників-граней по 60° (мал. 1.43).



Мал. 1.43

1) Враховуючи, що $\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, маємо

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}.$$

2) $\overrightarrow{BC}\,\hat{}\,\overrightarrow{CA} = 180° - 60° = 120°$. Аналогічно $\overrightarrow{BC}\,\hat{}\,\overrightarrow{CD} = 120°$. Довжини векторів $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CD}$ дорівнюють 1. Тоді

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{PD} = 1\cdot 1\cdot\cos 120° - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 120° = \frac{1}{2}\cos 120° = -\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $-0{,}25$.

Зауваження. Обчислюючи скалярний добуток векторів, важливо не помилитися у встановленні кута між векторами. Так, у прикладі 4 кутом між векторами $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{BC}$ буде кут NCA, а не кут BCA. Кут BCA утворюють вектори $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$. Тоді шуканий скалярний добуток можна було знайти й так:

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = -\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\cos 60°.$$

Завдання 5

1°. Запишіть координати вектора:
1) $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - \vec{e}_3$;
2) $\vec{b} = -12\vec{e}_1 + 0{,}5\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3$;
3) $\overrightarrow{CA}$, якщо $A(1; -1; 0)$, $C(0; 3; 4)$;
4) $\overrightarrow{PD}$, якщо $P(-4; 1; 10)$, $D(-1; 5; 2)$.

2°. Дано вектори $\vec{a}(1; -2; 1)$, $\vec{b}(2; 0; 1)$, $\vec{c}(4; -1; 1)$. Знайдіть координати вектора:
1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{c} - \vec{b}$; 3) $3\vec{a}$; 4) $-0{,}3\vec{b}$; 5) $2\vec{a} - 3\vec{b}$; 6) $\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$.

3. Точки $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $B_1(0; 0; 1)$ – вершини куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть координати вектора і запишіть його розклад за координатними векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:
1) $\overrightarrow{AB_1}$; 2) $\overrightarrow{C_1D}$; 3) $\overrightarrow{A_1C}$; 4) $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB_1}$; 5) $\overrightarrow{C_1D} - 0{,}5\overrightarrow{A_1C}$.

4. Точки $M(2; 0; 0)$, $P(0; 0; 0)$, $C(0; 4; 0)$, $P_1(0; 0; 4)$ – вершини прямокутного паралелепіпеда $MPCTM_1P_1C_1T_1$. Знайдіть координати вектора і запишіть його розклад за координатними векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:
1) $\overrightarrow{MP_1}$; 2) $\overrightarrow{PT_1}$; 3) $\overrightarrow{M_1C}$; 4) $\overrightarrow{T_1M} + 2\overrightarrow{PM_1} - \overrightarrow{MP_1}$; 5) $3\overrightarrow{M_1C} - \overrightarrow{PT_1} - 2\overrightarrow{C_1M}$.

5. Точки $A(6; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$, $C(0; 0; 6)$, $D(0; 0; 0)$ – вершини піраміди $ABCD$. Знайдіть координати вектора:
1) $\overrightarrow{CK}$, якщо DK – висота бічної грані ADC;
2) $\overrightarrow{MD}$, якщо DM – висота піраміди;
3*) Доведіть, що пряма, яка проходить через точки D і $H(12; 12; 12)$, перпендикулярна до площини ABC.

6°. Знайдіть довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:
1) $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$; 2) $A(-1; 1; 0)$, $B(0; 0; 1)$; 3) $A(-1; 0; 4)$, $B(1; 2; 1)$.

7. Дано вектори: $\vec{a}(1; -2; 1)$, $\vec{b}(2; 0; 1)$, $\vec{c}(4; -1; 0)$. Знайдіть:
1) $|\vec{a} + \vec{b}|$; 2) $|\vec{a}| + |\vec{b}|$; 3) $|\vec{a} - \vec{b}|$; 4) $5|\vec{c}|$; 5) $|2\vec{a} - 3\vec{c}|$; 6) $|\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}|$.

8*. При якому від'ємному значенні n вектор $\vec{a}(n; 0{,}5; -0{,}5)$ буде одиничним?

9*. При якому найменшому натуральному значенні m довжина вектора $\vec{a}(4;\ 2;\ m)$ буде більша за число 6?

10*. При якому найбільшому натуральному значенні m довжина вектора $\vec{a}(-1;\ m;\ 3)$ буде менша за число 5?

11. Чи є колінеарними вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(3;\ 6;\ 8)$ і $\vec{b}(6;\ 12;\ 16)$; 2) $\vec{a}(1;\ -1;\ 3)$ і $\vec{b}(2;\ 3;\ 15)$;
3) $\vec{a}(3;\ 0;\ 0)$ і $\vec{b}(0;\ 2;\ 0)$; 4) $\vec{a}(0;\ 0;\ 0)$ і $\vec{b}(5;\ 2;\ 6)$;
5) $\vec{a}\left(\frac{1}{3};\ -1;\ 5\right)$ і $\vec{b}\,(-1;\ -3;\ -15)$?

Відповідь обґрунтуйте.

12*. Знайдіть значення m і n, при яких вектори $\overline{(1;\ m;\ -1)}$ і $\overline{(n;\ 1;\ 1)}$ колінеарні.

13. Чи є компланарними вектори:

1) $\vec{a}(-3;\ -3;\ 0)$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; 4) $\vec{a}(1;\ -1;\ 2)$, $\vec{b}(-2;\ 0;\ 1)$, $\vec{c}(5;\ -1;\ 0)$;
2) $\vec{b}(2;\ 0;\ -2)$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; 5) $\vec{d}(1;\ 0;\ 2)$, $\vec{b}(1;\ 1;\ -1)$, $\vec{p}(-1;\ -2;\ 4)$;
3) $\vec{c}(1;\ 0;\ -2)$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$; 6) $\vec{a}(0;\ 5;\ 3)$, $\vec{f}(3;\ 3;\ 3)$, $\vec{c}(1;\ 1;\ 4)$?

14°. Дано вектори: $\vec{a}(2;\ -2;\ 0)$, $\vec{b}(1;\ 0;\ 1)$, $\vec{c}(2;\ -1;\ 3)$. Знайдіть:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $\vec{b}\cdot\vec{a}$; 3) $\vec{c}\cdot\vec{b}$; 4) $\vec{a}\cdot\vec{c}$.

15. При якому значенні m скалярний добуток векторів $\vec{a}(-1;\ -2;\ 1)$ і $\vec{c}(4;\ -1;\ m)$ дорівнює:

1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) −1?

16°. Знайдіть скалярний добуток одиничних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо кут між ними дорінює:

1) 90°; 2) 60°; 3) 30°; 4) 135°; 5) 120°; 6) 180°; 7) 0°.

17. Визначте, який кут (гострий, прямий чи тупий) утворює вектор $\vec{a}(2;\ -1;\ 0)$ з координатними осями.

18. При якому значенні n вектори $\vec{a}(-1;\ 2n;\ 0)$ і $\vec{b}(1;\ -1;\ 2)$:

1) перпендикулярні;
2) колінеарні;
3*) компланарні з вектором $\vec{c}(-1;\ 2;\ 2)$?

19*. При якому додатному значенні m вектори $\vec{a}(m;\ 1;\ 3)$ і $\vec{b}(m;\ m;\ -2)$ перпендикулярні?

20*. При якому від'ємному значенні m вектори $\vec{a}(m;\ 1;\ 3)$ і $\vec{b}(m;\ m;\ -2)$ перпендикулярні?

21. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні. Знайдіть кут між векторами $\vec{c}$ і $\vec{p}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}|$:

1) $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}$; 3) $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$;
2) $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{p} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$; 4) $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{p} = 4\vec{a} - \vec{b}$.

22*. Знайдіть, при якому значенні n вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$ взаємно перпендикулярні, якщо:

1) $\vec{p} = n\vec{a} + 17\vec{b}$, $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b}) = 120°$;

2) $\vec{p} = n\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b}) = 135°$.

23**. Чи може виконуватися рівність $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$? Відповідь обґрунтуйте.

24*. Чи правильно, що $\vec{a} = \vec{b}$, коли для довільного $\vec{c}$ виконується рівність $\vec{c} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{a}$? Відповідь обґрунтуйте.

25*. Одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $120°$. Знайдіть кут між векторами $2\vec{a} + 4\vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$.

26*. Довжини ненульових векторів $\vec{c}$ і $\vec{p}$ рівні. Знайдіть кут між ними, якщо вектори $\vec{c} + 2\vec{p}$ і $5\vec{c} - 4\vec{p}$ взаємно перпендикулярні.

27**. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах:

1) $\vec{a}(0; 1; 1)$ і $\vec{b}(\sqrt{3}; 2; -1)$; 2) $\vec{a}(-2; 1; 1)$ і $\vec{b}(1; 2; 0)$.

28**. Обчисліть $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$, якщо $\left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right| = 1$, $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, $\left|\vec{c}\right| = 5$.

29**. Обчисліть $\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a}$, якщо $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$, $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, $\left|\vec{c}\right| = 5$.

30**. $ABCD$ – правильний тетраедр. Спростіть вираз:

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$.

31**. Основа піраміди $SABCD$ – прямокутник. Відомо, що $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = k$. Знайдіть $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SD}$.

32**. Для піраміди $DABC$ виконується рівність $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 12$. Знайдіть $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

33**. $ABCD$ – тетраедр. Доведіть, що:

1) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{CD}^2)$;

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{BD}^2)$.

§ 8 Розв'язування задач координатно-векторним методом

Раніше ви вже переконалися у перевагах векторного та координатного методів розв'язування задач. Тепер, коли ваші досвід та знання розширилися, повернемося до застосування цих методів у геометрії простору, а інколи будемо використовувати обидва методи у розгляді однієї задачі одночасно.

ЯК МОЖНА ЗНАЙТИ КУТ МІЖ ПРЯМИМИ

Координатно-векторний метод може значно полегшити пошук *кута між прямими*.

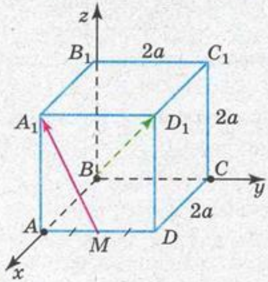
Приклад 1. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина ребра AD. Знайдіть кут між прямими MA_1 і BD_1.

Розв'язання

Введемо прямокутну систему координат із початком у точці B і спрямуємо вісь Ox вздовж ребра BA, Oz – вздовж BB_1 (мал. 1.44). Довжину ребра куба позначимо як $2a$.

1) $B(0; 0; 0)$, $D_1(2a; 2a; 2a)$, $A_1(2a; 0; 2a)$, $M(2a; a; 0)$. Тоді:

$$\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{(0; -a; 2a)},\ \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{(2a; 2a; 2a)}.$$



Мал. 1.44

2) Косинус шуканого кута φ дорівнює модулю косинуса кута між векторами $\overrightarrow{MA_1}$ і $\overrightarrow{BD_1}$:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{MA_1}\right|}{\left|\overrightarrow{BD_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MA_1}\right|}.$$

3) $\left|\overrightarrow{BD_1}\right| = \sqrt{4a^2 + 4a^2 + 4a^2} = 2a\sqrt{3}$,

$$\left|\overrightarrow{MA_1}\right| = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5},$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|-2a^2 + 4a^2\right|}{2a^2\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Відповідь: $\arccos\frac{\sqrt{15}}{15}$.

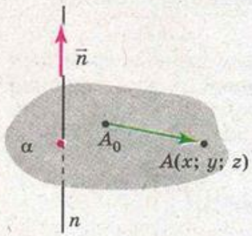
ВЕКТОР НОРМАЛІ ДО ПЛОЩИНИ

Розглянемо опорні факти, пов'язані з поняттям *вектора-нормалі до площини*.

Кажуть, що *вектор перпендикулярний до площини (вектор-нормаль площини), якщо він належить прямій, що перпендикулярна до цієї площини, або паралельний такій прямій.*

Записують це так: $\vec{n} \perp \alpha$ (вектор $\vec{n}$ перпендикулярний до площини α).

Теорема 1. **Якщо площину задано рівнянням $ax + by + cz + d = 0$, то вектор, колінеарний $\vec{n}\,(a; b; c)$, перпендикулярний до цієї площини.**



Мал. 1.45

Доведення

Позначимо на заданій площині α якусь точку $A_0(x_0; y_0; z_0)$ і довільну точку цієї площини $A(x; y; z)$ (мал. 1.45).

Обидві точки задовольняють рівняння площини:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0. \end{cases}$$

Віднімемо від першого рівняння системи друге, маємо:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Вектор $\overrightarrow{A_0A}$ має координати $\overrightarrow{A_0A}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Тоді вектор $\vec{n}$ з координатами $\overrightarrow{(a; b; c)}$ перпендикулярний до нього.

Точка $A(x; y; z)$ – довільна точка площини α, отже, пряма n, якій належить $\vec{n}$, перпендикулярна до цієї площини, і вектор $\vec{n}(a; b; c) \perp \alpha$.

Теорему доведено.

ОЗНАКА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПЛОЩИН, ЩО ЗАДАНО РІВНЯННЯМИ

Н **Наслідок.** *Ознака паралельності площин.* **Дві площини, що задані рівняннями $ax + by + cz + d = 0$ і $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, паралельні тоді й тільки тоді, коли**

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} \neq \frac{d}{d_1}.$$

Вектор, перпендикулярний до однієї з паралельних площин, є нормаллю і другої площини. І навпаки, якщо дві площини мають спільний вектор-нормаль, то ці площини паралельні. Звідси маємо правильність твердження наслідку.

Зауваження. Рівняння, що відрізняються множенням на число, яке не дорівнює нулю, **рівносильні**. Тоді рівняння паралельних площин завжди можна записати у вигляді, що відрізняє їх тільки вільним членом. Тобто

площини $ax + by + cz + d_1 = 0$ і $ax + by + cz + d_2 = 0$, $d_1 \neq d_2$ – **паралельні.**

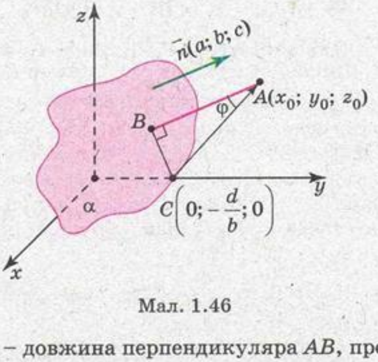
ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПЛОЩИНИ

Т **Теорема 2. Відстань від точки $A(x_0; y_0; z_0)$ до площини $ax + by + cz + d = 0$ можна обчислити за формулою:**

$$\rho((x_0; y_0; z_0); ax + by + cz + d = 0) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Доведення

Задана площина перетинає вісь Oy в точці $C(0; -\frac{d}{b}; 0)$ (мал. 1.46).



Мал. 1.46

Шукана відстань – довжина перпендикуляра AB, проведеного з точки A до площини α.

З прямокутного трикутника ABC ($\angle B = 90°$, $\angle BAC \triangleq \varphi$): $AB = AC \cdot \cos\varphi$.

Вектор $\overline{n}$ $(a;\ b;\ c)$ перпендикулярний до заданої площини і паралельний прямій AB. Тоді $\cos\varphi$ знайдемо з умови

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overline{n}\cdot\overline{CA}\right|}{\left|\overline{n}\right|\cdot\left|\overline{CA}\right|}.$$

(Ми врахували, що $\cos\varphi > 0$, оскільки φ – гострий кут прямокутного трикутника.)

Маємо: $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $C\left(0;\ -\frac{d}{b};\ 0\right)$. Тоді $\overline{CA}\left(x_0;\ y_0 - \left(-\frac{d}{b}\right);\ z_0\right)$,

$$AB = AC\cdot\frac{\left|ax_0 + (by_0 + d) + cz_0\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot AC} = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Твердження теореми виконується.

Зауважимо, що ми довели твердження теореми у випадку $b \neq 0$, тобто коли задана площина не паралельна Oy.

У випадку $b = 0$, $a \neq 0$, проведемо аналогічне доведення, розглянувши точку перетину площини з віссю Ox. *Твердження теореми виконується.*

У випадку $b = 0$ і $a = 0$, тобто коли площина паралельна площині xOy, рівняння площини має вигляд $cz + d = 0$, а шукана відстань дорівнює $\left|-\frac{d}{c} - z_0\right| = \frac{\left|cz_0 + d\right|}{c}$. *Твердження теореми виконується.*

Теорему доведено.

Наведемо кілька прикладів застосування доведених теорем. Так, запис рівняння нормалі до площини може значно полегшити пошук *кута між двома площинами*, якщо використати той факт, що кут між площинами дорівнює куту між їх нормалями*. (Останнє ми доводили в 10 класі.)

ОБЧИСЛЕННЯ КУТА МІЖ ДВОМА ПЛОЩИНАМИ ЯК КУТА МІЖ ЇХ НОРМАЛЯМИ

3 Приклад 2. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F, M – середини ребер AA_1, AB, CC_1. Знайдіть кут між площинами EFD і A_1D_1M.

Розв'язання

Введемо прямокутну систему координат із початком у точці D і спрямуємо вісь Ox вздовж ребра DA, Oz – вздовж DD_1 (мал. 1.47). Довжину ребра куба приймемо за одиницю виміру.

1) $D(0;\ 0;\ 0)$, $D_1(0;\ 0;\ 1)$, $A_1(1;\ 0;\ 1)$, $M(0;\ 1;\ 0{,}5)$, $E(1;\ 0;\ 0{,}5)$, $F(1;\ 0{,}5;\ 0)$.

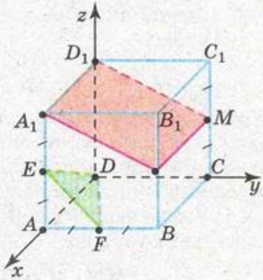
2) За координатами точок E, F і D знайдемо рівняння площини EFD:

$$\begin{cases} d = 0, \\ a + 0{,}5c = 0, \\ a + 0{,}5b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a, \\ c = -2a,\ x - 2y - 2z = 0. \\ d = 0. \end{cases}$$

* Нагадаємо, що *нормаллю до площини* називається пряма, яка перпендикулярна до цієї площини.

3) За координатами точок A_1, D_1 і M знайдемо рівняння площини A_1D_1M:

$$\begin{cases} a+c+d=0, \\ c+d=0, \\ b+0{,}5c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-d, \\ a=0, \\ b=-0{,}5d. \end{cases} \quad y+2z-2=0.$$



Мал. 1.47

4) Тоді, за теоремою 1, $\vec{n}_1(1;\ -2;\ -2) \perp (EFD)$, $\vec{n}_2(0;\ 1;\ 2) \perp (A_1D_1M)$.

5) Косинус кута φ між площинами (EFD) і (A_1D_1M) за модулем дорівнює куту між векторами $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|1\cdot 0 - 2\cdot 1 - 2\cdot 2|}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Відповідь: $\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

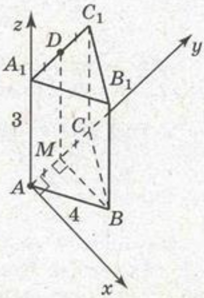
Зауваження. Застосування координатно-векторного методу зазвичай не вимагає здійснення побудови перерізів. Тоді, у прикладі 2, так само як і у наступному прикладі, можна не зображати січні площини на малюнку.

ОБЧИСЛЕННЯ ВІДСТАНІ МІЖ ДВОМА ПЛОЩИНАМИ

Приклад 3. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ довжини ребер AB і AA_1 дорівнюють відповідно 4 см і 3 см. Знайдіть відстань від вершини C_1 до площини ABD, де D – середина ребра A_1C_1.

Розв'язання

Введемо прямокутну систему координат із початком у точці A так, щоб площина грані AA_1C_1C і площина zOy збігалися (мал. 1.48).



Мал. 1.48

1) Медіана BM грані ABC паралельна осі Ox; $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(2\sqrt{3};\ 2;\ 0)$, $D(0;\ 2;\ 3)$, $C_1(0;\ 4;\ 3)$.

2) За координатами точок A, B і D знайдемо рівняння площини ABD:

$$\sqrt{3}x - 3y + 2z = 0.$$

3) Відстань від точки $C_1(0;\ 4;\ 3)$ до площини $\sqrt{3}x - 3y + 2z = 0$ за теоремою 2 дорівнює:

$$\rho = \frac{|\sqrt{3}\cdot 0 - 3\cdot 4 + 2\cdot 3|}{\sqrt{3+9+4}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Відповідь: $\frac{3}{2}$ см.

У § 6 (с. 36) ми розглянули *обчислення векторним методом відношення, в якому діагональ паралелепіпеда поділяється площиною*, яку проведено через діагоналі його граней, що виходять з однієї точки. Розглянемо ще кілька цікавих прикладів застосування векторного методу.

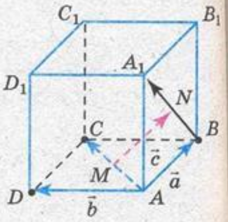
ОБЧИСЛЕННЯ ВІДСТАНІ МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ

3 Приклад 4. Ребро куба має довжину 1. Знайдіть відстань між прямими, яким належать мимобіжні діагоналі двох суміжних граней куба.

Розв'язання

СПОСІБ І.

Розглянемо діагоналі AC і A_1B граней куба (мал. 1.49). *Відстань між двома мимобіжними прямими – це довжина їх спільного перпендикуляра.* На малюнку 1.49 це відрізок MN.



Мал. 1.49

1) Умова перпендикулярності MN до AC і A_1B рівносильна тому, що

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BA_1} = 0.$$

2) Розкладемо вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA_1}$ і $\overrightarrow{MN}$ за векторами $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$:

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{BA_1} = \vec{c} - \vec{a}, \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}.$$

3) Вектори $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{BN}$ відповідно колінеарні векторам $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BA_1}$, тоді:

$$\overrightarrow{MA} = n\overrightarrow{AC} = n\vec{a} + n\vec{b}, \overrightarrow{BN} = m\overrightarrow{BA_1} = m\vec{c} - m\vec{a}, \overrightarrow{MN} = (n + 1 - m)\vec{a} + n\vec{b} + m\vec{c}.$$

4) Знайдемо m і n з умови (1):

$$((n - m + 1)\vec{a} + n\vec{b} + m\vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \text{ і } ((n - m + 1)\vec{a} + n\vec{b} + m\vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0.$$

Маємо: $\begin{cases} 2n - m + 1 = 0, \\ 2m - n - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1}{3}, \\ n = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

(Ми врахували, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно перпендикулярні й відповідні скалярні добутки дорівнюють нулю.)

5) Тоді $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$, $\overrightarrow{MN}^2 = \dfrac{1}{3}$, $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Зауваження. Зверніть увагу, що у наведеному розв'язанні ми довели такий опорний факт. **Кінці спільного перпендикуляра мимобіжних діагоналей двох суміжних граней куба ділять кожну з цих діагоналей у відношенні 1 : 3, починаючи від вершин, що належать цим діагоналям.**

СПОСІБ ІІ.

1) Введемо прямокутну систему координат із початком у точці B і спрямуємо вісь Ox вздовж ребра BA, Oz – вздовж BB_1 (мал. 1.50).

$B(0; 0; 0)$, $A(1; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $A_1(1; 1; 0)$.

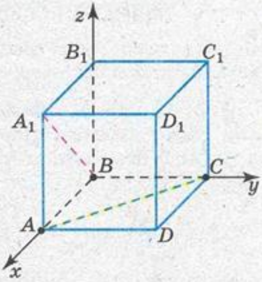
2) Як відомо, відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані від довільної точки однієї з цих прямих до площини, що містить другу й проведена паралельно першій.

Проведемо через A_1B площину α паралельно AC.

Нехай $ax + by + cz + d = 0$ – рівняння цієї площини. З умови, що α проходить через точки $A_1(1; 1; 0)$ і $B(0; 0; 0)$, маємо: $d = 0$, $a + c = 0$. Тоді рівняння площини α має вигляд $ax + by - az = 0$, $x + ky - z = 0$.

3) Вектор нормалі $\vec{n}$ площини α паралельний спільному перпендикуляру мимобіжних прямих A_1B і AC, отже $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Врахуємо, що $\vec{n}(1; k; -1)$, $\overrightarrow{AC}(1; 1; 0)$, маємо

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 + k = 0,\ k = -1.$$



Мал. 1.50

4) Шукана відстань є відстанню від довільної точки прямої AC, наприклад $A(1; 0; 0)$, до площини $x - y - z = 0$:

$$\rho = \frac{|1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Доведемо таку *ознаку перпендикулярності прямої і площини*.

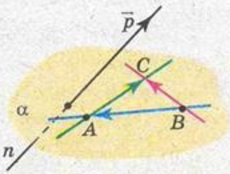
Приклад 5. Доведіть, якщо пряма однаково нахилена до трьох прямих площини, які попарно перетинаються, то вона перпендикулярна до цієї площини.

Доведення

Нехай у площині α задано три прямі, які попарно перетинаються в точках A, B, C (мал. 1.51) і утворюють однаковий кут φ з прямою n.

Візьмемо на даній прямій n одиничний вектор $\vec{p}$. Тоді

$$\vec{p} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{p} \cdot \overrightarrow{BA} + \vec{p} \cdot \overrightarrow{AC}.$$



Мал. 1.51

Модуль косинуса кута між векторами дорівнює косинусу кута між прямими, яким ці вектори належать (останній не може бути від'ємним):

$$\left|\vec{p} \cdot \overrightarrow{BC}\right| = BC\cos\varphi;\ \left|\vec{p} \cdot \overrightarrow{BA}\right| = AB\cos\varphi;\ \left|\vec{p} \cdot \overrightarrow{AC}\right| = AC\cos\varphi.$$

Маємо:

$$BC\cos\varphi = \left|\vec{p} \cdot \overrightarrow{BA} + \vec{p} \cdot \overrightarrow{AC}\right| = |AB \pm AC|\cos\varphi.$$

Враховуючи нерівність для сторін трикутника, з останнього співвідношення отримаємо

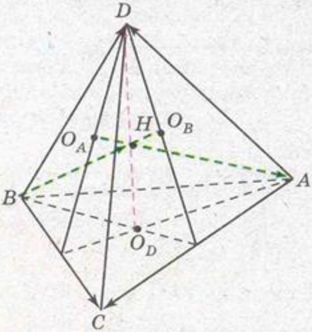
$$\cos\varphi = 0,\ \varphi = 90°.$$

Щ. в. д.

ОЗНАКА І ВЛАСТИВІСТЬ ОРТОЦЕНТРИЧНОГО ТЕТРАЕДРА

Нагадаємо, що тетраедр, усі висоти якого перетинаються в одній точці, називають *ортоцентричним тетраедром*.

Т **Теорема 3. Два твердження:**
(1) усі висоти тетраедра перетинаються в одній точці;
(2) протилежні ребра тетраедра перпендикулярні – є рівносильними.



Мал. 1.52

Доведення

Позначимо висоти тетраедра $DABC$ як DO_D, AO_A, BO_B і CO_C (мал. 1.52).

1. Виконується твердження (1). Доведемо твердження (2).

Висоти тетраедра перетинаються в одній точці H. Треба довести, що

$$AD \perp BC, AC \perp BD, AB \perp DC.$$

1) $\overline{AD} = \overline{HD} - \overline{AH} = n\overline{O_D D} - m\overline{O_A A}.$

2) Висоти тетраедра DO_D і AO_A перпендикулярні до площин ABC і DBC, отже, вони перпендикулярні до прямої BC. Тоді

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = (n\overline{O_D D} - m\overline{O_A A}) \cdot \overline{BC} = 0,$$

і твердження $AD \perp BC$ доведено.

Аналогічно маємо, що $AC \perp BD$, $AB \perp DC$.

Перше твердження теореми доведено.

2. Виконується твердження (2). Доведемо твердження (1).

Дві висоти тетраедра DO_D і AO_A перетинаються у точці H, $AD \perp BC$, $AC \perp BD$, $AB \perp DC$. Треба довести, що

$$(BH) \perp (ADC), (CH) \perp (ADB).$$

1) $\overline{BH} = \overline{DH} - \overline{DB}.$

2) $\overline{BH} \cdot \overline{AC} = (\overline{DH} - \overline{DB}) \cdot \overline{AC} = 0$, бо $BD \perp AC$ за умовою, а $(DH) \perp (AC)$, бо $DH \perp (ABC)$, $(AC) \in (ABC)$. Звідси $BO_B \perp AC$.

Аналогічно маємо, що $BO_B \perp AD$. Звідси $BO_B \perp (ACD)$ за ознакою перпендикулярності прямої і площини. Тобто BO_B – висота тетраедра.

3) Аналогічно до попереднього маємо, що CO_C – висота тетраедра.

Друге твердження теореми доведено.

Теорему доведено.

Н **Якщо в тетраедра всі його висоти перетинаються в одній точці (або його протилежні ребра перпендикулярні), то його вершини проектуються в ортоцентри граней.**

Застосувавши до наведеного доведення теореми 3 теорему про три перпендикуляри, отримаємо правильність такого твердження – наслідку.

Чи буде правильним твердження, обернене до вказаного наслідку?

Завдання 6

1*. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між прямими:
1) AC і DC_1; 2) AD_1 і BP, де P – середина ребра DD_1.

2*. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AB, AD, AA_1 відповідно дорівнюють a, $2a$, $3a$. Знайдіть кут між прямими BD і AB_1.

3*. Знайдіть відстань від точки $A(10; 0; 0)$ до прямої, що проходить через точки $O(0; 0; 0)$ і $C(8; 6; 0)$.

4*. Точки $A(1; 0; 0)$, $B(0; 5; 0)$ і $C(4; 3; 0)$ – вершини трикутника ABC. Знайдіть довжину його висоти BP.

5*. Доведіть, що в правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ пряма, яка проходить через основу висоти піраміди і точку перетину медіан грані SAB, перпендикулярна до AB.

6*. Доведіть, що в правильній трикутній піраміді $DABC$ пряма, яка проходить через вершину A і точку перетину медіан грані DBC, перпендикулярна до прямої BC.

7**. Доведіть, якщо в трикутній піраміді проекція вершини піраміди на протилежну грань належить висоті грані, то два ребра піраміди взаємно перпендикулярні.

8**. Дано чотири різні точки A, B, C, D. Точки M і N – середини відрізків BC і AD відповідно. Доведіть, якщо $MN = 0{,}5(AB + CD)$, то $AB \parallel CD$.

9**. Точки M, N і P – середини відповідно ребер AB, CD і BC тетраедра $ABCD$. Через точку P проведено площину, паралельну прямим DM і AN. У якому відношенні ця площина поділяє ребро AD?

10**. У тетраедрі $ABCD$ ребра $AB = BC$, $AD = DC$. Доведіть, що ребра AC і BD перпендикулярні.

11**. У правильному тетраедрі $ABCD$ довжина ребра дорівнює l, точки M і N – середини ребер AB і CD.
1) Знайдіть довжину відрізка MN.
2) Знайдіть кут між прямими MN і BC.
3) Доведіть, що мимобіжні ребра тетраедра перпендикулярні.
4) Доведіть, що пряма MN перпендикулярна до ребер AB і CD.

12**. Доведіть, якщо в чотирикутній піраміді проекція однієї вершини основи на діагональний переріз належить висоті цього перерізу (що проведено до діагоналі основи), то одне з бічних ребер піраміди перпендикулярне до цієї діагоналі.

13**. Довжина кожного ребра правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює a. На діагоналях AB_1 і BC_1 граней призми взято відповідно точки M і N так, що $(MN) \perp (AB)$. У якому відношенні точки M і N поділяють відрізки AB_1 і BC_1, якщо довжина відрізка MN дорівнює $\frac{a\sqrt{3}}{3}$?

14**. Три ребра прямокутного паралелепіпеда з точки перетину його діагоналей бачимо під кутами α, β і γ. Доведіть, що $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$.

15**. З точки перетину діагоналей прямокутного паралелепіпеда діагоналі граней, які виходять з однієї вершини, видно під кутами α, β і γ. Доведіть, що $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -1$.

§ 9 Векторний добуток векторів

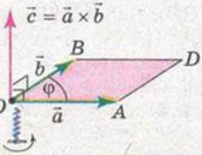
Коли ми вводили скалярний добуток, ми казали про фізичні задачі, у яких взаємодія двох векторних величин дає скалярну величину (наприклад, роботу як результат дії сили при переміщенні). У багатьох фізичних процесах результатом взаємодії двох векторних величин є нова векторна величина. Математичний апарат для опису таких процесів доповнюють ще однією дією з векторами – *векторним добутком*.

У результаті такої операції **двом упорядкованим векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ставлять у відповідність вектор $\vec{c}$, який називають векторним добутком даних векторів і позначають $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.**

Щоб вказати вектор $\vec{c}$, треба задати його модуль та напрям. Їх визначають так.

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні.

Відкладаємо їх від точки O: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (мал. 1.53). Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначають паралелограм $OADB$.



Мал. 1.53

Модуль вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ вважають рівним площі цього паралелограма, тобто

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi, \text{ де } \varphi = (\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}).$$

Напрям вектора $\vec{c}$ визначають так, щоб він був перпендикулярний до обох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (тобто до площини паралелограма $OADB$) і трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ була правою (за тим самим правилом гвинта, відповідно до якого ми обирали напрям осі Oz у § 1 в правій прямокутній системі координат).

2. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні (зокрема у випадку, коли один з них нульовий).

Паралелограм $OADB$ вироджується у відрізок і відповідна площа дорівнює нулю. Тоді векторним добутком $\vec{a} \times \vec{b}$ *вважають нуль-вектор*:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Алгебраїчні властивості векторного добутку лише за однією позицією (комутативністю) відрізняються від скалярного добутку (він антикомутативний):

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$;

2) $(\lambda\,\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Ці властивості випливають безпосередньо з означення векторного добутку. Проведіть їх доведення самостійно.

Наведені властивості дають змогу за координатами **векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$** визначити **координати вектора $\vec{c}$, що є їх векторним добутком.**

Зрозуміло, що для ортів правої прямокутної системи координат, яку ми розглядали раніше, виконуються співвідношення:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3,\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1,\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2;$$
$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3,\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1,\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2;$$
$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}.$$

Нехай $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$. Тоді, за властивостями (1–3), маємо:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3),$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - b_2a_3)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - b_3a_1)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - b_1a_2)\vec{e}_3.$$

Завдання 7

1. У чому відмінність між скалярним та векторним добутками векторів? У чому вони схожі?
2. Нехай $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. У яких межах міститься значення $|\vec{a} \times \vec{b}|$?
3. Знайдіть для одиничних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

   1) $|\vec{a} \times \vec{b}|$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha$;

   2) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $|\vec{a} \times \vec{b}| = \beta$.

   3) Чи може виконуватися рівність $|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b}$?
4. Для довільної довжини векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ встановіть зв'язок між $|\vec{a} \times \vec{b}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$.
5. Доведіть, що $|(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}| \leqslant |\vec{a} \times \vec{c}| + |\vec{b} \times \vec{c}|$. Знайдіть геометричне тлумачення цієї нерівності. Встановіть, коли виконується рівність.
6. Обчисліть $|\vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}|$, якщо:

   1) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – одиничні вектори, що йдуть від центра правильного трикутника до його вершин;

   2) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, де $ABCD$ – квадрат зі стороною 1;

   3) $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{b} = \overrightarrow{A_3A_4}$, $\vec{c} = \overrightarrow{A_5A_6}$, де $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – правильний шестикутник зі стороною 1.
7. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб зі стороною 1. Зобразіть цей куб та векторні добутки:

   1) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{A_1C_1} \times \overrightarrow{BD}$;

   2) $\overrightarrow{C_1C} \times \overrightarrow{C_1D}$; 5) $\overrightarrow{AC_1} \times \overrightarrow{DD_1}$;

   3) $\overrightarrow{CB_1} \times \overrightarrow{BC_1}$; 6) $\overrightarrow{AD_1} \times \overrightarrow{DC_1}$.
8. Вираз $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ називають *подвійним векторним добутком*. Дослідіть його властивості.

§ 10 Перетворення простору

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

У курсі планіметрії ми ознайомилися з поняттям *геометричного перетворення*, коли ***задано спосіб, за яким кожній точці однієї фігури ставлять у відповідність єдину точку іншої. До того ж різним точкам однієї фігури відповідають різні точки іншої.***

У планіметрії ми мали справу з фігурами на площині. Тепер те саме означення віднесемо до поняття геометричного перетворення просторових фігур. Зауважимо, що простір – теж фігура, тому можна казати про перетворення простору.

Нагадаємо, що початкову сукупність точок ми називали *прообразом*, а отриману – *образом*. Віднесемо ці назви і до відповідних множин точок простору.

Якщо здійснюється друге перетворення, в якому прообраз та образ міняються місцями, то таке перетворення називають *оберненим* до першого.

РУХ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Так само як і в планіметрії, у просторі розрізняють перетворення, які змінюють відстань між точками, та ті, при яких відстань між довільними парами точок зберігається. Останні називають *рухом*.

Перетворення, які є рухом, мають такі загальні властивості (доведення аналогічні до відповідних доведень у планіметрії – здійсніть це самостійно):

- пряма відображується на пряму, промінь – на промінь, площина на площину;
- відрізок відображується на відрізок, рівний даному; трикутник – на трикутник, рівний даному;
- кути між прямими зберігаються;
- образ точки, що належала відрізку, міститься на образі відповідного відрізка;
- відношення довжин відрізків однієї прямої зберігається.

Можна довести, що рух відображає паралельні прямі на паралельні прямі, паралельні площини на паралельні площини, тетраедр на тетраедр, рівний даному, тощо. Тобто **рух не змінює розміри та форму фігур, а змінює тільки їх положення.**

Так само як і у планіметрії, ***дві просторові фігури називають рівними, якщо вони перетворюються одна в одну рухом.***

Зрозуміло, що рівність фігур, як ми її розуміли досі (можливість їх суміщення), і наведене означення виражають одне й те саме.

До рухів, як і в планіметрії, відносять паралельне перенесення, перетворення симетрії та поворот.

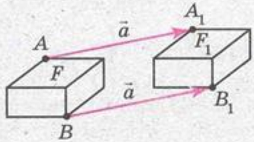
ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ

Паралельне перенесення є одним з прикладів руху.

Якщо маємо ненульовий вектор $\vec{a}$ і довільній точці M простору ставимо у відповідність точку M_1 так, щоб $\overline{MM_1} = \vec{a}$, то таке пе-

ретворення називають паралельним перенесенням на вектор $\vec{a}$ (мал. 1.54-а).

а)



б)

Мал. 1.54

Якщо виконати таке паралельне перенесення для кожної точки фігури F, то дістанемо фігуру F_1 – образ паралельного перенесення F на вектор $\vec{a}$ (мал. 1.54-б).

Т е о р е м а. **Паралельне перенесення – рух.**

Д о в е д е н н я

Нехай F_1 – образ паралельного перенесення фігури F на вектор $\vec{a}$; точки A і B – довільні точки F, образами яких є точки A_1 і B_1 фігури F_1 (мал. 1.54-б). Маємо $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a} = \overrightarrow{BB_1}$, тоді $AA_1 \parallel BB_1$ і $|AA_1| = |BB_1|$. Тоді AA_1B_1B – паралелограм і $|AB| = |A_1B_1|$.

Теорему доведено.

Якщо вектор паралельного перенесення має координати $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$, то паралельне перенесення на вектор $\vec{a}$ можна визначити за формулами з'язку між координатами прообразу $M(x; y; z)$ і образу M_1 $(x_1; y_1; z_1)$:

$$\begin{cases} x_1 = x + a_x, \\ y_1 = y + a_y, \\ z_1 = z + a_z. \end{cases}$$

Звідси маємо:
- **перетворення, обернене до паралельного перенесення є паралельним перенесенням;**
- **композиція паралельних перенесень є паралельним перенесенням.**

Зрозуміло, що **паралельне перенесення має всі властивості руху.**

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

П р и к л а д 1. Паралельне перенесення задано вектором $\overline{(1; 2; -1)}$. Знайдіть координати точки, яка переходить при даному перетворенні в точку $T(-1; 0; 3)$.

Р о з в' я з а н н я

Нехай шукана точка прообразу має координати $(x; y; z)$. Тоді

$$\begin{cases} -1 = x + 1, \\ 0 = y + 2, \\ 3 = z - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = -2, \\ z = 4. \end{cases}$$

Відповідь: $(-2; -2; 4)$.

Приклад 2. Знайдіть образ паралельного перенесення площини $x - 2y + 3z + 1 = 0$ на вектор $\overline{(1;\ 2;\ -1)}$.

Розв'язання

СПОСІБ І.

Точка $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ – образ паралельного перенесення на $\overline{(1;\ 2;\ -1)}$ точки $M\ (x;\ y;\ z)$, яка задовольняє заданому рівнянню, прообразу площини.

З умови $x_1 = x + 1$, $y_1 = y + 2$, $z_1 = z - 1$ знаходимо $x = x_1 - 1$, $y = y_1 - 2$, $z = z_1 + 1$. Тоді

$$(x_1 - 1) - 2(y_1 - 2) + 3(z_1 + 1) + 1 = 0.$$

Звідси маємо шукане рівняння площини-образу

$$x_1 - 2y_1 + 3z_1 + 7 = 0.$$

Точка $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ – довільна точка шуканої площини. Змінні в рівнянні площини прийнято позначати через x; y; z. Тому останнє рівняння можна записати у вигляді

$$x - 2y + 3z + 7 = 0.$$

Відповідь: $x - 2y + 3z + 7 = 0$.

СПОСІБ ІІ.

Скористаємося тим, що при паралельному перенесенні площина-образ паралельна площині-прообразу.

Дві площини паралельні тоді й тільки тоді, коли в них пропорційні перші три коефіцієнти (див. § 8, с. 51). Шукане рівняння площини-образу має вигляд $x - 2y + 3z + p = 0$.

Точка $(-1;\ 0;\ 0)$ задовольняє задане рівняння площини-прообразу. Тоді точка $(-1 + 1;\ 0 + 2;\ 0 - 1)$ задовольняє рівняння площини-образу. Маємо:

$$0 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + p = 0.$$

Звідси $p = 7$, маємо $x - 2y + 3z + 7 = 0$.

Відповідь: $x - 2y + 3z + 7 = 0$.

Приклад 3. Коло радіуса 6 з центром $(3;\ 7;\ 0)$ перемістили вздовж площини xOy так, що $x_1 = x - 4$, $y_1 = y - 1$. Запишіть рівняння кола після переміщення.

Розв'язання

Знайдемо координати образу центра кола: $O_1(3 - 4;\ 7 - 1;\ 0)$. Радіус кола не змінився.

Тоді рівняння шуканого кола має вигляд:

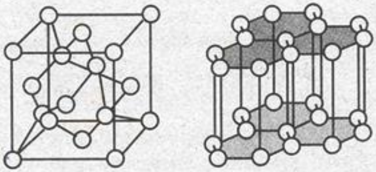
$$(x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 36,\ z = 0.$$

Відповідь: $(x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 36$, $z = 0$.

ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ У ЖИТТІ

З паралельним перенесенням ми стикаємося не тільки як з результатом певного переміщення у фізиці, а ще й, наприклад, в будові молекул.

З хімії ви знаєте про кристалічну ґратку кристалів. Строга закономірність у розташуванні частинок у кристалі визначає його характерні властивості. Наприклад, відмінності між властивостями твердого прозорого діелектрика алмазу і м'якого непрозорого електропровідного графіту зумовлюються лише різною будовою їх кристалічних ґраток (мал. 1.55), адже і алмаз (мал. 1.55-а), і графіт (мал. 1.55-б) – чистий вуглець.



а) б)

Мал. 1.55

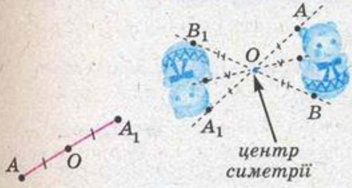
ЦЕНТРАЛЬНА СИМЕТРІЯ

Ви знаєте про центральну симетрію на площині. У просторі вона визначається так само.

Точки A і A_1 називаються симетричними відносно точки O, якщо точка O ділить відрізок AA_1 навпіл (мал. 1.56-а). Точка O вважається симетричною сама собі (відносно O).

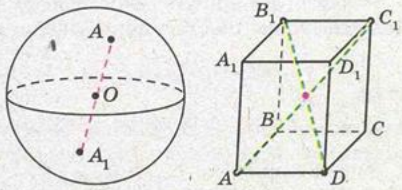
Дві фігури називають симетричними відносно точки O, якщо вони складаються з попарно симетричних відносно O точок. Тобто якщо для кожної точки однієї фігури існує симетрична їй відносно O точка іншої фігури і навпаки (мал. 1.56-б).

$$F \xrightarrow[\text{симетрія}]{\text{центральна}} F_1$$



а) б)

Мал. 1.56



а) б)

Мал. 1.57

Зокрема фігура може перетворюватися симетрією відносно точки O сама на себе (мал. 1.57). Тоді кожній її точці відповідає симетрична їй відносно O точка тієї самої фігури. Таку фігуру називають *центрально-симетричною*, а точку O – *центром симетрії цієї фігури*.

Наприклад, центром симетрії кулі є її центр, а центром симетрії паралелепіпеда – точка перетину його діагоналей (доведіть це).

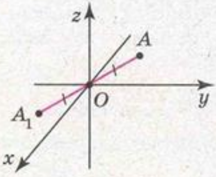
Т Теорема. **Центральна симетрія – рух.**

Доведення

Нехай довільні точки A і B однієї фігури мають за образи (центральної симетрії відносно точки O) точки A_1 і B_1 іншої (мал. 1.56-б).

Трикутники AOB і A_1OB_1 рівні за першою ознакою. Тоді $AB = A_1B_1$.

Теорему доведено.

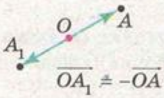


Мал. 1.58

Зрозуміло, що **центральна симетрія має всі властивості руху.**

Якщо ввести прямокутну систему координат так, щоб її початок збігався з центром симетрії, то координати точок прообразу $A(x;\ y;\ z)$ і образу $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ центральної симетрії відрізняються тільки знаком (мал. 1.58):

$$\begin{cases} x_1 = -x, \\ y_1 = -y, \\ z_1 = -z. \end{cases}$$



Мал. 1.59

Зауваження. Центральна симетрія – рух, що змінює напрям на протилежний. Якщо точку A_1 отримано з точки A центральною симетрією відносно точки O, то вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OA_1}$ протилежні: $\overrightarrow{OA_1} = -\overrightarrow{OA}$ (мал. 1.59).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

З Приклад 4. Доведіть, що **рівняння площини, яка симетрична даній відносно початку координат, відрізняється від неї тільки знаком вільного члена.**

Розв'язання

Нехай рівняння площини-прообразу має вигляд $ax + by + cz + d = 0$. Довільна точка цієї площини $M(x;\ y;\ z)$ переходить у точку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$,

де $\begin{cases} x_1 = -x, \\ y_1 = -y, \\ z_1 = -z. \end{cases}$

Звідси маємо: $x = -x_1$, $y = -y_1$, $z = -z_1$. Підставимо ці координати точки M у рівняння площини-прообразу і отримаємо рівняння для $x_1;\ y_1;\ z_1$:

$$-ax_1 - by_1 - cz_1 + d = 0 \Leftrightarrow ax_1 + by_1 + cz_1 - d = 0.$$

Або у звичному позначенні змінних маємо рівняння площини-образу:

$$ax + by + cz - d = 0.$$

Щ. в. д.

Зауваження. З наведеного прикладу (за ознакою, що доведено на с. 51) маємо, що **площини, симетричні відносно початку координат – паралельні** (за умови, що вони не проходять через точку (0; 0; 0)).

А чи будуть паралельними площини, якщо точка симетрії не збігається з початком координат? Так, бо перетворенням паралельного перенесення можна сумістити центр симетрії з початком координат, а потім здійснити обернене перетворення.

Приклад 5. Площину задано рівнянням $x - y + 2z + 1 = 0$. Знайдіть рівняння площини, яка симетрична даній відносно початку координат.

Розв'язання

За попередньою опорною задачею рівняння шуканої площини має вигляд:

$$x - y + 2z - 1 = 0.$$

Відповідь: $x - y + 2z - 1 = 0$.

Приклад 6. Площину задано рівнянням $x - 3y + 2z + 1 = 0$. Знайдіть рівняння площини, яка симетрична даній відносно точки $O(1; 0; 1)$.

Розв'язання

1) Точка O не належить заданій площині, тоді площина-образ є паралельною даній площині (див. зауваження раніше), її можна шукати у вигляді

$$x - 3y + 2z + n = 0.$$

2) Точка A $(-1; 0; 0)$ належить площині-прообразу. Знайдемо точку $A_1(x_1; y_1; z_1)$, симетричну до неї відносно точки O, тобто таку, щоб точка O була серединою відрізка AA_1:

$$\frac{-1 + x_1}{2} = 1,\ \frac{0 + y_1}{2} = 0,\ \frac{0 + z_1}{2} = 1;\ x_1 = 3,\ y_1 = 0,\ z_1 = 2.$$

Точка (3; 0; 2) належить площині-образу. Тоді

$$3 + 2 \cdot 2 + n = 0,\ n = -7.$$

Маємо рівняння шуканої площини: $x - 3y + 2z - 7 = 0$.

Відповідь: $x - 3y + 2z - 7 = 0$.

Доведіть, що **площини, які симетричні відносно точки, що не належить цим площинам, – паралельні** (спирайтеся на те, що центральна симетрія – рух, який змінює напрям на протилежний).

Які ще способи доведення цього твердження ви можете запропонувати?

ЦЕНТРАЛЬНА СИМЕТРІЯ У ЖИТТІ

Центральна симетрія відіграла певну роль у появі сучасних уявлень про будову атомів і молекул.

Атом утворюють ядро та електрони, які обертаються навколо ядра по певних орбітах. Електрон поводиться і як частинка, і як тривимірна хвиля.

Щоб показати розподіл електронів в атомі, користуються моделлю електронної хмарки, густину якої (перерозподіл електричних зарядів) допомагає з'ясувати аналіз симетрії молекул.

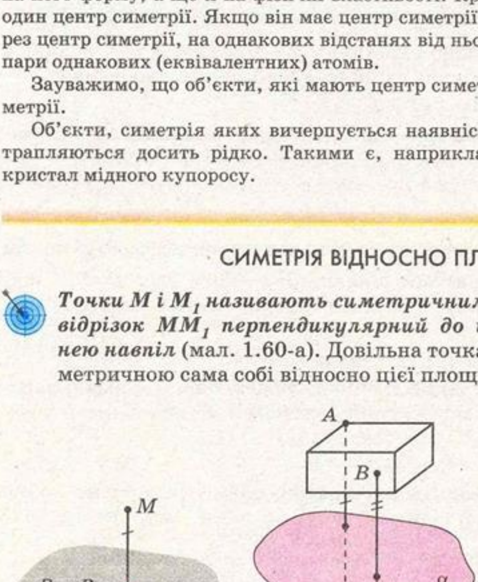
Від симетрії кристала залежать його властивості. Так, кристалографи та фізики помітили, що наявність чи відсутність центра симетрії кристалу впливає не тільки на його форму, а ще й на фізичні властивості. Кристал не може мати більше, ніж один центр симетрії. Якщо він має центр симетрії, то на прямих, що проходять через центр симетрії, на однакових відстанях від нього по обидва його боки містяться пари однакових (еквівалентних) атомів.

Зауважимо, що об'єкти, які мають центр симетрії, часто мають й інші види симетрії.

Об'єкти, симетрія яких вичерпується наявністю тільки центральної симетрії, трапляються досить рідко. Такими є, наприклад, косокутний паралелепіпед і кристал мідного купоросу.

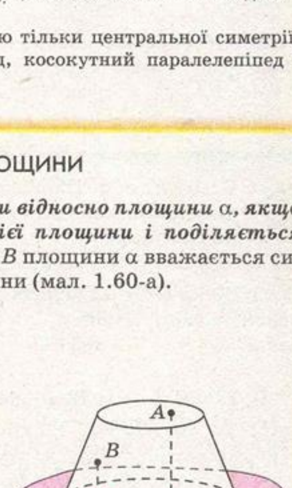
СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ПЛОЩИНИ

Точки M і M_1 називають симетричними відносно площини α, ***якщо відрізок MM_1 перпендикулярний до цієї площини і поділяється нею навпіл*** (мал. 1.60-а). Довільна точка B площини α вважається симетричною сама собі відносно цієї площини (мал. 1.60-а).



а) б)

Мал. 1.60

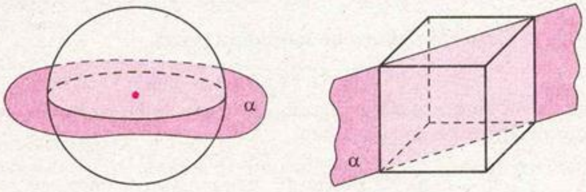


Мал. 1.61

Дві фігури називають симетричними відносно площини, якщо вони складаються з попарно симетричних відносно цієї площини точок, тобто якщо для кожної точки однієї фігури існує симетрична їй відносно даної площини точка іншої фігури і навпаки (мал. 1.60-б).

Зокрема фігура може перетворюватися симетрією відносно певної площини α сама на себе (мал. 1.61). Тоді кожній її точці відповідає точка тієї самої фігури, симетрична відносно даної площини. Таку фігуру називають *симетричною відносної площини* α, а площину α – *площиною симетрії цієї фігури*.

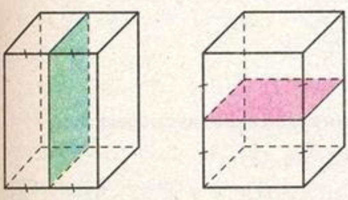
Симетричні тіла ми бачимо навколо себе – склянки та тарілки, шафи, будинки, тіла людей і тварин. У геометрії прикладами таких фігур є сфера, правильний паралелепіпед (мал. 1.62) тощо.



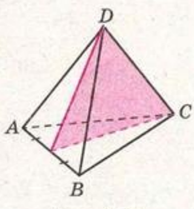
а) б)

Мал. 1.62

Прямокутний паралелепіпед (якщо він не є правильним) має три площини симетрії, що проходять через середини його ребер паралельно граням (мал. 1.63).



Мал. 1.63

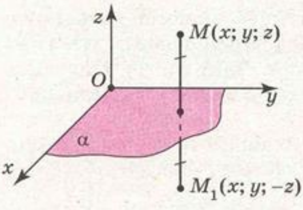


Мал. 1.64

У правильного паралелепіпеда є ще дві площини симетрії – це площини діагональних перерізів (мал. 1.62-б).

Правильний тетраедр має шість площин симетрії. Вони проходять через кожне ребро тетраедра перпендикулярно до протилежних граней (мал. 1.64).

Якщо ввести прямокутну систему координат так, щоб координатна площина xOy сумістилася з площиною симетрії (мал. 1.65), то координати прообразу $M(x; y; z)$ і образу $M_1(x_1; y_1; z_1)$ відрізняються тільки знаком аплікати:



Мал. 1.65

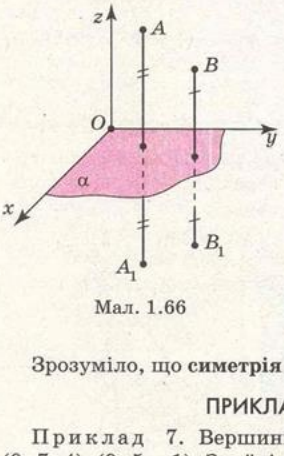
$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = y, \\ z_1 = -z. \end{cases}$$

Аналогічно, точки симетричні відносно координатної площини xOz відрізняються тільки знаком ординати, а симетричні відносно yOz – тільки знаком абсциси.

Т е о р е м а. Симетрія відносно площини – рух.

Д о в е д е н н я

Нехай довільні точки A і B однієї фігури мають за образи (симетрії відносно площини α) точки A_1 і B_1 іншої.



Мал. 1.66

Введемо прямокутну систему координат так, щоб координатна площина xOy сумістилася з площиною α (мал. 1.66). Маємо:

$$A(x_A; y_A; z_A),\ A_1(x_A; y_A; -z_A),\ B(x_B; y_B; z_B),$$
$$B_1(x_B; y_B; -z_B).$$

Запишемо відстані між точками A і B, A_1 і B_1:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (-z_B + z_A)^2}.$$

Тоді $AB = A_1B_1$.
Теорему доведено.

Зрозуміло, що **симетрія відносно площини має всі властивості руху.**

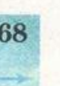
ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

П р и к л а д 7. Вершини трикутника містяться в точках (6; −2; 3), (0; 7; 4), (9; 5; −1). Знайдіть координати вершин трикутника, симетричного даному відносно площини yOz.

Р о з в ' я з а н н я

Координати точки, симметричної відносно площини yOz, відрізняються тільки знаком абсциси. Маємо: (−6; −2; 3), (0; 7; 4), (−9; 5; −1).

Відповідь: (−6; −2; 3), (0; 7; 4), (−9; 5; −1).



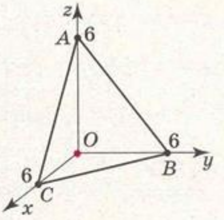
П р и к л а д 8. Знайдіть точку, симетричну початку координат відносно площини $x + y + z - 6 = 0$.

Р о з в ' я з а н н я

Перепишемо рівняння площини симетрії у вигляді $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1$.

Маємо рівняння площини у відрізках, тобто задана площина відтинає на координатних осях відрізки завдовжки 6 од. (мал. 1.67).

Початок координат проектується в центр утвореного правильного трикутника ABC. Шукана точка O_1 належить прямій, що містить цей перпендикуляр. Отже, координати шуканої точки рівні між собою числа. Нехай $O_1(a;\ a;\ a)$.



Мал. 1.67

Знайдемо значення a з умови, що точки $(0;\ 0;\ 0)$ і $(a;\ a;\ a)$ рівновіддалені від площини $x + y + z - 6 = 0$:

$$d((0;0;0);\ x+y+z-6) = \frac{|-6|}{\sqrt{3}},\ d((a;a;a);\ x+y+z-6) = \frac{|3a-6|}{\sqrt{3}},$$

$$|a-2| = 2 \Leftrightarrow a \in \{0;4\}.$$

Відповідь: (4; 4; 4).

Чи можете ви запропонувати інший спосіб розв'язання цієї задачі?

Приклад 9. Знайдіть точку, симетричну початку координат відносно площини $x - y + 2z - 3 = 0$.

Розв'язання

Вектором-нормаллю даної площини буде $\vec{n}(1;\ -1;\ 2)$. Тоді відповідний шуканій точці M радіус-вектор колінеарний до $\vec{n}(1;\ -1;\ 2)$, отже, $M(a;\ -a;\ 2a)$.

Знайдемо значення a з умови, що точки $(0;\ 0;\ 0)$ і $(a;\ -a;\ 2a)$ рівновіддалені від площини $x - y + 2z - 3 = 0$:

$$d((0;0;0);\ x-y+2z-3) = \frac{|-3|}{\sqrt{6}},\ d((a;-a;2a);\ x-y+2z-3) = \frac{|6a-3|}{6},$$

$$|2a-1| = 1 \Leftrightarrow a \in \{0;1\}.$$

Відповідь: (1; –1; 2).

Як зміниться розв'язання останньої задачі, якщо шукана точка буде симетрична точці, що не збігається з початком координат?

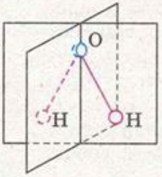
СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ПЛОЩИНИ У ЖИТТІ

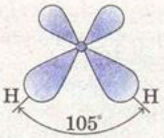
Серед того, що нас оточує, скрізь можемо помітити симетрію відносно площини. Це не тільки будинки, деталі машин і ми з вами. Це ще й кристали, будова молекул, атомів.

Так, кристал гіпсу має тільки одну площину симетрії. А кристал кам'яної солі – дев'ять, тобто стільки, скільки й куб.

Молекули певних речовин можна поділити площиною так, що кожний атом в одній частині молекули при симетрії відносно цієї площини переходить в аналогічний йому атом другої половини молекули.

Молекула води H_2O, наприклад, має дві площини симетрії: одна проходить через центри всіх атомів молекули, а друга – через атом кисню, поділяючи кут між зв'язками O-H навпіл (мал. 1.68).





електронні хмарки молекули води

Мал. 1.68

Молекули азоту N_2, вуглекислого газу CO_2, чадного газу CO мають пучок площин симетрії.

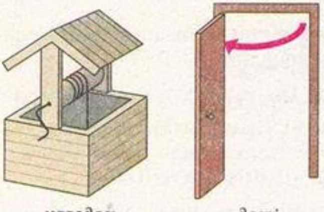
Кожний з видів симетрії використовують у дослідженнях і розрахунках.

ПОВОРОТ НАВКОЛО ПРЯМОЇ

Коли ми відкриваємо двері, обертаємо коловорот колодязя, – вони здійснюють поворот у просторі (мал. 1.69).

Нагадаємо, що у площині при повороті навколо точки O на кут φ всі точки фігури переміщувалися так, що кожна точка X поверталася навколо O на кут φ в одному й тому самому напрямі (мал. 1.70). Тобто довільна точка X плоскої фігури перетворювалася на Y так, що $|OX| = |OY|$ і $\angle XOY = \varphi$ (з урахуванням знака кута φ). Точку O ми називали центром повороту, а φ – кутом повороту.

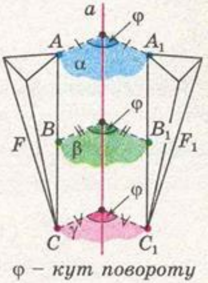
Тепер перейдемо до визначення перетворення повороту у просторі.



колодязь   *двері*

Мал. 1.69

Мал. 1.70



Мал. 1.71

Поворотом фігури навколо прямої a на кут φ називають таке перетворення, при якому у кожній площині, перпендикулярній до прямої a, здійснюється поворот навколо точки її перетину з прямою a на один і той самий кут φ в одному і тому самому напрямі (мал. 1.71). ***Пряма a називається віссю повороту, а кут φ – кутом повороту.***

Так само як і у планіметрії, кут повороту в одному напрямі вважаємо додатним, а в протилежному – від'ємним.

Зрозуміло, що точки, які належать осі повороту, переходять самі в себе (не рухаються).

Нескладно довести, що поворот у просторі (аналогічно до повороту в планіметрії) є **рухом**.

Якщо фігура перетворюється сама на себе при повороті навколо осі a на певний кут (менший за 360°), то кажуть, що фігура *має поворотну симетрію*, а пряма a є її *віссю симетрії*.

Т Теорема. **Поворот навколо прямої – рух.**

Доведення

Нехай поворотом навколо осі a точки A і B перетворилися відповідно на точки A_1 і B_1 (мал. 1.72). Площини α і β, в яких містяться відповідно пари точок A, A_1 і B, B_1, перпендикулярні до прямої a і перетинають її у точках O та P (див. мал. 1.72).

Запишемо векторну рівність:

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OP} + \overline{PB}.$$

Піднесемо її до скалярного квадрата і врахуємо, що скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини, а також те, що $\overline{AO} \perp \overline{OP}$ і $\overline{PB} \perp \overline{OP}$. Маємо:

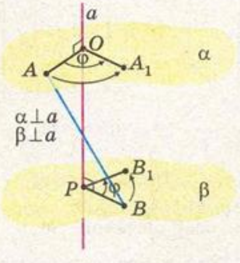
$$AB^2 = AO^2 + PB^2 + OP^2 + 2\overline{AO} \cdot \overline{PB}.$$

Аналогічно:

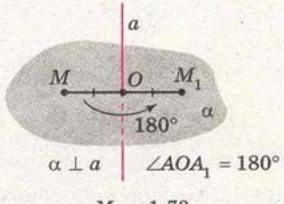
$$A_1B_1{}^2 = A_1O^2 + PB_1{}^2 + OP^2 + 2\overline{A_1O} \cdot \overline{PB_1}.$$

При повороті відстані точок від осі повороту зберігаються, не змінюється також кут між променями: $\angle(OA; PB) = \angle(OA_1; PB_1)$. Тобто $OA = OA_1$, $OB = OB_1$, кути між $\overline{AO}$ і $\overline{PB}$, $\overline{A_1O}$ і $\overline{PB_1}$ рівні. Тоді $AB^2 = A_1B_1{}^2$ і $|AB| = |A_1B_1|$.

Теорему доведено.



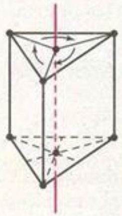
Мал. 1.72



Мал. 1.73

При повороті навколо прямої a на $180°$ кожна точка $M \notin a$ переходить у таку точку M_1, що пряма a перпендикулярна до відрізка MM_1 і перетинає його в середині (мал. 1.73). Про такі точки M і M_1 кажуть, що вони *симетричні відносно прямої a*. (Пригадайте, що у планіметрії поворот на $180°$ є центральною симетрією.)

Якщо фігура F перетворюється сама на себе при повороті навколо осі a на кут $\frac{360°}{n}$ (n – ціле додатне число), то кажуть, що фігура F *має поворотну симетрію*, а пряма a є її *віссю симетрії порядку n*.



Мал. 1.74

Наприклад, **правильна трикутна призма** має поворотну вісь симетрії третього порядку – це пряма, що проходить через центри її основ (мал. 1.74).

Правильна піраміда з парним числом бічних граней має за поворотну вісь симетрії висоту, порядок симетрії – число бічних граней. Так правильна чотирикутна піраміда має поворотну вісь симетрії четвертого порядку, n-кутна – n-ого.

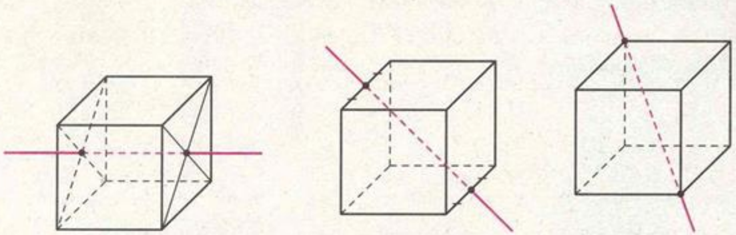
Правильна призма з парним числом бічних граней має за поворотну вісь симетрії, окрім прямої, що проходить через центри основ, ще прямі, які проходять через точки перетину діагоналей довільної пари бічних граней. Окрім того, віссю симетрії для такої призми буде кожна пряма, що проходить через середини її протилежних бічних ребер. Усього n-кутна правильна призма (n – парне) має $n + 1$ поворотну вісь симетрії.

Розглянемо **куб.** Він має:

• 3 поворотні осі 4-го порядку – проходять через центри протилежних граней (мал. 1.75-а);

• 6 поворотних осей 2-го порядку – проходять через середини протилежних ребер (мал. 1.75-б);

• 4 поворотні осі 3-го порядку – містять діагоналі куба (мал. 1.75-в).



а) б) в)

Мал. 1.75

Таким чином, куб має всього 13 поворотних осей симетрії.

Знайдемо **координатні формули повороту**. Для цього зручно застосувати циліндричну систему координат (див. § 3, с. 23).

У *циліндричних координатах* (мал. 1.16) кожній точці простору відповідає три координати: ρ і φ – *полярні координати* проекції точки простору на площину xOy й *апліката* z – проекція цієї точки на вісь аплікат.

Якщо ввести полярну систему координат так, щоб вісь Oz збіглася з віссю повороту a, то точка з координатами $(\rho;\ \alpha;\ z)$ перетвориться на точку $(\rho;\ \alpha+\varphi;\ z)$.

За формулами переходу між циліндричними й прямокутними системами координат (див. с. 23) маємо:

$$x_1=\rho\cos(\alpha+\varphi),\ y_1=\rho\sin(\alpha+\varphi),\ z_1=z,$$

де $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y}{x}$.

Тобто точка $M(x;\ y;\ z)$ має за образ точку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, координати якої визначаються за формулами:

$$x_1=\sqrt{x^2+y^2}\cos(\alpha+\varphi),\ y_1=\sqrt{x^2+y^2}\sin(\alpha+\varphi),\ z_1=z,$$

де $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Якщо полярну вісь направити так, щоб вона містила проекцію точки прообразу на площину xOy, то кут $\alpha=0$ і координати точки образу знаходимо за

$$x_1=\rho\cos\varphi,\ y_1=\rho\sin\varphi.$$

Тоді маємо, що у випадку, якщо проекція точки прообразу міститься на осі Ox, координати точки образу дорівнюють

$$x_1=\sqrt{x^2+y^2}\cos\varphi,\ y_1=\sqrt{x^2+y^2}\sin\varphi,\ z_1=z.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 10. Знайдіть рівняння сфери, яку отримано поворотом сфери $(x-1)^2+(y+\sqrt{3})^2+z^2=4$ на кут 30° відносно осі Oz.

Розв'язання

Вісь Oz збігається з віссю повороту. Тоді центр даної сфери $A(1;\ -\sqrt{3};\ 0)$ перетвориться поворотом на 30° відносно Oz в точку $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, де

$$x_1=\sqrt{1+3}\cos(\alpha+30°),\ y_1=\sqrt{1+3}\sin(\alpha+30°),\ z_1=0,\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{1}=-60°.$$

Маємо

$$x_1=2\cos(-60°+30°)=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},\ y_1=2\sin(-60°+30°)=-2\cdot\frac{1}{2}=-1,\ z_1=0.$$

Радіус сфери не змінюється.

Рівняння сфери з центром у точці $A_1(\sqrt{3};\ -1;\ 0)$ радіуса 2 є шуканим:

$$(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2+z^2=4.$$

Відповідь: $(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2+z^2=4$.

ПОВОРОТНА СИМЕТРІЯ У ЖИТТІ

Багато серед оточуючих об'єктів мають поворотну симетрію – будівлі, посуд, меблі тощо.

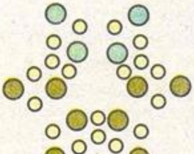
Для кристалів характерна обмеженість порядку поворотної симетрії – маємо поворотну симетрію лише 1, 2, 3, 4 і 6-го порядку. Так, кристал кварцу має одну вісь 3-го порядку і 3 осі 2-го порядку.

Уявлення про поворотну симетрію допомагають досліджувати деякі властивості кристалів.

Так, у природі є кристали, які під дією певних впливів (тиску, температури тощо) електризуються. Притому різні грані заряджаються різнойменно. Електризація не відбувається в напрямах, перпендикулярних до площин симетрії, або до осей повороту парного порядку.

Упорядкуванням, зокрема й поворотною симетрією, можна пояснити явище збільшення об'єму під час перетворення води у лід. Під час зниження температури тепловий рух частинок уповільнюється і водночас відбувається упорядкування їх розміщення. Зокрема молекули льоду розміщуються так, що між ними виникають порожнини (мал. 1.76). Під час перетворення льоду у воду ці порожнини частково заповнюються молекулами води.

Проте більшість речовин мають у твердому стані таку кристалічну структуру, що, перетворюючись на рідину, вони розширюються.



Мал. 1.76

Тепловий рух молекул не обмежується тільки переміщенням – рухаються всі складові частини молекули. Наприклад, молекула етану $H_3C\text{-}CH_3$ допускає поворот атомів вуглецю навколо осі зв'язку.

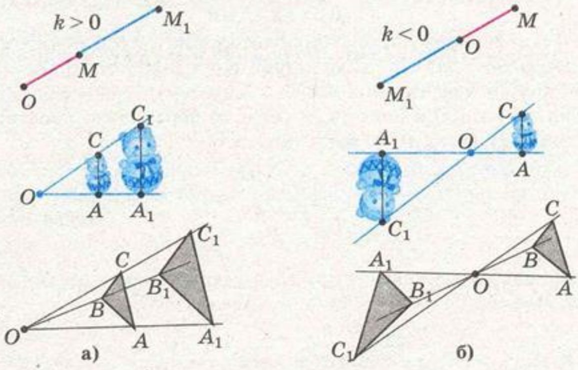
Ланцюжки полімерних молекул мають багато таких зв'язків, навколо яких можливі обмежені повороти, і розміщуються ці ланцюжки у межах конуса допустимих поворотів. Це приводить до того, що така молекула може згортатися в клубок. Саме в цьому причина пружності полімерів, наприклад таких як каучук.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ ТА ГОМОТЕТІЯ ПРОСТОРУ

Перетворення, які змінюють тільки розміри фігур, але не форму, називаються перетвореннями подібності. При перетворенні подібності з коефіцієнтом k ($k > 0$) відстані між двома довільними точками фігури змінюються в k разів. Тобто якщо A і B прообрази такого перетворення, а відповідно A_1 і B_1 – їхні образи, то $|A_1B_1| = k|AB|$.

Найвідомішим прикладом такого відображення є перетворення гомотетії з центром O. Перетворення гомотетії у просторі визначається так само, як і на площині.

Гомотетією з центром O і коефіцієнтом $k \neq 0$ називається перетворення, при якому образом довільної точки M є така точка M_1, що $\overline{OM_1} = k \cdot \overline{OM}$.



Мал. 1.77

Так само як і в планіметрії, якщо $k > 0$, то точки M і M_1 містяться на прямій OM по один бік від точки O (мал. 1.77-а), а при $k < 0$ – по різні боки (мал. 1.77-б).

Аналогічно тому, як ми це робили в планіметрії, можна довести такі властивості гомотетії простору.

- **Кути при гомотетії не змінюються.**
- **Відрізок відображується у відрізок, пряма – у пряму, промінь – у промінь.**
- **Образ точки, що належала відрізку, належить образу цього відрізка.**
- **Відношення відрізків прямої зберігається.**
- **Фігури образу і прообразу подібні з коефіцієнтом $|k|$.**
- **Відповідні лінійні елементи гомотетичних фігур пропорційні з коефіцієнтом $|k|$.**
- **Гомотетія з центром O і коефіцієнтом $k = -1$ є симетрією відносно точки O.**

При гомотетії з центром у початку координат і коефіцієнтом k координати довільної точки образу $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і її прообразу $M(x; y; z)$ зв'язані співвідношенням:

$$\begin{cases} x_1 = kx, \\ y_1 = ky, \\ z_1 = kz. \end{cases}$$

Доведемо ще одну властивість гомотетії простору.

Т е о р е м а. **При гомотетії площина відображається у паралельну їй площину. До того ж вільний член у рівнянні площини-образу змінюється у k разів, де k – коефіцієнт гомотетії.**

Доведення

Введемо прямокутну систему координат так, щоб її початок сумістився з центром гомотетії. Нехай даній площині α у цій системі координат відповідає рівняння $ax + by + cz + d = 0$.

Довільна точка цієї площини M $(x; y; z)$ переходить перетворенням гомотетії в точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, де

$$\begin{cases} x_1 = kx, \\ y_1 = ky, \\ z_1 = kz. \end{cases}$$

Знайдемо звідси значення x, y, z і підставимо їх у рівняння площини-прообразу. Маємо:

$$\frac{a}{k}x_1 + \frac{b}{k}y_1 + \frac{c}{k}z_1 + d = 0.$$

Маємо рівняння площини, яке у звичних нам позначеннях змінних має вигляд

$$ax + by + cz + kd = 0.$$

Ця площина відрізняється від площини-прообразу лише останнім коефіцієнтом. Тоді ці площини паралельні (див. ознаку на с. 51).

Теорему доведено.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 11. Сферу задано рівнянням $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4$. Знайдіть рівняння сфери, що гомотетична даній відносно початку координат з коефіцієнтом $k = -2$.

Розв'язання

При гомотетії з центром у початку координат і коефіцієнтом k координати довільної точки образу $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і її прообразу M $(x; y; z)$ пов'язані співвідношенням:

$$\begin{cases} x_1 = kx, \\ y_1 = ky, \\ z_1 = kz. \end{cases}$$

Координати центра даної сфери $O(1; -2; 0)$. Тоді координати центра O_1 шуканої сфери $O_1(-2; 4; 0)$.

Радіус даної сфери дорівнює 2. Тоді радіус шуканої сфери дорівнює $|-2| \cdot 2 = 4$.

Рівняння сфери з центром у точці $O_1(-2; 4; 0)$ і радіусом $R_1 = 4$ має вигляд

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 16.$$

Відповідь: $(x+2)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 16$.

Приклад 12. Площину задано рівнянням $2x - 3y + z - 6 = 0$. Знайдіть рівняння площини, яка гомотетична даній відносно початку координат з коефіцієнтом $k = \frac{2}{3}$.

Розв'язання

Як відомо, при перетворенні подібності рівняння площини образу відрізняється від рівняння площини прообразу тільки вільним членом – він змінюється в k разів.

Шукане рівняння має вигляд:

$$2x - 3y + z - 6 \cdot \frac{2}{3} = 0,\ 2x - 3y + z - 4 = 0.$$

Відповідь: $2x - 3y + z - 4 = 0$.

Приклад 13. Сферу задано рівнянням $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4$. Знайдіть рівняння сфери, що гомотетична даній відносно точки $P(-1; 1; 2)$ з коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$.

Розв'язання

Паралельним перенесенням на вектор $\vec{a}(1; -1; -2)$ відобразимо центр гомотетії у початок координат. Тоді центр даної сфери $O(1; -2; 0)$ відобразиться у точку $O_1(0; -3; -2)$.

Перетворенням гомотетії відносно початку координат з коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$ точка $O_1(0; -3; -2)$ перетвориться на точку $O_2\ (0; -\frac{3}{2}; -1)$.

Після оберненого паралельного перенесення на вектор $\vec{b}(-1; 1; 2)$ отримуємо координати центра шуканої сфери $O_3(-1; -\frac{1}{2}; 1)$.

Радіус шуканої сфери дорівнює $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Записуємо рівняння сфери з центром у точці $(-1; -\frac{1}{2}; 1)$ і радіусом 1:

$$(x+1)^2 + (y+0{,}5)^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Відповідь: $(x+1)^2 + (y+0{,}5)^2 + (z-1)^2 = 1$.

В останньому прикладі ми використали *композицію перетворень* – послідовне виконання одного перетворення за іншим.

Деякі композиції мають спеціальні назви. Так, композицію повороту навколо прямої і паралельного перенесення вздовж цієї самої прямої називають *гвинтовим рухом*. Композицію повороту навколо прямої і симетрії відносно площини, що перпендикулярна до цієї прямої, – *дзеркальним поворотом*.

Зрозуміло, що *композиція рухів – рух*.

ДЕЩО З ІСТОРІЇ

Давньогрецький математик *Фалес Мілетський* (бл. 625–547 до н. е.) для доведення геометричних теорем застосовував рухи. Наприклад, щоб довести рівність вертикальних кутів, він повертав площину креслення на 180° навколо деякої точки. Застосовував Фалес і ще один рух – паралельне перенесення. Саме за допомогою такого руху він довів теорему, яку сьогодні ми називаємо теоремою Фалеса.

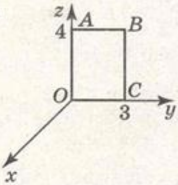
Фундаментальну роль рухів (і взагалі геометричних перетворень) у розумінні сучасної геометрії, відкрив німецький математик XIX ст. *Фелікс Клейн* й описав це у своїй статті «Геометрія групи перетворень».

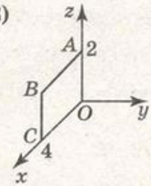
Якщо ідеї Фалеса близькі до сучасного розуміння геометрії в дусі Клейна, то Евклід у своїх «Началах» дотримувався іншої точки зору щодо методів доведення теорем і розв'язування задач. Підхід Евкліда ґрунтувався на рівності трикутників: для встановлення якогось геометричного факту слід розглянути одну пару трикутників і довести, що вони рівні, потім іншу пару трикутників, якщо потрібно, то й третю, доки не буде отримано бажаного результату.

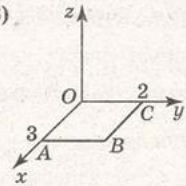
Евклідова традиція викладу геометрії жива й досі – у будь-якому підручнику міститься багато теорем і розв'язків задач за допомогою ознак рівності трикутників. Однак ті самі результати можна отримати і за допомогою геометричних перетворень.

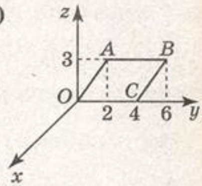
Завдання 8

1°. Дано паралелограм $OABC$. Запишіть вектори паралельних перенесень, за якими один із зображених відрізків перетворюється на інший:

1) 

2) 

3) 

4) 

2°. Паралельне перенесення задано вектором $\vec{p}\left(1; -2; -\frac{3}{4}\right)$. Знайдіть координати точки, що:

1) є образом точки $A(0; -1; 0)$;
2) є образом точки $B\,(2; -3; 5)$;
3) є прообразом точки $M(0; -1; 0)$;
4) є прообразом точки $H(-8; 4; 4)$.

3. Задано відрізок з координатами його кінців $A(2; -3; 5)$ і $B(5; 5; 1)$. У результаті паралельного перенесення середина відрізка AB перемістилася в початок координат. Знайдіть координати точок, у які перемістилися кінці даного відрізка.

4*. **Доведіть: при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p}$: 1) пряма, що не паралельна $\vec{p}$ і не містить $\vec{p}$, має за образ паралельну їй пряму; 2) пряма, що паралельна $\vec{p}$ або містить $\vec{p}$, перетворюється сама на себе.**

5*. **Доведіть: при паралельному перенесенні площина-образ і площина-прообраз паралельні.**

6. Сферу задано рівнянням $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4$. Знайдіть рівняння сфери, яку отримаємо паралельним перенесенням даної на $\vec{b}(-11; 5; 13)$.

7. Паралельним перенесенням на $\vec{a}(-1; 1; 3)$ отримали сферу $x^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$. Знайдіть рівняння сфери-прообразу.

8*. Знайдіть рівняння образу площини $3x - y + 8z - 17 = 0$ при паралельному перенесенні її на $\vec{a}(-1; 5; 3)$.

9*. Після паралельного перенесення на $\vec{a}(1; -1; 2)$ отримали площину $x - 2y + 3z + 1 = 0$. Знайдіть рівняння площини-прообразу.

10. Знайдіть координати центра симетрії відрізка з кінцями в точках $A(1; 2; -1)$ і $B(-1; 4; 2)$.

11. Знайдіть координати точки, що симетрична точці $M(1; 2; -3)$ відносно: 1) початку координат; 2*) точки $O(-1; 0; 1)$; 3*) точки $P(5; -5; 4)$.

12*. **Доведіть: дві прямі, що симетричні відносно точки, через яку вони не проходять, – паралельні.**

13*. **Доведіть: дві площини, що симетричні відносно точки, через яку вони не проходять, – паралельні.**

14**. Знайдіть ГМТ центрів симетрії двох даних паралельних площин.

15*. Дано куб. Побудуйте симетричну йому фігуру відносно точки, що є:
1) однією з його вершин;
2) точкою перетину його діагоналей;
3) точкою перетину діагоналей однієї з його граней;
4) деякою точкою на його ребрі;
5) деякою точкою на його грані.

16*. Знайдіть рівняння площини, яка симетрична площині $x + y + z - 3 = 0$ відносно точки:
1) $P(2; 2; 2)$; 2) $O(0; 0; 0)$; 3) $H(1; -1; 2)$.

17**. Знайдіть координати центра симетрії площин $x + y + z - 3 = 0$ і $x + y + z - 9 = 0$. Скільки розв'язків має задача?

18**. Дано квадрат $ABCD$ з вершинами $A(4; 0; 0)$ і $B(8; 3; 0)$, площина якого паралельна осі Oz. Знайдіть координати вершин квадрата, який симетричний даному відносно точки (2; 2; 2). Скільки розв'язків має задача?

19. Чи завжди існує площина, відносно якої є симетричними: 1) дві точки; 2) дві прямі; 3) дві площини?

20*. Чи правильним є твердження: площина перетворенням симетрії відносно площини має за образ площину, їй паралельну?

21**. Доведіть, що будь-яку чотирикутну піраміду можна перетнути площиною так, щоб переріз мав центр симетрії.

22*. Пряма m нахилена до площини α під кутом 36°. Пряма n симетрична m відносно цієї площини. Знайдіть кут між: 1) прямими n і m; 2) прямою n і площиною α.

23. **Знайдіть усі площини симетрії: 1) куба; 2) прямокутного паралелепіпеда; 3) правильної трикутної піраміди.**

24*. Правильний тетраедр перетнули площиною, що проходить перпендикулярно до його висоти і ділить її навпіл. Зобразіть тетраедр, симетричний даному відносно січної площини.

25. Два відрізки симетричні один одному відносно площини. Яка утвориться фігура, якщо послідовно сполучити кінці цих відрізків?

26**. Знайдіть точку, симетричну відносно площини $x - 2y + z - 3 = 0$ точці: **1)** (0; 0; 0); **2)** (1; 1; 1); **3)** (−1; 0; 1).

27*. При перетворенні симетрії відносно площини α площина β перетворюється на площину β_1. Доведіть:
1) якщо $\beta \parallel \alpha$, то $\beta_1 \parallel \alpha$; **2)** якщо $\beta \perp \alpha$, то β_1 збігається з α.

28. Чи має поворотні осі симетрії: **1)** трикутна призма; **2)** тетраедр; **3)** правильний тетраедр; **4)** довільна піраміда; **5)** правильна піраміда?

29. Куб повернули навколо прямої, що містить одне з його ребер, на 90°. Зобразіть об'єднання куба-прообразу і куба-образу. Скільки граней має утворена фігура?

30*. Куб повернули навколо прямої, що містить діагональ куба, на 120°. Зобразіть об'єднання куба-прообразу і куба-образу. Скільки граней має утворена фігура?

31*. Доведіть, що площини граней фігури, які перпендикулярні до осі повороту, перетворенням повороту відображаються на себе.

32*. Знайдіть координатні формули симетрії відносно осі аплікат.

33*. Знайдіть рівняння сфери, яку отримано поворотом сфери $(x + 1)^2 + (y - \sqrt{3})^2 + z^2 = 4$ на кут 60° відносно осі Oz.

34. Дано зображення паралелепіпеда. Побудуйте зображення паралелепіпеда, гомотетичного даному з центром гомотетії у одній з його вершин і коефіцієнтом гомотетії $\frac{1}{3}$. Знайдіть відношення площ поверхонь даного і побудованого паралелепіпедів.

35. Дано зображення тетраедра і точки O поза ним. Побудуйте образ цього тетраедра при гомотетії з центром O і коефіцієнтом: **1)** −2; **2)** 0,5. Знайдіть відношення площ поверхонь даного і побудованого тетраедрів.

36. Сферу задано рівнянням $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$. Знайдіть рівняння сфери, яка гомотетична даній сфері з коефіцієнтом гомотетії 1,2 відносно:
1*) початку координат; **2**)** точки (1; 1; 1); **3**)** центра даної сфери.

37. Знайдіть рівняння площини, гомотетичної площині $x - 2y + z - 3 = 0$ з коефіцієнтом $k = -0{,}5$ відносно:
1*) початку координат; **2**)** точки (0; −2; 1); **3**)** точки (−4; 3; 2).

ПИТАННЯ НА УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗНАНЬ ЗА РОЗДІЛОМ 1

1. Кожен з двох векторів паралельний одній і тій самій площині. Поясніть, чому сума (різниця) цих векторів паралельна тій самій площині. Узагальніть це твердження.

2. Нехай на кожному ребрі багатогранника задано один вектор, довжина якого дорівнює довжині відповідного ребра. Чи може бути таке, що:
1) серед цих векторів немає рівних;
2) серед цих векторів є рівні?

3*. Яку фігуру утворюють кінці рівних векторів, що відкладені від кожної точки:
1) прямої; **2)** площини; **3)** тетраедра; **4)** сфери; **5)** кулі?

4*. Чи можна розкласти вектор у просторі на складові за:

1) двома напрямами; 2) трьома напрямами; 3) чотирма напрямами?

5. Відомо координати трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Як знайти координати вектора $\alpha\vec{a} + \mu\vec{b} + \lambda\vec{c}$?

6. Три вектори задано своїми координатами. Як встановити, чи є вони компланарними?

7*. Чотири вектори задано своїми координатами. Треба розкласти один з них по інших трьох. 1) Чи завжди це можливо? 2) Як ви будете діяти? Наведіть приклад.

8*. Як визначити, чи належать три задані точки одній прямій? Скільки способів розв'язування такої задачі ви можете запропонувати?

9*. Чи можна скласти замкнену ламану з відрізків, що сполучають вершини тетраедра з точкою перетину медіан протилежної грані?

10*. Нехай на кожному ребрі багатогранника задано один вектор, довжина якого дорівнює довжині відповідного ребра. Пронумеруємо ці вектори. Оберемо довільну точку простору. Відкладемо від неї перший вектор, від його кінця – другий, ... , – останній. Чи можемо ми так задати й так пронумерувати ті вектори, щоб у результаті повернутися до початкової точки? Як виглядає аналогічна задача на площині?

11*. Задано точки O і A. Якою фігурою у просторі є множина точок M таких, що:
1) $\overline{OM} \cdot \overline{OA} = 1$; 2) $\overline{OM} \cdot \overline{OA} < 1$; 3) $\overline{OM} \cdot \overline{OA} \geqslant -1$; 4) $\overline{OM} \cdot \overline{OA} \leqslant 1$?

12. Як знайти точку, симетричну даній відносно: 1) заданої точки; 2) заданої площини?

13. Як довести, що точки $A(1; 2; 3)$ і $B(-1; -2; -3)$ симетричні відносно початку координат? *Запропонуйте не менше трьох способів доведення.

14. Як довести, що точки $A(1; 12; 3)$ і $B(-1; -12; -3)$ симетричні відносно площини xOy? *Запропонуйте не менше трьох способів доведення.

15. Як знайти центр симетрії: 1) відрізка; 2) площини; 3) двох паралельних площин?

16*. Дано паралелограм $ABCO$, координати вершин A, B, C якого відомі. Як визначити координати вершин паралелограма, симетричного даному відносно точки O?

17*. Як довести, що площина перетворюється на площину, паралельну їй, або сама в себе перетворенням: 1) паралельного перенесення; 2) симетрії відносно точки?

18*. Чи можна довести аналогічне твердження у випадку симетрії відносно площини? Коли? Чому?

19. Чи можуть бути симетричними відносно однієї площини два відрізки однієї прямої?

20. Чи існує площина, відносно якої симетричні: 1) дві довільні точки; 2) дві довільні прямі; 3) дві довільні площини?

21. Як перетворюються перетворенням повороту грані фігури, які перпендикулярні до осі повороту?

22. Як змінюється площа фігури при претворенні гомотетією?

23*. Які точки, прямі, площини при гомотетії відображаються самі на себе?

24*. Які перетворення гомотетії є рухом?

Розділ 2

БАГАТОГРАННІ КУТИ

Ви вже ознайомилися з поняттями та властивостями кутів між двома прямими, площинами, прямою і площиною. У просторі існують ще й інші види кутів. Такі кути й їхні властивості ми будемо вивчати в цьому розділі.

§ 11 Двогранні кути

ПОНЯТТЯ ДВОГРАННОГО КУТА ТА ЙОГО МІРА

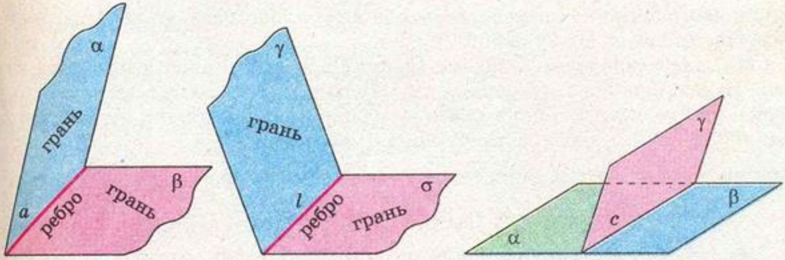
Уявлення про двогранні кути дають двоскатний дах, відчинені двері, відкритий ноутбук тощо, тобто фігури, які утворено двома півплощинами зі спільною границею.

Двогранним кутом називають фігуру, що складається із двох півплощин зі спільною граничною прямою (мал. 2.1-а). Вказані півплощини – його *грані*, а їх спільна межа – *ребро* цього двогранного кута.

Позначають їх так: $\alpha a \beta$, $\gamma l \sigma$, де перша та остання літери вказують на позначення граней двогранного кута, а друга – його ребра (мал. 2.1-а).

Два двогранних кути із спільним ребром і спільною однією з граней називають *суміжними*, якщо дві інші їхні грані належать одній площині. На малюнку 2.1-б зображено суміжні двогранні кути $\alpha c \gamma$ і $\beta c \gamma$.

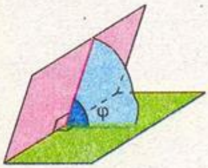
Два промені, по яких двогранний кут перетинається із площиною, перпендикулярною до його ребра, утворюють *лінійний кут* цього двогранного кута (мал. 2.2).



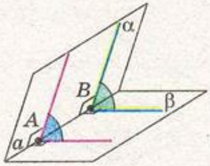
а) б)

Мал. 2.1

Якщо на ребрі a двогранного кута, утвореного півплощинами α і β (мал. 2.3), позначити дві різні точки й провести через них площини, перпендикулярні до a, – отримаємо два лінійні кути даного двогранного кута. Вони рівні між собою, бо їх утворено попарно паралельними променями (пригадайте відповідну теорему з курсу 10 класу).



Мал. 2.2



Мал. 2.3

Розглянуті дві точки – довільні точки прямої a. Тоді *всі лінійні кути двогранного кута рівні між собою.*

За міру (величину) двогранного кута приймають величину його лінійного кута.

Тоді двогранні кути можна порівнювати. *Більшим* вважають той двогранний кут, якому відповідає більший лінійний кут. Двогранні кути *рівні,* якщо рівні їхні лінійні кути.

Двогранний кут називають *прямим, гострим* або *тупим* залежно від виду його лінійного кута.

На відміну від кута між площинами, величина двогранного кута може змінюватися від 0° до 180°. (Нагадаємо, що кут між площинами не перевищує 90°.)

Зрозуміло, якщо при перетині двох площин один з утворених двогранних кутів прямий, то й інші три теж прямі.

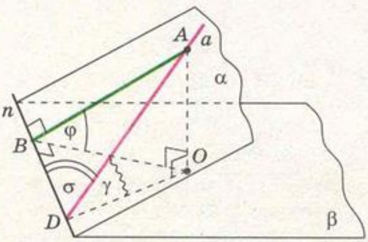
З а у в а ж е н н я. Інколи двогранним кутом зручніше вважати будь-яку з двох частин простору, на які його поділяє пара півплощин зі спільною межею. Відповідно лінійним кутом такого двогранного кута буде частина площини, перпендикулярна до його ребра та обмежена променями, по яких двогранний кут перетинається із цією площиною. А його міра може набувати значень від 0° до 360°.

Ми, для визначеності, обрали менший з вказаної пари двогранних кутів. Надалі кажучи «двогранний кут» будемо мати на увазі саме такий двогранний кут. (Аналогічно до того, як на площині, за кут між променями зі спільним початком обирають менший з утворених кутів.)

ТЕОРЕМА ПРО ТРИ СИНУСИ ДЛЯ ДВОГРАННОГО КУТА

Цю теорему ми фактично довели в 10 класі, коли розглядали теорему про три синуси для похилої до площини. Тепер ми її сформулюємо в дещо іншому вигляді.

Теорема. Якщо в одній грані двогранного кута міри φ провести пряму a, яка утворює кут σ з ребром цього кута, то кут γ між прямою a і другою гранню двогранного кута визначається співвідношенням: $\sin\gamma = \sin\varphi\sin\delta$ (мал. 2.4).



Мал. 2.4

Доведення

Проведемо у площині грані α двогранного кута $\alpha n\beta$ пряму a під кутом σ до його ребра n (мал. 2.4).

1) З довільної точки A цієї прямої опустимо перпендикуляри: $AO \perp \beta$, $AB \perp n$. Тоді (за теоремою про три перпендикуляри) $OB \perp n$.

2) Маємо: $AB \perp n$, $OB \perp n$. Тоді $\angle ABO$ – лінійний кут двогранного кута, $\angle ABO = \varphi$.

3) Маємо: $AO \perp \beta$, $OD = \text{Пр}_\beta a$. Тоді

$$\angle(a;\beta) = \angle ADO = \gamma.$$

4) З прямокутних трикутників ABD, AOB і AOD маємо:

$$AB = AD\sin\delta,\ AO = AB\sin\varphi = AD\sin\delta\sin\varphi,$$

$$\sin\gamma = AO : AD = \sin\varphi\sin\delta.$$

Теорему доведено.

БІСЕКТОР ДВОГРАННОГО КУТА

Бісектором двогранного кута називають півплощину, що поділяє його на два рівні двогранних кути. Границею бісектора є ребро двогранного кута.

Бісектор існує для будь-якого двогранного кута. Побудувати його можна так (мал. 2.5):

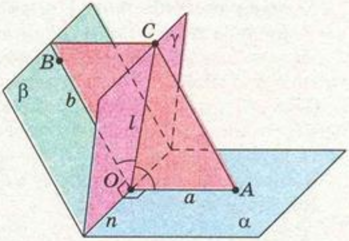
1) будуємо лінійний кут AOB даного двогранного кута $\alpha n\beta$;

2) у (AOB) будуємо бісектрису l кута AOB.

Півплощина, що визначена ребром даного двогранного кута n і променем l, є шуканим бісектором кута $\alpha n\beta$.

Доведемо останнє.

Площина AOB перпендикулярна до спільного ребра n даного й утворених двогранних кутів. Тоді кути AOB, AOC, COB – лінійні кути двогранних кутів $\alpha n\beta$, $\alpha n\gamma$, $\gamma n\beta$ відповідно. За побудовою промінь l – бісектриса кута AOB, тобто $\angle AOC = \angle COB$. Тоді двогранні кути $\alpha n\gamma$ і $\gamma n\beta$ рівні, γ – бісектор $\alpha n\beta$.



Мал. 2.5

ВЛАСТИВОСТІ БІСЕКТОРА ДВОГРАННОГО КУТА

З наведеного раніше легко отримати дві перші властивості бісектора двогранного кута (доведіть їх самостійно).

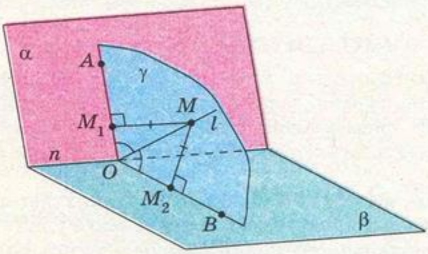
1. **Бісектор двогранного кута перетинає його лінійний кут по бісектрисі цього лінійного кута.**
2. **Бісектриса будь-якого лінійного кута даного двогранного кута належить його бісектору.**

Наступні дві властивості бісектора двогранного кута аналогічні до властивостей бісектриси плоского кута.

3. **Будь-яка точка бісектора двогранного кута рівновіддалена від його граней.**

Доведемо це твердження.

За першою властивістю бісектор двогранного кута $\alpha n\beta$ перетинає його лінійний кут AOB по бісектрисі l кута AOB (мал. 2.6).



Мал. 2.6

У площині AOB за властивістю бісектриси плоского кута для довільної точки $M \in l$ маємо, що відстані від M до прямих OB і OA рівні: $MM_1 = MM_2$.

Площина, що містить лінійний кут AOB кута $\alpha n\beta$, перпендикулярна до площин α і β та перетинає їх по прямих OA і OB. Тоді відрізки MM_1, MM_2 – відстані від M до площин α, β – рівні між собою.

4. **Будь-яка точка всередині двогранного кута, що рівновіддалена від його граней, належить його бісектору.**

Доведення цього твердження, оберненого до твердження 4, проведіть самостійно.

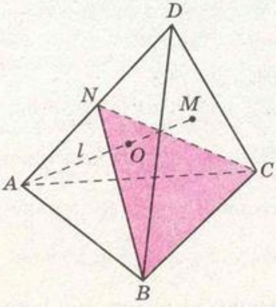
5. Міри двогранних кутів, на які поділяє двогранний кут його бісектор, не перевищують 90°.

Це випливає безпосередньо з означень бісектора й міри двогранного кута та того, що міра двогранного кута змінюється від 0° до 180°.

З планіметрії відомо, що бісектриси кутів трикутника перетинаються в одній точці. Аналогічно до цього маємо у просторі таку важливу властивість тетраедра.

6. Бісектори двогранних кутів тетраедра перетинаються в одній точці.

Доведемо це твердження.



Мал. 2.7

Нехай бісектори двогранних кутів тетраедра $DABC$ при його ребрах AB та AC перетинаються по променю l (мал. 2.7). Позначимо точку перетину цього променя з бісектором двогранного кута тетраедра при ребрі BC як O.

За властивістю 3 маємо для двогранних кутів тетраедра при:

ребрі AB – $\rho(O; (ABC)) = \rho(O; (ABD))$;

ребрі AC – $\rho(O; (ABC)) = \rho(O; (ACD))$;

ребрі BC – $\rho(O; (ABC)) = \rho(O; (BCD))$.

Звідси:

$\rho(O; (ABD)) = \rho(O; (ACD))$ і за властивістю 4 точка O належить бісектору двогранного кута тетраедра при ребрі AD;

$\rho(O; (ACD)) = \rho(O; (BCD))$ і за властивістю 4 точка O належить бісектору двогранного кута тетраедра при ребрі CD.

Твердження доведено.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

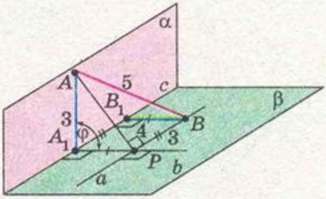
Нагадаємо опорні факти, які ми доводили в 10 класі і які часто використовуються при розв'язуванні задач на обчислення двогранних кутів.

- **Геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута, є площина, яка містить бісектрису цього кута і перпендикулярна до площини кута.**
- **Геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є площина, перпендикулярна до даного відрізка у його середині.**
- **Точка, рівновіддалена від сторін трикутника, проектується на площину цього трикутника в центр його вписаного або зовнівписаного кола*.**
- **Точка, рівновіддалена від усіх вершин трикутника, проектується на площину цього трикутника в центр його описаного кола.**
- **Точка, рівновіддалена від усіх сторін n-кутника ($n > 3$), проектується на площину цього багатокутника в центр його вписаного кола.**
- **Точка, рівновіддалена від усіх вершин багатокутника, проектується на площину цього багатокутника в центр його описаного кола.**
- **Вершина правильної піраміди проектується на площину її основи в центр правильного багатокутника основи.**

* Про зовнівписане коло дивись с. 270, 272, 288.

Приклад 1. Точки A і B лежать у різних гранях двогранного кута і віддалені від його ребра на 3 см і 4 см відповідно. Знайдіть міру двогранного кута, якщо відстань між точками A і B дорівнює 5 см, а між їхніми проекціями на ребро кута – 3 см.

Розв'язання



Мал. 2.8

Нехай пряма c – ребро даного двогранного кута з гранями α і β, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $AA_1 \perp c$, $BB_1 \perp c$ (мал. 2.8). Тоді $AA_1 = 3$ см, $BB_1 = 4$ см, $AB = 5$ см, $A_1B_1 = 3$ см.

1) Проведемо через B і A_1 прямі $a \parallel c$ і $b \parallel BB_1$ відповідно. Отримаємо прямокутник A_1B_1BP. Тоді $PB = A_1B_1 = 3$ см, $PA_1 \perp c$.

2) $AA_1 \perp c$, $PA_1 \perp c$. Тоді $(AA_1P) \perp c$ і $\angle AA_1P$ – лінійний кут двогранного кута $\alpha c\beta$. Позначимо його міру як φ.

3) Маємо: $c \perp (AA_1P)$, $a \parallel c$. Тоді $a \perp (AA_1P)$. Отже, $a \perp AP$ і $\angle APB = 90°$.

4) З $\triangle APB$ ($\angle P = 90°$): $AP = \sqrt{AB^2 - PB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

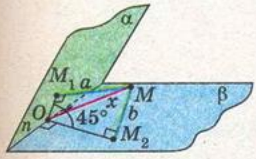
5) З $\triangle AA_1P$ за теоремою косинусів: $AP^2 = AA_1{}^2 + A_1P^2 - 2\,AA_1 \cdot A_1P\cos\varphi$,

$$\cos\varphi = \frac{4^2 + 3^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 3} = 0,\ \varphi = 90°.$$

Відповідь: 90°.

Приклад 2. Точка M міститься всередині двогранного кута, який дорівнює 45°, і віддалена від його граней на a см і b см. Знайдіть відстань від точки M до ребра даного кута.

Розв'язання



Мал. 2.9

Нехай M_1 і M_2 – проекції M на грані α і β даного двогранного кута (мал. 2.9). Тоді $MM_1 = a$, $MM_2 = b$.

1) Проведемо з точки M_2 перпендикуляр на ребро даного двогранного кута n. Маємо: $MM_2 \perp \beta$, $M_2O \perp n$. Тоді $MO \perp n$ (за ТТП)* і $OM \triangleq x$ – шукана відстань.

2) Маємо: $M_1O \perp n$, $M_2O \perp n$. Тоді $\angle M_1OM_2$ – лінійний кут двогранного кута $\alpha n\beta$, $\angle M_1OM_2 = 45°$.

3) У $\triangle OM_1M$ ($\angle M_1 = 90°$): $\angle M_1OM \triangleq \gamma$, $\sin\gamma = \dfrac{a}{x}$.

4) З $\triangle OM_2M$ ($\angle M_1 = 90°$, $\angle M_1OM = 45° - \gamma$): $x \cdot \sin(45° - \gamma) = b$.

5) Маємо: $x\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\gamma - \sin\gamma) = b$, $x\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{1 - \left(\dfrac{a}{x}\right)^2} - \dfrac{a}{x}\right) = b$,

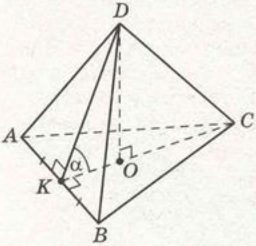
$$\sqrt{2}(\sqrt{x^2 - a^2} - a) = 2b,\ x = \sqrt{(\sqrt{2}b + a)^2 + a^2}\ \text{(оскільки } x > 0).$$

Відповідь: $\sqrt{(\sqrt{2}b + a)^2 + a^2}$.

* ТТП – скорочення словосполучення «теорема про три перпендикуляри». Надалі замість посилання на назву цієї теореми будемо писати ТТП.

Приклад 3. Знайдіть міру двогранного кута при ребрі правильного тетраедра.

Розв'язання



Мал. 2.10

1) Нехай DO – висота правильного тетраедра $DABC$ (мал. 2.10). Тоді O – центр правильного трикутника ABC; $(CO) \perp AB$ і (CO) ділить відрізок AB навпіл.

2) У правильному трикутнику ADB медіана $DK \perp AB$.

3) $AB \perp KC$ і $AB \perp KD$. Тоді $(KDC) \perp AB$ і $\angle DKC$ є лінійним кутом двогранного кута тетраедра при ребрі AB. Позначимо його як α.

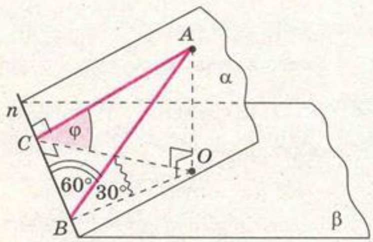
4) Позначимо довжину ребра даного тетраедра через a. З $\triangle DOK$ ($\angle O = 90°$):

$$\cos\alpha = KO : DK = \frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\arccos\frac{1}{3}$.

Приклад 4. У одній грані двогранного кута розміщено прямокутний трикутник ABC так, що катет BC належить ребру цього кута. Знайдіть міру двогранного кута, якщо відрізок AB нахилений до другої його грані під кутом 30°, а $\angle ABC = 60°$ (мал. 2.11).

Розв'язання



Мал. 2.11

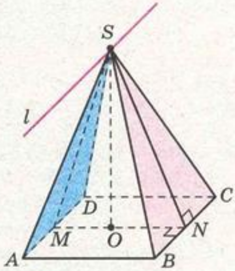
1) За побудовою $AO \perp \beta$. Тоді $OB = \text{Пр}_\beta AB$ і $\angle(AB; \beta) = \angle ABO = 30°$.
2) Маємо: $AO \perp \beta$, $AC \perp n$. Тоді (за ТТП) $OC \perp n$.
3) $AC \perp n$, $OC \perp n$. Тоді $(ACO) \perp n$ і $\angle ACO$ – лінійний кут даного двогранного кута, позначимо його як φ.
4) За теоремою про три синуси: $\sin(\angle ABO) = \sin\varphi \cdot \sin(\angle ADC)$.
5) Маємо: $\sin 30° = \sin\varphi \cdot \sin 60°$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Відповідь: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

П р и к л а д 5. Усі ребра чотирикутної піраміди $SABCD$ мають однакову довжину. Знайдіть міру двогранного кута між гранями SBC і SAD.

Р о з в ' я з а н н я

1) За умовою всі ребра даної піраміди рівні між собою. Тоді основа O її висоти SO є центром кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$ (мал. 2.12).



Мал. 2.12

2) Маємо для чотирикутника $ABCD$:
- усі сторони рівні – тоді це ромб;
- він вписаний – тоді це квадрат (оскільки сума його протилежних кутів, які є рівними, як кути ромба, складає 180°).

3) (SBC) містить пряму BC; (SAD) містить пряму AD; $BC \parallel AD$. Тоді площини SBC і SAD перетинаються по прямій $l \parallel BC \parallel AD$.

4) $ABCD$ – квадрат. Проведемо у (ABC) через O пряму $MN \parallel AB$. Маємо:
- $ON \perp BC$, $SO \perp (ABC) \to SN \perp BC$ (за ТТП);
- аналогічно, $SM \perp AD$;
- $l \parallel BC \parallel AD \to l \perp SN, l \perp SM$.

Тоді $\angle MSN$ – лінійний кут шуканого двогранного кута.

5) Позначимо довжину ребра піраміди як a. Тоді

$$SM = SN = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AB = a.$$

З $\triangle MSN$ за теоремою косинусів маємо:

$$a^2 = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot 3}{4} - 2 \cdot \frac{a^2 \cdot 3}{4}\cos\varphi, \ \cos\varphi = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\arccos\frac{1}{3}$.

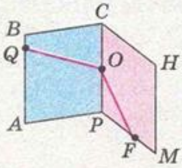
Завдання 9

1°. Знайдіть в оточенні приклади двогранних кутів. Укажіть їхні грані, ребра, лінійні кути.

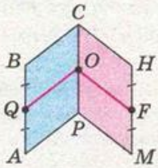
2°. Зігніть два аркуші паперу так, щоб вони ілюстрували два двогранні кути. Покажіть на їх прикладі, як розмістити два двогранні кути, щоб отримати: 1) необмежену чотирикутну призму; 2) необмежену трикутну призму; 3) двогранний кут; 4) тетраедр.

3°. Знайдіть міри двогранних кутів, які утворилися при перетині двох площин, якщо кут між даними площинами дорівнює: 1) 30°; 2) 24°; 3) 90°; 4) α. Чи може α перебільшувати 90°?

4. На малюнку 2.13 зображено лінійний кут QOF двогранного кута при ребрі PC. Чи є помилка на малюнку, якщо чотирикутники $ABCP$ і $PCHM$ є: 1) квадратами; 2) ромбами?



Мал. 2.13



Мал. 2.14

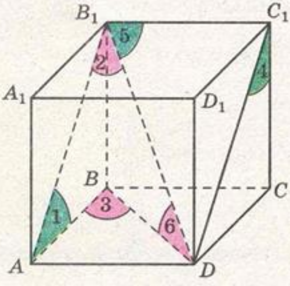
5. На малюнку 2.14 зображено лінійний кут QOF двогранного кута при ребрі PC. Чи є помилка на малюнку, якщо чотирикутники $ABCP$ і $PCHM$ є: 1) квадратами; 2) ромбами?

6. Доведіть, якщо грані двох двогранних кутів паралельні, то і ребра їх паралельні.

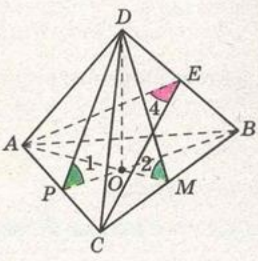
7. Чи є правильним твердження, обернене до наведеного у задачі 6? Чому?

8. Доведіть, якщо грані двох двогранних кутів відповідно паралельні, то ці двогранні кути або рівні, або в сумі складають 180°.

9. На малюнку 2.15 зображено прямокутний паралелепіпед. Які з позначених кутів можна записати як лінійні кути двогранних кутів цього паралелепіпеда? Укажіть грані та ребра відповідних двогранних кутів.



Мал. 2.15

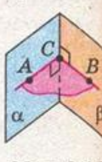


Мал. 2.16

10. На малюнку 2.16 зображено правильний тетраедр. Точки P, M, E – позначають середини його ребер, а точка O – центр основи. Розгляньте кожний з позначених кутів як лінійний кут двогранного кута й вкажіть грані та ребро останнього.

11. Зобразіть правильну чотирикутну піраміду й побудуйте зображення лінійних кутів двогранного кута: 1) при ребрі її основи; 2) при її бічному ребрі; 3) що утворює її бічна грань з площиною, яка містить ребро цієї грані та висоту піраміди. Відповідь обґрунтуйте.

12. Знайдіть за малюнком 2.17 міру двогранного кута, утвореного півплощинами α і β, якщо відстані між даними точками дорівнюють:



Мал. 2.17

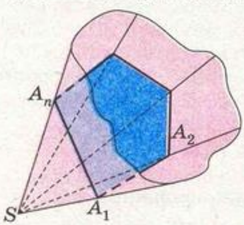
1) $AC = 3$, $CB = 4$, $AB = 5$; 2) $AC = 2$, $CB = 3$, $AB = \sqrt{7}$.

13. Двогранний кут дорівнює 45°. На одній з граней дано точку, яка знаходиться на відстані $\sqrt{128}$ м від другої грані. Знайдіть відстань від цієї точки до ребра кута.
14. Точка, взята на одній з граней двогранного кута, віддалена від його ребра на $\sqrt{48}$ см, а від другої грані – на $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть міру двогранного кута.
15. У гранях двогранного кута проведено прямі a і b, паралельні його ребру, на відстані від нього 10 см і 6 см відповідно. Знайдіть міру цього двогранного кута, якщо відстань між прямими a і b дорівнює 14 см.
16. Двогранний кут дорівнює 30°. Площина α перетинає грані двогранного кута по паралельних прямих, віддалених від ребра двогранного кута на $2\sqrt{3}$ см і 6 см. Знайдіть відстань від ребра двогранного кута до площини α.
17*. Рівносторонній трикутник ABC лежить в одній з граней двогранного кута. При цьому його сторона AB належить ребру даного двогранного кута. Відстань від вершини C трикутника до другої грані двогранного кут дорівнює 2 см, довжина сторони трикутника ABC дорівнює $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см. Знайдіть міру двогранного кута.
18*. Дано гострий двогранний кут. У одній з його граней провели пряму під кутом 30° до другої грані і під кутом 45° – до його ребра. Знайдіть міру даного двогранного кута.
19*. В одній з граней двогранного кута міри α провели пряму, що утворює з ребром цього двогранного кута кут β. Знайдіть кут нахилу прямої до другої грані даного двогранного кута.
20*. Двогранний кут дорівнює 120°. Від вершини A його лінійного кута відклали три рівні відрізки: AB і AC – вздовж сторін лінійного кута, AD – вздовж ребра двогранного кута. Знайдіть відстань від точки D до прямої BC, якщо $AB = a$.
21*. Точка M міститься всередині двогранного кута, що дорівнює 60° і віддалена від його граней на 22 см і 1 см. Знайдіть відстань від точки M до ребра двогранного кута.
22*. Точка M міститься всередині двогранного кута, що дорівнює 120° і віддалена від його граней на 22 см і 23 см. Знайдіть відстань від точки M до ребра двогранного кута.
23*. Міра двогранного кута дорівнює 60°. На його ребрі вибрано точки A і B, відстань між якими 24 см. На гранях заданого двогранного кута вибрано точки C і D такі, що $AC = BC = 13$ см, а $AD = BD = 15$ см. Знайдіть відстань між точками C і D.
24**. Побудуйте бісектор даного двогранного кута (площину, яка ділить даний двогранний кут навпіл).
25**. Знайдіть кут між бісекторами двох суміжних двогранних кутів.
26*. Знайдіть ГМТ, які містяться всередині даного двогранного кута і рівновіддалені від граней цього кута.
27**. Знайдіть геометричне місце точок, які містяться всередині двогранного кута і сума відстаней від яких до граней двогранного кута задана.
28**. Знайдіть геометричне місце точок, які містяться всередині двогранного кута і різниця відстаней від яких до граней двогранного кута задана.

§ 12 Тригранні кути. Багатогранні кути

ПОНЯТТЯ БАГАТОГРАННОГО КУТА

Двогранний кут, який вивчали у попередньому параграфі, – лише оді з можливих аналогів кута на площині. Кути на площині ми пов'язували кутами між суміжними сторонами багатокутника і вивчали їхні властиво ті. Спробуємо пов'язати поняття кута у просторі поняттям багатокутника.



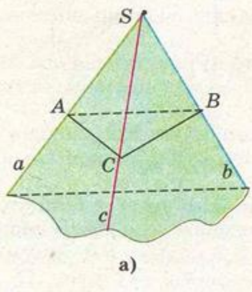
Мал. 2.18

Розглянемо плоский багатокутник $A_1A_2...A_n$ і довільну точку простору S поза площиною цьо багатокутника. Множину всіх променів з поча ком у точці S, що перетинають даний багатоку ник (мал. 2.18), називають *багатогранним куто* (точніше n-гранним кутом). Точку S називают його *вершиною*, промені SA_1, SA_2, ..., SA_n – *ре рами*, плоскі кути A_1SA_2, A_2SA_3, ..., A_nSA_1 – *гр нями*.

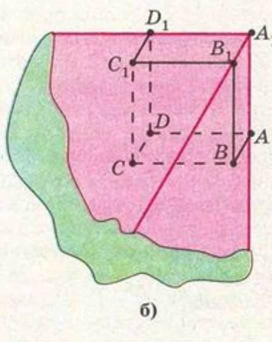
За числом сторін багатокутника матимемо відповідно *тригранні, чоти ригранні* і т. д. кути.

Позначають багатогранний кут з вершиною S і ребрами a, b, c, d ... я $Sabcd$... або як $SABCD$... – за точками A, B, C, D..., що містяться на відпо відних ребрах-променях цього кута.

Так, тригранний кут, зображений на малюнку 2.19-а, можна записат як $Sabc$, або як $SABC$.



а)



б)

Мал. 2.19

Багатогранний кут називають *опуклим*, якщо він розміщений по один бік від площини кожної з його граней. Надалі ми розглядатимемо саме опуклі багатогранні кути і, кажучи «багатогранний кут», будемо мати на увазі саме «опуклий багатогранний кут».

Зауважимо, що багатогранний кут поділяє простір на дві частини – *внутрішню* та *зовнішню*. Внутрішня область складається із множини всіх вказаних раніше променів, у тому числі й тих, що належать граням багатогранного кута.

Найпростішим з багатогранних кутів є *тригранний кут*. Його можна отримати продовженням бічних граней та ребер трикутної піраміди за її основу (мал. 2.19-а). А можна уявити, що у будь-якій призмі ми необмежено продовжуємо грані та ребра, які сходяться в одній вершині так, щоб ця вершина була вершиною тригранного кута (мал. 2.19-б).

ВЛАСТИВОСТІ ТРИГРАННИХ КУТІВ

Розпочнемо з очевидного твердження, що безпосередньо випливає з ознак перпендикулярності прямої і площини та двох площин.

- **Якщо всі плоскі кути тригранного кута прямі, то всі його двогранні кути теж прямі. І навпаки, якщо всі двогранні кути тригранного кута прямі, то всі його плоскі кути прямі.**

З доведеннями наступних двох тверджень ви можете (за бажанням) ознайомитися у додатковому матеріалі, що буде наведено пізніше (див. с. 95).

- **Міра кожного з плоских кутів тригранного кута менша за суму мір двох інших його кутів.**
- **Сума плоских кутів тригранного кута менша за 360°.**

Розглянемо ще кілька властивостей тригранного кута у вигляді доведення опорних задач.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

3 Приклад 1. **Доведіть, якщо два плоскі кути тригранного кута рівні, то проекція їх спільного ребра на площину протилежної грані є бісектрисою третього плоского кута.**

Доведення

Нехай у тригранному куті $Sabc$ $\angle(a; b) = \angle(a; c)$ (мал. 2.20). Спроектуємо довільну точку A ребра a на площину $(b; c)$: $AO \perp (b; c)$.

1) За побудовою: $AO \perp (b; c)$, $OB \perp b$, $OC \perp c$. Тоді (за ТТП): $AB \perp b$, $AC \perp c$.

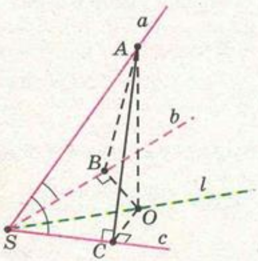
2) Прямокутні трикутники ABS і ACS рівні за гострим кутом і спільною гіпотенузою. Тоді $AC = AB$.

3) $AO \perp (b; c)$. Тоді $AO \perp OB$, $AO \perp OC$.

4) Прямокутні трикутники ABO і ACO рівні ($AC = AB$, AO – спільна). Тоді $OB = OC$.

5) У площині $(b; c)$ точка O рівновіддалена від сторін кута BSC. Тоді SO – бісектриса цього кута.

Щ. в. д.



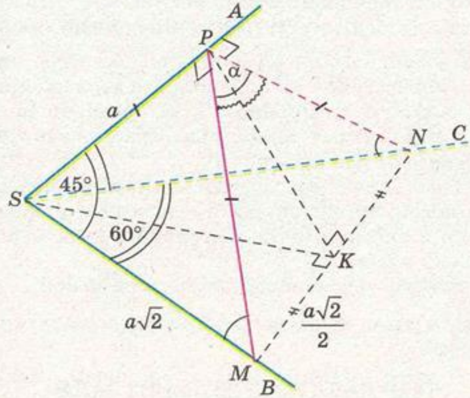
Мал. 2.20

Аналогічно доведенню твердження прикладу 1 легко довести такі важливі опорні факти.

- **У тригранному куті проти рівних плоских кутів містяться рівні двогранні кути.**
- **У тригранному куті проти рівних двогранних кутів містяться рівні плоскі кути.**
- **Якщо всі плоскі кути тригранного кута рівні, то рівні й всі його двогранні кути.**

П р и к л а д 2. У тригранному куті два плоских кути дорівнюють по 45°, а третій плоский кут складає 60°. Знайдіть міру двогранного кута, протилежного третьому плоскому куту.

Розв'язання



Мал. 2.21

Нехай $SABC$ – даний тригранний кут, $\angle ASC = \angle ASB = 45°$, $\angle BSC = 60°$ (мал. 2.21).

Позначимо довільну точку P на ребрі SA даного тригранного кута і в площинах SAB і SAC проведемо відповідно $MP \perp SA$ і $NP \perp SA$. Тоді шуканий кут $\angle MPN \triangleq \alpha$. Позначимо $a \triangleq PS$.

1) $\triangle SPM = \triangle SPN$ за катетом і гострим кутом. Тоді:

$$SM = SN = a\sqrt{2},\ PM = PN = a,$$

бо $\angle PMS = 90° - 45° = \angle PCS = \angle ASB = \angle ASC = 45°$.

2) У рівнобедреному $\triangle MPN$ ($PM = a = PN$) проведемо $PK \perp MN$. Тоді

$$MK = KN,\ \angle MPK = \angle NPK = \frac{\alpha}{2}.$$

3) У $\triangle MSN$: $SM = SN = a\sqrt{2}$, $MK = KN$, $\angle MSN = 60°$. Тоді

$$\angle SMK = \angle SNK = 60°,\ MN = a\sqrt{2},$$

$$MK = KN = a\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4) З $\triangle MPK$:

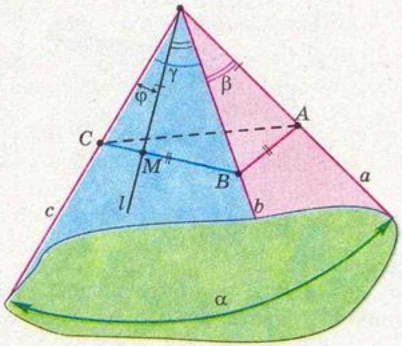
$$\sin\frac{\alpha}{2} = a\frac{\sqrt{2}}{2} : a = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\alpha}{2} = 45°,\ \alpha = 90°.$$

Відповідь: 90°.

ДЕЩО ПРО ВЛАСТИВОСТІ ТРИГРАННИХ І БАГАТОГРАННИХ КУТІВ

Теорема 1. **Міра кожного з плоских кутів тригранного кута менша за суму мір двох інших його кутів.**

Доведення



Мал. 2.22

Розглянемо кут $Sabc$ (мал. 2.22) з плоскими кутами $\angle(a; c) = \alpha$, $\angle(a; b) = \beta$, $\angle(c; b) = \gamma$.

Треба довести, що

$$\gamma < \alpha + \beta,\ \alpha < \gamma + \beta,\ \beta < \alpha + \gamma.$$

1) Нехай γ – найбільший з кутів α, β, γ. Позначимо довільним чином на променях a і b точки A і B (відповідно).
2) У грані $(c; b)$ проведемо промінь l з початком у точці S так, щоб $\angle(l; b) = \beta$. На l відкладемо $SM = SA$.
3) Маємо: $SM = SA$, $\angle MSB = \angle ASB$, SB – спільна. Тоді $\triangle MSB = \triangle ASB$. Звідси $MB = AB$.
4) Запишемо нерівність для сторін трикутника ABC:

$$AC > CB - AB = CB - MB = CM.$$

5) Для $\triangle SCA$ і $\triangle SCM$ маємо: $SM = SA$, SC – спільна, $AC > CM$. Тоді

$$\alpha > \varphi = \gamma - \beta,\ \gamma < \alpha + \beta.$$

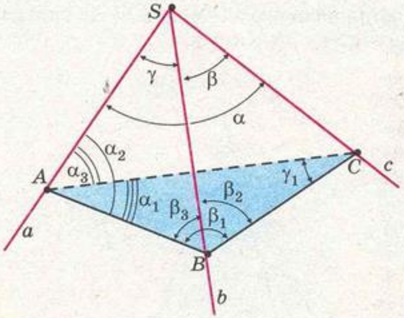
6) Кут γ – найбільший з кутів α, β, γ. Тоді:

$$\alpha < \gamma < \alpha + \beta < \gamma + \beta,\ \alpha < \gamma + \beta.$$

Аналогічно маємо, що $\beta < \alpha + \gamma$.
Теорему доведено.

Теорема 2. Сума плоских кутів тригранного кута менша за 360°.

Доведення



Мал. 2.23

Нехай маємо тригранний кут $Sabc$ (мал. 2.23) з плоскими кутами $\angle(a; c) = \alpha$, $\angle(b; c) = \beta$, $\angle(a; b) = \gamma$. Треба довести, що $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$.

1) Перетнемо даний тригранний кут довільною площиною – у перерізі маємо $\triangle ABC$.

2) Позначимо кути $\triangle ABC$ так: $\angle A \triangleq \alpha_1$, $\angle B \triangleq \beta_1$, $\angle C \triangleq \gamma_1$.

Позначимо два інші плоскі кути у кожному з утворених тригранних кутів:

при вершині A – як α_2, α_3;
при вершині B – як β_2, β_3;
при вершині C – як γ_2, γ_3.

3) За властивістю 1:

$$\alpha_1 < \alpha_2 + \alpha_3; \ \ \beta_1 < \beta_2 + \beta_3; \ \ \gamma_1 < \gamma_2 + \gamma_3.$$

Додамо ці нерівності й врахуємо, що сума кутів трикутника ABC дорівнює π:

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \beta_2 + \beta_3 + \gamma_2 + \gamma_3 > \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi, \ \ \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_2 + \beta_3 + \gamma_2 + \gamma_3 > \pi.$$

4) Додамо до обох частин останньої нерівності $(\alpha + \beta + \gamma)$. Отримаємо у лівій частині суму всіх кутів трикутників ASB, ASC і BSC:

$$3 \cdot \pi = \alpha + \beta + \gamma + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_2 + \beta_3 + \gamma_2 + \gamma_3 > \alpha + \beta + \gamma + \pi.$$

Звідси $\alpha + \beta + \gamma < 3 \cdot \pi - \pi = 2\pi$.

Теорему доведено.

Зауваження. Для багатогранного кута аналогічно тому, як ми довели властивість 2 тригранного кута, маємо, що сума його плоских кутів менша за різницю суми кутів n трикутників $(A_1SA_2, \ldots, A_nSA_1)$ і суми кутів плоского опуклого n-кутника $(A_1A_2 \ldots A_n)$:

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots < n \cdot \pi - \pi\,(n - 2) = 2\pi.$$

Маємо: **в опуклому багатогранному куті сума плоских кутів менша за 360°.**

Доведемо *кілька властивостей, що пов'язують міри плоских кутів тригранного кута з мірою його двогранних кутів.*

ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ ДЛЯ ТРИГРАННОГО КУТА

Т Теорема 3. **Якщо α, β, γ – плоскі кути тригранного кута, а φ – лінійний кут двогранного кута, протилежного до γ, то**

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi.$$

Доведення

Нехай у тригранному куті $Sabc$: $\angle(b; c) = \alpha$, $\angle(a; c) = \beta$, $\angle(a; b) = \gamma$.

Випадок I: <u>α, β – гострі, γ – довільний</u> (мал. 2.24).

1) У довільній точці $C \in c$ проведемо в гранях $(b; c)$ і $(a; c)$ перпендикуляри $BC \perp c$ і $AC \perp c$. Тоді $\angle BCA = \varphi$, як лінійний кут двогранного кута при ребрі c.

2) З прямокутного трикутника SCB ($\angle C = 90°$):

$$SB = \frac{SC}{\cos\alpha},\ BC = SC\operatorname{tg}\alpha.$$

3) З прямокутного трикутника SCA ($\angle C = 90°$):

$$SA = \frac{SC}{\cos\beta},\ BC = SC\operatorname{tg}\beta.$$

4) З трикутника SAB ($\angle S = \gamma$) за теоремою косинусів:

$$AB^2 = SB^2 + SA^2 - 2SA\cdot SB\cos\gamma = \frac{SC^2}{\cos^2\alpha} + \frac{SC^2}{\cos^2\beta} - 2\frac{SC^2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

5) З трикутника ACB ($\angle C = \varphi$) за теоремою косинусів:

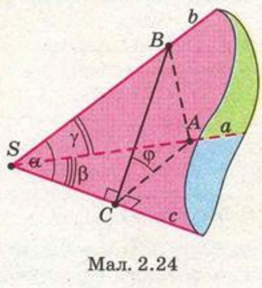
$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC\cdot AC\cos\varphi = SC^2\operatorname{tg}^2\alpha + SC^2\operatorname{tg}^2\beta - 2SC^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

6) Порівняємо вирази для AB^2 з п. 4–5 і *отримаємо шукане співвідношення.*

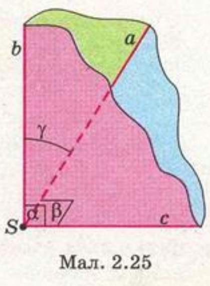
Випадок II: <u>α, β – прямі, γ – довільний</u> (мал. 2.25).

Кут γ є лінійним кутом двогранного кута при ребрі c, тобто $\gamma \equiv \varphi$; $\sin\alpha = \sin\beta = \sin 90° = 1$; $\cos\alpha = \cos\beta = \cos 90° = 0$.

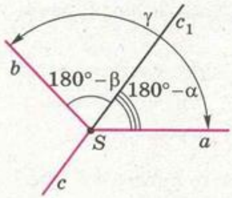
Співвідношення умови виконується.



Мал. 2.24



Мал. 2.25



Мал. 2.26

Випадок III: α, β – тупі, γ – довільний.

Проведемо промінь c_1 – доповняльний до променя c (мал. 2.26). Тоді для тригранного кута $Sabc_1$ маємо випадок I:

$$\cos\gamma = \cos(180^\circ - \alpha)\cos(180^\circ - \beta) +$$
$$+ \sin(180^\circ - \alpha)\sin(180^\circ - \beta)\cos\varphi.$$

Після спрощення *маємо твердження умови* для кута $Sabc$.

Аналогічно доводяться всі інші випадки (здійсніть це самостійно).

Теорему доведено.

ТЕОРЕМА ПРО ТРИ КОСИНУСИ

Якщо двогранний кут тригранного кута прямий, то косинус протилежного плоского кута дорівнює добутку косинусів двох інших його кутів. У позначеннях, що введено у теоремі 3:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta.$$

Це твердження, яке називають «*теоремою про три косинуси*», є наслідком теореми 3 – безпосередньо випливає з неї у випадку, коли φ дорівнює 90°:

$$\cos\varphi = \cos 90^\circ = 0, \cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi = \cos\alpha\cos\beta.$$

ТЕОРЕМА СИНУСІВ ДЛЯ ТРИГРАННОГО КУТА

Теорема 4. **Якщо α, β, γ – плоскі кути тригранного кута, а φ_α, φ_β, φ_γ – лінійні кути протилежних їм двогранних кутів, то**

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi_\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\varphi_\beta} = \frac{\sin\gamma}{\sin\varphi_\gamma}.$$

Доведення

1) З теореми косинусів для тригранного кута: $\cos\varphi_\gamma = \dfrac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$.

2) Розглянемо квадрат шуканого відношення і скористаємося п. 1:

$$\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\varphi_\gamma}\right)^2 = \frac{\sin^2\gamma}{1-\cos^2\varphi_\gamma} = \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha\sin^2\beta - (\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta)^2} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) - (\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta)^2} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Ми отримали вираз, симетричний відносно α, β, γ. Тоді квадрати двох інших шуканих відношень мають такий самий вигляд (переконайтеся в цьому самостійно). Значення синусів кутів, що розглядаються, не можуть бути від'ємними. Тоді

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi_\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\varphi_\beta} = \frac{\sin\gamma}{\sin\varphi_\gamma}.$$

Теорему доведено.

Т Теорема 5. **Якщо всі плоскі кути тригранного кута рівні, то рівні й всі його двогранні кути.**

Доведення

Нехай α, β, γ – плоскі кути тригранного кута, а φ_α, φ_β, φ_γ – лінійні кути протилежних їм двогранних кутів. Треба довести: якщо $\alpha = \beta = \gamma$, то $\varphi_\alpha = \varphi_\beta = \varphi_\gamma$.

За теоремою косинусів і рівності всіх плоских кутів маємо:

$$\cos\varphi_\alpha = \cos\varphi_\beta = \cos\varphi_\gamma = \frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Враховуючи, що міра двогранного кута змінюється в межах від 0° до 90°, маємо:

$$\varphi_\alpha = \varphi_\beta = \varphi_\gamma.$$

Що і вимагалося довести.

Н **Якщо всі плоскі кути багатогранного кута рівні, то рівні й всі його двогранні кути.**

Для доведення цього твердження достатньо провести площини через вершину й ребра багатогранного кута так, щоб утворилися тригранні кути.

Т Теорема 6. **Бісектори двогранних кутів тригранного кута перетинаються по одному променю.**

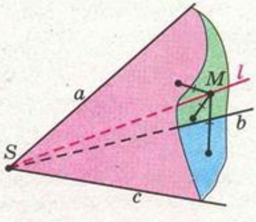
Доведення

Нехай маємо тригранний кут $Sabc$, бісектори двогранних кутів при ребрах a і b перетинаються по променю l (мал. 2.27). Розглянемо довільну точку M променя l.

1) За властивістю бісектора двогранного кута всі його точки рівновіддалені від граней цього кута (с. 85). Тоді для точки M, як точки, що належить бісектору двогранного кута, при:

– ребрі a – $\rho(M; (a; b)) = \rho(M; (a; c))$;

– ребрі b – $\rho(M; (b; a)) = \rho(M; (b; c))$.



Мал. 2.27

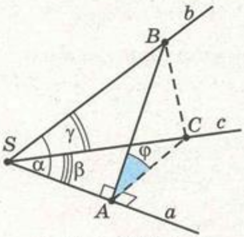
2) Маємо: $\rho(M; (a; c)) = \rho(M; (b; c))$, тоді (див. с. 85) точка M належить бісектору двогранного кута при ребрі c.

Враховуючи, що точка M – довільна точка променя l, маємо справедливість твердження теореми.

Теорему доведено.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. У тригранному куті $SABC$ плоскі кути ASB, ASC і двогранний кут при ребрі SA дорівнюють $60°$. Знайдіть міру кута BSC.



$\alpha=\beta=\varphi=60°$, $\gamma=?$

Мал. 2.28

Розв'язання

Задано двогранний кут міри $\varphi = 60°$ при ребрі SA. Треба знайти плоский кут, який утворено променями SB і SC (мал. 2.28), позначимо його як γ.

Два інших плоских кути α і β дорівнюють по $60°$. За теоремою косинусів для тригранного кута маємо:

$$\cos\gamma = \cos60°\cos60° + \sin60°\sin60°\cos60° = \frac{5}{8}.$$

Відповідь: $\arccos\frac{5}{8}$.

Доведемо твердження, обернене до властивості 7.

Приклад 2. **Доведіть, якщо всі двогранні кути тригранного кута рівні, то рівні всі його плоскі кути.**

Доведення

Нехай α, β, γ – плоскі кути тригранного кута, а φ_α, φ_β, φ_γ – лінійні кути протилежних їм двогранних кутів. Треба довести: якщо $\varphi_\alpha = \varphi_\beta = \varphi_\gamma \triangleq \varphi$, то $\alpha = \beta = \gamma$.

1) За теоремою синусів для тригранного кута маємо:

$$\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma.$$

Кожен з кутів α, β, γ може змінюватися від $0°$ до $180°$. Тоді можливі випадки: $\alpha = \beta = \gamma$; $\gamma = \beta = 180° - \alpha$; $\alpha = \beta$ і $\gamma = 180° - \alpha$.

2) Маємо: $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$, $\varphi_\alpha = \varphi_\beta = \varphi_\gamma = \varphi$. Тоді за теоремою косинусів для тригранного кута:

$$\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta = \cos\alpha - \cos\gamma\cos\beta = \cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma.$$

3) Якщо $\gamma = \beta = 180° - \alpha$, маємо: $\cos\beta = \cos\gamma = -\cos\alpha$. Тоді (з п. 2)

$$-\cos\alpha + \cos^2\alpha = \cos\alpha - \cos^2\alpha, \text{ тобто } \cos\alpha = 1 \text{ або } \cos\alpha = 0.$$

Перший розв'язок не має змісту, за другим $\alpha = 90° = \beta = \gamma$.

Аналогічно попередньому, випадок $\alpha = \beta$ і $\gamma = 180° - \alpha$ можливий, якщо всі плоскі кути прямі.

Твердження умови доведено.

Завдання 10

1°. Знайдіть в оточенні приклади тригранних кутів, укажіть їх вершину, грані й ребра.

2°. На моделі тригранного кута побудуйте лінії перетину його граней з площиною, що перпендикулярна до одного з його ребер.

3°. Укажіть число вершин, граней і ребер: 1) шестигранного кута; 2) n-гранного кута.

4°. Багатогранний кут має 12 ребер. Скільки граней він має?

5°. Чи можуть усі плоскі кути тригранного кута бути: 1) тупими; 2) прямими; 3) гострими? Чому?

6. Чи можна скласти тригранний кут з такими плоскими кутами: 1) 158°, 171°, 132°; 2) 103°, 96°, 78°; 3) 112°, 164°, 95°; 4) 82°, 67°, 151°? Чому?

7. Усі плоскі кути тригранного кута прямі. Точка A знаходиться всередині тригранного кута на відстані 4 см, 4 см і 6 см від його ребер. Знайдіть відстань між точкою A і вершиною тригранного кута.

8. Усі плоскі кути тригранного кута прямі. Точка P знаходиться всередині тригранного кута на відстані $3\sqrt{5}$ см від його вершини і на відстані 5 см і 7 см від двох його ребер. Знайдіть відстань від точки P до третього ребра.

9. Усі плоскі кути тригранного кута дорівнюють 60°. Знайдіть його двогранні кути.

10. У тригранному куті плоскі кути дорівнюють 60°, 60° і 90°. Знайдіть міри двогранних кутів, які лежать проти рівних плоских кутів.

11. У тригранному куті два плоских кути по 45°, а третій дорівнює 60°. Знайдіть міри двогранних кутів.

12. Доведіть, якщо в тригранному куті два двогранних кути прямі, то і протилежні до них плоскі кути теж прямі.

13*. Усі плоскі кути тригранного кута дорівнюють 60°. Через точку A одного з ребер кута на відстані a від вершини провели площину, перпендикулярну до цього ребра. Ця площина перетинає два інших ребра в точках B і C. Знайдіть периметр трикутника ABC.

14*. Кожний з плоских кутів тригранного кута дорівнює α. Знайдіть кут між ребром і протилежною гранню цього кута.

15*. У тригранному куті кожен з плоских кутів дорівнює α. Знайдіть міри двогранних кутів.

16*. У тригранному куті кожен з двогранних кутів дорівнює φ. Знайдіть міри плоских кутів.

17*. Кожний двогранний кут тригранного кута дорівнює φ. Всередині кута на відстані a від його вершини міститься точка, рівновіддалена від усіх граней цього кута. Знайдіть цю відстань.

18*. З вершини тригранного кута, всі плоскі кути якого прямі, проведено перпендикуляр до площини, яка перетинає всі ребра цього кута. Доведіть, що основою цього перпендикуляра є ортоцентр (точка перетину висот) трикутника перерізу.

19*. Чи можна тригранний кут, усі плоскі кути якого різні, перетнути площиною так, щоб у перерізі утворився: 1*) рівнобедрений трикутник; 2*) прямокутний трикутник; 3**) правильний трикутник?

20*. Чи можна чотиригранний кут, усі плоскі кути якого різні, перетнути площиною так, щоб у перерізі утворилася така фігура: 1*) трапеція; 2**) прямокутна трапеція; 3**) паралелограм?

21.** У тригранному куті через бісектриси граней проведено площини, які перпендикулярні до цих граней. Доведіть, що ці три площини перетинаються по одній прямій.

22.** У тригранному куті через бісектрису кожної з граней і протилежне до цієї грані ребро проведено площину. Доведіть, що ці три площини перетинаються по одній прямій.

ПИТАННЯ НА УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗНАНЬ ЗА РОЗДІЛОМ 2

1. Чи можуть усі двогранні кути тригранного кута бути прямими?

2. Чи можуть усі плоскі кути тригранного кута бути прямими?

3. Чи можуть усі плоскі кути чотиригранного кута бути прямими?

4. Чи можуть усі двогранні кути чотиригранного кута бути прямими?

5. Чи правильно, що в тригранному куті проти рівних плоских кутів лежать рівні двогранні кути? Відповідь обґрунтуйте.

6. Чи є правильним твердження, обернене до попереднього? Відповідь обґрунтуйте.

7. Зобразіть правильну піраміду й побудуйте зображення лінійних кутів двогранного кута при ребрі її основи та при її бічному ребрі у випадку, коли ця піраміда: **1)** трикутна; **2)** чотирикутна; **3*)** шестикутна; **4*)** n-кутна.

8. Чи є правильним твердження: якщо всі плоскі кути тригранного кута ріні, то рівні й усі його двогранні кути? Відповідь обґрунтуйте.

9. Чи є правильним твердження, обернене до попереднього? Відповідь обґрунтуйте.

10*. Міри двогранних кутів, що утворилися при перетині двох паралельних площин третьою, дорівнюють α і β. Чи можна визначити $\cos\alpha : \cos\beta$? Відповідь обґрунтуйте.

11*. Пряма міститься всередині двогранного кута міри φ. Відомі відстані від неї до кожної з граней даного кута, яким ця пряма паралельна. Чи можна визначити відстань від даної прямої до ребра двогранного кута? Чому?

12*. Кінці відрізка, довжина якого дорівнює l, належать граням прямого двогранного кута. Відомі міри кутів нахилу відрізка до площин граней. Як визначити: **1)** довжини проекцій відрізка на площини граней даного двогранного кута; **2)** міру кута між вказаним відрізком і ребром кута?

13*. Кожний плоский кут тригранного кута дорівнює α. Як знайти міри його двогранних кутів і межі, в яких може змінюватися значення α?

14*. Кожний двогранний кут тригранного кута дорівнює φ. Як знайти міри його плоских кутів і межі, в яких може змінюватися значення φ?

15*. Дано тетраедр. Як обчислити міру двогранного кута при якомусь з його ребер, якщо можна здійснювати виміри лише на його поверхні?

16*. Чи можна даний тригранний кут перерізати площиною так, щоб ця площина утворювала з усіма його ребрами рівні кути? Відповідь обґрунтуйте.

Розділ 3

ТІЛА. БАГАТОГРАННИКИ. ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Ви вивчали багатогранники та тіла обертання наприкінці дев'ятого класу, потім у десятому і одинадцятому класах під час вивчення майже всіх тем стереометрії, розв'язували задачі на багатогранники, ознайомилися з певними їх властивостями. Так навіщо знову повертатися до цієї теми?

Усе наше оточення складається з просторових фігур, і головна мета стереометрії – дослідити властивості цих фігур та навчитися їх використовувати. Жодну конструкцію, машину, будівлю неможливо побудувати без володіння такими знаннями. І фізики, і хіміки, і біологи, і астрономи у своїх дослідженнях ураховують геометричні форми об'єктів, які вони вивчають.

У цьому розділі ми систематизуємо та узагальнимо ваші знання про просторові тіла, дещо їх розширимо та будемо застосовувати набуте до роз'язування задач.

§ 13 Тіла

Цей параграф – загальний огляд понять про просторові тіла. Ви вже ознайомилися з основними видами просторових фігур. Якщо їх розглядати разом із точками, що містяться всередині фігури (*внутрішніми точками*), – маємо сукупність точок, що називають *тілом*. Так, відрізняють *сферу* – множину точок, рівновіддалених від певної точки простору на певну відстань, і *кулю* – тіло, множина точок якого не перевищує таку відстань.

Узагальнимо поняття про тіла, з якими вже ознайомилися, а після того пошукаємо загальне визначення тіла.

ПРИЗМА ТА ЦИЛІНДР

Візьмемо плоский багатокутник M та довільну пряму l, яка перетинає його площину. Перенесемо M паралельно вздовж прямої l в положення M_1 (мал. 3.1). Сполучимо всі відповідні точки багатокутників M і M_1 – маємо відрізки, паралельні l, кінці яких належать M і M_1. Тіло, яке є об'єднанням усіх проведених нами відрізків, називається *призмою* (з грец. – «щось спиляне»).

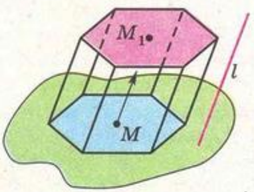
Поверхня призми складається з *основ* (багатокутників M і M_1) та *бічної поверхні* – *бічних граней* – паралелограмів, побудованих на відповідних сторонах основ.

Відрізки, які сполучають відповідні вершини основ, – *бічні ребра* призми.

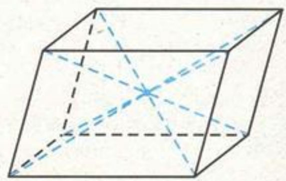
Називають призми за числом сторін багатокутника основи – трикутна, чотирикутна, ..., n-кутна.

Якщо бічні ребра перпендикулярні до основи, то кажуть, що призма – *пряма*. Її бічні грані – прямокутники. Інші призми – *похилі*.

Якщо основа призми паралелограм, то призма – *паралелепіпед* (мал. 3.2). Усі її грані – паралелограми, а діагоналі перетинаються в одній точці (пригадайте доведення з курсу 10 класу, повернемося до нього на с. 120).



Мал. 3.1



Мал. 3.2

Пряма призма, в основі якої прямокутник, – *прямокутний паралелепіпед*. Усі його грані – прямокутники. *Куб* – окремий випадок прямокутного паралелепіпеда.

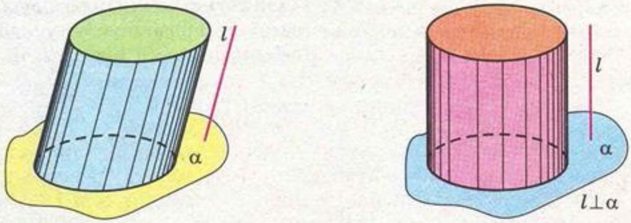
Призму називають правильною, якщо вона пряма і в її основі правильний багатокутник. *Куб* є різновидом правильної призми.

Якщо замінити у визначенні призми багатокутник M на круг (мал. 3.3-а), отримаємо визначення *кругового циліндра* (від грец. «кіліндрос»). Відрізки, які сполучають відповідні точки кіл основ, називають *твірними*. Множину всіх твірних циліндра називають *бічною поверхнею циліндра**.

Якщо твірні перпендикулярні до основи, то циліндр *прямий* (мал. 3.3-б). У курсі шкільної геометрії розглядаємо саме *прямий круговий циліндр* і називаємо його просто циліндром.

---

* Якщо за основу M взяти довільну плоску фігуру, отримаємо *узагальнений циліндр*, окремими випадками якого є циліндр і призма.



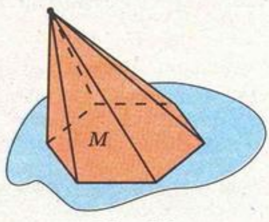
а) б)

Мал. 3.3

ПІРАМІДА ТА КОНУС

Слово «піраміда» в геометрію ввели греки, які, як вважають, запозичили його в єгиптян (пригадайте знамениті піраміди Єгипту). За іншою версією цей термін походить від грецького слова «пірос» (жито). Вважають, що греки випікали хлібці у формі пірамідок.

Аналогічно до визначення призми й циліндра, *піраміда* – це тіло, що складається з відрізків, які сполучають усі точки плоского багатокутника M – її *основи* – з точкою S, поза цією основою, – *вершиною* (мал. 3.4).



Мал. 3.4

Відрізки, що сполучають вершину піраміди з вершинами багатокутника основи, називають *бічними ребрами*. Трикутники, що утворилися кожною із сторін основи і бічними ребрами, які містять кінці цієї сторони основи, – *бічні грані* піраміди.

Поверхня піраміди складається з основи та *бічної поверхні* – бічних граней піраміди.

Піраміда, основою якої є n-кутник, називається *n-кутною*. Трикутну піраміду ще називають *тетраедром* (з грец. «тетра» – чотири, і «едра» – бік, грань).

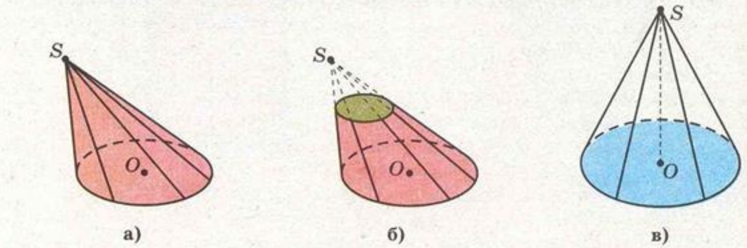
Якщо основою піраміди є правильний багатокутник, а всі її бічні ребра рівні – піраміда *правильна*.

Правильну трикутну піраміду, в якої всі ребра рівні, називають *правильним тетраедром*. У правильного тетраедра всі грані – рівні між собою правильні трикутники. Зауважимо, що **правильна трикутна піраміда не обов'язково є правильним тетраедром.**

Тіло, яке одержуємо з піраміди, якщо зрізати її вершину площиною, паралельною основі, називають *зрізаною пірамідою* (мал. 3.5).

Мал. 3.5

Якщо замінити у визначенні піраміди багатокутник M на круг (мал. 3.6-а), отримаємо визначення *кругового конуса* (мал. 3.6-а) та *зрізаного конуса* (мал. 3.6-б), від грец. «конос» – загострений предмет.



Мал. 3.6

Відрізок, що сполучає вершину конуса з точкою кола основи, називають *твірною конуса*. Множина всіх твірних конуса утворює його *бічну поверхню*.

Якщо всі твірні конуса рівні – це *прямий круговий конус* (мал. 3.6-в). Його вершина проектується в центр основи. У курсі шкільної геометрії розглядаємо прямий круговий конус і називаємо його просто конусом*.

КУЛЯ ТА СФЕРА

Фігура, утворена всіма точками простору, віддаленими від даної точки O на відстань R, називається *сферою*; O – *її центр*; R – *радіус*.

Сфера обмежує *кулю* – множину точок, які розміщені на відстані від центра O, що не перевищує радіус R.

Цікаво, що хоча терміни «куля» і «сфера» різні за змістом, обидва походять від грецького «сфаїра» – куля або м'яч.

ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Нагадаємо, що далі розглядатимемо прямі кругові конус і циліндр. Тоді *циліндр* можна подати як тіло, яке утворюється під час обертання прямокутника навколо його сторони (мал. 3.7-а); *конус* – під час обертання прямокутного трикутника навколо катета (мал. 3.7-б); *кулю* – круга навколо його діаметра (мал. 3.7-в).

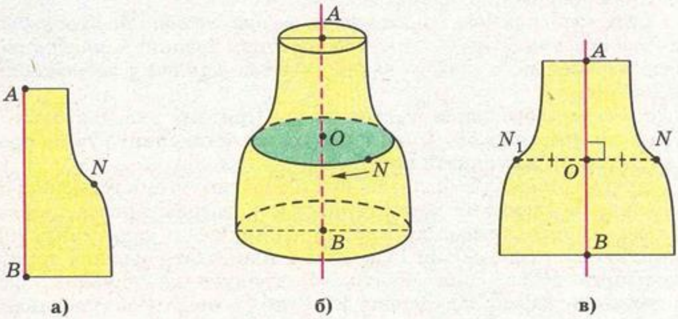
Мал. 3.7

---

* Якщо за основу M взяти довільну плоску фігуру, отримаємо *узагальнений конус*, окремими випадками якого є піраміда та конус.

Будь-яке тіло, отримане обертанням плоскої фігури (разом з усіма її внутрішніми точками) навколо осі обертання, називають *тілом обертання*.

Точки вказаних фігур під час обертання описують кола із центрами, які лежать на нерухомій прямій – *осі обертання,* у площинах, перпендикулярних до неї (мал. 3.8-а, б). Переріз, який проведено через вісь обертання фігури, називають її *осьовим перерізом*. Осьовий переріз завжди має симетрію відносно прямої – осі обертання (мал. 3.8-в).



Мал. 3.8

Площина, що містить вісь тіла обертання (площина його осьового перерізу), є його площиною симетрії. Зрозуміло, що тіло обертання має безліч таких площин симетрії.

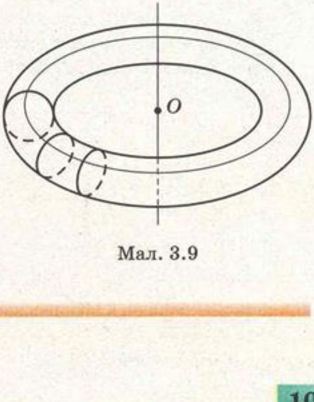
Якщо розглядати таке обертання плоскої фігури без її внутрішніх точок, отримаємо просторову *фігуру обертання* або *поверхню обертання*. Прикладом такої фігури є сфера.

Щоб задати тіло або фігуру обертання, досить задати плоску фігуру та вісь обертання.

Поверхня обертання може бути *незамкненою*. У такому розумінні кажуть про бічну поверхню конуса або циліндра. Ці поверхні складаються з множин всіх твірних цих фігур (див. раніше).

Якщо обертати параболу навколо її осі симетрії, отримаємо незамкнену поверхню обертання, яку називають *параболоїдом*.

Цікавим прикладом фігури обертання є *тор*. Це поверхня, яка утворюється під час обертання кола навколо прямої, що його не перетинає і лежить у площині початкового кола (мал. 3.9).



Мал. 3.9

ЗОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ФІГУР

Нагадаємо, що просторові фігури зображають відповідно до властивостей паралельного проектування:

1. Зображенням прямої є пряма або точка.

2. Паралельні прямі зображуються паралельними прямими, або прямими, що збігаються, або точками (кожна однією точкою).

3. Відношення, в якому точка ділить відрізок (паралельні відрізки) у зображенні й оригіналі, однакові.

За зображення фігури приймається фігура, подібна до якої-небудь її паралельної проекції. Тому у таких зображеннях повинні виконуватися властивості паралельного проектування. У всьому іншому зображення може бути довільним.

Розглянемо зображення деяких фігур. Притому випадок, коли плоска фігура проектується у відрізок (лежить в одній площині з усіма проектуючими прямими), розглядати не будемо.

Трикутник. Можна зображати довільним трикутником. Але при зображенні певних елементів трикутника треба дотримуватись властивостей паралельного проектування. Наприклад, якщо у трикутнику проведено медіану, то у зображенні їй повинна відповідати медіана трикутника-зображення; зображення центроїда трикутника повинно поділяти зображення медіани у відношенні 2 : 1, як і в оригіналі трикутника; перпендикуляр, проведений до катета прямокутного трикутника, зображується відрізком, який паралельний зображенню другого катета тощо.

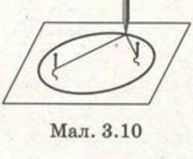
Паралелограм. Зокрема, і прямокутник, і ромб, і квадрат за властивостями паралельного проектування зображуються довільними паралелограмами.

Трапеція. За властивостями паралельного проектування зображується трапецією, але не довільною, – відношення довжин її основ повинно дорівнювати відношенню основ оригінала (оскільки відношення відрізків паралельних прямих зберігається).

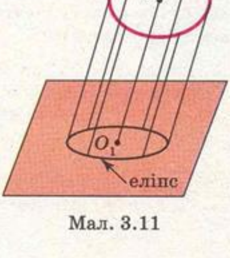
Коло. Зображенням кола є еліпс («сплющене коло»).

ЕЛІПС

Нагадаємо, що *еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох заданих точок (фокусів) є величиною сталою* (мал. 3.10).



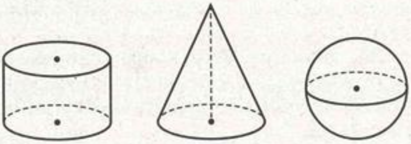
Мал. 3.10



Мал. 3.11

Паралельна проекція кола буде еліпсом (мал. 3.11). (Інколи еліпсу дають саме таке означення.) Притому зображення центра кола є центром еліпса.

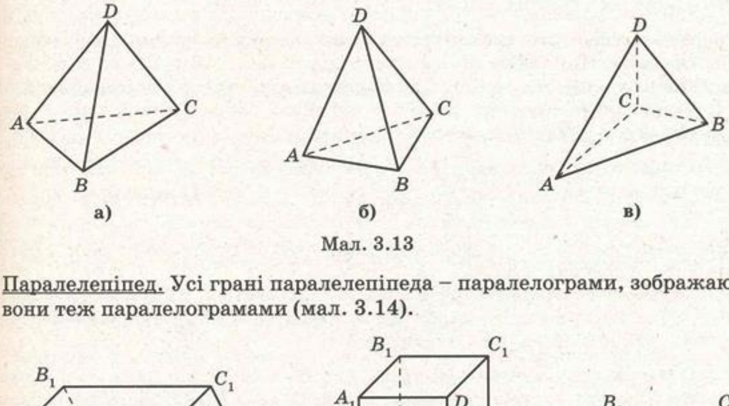
Як ви вже знаєте, еліпс використовують у зображенні циліндрів, конусів, сфер (мал. 3.12).



Мал. 3.12

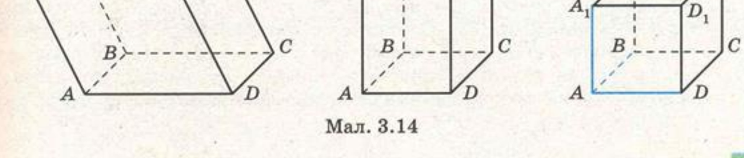
Багатогранник. Зображенням багатогранника, за умови, що всі площини граней непаралельні напряму проектування, є фігура, що складається з проекцій всіх його ребер.

Тетраедр. Зображенням тетраедра може бути довільний чотирикутник (опуклий (мал. 3.13-а, б) або неопуклий (мал. 3.13-в)), в якому проведено діагоналі. На малюнку 3.13 ребра тетраедра, які не бачимо, зображено штриховою лінією.



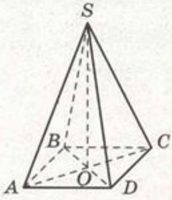
Мал. 3.13

Паралелепіпед. Усі грані паралелепіпеда – паралелограми, зображаються вони теж паралелограмами (мал. 3.14).



Мал. 3.14

Зауважимо, що зображення паралелепіпеда можна розпочинати з трьох довільних відрізків, що виходять з однієї точки (і не містяться на одній прямій) – AB, AD і AA_1 (мал. 3.14). Тоді зображення інших ребер здійснюється однозначно, бо всі грані зображаються паралелограмами.



Мал. 3.15

Піраміда. Основу піраміди зображають за сформульованими раніше властивостями паралельного проектування й відповідно до розглянутих раніше прикладів зображення багатокутників. За зображення вершини можна обрати довільну точку поза зображенням сторін багатокутника.

На малюнку 3.15 зображено правильну чотирикутну піраміду. Квадрат основи зображено паралелограмом $ABCD$. Вершина S проектується в точку O перетину його діагоналей.

Куля. Проекцією кулі (як і сфери) є коло. Тому кулю (як і сферу) зображаємо колом.

ДОВІЛЬНЕ ТІЛО

Тепер можна підсумувати розглянуті приклади й дати загальне визначення тіла. Але розпочати доведеться дещо здалеку.

У будь-якої просторової фігури можна виділити межу (границю) і внутрішню область. Так, межа кулі складається з точок відповідної сфери, а межа піраміди – із точок її основи та бічних граней.

Кажучи більш строго, назвемо точку *граничною*, якщо як завгодно близько від неї можна вказати як точки, що належать фігурі, так і точки, які не належать фігурі. Сама ця точка не обов'язково належатиме даній фігурі. Розглянемо, наприклад, фігуру, яка складається з усіх точок конуса, окрім його вершини P. Точка P – гранична для цієї фігури, хоча їй не належить.

Межа фігури – це множина її граничних точок. Фігура, яка містить свою межу, називається *замкненою*. А тому розглянутий вище конус без вершини – фігура незамкнена.

Точки фігури, які не є граничними, утворюють її внутрішню область, їх так і називають – *внутрішні* точки.

Для будь-якої внутрішньої точки існує куля, із центром у цій точці, яка повністю належить фігурі. Скажімо для точки кулі радіуса R, віддаленої від її центра на відстань $x < R$, можна взяти кулю радіуса $R - x$.

Тілом називають скінченну замкнену фігуру, в якої є внутрішні точки, межа збігається з межею внутрішньої області та будь-які дві внутрішні точки можна сполучити ламаною, яка повністю лежить у внутрішній області фігури.

У *випуклому тілі* будь-які дві внутрішні точки можна сполучити відрізком, який лежатиме в ньому. Ми вивчаємо саме опуклі тіла. Надалі будемо опускати «опуклі» і, кажучи «тіло», – мати на увазі саме «опукле тіло». У такому розумінні об'єднання двох кубів, що мають лише одну спільну точку-вершину, не є тілом.

Неважко бачити, що фігури, з якими ви ознайомилися (призма, піраміда, куля, конус, циліндр), – тіла.

А ось приклад фігур, які не є тілами: куля, «очищена» від сфери; напівпростір (простір по один бік від площини); квадрат; фігура із двох дотичних куль. Для кожної з них порушується якась умова визначення (встановіть – яка).

Межу тіла ми називаємо *поверхнею*.

Раніше ми визначали *опуклий багатогранник* як такий, що міститься по один бік від площини будь-якої своєї грані. Це відповідає нашому означенню опуклого тіла (якщо багатогранник розглядати як частину простору). Наприклад, фігура з двох кубів, які мають за спільні точки лише вершину (або одне ребро), не є опуклим багатогранником.

§ 14 Багатогранники. Правильні багатогранники

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Важливий клас тіл утворюють *багатогранники* – тіла, межа яких складається з багатокутників. Зрозуміло, що *площею поверхні багатогранника* є сума площ усіх його граней.

Нагадаємо, що ми вивчаємо опуклі багатогранники, тобто такі, що лежать по один бік від площини будь-якої своєї грані.

До елементів багатогранника, які зазначалися раніше (вершини, ребра, грані, діагоналі, плоскі кути) треба ще віднести двогранні та багатогранні кути, що утворюються гранями даного багатогранника.

Нагадаємо, що дві просторові фігури називають *рівними*, якщо вони перетворюються одна в одну рухом (тобто їх можна сумістити). У таких фігур відповідно рівними є ребра, плоскі та багатогранні кути.

Тепер, коли ми знаємо властивості багатогранних кутів, можна сформулювати *ознаку рівності багатогранників*.

Якщо в багатогранниках у відповідних вершинах сходиться однакове число відповідно рівних граней, то такі багатогранники рівні.

Для кожного опуклого багатогранника **сума числа вершин В і числа граней Г на 2 більша за число його ребер Р:**

$$В + Г - Р = 2.$$

Уперше це співвідношення виявив *Рене Декарт* близько 1620 р. У 1752 р. ту саму формулу відкрив *Леонард Ейлер*, коли описував типи опуклих багатогранників залежно від числа їхніх вершин. Нині її називають *формулою Ейлера*.

ДОВЕДЕННЯ ФОРМУЛИ ЕЙЛЕРА

Є багато доведень співвідношення Ейлера. В одному з них використовується формула для суми кутів багатогранника та поняття центрального проектування. Розглянемо це доведення.

Візьмемо ззовні багатогранника точку O поблизу будь-якої його грані та спроектуємо багатогранник на площину цієї грані із центра O. Їх проекції утворюють на площині проекції багатокутник F, що складається з «павутиння» багатокутників. Підрахуємо двома способами суму кутів δ усіх цих багатокутників.

1) Сума кутів n-кутника дорівнює $\pi(n - 2)$ для кожного з отриманих багатокутників. Додамо ці числа для всіх граней. Число членів виду πn дорівнює загальній кількості сторін усіх граней, тобто 2Р – адже кожне ребро належить двом граням. Загальна кількість доданків дорівнює кількості граней Г.

Маємо

$$\delta = \pi(2\text{Р} - 2\text{Г}).$$

2) Тепер знайдемо суми кутів при кожній вершині «павутиння» і додамо їх. Якщо вершина лежить усередині багатокутника F, то сума кутів навколо неї дорівнює 2π. Таких вершин буде $(\text{В} - k)$, k – число вершин самого багатокутника F. Їх внесок у суму δ дорівнює $2\pi(\text{В} - k)$.

Сума кутів багатокутника F дорівнює $\pi(k - 2)$. Але ми повинні врахувати цю суму двічі – як суму кутів граней і як суму кутів «розбиття».

Маємо

$$\delta = 2\pi(\text{В} - k) + 2\pi(k - 2) = 2\pi(\text{В} - 2).$$

Прирівнявши два результати $\pi(2\text{Р} - 2\text{Г}) = 2\pi(\text{В} - 2)$, – отримаємо

$$\text{В} + \text{Г} - \text{Р} = 2.$$

Що і вимагалося довести.

ПРАВИЛЬНІ БАГАТОГРАННИКИ

Багатокутник називають правильним, якщо у нього рівні сторони та кути.

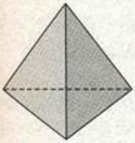
Багатогранник (маємо на увазі, що він опуклий) ***називають правильним, якщо в нього всі грані є правильними багатокутниками і в кожній вершині сходиться одне й те саме число ребер.***

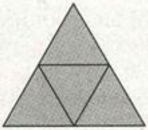
З означення і теореми 5 (с. 99) попереднього параграфа маємо, що в *кожного правильного багатогранника* рівними є всі ребра, плоскі, двогранні та багатогранні кути, а всі вершини рівновіддалені від однієї точки – *центра* правильного багатогранника.

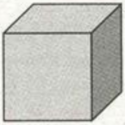
Правильних багатокутників нескінченно багато. А правильних багатогранників існує лише п'ять: чотиригранник, шестигранник, восьмигранник, дванадцятигранник і двадцятигранник.

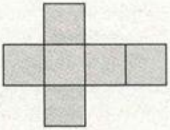
Правильний чотиригранник (мал. 3.16) обмежують чотири правильні трикутники. Його ще називають *правильним тетраедром*. Він має 4 вершини і 6 ребер. На малюнку 3.17 зображено правильний тетраедр, розгорнутий у площину однієї зі своїх граней. Таке зображення багатогранника називають його *розгорткою*.

Правильний шестигранник (мал. 3.18) має 6 граней-квадратів, 8 вершин і 12 ребер. Його ще називають *кубом*. Розгортку куба зображено на малюнку 3.19.

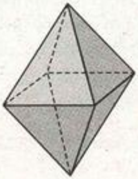

Мал. 3.16

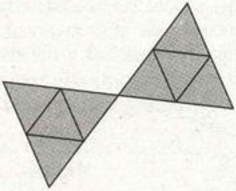

Мал. 3.17


Мал. 3.18

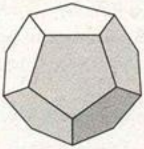

Мал. 3.19

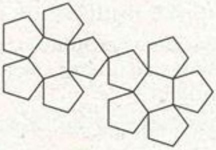
Поверхню правильного восьмигранника (*октаедра*), як і чотиригранника, утворюють правильні трикутники, але відмінність у тому, що у восьмигранника їх не чотири, а вісім (мал. 3.20). Він має 6 вершин і 12 ребер. Його розгортку зображено на малюнку 3.21.


Мал. 3.20


Мал. 3.21

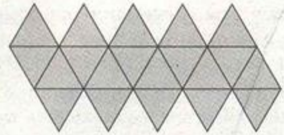
Правильний дванадцятигранник (*додекаедр*) має 12 граней (мал. 3.22). Кожна з них являє собою правильний п'ятикутник. У дванадцятигранника 20 вершин і 30 ребер. На малюнку 3.23 зображено його розгортку.


Мал. 3.22


Мал. 3.23

Правильний двадцятигранник (*ікосаедр*) обмежують 20 рівносторонніх трикутників, які сходяться у 12 вершинах (мал. 3.24). Він має 30 ребер. Його розгортку зображено на малюнку 3.25.

Мал. 3.24



Мал. 3.25

Вершини правильного багатогранника рівновіддалені від його центра. Тоді **вершини кожного з п'яти видів правильних багатогранників, у тому числі й ікосаедра, лежать на поверхні кулі.**

Дванадцять вершин ікосаедра – це максимальне число точок, які можна нанести на поверхню кулі так, щоб відстань між будь-якими двома сусідніми точками була однакова.

Цю властивість ікосаедра застосувала одна з американських фірм для виготовлення баскетбольних м'ячів. На поверхні сферичної камери-основи встановлюють 12 точок, рівномірно розділених по каркасу (це вершини ікосаедра). Машина намотує нейлонові нитки по колах, що містять кожну пару зазначених точок.

Площа поверхні правильного багатогранника (площа його розгортки) дорівнює площі правильного багатокутника його грані, взятої стільки разів, скільки граней має відповідний правильний багатогранник.

Правильні багатогранники ще називають *платоновими тілами*, хоч їх знали піфагорійці за кілька століть до Платона.

Число вершин, ребер і граней для цих багатогранників наведено у підсумковій таблиці.

Назва багатогранника	**Число вершин В**	**Число ребер Р**	**Число граней Г**
Тетраедр	4	6	4
Куб	8	12	6
Октаедр	6	12	8
Додекаедр	20	30	12
Ікосаедр	12	30	20

ЧОМУ ІСНУЄ ЛИШЕ П'ЯТЬ ПРАВИЛЬНИХ БАГАТОГРАННИКІВ

Зрозуміло, що число вершин В, число граней Г та число ребер Р кожного з правильних багатогранників задовольняють формулу Ейлера, яку ми обговорювали раніше:

$$В + Г - Р = 2.$$

Спробуємо за допомогою формули Ейлера відповісти на питання, чому існує лише п'ять правильних багатогранників?

Спочатку з'ясуємо, чому грані правильних багатогранників можуть мати форму лише трикутника, чотирикутника або п'ятикутника.

Зрозуміло, що в кожній вершині правильного багатогранника сходиться не менше ніж три грані. Правильний багатогранник – опуклий. Тоді сума плоских кутів усіх граней при спільній вершині менша за 360°. Тобто кожний з кутів грані повинен бути меншим за 120°. Тоді гранями правильного багатогранника не може бути правильний шестикутник (з кутом 120°) та правильні багатокутники із числом сторін більшим за 6 (з кутом більшим за 120°).

Розглянемо три можливі випадки.

1. Грані правильного багатогранника – трикутники.

Сума плоских кутів багатогранного кута менша за 360°. Тоді у кожній вершині сходяться 3, 4 або 5 граней і утворюється n-гранний кут, де $n \in \{3; 4; 5\}$.

Нехай загальне число граней буде x (Г $= x$). Тоді число вершин В $= \frac{3x}{n}$, а число ребер Р $= \frac{3x}{2}$. За формулою Ейлера маємо:

$$x + \frac{3x}{n} - \frac{3x}{2} = 2.$$

Звідси $x = \frac{4n}{6-n}$.

Враховуючи, що x – натуральне число, маємо:
при $n = 3$, $x = 4$ – тетраедр;
при $n = 4$, $x = 8$ – октаедр;
при $n = 5$, $x = 20$ – ікосаедр.

2. Грані правильного багатогранника – чотирикутники.

Сума плоских кутів багатогранного кута менша за 360°. Тоді у кожній вершині сходяться лише три квадрати: Г $= x$, В $= \frac{4x}{3}$, Р $= \frac{4x}{2}$. За формулою Ейлера:

$$x + \frac{4x}{3} - 2x = 2,\ x = 6.$$

Маємо куб (гексаедр).

3. Грані правильного багатогранника – п'ятикутники.

Сума плоских кутів багатогранного кута менша за 360°. Тоді у кожній вершині сходяться лише три грані: Г $= x$, В $= \frac{5x}{3}$, Р $= \frac{5x}{2}$. За формулою Ейлера:

$$x + \frac{5x}{3} - \frac{5x}{2} = 2,\ x = 12.$$

Маємо додекаедр.

ДЕЩО ЗІ СТАРОВИНИ

Здавна відомі п'ять правильних багатогранників (так званих **платонових тіл**): тетраедр, гексаедр (куб), октаедр, додекаедр та ікосаедр. Так назвали їх стародавні греки.

Тетраедр у перекладі з грецької означає чотирикутник («тетра» – *чотири*, «едра» – *сторона, грань*).

Гексаедр означає шестигранник і походить від грецького «гекса» – *шість*.

Назва *октаедр* походить від грецького «окто» – *вісім*, що означає восьмигранник.

Додекаедр означає дванадцятигранник від грецького «додека» – *дванадцять*.

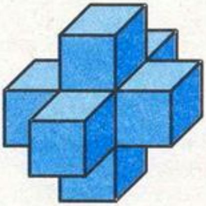
Назва *ікосаедра* походить від грецьких «ейкосі» – *двадцять* і «едра» – *сторона, грань* і, отже, означає двадцятигранник.

Окрім правильних багатогранників існують й інші тіла, що вабили вчених своєю гармонійністю.

Якщо на гранях куба добудувати куби, отримаємо так званий «гіперкуб» (мал. 3.26).

Саме таку фігуру використав *Сальвадор Далі* у картині «Гала перед розп'яттям на гіперкубі».

(Чи є гіперкуб правильним багатогранником?)



Мал. 3.26

Мал. 3.27

Фігура, зображена на малюнку 3.27, є сплетінням двох правильних тетраедрів, відкрив її *Леонардо да Вінчі*.

Пізніше, через 100 років, її «перевідкрив» *Кеплер* і дав їй назву, що в перекладі означає «восьмикутна зірка».

У давні часи геометричним фігурам, особливо правильним, надавали таємничого філософського змісту.

Так, за *Платоном*, усе в природі створено взаємодією вогню, повітря, води і землі, а основні найпростіші елементи цих стихій мають відповідно форми: тетраедра, октаедра, ікосаедра і куба. Щодо додекаедра, то Платон вважав, що саме таку форму має Всесвіт – Божественний ефір.

У XVI ст. знаменитий німецький астроном *Йоганн Кеплер* (1571–1630) пропонував модель побудови Всесвіту, що складалася з правильних багатогранників і вписаних у них сфер, – так званий «кубок Кеплера» (див. мал. 3.28).

За Кеплером, зовнішня велика сфера відповідає орбіті найвіддаленішої з відомих на той час планет – Сатурна.

Якщо в цю сферу вписати куб, а в куб знову сферу – то це буде сфера орбіти Юпітера.

У сферу Юпітера Кеплер вписує правильний тетраедр, а вписана в нього сфера відповідає орбіті Марса.

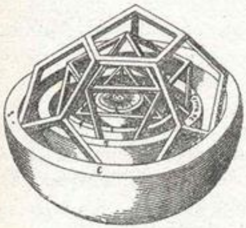
У сферу Марса вписується додекаедр і знову сфера – сфера орбіти Землі.

Далі вписується ікосаедр і сфера Венери, а після того – октаедр і сфера орбіти Меркурія.

Кеплер вважав, що кожній планеті відповідає правильний багатогранник, у який вписано сферу орбіт планети.

Правильних багатогранників існує тільки 5 – вони вже були використані ним як моделі Всесвіту. Тому Кеплер, шукаючи інші планети, шукав й інші гармонійні «правильні» форми. Він продовжував ребра і грані правильних багатогранників і отримував неопуклі так звані «зірчасті» багатогранники.

Спробуйте слідом за Кеплером і французьким математиком *Луї Пуансоном* (1777–1859) пошукати такі фігури (мал. 3.29).



Мал. 3.28

Мал. 3.29

Пізніше саме Кеплер відкрив, що траєкторії руху планет навколо Сонця є не кола, а еліпси, і «кубок Кеплера», а разом із ним і правильні багатогранники втратили ореол таємничості.

Завдання 11

1°. Знайдіть у оточенні приклади об'єктів, що мають форму багатогранників. Укажіть кількість їхніх граней, ребер, вершин, двогранних і тригранних кутів.
2°. Наведіть приклади опуклих і неопуклих багатогранників.
3°. Яка найменша кількість ребер може сходитися в одній вершині багатогранника?
4. Яка найбільша кількість ребер може сходитися в одній вершині багатогранника?
5. Яку найменшу кількість ребер може мати багатогранник?
6°. Визначіть для куба кількість: 1) двогранних кутів; 2) тригранних кутів; 3) чотиригранних кутів; 4) діагоналей.
7. Яку найменшу кількість багатогранних кутів може мати багатогранник?
8. Намалюйте багатогранник, у якого: 1) 6 вершин і 5 граней; 2) число вершин і число граней однакове.
9°. Учень вважає, що терміни «правильна чотирикутна призма» і «прямокутний паралелепіпед» означають одне й те саме. Чи правий він?
10. Чи можна вважати правильним означення: «Кубом називається правильна чотирикутна призма, у якої висота дорівнює стороні основи»?
11°. Чи існує призма, в якої немає жодної діагоналі?

12°. Чому правильну трикутну піраміду не можна назвати правильним ба-гатогранником?

13. Доведіть, що в призмі всі бічні ребра паралельні між собою.

14°. Що можна сказати про призму, всі бічні грані якої квадрати?

15. Два однакові правильні тетраедри склеїли по одній із граней. Чи буде утворена фігура правильним багатогранником? Чому?

16. Чи можна склеїти такий багатогранник, щоб коли його поставити на одну грань, то це – призма, а якщо на іншу, то це – піраміда?

17. Не користуючись малюнком, визначте, скільки двогранних кутів у трикутній призмі.

18*. Багатогранник має 12 ребер. Скільки він має: **1)** двогранних кутів; **2)** плоских кутів?

19*. Чи правильне твердження: «У кожній призмі число ребер завжди кратне 3»?

20*. Призма має 18 граней. Який багатокутник лежить у її основі?

21*. Визначте без малюнка: **1)** скільки вершин, ребер і граней має n-кутна піраміда; **2)** скільки всього плоских кутів має n-кутна піраміда.

22*. Доведіть, що число ребер піраміди – парне.

23.** Знайдіть суму всіх плоских кутів n-кутної піраміди.

24.** Чи існує піраміда, що має: **1)** 18 плоских кутів; **2)** 20 плоских кутів?

25.** Одна грань багатогранника – п'ятикутник. Чи можуть усі інші грані бути: **1)** трикутниками; **2)** чотирикутниками?

26.** Доведіть, що багатогранника, який має 7 ребер не існує.

27*. Доведіть, що багатогранник має більше ребер, ніж граней.

§ 15 Властивості призми

Мета цього параграфа – розглянути основні опорні факти стосовно властивостей призми та її окремих видів (паралелепіпеда, правильної призми, куба). Деякі з них ви вже доводили раніше, як опорні задачі, – зберемо їх тепер докупи.

З означення призми маємо ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ПРИЗМИ:

- **основи призми – рівні багатокутники, всі бічні грані – паралелограми;**
- **n-кутна призма має $2n$ вершин, $n + 2$ граней, $3n$ ребер.**

Діагональним перерізом призми називають її переріз площиною, яка проходить через паралельні діагоналі основ цієї призми. Паралельні діагоналі основ призми – паралельні та рівні відрізки. Тоді

- **діагональний переріз призми – паралелограм.**

Перпендикулярним перерізом призми називають її переріз площиною, яка перпендикулярна до бічного ребра цієї призми. Доведемо таку властивість призми.

Т Теорема 1. **Площа бічної поверхні призми дорівнює добутку периметра її перпендикулярного перерізу на довжину бічного ребра.**

Доведення

Нехай у призмі $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ (мал. 3.30) довжина бічного ребра дорівнює l, перпендикулярний переріз $C_1C_2...C_n$ має периметр $P_\perp$. Треба довести, що $S_б = l \cdot P_\perp$.

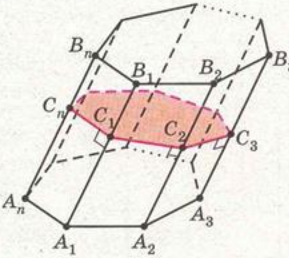
1) Перпендикулярний переріз призми проведено перпендикулярно до якогось з її ребер.

Отже, площина перерізу (за властивістю паралельних прямих) перпендикулярна до всіх ребер даної призми. Тоді відрізки C_1C_2, C_2C_3, ..., C_nC_1 є висотами паралелограмів бічних граней.

2) Площа бічної поверхні призми дорівнює сумі площ паралелограмів її бічних граней:

$$S_б = l \cdot C_1C_2 + l \cdot C_2C_3 + ... + l \cdot C_nC_1 = l \cdot P_\perp.$$

Теорему доведено.



Мал. 3.30

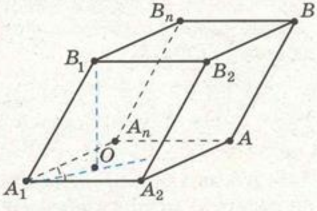
Під час розв'язування задач корисно пам'ятати такі опорні факти.

2. Якщо в похилій призмі бічне ребро утворює однакові кути із сторонами основи, які виходять з його одного кінця, то проекція ребра на площину основи є бісектрисою відповідного кута основи (мал. 3.31).

Правильність цього твердження випливає безпосередньо з властивості тригранного кута, що доведено в § 12 (опорна задача на с. 93).

Окрім того, відповідно до опорних фактів, що наведено на с. 93, маємо таке.

3. Якщо в похилій призмі дві суміжні бічні грані утворюють однакові двогранні кути з основою, то проекція на основу бічного ребра, яке належить лінії перетину двох граней вказаних двогранних кутів, є бісектрисою кута основи.



Мал. 3.31

ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

З означення маємо:

1. Усі грані паралелепіпеда – паралелограми.

З властивостей паралелограма, паралельних площин і ознаки паралельності площин маємо такі властивості паралелепіпеда.

2. Протилежні грані – паралельні та рівні.

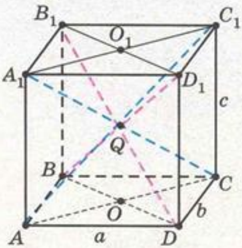
3. Усі діагоналі перетинаються в одній точці (*центрі паралелепіпеда*) й поділяються нею навпіл.

4. Точка перетину діагоналей паралелепіпеда і точки перетину діагоналей основ лежать на одній прямій.

5. Сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів усіх ребер.

Твердження (2) випливає з властивостей паралелограма та ознаки паралельності площин.

Твердження (3) і (4) ви доводили в минулому навчальному році як приклади застосування теореми про властивості перетину двох паралельних площин третьою. Нагадаємо схему цього доведення.



Мал. 3.32

За властивістю паралельних площин чотирикутники BB_1D_1D і AA_1C_1C – паралелограми (мал. 3.32).

Точки O і O_1 – середини їх сторін (оскільки є точками перетину діагоналей паралелограмів основ).

Середина Q відрізка OO_1 – точка перетину діагоналей паралелограмів BB_1D_1D і AA_1C_1C – точка перетину діагоналей паралелепіпеда.

Розглянемо *доведення п'ятої з наведених властивостей*. Позначимо довжини ребер і діагоналей основ відповідно як $AD = a$, $DC = b$, $CC_1 = c$, $AC = d_1$, $BD = d_2$ (мал. 3.32).

З паралелограмів BB_1D_1D і AA_1C_1C маємо:

$$BD_1^2 + DB_1^2 = 2c^2 + 2d_2^2,\ AC_1^2 + CA_1^2 = 2c^2 + 2d_1^2.$$

Якщо додати наведені рівності і врахувати властивість діагоналей паралелограма основ ($d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$), отримаємо:

$$BD_1^2 + DB_1^2 + AC_1^2 + CA_1^2 = 4c^2 + 4a^2 + 4b^2.$$

Зрозуміло, що **паралелепіпед має всі властивості призми**, які обговорювалися раніше.

Окрім того, пригадаємо твердження, яке ми довели векторним методом у § 6 (приклад 1 на с. 36).

6. Діагональ AC_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходить через точки перетину медіан трикутників A_1BD і CB_1D_1 і ділиться цими точками на три рівні частини.

ПРЯМА ПРИЗМА

З означення

- **бічні ребра перпендикулярні до основи;**
- **усі бічні грані – прямокутники;**
- **бічне ребро є висотою призми;**
- **площа бічної поверхні – добуток периметра основи на довжину бічного ребра.**

ПРАВИЛЬНА ПРИЗМА

З означення

- **основа – правильний багатокутник;**
- **бічні ребра перпендикулярні до основи.**

Це різновид прямої призми. Отже, в неї:
- **усі бічні грані – рівні прямокутники;**
- **бічне ребро є висотою призми;**
- **площа бічної поверхні – добуток периметра основи на довжину бічного ребра.**

ПРЯМОКУТНИЙ ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

Це паралелепіпед, у якого
- **бічні ребра перпендикулярні до основи.**

З означення паралелепіпеда і властивостей прямої призми маємо:
- **усі грані – прямокутники;**
- **діагональні перерізи – прямокутники;**
- **усі двогранні та плоскі кути – прямі;**
- **ребра, що виходять з однієї вершини, взаємно перпендикулярні;**
- **бічне ребро є висотою паралелепіпеда;**
- **площа бічної поверхні – добуток периметра основи на довжину бічного ребра;**
- **усі діагоналі рівні;**
- **усі діагоналі перетинаються в одній точці й поділяються нею навпіл;**
- **квадрат діагоналі дорівнює сумі квадратів довжин трьох ребер, що виходять з однієї вершини** (інакше – *вимірів*).

Остання властивість випливає з просторової теореми Піфагора. Нагадаємо її загальне формулювання.

Т Теорема *Піфагора для простору*. **Квадрат довжини відрізка дорівнює сумі квадратів довжин його проекцій на три взаємно перпендикулярні прямі.**

Н Наслідок. **Якщо пряма утворює із взаємно перпендикулярними прямими кути φ_1, φ_2 і φ_3, то**

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1.$$

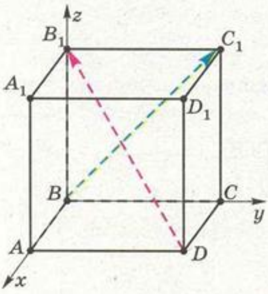
З наслідку просторової теорем Піфагора маємо ще одну властивість прямокутного паралелепіпеда:
- **сума квадратів косинусів кутів, які діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з його ребрами, дорівнює одиниці.**

Зауваження. Задачі, пов'язані з прямокутним паралелепіпедом, у багатьох випадках зручно розв'язувати координатно-векторним способом.

Приклад 1. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задано довжини ребер: $AB = a$, $BC = CC_1 = b$. Обчисліть кут між прямими DB_1 і BC_1.

Розв'язання

Введемо прямокутну систему координат з початком у точці B і спрямуємо вісь Ox вздовж ребра BA, Oz – вздовж BB_1 (мал. 3.33).



Мал. 3.33

$B(0;\,0;\,0)$, $C_1(0;\,b;\,b)$, $D(a;\,b;\,0)$, $B_1(0;\,0;\,b)$. Тоді:

$$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{(0;\,b;\,b)},\ \ \overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{(-a;\,-b;\,b)}.$$

Косинус шуканого кута φ дорівнює модулю косинуса кута між векторами $\overrightarrow{BC_1}$ і $\overrightarrow{DB_1}$:

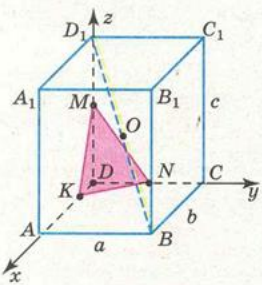
$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{DB_1}\right|}{\left|\overrightarrow{BC_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DB_1}\right|} = \frac{\left|0 - b^2 + b^2\right|}{\left|\overrightarrow{BC_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DB_1}\right|} = 0.$$

Тоді шуканий кут $\varphi = 90°$.

Відповідь: 90°.

Приклад 2. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребрах AD, DD_1 і CD розміщено відповідно точки K, M і N так, що $AK : KD = 4$, $DM : MD = 2$, $DN : NC = 1$. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей паралелепіпеда до площини KMN, якщо $AB = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$.

Розв'язання



Мал. 3.34

Введемо прямокутну систему координат із початком у точці D і спрямуємо вісь абсцис уздовж ребра DA, аплікат – вздовж DD_1 (мал. 3.34).

1) Як відомо, всі діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й діляться нею навпіл. Тоді

$$O\left(\frac{1}{2}b;\ \frac{1}{2}a;\ \frac{1}{2}c\right).$$

2) Площина KMN відтинає на осях Ox, Oy, Oz відповідно відрізки: $\frac{1}{5}b;\ \frac{1}{3}a;\ \frac{1}{2}c$. Запишемо рівняння площини KMN як рівняння у відрізках (див. § 2, с. 17):

$$\frac{5x}{b} + \frac{3y}{a} + \frac{2z}{c} = 1.$$

3) Відстань від точки $O\left(\frac{1}{2}b;\ \frac{1}{2}a;\ \frac{1}{2}c\right)$ до площини $\frac{5x}{b} + \frac{3y}{a} + \frac{2z}{c} - 1 = 0$ дорівнює (див. § 8, с. 51):

$$d = \frac{\left|\frac{1}{2}b\cdot\frac{5}{b} + \frac{1}{2}a\cdot\frac{3}{a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{c} - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{5}{b}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{c}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{\left(\frac{5}{b}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{c}\right)^2}}.$$

Відповідь: $\dfrac{3}{\sqrt{\left(\dfrac{5}{b}\right)^2+\left(\dfrac{3}{a}\right)^2+\left(\dfrac{2}{c}\right)^2}}$.

ПРАВИЛЬНА ЧОТИРИКУТНА ПРИЗМА

Це прямокутний паралелепіпед, **основою якого є квадрат**. Зрозуміло, що правильна чотирикутна призма **має всі властивості прямокутного паралелепіпеда**.

Окрім того, звернемо вашу увагу на такі опорні задачі.

Приклад 3. Доведіть, що в правильній чотирикутній призмі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площини AD_1C і DBB_1 перпендикулярні.

Розв'язання

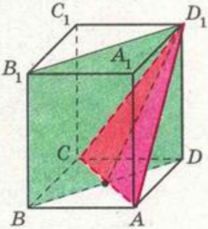
1) $AC \perp DB$ як діагоналі квадрата $ABCD$ (мал. 3.35).

2) $BB_1 \perp (ABC)$ як ребро правильної призми. Тоді $BB_1 \perp AC$.

3) $AC \perp DB$ і $AC \perp BB_1$, тоді (за теоремою про два перпендикуляри) $AC \perp (DBB_1)$.

4) $AC \in (AD_1C)$ і $AC \perp (DBB_1)$, тоді (за ознакою) $(AD_1C) \perp (DBB_1)$.

Щ. в. д.



Мал. 3.35

Зауваження. Останню задачу можна розв'язати і координатно-векторним способом: обрати зручним чином систему координат, записати рівняння площин AD_1C, DBB_1 і координати векторів-нормалей до них (див. § 8, с. 50); довести, що скалярний добуток цих векторів дорівнює 0. Доведення виконайте самостійно.

Приклад 4. У правильній чотирикутній призмі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ знайдіть відстань від вершини B_1 до площини AD_1C, якщо довжини ребер AB і AA_1 дорівнюють a і b відповідно.

Розв'язання

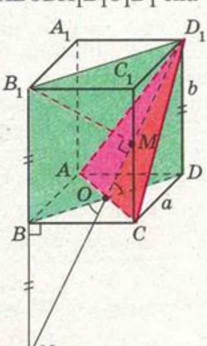
СПОСІБ І.

1) За опорною задачею 3: $(AD_1C) \perp (DBB_1)$. Указані площини перетинаються по (D_1O).

У (DBB_1) будуємо $B_1M \perp D_1O$ (мал. 3.36). Тоді $B_1M \perp (AD_1B)$ і $|B_1M| = d(B_1; (AD_1B))$ – шукана відстань.

2) Продовжимо B_1B і D_1O до перетину в точці N. Маємо: $\triangle D_1DO = \triangle BNO$ (катети $DO = OB$ як сторони квадрата, $\angle D_1OD = \angle NOB$ як вертикальні). Тоді $NB = D_1D = B_1B = b$.

3) У $\triangle D_1B_1N$ ($\angle B_1 = 90°$, $D_1B_1 = a\sqrt{2}$, $B_1N = 2b$):



Мал. 3.36

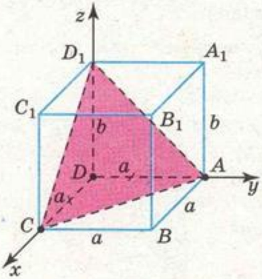
$$S_\Delta = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot 2b = \frac{1}{2}B_1M\cdot\sqrt{4b^2+2a^2};\ d(B_1;(AD_1B)) = B_1M = \frac{2ab}{\sqrt{2b^2+a^2}}.$$

Відповідь: $\frac{2ab}{\sqrt{2b^2+a^2}}$.

А тепер для порівняння *скористаємося формулою обчислення відстан* *між точкою і площиною*, що задані в координатному просторі, яку ми довели у § 8 (с. 51).

Розв'язання

СПОСІБ II.



Мал. 3.37

Введемо прямокутну систему координат із початком у точці D і спрямуємо вісь абсцис уздовж ребра DC, аплікат – уздовж DD_1 (мал. 3.37).

1) Запишемо рівняння площини AD_1C як рівняння у відрізках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{b}=1.$$

2) Відстань від точки $B_1(a;\ a;\ b)$ до площини $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{b}-1=0$ дорівнює:

$$d = \frac{\left|a\cdot\frac{1}{a}+a\cdot\frac{1}{a}+b\cdot\frac{1}{b}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}} = \frac{2ab}{\sqrt{2b^2+a^2}}.$$

Відповідь: $\frac{2ab}{\sqrt{2b^2+a^2}}$.

КУБ

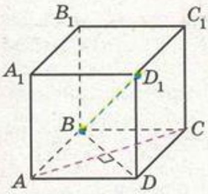
Куб – це різновид прямокутного паралелепіпеда, а з іншого боку – це випадок правильної призми. Тобто він має **всі властивості прямокутного паралелепіпеда і правильної призми.** До того треба додати, що **всі грані куба – рівні квадрати.**

Розглянемо цікаві опорні факти про *властивості діагоналі куба*. Їх нескладне доведення запишемо лаконічною (писемною математичною мовою) за допомогою символіки та скорочень.

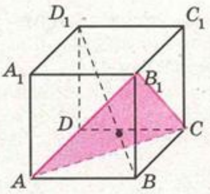
3 Приклад 5. **Доведіть, що діагональ D_1B куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна до діагоналі AC його грані $ABCD$** (мал. 3.38).

$$\left.\begin{array}{l} D_1D \perp (ABC) \\ DB \equiv \text{Пр}_{ABC}D_1B \\ AC \perp DB \end{array}\right| \rightarrow D_1B \perp AC \ \text{(за ТТП)}.$$

Щ. в. д.



Мал. 3.38



Мал. 3.39

Приклад 6. Доведіть: **площина, яка проходить через кінці трьох ребер куба, що виходять із спільної вершини, перпендикулярна до діагоналі куба, яка виходить з тієї самої вершини** (мал. 3.39).

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.

Довести: $D_1B \perp (AB_1C)$.

$D_1B \perp AC$ (див. приклад 5); аналогічно $D_1B \perp AB_1$. Тоді $D_1B \perp (AB_1C)$.

Щ. в. д.

Завдання 12

1°. Накресліть розгортку прямого паралелепіпеда і зробіть за нею модель прямого паралелепіпеда.
2°. Накресліть розгортку паралелепіпеда і зробіть за нею модель паралелепіпеда.
3. Чи можна виготовити таку модель паралелепіпеда, щоб, розглядаючи її з різних боків, можна було стверджувати, що цей паралелепіпед є прямим і що він є похилим?
4°. Назвіть властивості прямої призми, в основі якої лежить ромб.
5. Чи може паралелограм бути розгорткою бічної поверхні похилої призми?
6. Які додаткові ознаки відрізняють: 1) правильну призму від прямої; 2) куб від прямокутного паралелепіпеда?
7. Чи можна стверджувати, що у прямої призми бічне ребро перпендикулярне до кожної діагоналі основи? Чому?
8*. Доведіть, що **діагональ *AC* грані правильної чотирикутної призми перпендикулярна до площини BB_1D_1D.**
9. Якою фігурою є розгортка бічної поверхні похилого паралелепіпеда?
10. Суми площ протилежних бічних граней прямої чотирикутної призми рівні між собою. Яку властивість повинен мати багатокутник основи?
11. Доведіть, що у прямої призми бічне ребро перпендикулярне до кожної діагоналі основи.
12°. Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, якщо:
1) його виміри 3 см, 4 см і 6 см;
2) довжини сторін основи – 4 см і 3 см, а діагональ утворює з основою кут 30°;
3) довжини сторін основи – 2 см і 3 см, а діагональ бічної грані утворює з меншою стороною основи кут 60°.
13°. Знайдіть площу бічної поверхні прямої чотирикутної призми, бічне ребро якої 5 см, а сторони основи дорівнюють 2 см, 3 см, 2,5 см, 4,5 см.

14°. Знайдіть площу повної поверхні прямої призми, в основі якої ромб із довжиною сторони 5 см і гострим кутом 30°, а висота цієї призми дорівнює 10 см.
15°. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 10 дм, а висота 8 дм. Знайдіть площу повної поверхні призми.
16. Доведіть, що число багатогранних кутів будь-якої призми – число парне.
17. Призма має n граней. Який багатокутник є її основою?
18*. Доведіть, що з кожної вершини призми може виходити тільки три ребра.
19*. Чи існує призма, що має 14 ребер?
20*. У правильній шестикутній призмі бічні грані – рівні прямокутники. Сформулюйте обернене твердження і доведіть його хибність.
21*. Скільки бічних граней у формі прямокутника може мати похила призма, основа якої є правильний багатокутник: 1) із непарною кількістю сторін; 2) із парною кількістю сторін?
22*. В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція, сума основ якої дорівнює меншій бічній стороні. Доведіть, що з двох таких призм можна скласти правильну чотирикутну призму.
23. Площа перерізу куба площиною, що проходить через три несуміжні вершини, дорівнює $18\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть довжину ребра куба.
24°. В основі прямої призми лежить правильний трикутник, площа якого дорівнює $9\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її висота у 3 рази більша, ніж сторона основи.
25°. В основі прямої призми лежить рівнобедрений прямокутний трикутник, площа якого дорівнює 18 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її висота дорівнює $2-\sqrt{2}$ см.
26. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник, основа якого 8 см, а бічна сторона дорівнює 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її висота дорівнює висоті трикутника основи, що проведена до основи трикутника.
27*. У прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 26 та 10 см, а синус кута між ними – $\frac{5}{13}$. Визначте площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо його діагональ утворює з площиною основи кут 45°.
28. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершини A, C_1 і середину ребра D_1D проведено переріз. Знайдіть ребро куба, якщо площа перерізу дорівнює $50\sqrt{6}$ см^2.
29. Через кінці трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, провели площину. Вона утворює з площиною основи кут, косинус якого дорівнює $\frac{1}{8}$. Визначте площу утвореного перерізу, якщо довжини сторін основи 5 м і 3 м.
30. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через середини ребер A_1D_1, D_1D і вершину B_1 провели площину. Визначте площу утвореного перерізу, якщо довжина ребра куба дорівнює $4\sqrt{5}$ м.
31. Через вершини A, C і D_1 правильної чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провели площину, яка утворює з площиною основи

кут 60°. Визначте площу утвореного перерізу, якщо довжина сторони основи дорівнює 4 см.

32*. Основою прямої призми є ромб, а площі її діагональних перерізів дорівнюють 3 і 4 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

33*. У правильній трикутній призмі площа перерізу, що проходить через бічне ребро призми перпендикулярно протилежній бічній грані, дорівнює $\sqrt{3}$ м^2, а сторона основи призми – $\sqrt[4]{3}$. Знайдіть площу повної поверхні призми.

34**. Розгляньте переріз куба площинами, перпендикулярними до однієї з його діагоналей. Знайдіть найбільшу площу такого перерізу за умови, що ребро куба дорівнює a.

35**. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E і P – середини ребер A_1B_1 і C_1D_1 відповідно. Побудуйте перпендикуляр з точки P на площину EBD і знайдіть його довжину, якщо довжина ребра куба a.

36*. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ через вершину B_1 провели переріз, що перпендикулярний до діагоналі CA_1 бічної грані. Знайдіть площу перерізу, якщо: **1)** $|AB| = |AA_1| = a$; **2)** $|AB| = 2a, |AA_1| = a$.

37**. У правильній чотирикутній призмі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основи дорівнює a. Через точку C_1 провели пряму, що перпендикулярна до площини BA_1D. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, що міститься всередині призми, якщо довжина бічного ребра дорівнює: **1)** $a\sqrt{2}$; **2)** $0{,}5a\sqrt{2}$.

38*. Усі ребра правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнюють a. Пряма, що перпендикулярна до площини BA_1C, перетинає прямі BC_1 і AB_1 відповідно в точках M і N. Знайдіть довжину відрізка MN.

39**. Основою паралелепіпеда є квадрат з довжиною сторони a. Одна з вершин верхньої основи проектується в центр нижньої основи. Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда, якщо довжина його бічного ребра b.

40**. Точка M – середина бічного ребра AA_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Прямі BD, MD_1 і A_1C попарно перпендикулярні. Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо $|BD| = 2a, |BC| = \frac{3}{2}a, |A_1C| = 4a$.

41**. $ABCA_1B_1C_1$ – правильна трикутна призма. Проведіть переріз призми так, щоб площу її поверхні було поділено навпіл і притому площина перерізу проходила через: **1)** CC_1; **2)** B_1 паралельно AC; **3)** AC паралельно A_1C_1.

42*. В основі призми $ABCA_1B_1C_1$ трикутник із сторонами 10, 10, 12. $|AA_1| = |A_1C| = |A_1B| = 13$. Обчисліть площу поверхні призми.

43**. У призмі $ABCA_1B_1C_1$ $|AB| = |AC| = 7, |BC| = 6, |AA_1| = 10, \angle A_1AB = \angle A_1AC$. Обчисліть найбільшу площу поверхні такої призми.

44**. У прямій трикутній призмі дві бічні грані мають площі S_1 та S_2 і утворюють прямий двогранний кут. Знайдіть найбільше значення її бічної поверхні.

45**. Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є правильний трикутник ABC, довжина сторони якого дорівнює $2a$. Ортогональною проекцією призми на площину ABC є трапеція з бічною стороною AB і площею, що у 2 рази перебільшує площу основи. Знайдіть висоту призми, якщо $|AB_1| = b$. (Знайдіть усі розв'язки.)

§ 16 Властивості піраміди

У цьому параграфі розглядатимемо основні властивості піраміди та її окремих видів. Деякі з цих властивостей вже відомі вам як опорні задачі, – зберемо їх тепер докупи.

З означення піраміди маємо такі ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ:

- **усі бічні грані – трикутники;**
- **n-кутна піраміда має $n + 1$ вершин, $n + 1$ граней, $2n$ ребер.**

Діагональним перерізом піраміди називають її переріз площиною, яка проходить через вершину та діагональ основи.

Паралельним перерізом піраміди називають її переріз площиною, яка проходить паралельно основі.

Доведемо *властивості паралельного перерізу* піраміди.

Теорема 1. **Якщо піраміду перетнути площиною, яка паралельна її основі, то:**

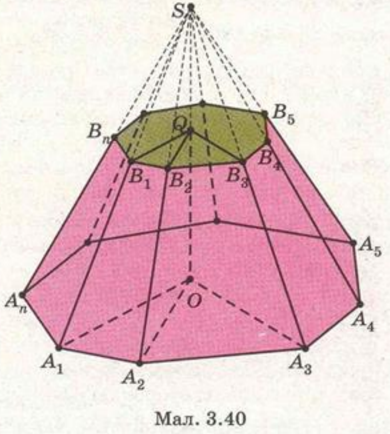
- **паралельний переріз – багатокутник, подібний до основи;**
- **паралельний переріз поділяє бічні ребра та висоту піраміди на пропорційні частини;**
- **площі паралельного перерізу та основи відносяться як квадрати їх відстаней від вершини.**

Доведення

Розглянемо n-кутну піраміду $SA_1A_2...A_n$ і її паралельний основі переріз $SB_1B_2...B_n$ (мал. 3.40). Висота піраміди SO перетинає площину перерізу в точці Q.

За властивістю паралельних площин:

$$A_1A_2 \parallel B_1B_2,\ A_2A_3 \parallel B_2B_3,\ ...,\ A_nA_1 \parallel B_nB_1;\ OA_1 \parallel QB_1,\ OA_2 \parallel QB_2,\ ...,\ OA_n \parallel QB_n.$$



Мал. 3.40

Як відомо, паралельна стороні трикутника пряма відтинає від нього трикутник, подібний до даного. Тоді у площинах граней та площинах, що проходять через ребро піраміди і її висоту, утворилися пари подібних трикутників з коефіцієнтом подібності

$$\frac{SO}{SQ}=\frac{SA_1}{SB_1}=\frac{SA_2}{SB_2}=\ldots$$

Оскільки площі подібних багатокутників відносяться як квадрати їх коефіцієнтів подібності, то

$$\frac{S_0}{S_{\text{пер}}}=\frac{SO^2}{SQ^2}.$$

Теорему доведено.

ЗРІЗАНА ПІРАМІДА

Як ви вже знаєте, якщо у піраміди зрізати вершину площиною, паралельною основі, то утворену фігуру називають *зрізаною пірамідою*, а відповідний паралельний переріз – її *верхньою основою.* На малюнку 3.40 $A_1A_2\ldots A_nB_1B_2\ldots B_n$ – зрізана піраміда з основами $A_1A_2\ldots A_n$ і $B_1B_2\ldots B_n$.

Бічними гранями зрізаної піраміди називають чотирикутники, які відтинає площина верхньої основи від граней піраміди. На малюнку 3.40 $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ... – бічні грані зрізаної піраміди.

Бічні ребра – ребра, які не належать основам.

Площа поверхні зрізаної піраміди дорівнює сумі площ її основ і всіх бічних граней.

Відповідно до теореми 1 маємо такі ВЛАСТИВОСТІ зрізаної піраміди:

• **основи – подібні багатокутники;**

• **бічні грані – трапеції;**

• **відношення висоти до висоти піраміди, з якої її утворено, дорівнює відношенню різниці сторін однієї грані до довжини нижньої основи цієї самої грані.**

Остання властивість випливає з пар подібних трикутників, що утворюються при перетині піраміди паралельною її основі площиною (див. мал. 3.40 і доведення теореми 1). Позначимо висоти зрізаної піраміди та піраміди, з якої її утворено, відповідно як h і H, а ребра основ однієї з граней зрізаної піраміди – як b і a ($b < a$). Тоді за властивістю подібності маємо:

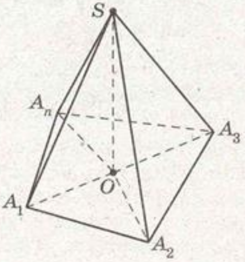
$$\frac{b}{a}=\frac{H-h}{H},\ \frac{b}{a}=1-\frac{h}{H},\ \frac{h}{H}=\frac{a-b}{a}.$$

ВЛАСТИВОСТІ ВИСОТИ ПІРАМІДИ

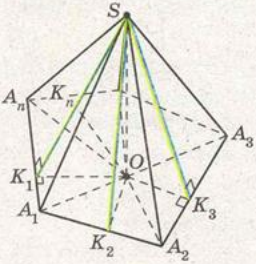
1. Якщо бічні ребра піраміди рівні (або бічні ребра утворюють рівні кути з основою або висотою піраміди), то вершина піраміди проектується в центр описаного навколо основи кола.

2. Якщо бічні грані піраміди однаково нахилені до основи (або висоти бічних граней рівні, або бічні грані утворюють однакові кути з висотою піраміди), то центр вписаного кола в багатокутник основи є основою висоти піраміди.

Нехай SO – висота піраміди $SA_1A_2...A_n$. Тоді правильність тверджен-ня (1) випливає з рівності прямокутних трикутників SOA_1, SOA_2, ... SOA_n (мал. 3.41).



Мал. 3.41



Мал. 3.42

Для доведення другого твердження позначимо висоти бічних граней пі-раміди як SK_1, SK_2, ..., SK_n (мал. 3.42).

За теоремою про три перпендикуляри маємо, що відрізки OK_1, OK_2, ..., OK_n – перпендикулярні до відповідних ребер основи. Тоді кути SK_1O, SK_2O, ..., SK_nO – кути нахилу бічних граней піраміди до її основи.

З рівності прямокутних трикутників SOK_1, SOK_2, ... SOK_n маємо пра-вильність твердження (2).

ЗАУВАЖЕННЯ ЩОДО ПРОЕКТУВАННЯ ВЕРШИНИ ПІРАМІДИ НА ПЛОЩИНУ ЇЇ ОСНОВИ

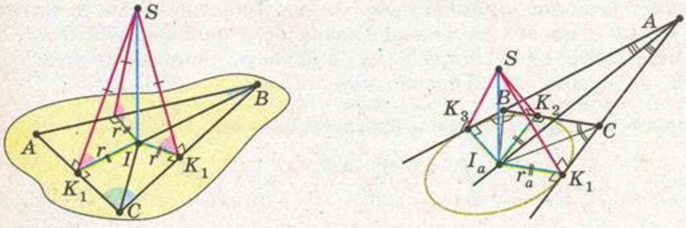
Зауваження 1. Якщо в умові задачі йде мова про тетраедр, бічні грані якого утворюють рівні двогранні кути з його **основою** (а не пло-щиною основи), маємо однозначне розміщення основи висоти тетра-едра в інцентрі трикутника основи. Проте **якщо за умовою бічні грані те-траедра однаково нахилені до площини його основи, маємо чотири можливі розміщення основи висоти трикутної піраміди.**

Щоб розібратися в цьому, пригадаємо опорний факт ортогонального проектування точки простору на площину трикутника.

1) *Точка, рівновіддалена від сторін трикутника, проектується на пло-щину цього трикутника* ***в центр його вписаного або зовнівписаного кола*** (мал. 3.43).

2) *Точка, рівновіддалена від вершин трикутника, проектується на площину цього трикутника в центр його описаного кола.*

Нагадаємо (див. ОК-1), що зовнівписаним колом трикутника називаєть-ся коло, яке дотикається до однієї зі сторін трикутника і продовження двох інших його сторін (мал. 3.43-б). Центр такого кола належить точці пере-тину бісектриси одного з кутів трикутника (кут A на малюнку) і бісектрис двох зовнішніх його кутів, не суміжних з ним. Центр зовнівписаного кола – точка, рівновіддалена від однієї зі сторін трикутника (як відрізка) і пря-мих, що містять дві інші сторони цього трикутника. Зовнівписане коло має цікаві властивості, які ви можете пригадати за опорним конспектом ОК-3.



а) б)

Мал. 3.43

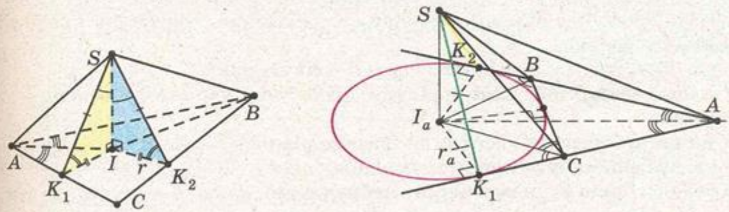
Тоді маємо таку ВЛАСТИВІСТЬ висоти піраміди тетраедра.

Якщо для тетраедра дано, що

- **вершина рівновіддалена від усіх сторін основи,** або
- **усі бічні грані утворюють рівні двогранні кути з площиною основи,** або
- **висота тетраедра утворює рівні кути з усіма бічними гранями,**

тоді

вершина тетраедра проектується на площину основи в центр ВПИСАНОГО або в ЦЕНТР ЗОВНІВПИСАНОГО кола трикутника основи.



а) б)

Мал. 3.44

Тобто на відміну від випадку, коли в основі піраміди n-кутник і $n > 3$, маємо не один, а чотири можливих розміщення основи висоти тетраедра на площині основи (мал. 3.44): один – всередині основи трикутника (його інцентр) і три поза цим трикутником (точки перетину бісектриси одного з кутів трикутника з бісектрисами двох його зовнішніх кутів при інших вершинах).

Зауваження 2. При розв'язуванні задач доцільно мати на увазі й твердження, обернені до сформульованих.

1. Якщо вершина піраміди проектується в центр описаного кола основи, то кожна точка висоти рівновіддалена від вершин основи і кожна точка висоти рівновіддалена від ребер основи.

Доведіть самостійно (спираючись на рівність трикутників SOA_1, SOA_2, ..., SOA_n на малюнку 3.41) правильність такого твердження.

5*

2. Якщо вершина піраміди проектується в центр вписаного кола основи, то кожна точка висоти рівновіддалена від її бічних граней.

Доведіть самостійно (спираючись на рівність трикутників SOK_1, SOK_2, ... SOK_n на малюнку 3.42) правильність такого твердження.

ПРАВИЛЬНА ПІРАМІДА

Це піраміда, основою якої є правильний багатокутник, а *всі бічні ребра рівні*.

Як ви знаєте, *апофемою правильної піраміди називають висоту її бічної грані*. Вона ділить навпіл ребро основи. Медіана правильного трикутника основи є його висотою. Тоді маємо, що

- **лінійним кутом двогранного кута при ребрі основи є кут, утворений її апофемою та медіаною основи, які проведено до одного і того самого ребра основи.**

Усі бічні грані правильної піраміди – рівні рівнобедрені трикутники (за третьою ознакою). Тоді висоти двох суміжних бічних граней, проведених до їх спільного бічного ребра, мають за основу одну й ту саму точку цього ребра. Звідси

- **лінійним кутом двогранного кута при бічному ребрі є кут між висотами суміжних граней, які проведено до їх спільного ребра.**

З означення правильної піраміди та наведених тверджень про її двогранні кути маємо:

- **усі бічні грані – рівні рівнобедрені трикутники;**
- **площа бічної поверхні дорівнює півдобутку периметра основи і апофеми;**
- **усі плоскі кути при вершині піраміди рівні;**
- **усі двогранні кути при ребрах основи рівні;**
- **усі двогранні кути при бічних ребрах рівні.**

З урахуванням останніх тверджень та властивості піраміди про розміщення основи її висоти маємо:

- **вершина правильної піраміди проектується на площину основи в центр багатокутника основи.**

Спираючись на сформульовані твердження, легко довести (зробіть це самостійно) ще такі *властивості висоти* правильної піраміди:

- **кожна точка висоти рівновіддалена від вершин основи;**
- **кожна точка висоти рівновіддалена від ребер основи;**
- **кожна точка висоти рівновіддалена від бічних граней.**

Правильна зрізана піраміда – частина правильної піраміди. *Апофемою* правильної зрізаної піраміди називають відповідну частину апофеми правильної піраміди. Вона є висотою бічної грані – рівнобічної трапеції.

- **Бічні грані правильної зрізаної піраміди – рівні рівнобічні трапеції;**
- **площа поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів основ на апофему.**

Далі розглянемо *опорні задачі про перехід між кутами правильної піраміди*.

Приклад 1. Для правильної трикутної піраміди знайдіть зв'язок між кутами:

1) двогранним кутом при ребрі основи і кутом нахилу бічного ребра до основи;

2) двогранним кутом при ребрі основи і плоским кутом при вершині;

3) кутом нахилу бічного ребра до основи і плоским кутом при вершині.

Розв'язання

У правильній піраміді $SABC$ за побудовою: SO – висота, SD – апофема (мал. 3.45). Тоді:

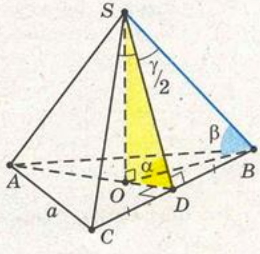
$$(SCB)\widehat{\ }(ABC) = \angle SDO \triangleq \alpha,\ (SB)\widehat{\ }(ABC) = \angle SBO \triangleq \beta,$$

$$\angle BSC \triangleq \gamma,\ \angle CSD = \angle DSB = \frac{\gamma}{2}.$$

1.1) З прямокутних трикутників SOD і SOB: $SO = OD\operatorname{tg}\alpha = OB\operatorname{tg}\beta$.

1.2) З правильного трикутника ABC ($AC \triangleq a$): $OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Маємо: $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\beta$, $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta}$.



Мал. 3.45

2.1) З прямокутних трикутників SDO і SDB:

$$SD = OD : \cos\alpha = DB : \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

2.2) З правильного трикутника ABC ($AC \triangleq a$):

$$OD = \frac{a\sqrt{3}}{6},\ DB = \frac{a}{2}.$$

Маємо: $\dfrac{a\sqrt{3}}{6} : \cos\alpha = \dfrac{a}{2} : \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$, $\boxed{\sqrt{3}\cos\alpha = \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}}$.

3.1) З прямокутних трикутників SBD і SBO: $SB = DB : \sin\dfrac{\gamma}{2} = OB : \cos\beta$.

3.2) З правильного трикутника ABC ($AC \triangleq a$): $DB = \dfrac{a}{2}$, $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Маємо: $\dfrac{a}{2} : \sin\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} : \cos\beta$, $\boxed{2\sin\dfrac{\gamma}{2} = \sqrt{3}\cos\beta}$.

Відповідь: $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$, $\sqrt{3}\cos\alpha = \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$, $2\sin\dfrac{\gamma}{2} = \sqrt{3}\cos\beta$.

Зверніть увагу, що пошук співвідношення між тригонометричними функціями кожної пари кутів складався з однакових кроків. Спочатку ми знаходили два прямокутних трикутники, що містять шукані кути і мають спільну сторону. Потім записували довжину спільної їх сторони через тригонометричну функцію шуканого кута і сторону, що належить основі. Після цього підставляли вирази останніх через довжину основи і проводили скорочення.

Такий метод називають *методом допоміжного елемента*. У кожному випадку ми користувалися ним двічі. Перший раз – це була спільна сторона прямокутних трикутників, другий – довжина сторони основи. (Вон «допомогли» нам знайти шукане співвідношення і «зникли».)

Спробуємо узагальнити вищесказане і сформулювати загальний алгоритм пошуку переходу між двома кутами для довільної правильної піраміди та застосувати його до розв'язування більш складних задач, ніж приклад 1. (Притому до множини кутів, розглянутих раніше, додамо ще двогранний кут при бічному ребрі піраміди.)

АЛГОРИТМ ПЕРЕХОДУ МІЖ КУТАМИ ПРАВИЛЬНОЇ ПІРАМІДИ

№ кроку	Зміст кроку	Приклад (за мал. 3.45)
1.	Знайти два прямокутних трикутники, що містять шукані кути і мають спільну сторону. Записати пару літер, що позначають їх спільну сторону двічі. Перед кожною парою поставити знак трикутника.	$\alpha \leftrightarrow \beta$ $\triangle SO$ $\quad$ $\triangle SO$
2.	Дописати наприкінці кожної пари третю літеру так, щоб відповідні трикутники містили шукані кути.	$\alpha \leftrightarrow \beta$ $\triangle SOD$ $\quad$ $\triangle SOB$
3.	Під назвою кожного з трикутників записати всі три пари з його літер (це сторони трикутників). Виділити спільну сторону і сторону, що належить основі. Зайве викреслити.	$\alpha \leftrightarrow \beta$ $\triangle SOD$ $\quad$ $\triangle SOB$ $\boxed{SO}, \cancel{SD}, \underline{OD}$ $\quad$ $\boxed{SO}, \cancel{SB}, \underline{OB}$
4.	Спільну сторону записати через «неспільну», дивлячись на відповідний трикутник через тригонометричну функцію відповідного кута. Довжини відрізків основи записати через довжину сторони основи. Провести скорочення.	З $\triangle SOD$ і $\triangle SOB$: $SO = OD\,\mathrm{tg}\,\alpha = OB\,\mathrm{tg}\,\beta$, $\frac{a\sqrt{3}}{6}\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3}\mathrm{tg}\,\beta$, $\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = 2\mathrm{tg}\,\beta}$

Зрозуміло, що запис за даним алгоритмом здійснюється на чернетці. У зошит переписуємо лише зміст правої клітинки останнього рядка.

Знайдіть за пропонованим алгоритмом перехід між кутами, вказаними у прикладі 1, але для правильної чотирикутної, потім шестикутної та n-кутної пірамід. (У цьому вам допоможуть опорні схеми ОК-10 – ОК-12.)

Застосуємо пропонований алгоритм до пошуку зв'язку між мірою двогранного кута при бічному ребрі правильної піраміди з іншими її кутами. Перш ніж задіяти наш алгоритм, треба здійснити певну «підготовку»:

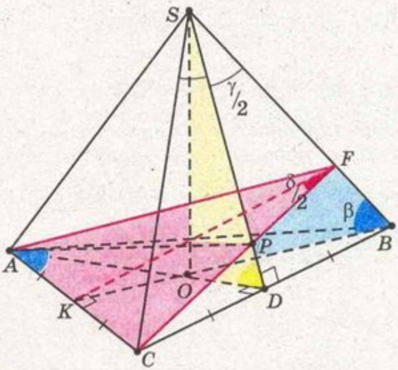
- знайти пряму перетину січної площини, яка містить лінійний кут вказаного двогранного кута, і площини, що проведена через висоту і апофему піраміди (містить лінійний кут двогранного кута при ребрі основи);
- довести, що ця пряма перпендикулярна до відповідної бічної площини, а отже, і до апофеми цієї грані та сліду на ній січної площини;
- у трикутниках бічної грані та перерізу позначити відповідно кути, рівні половині плоского кута при вершині та половині міри двогранного кута при бічному ребрі.

Почнемо з трикутної піраміди.

3 Приклад 2. **Для правильної трикутної піраміди знайдіть зв'язок між кутами:**

1) **двогранним кутом при бічному ребрі і кутом нахилу бічного ребра до основи;**
2) **двогранним кутом при бічному ребрі і плоским кутом при вершині;**
3) **двогранним кутом при бічному ребрі і кутом нахилу бічного ребра до основи.**

Розв'язання



Мал. 3.46

У правильній піраміді $SABC$ за побудовою: SO – висота, SD – апофема, $CF \perp SB$, $AK = KC$ (мал. 3.46). Тоді:

$$(SCB)\widehat{\ }(ABC) = \angle SDO \triangleq \alpha,\ (SB)\widehat{\ }(ABC) = \angle SBO \triangleq \beta,$$

$$\angle BSC \triangleq \gamma,\ \angle CSD = \angle DSB = \frac{\gamma}{2},\ AC \triangleq a,\ (SCB)\widehat{\ }(ASB) = \angle AFC \triangleq \delta,$$

$$\angle AFK = \angle KFC = \frac{\delta}{2}.$$

Маємо $(SOD) \perp (CSB)$ і $(AFC) \perp (CSB)$. Як відомо, *дві площини, що перпендикулярні до третьої, перетинаються по прямій, перпендикулярній до третьої площини*. Тоді площини SOD і AFC перетинаються по прямій, яка перпендикулярна до бічної грані CSB. Знайдемо цю пряму.

Щоб визначити пряму, достатньо знайти дві точки цієї прямої. Шукаємо точки, які належать обом вказаним площинам. Одна з таких точок – це точка P перетину апофеми SD і сліду CF бічної грані, друга – вершина A. Тобто

$$(SOD) \cap (AFC) = AP \perp (CSB).$$

Звідси $AP \perp SD$, $AP \perp CF$.

У бічній грані SCB прямокутні трикутники SDB і CFB мають спільний кут B (мал. 3.46, 3.47-а). Тоді $\angle FCB = \angle DSB = \frac{\gamma}{2}$.

а) б)

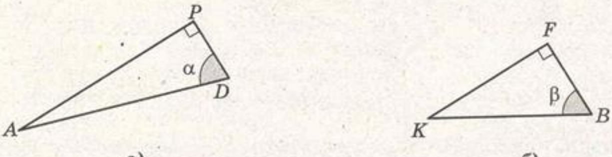
Мал. 3.47

Аналогічно у січній площині $\angle PAC = \angle KFC = \frac{\delta}{2}$ (мал. 3.46, 3.47-б).

Перенесемо позначення рівності вказаних кутів на зображення піраміди (мал. 3.46) і застосуємо (на чернетці) пропонований раніше алгоритм.

1.1) З прямокутних трикутників APD (мал. 3.46, 3.48-а) і APC (мал. 3.46, 3.47-б):

$$AP = AD\sin\alpha = AC\cos\frac{\delta}{2}.$$



а) б)

Мал. 3.48

1.2) З правильного трикутника ABC: $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AC = a$.

Маємо: $\frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = a\cos\frac{\delta}{2}$, $\boxed{\sqrt{3}\sin\alpha = 2\cos\frac{\delta}{2}}$.

2.1) З прямокутних трикутників FCB (мал. 3.46, 3.47-а) і FCK (мал. 3.46, 3.47-б):

$$FC = CB\cos\frac{\gamma}{2} = KC : \sin\frac{\delta}{2}.$$

2.2) З правильного трикутника ABC: $CB = a$, $KC = \dfrac{a}{2}$.

Маємо: $a\cos\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{\delta}{2}}$, $\boxed{2\cos\dfrac{\gamma}{2}\sin\dfrac{\delta}{2} = 1}$.

3.1) З прямокутних трикутників KFB (мал. 3.46, 3.48-б) і KFC (мал. 3.46, 3.47-б):

$$KF = KB\sin\beta = KC\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}.$$

3.2) З правильного трикутника ABC: $KB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $KC = \dfrac{a}{2}$.

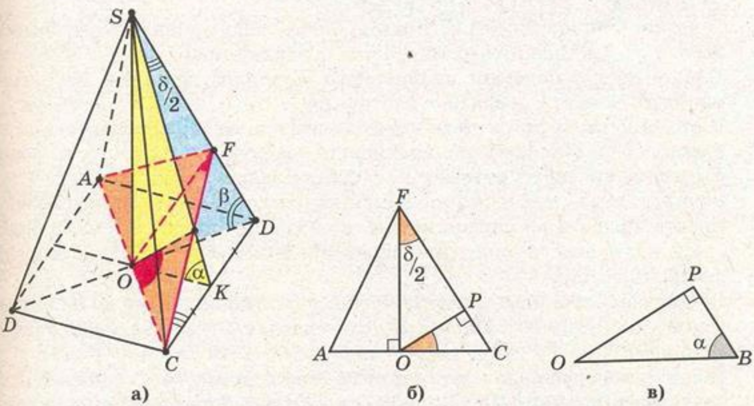
Маємо: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\sin\beta = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\delta}{2}$, $\boxed{\sqrt{3}\sin\beta = \operatorname{ctg}\dfrac{\delta}{2}}$.

Відповідь: $\sqrt{3}\sin\alpha = 2\cos\dfrac{\delta}{2}$, $2\cos\dfrac{\gamma}{2}\sin\dfrac{\delta}{2} = 1$, $\sqrt{3}\sin\beta = \operatorname{ctg}\dfrac{\delta}{2}$.

Розглянемо аналогічну задачу для чотирикутної піраміди, скорочено запишемо її розв'язок.

3 **Приклад 3. У правильній чотирикутній піраміді знайдіть зв'язок між двогранними кутами при бічному ребрі і ребрі основи – σ і α відповідно.**

Розв'язання



Мал. 3.49

1) $SABCD$ – правильна піраміда, SO – висота, SD – апофема, $CF \perp SB$, $AC \triangleq a$ (мал. 3.49-а). Тоді:

$$(SCB)\widehat{\ }(ABC) = \angle SKO = \alpha,\ \angle AFC = \delta,\ \angle AFO = \angle OFC = \frac{\delta}{2};$$

2) $\left.\begin{array}{l}(SOK) \perp (SCB) \\ (AFC) \perp (SCB)\end{array}\right| \rightarrow (SOK) \cap (AFC) = OP \perp (ABC).$

Тоді $OP \perp SK$, $OP \perp CF$.

3) $\angle POC = \angle OFC = \frac{\delta}{2}$ як кути, утворені взаємно перпендикулярними сторонами (мал. 3.49-б).

4) З $\triangle OPK$ і $\triangle OPC$ (мал. 3.49): $OP = OK \sin\alpha = OC \cos\frac{\delta}{2}$.

5) $OK = \frac{a}{2}$, $OC = a\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2}$.

Відповідь: $\sin\alpha = \sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2}$.

Спираючись на малюнок 3.49-а, знайдіть для правильної чотирикутної піраміди зв'язок між: двогранним кутом при бічному ребрі і плоским кутом при вершині; двогранним кутом при бічному ребрі і кутом нахилу бічного ребра до основи (у цьому вам допоможе ОК–10).

Після того розв'яжіть аналогічні опорні задачі для правильної шестикутної (див. ОК–11) та n-кутної пірамід (див. ОК–12).

Завдання 13

1°. Чи може піраміда мати:
1) 13 ребер; 2) 12 ребер і 6 граней?

2°. У правильній шестикутній піраміді бічне ребро дорівнює 5 см, а ребро основи – 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3°. Площа повної поверхні правильного тетраедра дорівнює $16\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть довжину ребра цього тетраедра.

4°. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює 4 см, а висота – 6 см. Знайдіть площу її повної поверхні.

5°. У правильній шестикутній піраміді бічні ребра мають довжину 1 м і нахилені під кутом 45° до основи. Знайдіть довжину сторони основи.

6. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайдіть сторону основи піраміди.

7°. Бічна грань правильної чотирикутної піраміди нахилена до площини основи під кутом 60°. Площа основи піраміди 16 см^2. Знайдіть апофему піраміди.

8°. Бічна грань правильної чотирикутної піраміди утворює з основою кут, градусна міра якого 45°. Знайдіть довжину апофеми, якщо довжина ребра основи 3 м.

9. Міра двогранного кута при ребрі основи правильної трикутної піраміди 30°. Знайдіть міру:
1) плоского кута при вершині; 2) кута нахилу бічного ребра до основи.

10. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а радіус кола, вписаного в основу, $\sqrt{3}$ см. Обчисліть бічну поверхню піраміди.

11. Радіус кола, описаного навколо основи правильної чотирикутної піраміди, дорівнює $3\sqrt{2}$ см, а апофема – 10 см. Обчисліть бічну поверхню піраміди.

12*. Основа піраміди $SABCD$ – прямокутник із сторонами 8 см і 6 см. Дві бічні грані SAB і SBC перпендикулярні до площини основи, а ребро SD нахилене до основи під кутом 60°. Знайдіть кут нахилу ребра SA до основи.

13*. Основа піраміди – прямокутник із сторонами 4 см і 3 см. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи. Знайдіть кут нахилу найбільшого бічного ребра до площини основи, якщо кут нахилу найменшого бічного ребра до площини основи 30°.

14*. Основою піраміди є прямокутний трикутник з кутом 30° і протилежним до нього катетом, що дорівнює 30 дм. Бічні ребра піраміди нахилені до основи під кутом 60°. Знайдіть висоту піраміди.

15. Основа піраміди – прямокутник із сторонами $12\sqrt{2}$ см і $8\sqrt{2}$ см. Висота піраміди дорівнює 4 см і проходить через точку перетину діагоналей основи. Обчисліть кути нахилу бічних граней до площини основи.

16. У правильній чотирикутній піраміді бічні грані нахилені до основи під кутом 45°. Відстань від центра основи до бічної грані дорівнює $\sqrt{6}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

17. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює 60°. Висота піраміди дорівнює 4 м. Знайдіть площу бічної поверхні.

18. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди 12 і 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює $\sqrt{3}$ см.

19. Сторони основ правильної шестикутної зрізаної піраміди дорівнюють 4 і 2 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см і дорівнює одному з бічних ребер, що сполучає вершини тупих кутів ромбів основ.

20*. Основи зрізаної піраміди – прямокутні трикутники з гострим кутом 30° та гіпотенузами 6 см і 4 см. Бічні грані, що містять катети основ перпендикулярні до основ. Знайдіть площу поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює $\sqrt{3}$ см.

21**. Основи зрізаної піраміди – ромби з гострим кутом 60° та сторонами 8 см і 6 см. Знайдіть площу поверхні піраміди, якщо її висота $0,5\sqrt{3}$ см.

22*. У правильній чотирикутній піраміді площина, проведена паралельно основі, ділить висоту піраміди навпіл. Знайдіть сторону основи, якщо площа перерізу дорівнює 36 см^2.

23*. У чотирикутній піраміді площина, проведена паралельно основі, ділить висоту піраміди навпіл. Основа піраміди – прямокутник, довжина однієї зі сторін якого дорівнює 5 см. Знайдіть другу сторону основи, якщо площа утвореного перерізу 133 см^2.

24*. У піраміді переріз, паралельний основі, поділяє її висоту у відношенні 1 : 1. Площа основи більша за площу перерізу на 381 см^2. Знайдіть площу основи.

25**. У зрізаній піраміді площі основ дорівнюють S_1 і S_2. Доведіть, що площа перерізу, який поділяє бічне ребро навпіл, дорівнює $0,25(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$.

26**. У правильній трикутній піраміді сума кутів між апофемою і основою та бічним ребром і основою дорівнює $\frac{\pi}{4}$. Знайдіть ці кути.

27*. Обчисліть повну поверхню правильної трикутної піраміди, якщо радіус кола, описаного навколо його основи, дорівнює R, а бічне ребро утворює з висотою піраміди кут α.

28*. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, а двогранний кут при основі α. Визначте повну поверхню піраміди.

29*. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α, а довжина бічного ребра b. Визначте повну поверхню піраміди.

30*. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α, а радіус кола, описаного навколо бічної грані, R. Визначте повну поверхню піраміди.

31*. В основі піраміди лежить ромб із стороною a і гострим кутом α. Дві бічні грані піраміди, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи, а дві інші – нахилені до неї під кутом β. Визначте бічну поверхню піраміди.

32*. В основі піраміди лежить ромб з гострим кутом α. Дві бічні грані піраміди, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи. Дві інші – нахилені до неї під кутом β, а відстань від основи висоти піраміди до цих граней дорівнює d. Знайдіть висоту піраміди та довжину ребра основи.

33*. В основі піраміди лежить ромб з тупим кутом β. Дві бічні грані піраміди, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи. Дві інші – нахилені до неї під кутом α, а відстань від середини висоти піраміди до цих граней дорівнює l. Знайдіть висоту піраміди та довжину ребра основи.

34**. У трикутній піраміді провели дві площини, паралельні основі, кожна з яких перетинає всі бічні ребра цієї піраміди. Доведіть, що центроїди основи і отриманих перерізів лежать на одній прямій.

35**. Плоский кут при вершині правильної піраміди дорівнює 30°. Знайдіть міру двогранного кута при бічному ребрі цієї піраміди, якщо вона: 1) трикутна; 2) чотирикутна; 3) шестикутна; 4) n-кутна.

36**. Знайдіть відстань від основи висоти правильної піраміди до її бічної грані, якщо тангенс міри двогранного ребра при бічному ребрі цієї піраміди дорівнює $\sqrt{2}$, довжина сторони основи 1 м, а піраміда є: 1) трикутною; 2) чотирикутною; 3) шестикутною; 4) n-кутною.

37**. Відстань від середини висоти до ребра правильної піраміди дорівнює 2 см, а синус міри двогранного кута при ребрі основи дорівнює $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Знайдіть міру двогранного кута при бічному ребрі піраміди, якщо вона: 1) трикутна; 2) чотирикутна; 3) шестикутна; 4) n-кутна.

38**. Середина висоти правильної піраміди віддалена від її грані на відстань d, двогранний кут при бічному ребрі дорівнює δ. Знайдіть площу основи даної піраміди, якщо вона: 1) трикутна; 2) чотирикутна; 3) шестикутна; 4) n-кутна.

§ 17 Геометрія тетраедра

Із самого початку навчання стереометрії ми розв'язували задачі, пов'язані з геометрією тетраедра. Це найпростіша, проте «найголовніша» просторова фігура, аналогічно трикутнику в планіметрії. Геометрія тетраедра не менш цікавіша, ніж геометрія його «плоского брата» – трикутника.

Повернемося до трикутної піраміди – тетраедра й розглянемо особливості її геометрії окремо.

Тетраедр, як трикутна піраміда, має такі ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ:

- **усі грані – трикутники;**
- **має 4 вершини, 4 грані, 6 ребер;**
- **переріз, паралельний основі, – трикутник, подібний до трикутника основи;**
- **площі трикутників перерізу та основи відносяться як квадрати їх відстаней від вершини.**

Зрозуміло, що всі факти, які ми обговорювали стосовно зрізаної та правильної пірамід, відносяться й до зрізаного та правильного тетраедрів відповідно. (Сформулюйте ці властивості самостійно.)

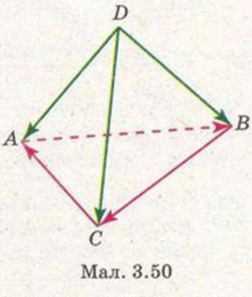
Далі ми розглянемо особливості тетраедра, які відрізняють його від інших видів пірамід.

Один з таких фактів – твердження, відоме вам з розв'язування задач на вектори у просторі як *правило чотирьох точок* (§ 7, с. 46).

Для довільних точок простору A, B, C, D виконується рівність

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0.$$

Якщо сполучити довільні чотири точки простору A, B, C, D, які не містяться в одній площині, отримаємо *тетраедр $ABCD$. Для векторів з кінцями у вершинах тетраедра $ABCD$ виконується правило чотирьох точок* (мал. 3.50).



Мал. 3.50

Зауваження. Пари векторів кожного скалярного добутку належать мимобіжним ребрам тетраедра, а напрям цих векторів визначається так.

- Вектори, що лежать на бічних ребрах, – направляємо від вершини тетраедра до вершин основи.
- Вектори, які належать ребрам основи, направляємо за годинниковою стрілкою.

(Можна всі вектори на ребрах основи направити і проти годинникової стрілки – головне, щоб сума зазначених векторів дорівнювала нулю.)

Нагадаємо, що для бісекторів двогранних кутів тетраедра ми довели у § 11 (с. 86) такий факт.

Бісектори двогранних кутів тетраедра перетинаються в одній точці.

Із цього маємо важливу властивість тетраедра.

У будь-якому тетраедрі існує точка (і до того єдина), яка рівновіддалена від усіх граней тетраедра. Це точка перетину бісекторів двогранних кутів цього тетраедра.

СЕРЕДНІ ЛІНІЇ ТА МЕДІАНИ ТЕТРАЕДРА

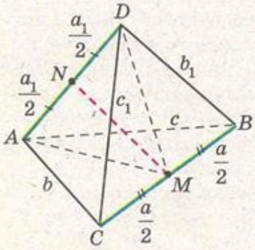
Середніми лініями тетраедра (або *бімедіанами*) називають відрізки, які сполучають середини мимобіжних ребер тетраедра.

Медіанами тетраедра називають відрізки, що сполучають вершини тетраедра із центроїдами протилежних граней.

Доведемо кілька цікавих опорних фактів, пов'язаних із цими відрізками.

Теорема 1. **Якщо в тетраедрі позначити мимобіжні ребра відповідно a і a_1, b і b_1, c і c_1, то довжину середньої лінії тетраедра n_a, що сполучає середини ребер a і a_1, можна обчислити за формулою**

$$n_a^2 = \frac{1}{4}(b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2).$$



Мал. 3.51

Доведення

Нехай у тетраедра $ABCD$ точки M і N – середини ребер BC і AD; a, b і c – відповідно довжини ребер BC, AC і AB, а a_1, b_1 і c_1 – ребер мимобіжних до BC, AC і AB (мал. 3.51).

1) DM і AM – медіани трикутників BDC і ABC, тоді (див. форзац):

$$DM^2 = \frac{2(b_1^2 + c_1^2) - a^2}{4} \text{ і } AM^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

2) MN – медіана трикутника AMD, тоді:

$$MN^2 = \frac{2(AM^2 + DM^2) - a_1^2}{4} = \frac{1}{4}(b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2).$$

Теорему доведено.

Ця теорема дає змогу легко обчислити кут між мимобіжними ребрами тетраедра, якщо відомо довжини всіх ребер цього тетраедра.

Приклад 1. **Доведіть, що для довільного тетраедра $ABCD$, мимобіжні ребра якого позначено як a і a_1, b і b_1, c і c_1, кут між ребрами a і a_1 можна обчислити за формулою**

$$\cos\varphi = \frac{\left|b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2\right|}{2aa_1}.$$

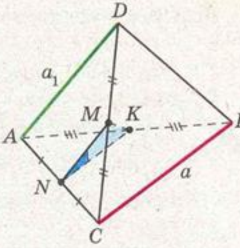
Доведення

1) Сполучимо середини N, M і K ребер AC, DC і AB відрізками (мал. 3.52). Враховуючи, що $NM \parallel AD$ і $NK \parallel CB$ як середні лінії $\triangle ADC$ і $\triangle ABC$, маємо: $a \hat{\ } a_1 = \angle MNK \triangleq \varphi$.

2) У $\triangle NMK$: $NM = \frac{a_1}{2}$ (як середня лінія $\triangle ADC$), $NK = \frac{a}{2}$ (як середня лінія $\triangle ABC$).

За теоремою косинусів:

$$MK^2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\frac{a_1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cos\varphi.$$



Мал. 3.52

За доведеною теоремою:

$$MK^2 = \frac{1}{4}(a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2).$$

Тоді

$$\frac{1}{4}(a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2) =$$

$$= \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\frac{a_1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cos\varphi.$$

Звідси

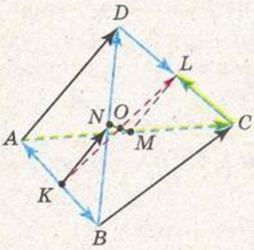
$$\cos\varphi = \frac{\left|b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2\right|}{2aa_1}, \text{ щ. в. д.}$$

Повернемося до факту, розглянутого у § 6 (с. 37) як приклад застосування векторного методу.

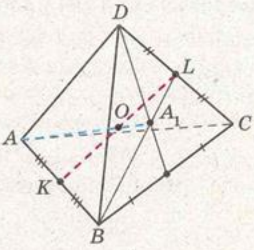
Теорема 2. **У тетраедрі $ABCD$ точки K і L – середини ребер тетраедра AB і CD. Тоді для середньої лінії даного тетраедра KL виконуються твердження:**

1. $\overline{KL} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD}) = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AD})$.
2. **Усі середні лінії тетраедра перетинаються в одній точці й діляться нею навпіл.**
3. **Точка перетину середніх ліній тетраедра належить медіані тетраедра і ділить її у відношенні 3 : 1, рахуючи від вершини.**

Доведення



а)



б)

Мал. 3.53

1. Запишемо дві рівності (мал. 3.53-а):

$$\overline{KL} = \overline{KA} + \overline{AC} + \overline{CL} \text{ і } \overline{KL} = \overline{KB} + \overline{BD} + \overline{DL}.$$

Додамо їх і врахуємо, що $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$ і $\overrightarrow{CL} + \overrightarrow{DL} = \vec{0}$. Маємо

$$2\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.$$

Твердження (1) доведено.

2. Нехай точки M і N – середини ребер AC і BD, а точка O – середина відрізка KL (мал. 3.53-а). Тоді

$KN = \frac{1}{2}AD = ML$, $KN \parallel AD \parallel ML$ – як середні лінії у $\triangle ADB$ і $\triangle ACD$. Тоді O – середина діагоналей паралелограма $ANLM$. Тобто O – середина відрізка MN.

Аналогічно отримаємо, що O – середина й інших середніх ліній тетраедра.

Твердження (2) доведено.

3. Нехай A_1 – центроїд $\triangle BCD$ (мал. 3.53-б). Запишемо вектори $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{AA_1}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$:

1) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) =$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD});$

2) $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}).$

Врахуємо, що $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. Маємо

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

Звідси $\overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}$. Тоді точка O лежить на відрізку AA_1 і поділяє його у відношенні $AO : OA_1 = 3 : 1$.

Твердження (3) доведено.

Теорему доведено.

Н Наслідок. **Усі медіани тетраедра перетинаються в одній точці, яка поділяє кожну з них у відношенні 3 : 1, починаючи з вершини.**

Правильність наслідку випливає безпосередньо з твердження (3) теореми. Маємо, що всі медіани тетраедра проходять через точку O перетину середніх ліній тетраедра – *центр мас тетраедра*.

Доведемо, спираючись на теорему 2, такі опорні факти.

Приклад 2. **У тетраедрі $ABCD$ точки K і L – середини ребер тетраедра AB і CD. Доведіть, що**

$$KL \leqslant \frac{1}{2}(AC + BD),\ KL \leqslant \frac{1}{2}(BC + AD).$$

Розв'язання

За теоремою 2 маємо: $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$. Звідси

$$KL = \left|\overrightarrow{KL}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{BD}\right|\right) = \frac{1}{2}(AC + BD).$$

Аналогічно: $KL \leqslant \frac{1}{2}(BC + AD)$.

Щ. в. д.

Приклад 3. **У тетраедрі $ABCD$ точки K і L – середини ребер AB і CD. Доведіть, що AC, BD, KL – паралельні одній площині.**

Розв'язання

За теоремою 2 маємо: $\overline{KL} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})$. Тоді, якщо відкласти вектори $\overline{KL}$, $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ від однієї точки, то отримаємо, що ці вектори належатимуть одній площині, яка паралельна мимобіжним прямим AC і BD. Звідси відрізки AC, BD і KL паралельні одній площині.

Щ. в. д.

Зауваження. Перше твердження теореми 2 можна узагальнити для відрізка KL, коли точки K і L ділять мимобіжні ребра AB і CD тетраедра $ABCD$ не навпіл, а в деякому співвідношенні λ, тобто $AK : KB = CL : LD = \lambda$. Здійсніть таке узагальнення самостійно.

Розглянемо окремі види тетраедра.

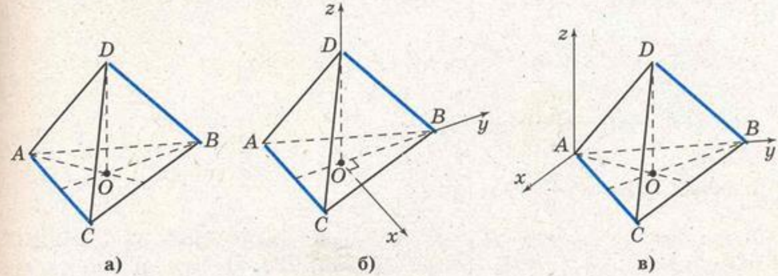
ПРАВИЛЬНИЙ ТЕТРАЕДР

Нагадаємо, що *правильним* називають тетраедр, у якого всі грані – рівні правильні трикутники. (Не плутати з правильною пірамідою, яка має рівні бічні ребра і правильний трикутник – основу. Її бічні грані – рівні між собою рівнобедрені трикутники, які не обов'язково є правильними.)

Одна з головних властивостей правильного тетраедра – перпендикулярність його мимобіжних ребер. Нагадаємо доведення цього факту.

Приклад 4. **Доведіть перпендикулярність мимобіжних ребер правильного тетраедра.**

Дано: $ABCD$ – правильний тетраедр.
Довести: $DB \perp AC$ (мал. 3.54-а).



Мал. 3.54

1) $ABCD$ – правильний тетраедр, $DO \perp (ABC)$ $\rightarrow O$ – центр $\triangle ABC$.

$$\left.\begin{array}{l}2)\ DO \perp (ABC)\\ \quad BO \equiv \text{Пр}_{ABC}BD\\ \quad BO \perp AC\end{array}\right| \to DB \perp AC \text{ (за ТТП).}$$

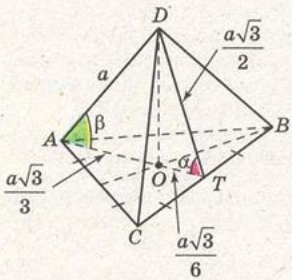
Щ. в. д.

Зауваження. Твердження про перпендикулярність мимобіжних ребер правильного тетраедра можна довести й іншими способами. Наприклад, координатним методом (за малюнком 3.54-б або 3.54-в), векторним методом (аналогічно до доведення п. 1 теореми 2), за правилом чотирьох точок тощо. Спробуйте здійснити доведення цього твердження не менше як пятьма способами.

З означення маємо, що **всі плоскі кути правильного тетраедра рівні й кожен з них складає по 60°**. Знайдемо міри інших кутів правильного тетраедра.

Приклад 5. **Дано правильний тетраедр. Знайдіть міру:**
1) його двогранного кута;
2) кута між його ребром і гранню, що не містить це ребро.

Розв'язання



Мал. 3.55

Нехай $ABCD$ – правильний тетраедр, DO – його висота, DT – апофема (мал. 3.55).

За властивістю правильної піраміди: O – центр правильного трикутника ABC,

$$(DCB)\widehat{\ }(ABC) = \angle DTO \triangleq \alpha,$$

$$(AD)\widehat{\ }(ABC) = \angle DAO \triangleq \beta,\ AC \triangleq a.$$

1) $\underline{\triangle DOT}$: $\angle O = 90°,\ OT = \dfrac{a\sqrt{3}}{6},\ DT = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Тоді $\cos\alpha = OT : DT = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} : \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{3}.$

2) $\underline{\triangle DOA}$: $\angle O = 90°,\ AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3},\ AD = a.$

Тоді $\cos\beta = AO : AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} : a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

Відповідь: 1) $\arccos\dfrac{1}{3}$; 2) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Легко довести (зробіть це самостійно) такі ВЛАСТИВОСТІ СЕРЕДНІХ ЛІНІЙ ТА МЕДІАН ПРАВИЛЬНОГО ТЕТРАЕДРА з ребром a:

- **усі середні лінії рівні між собою;**
- **середні лінії попарно взаємно перпендикулярні;**
- **кожна із середніх ліній перпендикулярна до ребер, які вона сполучає;**
- **усі медіани є його висотами й рівні між собою;**

• **довжина середньої лінії дорівнює $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, а медіани $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.**

Розглянемо ще одну опорну задачу про переріз правильного тетраедра.

Приклад 6. **Через середину ребра правильного тетраедра провели площину паралельно двом його мимобіжним ребрам. Знайдіть площу перерізу, якщо довжина ребра даного тетраедра дорівнює a.**

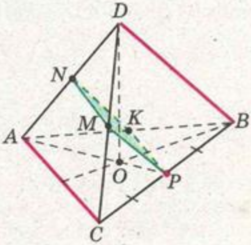
Розв'язання

Нехай $ABCD$ – правильний тетраедр, P – середина ребра CB, переріз $PMNK$ паралельний мимобіжним ребрам DB і AC (мал. 3.56).

1) Маємо: $MP \parallel DB$ (MP і DB належать одній площині й не перетинаються), $CP = PB$. Тоді MP – середня лінія $\triangle CDB$ і $CM = MD$.

2) Аналогічно $NM \parallel AC$, $NK \parallel DB$, $KP \parallel AC$.

3) $MP \parallel DB \parallel NK$, $NM \parallel AC \parallel KP$. Тоді: $NKPM$ – паралелограм, кожна сторона якого дорівнює $\frac{a}{2}$; $\angle NMP = \widehat{(AC)(DB)} = 90^\circ$ (див. приклад 4, с. 145). Тобто $NKPM$ – квадрат.



Мал. 3.56

4) $NKPM$ – квадрат із стороною $\frac{a}{2}$. Його площа дорівнює $0{,}25a^2$.

Відповідь: $0{,}25a^2$.

РІВНОГРАННИЙ ТЕТРАЕДР

Тетраедр, усі грані якого є рівними трикутниками, називають *рівногранним*.

а) б)

Мал. 3.57

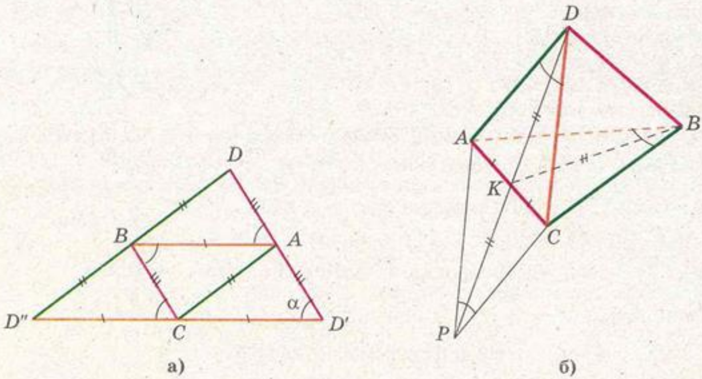
На перший погляд рівногранний тетраедр – це правильний тетраедр і ніякий інший. Насправді гранню рівногранного тетраедра може бути довільний гострокутний трикутник (мал. 3.57-а). Щоб побудувати такий тетраедр можна взяти довільний гострокутний трикутник і скласти його згинанням по середніх лініях (мал. 3.57-б). Маємо, що

• **у рівногранного тетраедра мимобіжні ребра рівні;**

- **сума плоских кутів при кожній з вершин рівногранного тетраедра дорівнює 180°;**
- **гранями рівногранного тетраедра можуть бути тільки гострокутні трикутники.**

Підкреслимо, що **розгорткою рівногранного тетраедра, яку отримано розрізанням його за трьома ребрами, що виходять з однієї вершини, може бути тільки гострокутний трикутник.**

Доведемо, що розгорткою рівногранного тетраедра не може бути прямокутний або тупокутний трикутник. Нехай кут α розгортки, що відповідає куту D грані ACD, тупий або прямий (мал. 3.58-а).



Мал. 3.58

Трикутники ACD і ACB рівні, тоді рівні й відповідні їх медіани: $DK = BK$ (мал. 3.58-б).

Подвоїмо медіану DK трикутника ACD ($KP = DK$) – отримаємо паралелограм $ADCP$ (мал. 3.58-б). Маємо: $KP = DK = BK$.

У паралелограмі $ADCP$ кут D негострий. Тоді

$$AC \geqslant DP = DK + KP = DK + KB.$$

З нерівності для сторін трикутника DKB маємо:

$$DK + KB > DB = AC \geqslant DK + KB.$$

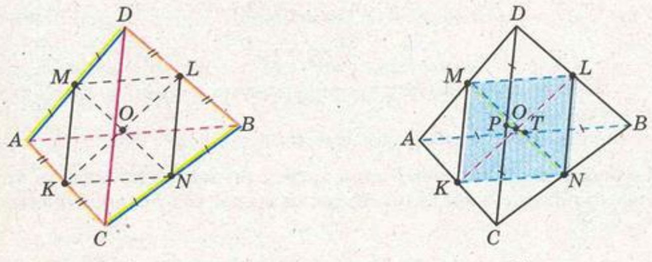
Маємо протиріччя – припущення хибне.

Розглянемо *властивості середніх ліній* рівногранного тетраедра.

Приклад 7. **Доведіть, що середні лінії рівногранного тетраедра: (1) попарно взаємно перпендикулярні і (2) кожна з них перпендикулярна до ребер, які вона сполучає.**

Доведення

1) У рівногранного тетраедра $ABCD$ точки M, N, K, L – середини сторін відповідно AD, CB, AC і DB. Доведемо, що $MN \perp KL$.



а)　　　　б)

Мал. 3.59

1.1) З $\triangle ACD$ і $\triangle BCD$ (мал. 3.59-а): $KM = CD : 2$ і $LN = CD : 2$, як середні лінії трикутників.

1.2) Аналогічно $KN = ML = AB : 2$. $AB = CD$, як мимобіжні ребра рівногранного тетраедра. Тоді $KMLN$ – ромб і $MN \perp KL$ як його діагоналі.

Аналогічно маємо, що всі середні лінії даного тетраедра взаємно перпендикулярні.

2.1) Позначимо середини ребер CD і AB як P і T відповідно (мал. 3.59-б). За доведеним $PT \perp KL$, $PT \perp MN$. Тоді PT перпендикулярна до площини ромба $KMLN$, а отже, $PT \perp KN$.

2.2) $PT \perp KN$, $KN \parallel AB$ (як середня лінія у $\triangle ABC$). Тоді $PT \perp AB$.

Аналогічно маємо, що всі середні лінії даного тетраедра перпендикулярні до ребер, які вони сполучають.

Твердження задачі доведено.

ОРТОЦЕНТРИЧНИЙ ТЕТРАЕДР

Як відомо, висоти трикутника перетинаються в одній точці – ортоцентрі трикутника. Висоти тетраедра (або їх продовження), на відміну від трикутника, не обов'язково перетинаються в одній точці.

Тетраедр, у якого висоти перетинаються в одній точці, називають *ортоцентричним*, а таку точку – *ортоцентром*.

У § 8 (с. 56) ми довели координатно-векторним способом таку теорему.

Т Теорема 3. **Для тетраедра твердження:**
(1) усі висоти перетинаються в одній точці;
(2) протилежні ребра перпендикулярні –
є рівносильними.

Н Наслідок. **Якщо в тетраедра всі його висоти перетинаються в одній точці (або його протилежні ребра перпендикулярні), то його вершини проектуються в ортоцентри граней.**

З цієї теореми випливають такі ВЛАСТИВОСТІ ортоцентричного тетраедра.

- **Усі вершини ортоцентричного тетраедра проектуються в ортоцентр протилежної грані.**

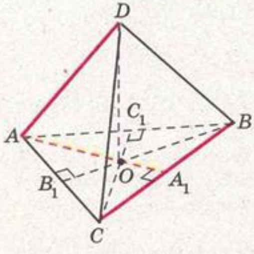
- **В ортоцентричного тетраедра мимобіжні ребра попарно перпендикулярні.**

З тієї самої теореми маємо таку *ознаку* ортоцентричного тетраедра.

- **Якщо мимобіжні ребра тетраедра перпендикулярні, то такий тетраедр є ортоцентричним.**

Доведемо ще одну *ознаку ортоцентричного тетраедра.*

Теорема 4. **Якщо хоча б одна висота тетраедра проходить через ортоцентр протилежної грані, то такий тетраедр є ортоцентричним.**



Мал. 3.60

Доведення

Нехай в тетраедрі $ABCD$ основа O висоти DO є ортоцентром грані ABC (мал. 3.60).

Маємо: з точки D до площини ABC проведено перпендикуляр DO і похилу DA, проекція якої AO перпендикулярна до прямої CB цієї площини. Тоді (за ТТП) $AD \perp CB$.

Аналогічно отримаємо перпендикулярність інших двох пар мимобіжних ребер тетраедра. Тоді (за попередньою ознакою) даний тетраедр є ортоцентричним.

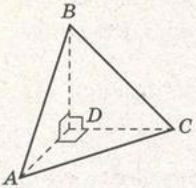
Теорему доведено.

Як наслідок маємо, що **правильна трикутна піраміда є ортоцентричним тетраедром,** оскільки її вершина проектується в центр правильного трикутника основи, що є його ортоцентром.

Зауваження. З доведеної ознаки випливає простий спосіб побудови ортоцентричного тетраедра: через ортоцентр довільного трикутника провести перпендикулярну пряму до його площини і сполучити будь-яку точку цієї прямої з вершинами трикутника.

ПРЯМОКУТНИЙ ТЕТРАЕДР

Цікавим прикладом ортоцентричного тетраедра є *прямокутний* тетраедр, усі плоскі кути якого при одній вершині прямі (мал. 3.61). Протилежну цій вершині грань називають *основою* прямокутного тетраедра ($\triangle ABC$ на малюнку 3.61).



Мал. 3.61

Вершини основи прямокутного тетраедра проектуються у його четверту вершину (на малюнку 3.61 – точка D). Її називають *вершиною прямокутного тетраедра.*

Висоти прямокутного тетраедра перетинаються в одній точці (його вершині) – він є **ортоцентричним.**

За властивістю ортоцентричного тетраедра **вершина прямокутного тетраедра проектується в ортоцентр його основи.**

Останній факт може бути використаний при розв'язуванні задач.

Приклад 8. У тетраедрі $SABC$ усі кути граней-трикутників при вершині S прямі. Точка S проектується на площину ABC у точку P. Площі трикутників CSB і ABC дорівнюють відповідно S_1 і S_2. Знайдіть площу трикутника CPB.

Розв'язання

1) Даний тетраедр – прямокутний з основою ABC. Тоді його вершина S проектується на грань ABC у її ортоцентр P. Звідси $AD \perp CB$ (мал. 3.62).

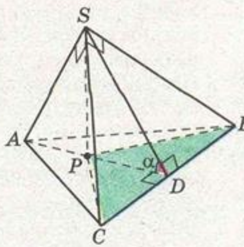
2) $SP \perp (ABC)$, $AD \perp CB$. Тоді, за теоремою про три перпендикуляри, $SD \perp CB$ і

$$\angle SDA = (SCB)\widehat{\ }(ABC) \triangleq \alpha.$$

3) Шукана площа трикутника PCB (як площа ортогональної проекції трикутника SCB) дорівнює $S_x = S_1 \cos\alpha$.

4) З $\triangle ASD$ ($\angle ASD = 90°$):

$$\cos\alpha = \frac{SD}{AD} = \frac{2S_1 : CB}{2S_2 : CB} = \frac{S_1}{S_2}.$$



Мал. 3.62

Тоді $S_x = \dfrac{S_1^{\,2}}{S_2}$.

Відповідь: $\dfrac{S_1^{\,2}}{S_2}$.

Доведемо таку *властивість основи прямокутного тетраедра*.

Приклад 9. Доведіть, що **основою прямокутного тетраедра може бути тільки гострокутний трикутник.**

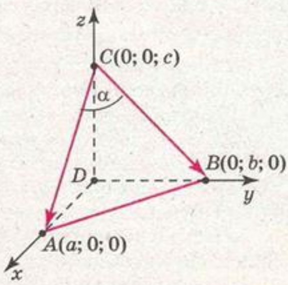
Доведення

1) Введемо прямокутну систему координат так, щоб початок координат збігався з вершиною D прямокутного тетраедра $DABC$, а ребра AD і DB містилися на осях абсцис і ординат відповідно (мал. 3.63).

Тоді: $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, де a, b, c – відповідно довжини ребер DA, DB, DC даного тетраедра.

Позначимо кут ACB через α і знайдемо його як кут між векторами $\overline{CA}(a; 0; -c)$ і $\overline{CB}(0; b; -c)$:

$$\cos\alpha = \frac{a \cdot 0 + 0 \cdot b + c^2}{|CA| \cdot |CB|} > 0.$$



Мал. 3.63

Звідси маємо, що кут α – гострий.

Аналогічно отримаємо, що інші два кути основи гострі.

Щ. в. д.

Завдання 14

1*. Чи можуть усі грані тетраедра бути: **1)** прямокутними трикутниками; **2)** рівнобедреними прямокутними трикутниками?

2*. Основою тетраедра є правильний трикутник зі стороною a, плоский кут при вершині прямий. Знайдіть висоту тетраедра.

3*. Через довільну точку ребра правильного тетраедра, що не збігається з його вершиною, провели площину, яка паралельна двом його мимобіжним ребрам. Знайдіть периметр утвореного перерізу, якщо довжина ребра даного тетраедра a.

4*. Побудуйте тетраедр, у якого дві висоти не перетинаються.

5*. Побудуйте тетраедр, у якого дві висоти перетинаються в одній точці, дві інші – в другій.

6*. Доведіть, що можна побудувати трикутник, сторони якого дорівнюють сумам мимобіжних ребер довільного тетраедра.

7*. Через вершину A тетраедра $ABCD$ провели три площини перпендикулярно до протилежних ребер. Доведіть, що всі ці площини перетинаються по одній прямій.

8*. Вершина тетраедра $DABC$ рівновіддалена від вершин основи на 10 см. У прямокутному трикутнику основи довжини катетів дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть повну поверхню даного тетраедра.

9*. Основою тетраедра $DABC$ є прямокутний рівнобедрений трикутник, $AC = BC = 6$ см. Ребро DB перпендикулярне до площини основи. Грань ADC нахилена до основи під кутом $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

10*. Грані DAC і DAB тетраедра $DABC$ перпендикулярні до площини основи, грань DBC утворює з нею кут $45°$. Знайдіть площу бічної поверхні, якщо $AC = CB = a$, $\angle ACB = 120°$.

11*. Довжина ребра правильного тетраедра 12 см. Знайдіть довжину відрізка, що сполучає середини його мимобіжних ребер.

12*. Знайдіть відстань між мимобіжними ребрами правильного тетраедра, якщо довжина його сторони 6 см.

13.** У правильній трикутній піраміді сума кутів між апофемою і основою та бічним ребром і основою дорівнює $\frac{\pi}{4}$. Знайдіть міру кута між суміжними бічними гранями.

14.** Відрізок прямої, що сполучає центр основи правильної трикутної піраміди із серединою її бічного ребра, дорівнює стороні основи. Знайдіть косинус кута між суміжними бічними гранями.

15.** У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a, двогранний кут при бічному ребрі 2φ. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

16.** **Доведіть, що якщо хоча б дві пари мимобіжних ребер тетраедра взаємно перпендикулярні, то такий тетраедр є ортоцентричним.**

17.** **Доведіть, що тетраедр є ортоцентричним тоді й тільки тоді, коли його середні лінії рівні.**

18.** **Доведіть, що тетраедр є ортоцентричним тоді й тільки тоді, коли суми квадратів його мимобіжних ребер рівні.**

19.** Усі грані паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромби. Доведіть, що тетраедр A_1C_1BD є ортоцентричним.

20.** Три бічні грані трикутної піраміди взаємно перпендикулярні, їх площі відносяться як $2 : 6 : 9$. Площа основи дорівнює 66 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

21.** Доведіть, що якщо плоскі кути при вершині трикутної піраміди прямі, то сума квадратів площ бічних граней дорівнює квадрату площі основи.

22**. У тетраедрі $DABC$ всі три плоскі кути при вершині D прямі. Площі трикутників ADB, ACB, AHB дорівнюють відповідно S, S_1, S_2. Доведіть, що $S = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

23**. Площа основи трикутної піраміди 14 см^2. Бічні ребра взаємно перпендикулярні, їх довжини виражено послідовними парними числами (у см). Знайдіть площу бічної поверхні.

24**. Усі грані тетраедра – подібні між собою прямокутні трикутники. Знайдіть відношення найбільшого ребра до найменшого.

ПИТАННЯ НА УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗНАНЬ ЗА § 13–17

1°. Чи може піраміда мати: **1)** більше вершин, ніж граней; **2)** більше граней, ніж вершин?

2°. Чи існує піраміда, в якої: **1)** число ребер удвічі більше за суму числа вершин і граней; **2)** число ребер є непарним числом?

3°. Яке найменше число ребер може мати багатогранник?

4°. Чи буде правильною піраміда, якщо її бічні грані: **1)** рівні трикутники; **2)** рівні рівнобедрені трикутники?

5°. Які відомості треба мати про призму, щоб стверджувати, що вона є правильною?

6. Сформулюйте кілька ознак правильної: **1)** призми; **2)** піраміди.

7. Чи можна з прямокутного аркуша картону розміру 52×22 см виготовити модель правильної чотирикутної призми, висота якої дорівнює 20 см, а сторона основи 10 см?

8. Чи можуть два нерівних прямих паралелепіпеди, висоти яких рівні, мати рівні бічні поверхні?

9*. У правильній шестикутній призмі бічні грані – рівні прямокутники. Сформулюйте обернене твердження й доведіть його хибність.

10. Чи існує призма, в якої:
1) бічне ребро перпендикулярне тільки до одного ребра основи;
2) тільки одна бічна грань перпендикулярна до основи?

11. Скільки граней, перпендикулярних до основи, може мати піраміда?

12. На які багатогранники поділяє трикутну призму площина, яка проходить через вершину верхньої основи і протилежну до неї сторону нижньої основи?

13. Чи можна стверджувати, що призма правильна, якщо всі її двогранні кути при ребрах основи рівні?

14. Чи можна стверджувати, що піраміда правильна, якщо всі її двогранні кути при ребрах основи рівні?

15*. Чи можна стверджувати, що тетраедр правильний, якщо всі його двогранні кути рівні?

16*. Чи правильним є твердження, що всі висоти тетраедра перетинаються в одній точці?

17*. Усі бічні ребра піраміди рівні між собою. Чи може її основою бути: **1)** правильний багатокутник; **2)** ромб; **3)** прямокутник; **4)** трапеція?

18*. Дано багатогранник. З одного боку – це правильна призма, з другого – неправильний багатогранник. Які властивості цього багатогранника?

19*. Усі плоскі кути при вершині піраміди прямі. Скільки сторін може мати багатокутник основи? Чому?

20*. Прямокутний паралелепіпед поставили на одну грань і обчислили площу бічної поверхні S_1. Потім його поставили на другу грань, а після того на третю – отримали значення для площі бічної поверхні відповідно S_2 і S_3. Серед вказаних граней не було рівних. Чи можна знайти площу поверхні паралелепіпеда?

21*. У трикутній призмі відомі відстані між прямими, які проходять через її бічні ребра, і довжина бічного ребра. Чи можна за цими даними визначити для цієї призми: **1)** площу бічної поверхні; **2)** площу поверхні?

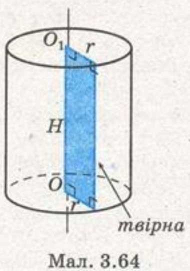
§ 18 Властивості циліндра

Тіла у формі циліндра зустрічаються як у природі, так і в повсякденному житті. Властивості таких тіл людство вивчає і застосовує з давнини. Так, винайдення колеса, застосування круглих стовбурів дерев для переміщення вантажу різко змінили якість життя людей, розширили їхні можливості. На сьогодні це ще й різноманітні деталі машин, архітектурні споруди тощо.

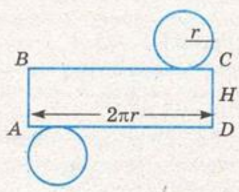
Абстрактні тіла обертання, зокрема циліндр, були відомі ще в Стародавній Греції. Евклід у «Началах» писав: «Циліндр походить від обертання прямокутника навколо нерухомої сторони».

З циліндром, у розумінні прямого кругового циліндра, ви ознайомлювалися у 9-му класі. У § 13 (с. 104) вводилося поняття узагальненого циліндра та прямого кругового циліндра як тіла обертання. У цьому параграфі ми вивчатимемо властивості саме прямого кругового циліндра. Надалі будемо називати його просто циліндром.

Нагадаємо ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТИ ЦИЛІНДРА, який отримано обертанням прямокутника навколо однієї з його сторін (мал. 3.64). Пряма, навколо якої обертався прямокутник, називається *віссю циліндра*; паралельна їй протилежна сторона прямокутника – *твірною*; круги, описані двома іншими сторонами прямокутника, – *основами* циліндра.



Мал. 3.64



Мал. 3.65

Висота циліндра – відстань між його основами (перпендикуляр, проведений з довільної точки однієї основи до другої основи). Вона дорівнює твірній циліндра і відрізку осі обертання, який відтинається від цієї осі основами циліндра.

Радіус кола основи циліндра називають *радіусом циліндра*.

Зазвичай *розмірами циліндра* називають розміри прямокутника, обертанням якого було отримано циліндр. Вони відповідно дорівнюють висоті циліндра та його радіусу.

На малюнку 3.65 маємо *розгортку циліндра*. Прямокутник – розгортка бічної поверхні, два круги – основи циліндра. Сторони такого прямокутника дорівнюють відповідно висоті циліндра та довжині кола його основи.

Площа бічної поверхні $S_б$ дорівнює площі прямокутника розгортки, одна сторона якого дорівнює висоті циліндра H, а друга – довжині кола його основи $2\pi r$. Тобто

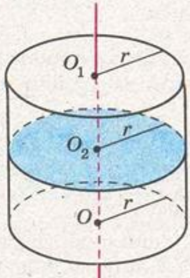
$$S_б = 2\pi rH.$$

Зрозуміло, що *площа повної поверхні* циліндра є сумою площі його бічної поверхні та площ двох основ:

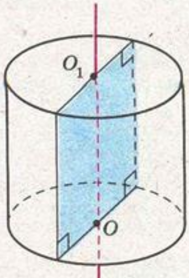
$$S = 2\pi rH + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + H).$$

Розглянемо ПЕРЕРІЗИ ЦИЛІНДРА ПЛОЩИНАМИ.

Як відомо, кожна точка плоскої фігури, обертанням якої задано просторову фігуру обертання, описує коло із центром на осі обертання у площинах, перпендикулярних до цієї осі (вказана точка не належить самій осі обертання). Тоді, якщо січна площина перпендикулярна до осі циліндра (тобто паралельна його основам), то в перерізі маємо круг, що дорівнює основам циліндра (мал. 3.66).



Мал. 3.66



Мал. 3.67

Усі твірні циліндра паралельні між собою. Тоді через дві довільні твірні циліндра можна провести площину. Вона або паралельна осі циліндра, або проходить через неї. Тобто можливі два випадки.

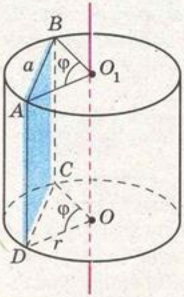
Січна площина проходить через вісь циліндра – переріз називають *осьовим*. Осьовий переріз циліндра – прямокутник, дві сторони якого – твірні циліндра, а інші дві – діаметри основ (мал. 3.67).

Циліндр, осьовим перерізом якого є квадрат, називають *рівностороннім*.

Будь-який осьовий переріз циліндра є його площиною симетрії.

Січна площина паралельна осі циліндра – у перерізі маємо прямокутник, дві сторони якого – твірні циліндра, а інші дві – паралельні й рівні між собою хорди основ (мал. 3.68). Довжина цих хорд залежить від кута, що утворюють радіуси основи, проведені в точки перетину січної площини з колом цієї основи. Розглянемо розв'язання опорної задачі.

Приклад 1. Хорду основи циліндра, утворену при його перетині з площиною, паралельною осі цього циліндра, бачимо з центра даної основи під кутом φ. Знайдіть її довжину, якщо радіус циліндра дорівнює r.



Мал. 3.68

Розв'язання

Радіуси O_1A і O_1B кола основи, проведені в точки його перетину з січної площиною, утворюють кут φ (мал. 3.68).

Довжину a хорди AB знайдемо з $\triangle AO_1B$ за допомогою теореми косинусів:

$$a^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\varphi = 2r^2(1-\cos\varphi) = 4r^2\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

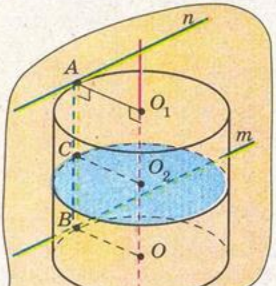
Кут $\frac{\varphi}{2}$ не перевищує $90°$, тоді $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$, маємо

$$a = 2r\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| = 2r\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Відповідь: $2r\sin\frac{\varphi}{2}$.

ДОТИЧНА ПЛОЩИНА

Площина, яка має з циліндром спільні точки, що є точками лише однієї твірної, називають *дотичною до циліндра* (мал. 3.69).



Мал. 3.69

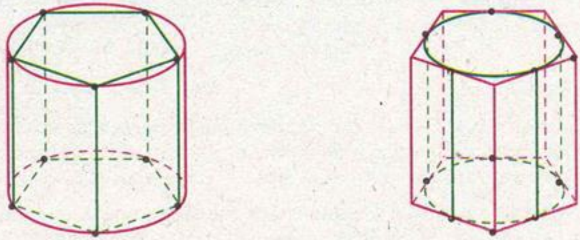
Така площина перпендикулярна до площин основ і має з колом кожної з основ по одній спільній точці. На малюнку 3.69 маємо дотичну до циліндра площину α, що має з ним спільну твірну AB.

Площина основи перетинає дотичну площину по прямій, яка є дотичною до кола цієї основи (оскільки відповідна пряма має тільки одну спільну точку з колом основи). На малюнку 3.69 площини основ циліндра перетинають α по прямих n і m, дотичних до кіл основ у точках A і B відповідно. Тоді радіуси основ O_1A і OB перпендикулярні до n і m відповідно та до твірної AB. Звідси осьовий переріз, який проходить через твірну AB даного циліндра, перпендикулярний до площини α. Маємо таку властивість дотичної площини.

Площина, дотична до циліндра, перпендикулярна до осьового перерізу, що проходить через твірну, яка лежить у дотичній площині.

ПРИЗМА І ЦИЛІНДР

Призмою, вписаною в циліндр, називається призма, у якої основи вписано в кола основ циліндра, а бічними ребрами є твірні циліндра (мал. 3.70-а). Про відповідний циліндр кажуть, що він *описаний навколо призми*.



а) б)

Мал. 3.70

Зауваження. Для того щоб навколо призми можна було описати циліндр, необхідно і достатньо, щоб призма була пряма і навколо її основи можна було описати коло.

Навколо будь-якої прямої трикутної призми можна описати циліндр.

Навколо будь-якої правильної призми можна описати циліндр.

Призмою, описаною навколо циліндра, називається призма, у якої основи описано навколо основ циліндра, а бічні грані дотикаються до циліндра (мал. 3.70-б). Про відповідний циліндр кажуть, що він *вписаний у призму*.

Зауваження. Для того щоб у призму можна було вписати циліндр, необхідно і достатньо, щоб призма була пряма і в її основу можна було вписати коло.

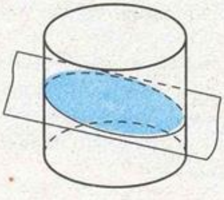
У будь-яку пряму трикутну призму і в будь-яку правильну призму можна вписати циліндр.

ПРО ЕЛІПС, ГІПЕРБОЛОЇД ІНЖЕНЕРА ГАРІНА ТА ВЕЛОСИПЕДНІ СПИЦІ

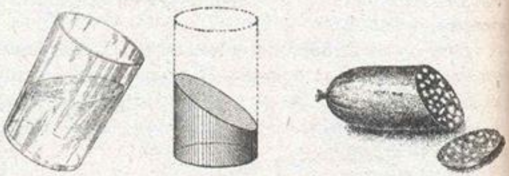
Розглянемо випадок перетину циліндра площиною, яка не паралельна і не перпендикулярна до його осі.

У цьому випадку в перетині маємо фігуру, яку називають еліпсом (мал. 3.71). Ви вже стикалися з ним при обговорюванні зображення просторових фігур у § 13 (с. 108).

Форму еліпса ми бачимо кожного дня в житті. Так, якщо нахилити склянку з водою, то форма поверхні буде еліпсом (мал. 3.72-а) – відповідним перетином склянки-циліндра площиною. Аналогічно, якщо від шматка ковбаси циліндричної форми відрізати скибку, ставлячи ніж навкіс, то вони матимуть форму еліпса (мал. 3.72-б).



Мал. 3.71



а) б)

Мал. 3.72

Ще Йоган Кеплер з'ясував, що планети обертаються навколо Сонця не вздовж кіл, як думали раніше, а по еліпсах. До того ж Сонце знаходиться в *фокусі* кожного з таких еліпсів.

Нагадаємо, що *еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох заданих точок (фокусів) є величиною сталою* (мал. 3.73-а).

а) б)

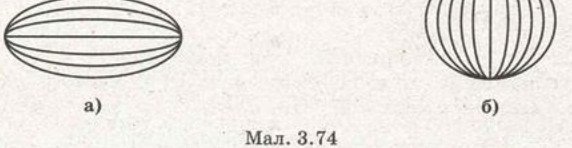
Мал. 3.73

Якщо взяти у площині еліпса за вісь абсцис пряму, що проходить через фокуси F_1 і F_2, а за початок координат – середину відрізка з кінцями в його фокусах (мал. 3.73-б), то з умови $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ ($M(x; y)$ – довільна точка еліпса, $a = \text{const}$) отримаємо *рівняння еліпса*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Позначте $|F_1F_2| \triangleq 2c$, $a^2 - c^2 \triangleq b^2$ і проведіть відповідні перетворення самостійно.

Якщо обертати еліпс навколо його великої осі, то вийде поверхня, яку називають *витягнутим еліпсоїдом обертання* (мал. 3.74-а).



а) б)

Мал. 3.74

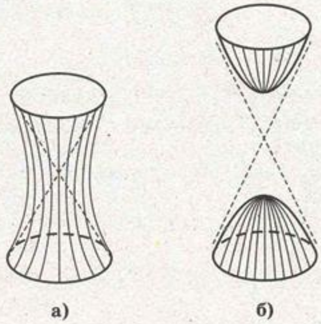
Якщо еліпс обертати навколо малої осі, то вийде *стиснутий еліпсоїд обертання* (мал. 3.74-б).

А тепер поговоримо про гіперболоїд інженера Гаріна. На жаль, ніякого променя, описаного *Олексієм Толстим*, за допомогою гіперболоїдів дістати не можна.

У гіперболи – дві осі симетрії. Одна з них, та, яка не перетинає кривої, називається уявною, а друга, що перетинає криву, – дійсною (мал. 3.75).

Якщо обертати гіперболу навколо уявної осі, то матимемо *однопорожнинний гіперболоїд обертання* (мал. 3.76-а).

Мал. 3.75



Мал. 3.76

Якщо обертати гіперболу навколо дійсної осі, – отримаємо *двопорожнинний гіперболоїд обертання* (мал. 3.76-б). Він складається з двох частин – порожнин. Гіперболоїд, про який іде мова в романі О. Толстого, являє собою одну з таких порожнин.

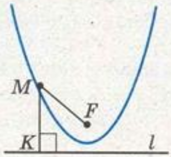
Систему координат у кожному окремому випадку можна вибрати так, що рівняння поверхонь запишуться відповідно у вигляді:

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1\ (a>b)$ – витягнутий еліпсоїд обертання;
- $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1\ (a>b)$ – стиснутий еліпсоїд обертання;
- $x^2+y^2=2pz$ – параболоїд обертання;
- $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ – однопорожнинний гіперболоїд обертання;
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ – двопорожнинний гіперболоїд обертання.

Кожна з кривих, обертанням якої отримано вказані поверхні, має один (парабола) або два (еліпс і гіпербола) фокуси.

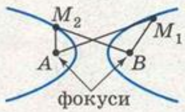
Які точки є фокусами еліпса, ви вже знаєте.

Парабола – це ГМТ, рівновіддалених від даної прямої (*директриси*) і певної точки F – *фокуса параболи* (мал. 3.77).



Парабола
$|MF| = d(M;\ l)$

Мал. 3.77



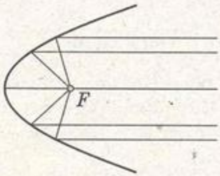
Гіпербола
$AM_1 - M_1B = BM_2 - M_2A = \text{const}$

Мал. 3.78

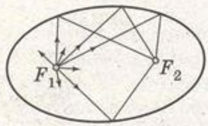
Гіпербола – це ГМТ, різниця відстаней від яких до двох фіксованих точок (*фокусів гіперболи*) – величина стала (мал. 3.78).

Припустимо, що внутрішня частина кожної з поверхонь дзеркальна. Засобами аналітичної геометрії неважко довести (спробуйте це зробити), що вказані поверхні обертання мають такі властивості.

Якщо помістити джерело світла в фокусі параболоїда обертання, то промені, відбившись від дзеркальної поверхні параболоїда, підуть пучком паралельних осі параболоїда променів (мал. 3.79).

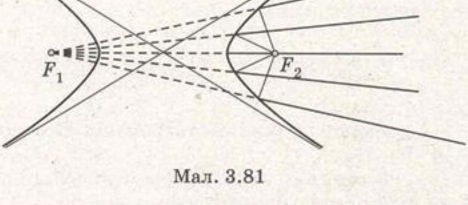


Мал. 3.79



Мал. 3.80

Якщо розмістити джерело світла в одному з фокусів витягнутого еліпсоїда обертання, то промені після віддзеркалювання пройдуть через другий фокус (мал. 3.80).



Мал. 3.81

Якщо розмістити джерело світла в одному з фокусів двопорожнинного гіперболоїда обертання, то промені після віддзеркалювання підуть по прямих, що містять другий фокус (мал. 3.81). Тобто після відбивання промені підуть розбіжним пучком так, що їх продовження пройдуть через другий фокус. Маємо, що промінь, описаний О. Толстим, за допомогою гіперболоїдів одержати не можна.

Зауважимо, що властивість параболоїда відбивати промені, які виходять з фокуса, паралельним пучком застосовується на практиці – рефлектори прожекторів виготовляють у формі параболічних дзеркал.

Підкреслимо ще один цікавий факт. Розглядаючи рівняння однопорожнинного гіперболоїда, можна виявити, що цей гіперболоїд несе в собі дві сім'ї прямолінійних твірних (мал. 3.82). Кожні дві твірних однієї сім'ї є мимобіжними, кожна пара твірних різних сімей перетинається. Це знайшло застосування на практиці.

Мал. 3.82

Так, якщо виготовити вишку зі стрижнів, поставлених вертикально, то вийде дуже неміцна конструкція, яка легко прогинається від власної ваги.

Якщо ж стрижні розмістити у вигляді прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда, скріпивши їх у точках перетину, то вийде дуже міцна пружна конструкція, яка спроможна витримати великі навантаження. Саме тому вишки, наприклад під антени радіомовлення, виготовляють у вигляді кількох поставлених один на одного таких гіперболоїдів.

До речі, спиці у велосипедному колесі також розміщені у вигляді однопорожнинного гіперболоїда (кожен ряд спиць).

Про стиснутий еліпсоїд обертання можна сказати дуже багато. Обмежимося лише таким фактом. Тільки при грубому наближенні нашу Землю можна розглядати як кулю. При точнішому розгляданні виявляється, що вона стиснутий еліпсоїд обертання. Земна вісь – вісь такого еліпсоїда.

Завдання 15

1°. Чи можна отримати в перерізі циліндра площиною:
1) трикутник; 2) прямокутник; 3) трапецію; 4) квадрат?

2. **Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від даної прямої на задану відстань.**

3. **Знайдіть геометричне місце прямих, рівновіддалених від даної прямої на задану відстань.**

4°. Радіус основи циліндра в 3 рази менший за його висоту, а площа бічної поверхні дорівнює 288π см^2. Знайдіть розміри циліндра.

5°. Площа бічної поверхні циліндра вдвічі більша за площу основи, а площа повної поверхні циліндра дорівнює 500π см^2. Знайдіть розміри циліндра.

6°. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник $ABCD$, $AC = 4$ м, $\angle CAD = 30°$. Знайдіть повну площу циліндра, якщо його висота дорівнює CD.

7. Діаметр барабана лебідки 530 мм, його довжина 727 мм. Під час роботи барабан намотав 225 м троса діаметра 17 мм. У скільки шарів було намотано трос?

8°. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює 300 см^2. Знайдіть площу перерізу, який паралельний осі циліндра і віддалений від неї на: 1) половину радіуса основи; 2) 0,6 радіуса основи.
9°. Периметр і діагональ осьового перерізу циліндра дорівнюють відповідно 46 см і 19 см. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.
10°. Діагональ осьового перерізу циліндра 25 см. Радіус циліндра більший від твірної на 5 см. Знайдіть площу осьового перерізу.
11. Розгортка бічної поверхні циліндра – квадрат. Знайдіть кут між діагоналями осьового перерізу.
12. Радіус циліндра дорівнює r. Знайдіть відстань від осі циліндра до паралельного їй перерізу, площа якого вдвічі менша від площі осьового перерізу.
13. Площа осьового перерізу Q. Знайдіть площу перерізу, який паралельний осі циліндра і віддалений від неї на: 1) половину радіуса основи; 2) $\frac{3}{5}$ радіуса основи.
14. Радіус циліндра 61 см. Твірна 22 см. На якій відстані від осі міститься переріз, що має форму квадрата?
15. Площа осьового перерізу циліндра Q. Знайдіть площу перерізу, який проходить через одну з твірних даного осьового перерізу під кутом до нього: 1) 60°; 2) 45°; 3) 30°.
16. Площа перерізу циліндра площиною, який паралельний його осі, дорівнює 8 см^2. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо даний переріз відтинає від кола основи дугу в 60° і віддалений від осі циліндра на $\sqrt{3}$ см.
17. Знайдіть діаметр циліндра, твірні якого перпендикулярні до сторін трикутника, що дорівнюють 15 см, 28 см і 41 см, і дотикаються до них.
18*. Площі двох перерізів циліндра проходять через спільну твірну і утворюють кут 60°. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площі даних перерізів дорівнюють 11 см^2 і 13 см^2.
19*. Два перерізи циліндра AA_1B_1B і AA_1C_1C, проведені через твірну AA_1, мають площі 32 см^2 і 42 см^2. Знайдіть площу перерізу BCC_1B_1, якщо кут між площинами даних перерізів дорівнює: 1) 60°; 2) 120°.
20*. Пряма, що перетинає циліндр і має за кінці точки на його основах, нахилена до площин основ під кутом 60°. Знайдіть висоту циліндра, якщо його радіус дорівнює 13 см, а дана пряма віддалена від осі циліндра на 5 см.
21*. Площина перетинає основи циліндра за хордами, що дорівнюють 6 см і 8 см. Відстань між цими хордами 9 см. Знайдіть площу поверхні циліндра, якщо його радіус 5 см і дана площина перетинає вісь циліндра у внутрішній його точці.
22*. Площини двох перерізів AA_1C_1C і AA_1B_1B проходять через одну твірну AA_1. Площі цих перерізів дорівнюють по $10\sqrt{5}$ см^2. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа чотирикутника CC_1B_1B дорівнює 40 см^2.
23**. Вершини квадрата належать колам верхньої і нижньої основ циліндра. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо його радіус дорівнює 7 см, сторона квадрата 10 см і площина квадрата перетинає вісь циліндра.

24. У циліндр вписано правильний паралелепіпед. Знайдіть площу повної поверхні цього паралелепіпеда, якщо радіус циліндра 10 см, а висота 20 см.

25*. У циліндр вписано трикутну призму, основою якої є прямокутний трикутник з катетом a і прилеглим до нього гострим кутом α. Діагональ грані призми, що містить цю сторону трикутника, нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

26*. Навколо циліндра описано правильну чотирикутну призму, площа бічної поверхні якої дорівнює Q. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

27*. Основою прямої призми є ромб з гострим кутом 30°. Діагональ бічної грані цієї призми має довжину 12 м і нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайдіть бічну поверхню циліндра, вписаного у дану призму.

28*. Основа прямої призми, описаної навколо циліндра, – трапеція з довжинами паралельних сторін 6 см і 27 см. Довжина однієї з бічних сторін цієї трапеції 13 см. Знайдіть радіус циліндра.

29**. Ребро правильного тетраедра має довжину a. Два ребра цього тетраедра є діаметрами основ циліндра. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

30**. У чотирикутну піраміду, кожне ребро якої має довжину a, вписано рівносторонній циліндр, одна з основ якого міститься на основі піраміди, а друга – має спільну точку з кожною апофемою піраміди. Знайдіть радіус циліндра.

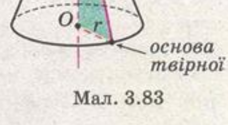
31**. Розв'яжіть попередню задачу у випадку іншого розміщення циліндра: площина основи піраміди є дотичною площиною для циліндра, коло кожної з основ циліндра має по одній спільній точці з його апофемами.

§ 19 Властивості конуса

Форма конуса не менш поширена, ніж циліндрична. Форму конуса мають вулкани і копиці сіна. Усі сипучі матеріали (пісок, щебінь, зерно тощо) при зсипанні набувають конічної форми. У машинобудівництві багато деталей мають конічну форму.

З поняттям конуса як математичної фігури, у розумінні прямого кругового конуса, ви ознайомлювалися в 9-му класі. У § 13 вводилося поняття узагальненого конуса та прямого кругового конуса як тіла обертання (с. 106). У цьому параграфі ми вивчатимемо властивості саме прямого кругового конуса. Надалі будемо називати його просто конусом.

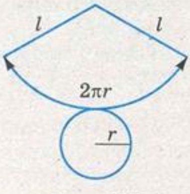
Нагадаємо ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТИ КОНУСА, який отримано обертанням прямокутного трикутника навколо одного з його катетів (мал. 3.83). Пряма, що містить катет, навколо якого обертався трикутник, називається *віссю конуса*; круг, описаний іншим катетом, – *основа* конуса; *вершина* конуса – спільна точка гіпотенузи трикутника обертання та осі обер-



Мал. 3.83

тання; відрізок, що сполучає вершину конуса з довільною точкою кола його основи, – його *твірна*, вона є гіпотенузою трикутника обертання, яка утворює *бічну поверхню* конуса.

Основою твірної конуса будемо називати кінець твірної, що належить основі конуса.



Мал. 3.84

Висота конуса – відстань від його вершини до основи (довжина катета, обертанням навколо якого отримано конус).

На малюнку 3.84 маємо *розгортку конуса*. Круг – основа конуса. Бічна поверхня розгортається у сектор, радіус якого – твірна конуса, а довжина дуги дорівнює довжині кола основи.

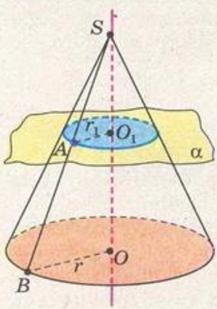
ПЛОЩА БІЧНОЇ ПОВЕРХНІ $S_б$ дорівнює площі сектора розгортки. Це площа частини круга, радіусом якого є твірна l, а довжина дуги $2\pi r$ (r – радіус основи конуса). Відношення площі сектора до площі відповідного круга дорівнює відношенню довжини дуги сектора до довжини кола цього круга. Маємо

$$S_б : \pi l^2 = 2\pi r : 2\pi l.$$

Звідси

$$S_б = \pi rl.$$

Таким чином, **площа бічної поверхні конуса дорівнює добутку половини довжини кола основи на твірну.**



Мал. 3.85

Зрозуміло, що *площа повної поверхні* конуса дорівнює сумі площі його бічної поверхні і площі основи:

$$S = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r).$$

ПЕРЕРІЗ КОНУСА ПЛОЩИНАМИ

Як відомо, кожна точка плоскої фігури, обертанням якої задано просторову фігуру обертання, описує коло із центром на осі обертання в площинах, перпендикулярних до цієї осі (вказана точка не належить самій осі обертання). Тоді, якщо січна площина перпендикулярна до осі конуса (тобто паралельна його основі), то в перерізі маємо круг (мал. 3.85).

Радіус цього круга залежить від відстані січної площини від вершини конуса.

Т е о р е м а. **Перерізом, паралельним основі конуса, є круг, подібний до основи конуса. Коефіцієнт подібності дорівнює відношенню відстані січної площини від вершини конуса до висоти даного конуса.**

Д о в е д е н н я

Нехай січна площина α перетинає вісь конуса в точці O_1, O – основа висоти конуса, S – його вершина, r і r_1 – відповідно радіуси основи конуса і його перерізу (мал. 3.85). Треба довести, що $r_1 : r = SO_1 : SO$.

Сполучимо вершину конуса S з довільною точкою A на колі перерізу – отримаємо твірну SB. Площина α паралельна площині основи конуса. Тоді (за властивістю паралельних площин) $O_1A \parallel OB$. Звідси (у площині SOB) трикутники SO_1A і SOB подібні:

$$O_1A : OB = SO_1 : SO.$$

Теорему доведено.

Дві довільні твірні конуса мають його вершину за спільну точку. Тоді через них можна провести площину.

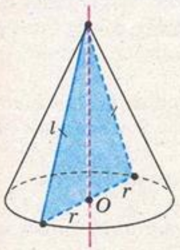
Переріз конуса площиною, яка проходить через дві довільні його твірні, – рівнобедрений трикутник.

Якщо січна площина проходить через вісь конуса, – переріз називають *осьовим*. Осьовий переріз – рівнобедрений трикутник, бічні сторони якого є твірними, а основа – діаметром основи конуса (мал. 3.86).

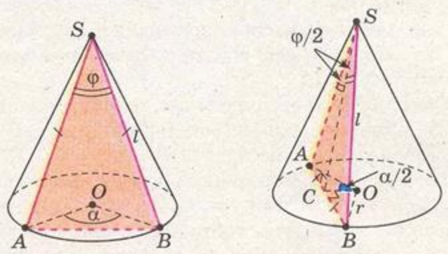
Будь-який осьовий переріз конуса є його площиною симетрії.

Конус, осьовим перерізом якого є правильний трикутник, називають *рівностороннім*.

Якщо січна площина проходить через вершину конуса і не містить його осі, то перерізом буде рівнобедрений трикутник, бічні сторони якого є твірними, а третя сторона – хорда основи конуса, що сполучає основи даних твірних (мал. 3.87-а). Розглянемо розв'язання опорної задачі.



Мал. 3.86



а) б)

Мал. 3.87

Приклад 1. **Хорду основи конуса, утворену при його перетині з площиною, що містить дві твірних цього конуса, бачимо з центра вказаної основи під кутом α. Знайдіть, як пов'язані міра кута α з мірою кута φ між даними твірними конуса, якщо радіус конуса дорівнює *r*, а його твірна *l*.**

Розв'язання

Нехай SA і SB – задані твірні конуса, O – центр його основи. Тоді $\angle ASB = \varphi$, $\angle AOB = \alpha$ (мал. 3.87-б).

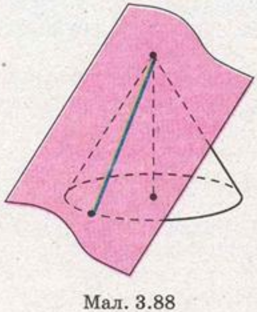
У рівнобедрених трикутників AOB і ASB середина C сторони AB – спільна, медіани OC і SC цих трикутників є відповідно їх висотами та бісектрисами. Тоді

$$\frac{AB}{2} = r\sin\frac{\alpha}{2} = l\sin\frac{\varphi}{2},\ r\sin\frac{\alpha}{2} = l\sin\frac{\varphi}{2}.$$

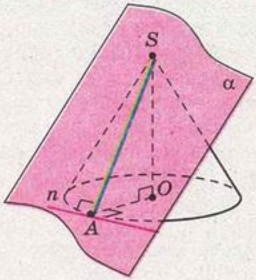
Відповідь: $r\sin\frac{\alpha}{2} = l\sin\frac{\varphi}{2}$.

ДОТИЧНА ПЛОЩИНА

Площина, яка має з конусом за спільні точки лише множину точок однієї твірної, називається дотичною до конуса (мал. 3.88).



Мал. 3.88



Мал. 3.89

Така площина має з колом основи конуса одну спільну точку (як і твірна). На малюнку 3.89 маємо дотичну до конуса площину α, що має з ним спільну твірну SA.

Площина основи перетинає дотичну площину по прямій, яка є дотичною до кола цієї основи (оскільки відповідна пряма має тільки одну спільну точку з колом основи).

На малюнку 3.89 площина основи конуса перетинає α за прямою n – дотичною до кола основи у точці A. Тоді радіус основи $OA \perp n$.

SO – висота конуса, тобто SO – перпендикуляр до площини основи конуса; OA – проекція твірної SA на цю основу; $OA \perp n$. Звідси (за теоремою про три перпендикуляри) $SA \perp n$. Тоді осьовий переріз, який проходить через твірну AB даного циліндра, перпендикулярний до площини α.

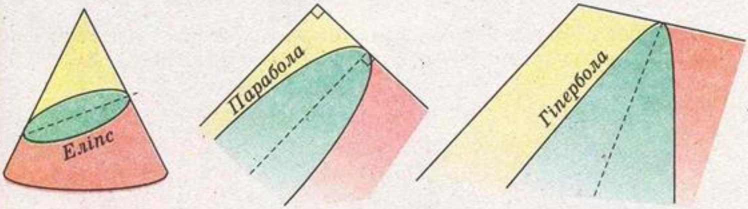
Маємо таку властивість дотичної площини.

Площина, дотична до конуса, перпендикулярна до осьового перерізу, що проходить через твірну, яка належить дотичній площині.

КОНІЧНІ ПОВЕРХНІ ЯК ДЖЕРЕЛО КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Ми з вами розглянули конічні перерізи, які або паралельні основі конуса, або проходять через його вершину. А якщо проводити січну площину інакше? Виявляється, що можна отримати еліпс, параболу, гіперболу, з якими ви ознайомилися в попередньому параграфі (с. 158, 160).

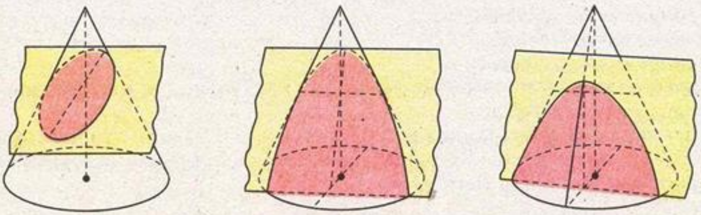
Одним з перших, хто почав вивчати ці криві, був учень знаменитого Платона, давньогрецький математик *Менехм* (IV ст. до н. е.). Змінюючи кут при вершині прямого кругового конуса, Менехм отримав три види криних: еліпс – якщо кут при вершині конуса гострий; параболу – якщо кут прямий; одну гілку гіперболи – якщо тупий (мал. 3.90).



Мал. 3.90

Назви цих кривих, які стали вже звичними, вигадав не Менехм. Їх запропонував один із найвизначніших геометрів давнини *Аполлоній Перзький* (262–190 до н. е.), який присвятив чудовим кривим трактат з восьми книг «Конічні перерізи». Аполлоній показав, що еліпс, параболу, гіперболу можна отримати, проводячи різні перерізи одного й того самого кругового конуса, і до того ж довільного.

Якщо січна площина не паралельна основі конуса і перетинає всі його твірні – у перерізі отримаємо еліпс (мал. 3.91-а).



а) б) в)

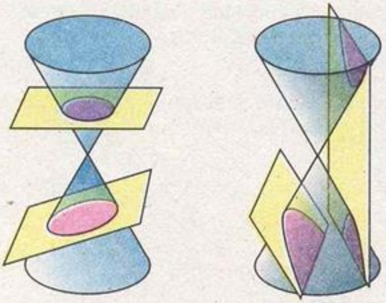
Мал. 3.91

Якщо січна площина паралельна лише одній з твірних конуса – маємо параболу (мал. 3.91-б).

Якщо січна площина паралельна двом твірним конуса – перерізом буде гілка гіперболи (мал. 3.91-в).

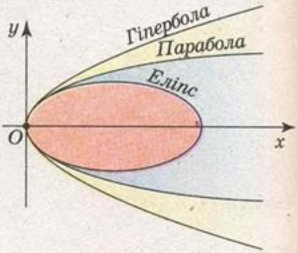
Якщо вважати, що конус не закінчується у вершині, а простягається за неї, то в деяких перерізах матимемо дві гілки (мал. 3.92).

Описуючи еліпс, параболу, гіперболу мовою аналітичної геометрії, математик обере в площині перерізу таку прямокутну систему координат, у якій рівняння кривих мають найпростіший вигляд.



а) б)

Мал. 3.92



Мал. 3.93

Якщо спрямувати вісь Ox уздовж осі симетрії конічного перерізу та помістити початок координат на саму криву (мал. 3.93), то рівняння такої кривої набуде вигляду:

$$y^2 = 2px + \lambda x^2,$$

де p та λ – деякі сталі, до того ж $p \neq 0$. Маємо рівняння другого степеня з двома змінними, яке описує:

- якщо $\lambda = 0$, – параболу;
- якщо $\lambda < 0$, – еліпс;
- якщо $\lambda > 0$, – гіперболу.

Про властивості цих кривих як певних ГМТ площини ми вже казали в попередньому параграфі.

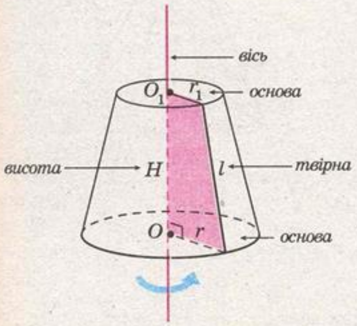
Про ці чудові криві можна розповісти багато цікавого, зокрема про те, що їх назви не випадкові. Про це написано книжки (першим автором такої книжки був Аполлоній Пергський).

ЗРІЗАНИЙ КОНУС

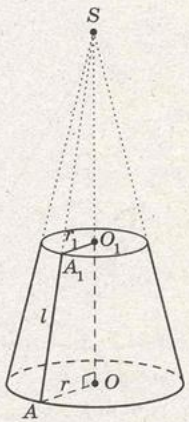
Як ви вже знаєте, існує ще зрізаний конус. При перетині конуса площиною, яка перпендикулярна до його осі (тобто паралельна основі), утворюються дві фігури. Одна з них конус, а другу називають *зрізаним конусом* (мал. 3.94).

Основу конуса та круг, отриманий у перерізі, називають *основами зрізаного конуса*, відстань між площинами цих основ – *висота* зрізаного конуса; частини твірних початкового конуса, які містяться між основами зрізаного конуса, називають *твірними* останнього. Пряма, яка містить висоту конуса, – *вісь* зрізаного конуса. Зрозуміло, що вісь зрізаного конуса є віссю конуса, з якого його було отримано.

Зрізаний конус можна отримати обертанням прямокутної трапеції навколо меншої її бічної сторони. Пряма, що містить нерухому сторону, – вісь конуса, протилежна бічна сторона такої трапеції – твірна, а множина всіх твірних утворює *бічну поверхню* зрізаного конуса (мал. 3.95).



Мал. 3.94



Мал. 3.95

Зрозуміло, що бічна поверхня зрізаного конуса є відповідною частиною поверхні конуса, з якого його було утворено. Знайдемо вираз для площі бічної поверхні зрізаного конуса через його твірну і радіуси основ.

Нехай S – вершина конуса, з якого було отримано зрізаний конус; O і O_1, r і r_1 – відповідно центри та радіуси основ зрізаного конуса ($r > r_1$); $A_1A \triangleq l$ – його твірна (мал. 3.95).

Шукана площа бічної поверхні зрізаного конуса – різниця площ бічних поверхонь конусів з твірними SA і SA_1:

$$S_б = \pi rSA - \pi r_1SA_1 = \pi r(SA_1 + l) - \pi r_1SA_1 = \pi rl + \pi(r - r_1)SA_1.$$

З подібності трикутників SO_1A_1 і SOA маємо:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{SA}{SA_1},\ \frac{r}{r_1} = \frac{SA_1 + l}{SA_1} = 1 + \frac{l}{SA_1},\ SA_1 = \frac{lr_1}{r - r_1}.$$

Тоді

$$S_б = \pi(r + r_1)l.$$

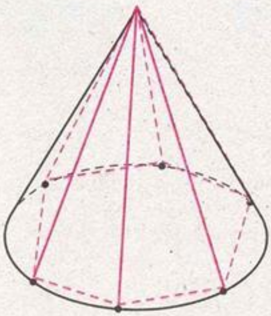
Таким чином, **площа бічної поверхні зрізаного конуса дорівнює добутку півсуми довжин кіл основ на твірну.**

ПІРАМІДА І КОНУС

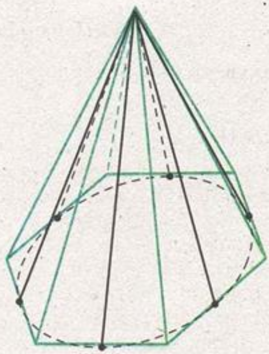
Пірамідою, вписаною в конус, називають піраміду, основа якої вписана в коло основи конуса, а вершина є вершиною цього конуса (мал. 3.96). Бічні ребра такої піраміди є твірними конуса, у який цю піраміду вписано. Висота піраміди збігається з висотою конуса.

Відповідний конус називають *описаним навколо піраміди*.

Зауваження. Для того щоб навколо піраміди можна було описати конус, необхідно і достатньо, щоб навколо основи піраміди можна було описати коло і основа висоти піраміди була центром цього кола.



Мал. 3.96



Мал. 3.97

Навколо будь-якої правильної піраміди можна описати конус.

Пірамідою, описаною навколо конуса, називають піраміду, основа якої описана навколо основи конуса, а вершина є вершиною цього конуса (мал. 3.97). Бічні грані такої піраміди – дотичні до конуса, навколо якого піраміду описано. Висота піраміди збігається з висотою конуса.

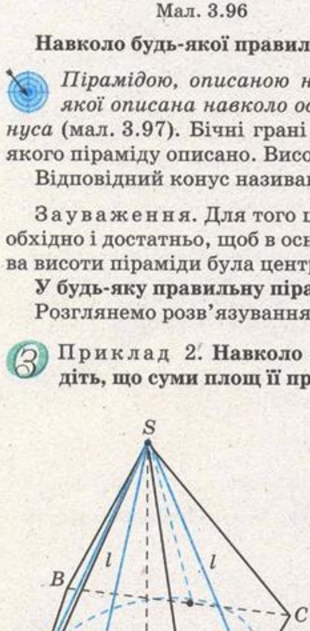
Відповідний конус називають *вписаним у піраміду*.

Зауваження. Для того щоб у піраміду можна було вписати конус, необхідно і достатньо, щоб в основу піраміди можна було вписати коло і основа висоти піраміди була центром цього кола.

У будь-яку правильну піраміду можна вписати конус.

Розглянемо розв'язування такої опорної задачі.

Приклад 2. **Навколо конуса описано чотирикутну піраміду. Доведіть, що суми площ її протилежних граней однакові.**



Мал. 3.98

Розв'язання

Нехай $SABCD$ – дана чотирикутна піраміда. Коло γ основи конуса вписано у чотирикутник $ABCD$, висота піраміди SO є висотою конуса (мал. 3.98).

1) Радіус OM, проведений у точку M дотику γ до AD, перпендикулярний до цієї прямої; $SO \perp (ABC)$. Тоді (за ТТП) $SM \perp AD$, тобто твірна конуса $SM = l$ є висотою грані SAD даної піраміди.

Аналогічно отримаємо, що **всі твірні, по яких конус дотикається до граней піраміди, є висотами відповідних граней.**

2) Чотирикутник $ABCD$ – описаний, тоді $AD + BC = AB + DC$.

3) Суми площ протилежних граней піраміди дорівнюють:

$$S_1 = \frac{1}{2}AD \cdot l + \frac{1}{2}BC \cdot l, \; S_2 = \frac{1}{2}AB \cdot l + \frac{1}{2}DC \cdot l.$$

З урахуванням п. 2 маємо: $S_1 = S_2$.

Щ. в. д.

Завдання 16

1°. Чи може твірна конуса утворювати з його основою: 1) прямий кут; 2) тупий кут? А якщо конус зрізаний?

2°. Висота конуса дорівнює 15 см, а радіус основи 8 см. Знайдіть довжину твірної конуса.

3°. Радіус основи конуса 28 см, а твірна більша від висоти конуса на 8 см. Знайдіть площу осьового перерізу.

4°. Твірна конуса має довжину 12 см. Знайдіть площу основи конуса, якщо твірна утворює з площиною конуса кут: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

5°. Осьовий переріз конуса – прямокутний трикутник. Знайдіть радіус основи конуса, якщо площа осьового перерізу дорівнює 25 см^2.

6°. Знайдіть висоту конуса, якщо площа його осьового перерізу 6 м^2, а площа основи 8 м^2.

7°. Площа осьового перерізу конуса, що має форму правильного трикутника, дорівнює $25\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть: 1) висоту конуса; 2) радіус основи конуса.

8°. Площа осьового перерізу конуса дорівнює 0,6 м^2, а висота 1,2 м. Обчисліть площу повної поверхні конуса.

9°. Осьовий переріз конуса – рівнобедрений трикутник з кутом 120° і рівними сторонами по 16 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

10°. Твірна конуса дорівнює l, радіус основи r. Знайдіть площу перерізу, що проходить через вершину конуса і хорду основи, яка стягує дугу міри: 1) 60°; 2) 90°.

11°. Прямокутний трикутник з катетами 6 дм і 8 дм обертається навколо меншого з катетів. Знайдіть для утвореного конуса площу: 1) бічної поверхні; 2) повної поверхні.

12°. Твірна конуса дорівнює 6,5 м і утворює з висотою конуса кут 45°. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

13. Крівля башти має конічну форму. Діаметр її 6 м, а висота 2 м. Скільки листів заліза потрібно для покриття даху башти, якщо розмір одного листа 0,7×1,4 м, а відходи складають приблизно 10 % від площі покриття?

14. **Твірна конуса дорівнює l, кут при вершині осьового перерізу α. Знайдіть площу основи.**

15. **Площа основи конуса дорівнює Q, а твірна l. Знайдіть площу осьового перерізу.**

16. Прямокутний трикутник з катетом a і протилеглим до нього кутом 30° обертається навколо гіпотенузи. Знайдіть площу поверхні утвореної просторової фігури.

17. Рівнобедрений трикутник з кутом при вершині α обертається навколо основи, довжина якої a. Знайдіть площу поверхні утвореної просторової фігури.

18. Осьовий переріз конуса – правильний трикутник зі стороною $2r$. Знайдіть площу перерізу, який проведено через дві твірні, що утворюють кут: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

19. Висота конуса дорівнює 10 см. Знайдіть площу перерізу, що проходить через вершину конуса і хорду основи, яка стягує дугу 60°, якщо площина перерізу утворює з площиною основи кут: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

20. Висота конуса H. Медіана осьового перерізу утворює з площиною основи гострий кут α. Знайдіть радіус основи.

21*. Знайдіть дугу сектора розгортки бічної поверхні конуса, якщо твірна цього конуса утворює з площиною основи кут 60°.

22*. Перпендикулярно до осі конуса проведено дві січні площини. Знайдіть відношення площ утворених перерізів, якщо точки їх перетину з віссю конуса віддалені від: 1) вершини на n і m од.; 2) основи відповідно на a та b од.

23. Знайдіть міру кута нахилу твірної конуса до площини основи, якщо осьовий переріз цього конуса рівновеликий квадрату, побудованому на радіусі основи конуса.

24*. Осьовий переріз конуса можна вписати в коло основи цього конуса. Знайдіть кут між твірною і площиною основи конуса.

25*. Побудуйте площину, яка проходить через вершину конуса так, що утворений переріз конуса має максимально можливу площу.

26*. Висота конуса дорівнює H, а три твірні цього конуса взаємно перпендикулярні. Знайдіть радіус основи конуса.

27°. Знайдіть площу повної поверхні зрізаного конуса, який утворено обертанням прямокутної трапеції з основами 13 см і 18 см навколо меншої бічної сторони, довжина якої 12 см.

28. Доведіть, що **навколо осьового перерізу зрізаного конуса завжди можна описати коло.**

29. Твірна зрізаного конуса дорівнює 8 см і нахилена до площини основи під кутом 60°. Діагональ осьового перерізу поділяє цей кут навпіл. Знайдіть площу повної поверхні зрізаного конуса.

30. Знайдіть твірну зрізаного конуса, у якого радіуси основ дорівнюють 5 см і 11 см, а кут між твірною і висотою: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

31. Твірна і радіус однієї з основ зрізаного конуса рівні між собою і дорівнюють n. Знайдіть площі основ зрізаного конуса, якщо кут між твірною і площиною основи конуса: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

32. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 25 см і 16 см. В осьовий переріз можна вписати коло. Знайдіть його радіус.

33. Радіуси основ зрізаного конуса відносяться як 1 : 3, кут між його твірною і основою дорівнює 45°, висота h. Знайдіть площу повної поверхні даного зрізаного конуса.

34*. Твірна зрізаного конуса дорівнює 26 см. Діагональ осьового перерізу цього конуса поділяється його віссю на відрізки завдовжки 13,75 см і 26,25 см. Знайдіть радіуси основ.

35**. Твірна зрізаного конуса дорівнює сумі радіусів основ, а висота – різниці цих радіусів. Знайдіть відношення радіусів основ зрізаного конуса.

36.** Знайдіть ГМТ середин відрізків з кінцями на колах протилежних основ зрізаного конуса.

37.** Знайдіть, у якому відношенні поділяє висоту конуса площина, паралельна його основі, якщо утворені менший конус і зрізаний конус мають однакові площі повних поверхонь, а твірна і радіус основи початкового конуса дорівнюють відповідно 16 дм і 10 дм.

38*. У рівносторонній конус, твірна якого l, вписано правильну шестикутну піраміду. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

39*. У конус вписано трикутну піраміду, в основі якої – рівнобедрений прямокутний трикутник з катетом $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть висоту піраміди, якщо довжина твірної конуса дорівнює 5 см.

40*. Навколо конуса з радіусом основи 6 см і висотою 8 см описано правильну трикутну піраміду. Знайдіть площу бічної поверхні цієї піраміди.

41*. Навколо конуса описано правильний тетраедр. Знайдіть довжину сторони цього тетраедра, якщо площа осьового перерізу конуса дорівнює $625\sqrt{3}$ см^2.

42*. У рівносторонній конус, твірна якого l, вписано правильну шестикутну призму, бічна грань якої квадрат. Знайдіть площу діагональних перерізів призми.

43.** У правильну трикутну піраміду із стороною основи 12 см і бічним ребром 13 см вписано рівносторонній конус так, що його вершина міститься в центрі основи піраміди, а коло основи дотикається до всіх бічних граней. Знайдіть висоту конуса.

44.** Кожне ребро чотирикутної піраміди має довжину a. Рівносторонній конус вписано в піраміду так, що його вершина міститься в центрі основи піраміди, а коло основи дотикається до всіх бічних граней піраміди. Знайдіть висоту конуса.

45.** У конус вписано правильну трикутну призму так, що чотири вершини призми лежать на колі основи конуса, а дві – на його бічній поверхні. Знайдіть висоту конуса, якщо кожне ребро призми дорівнює a.

§ 20 Властивості сфери і кулі

У цьому параграфі ми приступаємо до вивчення властивостей тіла, яке піфагорійці вважали «найвишуканішим», – кулі та її межі – сфери. Приклади з оточення тіл у формі кулі вам не треба наводити. Зауважимо тільки, що в першому наближенні форму кулі мають космічні згустки матерії – зірки (і наше Сонце), планети (і наша Земля).

З кулею та сферою ви працювали на початку навчального року – виводили їхні рівняння в координатному просторі (див. § 2, с. 14). Кулю, як приклад тіла обертання, і сферу, як приклад фігури обертання, ми обговорювали у § 13 (с. 106).

Тепер ми зберемо докупи вже відомі вам факти, узагальнимо та дещо розширимо ваші знання про властивості сфери та кулі.

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Фігура, утворена всіма точками простору, віддаленими від даної точки O на відстань R, називається *сферою*; O – її *центр*; R – *радіус*.

Сфера обмежує *кулю* – множину точок, які розміщені на відстані від центра O, що не перевищує радіус R.

Центр сфери є центром її симетрії. Дві точки сфери, що симетричні відносно її центра, віддалені одна від одної на відстань $2R$.

Відрізок з кінцями в точках, симетричних відносно центра сфери, називають *діаметром* сфери. Довжина його дорівнює подвоєному радіусу сфери.

Відрізок, який сполучає дві довільні точки сфери, називають її *хордою*. Зрозуміло, що

- найбільшою хордою сфери є її діаметр.

Довільна площина, яка проходить через центр сфери, є її площиною симетрії.

У координатному просторі для сфери з центром у точці $(a;\ b;\ c)$ і радіусом R ми раніше отримали рівняння (с. 14):

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Його називають *рівнянням сфери*.

Зауваження:

- значення R не може бути від'ємним;
- якщо $R=0$, – рівняння описує точку координатного простору $(a;\ b;\ c)$;
- якщо центр сфери збігається з початком координат $O(0;\ 0;\ 0)$, то її рівняння має вигляд:

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Розглянемо кулю з центром $O(a;\ b;\ c)$ радіуса R. За означенням – це множина точок $M(x;\ y;\ z)$, відстань від яких до точки $(a;\ b;\ c)$ не перевищує R: $|OM|\leqslant R$. Тобто $|OM|^2\leqslant R^2$, і **множині точок кулі відповідає нерівність**

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2.$$

У випадку, коли центр кулі збігається з початком координат, маємо:

$$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2.$$

ІСНУВАННЯ І ЄДИНІСТЬ СФЕРИ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ЧОТИРИ ТОЧКИ, ЯКІ НЕ НАЛЕЖАТЬ ОДНІЙ ПЛОЩИНІ

Як відомо, через три точки площини, які не містяться на одній прямій, можна провести коло, і до того ж тільки одне. Доведемо аналогічне твердження про існування та єдиність сфери у просторі.

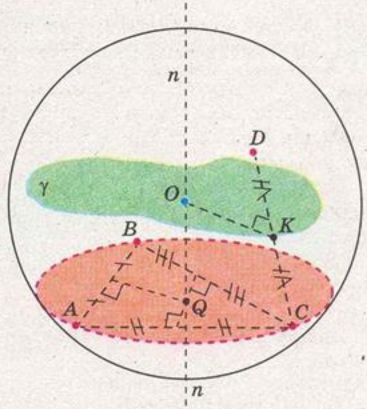
Теорема 1. **Через чотири точки, що не належать одній площині, можна провести сферу, і до того ж тільки одну.**

Доведення

Нехай маємо точки A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Треба довести, що існує, і до того ж єдина, точка, яка рівновіддалена від усіх точок A, B, C, D.

Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Тоді довільні три з них не належать одній прямій і через них можна провести площину, і до того ж єдину.

Проведемо площину через точки A, B, C (мал. 3.99). У площині ABC існує єдина точка Q, рівновіддалена від точок A, B, C, – центр описаного навколо трикутника ABC кола (точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника ABC).



Мал. 3.99

Проведемо через точку Q пряму $n \perp (ABC)$. Як відомо, пряма, що проходить через центр описаного навколо трикутника кола перпендикулярно до площини цього трикутника, є ГМТ, рівновіддалених від вершин даного трикутника.

Сполучимо точки D та C і проведемо площину γ перпендикулярно до відрізка DC у його середині. Як відомо, така площина є ГМТ, рівновіддалених від кінців відрізка.

Маємо: n – ГМТ, рівновіддалених від A, B, C; γ – ГМТ, рівновіддалених від C і D. Тоді точка O перетину цих множин є рівновіддаленою від усіх даних точок A, B, C, D, до того ж така точка – єдина.

Теорему доведено.

Н Наслідок 1. **Площина, що проходить через середину хорди сфери перпендикулярно до цієї хорди, проходить через центр сфери.**

Н Наслідок 2. **Площина, що проходить через центр сфери перпендикулярно до її хорди, ділить цю хорду навпіл.**

Ці твердження випливають безпосередньо з властивостей ГМТ, які було розглянуто при доведенні теореми 1.

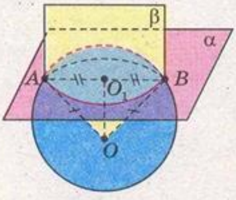
Зауважимо, що для хорд сфери легко довести ще таку властивість (аналогічну до властивості хорд кола).

Для хорд сфери, що перетинаються в одній точці всередині цієї сфери, добуток довжин відрізків, на які кожна з цих хорд поділяється вказаною точкою, є величиною сталою.

Доведіть це твердження самостійно. Для цього розгляньте три довільні хорди сфери, що перетинаються в одній точці, і проведіть дві площини через дві пари хорд з трьох даних. Врахуйте, що в кожній з площин виконуються твердження планіметрії.

Теорема 2. **Перетин сфери площиною – коло, квадрат радіуса якого дорівнює різниці квадратів радіуса сфери і відстані від січної площини до центра сфери: $r^2 = R^2 - d^2$.**

Доведення



Мал. 3.100

Нехай маємо кулю з центром O радіуса R, яку перетинає площина α (мал. 3.100). Опустимо з точки O перпендикуляр OO_1 на січну площину α і розглянемо одну з площин, що проходить через OO_1, позначимо її як β. За ознакою перпендикулярності двох площин $\beta \perp \alpha$.

Пряма перетину площин α і β перетинає сферу в точках A і B. Ці точки рівновіддалені від центра сфери O. У рівнобедреному трикутнику AOB ($OA = OB = R$) висота OO_1 є медіаною, і точки A та B площини α рівновіддалені від O_1 на відстань $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ ($d \triangleq OO_1$ – відстань від центра сфери до січної площини). Ця відстань не залежить від того, яку саме з площин, що проходять через OO_1, обрати.

Звідси маємо, що довільні точки перетину площини α із даною сферою рівновіддалені від точки O_1 на відстань r. Тоді переріз сфери площиною – коло з центром у точці O_1 і радіуса $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Теорему доведено.

Зауваження. Якщо січна площина проходить через центр сфери, – в перерізі маємо коло, радіус якого дорівнює радіусу сфери. Такий переріз називають *діаметральним* (він містить діаметр сфери), відповідний йому круг – *великим кругом*, а коло, що його обмежує, – *великим колом*.

Як відомо, через три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести тільки одну площину. Тоді **через дві довільні точки сфери (якщо вони не є протилежними кінцями діаметра сфери) можна провести тільки один великий круг.**

Аналогічно тому, як ми довели теорему 1, легко довести такі властивості січної площини.

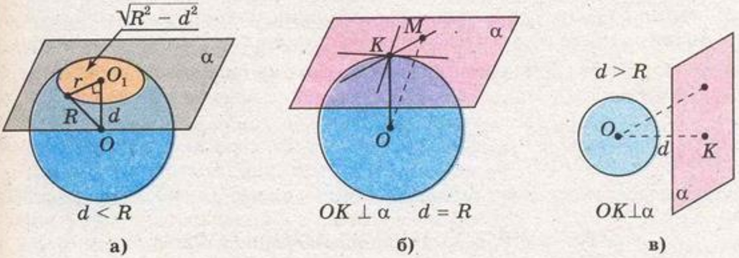
Теорема 3. **Перерізи, що знаходяться на однакових відстанях від центра кулі, рівні круги.**

Теорема 4. **З двох перерізів кулі має більший радіус той, що міститься ближче до центра кулі.**

Позначимо як α відстань від центра O сфери радіуса R до площини α. У просторі для **взаємного розміщення сфери та площини** (аналогічно до взаємного розміщення прямої і кола на площині) **можливі такі випадки.**

- Якщо $d < R$, – площина і сфера (за теоремою 2) перетинаються по колу радіуса $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (мал. 3.101-а).

- Якщо $d = R$, то площина і сфера мають єдину спільну точку – *точку дотику* (мал. 3.101-б). Площину, яка має із сферою єдину спільну точку, називають *дотичною площиною до сфери*.
- Якщо $d > R$, – площина і сфера не перетинаються (мал. 3.101-в).



Мал. 3.101

ВЛАСТИВОСТІ ДОТИЧНОЇ ПЛОЩИНИ

Дотична площина до сфери має властивості, аналогічні властивостям прямої, дотичної до кола, в планіметрії.

Теорема 5. **Радіус сфери, проведений у точку дотику, перпендикулярний до дотичної площини.**

Доведення

Площина α має з даною сферою єдину спільну точку K (мал. 3.101-б). Треба довести, що радіус сфери $OK \perp \alpha$.

Нехай це не так. Тоді OK – похила до площини α. Похила $OK = R$ – більша за перпендикуляр, проведений з точки O до α, тобто за відстань d від центра сфери до α. Тоді α і сфера перетинаються за колом, що протирічить умові.

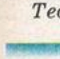
Теорему доведено.

Теорема 6. **Якщо радіус сфери перпендикулярний до площини, що проходить через його кінець на сфері, то така площина є дотичною до сфери.**

Доведення

За умовою маємо, що відстань від центра сфери до площини дорівнює радіусу сфери (мал. 3.101-б). Тобто відповідний кінець радіуса – єдина спільна точка площини й сфери. Тоді дана площина – дотична до сфери.

Теорему доведено.


Розглянемо розв'язання такої опорної задачі.

Приклад 1. Доведіть, що **рівняння площини, яка дотикається до сфери $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ у точці $K(m; n; p)$, має вигляд:**

$$(a-m)(x-m) + (b-n)(y-n) + (c-p)(z-p) = 0.$$

Розв'язання

Центр сфери O має координати $O(a;\ b;\ c)$. Нехай довільна точка M шуканої площини α (мал. 3.101-б) має координати $M(x;\ y;\ z)$. Тоді:

1) вектор $\overrightarrow{KM} = \overline{(x - m;\ y - n;\ z - p)}$ належить α;
2) вектор $\overrightarrow{KO} = \overline{(a - m;\ b - n;\ c - p)}$ перпендикулярний до α (оскільки K – точка дотику і радіус OK перпендикулярний до дотичної площини α);
3) вектори $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{KO}$ перпендикулярні, тоді їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$(a - m)(x - m) + (b - n)(y - n) + (c - p)(z - p) = 0.$$

Щ. в. д.

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ І СФЕРИ

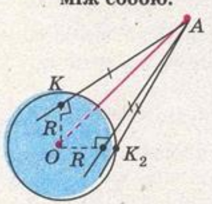
Якщо у дотичній до сфери площині взяти довільну точку M, яка відмінна від точки дотику K (мал. 3.101-б), то пряма MK матиме з даною сферою єдину спільну точку K. Пряму, яка має зі сферою єдину спільну точку, називають *дотичною прямою до сфери*.

Легко довести такі властивості дотичної прямої до сфери. (Зробіть це самостійно. Для цього проведіть через дотичну пряму і центр сфери площину та скористайтеся твердженнями планіметрії.)

Т **Теорема 7.** **Пряма, дотична до сфери, перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.**

Т **Теорема 8.** **Радіус сфери, проведений у точку дотику, перпендикулярний до дотичної прямої.**

Н **Наслідок з теореми 7.** **Відрізки прямих дотичних до сфери, які виходять з однієї точки і обмежені цією точкою та точкою дотику, рівні між собою.**



Мал. 3.102

Правильність цього твердження випливає безпосередньо з твердження теореми 7. Справді, якщо провести радіус OK, де K – точка дотику прямої і сфери (мал. 3.102), то з прямокутного трикутника OKA маємо, що довжина дотичної дорівнює

$$OK = \sqrt{OA^2 - R^2} = \text{const}.$$

Тобто її довжина залежить тільки від відстані заданої точки до центра сфери і радіуса сфери.

ВЛАСТИВОСТІ ДОТИЧНИХ І СІЧНИХ ПРЯМИХ СФЕРИ

Ми вже розглянули три таких властивості (твердження теорем 7–8 та наслідку). Наступні властивості дотичних і січних прямих сфери аналогічні до властивостей дотичних і січних прямих кола в планіметрії. Їх легко довести, якщо побудувати відповідні січні площини і в цих площинах застосувати твердження планіметрії стосовно хорд, січних та дотичних до кола. (Зробіть це самостійно.)

У формулюванні властивостей дотичних прямих і січних прямих сфери, проведених до неї з певної точки, будемо називати: *дотичною* – відрізок дотичної прямої, обмежений точкою дотику і даною точкою поза сферою; *січною* – більший з відрізків, що обмежені даною точкою та точками перетину січної зі сферою; *зовнішньою частиною січної* – відрізок січної, який міститься поза сферою і обмежений даною точкою та точкою перетину січної зі сферою.

Якщо з однієї точки поза сферою до неї проведено дотичні та січні прямі, то для довжин відповідних відрізків маємо таке.

- **Квадрат будь-якої з цих дотичних дорівнює добутку січної, що проходить через центр сфери на її зовнішню частину.**
- **Для всіх даних січних добуток січної на її зовнішню частину є сталим.**
- **Для довільної січної та дотичної, що проведені з однієї точки поза сферою, добуток січної на її зовнішню частину дорівнює квадрату дотичної.**

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ СФЕР

Пряму, яка проходить через центри двох сфер, називають *лінією центрів* цих сфер (аналогічно до поняття лінії центрів двох кіл у планіметрії).

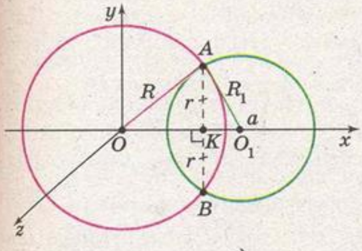
Т Теорема 6. **Лінія перетину двох сфер – коло.**

Доведення

Нехай маємо дві сфери з центрами O, O_1 і радіусами R, R_1 відповідно ($R > R_1$), які перетинаються. Треба довести, що точки, спільні для цих сфер, належать колу.

Введемо прямокутну систему координат так, щоб центр O однієї зі сфер сумістився з початком координат, а вісь Ox була спрямована вздовж лінії центрів даних сфер (мал. 3.103). Тоді: $O(0; 0; 0)$, $O_1(a; 0; 0)$; координати точки $(x; y; z)$ перетину даних сфер задовольняють умову

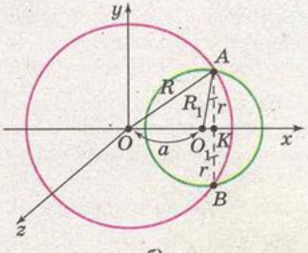
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ (x-a)^2 + y^2 + z^2 = R_1^2. \end{cases}$$



а)

$OO_1 = a$

$K(x; 0; 0)$



б)

Мал. 3.103

Віднімемо від першого рівняння друге:

$$2ax - a^2 = R^2 - R_1^2, \ x = \frac{R^2 + a^2 - R_1^2}{2a}.$$

Маємо рівняння $x = \text{const}$ – рівняння площини, що паралельна координатній площині yOz.

Як ми доводили раніше, переріз сфери площиною – коло.

Теорему доведено.

Зауваження. Умовою того, що дві сфери перетинаються, є можливість скласти з відрізків довжини R, R_1, $OO_1 = a$ трикутник (див. мал. 3.103). З нерівності для сторін трикутника маємо умову перетину двох сфер:

$$R - R_1 < OO_1 < R + R_1.$$

Розглянемо розв'язання опорної задачі.

3 **Приклад 2. Дві сфери радіусів R і R_1 перетинаються. Знайдіть радіус кола їх перетину, якщо відстань між центрами цих кіл a.**

Розв'язання

Введемо прямокутну систему координат так, щоб центр O однієї зі сфер сумістився з початком координат, а вісь Ox була спрямована вздовж лінії центрів даних сфер (мал. 3.103). Маємо (див. доведення теореми 6), що точки перетину даних сфер проектуються на вісь Ox в точку $K(x;\ 0;\ 0)$, де

$$x = \frac{R^2 + a^2 - R_1^2}{2a}.$$

У прямокутному трикутнику OKA: $\angle K = 90°$, $|OK| = x$, $|OA| = R$, $|AK|$ – шуканий радіус r кола перетину сфер. Маємо:

$$r \triangleq |AK| = \sqrt{R^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{(2aR)^2 - (R^2 + a^2 - R_1^2)^2},$$

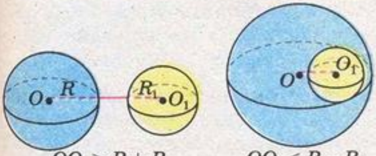
$$r = \frac{1}{2a}\sqrt{((R+a)^2 - R_1^2)(R_1^2 - (R-a)^2)}.$$

Відповідь: $r = \dfrac{1}{2a}\sqrt{((R+a)^2 - R_1^2)(R_1^2 - (a-R)^2)}$.

Зауваження. З останнього виразу для радіуса кола перетину двох сфер маємо, що такий переріз існує за умови, якщо підкореневий вираз додатний. Проаналізуйте, чи збігається умова існування кореня з умовою перетину кіл, яку ми отримали раніше.

Як і для двох кіл у планіметрії, для двох сфер у стереометрії **можливі три випадки взаємного розміщення** залежно від співвідношення між радіусами R і R_1 цих сфер і відстанню між їх центрами OO_1.

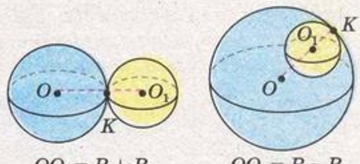
- Якщо $R - R_1 < OO_1 < R + R_1$, – сфери перетинаються по колу радіуса $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (мал. 3.103).
- Якщо $OO_1 > R + R_1$ або $OO_1 < R - R_1$, – сфери не перетинаються (мал. 3.104).



$OO_1 > R + R_1$ $\quad$ $OO_1 < R - R_1$

а) $\quad$ б)

Мал. 3.104



$OO_1 = R + R_1$ $\quad$ $OO_1 = R - R_1$

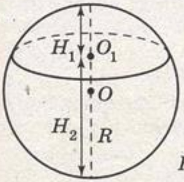
а) $\quad$ б)

Мал. 3.105

- Якщо $OO_1 = R + R_1$ або $OO_1 = R - R_1$, то сфери мають єдину спільну точку – *точку дотику* (мал. 3.105). Сфери, які мають єдину спільну точку, називають *дотичними*. Дотик може бути *зовнішнім* (мал. 3.105-а) або *внутрішнім* (мал. 3.105-б).

ЧАСТИНИ КУЛІ

Кульовим сегментом називається частина кулі, яку відтинає від неї січна площина (мал. 3.106-а). Його поверхня складається із *сферичного сегмента* і круга – *основи сегмента*. *Висотою* кульового сегмента називають відстань від його основи до його найбільш віддаленої точки (відрізки H_1 і H_2 на малюнку 3.106-а).



$H_1 + H_2 = 2R$

а)

б)

Мал. 3.106

Кульовий сегмент можна отримати обертанням сегмента кола навколо осі його симетрії (мал. 3.106-б). Висота сегмента кола буде висотою утвореного кульового сегмента.

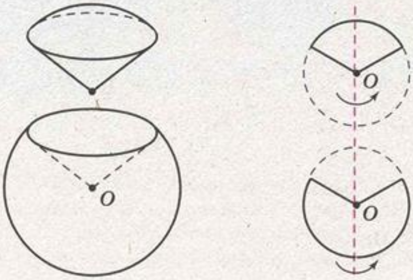
Кожна січна площина поділяє кулю на два сегменти із спільною основою. Сума висот цих сегментів дорівнює діаметру кулі.

Якщо січна площина проходить через центр кулі, то вона поділяє кулю на два рівних сегменти, які називають *півкулею*.

Кульовим сектором називають тіло, яке утворюється з кульового сегмента наступним чином (мал. 3.107-а).

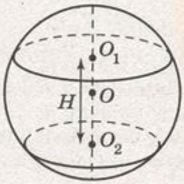
Якщо кульовий сегмент менший за півкулю, кульовий сектор отримаємо доповненням даного сегмента конусом, що має спільну основу з основою сегмента, а за вершину – центр кулі. Отримаємо *опуклий* кульовий сектор.

Якщо кульовий сегмент більший за півкулю, то такий конус з нього вилучається – отримаємо *неопуклий* кульовий сектор. Він доповнює відповідний опуклий кульовий сектор до кулі.



а) б)

Мал. 3.107



Мал. 3.108

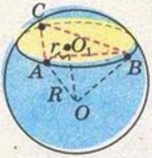
Кульовий сектор можна отримати обертанням сектора кола навколо осі його симетрії (мал. 3.107-б).

Кульовим поясом називається частина кулі, що міститься між двома паралельними січними площинами (мал. 3.108). Круги, що утворюються в перерізі, називають *основами кульового поясу*, а відстань між січними площинами – *висотою кульового поясу*.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 3. Три точки сфери радіуса 16,25 дм попарно віддалені одна від одної на відстані: 15 дм, 14 дм і 13 дм. Знайдіть відстань від центра сфери до площини, яка проходить через дані точки.

Розв'язання



Мал. 3.109

Нехай A, B, C – задані точки, O – центр сфери, R – її радіус (мал. 3.109). Проведемо $OO_1 \perp (ABC)$, $|OO_1|$ – шукана.

1) $OO_1 \perp (ABC)$, тоді O_1 – центр кола, описаного навколо ΔABC, його радіус $r = O_1A$.
2) $OO_1 \perp (ABC)$, тоді $OO_1 \perp O_1A$.
3) $\underline{\Delta OO_1A}$ $(\angle O_1 = 90°, O_1A = r, OA = R)$: $OO_1 = \sqrt{R^2 - r^2}$.
4) $\underline{\Delta ABC}$: $r = \dfrac{abc}{4S}$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

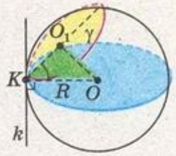
$$S = \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)} = 84 \text{ (дм}^2\text{)},\ r = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8} \text{ (дм)}.$$

$$5)\ OO_1 = \sqrt{16{,}25^2 - \left(\frac{65}{8}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{65}{4}\right)^2 - \left(\frac{65}{8}\right)^2} = \frac{65}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{65\sqrt{3}}{8}.$$

Відповідь: $\dfrac{65\sqrt{3}}{8}$.

Приклад 4. Січна площина кулі має з його великим кругом лише одну спільну точку. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус кулі дорівнює 6 м, а кут між площинами – січною і великого круга – 30°.

Розв'язання



Мал. 3.110

Позначимо центр кулі як O, її радіус як R, січну площину як γ, радіус кола перерізу як r.

1) Проведемо з центра O сфери перпендикуляр OO_1 на січну площину (мал. 3.110). Маємо: O_1 – центр кола перерізу.

2) Через спільну точку K даного перерізу і великого круга проведемо дотичну пряму k до заданого великого круга. Тоді $OK \perp k$.

3) Маємо: $OO_1 \perp \gamma$, $OK \perp k$, $O_1K = \text{Пр}_\gamma OK$. Тоді (за ТТП) $O_1K \perp k$.

4) $OK \perp k$ і $O_1K \perp k$. Тоді $\angle O_1KO = 30°$, як кут між площинами γ і великого круга.

5) $OO_1 \perp \gamma$. Тоді $OO_1 \perp O_1K$.

6) З $\triangle KO_1O$ ($\angle O_1 = 90°$, $\angle O_1KO = 30°$, $O_1K = r$, $OK = R$):

$$r = R\cos 30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\text{ (м)}.$$

7) $S_{\text{пер.}} = \pi r^2 = 27\pi\ (\text{м}^2)$.

Відповідь: 27π м^2.

Приклад 5. Куля радіуса 12 дм дотикається до всіх сторін ромба, діагоналі якого дорівнюють 6 дм і 8 дм. Знайдіть відстань від центра кулі до площини ромба.

Розв'язання

Мал. 3.111

Позначимо: точки дотику ромба до кулі як K, N, P, M (мал. 3.111); точку перетину його діагоналей через O_1; центр сфери – як O; її радіус – як R.

1) Перерізом кулі площиною ромба є круг, вписаний у даний ромб. Його центром є точка перетину діагоналей ромба O_1, діаметр дорівнює відстані між протилежними точками дотику. Тоді $O_1K \triangleq r$ – радіус цього кола.

2) $\underline{\triangle AO_1B}$ ($\angle AO_1B = 90°$): $AB = \sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{DB}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$

3) $S_{AO_1B} = \frac{1}{2}AB \cdot O_1K = \frac{1}{2}AO_1 \cdot O_1B.$ Тоді $r = \frac{AO_1 \cdot O_1B}{AB} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$

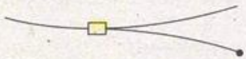
4) Точка O_1 – середина хорди KP. Тоді $OO_1 \perp KP$. Аналогічно: $OO_1 \perp MN$. Тоді $OO_1 \perp (ABC)$ і $OO_1 = d(O; (ABC))$.

5) $\underline{\triangle KO_1O}$ ($\angle KO_1O = 90°$): $OO_1 = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{24}{5}\sqrt{6}$ (дм).

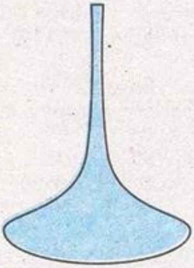
Відповідь: $\frac{24}{5}\sqrt{6}$ дм.

ПСЕВДОСФЕРА

Коли дитина під час прогулянки тягне іграшку-візочок по дорозі, то візок описує лінію (мал. 3.112-а), яка називається *трактриса* (що означає «лінія ведення»).



а)



б)

Мал. 3.112

Беручи межу тротуару, вздовж якої йде дитина, за вісь обертання і обертаючи навколо неї трактрису, ми дістанемо поверхню обертання (мал. 3.112-б). Цю поверхню називають *псевдосферою*. Вона має чудову властивість: якщо гнучка плівка щільно прилягає до якої-небудь частини цієї поверхні, то вона може ковзати по ній в якому завгодно напрямі не зморщуючись і не відстаючи від поверхні.

Для істот, які жили б на псевдосфері (на відміну від нас, які живуть на сфері), панували б закони не нашої звичайної евклідової геометрії, а закони неевклідової геометрії *Лобачевського*.

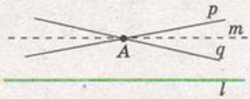
ВІДКРИТТЯ ЛОБАЧЕВСЬКИМ НЕЕВКЛІДОВОЇ ГЕОМЕТРІЇ

На відміну від усіх інших, аксіома про паралельні прямі здавалася математикам не такою вже й очевидною. Вони, безумовно, вважали її істинною, але не настільки безперечною, щоб прийняти без доведення. Протягом багатьох років до початку XIX ст. вчені намагалися довести цю властивість паралельних прямих, виходячи з інших аксіом.

23 лютого 1826 р. на засіданні фізико-математичного відділення Імператорського Казанського університету тридцятитрьохрічний професор *Микола Іванович Лобачевський* (1792–1856) перший з усією категоричністю заявив, що очікуваного доведення не існує. Цей день відкрив нову епоху в розвитку геометрії.

Лобачевський почав свої дослідження аксіоми паралельності також зі спроб її довести. Але, на відміну від своїх попередників, зрозумів безплідність цього шляху і зробив сміливий висновок: припустив можливість існування іншої аксіоми і тим самим іншої геометрії. Та, як це не дивно здаватиметься, він припустив, що, крім однієї прямої на площині, існують і інші прямі, які проходять через задану точку A і не перетинають задану пряму l. Внаслідок виникає така картина (мал. 3.113): існує нескінченна кількість прямих m, які проходять через точку A і не перетинають пряму l.

Усі ці прямі містяться в парі вертикальних кутів, утворених крайніми з них – прямими q і p. Прямі q і p також не перетинають l, але якщо трохи повернути q або p, вони перетнуть l.



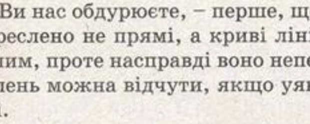
Мал. 3.113

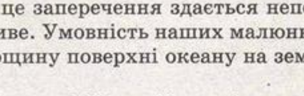
«Це безглуздя», – скажете ви, як це казали сучасники Лобачевського. Але це лише підкреслює безстрашність творчої думки. Ще в середні віки неприпустимою була думка, що Земля не є плоскою. У наші часи навіть маленькі діти природно сприймають те, що Земля має форму кулі і обертається навколо Сонця.

Ідеї Лобачевського, які вважалися сто років тому неприпустимим парадоксом, тепер широко розвинуті й узагальнені. Виявилося, що за постулатами геометрії Лобачевського плоскі й просторові фігури можуть бути вивчені так само докладно, як і в звичайній геометрії, але мають вони дещо інші властивості.

Наприклад, у геометрії Лобачевського на площині для прямих, які не перетинаються (паралельні прямі), можливі два варіанти.

По-перше, вони можуть необмежено розходитися по обидва боки від спільного перпендикуляра (мал. 3.114). По-друге, вони можуть необмежено віддалятися одна від одної з одного боку, а з іншого необмежено зближатися так, що довжина спільного перпендикуляра між ними прямує до нуля (мал. 3.115). Притому вони не перетинаються!


Мал. 3.114


Мал. 3.115

«Ви нас обдурюєте, – перше, що прийде вам на думку, – у всіх випадках накреслено не прямі, а криві лінії!» Хоч це заперечення здається непереборним, проте насправді воно непереконливе. Умовність наших малюнків і уявлень можна відчути, якщо уявити площину поверхні океану на земній кулі.

А географічна карта із зображенням півкуль? На такій карті неминучі значні спотворення. Наприклад, насправді довжини всіх меридіанів однакові, а на карті вони мають різну довжину.

Складаючи карти різних частин земної поверхні, ми вважаємо, що в першому наближенні для них справджуються правила евклідової геометрії. Насправді ж, ми розуміємо, що в масштабах земної кулі геометрія дещо інша (мал. 3.116).

а)

б)

Мал. 3.116

Дослідження космічних питань привело до висновку про неевклідовість нашого простору світлових променів.

При розгляді земних питань ця неевклідовість така незначна, що її не можна виявити інструментально.

Сучасні вчені й далі вивчають світ, розвивають геометрію Лобачевського.

Завдання 17

1°. Яка відстань відділяла б вас від вашого антипода, якщо б він існував? (За казками Льюїса Керрола, антиподи – люди, які живуть у «протилежній» для нас, тобто симетричній нам точці Землі відносно її центра.)

2. Знайдіть довжину кола Полярного кола Землі, якщо радіус Землі дорівнює приблизно 6400 км.

3. Обчисліть, який шлях проходить за добу ваш населений пункт за рахунок обертання Землі навколо своєї осі. (Радіус Землі дорівнює приблизно 6400 км.)

4°. Яка з географічних паралелей є найбільшим колом земної кулі?

5. **Точки A і B належать сфері, а точка M – відрізку AB; центр сфери $O \notin AB$. Доведіть: 1) якщо $AM = MB$, то $OM \perp AB$; 2) якщо $OM \perp AB$, то $AM = MB$.**

6°. Точки A і B належать сфері радіуса R із центром O; точка M – середина відрізка AB. Знайдіть довжину відрізка:
1) OM, якщо $R = 15$ см, $AB = 18$ см;
2) AB, якщо $R = 10$ дм, $OM = 60$ см;
3) AM, якщо $R = a$, $OM = b$.

7°. Знайдіть відстань від центра сфери радіуса R до її хорди завдовжки m.

8°. Запишіть рівняння сфери з центром у точці O і радіусом 5 см, якщо:
1) $O(0; 0; 0)$; 2) $O(1; 0; 1)$; 3) $O(2; 5; -1)$.

9°. Чи належить точка $(1; -2; 3)$ сфері:
1) з центром $O(1; -2; 6)$ і радіусом 3;
2) з центром $P(-1; 2; 0)$ і радіусом 2?

10. Складіть рівняння сфери радіуса 1, яка дотикається до координатних площин, якщо абсциса і ордината її центра додатні, а апліката від'ємна.

11. Запишіть координати центра сфери і її радіус, якщо сферу задано рівнянням:

1°) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$;
2°) $x^2 + y^2 + z^2 = 5$;
3°) $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 9$;
4) $x^2 + 2x + y^2 + z^2 = 8$;
5) $x^2 - 2x + y^2 + 5y + z^2 - z = 0$.

12*. Запишіть рівняння сфери, що гомотетична до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ з центром гомотетії в початку координат і коефіцієнтом гомотетії: 1) 0,5; 2) 2; 3) −1.

13*. Точки $A(1; 0; z)$ і $B(-1; y; 0)$ належать сфері $x^2 + y^2 + z^2 = 10$. Знайдіть довжину хорди AB.

14. Сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ перетинає площина. Знайдіть координати центра кола перерізу та його радіус, якщо площину задано рівнянням: 1) $z = 0$; 2) $y = 1$; 3) $x = 1$; 4*) $x + y + z = 2$.

15*. Сфера $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 1$ дотикається до координатних площин. Знайдіть:
1) координати центра сфери, якщо координати всіх точок дотику від'ємні;
2) площу перерізу кулі площиною, яка проходить через точку $(-1; -1; -1{,}5)$ паралельно площині xOy.

16. Кулю радіуса 41 дм перетнули площиною, відстань від якої до центра сфери дорівнює 9 дм. Знайдіть площу перерізу.

17. Сферу радіуса $2\sqrt{2}$ м перетнули площиною, яка утворює з радіусом сфери, проведеним в одну з точок кола перерізу, кут міри 45°. Знайдіть довжину кола перерізу.

18. Січна площина проходить через кінець діаметра сфери радіуса R так, що цей діаметр утворює з січною площиною кут α. Знайдіть довжину кола перерізу, якщо:
1) $R = 5$ см, $\alpha = 45°$; 2) $R = 2$ см, $\alpha = 30°$; 3) $R = 4$ см, $\alpha = 60°$.

19*. На поверхні сфери радіуса 12 см позначили дві точки A і B. Знайдіть відстань між ними по поверхні сфери, якщо довжина відрізка AB дорівнює: 1) радіусу сфери; 2) діаметру сфери; 3) половині радіуса сфери; 4) a см.

20*. Дві сфери радіусів 12 дм і 10 дм мають тільки одну спільну точку. Знайдіть відстань між центрами.

21*. Знайдіть висоту кульового сегмента, який відтинає від кулі радіуса 15 см площина, віддалена від центра сфери на: 1) 3 см; 2) 5 см; 3) a см.

22*. Знайдіть висоту кульового поясу, якщо площі його основ дорівнюють 9 м^2 і 16 м^2, а радіус кулі – 5 м.

23*. Радіус кулі $OA = R$. Площина проходить через точку A під гострим кутом α до OA. Знайдіть площу перерізу кулі цією площиною.

24*. Вершини трикутника, довжини сторін якого 6 м, 8 м і 10 м, розміщено на сфері радіуса 13 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини цього трикутника.

25*. Доведіть, що кола двох великих кругів при перетині діляться навпіл.

26*. Через середину радіуса кулі перпендикулярно до нього провели січну площину. Знайдіть відношення площі перерізу до площі великого круга даної кулі.

27**. Кулю радіуса 18 м перетинають дві взаємно перпендикулярні площини. Радіуси утворених перерізів відносяться як 2 : 3. Знайдіть площі перерізів, якщо довжина їх спільної хорди дорівнює 2 м.

28.** Площі двох взаємно перпендикулярних перерізів кулі дорівнюють 185π см^2 і 320π см^2. Знайдіть радіус цієї кулі, якщо довжина спільної хорди перерізів 16 см.

29.** Через дві точки, що поділяють радіус кулі на три рівні частини, провели площини, перпендикулярні до цього радіуса. Знайдіть відношення площ утворених перерізів.

30.** Три діаметри сфери взаємно перпендикулярні. Кожен з них поділили на n рівних частин і через точки поділу провели площини перпендикулярно до відповідного діаметра. На скільки частин ці площини поділили сферу, якщо: **1)** $n = 4$; **2)** $n = 6$; **3)** $n = 5$; **4)** $n = 8$?

31*. Радіус сфери дорівнює 112 м. Точка, яка належить дотичній площині до цієї сфери, віддалена від точки дотику на 15 м. Знайдіть відстань від цієї точки до найближчої до неї точки сфери.

32.** Визначте взаємне розміщення сфери і площини:
1) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ і $x + y + z = 6$;
2) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ і $2x - 2y + z - 12 = 0$.

33*. Сфера дотикається до граней двогранного кута. Знайдіть радіус сфери і відстань між точками дотику, якщо відстань від центра сфери до ребра двогранного кута дорівнює a, а міра двогранного кута: **1)** 90°; **2)** 120°; **3)** 60°.

34.** Куля радіуса R дотикається до граней двогранного кута, міра якого α. Знайдіть радіуси найменшої й найбільшої сфер, які дотикаються до граней двогранного кута і до заданої кулі.

35.** Запишіть рівняння сфери, що дотикається до:
1) координатних площин і до площини $2x - 2y + z - 12 = 0$;
2) площин xOz та yOz, має радіус 3 і проходить через точку $M(2; 5; 3)$.

36.** Складіть рівняння площини, що дотикається до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ у точці $A(-1; 2; -3)$.

37.** Через точку дотику кулі радіуса R і дотичної до неї площини провели другу площину під кутом α до першої. Знайдіть площу утвореного перерізу.

38*. Куля радіуса 37 см дотикається до всіх сторін рівнобічної трапеції, паралельні сторони якої дорівнюють 16 см і 36 см. На якій відстані від площини трапеції міститься центр кулі?

39*. Дві сфери радіусів 4 м і 2 м перетинаються. Знайдіть радіус кола їх перетину, якщо відстань між центрами цих кіл 3.

40*. Визначте взаємне розміщення сфер:
1) $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ і $x^2 + y^2 + z^2 - 38x - 16y - 8z + 152 = 0$;
2) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ і $x^2 + y^2 + z^2 - 24x - 12y + 16z + 168 = 0$.

41.** Площина $2x - 3y + z + 1 = 0$ дотикається до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Запишіть рівняння площини, паралельної даній, яка перетинає сферу по великому колу.

42.** Радіуси двох куль 25 см і 30 см. Довжина лінії перетину поверхонь цих куль дорівнює 48π см. Знайдіть відстань між центрами даних куль.

43*. Знайдіть ГМТ прямих, що: **1)** дотикаються до даної сфери в заданій точці; **2)** паралельні даній прямій і дотикаються до даної сфери; **3)** дотикаються до даної сфери і проходять через задану точку.

44**. Знайдіть ГМТ, віддалених на a від даної точки M і віддалених на b від даної площини.

45**. Знайдіть ГМТ, які є:

1) центрами сфер радіусів R, що дотикаються до сфери радіуса r;
2) центрами перерізів даної кулі радіуса R, які мають однакові площі заданої величини Q;
3) серединами хорд сфери, які проведено з однієї точки M;
4) серединами хорд сфери, які паралельні даній прямій;
5) серединами хорд даної сфери, якщо довжина кожної хорди a.

§ 21 Вписана та описана сфери

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Сфера називається вписаною в багатогранник, якщо вона дотикається до всіх його граней. Про такий багатогранник кажуть, що він *описаний навколо сфери*.

Для того щоб у багатогранник можна було вписати сферу, необхідно й достатньо існування точки, рівновіддаленої від усіх граней багатогранника.

Така точка, тобто *центр вписаної у багатогранник сфери*, є спільною точкою півплощин, які поділяють двогранні кути даного багатогранника навпіл (бісекторів усіх двогранних кутів багатогранника).

Сфера називається описаною навколо багатогранника, якщо всі його вершини належать сфері. Про такий багатогранник кажуть, що він *вписаний у сферу*.

Для того щоб навколо багатогранника можна було описати сферу, необхідно й достатньо існування точки, рівновіддаленої від усіх вершин багатогранника.

Така точка, тобто *центр описаної навколо багатогранника сфери*, є спільною точкою всіх площин, проведених перпендикулярно до ребер даного багатогранника через їх середини.

ОПИСАНА ПРИЗМА

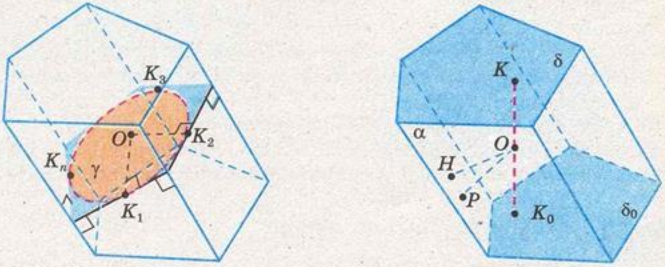
Нескладно довести такі опорні факти.

- **У правильну призму можна вписати сферу тоді й тільки тоді, коли її висота дорівнює діаметру кола, вписаного в основу призми. До того ж радіус сфери дорівнює радіусу вказаного кола.**
- **Якщо в прямокутний паралелепіпед можна вписати сферу, то це – куб.**

Доведемо необхідну й достатню умову того, що призма є описаною.

Теорема 1. **Для того щоб у призму можна було вписати сферу, необхідно і достатньо, щоб у перпендикулярний переріз призми можна було вписати коло і щоб висота призми дорівнювала діаметру цього кола. До того ж вказаний діаметр є діаметром вписаної сфери.**

Доведення



а) б)

Мал. 3.117

I. Необхідність. Нехай в призму $A_1 \ldots A_n$ вписана сфера. Треба довести, що перпендикулярний переріз призми є описаним багатокутником і висота призми дорівнює діаметру кола, вписаного у цей переріз.

1) Проведемо через центр сфери і точки K_1 і K_2 дотику сфери до двох суміжних бічних граней призми площину (мал. 3.117-а). Тоді ця площина перпендикулярна і до спільного ребра цих граней, а звідси і до всіх бічних ребер призми (оскільки ці ребра паралельні). Маємо перпендикулярний переріз γ призми, у якому міститься велике коло заданої сфери.

2) Дві точки K_1 і K_2 дотику сфери до граней призми належать γ за побудовою. Доведемо, що всі інші точки дотику сфери до бічних граней призми теж містяться в γ.

Нехай це буде не так – точка дотику сфери до якоїсь бічної грані α не належить γ, назвемо її P (мал. 3.117-б). Проведемо у площині γ з точки O до прямої перетину $\gamma \cap \alpha$ перпендикуляр OH. Тоді $OH \perp \alpha$. Зрозуміло, що $OH \in \gamma$.

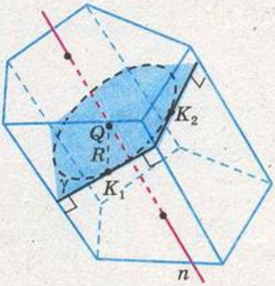
Радіус сфери, проведений у точку дотику сфери з площиною, перпендикулярний до дотичної площини. Тоді $OP \perp \alpha$. До того $OP \notin \gamma$.

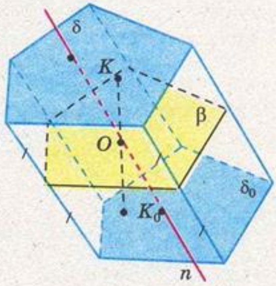
До площини α з однієї точки простору O проведено два різних перпендикуляри OH і OP. Цього бути не може, і $P \in \gamma$. Отже, *в перпендикулярний переріз призми можна вписати коло, радіус якого дорівнює радіусу сфери.*

3) Розглянемо точки K_0 і K дотику даної сфери до основ δ_0 і δ призми (мал. 3.117-б). Маємо: $OK_0 \perp \delta_0$ і $OK \perp \delta$, $\delta_0 \parallel \delta$. Перпендикуляри, проведені з однієї точки простору до паралельних площин, містяться на одній прямій. Тоді $O \in (K_0K)$, $2R = |K_0K| = H$, де R – радіус вписаної сфери, H – висота призми.

Необхідність доведено.

II. Достатність. Нехай перпендикулярний переріз призми є описаним багатокутником і висота призми дорівнює діаметру $2R$ кола, вписаного у цей переріз. Треба довести, що в дану призму можна вписати сферу, тобто існує точка, рівновіддалена від усіх граней призми.





Мал. 3.118

Через центр Q кола, вписаного у перпендикулярний переріз призми, проведемо пряму n, паралельну бічним ребрам призми (мал. 3.118-а). Усі точки прямої n рівновіддалені від площин бічних граней на відстань R.

Між площинами основ δ_0 і δ призми проведемо площину β так, щоб вона була рівновіддалена від площин δ_0 і δ (мал. 3.118-б). Тоді $d(\beta; \delta_0) = d(\beta; \delta) = 2R : 2 = R$.

Маємо, що точка $O \equiv n \cap \beta$ рівновіддалена від усіх граней призми на відстань, що дорівнює радіусу кола, вписаного у перпендикулярний переріз.

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Звідси маємо, що **в правильну призму можна вписати сферу тоді й тільки тоді, коли її висота дорівнює діаметру кола, вписаного в основу призми. До того ж радіус сфери дорівнює радіусу вказаного кола.**

Зауваження 1. **Якщо в паралелепіпед можна вписати сферу, то центром цієї сфери є точка перетину діагоналей паралелепіпеда.** Доведіть це твердження, спираючись на властивості паралелепіпеда (див. § 15, с. 119).

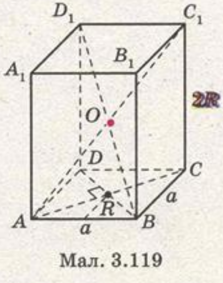
Зауваження 2. **Якщо в прямокутний паралелепіпед можна вписати сферу, то це – куб.** Доведіть це твердження, спираючись на властивості плоского описаного чотирикутника.

Приклад 1. Навколо сфери описано прямий паралелепіпед з довжиною діагоналей $\sqrt{10}$ см і 4 см. Знайдіть радіус сфери.

Розв'язання

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – даний паралелепіпед, $AC_1 > BD_1$ (мал. 3.119).

1) Висота H даного паралелепіпеда дорівнює довжині бічного ребра паралелепіпеда і дорівнює діаметру сфери $2R$.
2) В основу даного паралелепіпеда можна вписати коло. Тоді основою є ромб.



Мал. 3.119

Позначимо його сторону як a, діагоналі $AC \triangleq d_1$, $BD \triangleq d_2$.

3) З прямокутних трикутників ACC_1 і BDD_1:

$$4R^2 + d_1^2 = 16,\ 4R^2 + d_2^2 = 10.$$

4) За властивістю ромба $d_1 \perp d_2$. Тоді його площа дорівнює

$$\frac{1}{2}d_1 d_2 = a \cdot (2R) = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot 2R.$$

5) Маємо:

$$\sqrt{16 - 4R^2} \cdot \sqrt{10 - 4R^2} = 2R\sqrt{26 - 8R^2},\ 3R^4 - 13R^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow R^2 \in \left\{1; \frac{10}{3}\right\}.$$

$R_1^2 = \dfrac{10}{3}$ – сторонній корінь $\left(4 \cdot \dfrac{10}{3} + d_2^2 > 10\right)$. Тоді $R = 1$.

Відповідь: 1.

ВПИСАНА ПРИЗМА

Аналогічно попередньому легко показати правильність таких тверджень.

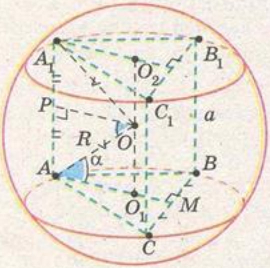
- **Навколо призми можна описати сферу тоді й тільки тоді, коли навколо її основи можна описати коло і ця призма є прямою.**
- **Навколо будь-якої правильної призми можна описати сферу.**

Центр сфери, описаної навколо прямої призми, – середина відрізка, який сполучає центри кіл, описаних навколо основ цієї призми.

П р и к л а д 2. Навколо правильної трикутної призми, з довжиною бічного ребра a, описано сферу. Радіус сфери, проведений до вершини призми, утворює з площиною основи призми кут α. Знайдіть радіус сфери.

Р о з в ' я з а н н я

Нехай $ABCA_1B_1C_1$ – дана правильна призма, навколо якої описано сферу радіуса R з центром O (мал. 3.120).



Мал. 3.120

1) Центр O сфери лежить на одній прямій з центрами O_1 і O_2 основ призми. Медіана AM правильного трикутника ABC є його висотою і містить точку O_1.

2) $OO_1 \perp (ABC)$, $AO_1 = \text{Пр}_{ABC}OA$. Тоді

$$\angle(OA; (ABC)) = \angle OAO_1 = \alpha.$$

3) У площині $AA_1O_2O_1$: $A_1A \perp (ABC)$, тоді $A_1A \perp O_1A$; $OP \perp A_1A$ за побудовою.

Маємо:

$$OP \parallel O_1A \text{ і } \angle POA = \angle OAO_1 = \alpha,$$

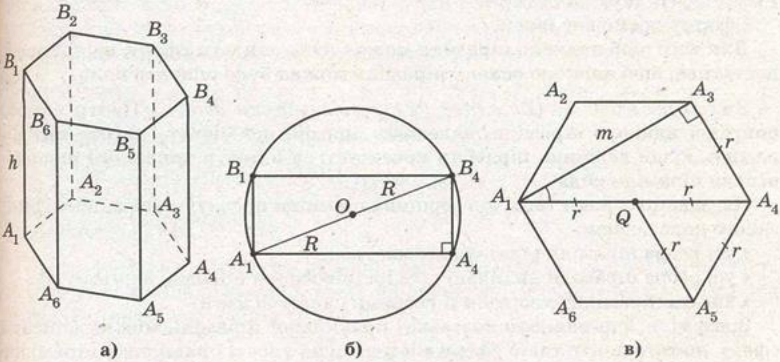
$$A_1P = PA \text{ (оскільки } OA_1 = OA = R).$$

4) $\underline{\triangle OAP}$: $R = OA = AP : \sin\alpha = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$.

Відповідь: $\dfrac{a}{2\sin\alpha}$.

Приклад 3. Менша діагональ основи правильної шестикутної призми дорівнює m, а бічне ребро h. Знайдіть радіус описаної сфери.

Розв'язання



Мал. 3.121

1) Позначимо дану призму як $A_1...A_6B_1...B_6$ (мал. 3.121-а). Призма правильна, тоді її ребра перпендикулярні до основ, звідси $B_4A_4 \perp A_1A_4$.

2) Проведемо січну площину через B_4A_4 і центр сфери O. У діаметральному перерізі маємо прямокутник $A_1B_1B_4A_4$, вписаний у велике коло сфери радіуса R (мал. 3.121-б), $A_1B_4 = 2R$ (оскільки $\angle A_1A_4B_4 = 90°$).

3) Шестикутник основи – правильний (з центром Q): $\angle A_4QA_5 = 360° : 6 = 60°$, і його сторона дорівнює радіусу описаного кола r; Q – середина більшої діагоналі основи (мал. 3.121-в).

4) $\underline{\triangle A_1A_3A_4}$: $A_1A_4 = 2r$; $A_3A_4 = r$; $\angle A_1A_3A_4 = 90°$ (спирається на діаметр). Тоді $\angle A_3A_1A_4 = 30°$, $r = A_1A_3 \operatorname{tg} 30° = m\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

5) $\underline{\triangle A_1A_4B_4}$: $(2R)^2 = (A_1A_4)^2 + (A_4B_4)^2 = (2r)^2 + h^2$, $R = \sqrt{r^2 + \dfrac{h^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{m^2}{3} + \dfrac{h^2}{4}}$.

Відповідь: $\sqrt{\dfrac{m^2}{3} + \dfrac{h^2}{4}}$.

ВПИСАНА ПІРАМІДА

Тетраедр має чотири вершини, а через чотири точки завжди можна провести сферу, і до того одну (див. § 20, теорема 1, с. 174). Тоді **навколо довільної трикутної піраміди (тетраедра) завжди можна описати сферу.**

Якщо піраміда довільна, то наведена раніше умова існування точки, рівновіддаленої від усіх вершин піраміди, означає, що повинно існувати ГМТ, рівновіддалених від усіх вершин основи піраміди. Це, як ми знаємо, множина точок перпендикуляра до площини основи, який проходить через центр описаного кола багатокутника основи.

Тоді, щоб знайти центр описаної сфери, залишається провести площину, перпендикулярну до якогось з бічних ребер. (Отримаємо ГМТ, рівновіддалених від кінців вказаного відрізка.) Точка перетину першого й другого ГМТ – центр шуканої сфери.

Сформулюємо висновок.

Для того щоб навколо піраміди можна було описати сферу, необхідно й достатньо, щоб навколо основи піраміди можна було описати коло.

Зауваження 1. (*Важливе для розв'язування задач.*) **Центр сфери, описаної навколо піраміди, належить прямій, що містить висоту цієї піраміди, якщо вершина піраміди проектується в центр описаного навколо основи піраміди кола.**

Нагадаємо ознаки того, що вершина піраміди проектується в центр описаного кола основи:

- усі ребра піраміди рівні між собою; або
- усі ребра піраміди нахилені до площин основи під одним кутом; або
- висота піраміди утворює з її ребрами однакові кути.

Зрозуміло, що **навколо довільної правильної піраміди можна описати сферу, до того центр такої сфери міститься на висоті правильної піраміди.**

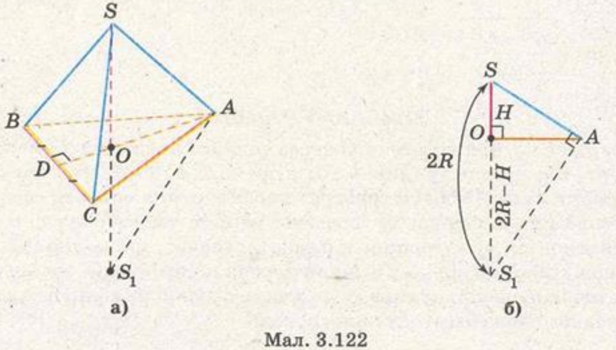
Зауваження 2. (*Важливе для розв'язування задач.*) Центр сфери, описаної навколо піраміди, може міститися всередині піраміди, на площині її основи, поза пірамідою. Тоді, якщо розв'язування задачі використовує розміщення центра описаної сфери відносно основи піраміди, треба розглядати всі три вказані випадки.

Проте можна розв'язувати такі задачі не спираючись на те, де саме розміщується центр описаної сфери відносно площини основи піраміди. Для того треба провести діаметральний переріз сфери через його висоту і одне з бічних ребер. Тоді не треба уточнювати, де саме міститься центр описаної сфери.

Розглянемо приклад такого способу розв'язування задач.

3 Приклад 4. **Навколо правильної трикутної піраміди описано сферу радіуса R. Знайдіть довжину ребра основи даної піраміди, якщо її висота дорівнює H.**

Розв'язання



Мал. 3.122

1) Дана піраміда $SABC$ правильна. Тоді основою її висоти SO є центр O правильного трикутника основи.

2) Дана піраміда $SABC$ правильна. Тоді центр описаної навколо неї сфери належить прямій, що містить висоту піраміди. Продовжимо висоту піраміди до її перетину зі сферою в точці S_1 (мал. 3.122-а). Тоді $|SS_1| = 2R$, і $\angle SAS_1 = 90°$ (оскільки спирається на діаметр кола перерізу).

3) У $\triangle SAS_1$ (мал. 3.122-б): $\angle SAS_1 = 90°$, $SO = H$, $S_1O = 2R - H$, $OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (a – сторона основи), $OA \perp SS_1$. Маємо:

$$OA^2 = SO \cdot OS_1,\ \frac{a^2}{3} = H(2R - H),\ a = \sqrt{3H(2R - H)}.$$

Відповідь: $\sqrt{3H(2R - H)}$.

Зауваження. При розв'язуванні задач на описані та вписані правильні піраміди доцільно мати на увазі опорні задачі переходу між кутами правильної піраміди (с. 133–137, ОК-9–12).

ОПИСАНА ПІРАМІДА

При розв'язуванні задач на описану піраміду важливо пам'ятати такі опорні факти.

- **У будь-який тетраедр можна вписати сферу.**
- **Якщо в основу піраміди можна вписати коло і основа висоти піраміди є центром цього кола, то в цю піраміду можна вписати сферу. До того ж центр вписаної сфери міститься на висоті даної піраміди.**

Зауваження 1. Нагадаємо **ознаки того, що вершина піраміди проектується в центр вписаного кола основи** (тоді виконується останнє твердження):

- усі двогранні кути при ребрах основи піраміди рівні між собою; або
- усі сторони багатокутника основи піраміди рівновіддалені від її вершини; або
- висота піраміди утворює з її бічними гранями однакові кути.

Зауваження 2. Сферу можна вписати і в піраміду, яка не задовольняє вказану умову.

Доведемо наведені твердження.

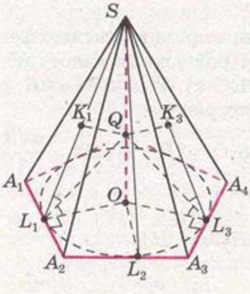
У § 11 (с. 85), спираючись на властивість бісектора двогранного кута, ми довели, що бісектори двогранних кутів тетраедра перетинаються в одній точці й ця точка рівновіддалена від усіх граней тетраедра. Тоді

- **в будь-який тетраедр можна вписати сферу.**

Зрозуміло, що не в усяку піраміду можна вписати сферу.

Теорема 2. **Якщо в основу піраміди можна вписати коло і основа висоти піраміди є центром цього кола, то в цю піраміду можна вписати сферу. До того ж центр вписаної сфери міститься на висоті даної піраміди.**

Доведення



Мал. 3.123

Нехай маємо піраміду $SA_1...A_n$, в якої висота SO має за основу O центр вписаного кола у багатокутник $A_1... A_n$ (мал. 3.123). Доведемо, що на висоті піраміди існує точка, рівновіддалена від усіх граней піраміди.

1) У площині основи сполучимо O з точками $L_1...L_n$ дотику вписаного в основу кола зі сторонами основи. $OL_1 = OL_2 = ... = OL_n$, $OL_1 \perp A_1A_2$, ..., $OL_n \perp A_nA_1$ як радіуси вписаного кола.

2) $\triangle SOL_1 = ... = \triangle SOL_n$ за двома катетами. Тоді бісектриси кутів SL_1O, ..., SL_nO цих трикутників перетинаються в одній точці Q на їх спільній стороні SO.

3) $SO \perp (A_1A_2\ A_n)$, $OL_1 \perp A_1A_2$, тоді (за ТТП) $SL_1 \perp A_1A_2$. Звідси $(SOL_1) \perp (A_1SA_2)$, і перпендикуляр QK_1, проведений у (SOL_1) до прямої SL_1 перетину цих площин, є перпендикуляром до (A_1SA_2).

Аналогічно $QK_2 \perp (A_2SA_3)$, ..., $QK_n \perp (A_nSA_1)$.

За властивістю бісектриси кута з рівних трикутників SOL_1, ..., SOL_n маємо: $QO = QK_1 = ... = QK_n$ – точка Q рівновіддалена від усіх граней піраміди.

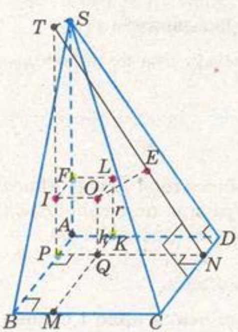
Теорему доведено.

З доведеного твердження маємо, що **у будь-яку правильну піраміду можна вписати сферу.**

Розглянемо приклад того, що сферу можна вписати і в піраміду, яка не задовольняє умову теореми 2.

Приклад 5. Основою піраміди $SABCD$ є квадрат $ABCD$, ребро SA перпендикулярне до площини основи, $AB = 3$ см, $SA = 4$ см. Доведіть, що в піраміду можна вписати сферу, і знайдіть радіус цієї сфери.

Розв'язання



Мал. 3.124

1) $SA \perp (ABC)$, отже, $SA \perp AB$, $SA \perp AD$; $AB = AD$ (як сторони квадрата). Тоді $\triangle SAB = \triangle SAD$ (за двома катетами); $(SAD) \perp (ABC)$ і $(SAB) \perp (ABC)$ (мал. 3.124).

2) $\triangle SAB = \triangle SAD$ і мають спільний катет SA. Тоді радіуси вписаних кіл цих трикутників рівні (позначимо їх як r), а інцентри I та L проектуються на SA у спільну точку F.

Відстані від точок I та L відповідно до AB і SA та SA і AD дорівнюють r:

$$IP = IF = FL = LK = r.$$

3) Враховуючи п. 2 і те, що SA, AB і AD взаємно перпендикулярні (як лінії перетину взаємно перпендикулярних площин), маємо куб $APQKFIOL$, де $d(O; (SAD)) = d(O; (SAB)) = d(O; (ABC)) = r$.

4) $SA \perp (ABC)$, $AD \perp DC$. Тоді $SD \perp DC$ (за ТТП). Тоді $(SAD) \perp (SCD)$.

5) $PQ \parallel AD$, $KQ \parallel AB$, тоді $(IPQ) \parallel (SAD)$. У площинах (SAB), (SCD), (ABC) маємо прямокутники: $TSAP$, $TSDN$, $APND$. Тоді $TN = SD$, $TP = SA$, $PN = AD$.

Лінії перетину (IPQ) з площинами граней (SAB), (SCD) і (ABC) утворюють прямокутний трикутник TPN, рівний трикутнику SAD за трьома сторонами ($TN = SD$, $TP = SA$, $PN = AD$). $\triangle TPN$ отримаємо з $\triangle SAD$ паралельним перенесенням на вектор $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{LO}$. Тоді O – інцентр трикутника TPN – рівновіддалений від сторін цього трикутника на r. Тобто $OE = r$ і $OE \perp TN$.

6) $(TPN) \perp (SCD)$, оскільки $(TPN) \parallel (SAD)$ і $(SAD) \perp (SCD)$.

$OE \in (TPN)$ і є перпендикуляром до прямої TN перетину площин (TPN) і (SCD), тоді $OE \perp (SCD)$. Тобто $OE = d(O; (SCD)) = r$.

7) Аналогічно $d(O; (SCB)) = r$.

Маємо: точка O рівновіддалена від усіх граней піраміди на r – радіус кола, вписаного у $\triangle SAD$. Тоді в дану піраміду можна вписати сферу радіуса r з центром у точці O.

Щ. в. д.

8) Знайдемо значення r, як радіуса кола, вписаного в прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см. Гіпотенуза такого трикутника дорівнює 5 см (це єгипетський трикутник).

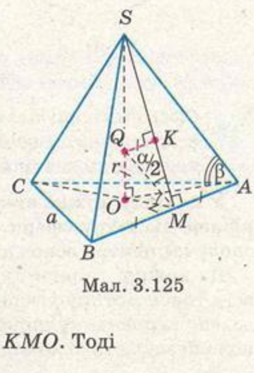
$$r = \frac{3 + 4 - 5}{2} = 1 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 1 см.

П р и к л а д 6. У правильній трикутній піраміді тангенс кута нахилу бічного ребра до площини основи дорівнює m, довжина ребра основи a. Знайдіть радіус вписаної в дану піраміду сфери.

Р о з в ' я з а н н я

Нехай $SABC$ дана правильна піраміда, SO – її висота, SM – апофема. Тоді центр Q вписаної кулі міститься на SO; $AB = a$, $OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $(SA)\hat{\ }(ABC) = \angle SAO \triangleq \beta$, $\operatorname{tg}\beta = m$; $(SAB)\hat{\ }(ABC) = \angle SMO \triangleq \alpha$, точки дотику вписаної кулі до бічних граней і основи належать відповідно апофемам і центру основи (мал. 3.125).



Мал. 3.125

1) $\underline{\text{З } \triangle SOA \text{ і } \triangle SOM}$:

$$SO = OA\operatorname{tg}\beta = OM\operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta = 2m.$$

2) $QO = QK = r$, де K – точка дотику сфери до грані SAB, r – радіус вписаної сфери.

У (SOM) точка Q рівновіддалена від сторін кута KMO. Тоді

$$\angle KMQ = \angle OMQ = \frac{\alpha}{2}.$$

3) $\underline{\triangle QMO}$: $r = OM\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

4) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\frac{1}{\cos\alpha}}$, $\left|\frac{1}{\cos\alpha}\right| = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{1+m^2}$.

Кут α – гострий, $\cos\alpha > 0$. Тоді

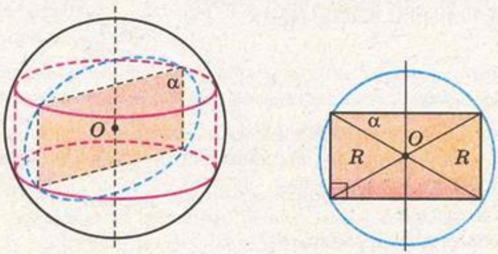
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2m}{1+\sqrt{1+4m^2}},\ r = \frac{am\sqrt{3}}{3(1+\sqrt{1+4m^2})}.$$

Відповідь: $\frac{am\sqrt{3}}{3(1+\sqrt{1+4m^2})}$.

СФЕРА І ЦИЛІНДР

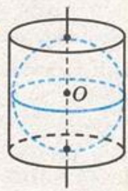
Сфера називається описаною навколо циліндра, якщо кола його основ належать сфері (мал. 3.126-а). Про такий циліндр кажуть, що він ***вписаний у сферу.***

Навколо довільного циліндра можна описати сферу. Центр сфери збігається з центром кола, описаного навколо осьового перерізу циліндра (мал. 3.126-б). Радіус сфери дорівнює радіусу цього кола.



а) б)

Мал. 3.126



Мал. 3.127

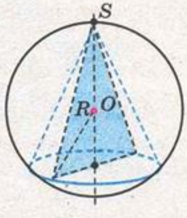
Сфера називається вписаною в циліндр, якщо сфера дотикається до всіх твірних і обох основ циліндра (мал. 3.127). Про такий циліндр кажуть, що він ***описаний навколо сфери.***

У циліндр можна вписати сферу тоді й тільки тоді, коли його висота дорівнює діаметру сфери. Центром вписаної сфери є середина відрізка, що сполучає центри основ циліндра.

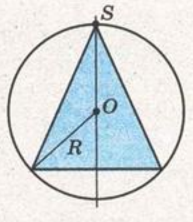
До кожної твірної циліндра сфера дотикається в її середині. Множина всіх точок дотику сфери до твірних циліндра – коло перерізу, який проведено перпендикулярно до осі циліндра через середину його висоти. Таке коло називають *колом дотику* (мал. 3.127).

СФЕРА І КОНУС

Сфера називається описаною навколо конуса, якщо коло його основи і вершина належать сфері (мал. 3.128-а). Про такий конус кажуть, що він ***вписаний у сферу.***



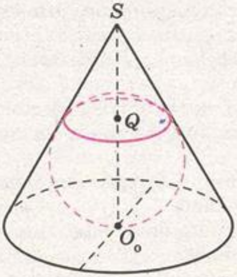
а)



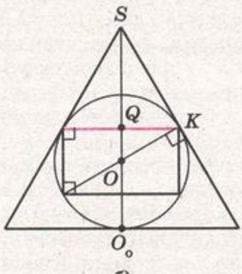
б)

Мал. 3.128

Навколо довільного конуса можна описати сферу. Центр сфери збігається з центром кола, описаного навколо осьового перерізу конуса (мал. 3.128-б). Радіус сфери дорівнює радіусу цього кола.



а)

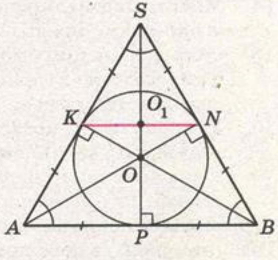


б)

Мал. 3.129

Сфера називається вписаною в конус, якщо сфера дотикається до всіх твірних і основи конуса (мал. 3.129). Про такий конус кажуть, що він *описаний навколо сфери.*

У довільний конус можна вписати сферу. Центром вписаної сфери є центр кола, вписаного в осьовий переріз конуса, радіус сфери дорівнює радіусу цього кола. Множина всіх точок дотику сфери до твірних конуса – коло перерізу, який проведено перпендикулярно до осі конуса (через точку Q на малюнку 3.129). Таке коло називають *колом дотику*.



Мал. 3.130

Приклад 7. У рівносторонній конус із твірною 8 м вписано кулю. Знайдіть довжину кола дотику.

Розв'язання

1) Осьовим перерізом даного конуса є правильний трикутник SAB (мал. 3.130). Коло, яке вписано в цей трикутник, є великим колом

даної сфери. Точки K і N – точки дотику цього кола до твірних SA і SB конуса, KN – діаметр кола дотику.

2) Точки K і N – середини сторін SA і SB (оскільки $\triangle SAB$ – правильний). Тоді $KN = AB : 2$ (як середня лінія у $\triangle SAB$).

3) Радіус кола дотику $r = KN : 2 = AB : 4 = 2$ (м). Довжина цього кола:

$$2\pi r = 4\pi \text{ (м)}.$$

Відповідь: 4π.

Завдання 18

1°. Навколо кулі радіуса 1 м описано прямокутний паралелепіпед. Знайдіть площу його бічної поверхні.

2°. У куб, діагональ якого має довжину $5\sqrt{3}$ дм, вписано сферу. Знайдіть радіус сфери.

3°. Знайдіть радіус кулі, вписаної в правильну шестикутну призму, сторона основи якої дорівнює 12 м.

4. Навколо сфери описано правильну шестикутну призму. Знайдіть радіус сфери, якщо площа бічної поверхні призми дорівнює Q.

5°. У правильну трикутну призму вписано сферу радіуса R. Знайдіть площу повної поверхні призми.

6. У призму вписано сферу радіуса R. Знайдіть площу перпендикулярного перерізу призми, якщо бічна поверхня призми дорівнює S, а бічне ребро a.

7. У пряму чотирикутну призму вписано сферу. Доведіть, що суми площ протилежних бічних граней призми однакові.

8*. Навколо кулі описано правильну n-кутну призму. Знайдіть кут між діагоналлю її бічної грані і площиною основи.

9°. Довжина сторони основи правильної чотирикутної призми дорівнює 6 дм, а бічного ребра 17 дм. Знайдіть радіус описаної сфери.

10°. Навколо правильної чотирикутної призми описано сферу радіуса 21 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її висота дорівнює 14 см.

11. У правильній шестикутній призмі периметр двох граней 54 дм і 178 дм. Знайдіть радіус описаної сфери.

12. Виміри прямокутного паралелепіпеда відносяться як 2 : 3 : 6, площа його поверхні 1152 см^2. Знайдіть радіус описаної сфери.

13. У правильній трикутній призмі висота 4 м, а периметр основи 72 м. Знайдіть радіус описаної сфери.

14. Менша діагональ основи правильної шестикутної призми 9 дм, а бічне ребро 26 дм. Знайдіть радіус описаної сфери.

15. Одна з граней прямої призми – рівнобедрений трикутник з основою 6 см і висотою 1 см. Довжина бічного ребра призми 24 см. Знайдіть радіус описаної сфери.

16. У правильній чотирикутній призмі діагоналі двох граней мають довжину 17 см і 12 см. Знайдіть радіус описаної сфери.

17. У правильної трикутної призми висота на 17 дм більша за сторону основи. Радіус сфери, описаної навколо цієї призми, дорівнює 14 дм. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

18*. Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють a, b, c. Знайдіть радіус описаної сфери.

19*. У сферу радіуса r вписано правильну шестикутну призму. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо радіус сфери, проведений у вершину призми, утворює кут міри 30° з:
1) бічним ребром призми;
2) площиною бічної грані призми;
3) площиною основи призми;
4) меншою з діагоналей призми.
20*. Доведіть, що центр кулі, описаної навколо правильної трикутної піраміди, належить прямій, яка містить висоту піраміди. Розгляньте всі три можливі випадки розміщення центра кулі відносно піраміди.
21*. Розв'яжіть попередню задачу, якщо піраміда буде чотирикутна.
22*. **Знайдіть, при якому співвідношенні між висотою і довжиною бічного ребра правильної піраміди центр описаної навколо неї сфери міститься:**
1) всередині піраміди;
2) на основі піраміди;
3) поза пірамідою.
23. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи 8 см, а бічне ребро 9 см. Знайдіть радіус описаної сфери.
24*. Кожне ребро піраміди дорівнює a. Знайдіть радіус описаної сфери, якщо ця піраміда: 1) чотирикутна; 2) трикутна.
25*. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди прямий. Знайдіть радіус описаної сфери, якщо сторона основи піраміди дорівнює a.
26*. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо трикутної піраміди, бічні ребра якої взаємно перпендикулярні і мають довжини: 2 дм, 14 дм, 23 дм.
27. Навколо правильної чотирикутної піраміди описано сферу. Знайдіть її радіус, якщо сторона основи піраміди $4\sqrt{2}$ дм, а бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 60°.
28*. Висота правильного тетраедра дорівнює H. Знайдіть радіус описаної сфери.
29. Радіуси кіл, описаних навколо основи і бічної грані правильної трикутної піраміди, 8 м і 7 м. Знайдіть радіус описаної сфери.
30*. Радіуси кіл, описаних навколо основи і бічної грані правильної чотирикутної піраміди, 4 м і 3 м. Знайдіть радіус описаної сфери.
31*. Радіуси кіл, описаних навколо основи і бічної грані правильної шестикутної піраміди, 6 м і 5 м. Знайдіть радіус описаної сфери.
32**. Знайдіть площу основи правильної n-кутної піраміди, вписаної в сферу радіуса R, якщо висота піраміди дорівнює стороні основи, а загальна кількість ребер піраміди: 1) 6; 2) 8; 3) 12.
33*. Двогранний кут при ребрі основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 30°, а довжина бічного ребра 4 дм. Знайдіть радіус описаної сфери.
34**. Двогранний кут при бічному ребрі правильної чотирикутної піраміди дорівнює 60°, а довжина сторони основи 4 дм. Знайдіть радіус описаної сфери.
35*. Знайдіть радіус описаної сфери навколо правильної трикутної піраміди, якщо:

1) кут нахилу бічного ребра до площини основи β, а відстань від середини висоти до бічної грані d;
2) двогранний кут при ребрі основи α, а відстань від середини висоти до бічного ребра m.

36.** Розв'яжіть попередню задачу для правильної шестикутної піраміди.

37*. Основою піраміди є трикутник, одна сторона якого дорівнює a, а протилежний до неї кут α. Бічні ребра нахилені до основи під кутом φ. Знайдіть радіус описаної навколо піраміди сфери.

38. Доведіть, що центр кулі, вписаної у правильну піраміду, міститься на висоті піраміди.

39. Двогранні кути при основі піраміди рівні між собою. Доведіть, що в цю піраміду можна вписати сферу.

40*. У правильну піраміду $SA_1...A_n$ вписано сферу з центром O. Доведіть, що в піраміду $OA_1...A_n$ можна вписати сферу.

41. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи 8 м, бічне ребро 8,5 м. Знайдіть радіус вписаної сфери.

42*. Основа піраміди – ромб. Висота піраміди проходить через точку перетину його діагоналей, довжини яких дорівнюють 6 дм і 8 дм. Знайдіть радіус вписаної сфери, якщо довжина висоти 1 дм.

43.** В основі піраміди рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює a, а кут при основі α. Бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом φ. Знайдіть радіус вписаної сфери.

44.** Знайдіть радіус вписаної сфери в правильну чотирикутну піраміду, якщо:
1) кут нахилу бічного ребра до площини основи β, а відстань від середини висоти до бічної грані d;
2) двогранний кут при ребрі основи α, а відстань від середини висоти до бічного ребра m;
3) двогранний кут при бічному ребрі σ, а сторона основи a;
4) плоский кут при вершині піраміди дорівнює γ, а бічне ребро b.

45.** Розв'яжіть попередню задачу для правильної шестикутної піраміди.

46. У кулю вписано рівносторонній циліндр. У скільки разів площа великого круга кулі більша за площу основи циліндра?

47°. Твірна рівностороннього конуса дорівнює 3 дм. Знайдіть:
1) радіус описаної навколо нього сфери;
2) радіус вписаної в нього сфери.

48°. Знайдіть твірну рівностороннього конуса, якщо:
1) радіус вписаної у нього сфери дорівнює 1 дм;
2) діаметр описаної навколо нього сфери дорівнює 4 м.

49. У рівносторонній циліндр вписано кулю радіуса R, а в неї вписано рівносторонній конус. Знайдіть відношення площ бічних поверхонь циліндра і конуса.

50*. У рівносторонній конус вписано кулю радіуса R, а в неї вписано рівносторонній циліндр. У скільки разів площа бічної поверхні конуса більша за площу:
1) бічної поверхні циліндра; 2) повної поверхні циліндра?

51.** Навколо сфери описано конус, а навколо конуса – піраміду. Доведіть, що в дану піраміду можна вписати сферу.

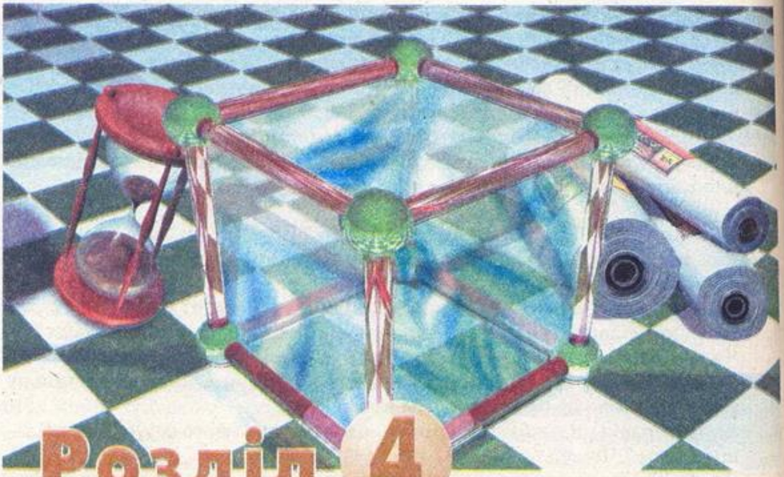
52**. Навколо кулі описано циліндр, а навколо циліндра – призму. Доведіть, що в дану призму можна вписати сферу.

53**. Радіус сфери, описаної навколо правильної чотирикутної піраміди, в 3 рази більший за діаметр сфери, вписаної в цю піраміду. Знайдіть плоский кут при вершині піраміди.

54**. Знайдіть міру двогранного кута при основі правильної чотирикутної піраміди, у якої центри вписаної і описаної сфер симетричні відносно площини основи.

ПИТАННЯ НА УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗНАНЬ ЗА § 18–21

1. Яка міра кута між площиною основи циліндра і площиною, яка проходить через твірну цього циліндра?
2. Чи мають вісь симетрії: 1) циліндр; 2) конус; 3) куля? Скільки їх?
3. Чи мають площину симетрії: 1) конус; 2) циліндр; 3) куля? Скільки їх?
4. Чи має циліндр центр симетрії? А конус? А куля?
5*. Чи може дотична до циліндра площина мати з ним лише одну спільну точку? А якщо це буде конус або куля?
6. Який переріз циліндра площиною, паралельною його осі, має найбільшу площу? Чому?
7. Який переріз конуса площиною, що проходить через його вершину і перетинає основу конуса, має найбільшу площу? Чому?
8. Який переріз кулі площиною має найбільшу площу? Чому?
9. Які фігури можна отримати в перерізі циліндра площиною? А кулі?
10. Чи можна в перерізі конуса площиною отримати:
1) чотирикутник; 2) нерівнобедрений трикутник; 3) правильний трикутник?
11*. Яке взаємне розміщення двох площин, що є дотичними до:
1) циліндра; 2) конуса; 3) кулі?
12. На якій відстані від вершини конуса треба провести площину, паралельну його основі, щоб площа перерізу була вдвічі меншою за площу основи?
13*. Чи завжди можна описати коло навколо осьового перерізу зрізаної піраміди? Чи може радіус цього кола дорівнювати радіусу кола однієї з основ зрізаного конуса?
14. Зобразіть тіло, що утворюється при обертанні куба навколо: 1) ребра; 2) діагоналі. Як знайти площу поверхні такого тіла?
15. Зобразіть тіло, що утворюється при обертанні: 1) правильного тетраедра навколо ребра; 2) конуса навколо прямої, що паралельна його осі і розміщена зовні даного конуса.
16. Точки A і B належать кулі. Чи належать кулі всі точки відрізка AB?
17*. Чи можуть усі вершини прямокутного трикутника з катетами 4 см і $2\sqrt{2}$ см належати сфері радіуса $\sqrt{5}$ см?
18*. Чи можуть дві сфери зі спільним центром і різними радіусами мати спільну дотичну площину?
19*. Якою фігурою є ГМТ, з яких даний відрізок видно під прямим кутом?
20*. Чому не можна описати сферу навколо похилої призми?
21*. Чи правильно, що суми площ протилежних граней прямої чотирикутної призми однакові, якщо в неї можна вписати сферу?



Розділ 4

ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

Ще в Стародавніх Єгипті, Вавилоні, Індії користувалися практичними правилами знаходження об'ємів. Проте теоретичні питання вимірювання об'ємів просторових фігур було розв'язано значно пізніше.

Кожен з вас має уявлення про площу та об'єм, багато разів ви вимірювали їх для певних об'єктів, здійснювали відповідні обчислення при розв'язуванні задач. Мета цього розділу – сформулювати їх точне визначення, аналогічно тому, як ми це зробили у 8-му класі для поняття площі плоскої фігури.

§ 22 Поняття площі й об'єму. Об'єм прямокутного паралелепіпеда

ПЛОЩА ПЛОСКОЇ ПОВЕРХНІ. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ БАГАТОГРАННИКА, ЦИЛІНДРА І КОНУСА

У 8-му класі ми вводили поняття площі плоскої фігури. Нагадаємо його означення.

Площа – це число, яке ставлять у відповідність обмеженій з усіх боків плоскій фігурі, що має такі властивості:

- **площа фігури – число невід'ємне;**
- **площі рівних фігур – рівні;**

- **якщо фігуру поділити на частини, то площа фігури дорівнює сумі площ цих частин;**
- **площа квадрата, сторона якого дорівнює одиниці виміру, приймається за одиницю виміру площі і дорівнює 1 кв. од.**

Нагадаємо також, що *площу поверхні багатогранника* ми визначили раніше як суму площ усіх його граней, а *площу поверхні циліндра і конуса* – як площу їхніх розгорток.

Аналогічно поняттю плоскої фігури у планіметрії визначають і об'єм просторової фігури. Зрозуміло, що рівні просторові фігури обмежують одну й ту саму частину простору – їх об'єми рівні, а якщо розглядати два куби, поставлені один на одний, то об'єм утвореної фігури дорівнює сумі об'ємів цих кубів.

Зауважимо, що просторові фігури можуть мати такі «химерні» форми, що ми не можемо автоматично приписати їм вказані раніше властивості. Тому математики виділяють *прості фігури* (для яких виконуються такі властивості). Їм відповідають усі реальні тіла (фігури, що утворено межею цих тіл).

Надалі будемо працювати саме з простими просторовими фігурами. Тому будемо опускати слово «проста» і під фігурою матимемо на увазі саме просту фігуру.

ПОНЯТТЯ ПРОСТОЇ ФІГУРИ

Будемо називати просторову фігуру *простою*, якщо вона обмежена, її межа не має внутрішніх точок і кожна пряма перетинає її в обмеженій кількості окремих точок і відрізків, або зовсім не перетинає цю фігуру.

Прикладом простих фігур є всі багатогранники (коли ми розглядаємо їх саме як просторові фігури) й фігури обертання, які ми вивчали раніше.

Прикладом непростої фігури є фігура, яка складається з довільної послідовності точок.

Може здаватися дивним, як це межа може мати внутрішні точки. Проте межа – фігура, і як будь-яка фігура може мати внутрішні точки. Наведемо приклад. Нехай у координатному просторі задано фігуру як множину точок, що задовольняє систему:

$$\begin{cases} z = 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Межею такої фігури буде плоский одиничний квадрат, який має внутрішні точки.

ОБ'ЄМ ПРОСТОРОВОЇ ФІГУРИ

Об'єм – це число, яке ставлять у відповідність простій просторовій фігурі, що має такі властивості:

- **об'єм фігури – число невід'ємне;**

- **об'єми рівних фігур – рівні;**
- **якщо фігуру поділити на частини, то об'єм фігури дорівнює сумі об'ємів цих частин;**
- **об'єм куба, сторона якого дорівнює одиниці виміру, приймається за одиницю виміру об'єму і дорівнює 1 куб. од.**

Наприклад, об'єм куба із стороною 1 м дорівнює одному кубічному метру (1 м^3); об'єм куба, сторона якого дорівнює 1 ліктю, – 1 кубічному ліктю тощо.

З наведених властивостей маємо:

- **якщо просторова фігура містить іншу фігуру, то об'єм першої не менший за об'єм другої;**
- **об'єм куба із стороною n одиниць виміру ($n > 0$) дорівнює n^3 куб. од.**

Дві просторові фігури, що мають рівні об'єми, називають *рівновеликими*.

З'ясуємо, як знайти об'єми відомих нам просторових фігур через інші характеристики цих фігур.

ОБ'ЄМ ПРЯМОКУТНОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

Т Теорема. **Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його лінійних вимірів.**

Тобто якщо a, b, c – виміри прямокутного паралелепіпеда, то виконується відома нам рівність:

$$V = abc.$$

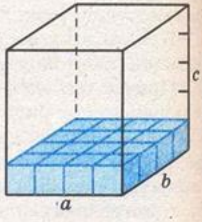
Доведення

Можливі три випадки: (1) a, b, c – натуральні числа; (2) a, b, c – раціональні числа; (3) a, b, c – ірраціональні числа.

ВИПАДОК 1. <u>a, b, c – натуральні числа</u>.

Такий паралелепіпед можна розрізати на c шарів, у кожному з яких міститься ab кубів з ребром, рівним одиниці виміру (мал. 4.1). Об'єм такого паралелепіпеда дорівнює

$$V = abc.$$



Мал. 4.1

ВИПАДОК 2. <u>a, b, c – раціональні числа</u>.

Тоді ці числа – дроби, чисельником і знаменником яких є натуральні числа. Нехай n – спільний знаменник цих дробів, тобто

$$a = k \cdot \frac{1}{n}\text{ од.},\ b = m \cdot \frac{1}{n}\text{ од.},\ c = l \cdot \frac{1}{n}\text{ од.}$$

Кожен з відрізків a, b, c можна поділити відповідно на k, m, l частин завдовжки $\frac{1}{n}$ од. кожна. Тобто даний паралелепіпед складається з kml кубиків з довжиною ребра $\frac{1}{n}$ од. Об'єм кожного такого кубика $\frac{1}{n^3}$ куб. од., а даного паралелепіпеда

$$V = kml \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{k}{n} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{l}{n} = abc.$$

ВИПАДОК 3. a, b, c – ірраціональні числа.

Тоді дані числа можна записати у вигляді нескінченного десяткового дробу. Округлимо кожний з цих дробів з надлишком і недостачею, залишивши однакове число знаків після коми:

$$a_1 < a < a_2,\ b_1 < b < b_2,\ c_1 < c < c_2.$$

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 і c_1, c_2 – скінченні десяткові дроби, тобто є раціональними числами, для яких ми провели доведення твердження теореми.

Паралелепіпед з вимірами a_2, b_2, c_2 містить паралелепіпед з вимірами a, b, c, який, в свою чергу, містить паралелепіпед, виміри якого – a_1, b_1, c_1. Тоді шукане значення об'єму нашого паралелепіпеда задовольняє умову

$$a_1b_1c_1 < V < a_2b_2c_2.$$

Округлення чисел a, b, c з надлишком і недостачею можна проводити з будь-якою наперед заданою точністю. Тоді і в останньому випадку маємо

$$V = abc.$$

Теорему доведено.

Н Наслідок. **Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту.**

Зауваження. Повертаючи прямокутний паралелепіпед, за його основу можна обирати будь-яку грань цього паралелепіпеда.

Завдання 19

1°. Який приблизний об'єм вашої класної кімнати?
2°. Для інтер'єру камінів фірма виготовляє цеглини розміру 20×10×5 см. Скільки контейнерів розміру 2×2×1 м треба заготовити для перевезення 13 000 цеглин?
3°. Скільки літрів води вміщає бак, що має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 1×0,5×1,5 м? (1 л = 1 дм^3.)
4°. За санітарними нормами у приміщенні дитячого садка на кожну дитину повинно припадати не менше ніж 5 м^3 повітря. На скільки дітлахів розрахована кімната розміром 5×6×3 м?
5°. На складі мірою для видачі зерна худобі користуються двома ящиками у формі прямокутних паралелепіпедів з рівними основами. Один ящик вміщує 5 кг зерна. Скільки зерна вміщує другий ящик, якщо він у 1,5 раза вищий за перший?
6. У квартирі дві кімнати. Кубатура однієї кімнати 120 м^3. Знайдіть кубатуру другої кімнати, якщо вона в 1,5 раза ширша за першу і в 3 рази коротша за неї.
7. Чи можуть два нерівні прямокутні паралелепіпеди, висоти яких рівні, мати рівні бічні поверхні?
8. У правильної чотирикутної призми діагональ завдовжки 5 см, а діагональ бічної грані – 4 см. Знайдіть об'єм призми.
9. Довжини ребер двох кубів відносяться як 2 : 5. Знайдіть відношення об'ємів цих кубів.

10. Одне ребро куба збільшили на 2 м, друге – зменшили на 2 м, а третє залишили без зміни. Об'єм утвореної фігури на 16 $м^3$ менший за об'єм початкового куба. Знайдіть довжину ребра куба.

11. Як поділити куб на: 1) 8 рівновеликих кубів; 2*) 5 рівновеликих прямокутних паралелепіпедів?

12*. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 $м^3$, 3 $м^3$ і 6 $м^3$. Знайдіть об'єм цього паралелепіпеда.

13*. Відомо, що площі трьох нерівних граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють S_1, S_2, S_3. Знайдіть об'єм цього паралелепіпеда.

14*. У сферу радіуса R вписано правильну чотирикутну призму, діагональ якої утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть об'єм.

15*. У прямокутний паралелепіпед вписано сферу радіуса R. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

16*. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює d. Знайдіть об'єм призми, якщо синус кута нахилу діагоналі призми до: 1) площини основи дорівнює m; 2) площини бічної грані дорівнює n.

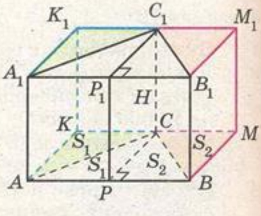
§ 23 Об'єми призми і циліндра

ОБ'ЄМ ПРЯМОЇ ПРИЗМИ

Теорема 1. **Об'єм прямої призми дорівнює добутку площі основи на висоту.**

Доведення

1) Доведемо твердження теореми для трикутної прямої призми. Нехай маємо трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$ (мал. 4.2). Позначимо її висоту як H, а об'єм як V.



Мал. 4.2

У трикутнику основи проведемо таку висоту, щоб вона містилася всередині цього трикутника (у будь-якому трикутнику хоча б одна з висот задовольняє цю умову). Нехай це буде висота CP. У площині другої основи їй відповідає висота CP_1 трикутника $A_1B_1C_1$, $CP \parallel CP_1$.

Переріз CPP_1C_1, перпендикулярний до основи, поділяє дану піраміду на дві частини – прямі призми $APCA_1P_1C_1$ і $CPBC_1P_1B_1$, об'єми яких позначимо як V_1 і V_2 відповідно.

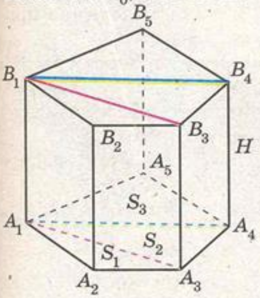
В основі кожної з утворених прямих призм – прямокутний трикутник. Тоді кожну з них можна добудувати до прямокутного паралелепіпеда (див. мал. 4.2). До того площини AA_1C_1C і BB_1C_1C поділяють вказані прямокутні паралелепіпеди на дві рівновеликі частини. Їх об'єми відповідно дорівнюють:

$$2V_1 = (2S_{APC}) \cdot H, \ 2V_2 = (2S_{BPC}) \cdot H.$$

Тоді $V = V_1 + V_2 = (S_{APC} + S_{BPC})H = S_{ABC} \cdot H$.

Для трикутної прямої призми *твердження теореми виконується.*

2) Доведемо твердження теореми для довільної n-кутної прямої призми. Нехай маємо пряму призму (мал. 4.3). Позначимо її висоту як H, площу основи як S_o, а об'єм як V.



Мал. 4.3

Таку призму можна завжди поділити на прямі трикутні призми. Наприклад, на малюнку 4.3 зображено п'ятикутну пряму призму, яку площинами, що проходять через відповідні діагоналі основ, поділено на три прямі трикутні призми.

Об'єм кожної з утворених призм за попереднім доведенням дорівнює добутку площі основи на висоту. Маємо:

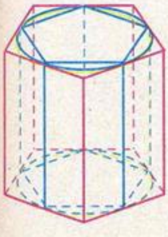
$$V = (S_1 + S_2 + \ldots + S_n) \cdot H = S_o \cdot H.$$

Теорему доведено.

ОБ'ЄМ ЦИЛІНДРА

Т Теорема 2. **Об'єм циліндра дорівнює добутку площі основи на висоту.**

Доведення


Мал. 4.4

Позначимо висоту циліндра як H, площу його основи як S_o, а об'єм як V.

Впишемо в циліндр й опишемо навколо цього циліндра n-кутні правильні призми (мал. 4.4). Позначимо площі основ цих призм як S_n і Q_n відповідно. Висоти цих призм однакові і дорівнюють висоті циліндра.

Відповідно до розміщення фігур і властивостей об'єму маємо:

$$S_n \cdot H < V < Q_n \cdot H.$$

При збільшенні n значення S_n і Q_n як завгодно мало відрізняються від площі круга основи циліндра S_o. Тоді

$$V = S_o \cdot H.$$

Теорему доведено.

Н Наслідок. **Об'єм циліндра радіуса R і висоти H дорівнює $V = \pi R^2 H$.**

ОБ'ЄМ ПОХИЛОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

Т Теорема 3. **Об'єм похилого паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту.**

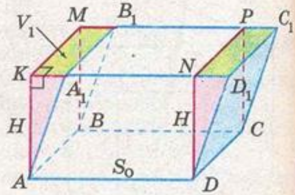
Доведення

Нехай маємо похилий паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 4.5). Позначимо його висоту як H, площу основи як S_o, а об'єм як V.

Проведемо через ребра AB і CD площини, перпендикулярні до площин основ даного паралелепіпеда. Отримаємо прямокутний паралелепіпед $ABCDKMPN$, бічні ребра якого дорівнюють H (див. мал. 4.5). Об'єм Q цього прямокутного паралелепіпеда дорівнює

$$Q = S_o \cdot H.$$

Розглянемо дві трикутні призми KAA_1MBB_1 і NDD_1PCC_1. Вони рівні, бо одна перетворюється на одну паралельним перенесенням на вектор $\overline{AD}$. Позначимо їх об'єми як V_1.



Мал. 4.5

Маємо:

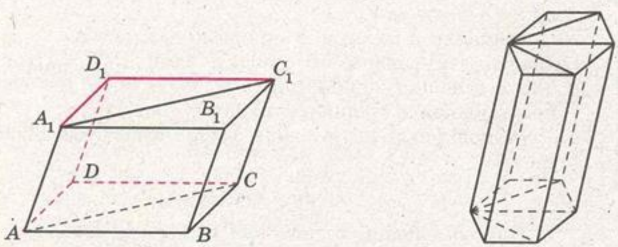
$$V = (Q - V_1) + V_1 = Q = S_o \cdot H.$$

Теорему доведено.

ОБ'ЄМ ДОВІЛЬНОЇ ПРИЗМИ

Н Наслідок 1. **Об'єм похилої трикутної призми дорівнює добутку площі основи на висоту.**

Правильність цього твердження випливає безпосередньо з твердження теореми, якщо доповнити трикутну призму до паралелепіпеда (див. мал. 4.6-а).



а) б)

Мал. 4.6

Н Наслідок 2. **Об'єм похилої n-кутної призми дорівнює добутку площі основи на висоту.**

Правильність цього твердження випливає з попереднього наслідку, якщо поділити призму на трикутні призми (див. мал. 4.6-б).

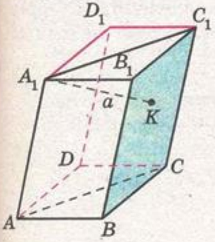
Отже, з теорем 1 і 3 маємо такий висновок.
Об'єм довільної призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.

Розглянемо розв'язання такої опорної задачі.

З Приклад 1. **Площа бічної грані трикутної призми дорівнює S, а відстань від протилежного ребра до цієї грані a. Знайдіть об'єм призми.**

Розв'язання

Нехай маємо похилу трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$, площа її бічної грані BCC_1B_1 дорівнює S, а $d(AA_1; (BCC_1)) = a$. Об'єм цієї призми позначимо як V.



Мал. 4.7

Добудуємо дану трикутну призму до паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 4.7). Об'єм такого паралелепіпеда вдвічі більший за об'єм даної призми, тобто дорівнює $2V$.

Розглянемо як основу призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грань BCC_1B_1. Тоді її об'єм дорівнює

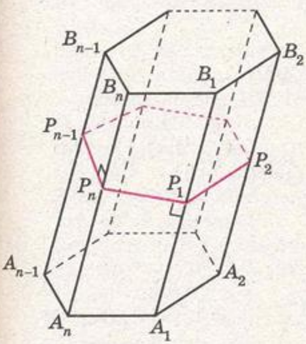
$$2V = S \cdot d(AA_1; (BCC_1)) = S \cdot a.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}S \cdot a$.

ДОДАТКОВІ ФОРМУЛИ ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМУ ПРИЗМИ

Теорема 4. **Об'єм похилої призми дорівнює добутку довжини бічного ребра на площу перпендикулярного перерізу.**

Доведення



Мал. 4.8

Нехай маємо похилу призму $A_1 \dots A_nB_1 \dots B_n$, довжина бічного ребра якої дорівнює l, а площа її перпендикулярного перерізу $P_1 \dots P_n$ дорівнює $S_\perp$. Об'єм цієї призми позначимо як V.

Перпендикулярний переріз поділяє призму на дві частини (мал. 4.8). Застосуємо до однієї з цих частин паралельне перенесення, яке суміщає основи призми. Отримаємо пряму призму з основою $P_1 \dots P_n$. Вона має той самий об'єм, що і задана призма. Тоді маємо:

$$V = S_\perp \cdot l.$$

Теорему доведено.

ПРИНЦИП КАВАЛЬЄРІ

Геометричний факт, відкритий відомим італійським математиком, учнем Галілея, *Бонавентурою Кавальєрі* (1598–1647), дає змогу значно спростити розв'язування певних задач на обчислення об'ємів тіл. Твердження, яке сьогодні називають «принципом Кавальєрі», вперше було надруковано у 1635 р. в роботі Кавальєрі «Геометрія». Формулюється воно так.

Нехай дано два тіла, висоти яких рівні, а основи лежать в спільній площині α. Якщо в перерізі двох тіл площиною, яка паралельна α, утворюються фігури, площі яких рівні, то об'єми цих тіл рівні.

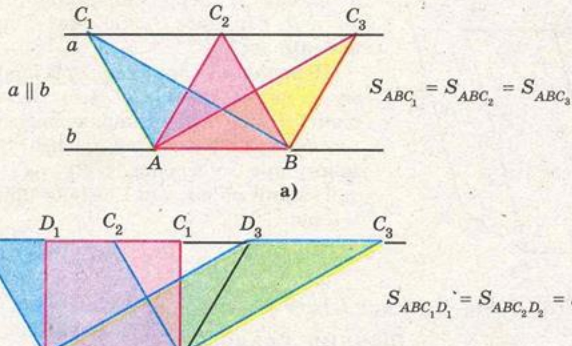
Щоб зрозуміти це твердження, уявимо модель призми, яка складається з тоненьких пластин, наприклад, це пачка паперу з тоненьких аркушів. Тепер уявимо, що ми розмістили цю пачку паперу на площині й «штовхнули» так, щоб вона нахилилася і утворився похилий паралелепіпед. Форма моделі змінилася, а об'єм залишився незмінним (мал. 4.9). Саме це ми і довели раніше, розглядаючи паралелепіпед.

Мал. 4.9

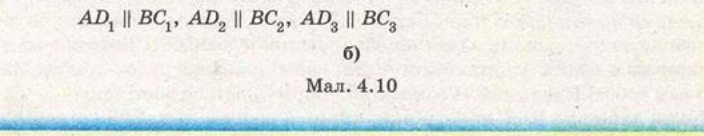
Можна цей принцип сформулювати й інакше.

Якщо основами просторової фігури є дві рівні плоскі фігури, що містяться в паралельних площинах α і β, то всі фігури, отримані з даної переміщенням її основ у площинах α і β, мають рівні об'єми.

Зауважимо, що це твердження аналогічне твердженню планіметрії про рівновеликі трикутники, основи яких рівні й належать одній прямій, а вершина переміщується вздовж прямої, яка паралельна основі (мал. 4.10-а). Те саме маємо і для паралелограмів (трапецій), одна сторона яких спільна, а друга переміщується вздовж прямої, паралельної першій стороні (мал. 4.10-б).



а)



$AD_1 \parallel BC_1$, $AD_2 \parallel BC_2$, $AD_3 \parallel BC_3$

б)

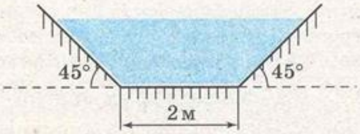
Мал. 4.10

Завдання 20

1°. Об'єм рідини в циліндричній цистерні можна виміряти за допомогою вертикального прута. Як?

2°. Обчисліть об'єм сараю з прямокутною основою $12 \times 7{,}5$ м, якщо висота його стін 6 м, а дах двосхилий з прямим кутом між крокками.

3°. Через канал трапецеїдальної форми перерізу (мал. 4.11) за 1 с проходить $2{,}8$ м^3 води при швидкості течії $1{,}25$ м/с. Знайдіть глибину води в каналі.



Мал. 4.11

4°. Усі ребра прямої трикутної призми однакові й дорівнюють по 2 м. Знайдіть об'єм цієї призми.

5. Визначте вагу 1000 паркетних плиток ($\rho = 2{,}1$ г/см^3), якщо товщина плитки 13 мм, а основа – правильний шестикутник, у якого відстань між паралельними сторонами 150 мм.

6°. Усі грані шестикутної призми – квадрати із стороною 10 дм. Знайдіть її об'єм.

7. Знайдіть площу поверхні й об'єм прямої призми, в основі якої лежить ромб із довжиною сторони 5 см і гострим кутом 30°, а бічне ребро цієї призми дорівнює 10 см.

8. Діагональний переріз правильної чотирикутної призми – квадрат, площа якого дорівнює Q. Знайдіть об'єм призми.

9. Сторона основи правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює 8 дм, кут між площиною основи і перерізом AB_1C дорівнює 45°. Знайдіть об'єм призми.

10. Знайдіть об'єм прямої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$, якщо:
1) $\angle BAC = 120°$, $AB = 5$ см, $AC = 3$ см і найбільша з площ бічних граней дорівнює 35 см^2;
2) $\angle AB_1C = 60°$, $AB_1 = 3$ дм, $CB_1 = 2$ дм і двогранний кут при ребрі BB_1 – прямий.

11. Знайдіть об'єм прямої трикутної призми, сторони основи якої дорівнюють 10, 10 і 12. А діагональ меншої бічної грані нахилена до площини основи під кутом 60°.

12. Площі двох бічних граней прямої трикутної призми дорівнюють 3 см^2 і 4 см^2, а кут між сторонами основи, через які проходять ці бічні грані, дорівнює 30°. Довжина бічного ребра дорівнює 1 см. Знайдіть об'єм призми.

13. Знайдіть об'єм правильної шестикутної призми, довжини діагоналей якої дорівнюють 35 дм і 31 дм.

14. Площа основи прямої трикутної призми 21 см^2, а площі бічних граней – 40 см^2, 68 см^2, 84 см^2. Знайдіть об'єм призми.

15. Малий діагональний переріз правильної шестикутної призми – квадрат. Велика діагональ призми 14 дм. Знайдіть об'єм призми.

16*. Площа основи і площа бічної поверхні правильної шестикутної призми відповідно дорівнюють S і Q. Знайдіть об'єм призми.

17*. Площина, яка проходить через бічне ребро правильної шестикутної призми, поділила її на частини, об'єми яких відносяться як 1 : 3. Знайдіть площу перерізу, якщо площа бічної грані дорівнює Q.

18*. Основою прямої призми є паралелограм. Через сторону основи, довжина якої a, і протилежну до неї сторону іншої основи провели площину, що утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм призми, якщо площа перерізу дорівнює S.

19.** Основою прямої призми є рівнобедрений прямокутний трикутник із гіпотенузою $\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$ м. Знайдіть об'єм призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює сумі площ основ.

20.** Основа прямої призми – рівнобедрена трапеція з основами 8 см і 4 см. Через більшу основу трапеції і середину протилежного бічного ребра провели площину, яка утворює з основою кут 60°. Знайдіть об'єм призми, якщо площа перерізу дорівнює 48 см^2.

21. Площа основи циліндра дорівнює Q, а площа його осьового перерізу S. Знайдіть об'єм циліндра.

22*. Площина, паралельна осі циліндра, відтинає від кола основи дугу в 120° і віддалена від осі на відстань a. Діагональ перерізу дорівнює $4a$. Знайдіть об'єм циліндра.

23. У циліндр вписана призма, основою якої є прямокутний трикутник з катетом a і прилеглим до нього кутом α. Знайдіть об'єм циліндра, якщо висота призми дорівнює H.

24*. Дві площини утворюють кут α і проходять через спільну твірну циліндра, радіус якого дорівнює R. Знайдіть об'єм циліндра, якщо площі перерізів, утворених площинами, дорівнюють S.

25. У циліндр вписана правильна n-кутна призма. Знайдіть відношення об'ємів призми і циліндра, якщо: **1)** $n = 3$; **2)** $n = 4$; **3)** $n = 6$; **4)** $n = 8$; **5)** $n = k$.

26*. У правильну шестикутну піраміду вписано циліндр так, що коло верхньої основи дотикається до бічної поверхні піраміди, а нижня основа належить основі піраміди. Бічні грані піраміди утворюють з площиною основи кут α. Сторона основи дорівнює a. Знайдіть об'єм циліндра, якщо його осьовим перерізом є квадрат.

27*. Периметр перпендикулярного перерізу трикутної призми 90 см, площі її бічних граней дорівнюють 450 см^2, 522 см^2, 648 см^2. Знайдіть об'єм призми.

28*. У похилої трикутної призми основа – правильний трикутник, довжина сторони якого дорівнює $3\sqrt{3}$. Одна з вершин верхньої основи проектується в центр нижньої основи. Бічні ребра призми утворюють з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм призми.

29*. Площі двох бічних граней трикутної призми 30 см^2 і 40 см^2, а кут між ними 120°. Знайдіть об'єм призми, якщо довжина бічного ребра дорівнює 10 см.

30.** Через бічні ребра трикутної призми проведено площини, кожна з яких поділяє призму на рівновеликі частини. Чи перетинаються ці площини по одній прямій?

31.** В основі похилого паралелепіпеда – прямокутник. Протилежні бічні грані паралелепіпеда перпендикулярні до основи, площі кожної з інших двох граней дорівнюють по 25 дм^2, бічні ребра складають з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо всі його бічні ребра рівні між собою.

32.** У похилій трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ $\angle A_1AB = \angle A_1AC < 90°$, $AB = AC$, $BC = a$, $AA_1 = b$. Кут між рівними бічними гранями дорівнює 120°. Знайдіть об'єм призми.

33.** У похилій трикутній призмі основа – рівнобедрений прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 7 см. Бічна грань, що проходить через один з катетів основи, перпендикулярна до площини основи, а площа бічної грані, що проходить через інший катет, дорівнює 49 см^2. Бічні ребра призми утворюють з основою кут 45°. Знайдіть об'єм призми, якщо бічне ребро дорівнює 7 см.

34.** Основа призми – квадрат. Добуток ребер одного з тригранних кутів призми вдвічі більший за об'єм призми. Знайдіть кут нахилу бічного ребра до площини основи.

35.** Основа прямої призми – чотирикутник, вписаний у коло радіуса 25 см. Площі бічних граней відносяться як 7 : 15 : 20 : 24. Діагональ найбільшої бічної грані 52 см. Знайдіть об'єм призми.

36.** Основа прямої призми – трапеція, площа якої 306 см^2. Площі паралельних бічних граней 40 см^2 і 300 см^2, а двох інших – 75 см^2 і 205 см^2. Знайдіть об'єм призми.

37.** Довжина ребра правильного тетраедра a. Знайдіть об'єм циліндра, у якого два ребра цього тетраедра є діаметрами основ.

38.** Знайдіть висоту циліндра, який має найбільший об'єм з усіх вписаних у дану сферу циліндрів.

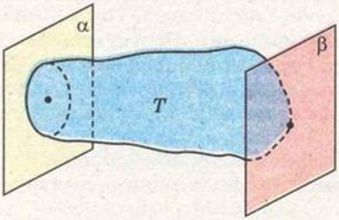
§ 24 Об'єми піраміди та конуса

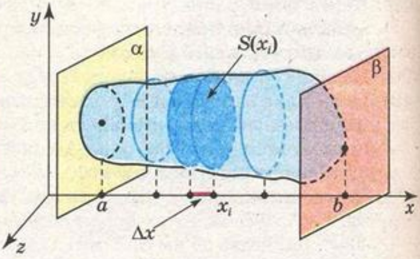
За свідченнями Архімеда, ще в V ст. до н.е. Демокріт з Абдери встановив, що об'єм піраміди дорівнює третині об'єму призми з тією самою основою і висотою. А тепер ми з вами доведемо це співвідношення. Допоможе нам у цьому поняття інтеграла, яке ви вивчаєте в курсі алгебри та початків аналізу. (Без цього доведення було б дуже громіздким.)

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ І ОБ'ЄМИ ТІЛ

Розглянемо тіло T, яке розміщене між двома паралельними площинами α і β (мал. 4.12-а). Введемо прямокутну систему координат так, щоб вісь Ox була перпендикулярна до цих площин (мал. 4.12-б). Позначимо через a і b абсциси точок перетину α і β з Ox ($b > a$).

Якщо через точки (0; 0; x), де $x \in [a; b]$, провести площини, перпендикулярні до Ox, то площі S перерізів даного тіла залежатимуть від x, тобто $S(x)$ – певна функція x. Будемо розглядати випадок, коли $S(x)$ є неперервною функцією x на $[a; b]$.





Мал. 4.12

Якщо поділити відрізок $[a; b]$ осі Ox на n рівних відрізків і провести через ці точки площини, перпендикулярні до Ox, то тіло T буде поділено на n шарів завтовшки $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Чим менше значення Δx, тим менше відрізняються основи таких шарів один від одного, тим ближче їхня форма або до циліндра, або до прямої призми.

Тоді об'єм всього тіла T можна записати через суму об'ємів цих шарів:

$$V \approx S(x_1)\Delta x + \ldots + S(x_i)\Delta x + \ldots + S(x_n)\Delta x.$$

Якщо n прямує до нескінченності, значення такої суми буде нескінченно близьким до значення об'єму тіла. Це інтегральна сума для неперервної функції $S(x)$ на числовому відрізку $[a; b]$:

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x = \int_a^b S(x)dx.$$

Наприклад, нехай задане тіло буде циліндром, площа основи якого $S_о$, а висота H. Тоді, якщо спрямувати вісь Ox вздовж осі циліндра і розмістити початок координат у центрі нижньої його основи, матимемо:

$$V = \int_0^H S_о dx = S_о \int_0^H dx = S_о H.$$

Це вже відома нам формула для обчислення об'єму циліндра.

Зауваження. Зрозуміло, що така формула буде правильною у більш широкому розумінні циліндра (див. § 13, с. 105, поняття узагальненого циліндра), коли основою циліндра є довільна плоска фігура. Звідси відразу отримуємо вже відому нам формулу для обчислення об'єму призми.

ОБ'ЄМ ПІРАМІДИ

Т Теорема 1. **Об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту.**

Доведення

1) Доведемо твердження теореми <u>для трикутної піраміди</u>. Нехай маємо трикутну піраміду $SABC$. Позначимо її висоту як H, площу основи як S_o, об'єм як V.

Введемо прямокутну систему координат з початком у вершині S даної піраміди, а вісь Ox спрямуємо вздовж її висоти (мал. 4.13).

Як відомо, якщо піраміду перетнути площиною, що паралельна її основі, то площі перерізу та основи відносяться як квадрати їх відстаней від вершини (див. § 16, с. 128). Маємо:

$$\frac{S(x)}{S_o} = \frac{x^2}{H^2},\ S(x) = \frac{S_o \cdot x^2}{H^2},\ V = \int_0^H S(x)dx = \int_0^H \frac{S_o x^2}{H^2}dx = \frac{S_o \cdot x^3}{H^2 3}\bigg|_0^H = \frac{1}{3}S_o H.$$

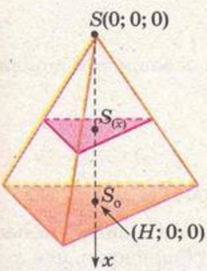
2) Доведемо твердження теореми <u>для довільної піраміди</u>. Позначимо її висоту як H, площу основи як S_o, об'єм як V.

Таку піраміду можна поділити на трикутні піраміди (як це зроблено на малюнку 4.14 для п'ятикутної піраміди). Висоти цих пірамід рівні H, а сума площ основ дорівнює площі S_o основи піраміди, що розглядається.

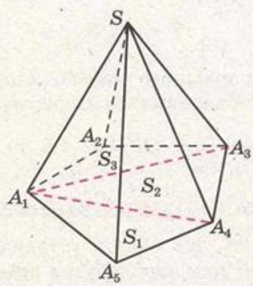
Маємо:

$$V = V_1 + V_2 + \ldots = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \ldots) \cdot H = \frac{1}{3}S_o H.$$

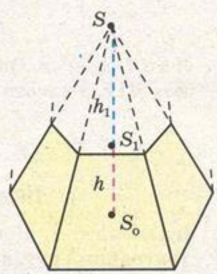
Теорему доведено.



Мал. 4.13



Мал. 4.14



Мал. 4.15

Наслідок. **Об'єм зрізаної піраміди, площі основ якої дорівнюють S_o і S_1, а висота – h, обчислюється за формулою:**

$$V = \frac{1}{3}h(S_o + S_1 + \sqrt{S_o \cdot S_1}).$$

Позначимо висоту піраміди, яку було «відрізано» для утворення даної зрізаної піраміди, як h_1. Об'єм зрізаної піраміди дорівнює різниці об'ємів двох пірамід з площами основ S_o і S_1 та висотами $(h + h_1)$ і h_1 відповідно (див. мал. 4.15). Основи зрізаної піраміди паралельні, тоді:

$$\frac{S_o}{S_1} = \frac{(h + h_1)^2}{h_1^2},\ h_1 = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_o} - \sqrt{S_1}},\ V = \frac{1}{3}(h + h_1)S_o - \frac{1}{3}h_1 S_1,$$

$$V = \frac{1}{3}h(S_o + S_1 + \sqrt{S_o \cdot S_1}).$$

Зауваження. У наведеному доведенні ми мали дві подібні піраміди й записали відношення площ їх основ як відношення квадратів відповідних лінійних елементів. Таке відношення дорівнює квадрату коефіцієнта подібності фігур. Зрозуміло, що **відношення об'ємів двох подібних фігур дорівнює кубу відношення їх відповідних лінійних елементів.**

Тоді **об'єми двох подібних фігур відносяться як куби їх коефіцієнтів подібності.**

ОБ'ЄМ КОНУСА

Т Теорема 2. **Об'єм конуса дорівнює третині добутку площі його основи на висоту.**

Правильність твердження цієї теореми отримаємо з доведення теореми 1, якщо у цьому доведенні слово «піраміда» замінити на «конус».

Якщо врахувати, що основи конуса та зрізаного конуса є кругами, а площа круга дорівнює добутку числа π на квадрат його радіуса, маємо такі наслідки теореми 2.

Н Наслідок 1. **Об'єм конуса, висота якого H, а радіус основи R, можна обчислити за формулою**

$$V = \pi R^2 H.$$

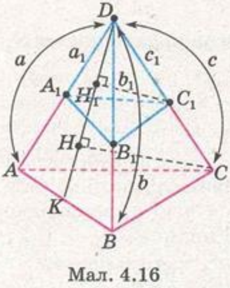
Н Наслідок 2. **Об'єм зрізаного конуса, радіуси основ якого дорівнюють R і r, а висота h, обчислюється за формулою:**

$$V = \frac{1}{3}\pi h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r).$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

З Приклад 1. Доведіть, що **об'єми тетраедрів, які мають спільний тригранний кут, відносяться як добутки ребер, утворюючих цей кут.**

Розв'язання



Мал. 4.16

Нехай тетраедри $DABC$ і $DA_1B_1C_1$ мають спільний тригранний кут при вершині D (мал. 4.16). Позначимо ребра тетраедрів, які містять цей кут, відповідно: a і a_1, b і b_1, c і c_1; об'єми цих тетраедрів – як V і V_1; висоти $CH \equiv h$ і $CH_1 \equiv h_1$.

1) Трикутники ADB і A_1DB_1 мають спільний кут при вершині D. Тоді їх площі відносяться як $ab : a_1b_1$. Звідси $\frac{V}{V_1} = \frac{abh}{a_1b_1h_1}$.

2) Пряма DC проектується на площину ABD у пряму DK. Тоді основи H і H_1 висот CH і C_1H_1 містяться на прямій DK.

3) <u>У (DKC)</u>: $CH \parallel C_1H_1$ (як дві прямі, що перпендикулярні до третьої). Тоді за теоремою Фалеса $h : h_1 = c : c_1$.

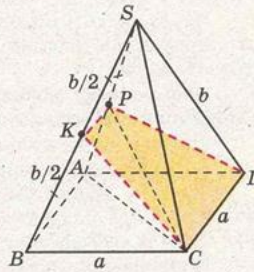
4) Маємо: $\frac{V}{V_1} = \frac{abh}{a_1b_1h_1} = \frac{abc}{a_1b_1c_1}$.

Щ. в. д.

Приклад 2. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ проведено переріз через середину ребра SA і вершини C та D. Знайдіть відношення об'ємів тіл, на які поділяє піраміду цей переріз.

Розв'язання

Позначимо об'єм даної піраміди як V, довжину ребра основи як a, бічного ребра як b, P – середина SA.



Мал. 4.17

1) Дана піраміда правильна, тоді $CD \parallel (SAB)$. Звідси січна площина перетинає (SAB) по прямій $KP \parallel AB$, де точка K – середина ребра SB.

2) Позначимо об'єми трикутних пірамід $SPCD$ і $SPCK$ як V_1 і V_2.

3) Піраміди $SACD$ і $SACB$ рівновеликі, їх об'єм дорівнює $V : 2$.

4) За опорною задачею 1 маємо:

$$\frac{V_1}{\frac{V}{2}} = \frac{bb\left(\frac{b}{2}\right)}{bbb},\ V_1 = \frac{1}{4}V;\ \frac{V_2}{\frac{V}{2}} = \frac{b\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)}{bbb},\ V_2 = \frac{1}{8}V.$$

5) Шукане відношення дорівнює: $\frac{V_1 + V_2}{V - (V_1 + V_2)} = \frac{\frac{3}{8}}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{3}{5}$.

Відповідь: 3 : 5.

Доведіть самостійно твердження наступних опорних фактів і майте їх на увазі, коли розв'язуєте задачі.

1. Доведіть, що площина, яка проходить через ребро тетраедра і середину протилежного до нього ребра, поділяє цей тетраедр на дві рівновеликі частини.

2. Доведіть, якщо в тетраедрі висоти h_1, h_2, h_3, h_4, а R – радіус вписаної кулі, то $\frac{1}{R} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$.

3. Доведіть, що об'єм тетраедра дорівнює $\frac{1}{6}abd\sin\varphi$, де a і b – мимобіжні ребра тетраедра, а φ і d – відповідно кут і відстань між ними.

Завдання 21

1. Знайдіть об'єм піраміди Хеопса, площа основи якої 5,3 га, а висота 147 м.
2. Кажуть, що піраміди, подібні до піраміди Хеопса, позитивно впливають на людину. Знаючи, що піраміда Хеопса є правильною чотирикутною пірамідою, знайдіть для пірамід, подібних до піраміди Хеопса, відношення довжин:
   1) сторони висоти і основи;
   2) сторони бічного ребра і основи.
3°. Знайдіть об'єм правильної n-кутної піраміди, у якої висота дорівнює 10 м, а сторона основи a, якщо:
   1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 6$.
4. Через медіану основи трикутної піраміди і вершину цієї піраміди провели січну площину. Знайдіть відношення об'ємів утворених частин піраміди.
5. Через висоту основи правильної трикутної призми і одну з її вершин основи провели січну площину. Знайдіть відношення об'ємів утворених частин піраміди.
6*. Знайдіть ГМТ вершин рівновеликих пірамід із спільною основою.
7. Знайдіть об'єм правильної шестикутної піраміди, у якої висота дорівнює 1 м, а апофема утворює з висотою кут 30°.
8°. Знайдіть об'єм правильної n-кутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює a, а двогранний кут при основі 45°, якщо:
   1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 6$.
9. Знайдіть об'єм правильного тетраедра з ребром a.
10. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди з ребром a.
11. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди з бічним ребром l, якщо:
   1*) її бічні ребра нахилені до площини основи під кутом β;
   2*) її бічні грані нахилені до площини основи під кутом α;
   3*) її плоский кут при вершині дорівнює γ;
   4**) бічні грані перетинаються під кутом δ.
12. Розв'яжіть попередню задачу у випадку:
   1*) чотирикутної піраміди;
   2*) шестикутної піраміди;
   3**) n-кутної піраміди.
13. Бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 30°. Основа піраміди – трикутник, сторони якого дорівнюють $\sqrt{3}$ м, 2 м і 3 м. Знайдіть об'єм піраміди.
14. Основа піраміди – ромб з гострим кутом 60°. Бічні грані нахилені до площини основи під кутом 60°. Визначте об'єм піраміди, якщо радіус вписаного у ромб кола дорівнює $\sqrt[3]{3}$ см.
15. Основа піраміди – рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 6 см, а висота 9 см. Кожне бічне ребро дорівнює 13 см. Знайдіть об'єм піраміди.
16*. Основа піраміди – прямокутний трикутник. Бічні ребра піраміди рівні, а бічні грані, що містять катети основи, нахилені до площини основи під кутами 30° і 60°. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 3 см.

17*. Основа піраміди – прямокутний трикутник з катетами a і b. Кожне ребро піраміди нахилене до площини основи під кутом φ. Знайдіть об'єм піраміди.

18*. Дано тригранний кут $SABC$, в якого всі три плоскі кути прямі. На його ребрах відклали відрізки: $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Через точки A, B, C провели площину. Знайдіть об'єм піраміди $SABC$.

19**. На бічних ребрах тетраедра $DABC$ відклали відрізки $AA_1 = 2$ см, $BB_1 = 3$ см, $CC_1 = 4$ см. Площина $A_1B_1C_1$ ділить об'єм тетраедра у відношенні 1 : 8, якщо починати з вершини D. Бічні ребра тетраедра рівні між собою. Знайдіть їх довжину.

20**. Обчисліть об'єм трикутної піраміди, сторони основи якої дорівнюють a, b, c, а кожне бічне ребро l.

21*. У правильну чотирикутну піраміду вписано кулю радіуса r. Площа бічної грані піраміди дорівнює площі її основи. Обчисліть об'єм піраміди.

22*. У кулю радіуса R вписано правильну чотирикутну піраміду, бічна грань якої утворює з площиною основи кут міри α. Знайдіть об'єм піраміди.

23*. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при вершині. Усі бічні грані нахилені до основи під кутом α. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус вписаної в цю піраміду кулі дорівнює r.

24*. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Усі бічні ребра нахилені до основи під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус описаної навколо цієї піраміди кулі дорівнює R.

25. Зрізана піраміда, об'єм якої V см^3, має за основи правильні шестикутники із сторонами a_1 см і a_2 см. Знайдіть висоту цієї піраміди.

26. Об'єм зрізаної піраміди 10,5 м^3, висота $\sqrt{3}$ м, сторона правильного шестикутника, що є нижньою основою, дорівнює 2 м. Знайдіть сторону верхньої основи.

27. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють a і $0{,}5a$, а апофеми бічної грані a. Знайдіть об'єм даної зрізаної піраміди.

28. Основи правильної зрізаної піраміди – квадрати, діагоналі яких дорівнюють 8 см і 5 см. Бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.

29. Визначте об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, якщо її діагональ дорівнює 18 см, а довжини сторін основ 14 см і 10 см.

30. Визначте об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, якщо довжини сторін основ дорівнюють $4\sqrt{2}$ см та $\sqrt{2}$ см, а гострий кут бічної грані 60°.

31*. Площі основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 1 см^2 і 4 см^2, а її об'єм 21 см^3. Знайдіть об'єм повної піраміди.

32*. Висота піраміди дорівнює H, а основа – правильний шестикутник із стороною a. На якій відстані від вершини піраміди слід провести площину, паралельну основі, щоб об'єм утвореної зрізаної піраміди дорівнював Q?

33. Різниця об'ємів двох подібних пірамід дорівнює q, а відношення відповідних ребер 7 : 5. Знайдіть об'єми даних пірамід.

34*. Сума об'ємів двох подібних багатогранників дорівнює V, а відношення відповідних ребер дорівнює $m : n$. Знайдіть об'єми цих багатогранників.

35**. Основи зрізаної піраміди – рівнобедрені прямокутні трикутники, гіпотенузи яких дорівнюють m і n ($m > n$). Дві бічні грані, що містять катети цих трикутників, перпендикулярні до основи, а третя утворює з нею кут φ. Знайдіть об'єм даної зрізаної піраміди.

36**. На якій відстані від вершини S піраміди $SABC$ з довжиною висоти H слід провести площину, паралельну основі, щоб відношення об'ємів утворених частин піраміди дорівнювало m, якщо рахувати від основи?

37**. Поділіть зрізану піраміду площиною, паралельною її основам, на дві частини, щоб відношення об'ємів цих частин дорівнювало $m : n$, рахуючи від вершини.

38**. Піраміда з висотою H поділена площинами, паралельними основі, на три частини. Об'єми цих частин відносяться як $m : n : p$, рахуючи від вершини. Визначте відстань від цих площин до вершини піраміди.

39°. Обчисліть об'єм конуса, у якого радіус основи дорівнює 15 см, а твірна – 25 см.

40°. Нехай H, R і V – відповідно висота, радіус основи і об'єм конуса. Знайдіть:

1) V, якщо $H = 3$ см, $R = 1{,}5$ см;

2) H, якщо $R = 4$ см, $V = 48\pi$ м^3;

3) R, якщо $H = m$, $V = Q$.

41. Знайдіть об'єм конуса, якщо його висота дорівнює діаметру основи, а радіус основи 5 см.

42. Знайдіть об'єм конуса, якщо площа його повної поверхні дорівнює 45π дм^2, а сектор розгортки бічної поверхні обмежений дугою міри 60°.

43*. Розгортка бічної поверхні конуса – півколо радіуса $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}$ см. Знайдіть об'єм конуса.

44*. Радіус основи конуса дорівнює $\sqrt[6]{\frac{15}{\pi^2}}$ см, а кут при вершині розгортки його бічної поверхні дорівнює 90°. Знайдіть об'єм конуса.

45*. У правильну чотирикутну піраміду вписано конус. Знайдіть об'єм конуса, якщо об'єм піраміди дорівнює $\frac{288}{\pi}$.

46*. Основа конуса – круг, що вписаний в основу правильної чотирикутної призми. Вершина конуса належить другій основі призми. Знайдіть об'єм призми, якщо об'єм конуса дорівнює 17π см^3.

47. Обчисліть об'єм зрізаного конуса, у якого радіуси основ дорівнюють 27 см і 18 см, а твірна 21 см.

48. Рівнобедрений трикутник з основою $\frac{9}{\pi}$ см і висотою $7\sqrt{2}$ см обертається навколо основи. Знайдіть об'єм фігури обертання.

49. Прямокутний трикутник з гіпотенузою $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ см і гострим кутом 30° обертається навколо гіпотенузи. Знайдіть об'єм фігури обертання.

50*. Довжина сторони правильного трикутника дорівнює a. Знайдіть об'єм тіла, яке утворилося від обертання цього трикутника навколо осі, що проходить через його вершину паралельно протилежній стороні.

51*. Визначте об'єм тіла, що утворилося від обертання правильного шестикутника із стороною a навколо однієї з його сторін.

52**. У правильну трикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a, вписано конус. Обчисліть об'єм конуса, якщо площа бічної поверхні піраміди у 5 разів більша від площі її основи.

53**. У конус вписано кулю, а площина, дотична до кулі і паралельна основі конуса, ділить його на дві рівновеликі частини. Знайдіть кут нахилу твірної конуса до площини його основи.

54**. У зрізаний конус вписано кулю радіуса r. Кут між твірною і площиною основи конуса дорівнює α. Знайдіть об'єм конуса.

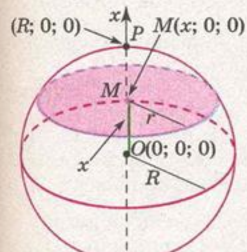
55**. У конус вписано циліндр, діагоналі осьового перерізу якого паралельні твірним конуса. Твірна конуса дорівнює l і нахилена до основи конуса під кутом α. Знайдіть об'єм частини простору, обмеженого бічними поверхнями конуса, циліндра та їх спільною площиною основ.

§ 25 Об'єми кулі та її частин. Площа сфери

ОБ'ЄМ КУЛІ

Теорема 1. Об'єм кулі радіуса R дорівнює $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Доведення



Мал. 4.18

Нехай маємо кулю радіуса R з центром O. Позначимо її об'єм як V.

Введемо прямокутну систему координат, початок якої збігається з центром кулі, а напрям осі Ox – довільний (мал. 4.18).

Розглянемо переріз цієї кулі площиною, яка перпендикулярна до осі Ox і віддалена від точки O на x.

Як відомо, перетин сфери площиною – коло, квадрат радіуса якого дорівнює різниці квадратів радіуса сфери і відстані від січної площини до центра сфери (див. § 20, с. 176). Тобто у перерізі маємо коло радіуса $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Площа такого перерізу

$$S(x) = \pi r^2 = \pi(R^2 - x^2).$$

Значення x змінюється від $(-R)$ до R. Тоді

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi R^2 \int_{-R}^{R} dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx = \left(\pi R^2 x - \frac{\pi x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Теорему доведено.

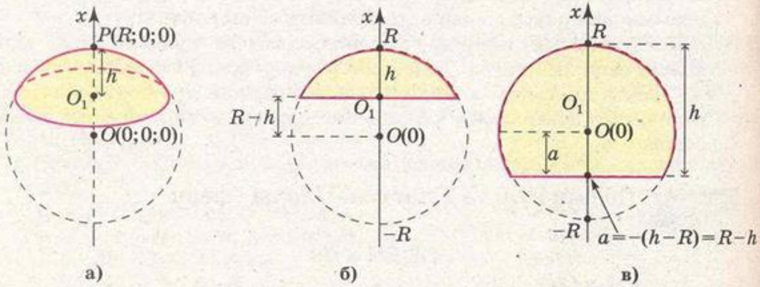
ОБ'ЄМИ ЧАСТИН КУЛІ

Знайдемо тепер формули для обчислення об'ємів частин кулі (див. § 20, с. 181).

Теорема 2. **Об'єм сегмента кулі радіуса R, що має висоту h, дорівнює**

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

Доведення



Мал. 4.19

Позначимо об'єм сегмента як V, центр кулі, з якої його було отримано, – як O.

Введемо прямокутну систему координат, початок якої збігається з точкою O, а вісь Ox – перпендикулярна до основи сегмента (мал. 4.19-а).

Площа відповідного перерізу, як і в попередній теоремі, дорівнює $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$, де значення x змінюється від $R - h$ до R (мал. 4.19-б, в). Тоді

$$V = \int\limits_{R-h}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

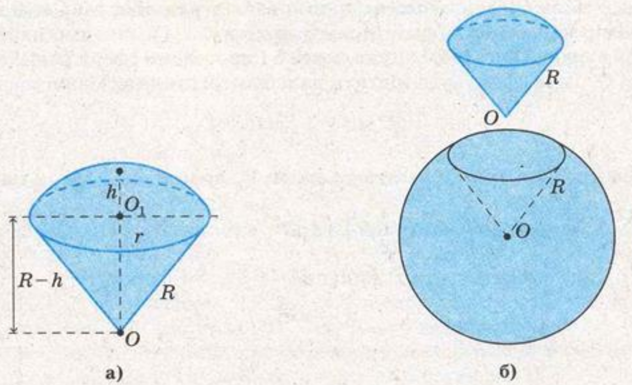
Наслідок. **Об'єм опуклого кульового сектора радіуса R, якому відповідає сегмент із висотою h, дорівнює**

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Щоб знайти шуканий вираз, треба до об'єму сектора додати об'єм відповідного конуса (мал. 4.20-а). Висота цього конуса дорівнює $R - h$, а квадрат радіуса основи

$$r^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2.$$

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) + \frac{1}{3}\pi(2Rh - h^2)\cdot(R - h) = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$



Мал. 4.20

З а у в а ж е н н я 1. Щоб знайти об'єм неопуклого кульового сектора, треба відняти від об'єму кульового сегмента об'єм відповідного конуса (або від об'єму кулі відняти об'єм відповідного опуклого сектора) (мал. 4.20-б).

З а у в а ж е н н я 2. Щоб знайти об'єм кульового поясу, треба відняти від об'єму кулі об'єми відповідних сегментів.

ПЛОЩА СФЕРИ

Площину поверхні багатогранника ми визначали як суму площ усіх граней цього багатогранника.

Площі поверхонь циліндра і конуса ми визначали як площі їх розгорток. На відміну від циліндра і конуса, ми не можемо розгорнути поверхню сфери на площину.

Визначимо площу поверхні сфери як границю, до якої наближається площа поверхні описаного навколо цієї сфери багатогранника, якщо площа найбільшої грані цього багатогранника прямує до нуля.

Опишемо навколо сфери радіуса R n-гранник. Пронумеруємо його грані в довільному порядку і позначимо площі цих граней відповідно до номера грані: $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Сполучимо всі вершини багатогранника з центром сфери O – маємо n пірамід зі спільною вершиною O і основами, площі яких дорівнюють $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Основами висот утворених пірамід є точки дотику багатогранника до сфери. Тоді їх висоти однакові й дорівнюють радіусу сфери R.

Об'єм такого n-гранника V_n дорівнює сумі об'ємів пірамід, на які ми його поділили:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3}S_i \cdot R\right) = \frac{1}{3}R \cdot \sum_{i=1}^{n}S_i.$$

Будемо збільшувати число вершин n багатогранника так, щоб найбільший розмір кожної його грані прямував до нуля. Позначимо найбільший з розмірів граней багатогранника через δ і проведемо сферу радіуса $R + \delta$ з центром O. Така сфера буде містити наш багатогранник. Маємо:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 < V_n < \frac{4}{3}\pi(R+\delta)^3.$$

Звідси при $\delta \to 0$ об'єм багатогранника V_n прямує до $\frac{4}{3}\pi R^3$, а площа поверхні $\sum_{i=1}^{n} S_i$ прямує до $\frac{4}{3}\pi R^3 : \left(\frac{1}{3}R\right) = 4\pi R^2$.

Тоді площа сфери радіуса R дорівнює

$$S = 4\pi R^2.$$

Куля має цікаву властивість: серед тіл, що мають задану площу поверхні, вона найбільшого об'єму. Саме тому на космічному кораблі в стані невагомості розлита рідина приймає форму кулі.

Завдання 22

1°. Приблизно $\frac{3}{4}$ земної поверхні складає вода. Скільки квадратних кілометрів на Землі складає суша? (Радіус Землі приблизно дорівнює 6375 км.)

2°. Що ви вибрали б: з'їсти кавун, радіус якого дорівнює 10 см, утрьох, чи з'їсти кавун, радіус якого 20 см, увісьмох? (Вважаємо, що кавун має форму кулі.)

3°. У поході зварили гречану кашу в двох казанах, що мають форму півсфер із радіусами $R_1 : R_2 = 2 : 1$. У менший казан на одну частину крупи додали дві частини води. Знайдіть відношення крупи й води у більшому казані.

4. Скільки матеріалу потрібно для виготовлення оболонки футбольного м'яча радіуса 10 см, якщо на шви потрібно додати приблизно 10 % від площі поверхні м'яча?

5*. Скільки кубометрів землі треба завезти до садової ділянки, щоб зробити клумбу, яка має форму кульового сегмента з радіусом основи 3 м і висотою 50 см? (Обчисліть з точністю до одиниць, прийнявши $\pi \approx 3$.)

6. Діаметр Місяця складає (приблизно) четверту частину діаметра Землі. Порівняйте об'єми Місяця та Землі, вважаючи їх за кулі.

7. Діаметр Марса становить половину земного. У скільки разів поверхня Марса менша від поверхні Землі?

8. Фарби вистачає, щоб пофарбувати поверхню кулі, радіус якої R. На скільки куль, радіуси яких $\frac{R}{10}$, вистачить цієї фарби, якщо товщина шару фарби в обох випадках однакова?

9. Є свинцеві кульки однакових розмірів. Треба переплавити їх на кулю, радіус якої в 5 разів більший. Скільки маленьких кульок для цього потрібно?

10°. Виразіть радіус кулі через її об'єм.

11°. Нехай V – об'єм кулі радіуса R, а S – площа її поверхні. Знайдіть:
1) S і V, якщо $R = 4$ см;
2) R і S, якщо $V = 4000$ см^3;
3) R і V, якщо $S = 64\pi$ см^2.

12°. Площина поділила кулю на частини, об'єми яких 720π см^3 і 252 см^3. Знайдіть площу поверхні кулі.

13. Знайдіть площу сфери, яка задана рівнянням:
1) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$;
2) $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$;
3) $x^2 + 2x + y^2 + z^2 = 0$;
4) $x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 4z = 3$.

14. Доведіть, що **поверхня і об'єм кулі відповідно становлять дві третини поверхні й об'єму циліндра, описаного навколо кулі.**

15. Доведіть, що **площі бічних поверхонь двох рівновеликих циліндрів обернено пропорційні до радіусів цих циліндрів.**

16. Висота конуса дорівнює діаметру сфери, а діаметр основи конуса такий самий, як його твірна. Доведіть, що площа сфери дорівнює повній поверхні конуса.

17. Площа поверхні кулі дорівнює 43 см^2. Знайдіть площу поверхні другої кулі, об'єм якої у 27 разів більший за об'єм даної кулі.

18. Площа поверхні кулі дорівнює 393 см^2. Знайдіть площу поверхні другої кулі, радіус якої у $\sqrt{3}$ менший за радіус даної кулі.

19*. Площа перерізу кулі площиною дорівнює 15 см^2. Січна площина віддалена від центра кулі на $\sqrt{\frac{30}{\pi}}$ см. Знайдіть площу поверхні кулі.

20*. Через кінець радіуса кулі під кутом 45° до нього проведено січну площину. Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо площа поверхні кулі дорівнює 125 см^2.

21*. Знайдіть об'єм кульового сектора, якщо радіус кола основи відповідного кульового сегмента дорівнює 60 см, а радіус кулі 75 см.

22. Кулю, об'єм якої дорівнює 36π см^3, перетнули площиною, яка проходить через центр кулі. Знайдіть площі поверхонь кожної з утворених частин кулі.

23*. Твірна конуса утворює з його віссю кут α. Знайдіть відношення об'єму конуса до об'єму описаної навколо нього кулі.

24*. Навколо кулі описано конус, висота якого вдвічі більша за діаметр кулі. Знайдіть відношення об'ємів даних тіл.

25**. Об'єм кулі, вписаної в конус, у $2\frac{1}{4}$ раза менший від об'єму конуса. Знайдіть міру кута між твірною і основою конуса.

26**. Навколо сфери описано рівносторонній конус і рівносторонній циліндр. Доведіть, що квадрат площі повної поверхні циліндра дорівнює добутку площі сфери на площу повної поверхні конуса.

27**. У сферу вписано рівносторонній конус і рівносторонній циліндр. Доведіть, що об'єм конуса дорівнює середньому геометричному об'ємів циліндра і сфери.

28**. Знайдіть об'єм кулі, вписаної у трикутну піраміду, грані якої лежать на координатних площинах і на площині $12x + 3y + 4z - 24 = 0$.

29. Ребро куба a. Знайдіть площу сфери, яка:

1) вписана в куб;

2) описана навколо куба;

3**) проходить через середини всіх ребер куба;

4**) поділяє кожне ребро куба на три рівні частини.

30*. Переріз поділив сферу на частини, площі яких 12 дм^2 і 24 дм^2. Знайдіть площу круга, обмеженого перерізом сфери.

31**. Знайдіть площу тієї частини поверхні кулі, яка освітлюється з точкового джерела світла, розміщеного на відстані 10 см від поверхні кулі, якщо радіус кулі 15 см.

32**. У зрізаний конус вписано кулю, радіус якої r. З центра кулі діаметр більшої основи конуса видно під кутом 2α. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

33**. Навколо сфери описано зрізаний конус, радіуси основ якого відносяться як $n : m$. Як відносяться площі поверхонь частин сфери, на які вона поділяється лінією дотику зі зрізаним конусом?

34**. У зрізаний конус з площею поверхні S вписано кулю з площею поверхні m. Знайдіть кут між твірною і площиною основи конуса.

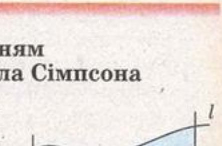
35**. Довжина ребра куба 10 см. Центр куба є центром сфери радіуса 6 см. Знайдіть площу поверхні тієї частини кулі, яка міститься всередині куба.

36**. У півкулю вписано конус і навколо неї описано конус, подібний до вписаного. Основи всіх трьох тіл містяться в одній площині. Доведіть, що площа сферичної частини півкулі дорівнює середньому пропорційному бічних поверхонь конусів.

37**. У куб з ребром a вписано сферу. Знайдіть площу сфери, яка дотикається до трьох граней куба і до першої сфери.

38**. Навколо сфери описано правильну шестикутну призму. Через бічне ребро призми провели площину, яка поділила призму на частини з відношенням об'ємів 1 : 5. Як відносяться площі частин, на які ця площина поділила сферу?

§ 26 Об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції. Формула Сімпсона



Мал. 4.21

Нехай маємо на площині дві прямі, перпендикулярні до третьої, і криву, що перетинає дві перші прямі (мал. 4.21). Частину площини, яка обмежена цими лініями, називають *криволінійною трапецією*. Відрізок, протилежний до відрізка кривої, називають *основою* криволінійної трапеції. У курсі алгебри і початків аналізу ви обчислюєте площі таких трапецій за допомогою визначеного інтегралу. Знайдемо об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції навколо її основи.

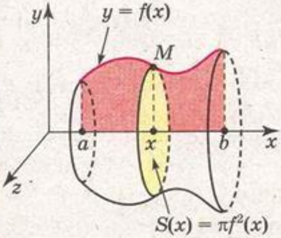
Нехай маємо криволінійну трапецію, обмежену графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$ і $x = b$ (мал. 4.22). При обертанні цієї трапеції навколо осі Ox кожна точка $M(x;\ f(x);\ 0)$ описує коло радіуса $r = f(x)$, площа якого $S(x) = \pi f^2(x)$. Тоді об'єм даного тіла дорівнює

$$V = \int_a^b f^2(x)dx.$$

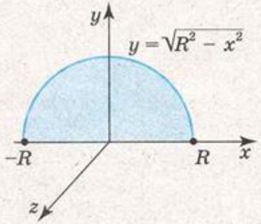
Наприклад, розглянемо кулю як тіло, обмежене поверхнею обертання півкола $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ навколо осі Ox (мал. 4.23). Маємо:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi R^3 -$$

той самий вираз, що ми отримали раніше.



Мал. 4.22



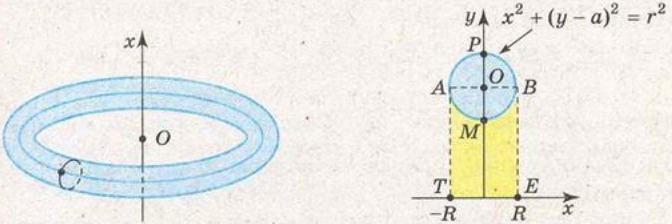
Мал. 4.23

Зауваження. Враховуючи симетрію тіла відносно осі Oy (тобто те, що $a = -b$), можна було отримати даний вираз інтегруванням від 0 до R, якщо ввести множник 2:

$$V = 2\int_0^R \pi(R^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

ОБ'ЄМ ТОРА

Нагадаємо (див. § 13, с. 107), що тор утворюється обертанням круга навколо осі, яка не перетинає цей круг і лежить у його площині (мал. 4.24-а).



а)

б)

Мал. 4.24

Розглянемо тор як тіло, обмежене поверхнею обертання кола $x^2+(y-a)^2=r^2$ навколо осі Ox (мал. 4.24-б). Маємо, що шуканий об'єм дорівнює різниці об'ємів тіл, отриманих обертанням криволінійних трапецій *TAPBE* і *TAMBE*:

$$V=\pi\int_{-r}^{r} y_{APB}^2dx-\pi\int_{-r}^{r} y_{AMB}^2dx,$$

де $y_{APB}=a+\sqrt{r^2-x^2}$ і $y_{AMB}=a-\sqrt{r^2-x^2}$ – рівняння верхньої *APB* і нижньої *AMB* дуг кола.

Тоді, з урахуванням симетрії відносно осі Oy, маємо:

$$V=8\pi a\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}dx=\left|\begin{array}{l} x=r\sin t\\ x=0,t=0\\ x=r,t=\dfrac{\pi}{2}\\ dx=r\cos tdt\end{array}\right|=8\pi ar^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdx=$$

$$=4\pi ar^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dx=4\pi ar^2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi^2ar^2.$$

ФОРМУЛА СІМПСОНА

Томас Сімпсон (1710–1761) – англійський математик. Був спочатку ткачем, шкільним учителем у Дербі, а потім професором математики у військовій академії у Вуліджі. Відкрив у 1743 р. формулу наближеного інтегрування, яку ми називаємо формулою Сімпсона. Інші його праці присвячені елементарній геометрії, тригонометрії, аналізу та теорії імовірностей.

Якщо площа перерізу $S(x)$ тіла T площиною, перпендикулярною до осі Ox, як функція x має вигляд $S(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, то об'єм такого тіла, що міститься між площинами $x=a$ і $x=b$, дорівнює

$$V=\int_a^b(\alpha x^2+\beta x+\gamma)dx=\left(\frac{\alpha x^3}{3}+\frac{\beta x^2}{2}+\gamma x\right)\Bigg|_a^b=$$

$$=\frac{b-a}{6}(2\alpha(b^2+ba+a^2)+3\beta(b+a)+6\gamma).$$

Позначимо площі перерізів:

$$S_{\text{нижн осн}}\triangleq S(a)=\alpha a^2+\beta a+\gamma;\ \ S_{\text{верхн осн}}\triangleq S(b)=\alpha b^2+\beta b+\gamma;$$

$$S_{\text{c}}\triangleq S\left(\frac{b+a}{2}\right)=\alpha\left(\frac{b+a}{2}\right)^2+\beta\left(\frac{b+a}{2}\right)+\gamma.$$

Тоді отриманий раніше вираз для обчислення об'єму тіла T можна представити у вигляді:

$$V=\frac{b-a}{6}(S_{\text{нижн осн}}+4S_{\text{c}}+S_{\text{верхн осн}}).$$

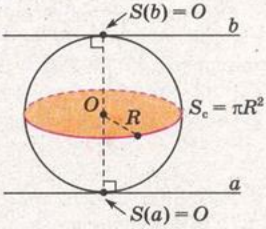
Цю формулу називають *формулою Сімпсона*.

За допомогою формули Сімпсона легко отримати вирази для обчислення об'ємів тіл, перерізи яких площиною, перпендикулярною до осі Ox, можна представити у вигляді

$$S(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Зокрема, це об'єми кулі, піраміди, конуса, бо відповідні перерізи цих тіл задовольняють вказану умову.

Наприклад, для кулі радіуса R маємо (мал. 4.25):



Мал. 4.25

$$a = -R,\ b = R,\ S(a) = S(b) = 0,\ S_c = \pi R^2,\ V = \frac{R+R}{6}\cdot 4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

У випадку піраміди (мал. 4.26):

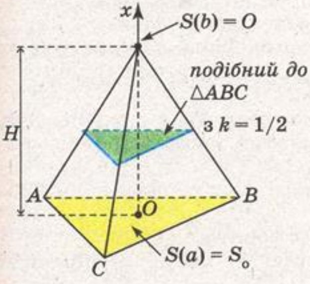
$$a = 0,\ b = H,\ S(a) = S_o,\ S_c = \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_o,\ V = \frac{H-0}{6}\left(S_o + 4\cdot\frac{1}{4}S_o\right) = \frac{1}{3}S_o\cdot H.$$

За допомогою формули Сімпсона зручно розв'язувати задачі на обчислення об'ємів частин тіл, що обмежені паралельними перерізами.

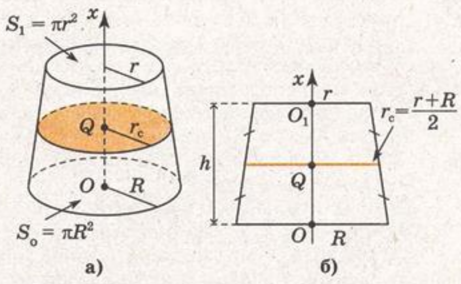
Наприклад, у випадку зрізаного конуса (з радіусами основ R та r, висотою h) маємо (мал. 4.27):

$$a = 0,\ b = h,\ S(a) = \pi R^2,\ S(b) = \pi r^2,\ S_c = \pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2,$$

$$V = \frac{H-0}{6}\pi(R^2 + 4\cdot\frac{1}{4}(R+r)^2 + r^2) = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$



Мал. 4.26



Мал. 4.27

Зауважимо, що при обчисленні S_c, ми скористалися тим, що осьовим перерізом зрізаного конуса є трапеція, середня лінія якої дорівнює діаметру перерізу цього конуса площиною $x = \frac{b+a}{2}$ (мал. 4.27-б).

Завдання 23

1. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, яку обмежують лінії: $x = 0$; $x = 8$; $y = 0$; $y = 2x + 1$.

2. Фігура, яку обмежують лінії: $x = 1$; $x = 4$; $y = 0$; $y = 6x^2 + 1$, – обертається навколо осі Ox. Знайдіть об'єм фігури обертання.
3. Який об'єм має тіло, що утворене обертанням косинусоїди навколо осі Ox і яке обмежують площини $x = 0$ і $x = \frac{\pi}{2}$?
4. Знайдіть об'єм тіла, обмеженого площинами $y = 0$ та $y = 1$, $x = 1$ і обертанням навколо осі Oy кривої: **1)** $y = x^2$; **2)** $y = x$. Порада. Здійсніть інтегрування відносно змінної y. Або здійсніть заміну $x \leftrightarrow y$.
5. Знайдіть об'єм тора, отриманого обертанням кола радіуса 2 із центром $O(0; 5)$ навколо осі Ox.
6. Об'єм тіла обертання, що має висоту 12 см і основами якого є кола радіусів 1 см і 4 см, дорівнює 600 см^3. Відомо, що переріз утвореного тіла обертання задовольняє умову $S(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Знайдіть площу перерізу даного тіла площиною $x = \text{const}$, яка ділить висоту даного тіла навпіл.

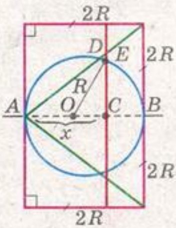
ПИТАННЯ НА УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗНАНЬ ЗА РОЗДІЛОМ 4

1. Відома діагональ прямокутного паралелепіпеда. Які кути достатньо знати, щоб знайти його об'єм?
2. Чи можна знайти об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо відомо площі: **1)** двох його граней; **2)** трьох його граней?
3*. У яких межах міститься об'єм прямокутного паралелепіпеда, основою якого є квадрат, а діагональ дорівнює 1?
4. Як зміниться об'єм циліндра, якщо його висоту зменшити в 4 рази, а діаметр збільшити в 2 рази?
5*. У яких межах міститься об'єм циліндра, в якого: **1)** діагональ осьового перерізу дорівнює 1; **2)** площа осьового перерізу дорівнює S?
6*. Прямокутник із сторонами 3 і 1 – розгортка бічної поверхні прямої трикутної призми. Основа цієї призми – рівнобедрений трикутник. В яких межах міститься об'єм цієї призми?
7. Один конус отримано обертанням нерівнобедреного прямокутного трикутника навколо одного з катетів, а другий – обертанням навколо другого катета. Чи рівні об'єми цих конусів?
8. Два циліндри рівновеликі і мають однакові площі бічних поверхонь. Чи рівні ці циліндри?
9. Як поділити на рівні частини торт, що має форму циліндра?
10. Як поділити на дві рівновеликі частини: **1)** конус; **2)** піраміду? **3*)** Укажіть не менше двох способів до п. 1 і 2.
11. Як поділити задану піраміду площиною, щоб об'єми утворених частин відносилися як $n : m$, і ця площина: **1)** була паралельною основі; **2)** проходила через вершину піраміди; **3*)** була непаралельною основі піраміди і не проходила через її вершину?
12*. Як поділити задану піраміду площиною, щоб об'єми утворених частин відносилися як $n : m$?
13. Чи існує така куля, об'єм і площа поверхні якої виражаються одним і тим самим числом?
14. Як обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням трапеції навколо її: **1)** більшої основи; **2)** меншої основи?

15. Як відносяться об'єми двох конусів, висоти яких однакові?
16. Як зміняться площа поверхні і об'єм кулі, якщо її радіус:
1) зменшити в 3 рази; 2) збільшити в 2 рази?
17*. У конус, радіус основи якого дорівнює висоті, вписано прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму. Чи буде він кубом?
18*. У прямокутний тетраедр, перпендикулярні ребра якого мають довжину 1, вписано прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму. До того ж одна з вершин даного паралелепіпеда збігається з вершиною даного тетраедра. Чи можна обчислити об'єм паралелепіпеда? Відповідь обґрунтуйте.
19*. Дано правильний тетраедр з ребром 1. Як обчислити найбільший об'єм правильної трикутної призми, три вершини якої належать основі тетраедра, а три інші – його бічним ребрам?

ЯК АРХІМЕД ЗНАХОДИВ ОБ'ЄМ КУЛІ

Недаремно куля, вписана у циліндр, була висічена на надгробнику Архімеда в Сиракузах. Одним із своїх найвищих досягнень Архімед вважав доведення того, що об'єм кулі в півтора раза менший за об'єм циліндра, описаного навколо цієї кулі. Геніально та дотепно Архімед довів цей факт.



Мал. 4.28

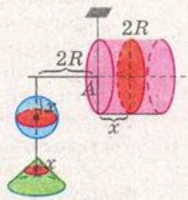
Розглянемо слідом за Архімедом прямокутник розміром $2R \times 4R$, круг радіуса R і рівнобедрений трикутник, висота якого дорівнює $2R$, а основа – $4R$, розміщені так, як показано на малюнку 4.28.

Обертанням вказаних фігур навколо їх спільної осі симетрії AB отримаємо циліндр, кулю і конус. Перетнемо їх площиною, паралельною основам циліндра, що віддалена від вершини A конуса на відстань $AC = x$. Площі перерізів циліндра, кулі і конуса позначимо відповідно як $S_ц$, $S_о$, $S_к$. Маємо:

$$S_ц = 4\pi R^2,\ S_к = \pi CD^2 = \pi x^2,\ S_о = \pi CE^2 = \pi(EO^2 - OC^2) =$$

$$= \pi R^2 - \pi(x - R)^2 = 2\pi Rx - \pi x^2 = \frac{x}{2R} S_ц - S_к.$$

Тоді $x \cdot S_ц = 2R(S_о + S_к)$.



Мал. 4.29

Архімед подивився на останню рівність як на «правило важеля»: x і $2R$ він прийняв за плечі, а площі перерізів – за маси. Його ідею ілюструє малюнок 4.29. На одне плече важеля, як на вісь, надіто циліндр так, що точка A збігається з точкою опори. На друге плече на відстані $2R$ від точки опори підвішені конус і куля. Відповідні перерізи циліндра, конуса і кулі врівноважують один одного, а отже, й важіль перебуває у рівновазі. (Перерізи тут треба розуміти як пластини з однорідного матеріалу однакової й дуже малої товщини.)

Рівновага не порушиться, якщо зосередити всю масу циліндра в його центрі, розташованому на відстані R від опори. Ось так Архімед позбувся змінної довжини плеча! Тепер записуємо правило важеля для отриманої системи, враховуючи, що маси пропорційні об'ємам: $R \cdot V_ц = 2R(V_о + V_к)$. Звідси

$$V_о = V_ц : 2 - V_к = \pi(2R)^2 \cdot 2R : 2 - \frac{1}{3}\pi(2R)^2 \cdot 2R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

ГОТУЄМОСЯ ДО ЗАЛІКУ – питання для повторення курсу геометрії

Пропоновані питання допоможуть повторити опрацьований теоретичний матеріал, виділити в ньому головні опорні факти, підготуватися до підсумкових атестацій. Зірочкою позначено питання, необов'язкові для учнів класів академічного навчання, рекомендовані для профільного навчання математики.

Знайти відповіді на пропоновані питання допоможе не тільки зміст підручника, а ще й його форзаци та опорні конспекти (ОК).

Зазначимо, що наведений перелік питань може бути використаний вчителем для формування блоків запитань відповідних заліків.

Зрозуміло, що наведені питання є лише орієнтовними, тобто їхній перелік може бути розширений або скорочений вчителем залежно від конкретних особливостей певних навчальних закладів та їх учнів.

ПОВТОРЮЄМО ПЛАНІМЕТРІЮ

1. Яку будову має геометрія?

2. Яку будову має логічний крок доведення?

3. Поясніть, що таке твердження. Поясніть, що таке: **1)** аксіома; **2)** теорема; **3)** наслідок; **4)** означення; **5)** ознака; **6)** властивість; **7)** теорема, обернена до даної; **8)** необхідна й достатня умови.

4. Що таке спосіб доведення від супротивного? Наведіть приклад доведення якогось твердження цим способом.

5. Сформулюйте властивості кутів:

1) суміжних; вертикальних; утворених бісектрисами вказаних кутів;

2*) із взаємно паралельними (взаємно перпендикулярними) сторонами;

3*) внутрішніх і зовнішніх кутів трикутника; утворених бісектрисами вказаних кутів;

4*) при двох паралельних прямих і січній; утворених бісектрисами вказаних кутів;

5*) внутрішніх і зовнішніх кутів багатокутника (правильного багатокутника);

6*) утворених бісектрисами (висотами) трикутника;

7*) утворених висотою і медіаною, проведеними з вершини прямого кута прямокутного трикутника;

8) вписаного та центрального кутів кола;

9) центрального кута правильного багатокутника;

10*) утворених хордами, січними й дотичними кола.

6. Що таке геометричне місце точок (ГМТ), що задовольняють певній умові? Сформулюйте властивості бісектриси кута (серединного перпендикуляра до відрізка) як відповідних ГМТ. Які ще ГМТ ви знаєте?

7. Що ви знаєте про властивості трикутників:

1) що утворені при перетині медіан трикутника;

2) з вершинами в серединах сторін трикутника;

3) що утворені прямими, паралельними сторонам трикутника, які проведено через його вершини;

4*) що відтинаються від трикутника прямою, проведеною через основи двох його висот;

5*) з вершинами в основах висот трикутника;
6*) утворених при перетині бісектрис зовнішніх кутів трикутника?

8*. Що таке (сформулюйте через поняття ГМТ) центри вписаного й описаного кіл трикутника, чотирикутника, багатокутника? Сформулюйте необхідну й достатню умови того, що: 1) в чотирикутник (багатокутник) можна вписати коло; 2) навколо чотирикутника (багатокутника) можна описати коло.
9*. Які факти ви знаєте про точку перетину бісектриси трикутника з описаним навколо нього колом?
10. Які властивості прямокутних трикутників ви знаєте? (Пригадайте й метричні співвідношення в прямокутному трикутнику.)
11*. Що таке зовнівписане коло трикутника і які його властивості ви знаєте?
12. Запишіть формули для обчислення радіусів вписаного й описаного кіл трикутника, пригадайте формули зв'язку між ними та іншими елементами трикутника.
13. Які види дотику двох кіл ви знаєте? Які властивості й опорні задачі двох дотичних кіл вам відомі?
14. Які нерівності для сторін і кутів трикутника ви знаєте? А для сторін ламаної? А для сторін і кутів багатокутника?
15. Сформулюйте властивості і ознаки: 1) паралельних прямих; 2) перпендикулярних прямих; 3) паралелограма; 4) ромба; 5) прямокутника; 6) квадрата; 7) рівнобічної трапеції.
16. Сформулюйте:
1) теорему Фалеса та теорему, обернену до неї;
2) узагальнену теорему Фалеса та теорему, обернену до неї.
17. Сформулюйте теореми синусів і косинусів для трикутника.
18*. Яку фігуру утворюють бісектриси: 1) паралелограма; 2) прямокутника; 3) ромба; 4) зовнішніх кутів прямокутника?
19*. Визначте вид чотирикутника, що має за вершини середини сторін: 1) довільного чотирикутника; 2) паралелограма; 3) рівнобедреної трапеції; 4) ромба.
20. Які опорні задачі трапеції ви знаєте?
21. Які опорні задачі рівнобедреної трапеції ви знаєте?
22*. Сформулюйте теорему Птоломея для вписаного чотирикутника.
23. Які формули ви знаєте для обчислення площі: 1) трикутника; 2) прямокутного трикутника; 3) трапеції; 4*) рівнобедреної трапеції, діагоналі якої взаємно перпендикулярні; 5) довільного чотирикутника; 6) описаного багатокутника; 7) правильного n-кутника?
24. Як відносяться площі: 1) трикутників із рівними основами; 2) трикутників із рівними висотами; 3) подібних трикутників; 4) паралелограмів, по дві сторони яких містяться на спільних паралельних прямих; 5) трапецій із відповідно рівними основами; 6) трапецій, основи яких містяться на спільних паралельних прямих; 7) двох подібних фігур?
25*. Доведіть методом подібності опорні факти:
1) про відрізки, на які бісектриса трикутника поділяє його сторону;
2) формулу Лагранжа для довжини бісектриси трикутника;
3) про добуток відрізків хорд кола, на які вони поділяються при перетині;

4) про відстань між центром кола і точкою на хорді кола;

5) про співвідношення між відрізками дотичної і січної, проведеними з однієї точки до одного кола;

6) теорему Птоломея.

26*. Які опорні задачі трапеції ви вмієте доводити методом подібності?

27*. Доведіть методом площ опорні факти:

1) про відрізки, на які бісектриса трикутника поділяє його сторону;

2) про точку перетину медіан трикутника;

3) теорему Чеви.

28*. Доведіть, що відношення площ трикутників, на які поділяється опуклий чотирикутник діагоналлю, дорівнює відношенню довжин відрізків, на які вона поділяє іншу діагональ цього чотирикутника.

29*. Розв'яжіть трьома способами (можна скористатися: теоремою Фалеса, методом подібності, методом площ, векторним методом) такі задачі.

1) На стороні AC трикутника ABC взято точку M, а на стороні BC – точку K так, що $AM : MC = m : n$, $BK : KC = p : t$. В якому відношенні AK поділяє відрізок BM?

2) На стороні AB трикутника ABC взято точку M, а на стороні BC – точку K так, що $CK : KB = m : n$, а точка перетину AK і CM поділяє CM у відношенні $p : t$. В якому відношенні точка M поділяє сторону AB?

30*. Сформулюйте й доведіть теорему про коло Ейлера.

31. Запишіть у декартовій прямокутній системі координат формулу для обчислення: **1)** відстані між двома точками; **2)** координат середини відрізка; **3)** координат точки, що поділяє заданий відрізок у заданому відношенні.

32. Запишіть у декартовій прямокутній системі координат:

1) рівняння прямої у загальній формі (у якому випадку його можна представити у вигляді $y = kx + l$?);

2) рівняння прямої, що паралельна заданій прямій;

3*) рівняння прямої, що перпендикулярна до заданої прямої;

4) рівняння кола;

5) рівняння прямої, що проходить через дві задані точки;

6*) рівняння прямої у відрізках.

33*. Наведіть приклади розв'язування текстових задач (на рух або оптимізацію) за допомогою координатного методу.

34. Пригадайте, що називають геометричним перетворенням і які перетворення ви вивчали. Сформулюйте їхні властивості. Наведіть приклади розв'язування задач на побудову з використанням геометричних перетворень.

35. Сформулюйте означення й властивості: **1)** рівних векторів; **2)** колінеарних векторів; **3)** суми, різниці, множення вектора на число; **4)** скалярного добутку двох векторів.

36. Як розкласти вектор за двома іншими векторами площини? Чи завжди це можна зробити?

37*. Як записати: **1)** вектор нормалі до прямої $ax + by + c = 0$; **2)** відстань від точки $(x_0; y_0)$ до прямої $ax + by + c = 0$?

38*. Доведіть такі опорні факти.

1) Якщо точка C ділить відрізок AB у відношенні $m : n$, рахуючи від точки A, то $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{m+n}(n \cdot \overrightarrow{OA} + m \cdot \overrightarrow{OB})$.

2) *Метод проколу (X – полюс).* За допомогою деякої точки X довільний вектор $\overrightarrow{AB}$ можна представити у вигляді суми або різниці двох векторів: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XB}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$.

3) Якщо M – центроїд трикутника ABC, то $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$.

4) Якщо $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$, то M – центроїд трикутника ABC.

5) Для довільної точки X площини виконується

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}),$$

де M – центроїд трикутника ABC.

ПОВТОРЮЄМО СТЕРЕОМЕТРІЮ ЗА 10 КЛАС

1. Яку будову має стереометрія? Як пов'язана вона із будовою планіметрії?
2. Сформулюйте аксіоми стереометрії і наслідки з них.
3. Сформулюйте означення: багатогранника, опуклого багатогранника, правильного багатогранника.
4. Яку фігуру називають n-кутною призмою? Які види призм ви знаєте?
5. Яку фігуру називають n-кутною пірамідою? Які види пірамід ви знаєте?

6*. Що називають перерізом багатогранника площиною? Сформулюйте відомі вам твердження стереометрії, на які спирається побудова перерізів, і наведіть приклади їх застосування у розв'язуванні задач на побудову перерізів.

7. Які розміщення прямих (відрізків) у просторі ви знаєте? Сформулюйте відповідні означення. Чи вимагає доведення твердження стереометрії: 1) про розміщення паралельних прямих у одній площині; 2) що через точку поза прямою можна провести тільки одну паралельну їй пряму? Відповідь обґрунтуйте.
8. Сформулюйте ознаку та властивості паралельних прямих.

9*. Які властивості мимобіжних прямих, опорні задачі про мимобіжні прямі ви знаєте?

10. Які розміщення прямих (відрізків) і площин у просторі ви знаєте? Сформулюйте відповідні означення. Які ознаки і властивості паралельних прямої і площини ви знаєте?
11. Що таке паралельне проектування і як його властивості пов'язані із зображенням на площині просторових фігур? Як змінюється при паралельному проектуванні площа фігури?

12*. Проілюструйте застосування методу паралельних проекцій у задачах на побудову перерізу багатогранників.

13. Сформулюйте означення кута між двома прямими в просторі; перпендикулярності прямих і їх властивості.
14. Сформулюйте означення, ознаку і властивості перпендикулярності прямої і площини.

15*. Сформулюйте властивості прямих і площин, що пов'язують їх паралельність і перпендикулярність.

16*. Які опорні задачі на використання властивостей перпендикулярних прямої і площини ви знаєте?

17. На які факти треба спиратися при побудові зображення перпендикуляра, проведеного у просторі з певної точки до певної площини? Наведіть приклади зображення: **1)** висоти у правильних пірамідах; **2*)** перерізів багатогранників, які проходять перпендикулярно до певних прямих.

18. Сформулюйте властивості перпендикуляра і похилих, проведених до площини з однієї точки. *Які ГМТ можна визначити, скориставшись цими властивостями?

19*. Сформулюйте теореми про три синуси і про три косинуси. Проілюструйте їх застосування на прикладах.

20*. Доведіть перпендикулярність: **1)** мимобіжних ребер правильного тетраедра; **2)** прямих D_1B і AC, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.

21. Сформулюйте означення перпендикулярних площин; ознаку і властивості перпендикулярних площин.

22*. Доведіть, що в правильній чотирикутній призмі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площини AD_1C і DBB_1 перпендикулярні.

23. Сформулюйте означення і властивості кута: **1)** між прямою і площиною; **2)** між двома площинами.

24. Доведіть, що в правильній піраміді кути нахилу до площини основи: **1)** всіх бічних ребер однакові; **2)** всіх бічних граней однакові.

25*. Обчисліть кут між площинами A_1B_1C і AB_1C_1, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.

26. Сформулюйте теорему Піфагора для простору *та її наслідки.

27. Сформулюйте опорні факти проектування на площину (яка містить задану фігуру) точки, рівновіддаленої: **1)** від сторін кута; **2)** від сторін трикутника; **3)** від сторін плоского багатокутника; **4)** від вершин трикутника; **5)** від вершин плоского багатокутника.

28*. Узагальніть факти попереднього пункту і сформулюйте твердження про відповідні ГМТ. Доведіть сформульовані вами твердження (через необхідність і достатність).

29. Запишіть формулу для обчислення площі ортогональної проекції багатокутника на площину. *Наведіть приклади її застосування.

30*. Доведіть, застосувавши метод ортогональної проекції, що дві мимобіжні прямі мають спільний перпендикуляр, і до того ж лише один. Побудуйте такий перпендикуляр для мимобіжних ребер правильного тетраедра.

ПОВТОРЮЄМО СТЕРЕОМЕТРІЮ ЗА 11 КЛАС

Координати, вектори і геометричні перетворення в просторі

1. Поясніть, що таке: прямокутна система координат; абсциса, ордината та апліката точки; права система координат і як визначити напрям її осей.

2. Запишіть координати яких-небудь точок, що: **1)** належать координатним осям; **2)** належать координатним площинам; **3)** рівновіддалені від двох координатних площин; **4)** рівновіддалені від усіх координатних площин; **5)** рівновіддалені від двох координатних осей.

3. За якими формулами обчислюють: 1) відстань між двома точками; 2) координати середини вирізка; 3*) координати точки, що поділяє відрізок у заданому відношенні.
4. Запишіть рівняння сфери. Якому співвідношенню задовольняють координати точок кулі? Наведіть приклади.
5. Запишіть загальне рівняння площини. Розгляньте розміщення площини в координатному просторі у випадках, коли окремі коефіцієнти рівняння дорівнюють нулю.
6*. Запишіть рівняння площини у відрізках. Чи можна довільну площину задати рівнянням такого виду?
7. Чим відрізняються поняття співнапрямленого відрізка і вектора? Поясніть, що таке колінеарні, компланарні, протилежні, одиничні, нульові та координатні вектори, рівні вектори.
8. Як побудувати суму двох векторів? А кількох векторів? Запишіть основні властивості суми векторів. Як знайти різницю двох векторів?
9. Сформулюйте означення і властивості множення вектора на число; ознаку і властивість колінеарності векторів.
10*. Як розкласти вектор за трьома некомпланарними векторами? Сформулюйте ознаку компланарності трьох векторів.
11*. Запишіть векторну формулу поділу відрізка в заданому відношенні. Доведіть векторну рівність для векторів з початком у довільній точці простору і кінцями в вершинах даного трикутника та його центроїді.
12*. Доведіть, що діагональ AC_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходить через точки перетину медіан трикутників A_1BD і CB_1D_1 і ділиться цими точками на три рівних частини.
13*. Доведіть властивості середньої лінії тетраедра.
14. Поясніть, що таке орти і координати вектора, довжина (модуль) вектора. Як здійснюються дії додавання, віднімання та множення на число над векторами, заданими координатами?
15. Сформулюйте для векторів, що задані координатами, властивість та ознаку: 1) рівності; 2) колінеарності.
16. Сформулюйте означення скалярного добутку двох векторів та його властивості. Що таке скалярний квадрат?
17*. Доведіть правило чотирьох точок.
18*. Поясніть, що таке координатно-векторний метод. Наведіть приклади його застосування.
19*. Запишіть: 1) вектор-нормаль площини; 2) ознаку паралельності для двох площин, які задано рівняннями; 3) відстань від заданої точки до площини.
20*. Доведіть, що два твердження: (1) всі висоти тетраедра перетинаються в одній точці й (2) протилежні ребра тетраедра перпендикулярні – є рівносильними.
21. 1) Поясніть, які перетворення простору називають: геометричними; оберненими; рухом.
    2) Які властивості руху ви знаєте?
    3) Які фігури називають рівними?
22. Сформулюйте означення та властивості перетворень:
    1) паралельного перенесення; 2) центральної симетрії;

3) симетрії відносно площини; 4) повороту навколо прямої;
5) подібності та гомотетії.

Двогранні та багатогранні кути

23. Поясніть, яку фігуру називають двогранним кутом. Як вимірюють двогранний кут? *Сформулюйте теорему про три синуси для двогранного кута.
24*. Сформулюйте означення та властивості бісектора двогранного кута.
25. Поясніть, яку фігуру називають: тригранним кутом; багатогранним кутом; плоским кутом багатогранного кута. Які властивості плоских кутів тригранного кута ви знаєте?
26*. Сформулюйте теорему: 1) косинусів для тригранного кута; 2) про три косинуси; 3) синусів для тригранного кута; 4) про рівність двогранних кутів тригранного кута; 5) про перетин бісекторів двогранних кутів тригранного кута.
27*. Доведіть такі опорні факти.
   1) Якщо два плоскі кути тригранного кута рівні, то проекція їх спільного ребра на площину протилежної грані є бісектрисою плоского кута цієї грані.
   2) У тригранному куті проти рівних плоских кутів містяться рівні двогранні кути.
   3) У тригранному куті проти рівних двогранних кутів містяться рівні плоскі кути.
   4) Якщо два двогранні кути тригранного кута рівні, то проекція променя, за яким перетинаються дві грані цих кутів, на протилежну грань тригранного кута є бісектрисою плоского кута останньої грані.

Тіла, багатогранники, тіла обертання

28. Поясніть, яку сукупність точок простору називають: 1) тілом; його внутрішніми точками; поверхнею тіла; 2) призмою та циліндром; 3) пірамідою та конусом, зрізаними пірамідою та конусом; 4) кулею та сферою; 5) тілом обертання, поверхнею обертання.
29. За якими правилами здійснюють зображення просторових фігур?
30. Сформулюйте означення: багатогранника, опуклого багатогранника, правильного багатогранника. Вкажіть їх елементи.
31. Які правильні багатогранники ви знаєте? Вкажіть для кожного з них: форму багатокутника грані; число вершин, ребер і граней; число ребер, що виходять з однієї точки.
32*. Сформулюйте теорему Ейлера для багатогранників. Спираючись на неї, поясніть, чому існує лише п'ять видів правильних багатогранників.
33. Які властивості: 1) призми; 2) паралелепіпеда; 3) прямої призми; 4) правильної призми; 5) прямокутного паралелепіпеда ви знаєте?
34*. Доведіть, що сума квадратів косинусів кутів, які діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з його ребрами, дорівнює одиниці.
35*. Які опорні задачі ви знаєте про: 1) правильну чотирикутну призму; 2) куб?
36. Які властивості: 1) піраміди; 2) зрізаної піраміди; 3) розміщення основи висоти піраміди; 4) правильної піраміди ви знаєте?

37. Знайдіть для правильної трикутної (чотирикутної, шестикутної) піраміди зв'язок між кутами:
   1) двогранним кутом при ребрі основи і кутом нахилу бічного ребра до основи;
   2) двогранним кутом при ребрі основи і плоским кутом при вершині;
   3) кутом нахилу бічного ребра до основи і плоским кутом при вершині.
38*. Знайдіть для правильної трикутної (чотирикутної, шестикутної, n-кутної) піраміди зв'язок між кутами:
   1) двогранним кутом при бічному ребрі і кутом нахилу бічного ребра до основи;
   2) двогранним кутом при бічному ребрі і плоским кутом при вершині;
   3) двогранним кутом при бічному ребрі і кутом нахилу бічного ребра до основи.
39*. Що таке середні лінії та медіани тетраедра? Які їхні властивості ви знаєте?
40. Які властивості правильного тетраедра ви знаєте? *Доведіть перпендикулярність мимобіжних ребер правильного тетраедра.
41*. Який тетраедр називають рівногранним? Які його властивості?
42*. Який тетраедр називають ортоцентричним? Які його властивості?
43*. Який тетраедр називають прямокутним? Які його властивості?
44. Які властивості циліндра ви знаєте?
45. Які властивості конуса ви знаєте? А зрізаного конуса?
46. Що ви знаєте про взаємне розміщення: 1) площини і сфери; 2) прямої і сфери; 3*) двох сфер? 4*) Сформулюйте відповідні властивості січних і дотичних площин, прямих, перерізів.
47*. З якими частинами кулі ви знайомі?
48. 1) Поясніть, що таке вписана та описана сфери по відношенню до багатогранника. 2) За якої умови існують вписана та описана сфери для призми?
49. 1) Навколо якої піраміди можна описати сферу?
   2) У яку піраміду можна вписати сферу?
50. Поясніть, що таке описана та вписана сфера по відношенню до: 1) циліндра; 2) конуса. *За якої умови вони існують?

Площі поверхонь та об'єми геометричних тіл

51. Сформулюйте поняття площі плоскої фігури, площі поверхні багатогранника. Як визначають та обчислюють площу поверхні: циліндра, конуса, зрізаного конуса?
52. Сформулюйте поняття об'єму просторової фігури. Обґрунтуйте формулу для обчислення об'єму прямокутного паралелепіпеда.
53. Як обчислити об'єм: 1) призми; 2) циліндра; 3) піраміди; 4) зрізаної піраміди; 5) конуса; 6) зрізаного конуса?
54. Що таке рівновеликі фігури у стереометрії? Як відносяться площі поверхні й об'єми подібних фігур?
55*. Доведіть, що об'єми тетраедрів, що мають спільний тригранний кут, відносяться як добуток ребер, що утворюють цей кут.
56. Поясніть, як визначають об'єм кулі та її частин. За якими формулами їх обчислюють?
57. Поясніть, як визначають площу поверхні сфери. За якою формулою її обчислюють?

ПЕРЕВІР СЕБЕ

ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Недостатньо мати хороший розум.
Головне – уміти його використовувати.
Рене Декарт

Пропоновані завдання в тестовій формі дадуть вам змогу швидко отримати інформацію про те, чи дійсно ви засвоїли відповідний навчальний матеріал, підготуватися до майбутнього зовнішнього незалежного оцінювання (по темах геометрії).

Завдання за складністю орієнтовані на середній і підвищений рівень (для класів академічного навчання). Зірочкою позначено завдання підвищеного рівня складності.

Перевірити правильність виконання завдань вам допоможуть відповіді, наведені в розділі «Відповіді і поради».

ПОВТОРЕННЯ ПЛАНІМЕТРІЇ

У завданнях 1–33 треба обрати з пропонованих відповідей одну, яка є, на вашу думку, правильною.

1. Зовнішні кути трикутника відносяться як 2 : 3 : 4. **Знайдіть внутрішні кути** трикутника.

А	Б	В	Г	Д
40°, 60°, 80°	20°, 60°, 100°	30°, 60°, 90°	30°, 70°, 80°	20°, 40°, 120°

2*. Укажіть, скільки з наведених тверджень є правильними.

1) Якщо серединні перпендикуляри до всіх сторін трикутника проходять через вершини цього трикутника, то такий трикутник рівносторонній.

2) У довільному трикутнику сума довжин трьох його висот більша за периметр цього трикутника.

3) У будь-якому нерівнобедреному трикутнику основа бісектриси трикутника міститься між основами медіани і висоти, проведеними з тієї самої вершини.

4) Якщо сторони двох кутів взаємно перпендикулярні, то такі кути рівні.

5) Якщо сторони одного кута відповідно паралельні сторонам другого кута, то або такі кути рівні, або їх сума дорівнює 180°.

А	Б	В	Г	Д
Одне	Два	Три	Чотири	П'ять

3. Один з кутів трикутника дорівнює 48°. **Знайдіть гострий кут**, утворений бісектрисами двох інших кутів цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
114°	96°	74°	66°	Інша відповідь

4*. Бісектриси двох внутрішніх кутів гострокутного трикутника перетинають сторони цього трикутника під кутами 63° і 81°. **Знайдіть кути трикутника.**

А	Б	В	Г	Д
36°, 54°, 90°	82°, 80°, 18°	60°, 72°, 48°	30°, 66°, 84°	Інша відповідь

5. Сторони AB і A_1B_1 трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ належать одній прямій, а вершини C і C_1 – прямій, яка паралельна першій. **Знайдіть відношення площ трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, якщо $AB : A_1B_1 = 2$.**

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	4	2	$\frac{1}{4}$	Інша відповідь

6. Укажіть, скільки з наведених тверджень є правильними.

1) Існує трикутник з відношенням сторін 2 : 3 : 6.
2) Існує трикутник з відношенням кутів 150 : 120 : 35.
3) Довжини бічних сторін рівнобедреного трикутника можуть дорівнювати по 10 м, а основа – 20,01 м.
4) Довжина одного відрізка на 1 см більша за довжину другого і на 4 см більша за довжину третього. З цих відрізків можна скласти трикутник, периметр якого дорівнює 10 см.
5) Існує вписаний чотирикутник з відношенням мір кутів (узятих послідовно) 1 : 2 : 4 : 3.
6) Існує описаний чотирикутник з відношенням довжин сторін (узятих послідовно) 1 : 6 : 4 : 3.

А	Б	В	Г	Д
Одне	Три	Жодного	Чотири	Інша відповідь

7. Один з кутів трикутника дорівнює 55°. Сторони трикутника, що утворюють цей кут, можна бачити з центра кола, описаного навколо цього трикутника, під кутами, міри яких відносяться як 2 : 3. **Знайдіть ці кути.**

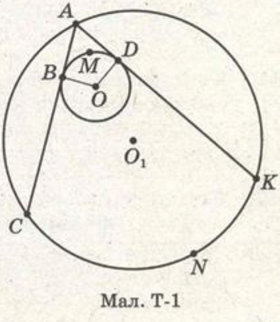
А	Б	В	Г	Д
100° і 150°	50° і 75°	Визначити неможливо	80° і 30°	Інша відповідь

8. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 20°. На одній з його бічних сторін, як на діаметрі, побудовано коло. **Знайдіть градусні міри дуг**, що відтинаються на цьому колі іншими сторонами трикутника.

А	Б	В	Г	Д
40°, 60°, 80°	40°, 40°, 100°	20°, 20°, 120°	Інша відповідь	20°, 20°, 140°

9. На малюнку Т-1 зображено два кола (з центрами O і O_1). **Знайдіть градусну міру дуги CNK**, якщо $\angle BMD = 130°$, а AB і AD – дотичні до меншого кола.

А	Б	В	Г	Д
Визначити неможливо	260°	100°	50°	Інша відповідь



Мал. Т-1

9*

10. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 16 м. **Знайдіть відстань між ортоцентром** (точкою перетину висот) **і центром кола, описаного навколо трикутника.**

А	Б	В	Г	Д
16 м	4 м	Інша відповідь	8 м	2 м

11*. Сторони трикутника відносяться як 2 : 3 : 4. У нього вписано півколо з діаметром, що лежить на більшій стороні. **Знайдіть відношення площі півкруга, обмеженого півколом, до площі трикутника.**

А	Б	В	Г	Д
$3\pi\sqrt{15} : 50$	$3\sqrt{3}\pi : \sqrt{5}$	3 : 5	Інша відповідь	$\pi\sqrt{15} : 12$

12. У рівнобічній трапеції середня лінія дорівнює 5 см, а діагоналі взаємно перпендикулярні. **Знайдіть площу трапеції.**

А	Б	В	Г	Д
125 см^2	25 см^2	$\frac{1}{2}\cdot 25$ см^2	50 см^2	Інша відповідь

13. У рівнобедрену трапецію вписано коло. **Порівняйте відношення** довжини цього кола до периметра трапеції з відношенням площі круга, обмеженого даним колом, до площі трапеції.

А	Б	В	Г	Д
1 : 2	2 : 1	1 : 4	1 : 1	Інша відповідь

14*. У прямокутному трикутнику довжини катетів дорівнюють 6 см і 8 см. Через точку перетину його бісектрис провели прямі паралельно його катетам. **Знайдіть відношення** площі утвореного прямокутника до площі заданого трикутника.

А	Б	В	Г	Д
Інша відповідь	6 : 1	1 : 6	1 : 4	1 : 12

15*. У прямокутному трикутнику з точки перетину медіан провели перпендикуляри до катетів. **Знайдіть площу утвореного прямокутника,** якщо площа заданого трикутника дорівнює S.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}S$	$\frac{2}{3}S$	$\frac{4}{9}S$	$\frac{2}{9}S$	Інша відповідь

16. Кути трапеції відносяться як 3 : 4 : 5 : 6. **Який кут утворюється продовженням бічних сторін цієї трапеції?**

А	Б	В	Г	Д
Задана трапеція не існує	90°	40°	60°	Інша відповідь

17. Одна з діагоналей ромба дорівнює 4 м, а друга утворює зі стороною ромба кут 30°. **Знайдіть площу ромба.**

А	Б	В	Г	Д
32 м^2	$16\sqrt{3}$ м^2	16 м^2	$8\sqrt{3}$ м^2	Інша відповідь

18. Сторони правильного трикутника, квадрата і правильного шестикутника рівні. **Знайдіть відношення площ цих фігур.**

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3}:4:6\sqrt{3}$	$2:3:6$	Інша відповідь	$1:4:6$	$\frac{\sqrt{3}}{4}:1:6$

19. Знайдіть довжину кола, вписаного в ромб, довжини діагоналей якого 6 см і 8 см.

А	Б	В	Г	Д
9,6 см	$9{,}6\pi$ см	$(2{,}4\pi)^2$ см	Інша відповідь	$4{,}8\pi$ см

20. Знайдіть суму тангенсів гострих кутів прямокутного трикутника, якщо відношення площі цього трикутника до площі квадрата, побудованого на його гіпотенузі, дорівнює k.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{k}$	$\frac{1}{k}$	k	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	Інша відповідь

21*. Бісектриса прямого кута трикутника ділить його гіпотенузу на відрізки 15 см і 20 см. **Знайдіть периметр трикутника.**

А	Б	В	Г	Д
$35+12\sqrt{5}$	83	84	$35+15\sqrt{2}$	85,5

22*. У трикутнику ABC: $AB = BC$; BB_1 і CC_1 – висоти трикутника. **Знайдіть відношення** $CC_1 : BB_1$, якщо $\angle A = 15°$.

А	Б	В	Г	Д
2	$\sqrt{3}:2$	$\sqrt{1+\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2+\sqrt{3}}$

23*. Площа круга, вписаного в трикутник ABC, дорівнює S_1, а площа круга, описаного навколо цього трикутника, дорівнює S_2. **Знайдіть найменше можливе значення відношення** $S_2 : S_1$.

А	Б	В	Г	Д
2	3	$\sqrt{10}$	4	9

24*. Пряма, проведена через вершину A і медіану BB_1 трикутника ABC, перетинає відрізок BC в точці P. **Знайдіть відношення** $BC : BP$.

А	Б	В	Г	Д
0,5	1	2	2,5	3

25*. Знайдіть суму двох кутів, один з яких є кутом паралелограма, а другий – кутом між висотами паралелограма, проведеними з вершини першого кута.

А	Б	В	Г	Д
90° або 270°	135°	180°	У загальному випадку визначити неможливо	Інша відповідь

26*. У паралелограмі $ABCD$ точки P і H належать сторонам BC і AD відповідно. Пряма PH ділить площу паралелограма у відношенні 5 : 7. **Знайдіть відношення** $BP : PC$, якщо $AD = 6AH$.

А	Б	В	Г	Д
1	12 : 7	2	3 : 2	12 : 5

27. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 5 см, а діагональ – 9 см. **Знайдіть радіус кола**, описаного навколо трапеції.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{20}{7}\sqrt{3}$ см	6 см	$\frac{19}{3}$ см	$\frac{27}{8}\sqrt{2}$ см	$4\sqrt{2}$ см

28*. Знайдіть меншу бічну сторону прямокутної трапеції, описаної навколо кола, якщо її основи дорівнюють 5 м і 7 м.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{37}$ м	$\frac{13}{2}$ м	$\sqrt{35}$ м	$\frac{35}{6}$ м	6 м

29*. Точка O – центр кола, вписаного в чотирикутник $ABCD$, $OA = \sqrt{30}$, $OB = 2\sqrt{5}$, $OC = 2\sqrt{3}$. **Знайдіть** OD, якщо навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло.

А	Б	В	Г	Д
$3\sqrt{2}$	$\sqrt{22}$	$5\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{15}$

30*. Знайдіть ГМТ, рівновіддалених від точки (0,5; 0) і прямої $x = -1{,}5$.

А	Б	В	Г	Д
$x = -0{,}5$	$(x-0{,}5)^2 + y^2 = 1$	$x + 1{,}5 = \sqrt{(x-0{,}5)^2 + y^2}$	$y = \sqrt{4x+2}$	$y^2 = 4x + 2$

31*. У трапеції: O – точка перетину діагоналей, P – точка перетину продовження бічних сторін, M і E – середини основ. **Знайдіть відношення** більшої основи трапеції до меншої, якщо має місце рівність $\overline{ME} = 0{,}75\overline{OP}$.

А	Б	В	Г	Д
1,5	$\sqrt{3}$	2	$2\sqrt{2}$	3

32*. Знайдіть рівняння прямої, у яку перетворюється пряма $3x + y - 17 = 0$ після повороту навколо точки (2; 1) на кут 90°.

А	Б	В	Г	Д
$x - 3y + 11 = 0$	$-x + 3y + 13 = 0$	$3x - y - 11 = 0$	$x + 3y + 13 = 0$	$x + 3y - 12 = 0$

33*. Гомотетією з коефіцієнтом $k > 0$ коло $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$ відображується в коло $x^2 + y^2 + 14y + 13 = 0$. **Знайдіть координати центра гомотетії.**

А	Б	В	Г	Д
(4; 1)	(1; –5)	(3; –4)	(0; 0)	(3; –1)

У завданнях 34–37 оберіть правильну, на вашу думку, відповідь. ЇХ МОЖЕ БУТИ КІЛЬКА.

34*. **Запишіть рівняння прямої**, що дотикається до кола $x^2 + y^2 = 9$ у точці його перетину з віссю абсцис.

А	Б	В	Г	Д
$y = 3$	$x = 3$	$y = x$	$x = -3$	$y = -3$

35. **Запишіть рівняння прямої**, що проходить через точку $M(1; 2)$ і дотикається до кола $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

А	Б	В	Г	Д
$2x + \sqrt{5}y - 2 - 2\sqrt{5} = 0$	$y = \sqrt{2}x + 3$	$y = -\sqrt{2}x + 3$	$2x - \sqrt{5}y - 2 + 2\sqrt{5} = 0$	Інша відповідь

36. У площині прямокутника $ABCD$ взято точку M. **Знайдіть** $\overline{MA} \cdot \overline{MC}$, якщо $\overline{MB} \cdot \overline{MD} = 3$.

А	Б	В	Г	Д
–3	3	Визначити неможливо	Інша відповідь	0

37*. Дано паралелограм $ABCD$. Пряма l перетинає прямі AB, AC і AD відповідно в точках B_1, C_1 і D_1. Причому $\overrightarrow{AD_1} = \alpha\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB_1} = \beta\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC_1} = \gamma\overrightarrow{AC}$. **Знайдіть значення** γ, якщо $\alpha = 2$, а $\beta = 3$.

А	Б	В	Г	Д
Визначити неможливо	5	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{6}$

У завданнях 38–44 підберіть з правого стовпчика продовження до виразів лівого так, щоб утворилися правильні твердження. УВАГА:

- *одному виразу лівого стовпчика можуть відповідати кілька виразів правого;*
- *деякі твердження правого стовпчика можуть бути використані кілька разів, а деякі залишаться незадіяними.*

38. Сформуйте правильні твердження.

Якщо послідовно сполучити	А) кінці двох діаметрів кола, Б) кінці двох нерівних відрізків, що перетинаються під прямим кутом і діляться точкою перетину навпіл, В) кінці двох рівних відрізків, що діляться точкою їхнього перетину навпіл, Г) через одну середини сторін правильного восьмикутника, Д) середини сторін рівнобедреної трапеції, діагоналі якої перетинаються під прямим кутом,	то утвориться	1) трапеція. 2) прямокутник. 3) паралелограм. 4) квадрат. 5) ромб. 6) вписаний чотирикутник. 7) точка.

39. Сформуйте правильні твердження.

При перетині бісектрис кутів	А) паралелограма Б) ромба В) трапеції Г) прямокутника Д) вписаного чотирикутника Е) рівнобічної трапеції	утворюється	1) трапеція. 2) прямокутник. 3) паралелограм. 4) квадрат. 5) ромб. 6) вписаний чотирикутник. 7) точка.

40. Сформуйте правильні твердження.

Якщо трапеція	А) вписана, Б) описана, В) рівнобедрена, Г) за бісектриси кутів при одній основі має діагоналі, Д) має діагоналі, перпендикулярні до бічних сторін,	то вона	1) прямокутна. 2) рівнобедрена. 3) має однакові суми довжин основ і довжин бічних сторін. 4) вписана.

41. Сформуйте правильні твердження.

Якщо послідовно сполучити середини сторін	А) опуклого чотирикутника, Б) ромба, В) трапеції, Г) прямокутника, Д) рівнобічної трапеції, Е) паралелограма, Є) вписаного чотирикутника,	то утвориться	1) трапеція. 2) прямокутник. 3) паралелограм. 4) квадрат. 5) ромб. 6) вписаний чотирикутник. 7) прямокутна трапеція. 8) рівнобедрена трапеція.

42. Сформуйте правильні твердження.

Якщо	А) пряма паралельна осі абсцис, Б) пряма паралельна осі ординат, В) пряма утворює кут α з додатним напрямом осі абсцис, Г) пряма утворює кут α з додатним напрямом осі ординат, Д) пряма утворює кут α з від'ємним напрямом осі ординат,	то	1) її кутовий коефіцієнт не існує. 2) її кутовий коефіцієнт дорівнює $(-\mathrm{ctg}\alpha)$. 3) її кутовий коефіцієнт дорівнює нулю. 4) її кутовий коефіцієнт дорівнює $\mathrm{tg}\alpha$. 5) її кутовий коефіцієнт дорівнює $(-\mathrm{tg}\alpha)$. 6) її кутовий коефіцієнт дорівнює $\mathrm{ctg}\alpha$.

43. Сформуйте правильні твердження.

Якщо	А) прямі перетинаються, Б) прямі паралельні, В) прямі збігаються, Г) прямі перпендикулярні, Д) прямі паралельні бісектрисі III координатної чверті, Е) прямі перпендикулярні до бісектриси I координатної чверті,	то	1) їхні кутові коефіцієнти дорівнюють −1. 2) їхні кутові коефіцієнти за модулем рівні. 3) у рівнянні прямих вільні члени однакові. 4) їхні кутові коефіцієнти рівні. 5) їхні кутові коефіцієнти дорівнюють 1. 6) прямі мають вигляд $x = \mathrm{const}$. 7) кутовий коефіцієнт однієї прямої дорівнює оберненому значенню кутового коефіцієнта другої, взятого з протилежним знаком. 8) їхні кутові коефіцієнти не можуть бути рівними.

44. Сформуйте правильні твердження.

Якщо	А) $\vec{a} \parallel \vec{b}$, Б) $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, В) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ і $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$, Г) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, Д) $\vec{a} + 2\vec{b} = 0$, Е) $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} \nparallel \vec{c}$,	то	1) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не завжди рівні, але мають рівні модулі. 2) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні. 3) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні. 4) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. 5) вектор $\vec{a}$ є нуль-вектором. 6) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ протилежно напрямлені. 7) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співнапрямлені. 8) $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

У завданнях 45–47 потрібно заповнити порожні клітинки таблиці так, щоб по горизонталях отримати правильні твердження.

45. Заповніть таблицю так, щоб утворилися правильні твердження.

1) ГМТ	середин рівних хорд даного кола	є	
2) ГМТ	вершин прямокутних трикутників зі спільною гіпотенузою	є	
3) ГМТ	центрів кіл, що проходять через задані дві точки,	є	
4) ГМТ	центрів рівних кіл, що проходять через задану точку,	є	
5) ГМТ	центрів кіл, що дотикаються,	є	

46*. Заповніть таблицю так, щоб утворилися правильні твердження.

1) Середини сторін чотирикутника послідовно сполучили – отримали прямокутник.	Тоді заданий чотирикутник відрізняє те, що	
2) Середини сторін чотирикутника послідовно сполучили – отримали ромб.		
3) У чотирикутник можна вписати коло, а дві суміжні його сторони рівні.		
4) Середини сторін чотирикутника послідовно сполучили – отримали квадрат.		
5) Навколо чотирикутника можна описати коло, а один з його кутів – прямий.		

47*. Заповніть таблицю.

ФІГУРА	Осі симетрії (вказати кількість і які саме прямі)
1) Рівносторонній трикутник	
2) Коло	
3) Дві прямі, що перетинаються	
4) Квадрат	
5) Правильний шестикутник	

У завданнях 48–53 треба обрати з пропонованих відповідей одну, яка є, на вашу думку, правильною.

48. Укажіть, **скільки з наведених тверджень є правильними.**

1) Серед п'яти точок, які не лежать в одній площині, чотири можуть належати одній прямій.
2) Якщо відрізок не має спільних точок з площиною, то він паралельний цій площині.
3) Якщо коло має спільну точку з кожною зі сторін чотирикутника, то обидві фігури лежать в одній площині.
4) Якщо середини всіх сторін п'ятикутника лежать в одній площині, то всі його вершини також лежать у цій площині.
5) Точки K, L, M, N містяться поза площиною паралелограма $ABCD$, до того ж A – середина відрізка KL, B – середина відрізка LM, C – середина відрізка MN. Тоді точка D є серединою відрізка NK.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

49. Укажіть, **скільки з наведених тверджень є правильними.**

1) Три попарно паралельні прямі лежать в одній площині.
2) Дві прямі є мимобіжними, якщо вони не перетинаються.
3) Площини α і β перетинаються. Тоді знайдеться безліч пар паралельних прямих, одна з яких належить площині α, а друга – β.
4) Дві прямі паралельні тоді й тільки тоді, коли довільна площина, що перетинає одну з цих прямих, перетинає й другу пряму.
5) Якщо серед n даних прямих кожні дві перетинаються, то або всі ці прямі лежать в одній площині, або всі проходять через одну точку.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

50. Укажіть, **скільки з наведених тверджень є правильними.**

1) Якщо середини п'яти сторін шестикутника належать одній площині, то середина шостої сторони даного шестикутника теж лежить у цій площині.
2) Чотирикутник із вершинами в серединах сторін просторового чотирикутника є плоским.
3) Точки A і B не належать площині α, точка C належить відрізку AB. Через точки A, B, C провели паралельні прямі, що перетинають дану площину в точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Тоді точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій.
4) Якщо дві прямі є мимобіжними, то існує пряма, яка паралельна цим двом прямим.
5) Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Тоді середини шести відрізків з кінцями у цих точках є серединами трьох паралелограмів.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

51. BD – медіана трикутника ABC, в якого $AB = BC$. Центри кіл, уписаних у трикутники ABD і BCD, – точки O_1 і O_2. **Чи паралельна** сторона AC площині, яка проходить через точки O_1 і O_2?

А	Б	В	Г	Д
Не завжди	Так	Ні	Не можна визначити	Інша відповідь

52. Чи є площина, проведена через середини двох медіан трикутника, **паралельною** одній з його сторін?

А	Б	В	Г	Д
Не завжди	Так	Ні	Не можна визначити	Інша відповідь

53. У трикутнику ABC сторони AB і BC мають однакові довжини, AE і CD – бісектриси кутів трикутника. **Чи паралельна** сторона AC площині, яка проходить через точки E і D?

А	Б	В	Г	Д
Не завжди	Так	Ні	Не можна визначити	Інша відповідь

У завданнях 54–55 треба записати номер твердження, що є наслідком інших тверджень. ВАРІАНТІВ ВІДПОВІДЕЙ МОЖЕ БУТИ КІЛЬКА.

54. **Запишіть номер твердження,** яке випливає з інших наведених тверджень:

1) $a \perp \alpha$; **2)** $a \perp b$; **3)** $b \subset \alpha$.

55. **Запишіть номер твердження,** яке випливає з інших двох наведених тверджень:

1) $a \parallel \alpha$; **2)** $b \perp a$; **3)** $b \perp \alpha$.

У завданнях 56–57 треба обрати правильні, на вашу думку, твердження-висновки (відповідно до твердження-умови) і записати їхні номери.

- *ПРАВИЛЬНИХ ТВЕРДЖЕНЬ-ВИСНОВКІВ МОЖЕ БУТИ КІЛЬКА.*
- *МОЖЕ БУТИ ТАКЕ, ЩО ПРАВИЛЬНИХ ВИСНОВКІВ НЕМАЄ (ставимо прочерк).*

56. Прямі a і b перпендикулярні до прямої c. **ТОДІ:**

1) $a \parallel b$;
2) якщо $c \in \alpha$, то $\{a,b\} \not\subset \alpha$;
3) a і b лежать в одній площині;
4) $c \perp \gamma$ – площині, що містить a і b;
5) $b \perp \beta$ – площині, що містить a і c.

57. Пряма a і площина α мають спільний перпендикуляр n. **ТОДІ:**

1) $a \perp \alpha$; **2)** $a \subset \alpha$; **3)** $a \parallel \alpha$;
4) $a \subset \alpha$ або $a \parallel \alpha$; **5)** якщо $b \perp a$, то $b \parallel \alpha$.

У завданнях 58–61 оберіть правильні, на вашу думку, твердження. ЇХ МОЖЕ БУТИ КІЛЬКА.

58. Які твердження **є правильними?**

1) Якщо дві площини, перпендикулярні до третьої, проходять по паралельних прямих, то вони паралельні.

2) Є n площин, які перетинаються по одній прямій. Якщо до кожної з цих площин з даної точки провести перпендикуляри, то всі вони лежатимуть в одній площині.

3) Якщо площина і пряма, яка не міститься у цій площині, перпендикулярні до деякої площини, то вони паралельні.
4) Є n площин, кожні дві з яких перетинаються, при тому ці прямі перетину паралельні між собою. Якщо з даної точки провести перпендикуляри до цих площин, то всі вони лежатимуть в одній площині.
5) Дві площини, перпендикулярні до третьої, – паралельні між собою.

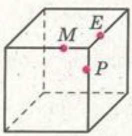
59. Які твердження **є правильними?**
1) Прямі a і b паралельні, якщо вони мають спільний перпендикуляр.
2) Пряма a, яка проходить через середини основ рівнобічної трапеції, перпендикулярна до площини α. Тоді середня лінія трапеції паралельна площині α.
3) Площина α не перетинає трапецію. Сума відстаней від кінців діагоналі до площини α однакова для обох діагоналей. Тоді середня лінія трапеції паралельна площині α.
4) Бісектриси двох нерівних кутів рівнобедреного трикутника відповідно паралельні бісектрисам другого рівнобедреного трикутника. Тоді основи цих трикутників паралельні.
5) Сторони двох прямокутників відповідно паралельні. Тоді паралельні серединні перпендикуляри відповідних діагоналей цих прямокутників.

60*. Які твердження **є правильними?**
1) Площина і пряма паралельні, якщо вони мають спільний перпендикуляр і пряма не лежить у даній площині.
2) Дві площини паралельні, якщо вони мають спільний перпендикуляр.
3) Дві прямі паралельні, якщо вони мають два спільних перпендикуляри.
4) Площини, які перетинаються, мають один спільний перпендикуляр.
5) Дві прямі, що перетинаються, мають один спільний перпендикуляр.

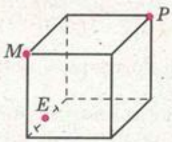
61*. Які твердження **є правильними?**
1) Ортогональна проекція фігури не може бути подібною до даної фігури.
2) Ортогональна проекція трикутника може бути більшою за трикутник, що проектується.
3) ABC і ABM – рівнобедрені трикутники, O – середина відрізка AB, $\angle COM = 90°$. Тоді $CO \perp (ABM)$ і $MO \perp (ABC)$.
4) Спільні перпендикуляри до двох площин перетинають ці площини в точках A, B, C і A_1, B_1, C_1. Тоді трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні.
5) Точки A і B площини α рівновіддалені від площини β. Тоді $\alpha \parallel \beta$.

У завданнях 62–72 треба правильно виконати зображення відповідної конфігурації фігур і, якщо це вимагається за умовою, здійснити відповідні позначення рівних відрізків (рискою).

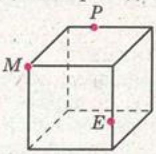
62. На малюнках Т.1–Т.5 зображено куби. **Побудуйте на цих зображеннях переріз** куба площиною, яка проходить через точки M, P, E.



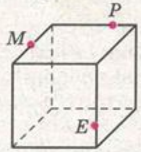
Мал. Т.1



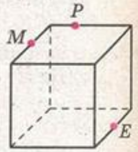
Мал. Т.2



Мал. Т.3



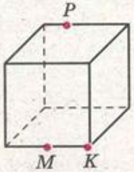
Мал. Т.4



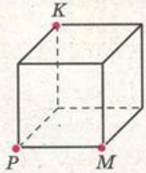
Мал. Т.5

63. $ABCD$ – паралелограм, точка M розміщена поза його площиною. **Побудуйте зображення лінії перетину площин** MAB і MCD.

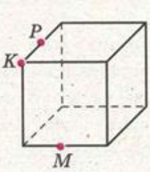
64*. На малюнках Т.6–Т.9 зображено куби. **Побудуйте на цих зображеннях переріз** куба площиною, яка проходить через точки M, P, K.



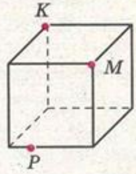
Мал. Т.6



Мал. Т.7



Мал. Т.8

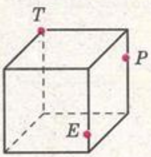


Мал. Т.9

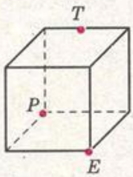
65. Точка M міститься поза площиною трикутника ABC. **Побудуйте зображення площини**, яка паралельна площині ABC і проходить через центроїд трикутника MBC.

66*. Точка P міститься поза площиною трикутника ABC. **Побудуйте зображення площини**, що проходить через середину відрізка MC паралельно площині ABC.

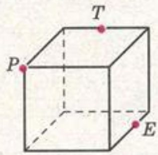
67*. На малюнках Т.10–Т.13 зображено куби. **Побудуйте на цих зображеннях переріз** куба площиною, яка проходить через точки T, P, E.



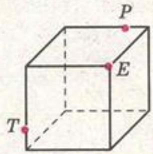
Мал. Т.10



Мал. Т.11



Мал. Т.12



Мал. Т.13

68. Трикутники ABC і ABM – рівносторонні, їх периметри дорівнюють по 18 см. Відомо, що $CM = 3\sqrt{2}$ см. **Укажіть** на малюнку перпендикуляр до площини ABC.

69. Два квадрати, периметри яких дорівнюють по 24 см, мають спільну сторону. Відстань між центрами квадратів $3\sqrt{2}$ см. **Укажіть** на малюнку перпендикуляри до площин цих квадратів.

70*. Два правильні шестикутники мають периметри по 48 см. Відрізок AB – їх спільна мала діагональ. Відстань між центрами шестикутників $4\sqrt{2}$ см. **Зобразіть** шестикутники і перпендикуляри до їх площин.

71. $ABCD$ – правильний тетраедр. **Зобразіть** на його ребрі BC таку точку P, щоб $(APD) \perp (ABC)$.

72. $ABCD$ – правильний тетраедр. **Зобразіть** на його грані ABC таку точку M, щоб $(BMD) \perp (ADC)$.

До завдання 73 запишіть, яку фігуру утворюють відповідні точки простору.

73. Яку фігуру у просторі утворюють:

1) усі прямі, що перпендикулярні до даної прямої і проходять через дану на ній точку?	
2) усі вершини рівнобедрених трикутників із спільною основою AB?	
3) усі точки, віддалені від площини α на a?	
4) усі точки, рівновіддалені від двох заданих площин?	
5) усі точки, віддалені від площини α на a, а від площини β на b?	
6*) усі точки, рівновіддалені від точок A, B, C?	
7*) центри мас усіх трикутників з фіксованою вершиною у точці M поза площиною α і однією стороною, яка належить α?	

ПОВТОРЮЄМО КУРС СТЕРЕОМЕТРІЇ ЗА 11 КЛАС

КООРДИНАТИ, ВЕКТОРИ І ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ В ПРОСТОРІ

У завданнях 74–86 треба обрати з пропонованих відповідей одну, яка є, на вашу думку, правильною.

74. Як розміщено точку $M(5; -1; 0)$ у прямокутній системі координат?

А	Б	В	Г	Д
На осі Ox	На осі Oz	У площині xOz	У площині yOz	У площині xOy

75. Знайдіть координати точки перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, якщо $A(-2; 10; 0)$, $C(2; -4; 12)$.

А	Б	В	Г	Д
(−2; 7; −12)	(2; −7; 12)	(0; 3; 6)	(0; 6; 12)	(0; −3; −6)

76. Яка з точок належить площині $3x - 2y + z + 1 = 0$?

А	Б	В	Г	Д
(−2; 7; −8)	(2; −7; 7)	(−1; −1; 0)	(0; 6; 12)	(0; −3; −6)

77. Знайдіть радіус сфери, рівняння якої має вигляд $x^2 + 3x + y^2 - 6y + z^2 - z = 1{,}5$.

А	Б	В	Г	Д
12	6	$\sqrt{1{,}5}$	$2\sqrt{3}$	1,5

78. Знайдіть координати центра сфери, рівняння якої має вигляд $x^2 - x + y^2 + 4y + z^2 + 5z = 1$.

А	Б	В	Г	Д
12	6	11,5	$2\sqrt{3}$	10

79. При якому значенні λ вектори $\overline{(-4; 2\lambda; 0)}$ і $\overline{(1; 2; \lambda^2 - 1)}$ будуть перпендикулярними?

А	Б	В	Г	Д
−1	1	{1; −5}	{−1; 5}	Інша відповідь

80. **При якому значенні n** вектори $\overline{(n;\ n+3;\ n-3)}$ і $\overline{(n-2;\ 2n-6;\ n-4)}$ колінеарні?

А	Б	В	Г	Д
0	−1	6	−3	−6

81. **При яких значеннях n** вектори $\overline{(4;\ n+3;\ 10)}$ і $\overline{(n;\ 4;\ n+9)}$ мають однакові довжини?

А	Б	В	Г	Д
2 або 14	−14 або 2	2	−14	−2 або 14

82*. **Знайдіть приблизно градусну міру кута між векторами** $\overline{(3;\ -4;\ 12)}$ і $\overline{(0;\ 8;\ -6)}$.

А	Б	В	Г	Д
9°	6°	≈70°	12°	≈140°

83. На який вектор здійснено паралельне перенесення, при якому точка $M(-3;\ 4;\ 6)$ перетворюється на $T(5;\ -1;\ 8)$?

А	Б	В	Г	Д
$\overline{(8;\ -5;\ 2)}$	$\overline{(-8;\ 5;\ -2)}$	$\overline{(2;\ 3;\ 14)}$	$\overline{(-2;\ -3;\ -14)}$	Інша відповідь

84. Відносно якої точки здійснено перетворення центральної симетрії, якщо точка $A(0;\ 2;\ 3)$ перетворилася на $B(0;\ -4;\ 1)$?

А	Б	В	Г	Д
$\overline{(0;\ -6;\ -2)}$	$\overline{(0;\ -3;\ -1)}$	$\overline{(0;\ -1;\ 2)}$	$\overline{(0;\ 1;\ -2)}$	Інша відповідь

85. Знайдіть коефіцієнт перетворення гомотетії із центром $O(0;\ 0;\ 0)$, при якому точка $A(1;\ 1;\ -1)$ перетворюється на $B(12;\ 12;\ -12)$.

А	Б	В	Г	Д
−12	12	11	−11	$\frac{13}{2}$

86. Які координати має центр сфери, що гомотетична сфері $x^2-2x+y^2-4y+z^2=1$ з коефіцієнтом гомотетії $k=-6$ і центром гомотетії $O(0;\ 0;\ 0)$?

А	Б	В	Г	Д
(−3; −6; 0)	(5; 4; 6)	(−5; −4; −6)	(6; 12; 0)	(−6; −12; 0)

У завданнях 87–89 до кожного виразу лівого стовпчика (позначеного літерою) підберіть словосполучення з правого стовпчика (позначеного цифрою) так, щоб утворилися правильні твердження. Запишіть відповідні пари «літера–цифра». УВАГА:

- *деякі словосполучення правого стовпчика можуть бути використаними кілька разів, а деякі – залишитися незадіяними;*
- *одному виразу лівого стовпчика можуть відповідати кілька словосполучень правого;*
- *треба вказати всі можливі пари.*

87. Усі задані вектори ненульові. Коли наведене в лівому стовпчику твердження **є правильним?**

А) $\overline{AB} - \overline{CD} = \overline{AD} - \overline{CB}$	**1) тільки якщо $ABCD$ – паралелограм.**
Б) $\overline{MA} - \overline{MC} = \overline{MB} + \overline{MD}$	2) якщо A, B, C, D – довільні точки простору.
В) $\overline{MA}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MD}^2$	3) тільки якщо $ABCD$ – прямокутник.
Г) $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$	4) тільки якщо $ABCD$ – ромб.
	5) – такого бути не може.
	6) тільки якщо $ABCD$ – прямокутник і $M \in (ABC)$.

88. Утворіть **правильні** твердження.

А) Рухом є такі перетворення:	1) гомотетії
Б) Фігура перетворюється на подібну (з $k \neq 1$) при перетворенні	2) подібності
В) Відстані між точками не зберігаються при перетворенні	3) паралельного перенесення
Г) Фігура перетворюється на рівну при перетворенні	4) симетрії відносно площини
Д) Гомотетія з коефіцієнтом $k = -1$ і центром O є ще перетворенням відносно O	5) центральної симетрії
	6) повороту навколо прямої

89*. Дано рівняння $\alpha x + \beta y + cz + d = 0$ площини δ. Утворіть **правильні** твердження.

А) Якщо $d = 0$,	1) то $\delta \parallel Ox$.
Б) Якщо $\alpha = d = 0$,	2) то $\delta \parallel Oy$.
В) Якщо $c = 0$,	3) то $\delta \parallel Oz$.
Г) Якщо $\beta = c = 0$,	4) то $O(0; 0; 0) \in \delta$.
Д) Якщо $\alpha = 0$,	5) то $\delta \perp (yOz)$.
	6) то $(Ox) \in \delta$.
	7) то $(Oy) \in \delta$.
	8) то $(Oz) \in \delta$.
	9) то $\delta \equiv (xOy)$.
	10) то $\delta \equiv (yOz)$.
	11) то $\delta \equiv (xOz)$.

У завданнях 90–92 треба обрати правильні, на вашу думку, твердження і записати їхні номери.

• *ПРАВИЛЬНИХ ТВЕРДЖЕНЬ МОЖЕ БУТИ КІЛЬКА.*

• *МОЖЕ БУТИ ТАКЕ, ЩО ПРАВИЛЬНИХ ТВЕРДЖЕНЬ НЕМАЄ (ставимо прочерк).*

90. Які твердження **є правильними?**

1) Скалярний добуток залежить від того, у якій системі координат розглядають дані вектори.
2) Якщо скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю, то задані вектори колінеарні.
3) Кут між двома прямими дорівнює куту між двома векторами, що належать даним прямим.

4) Якщо скалярний квадрат суми двох векторів дорівнює нулю, то ці вектори є нульовими векторами.

5) Сума кількох векторів залежить від порядку їх додавання.

91. Які твердження є **правильними?**

1) У результаті паралельного перенесення на вектор $\vec{a}$ точка A перетворюється на A_1 так, що $\overline{A_1A} = \vec{a}$.

2) До паралельного перенесення на вектор $\vec{a}$ оберненим є паралельне перенесення на вектор $(-\vec{a})$.

3) У кубі з довжиною ребра a довільну грань можна отримати паралельним перенесенням протилежної до неї грані на a.

4) Якщо дві точки симетричні відносно початку координат, то їхні координати відрізняються знаком.

5) Відношення об'ємів двох гомотетичних просторових фігур дорівнює квадрату коефіцієнта гомотетії.

92*. Які твердження є **правильними?**

1) Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарні, а вектори $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, $3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $-\vec{a} + 5\vec{b} - 3\vec{c}$ – компланарні.

2) Можна знайти суму трьох ненульових векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, кожні два з яких неколінеарні, якщо $(\vec{a} + \vec{b}) \parallel \vec{c}$ і $(\vec{b} + \vec{c}) \parallel \vec{a}$.

3) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, якщо довжина вектора $\vec{a}$ $(2; p + 1; p + 5)$ дорівнює 11, а $\vec{b}(1; p - 1; 4,5)$.

4) $\vec{a} \perp \vec{b}$, якщо $\vec{a}(1; -5; 6)$, $\vec{b}(1; 5; 4)$.

До завдань 93–112 запишіть тільки відповідь.

93. Запишіть рівняння площини, що проходить через точки $A(0; 0; 1)$, $B(0; 2; 0)$, $C(-1; 0; 0)$.

94. Запишіть рівняння площини, що проходить через точки $A(2; 1; -1)$, $B(1; 2; 7)$, $C(-1; 3; 2)$.

95. Запишіть рівняння площини, що паралельна координатній площині xOz і відтинає від променя $[Oy)$ відрізок завдовжки 5 од.

96. Запишіть рівняння сфери із центром $O(-1; 1; -1)$, яка дотикається до трьох координатних площин.

97. Площина $6x - 3y + 2z - 12 = 0$ перетинає осі координат у точках A, B, C. Знайдіть площу трикутника ABC.

98*. Запишіть рівняння площини, що перетинає дві координатні площини по прямих $3x + 2y - 6 = 0$ і $5y + 3z - 15 = 0$.

99*. Запишіть рівняння площини, що проходить через точку $M(1; 2; 8)$ і відтинає на осях координат однакові відрізки.

100*. Запишіть рівняння площини, що проходить через точку $(1; -1; 1)$ паралельно площині $3x - 2y + z + 1 = 0$.

101*. Запишіть рівняння площин, що паралельні площині $x - y + z + 1 = 0$ і віддалені від неї на $\sqrt{3}$ од.

102*. Квадрати $ABCD$ і $ABET$ лежать у площинах xy і yz, а їхня спільна сторона – на осі Ox. Периметр кожного з квадратів дорівнює P. Запишіть рівняння площини, що проходить через точки C, E, T.

103. Які з даних векторів $\vec{a}(3; 1; -5)$, $\vec{b}(2; 1; 1)$, $\vec{c}(1: 2; 1)$ взаємно перпендикулярні?

104. Одиничні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задовольняють умову $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Знайдіть $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

105*. Відомо, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарні. При яких значеннях m і n вектори $n\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}$ та $\vec{a} + n\vec{b} + m\vec{c}$ колінеарні?

106. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Запишіть один з векторів, початок і кінець якого є вершинами даного паралелепіпеда і який дорівнює:

1) $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CC_1}$;

3) $\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A}$; 4) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BB_1}$;

5) $\overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{D_1A_1}$; 6) $\overrightarrow{A_1D_1} - \overrightarrow{C_1C}$.

107. Дано тетраедр $ABCD$. Точки M і N – середини відрізків BC і DM відповідно. Запишіть вектор $\overrightarrow{AN}$ через вектори $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$.

108*. Об'єм трикутної піраміди, що побудована на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$, дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Знайдіть $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$, якщо $OB = 2$, $OA = 1$, $OC = 3$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$.

109. Запишіть рівняння площини, що симетрична площині $ax + \beta y + cz + d = 0$ відносно: 1) початку координат; 2) площини YOZ.

110*. Знайдіть координати точки, симетричної початку координат відносно площини $x + y + z - 3 = 0$.

111*. Запишіть рівняння площини, яку отримано перетворенням симетрії відносно xOz з площини $2x - y + z + 1 = 0$.

112*. Площину $2x - y + z - 2 = 0$ отримано перетворенням гомотетії з центром $O(1; 0; 1)$ і коефіцієнтом гомотетії $k = -2$. Знайдіть рівняння площини – прообразу.

БАГАТОГРАННІ КУТИ

У завданнях 113–115 треба обрати з пропонованих відповідей одну, яка є, на вашу думку, правильною.

113. Точка M належить одній із граней двогранного кута і віддалена від другої його грані на 20 см. Знайдіть міру даного двогранного кута, якщо відстань від M до ребра цього кута дорівнює 40 см.

А	Б	В	Г	Д
Така конфігурація не існує	30°	90°	60°	45°

114. На ребрі c двогранного кута $\alpha c\beta$ взято відрізок $AB = 2$ см. У гранях α і β цього кута побудовано квадрати $ABDC$ і $ABKT$ відповідно. Визначіть вид даного двогранного кута, якщо відстань між точками D і T дорівнює 3 см.

А	Б	В	Г	Д
Гострий	Розгорнутий	Прямий	Тупий	Визначити не можна

115*. На ребрі двогранного кута $\gamma a\beta$ взято відрізок AB. У грані γ позначено точку C, яка проектується на ребро цього кута в точку A. Знайдіть лінійний кут двогранного кута, якщо BC утворює з гранню β кут $30°$, а $\angle CBA = 60^o$.

А	Б	В	Г	Д
$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$30°$	$\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$	$60°$	Інша відповідь

До завдань 116–122 запишіть тільки відповідь.

116. Відстані від точки M до ребра і граней двогранного кута відповідно дорівнюють 2, $\sqrt{3}$ і 1. Знайдіть міру двогранного кута.

117. Точки A і B належать сторонам лінійного кута двогранного кута. Відстані від них до ребра цього кута дорівнюють 2 см і 4 см; $AB = 5$ см. Знайдіть косинус міри двогранного кута.

118. Точка A належить одній з граней двогранного кута, а її відстань від другої грані дорівнює $\sqrt{3}$. Знайдіть міру двогранного кута, якщо відстань від точки A до його ребра дорівнює 2.

119. Дві паралельні площини перетинаються третьою так, що міри утворених двогранних кутів, які містяться між паралельними площинами, відносяться як 1 : 2. Знайдіть ці міри.

120*. Міри двогранних кутів, що утворилися при перетині двох паралельних площин третьою, дорівнюють α і β. Знайдіть їх міри, якщо $\cos\alpha : \sin\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

121*. Два плоскі кути тригранного кута дорівнюють по $60°$. На їх спільній стороні взято точку M, відстані від якої до протилежної грані і двох інших ребер дорівнюють відповідно 1, 2, 2. Знайдіть міру третього плоского кута даного тригранного кута.

122*. Через вершину A трикутника ABC провели площину α, паралельну BC. Точки B_1 і C_1 належать α, BB_1 і CC_1 – перпендикулярні, $AB_1 = 13$ см, $AC_1 = 15$ см, $B_1C_1 = 14$ см, відстань від прямої BC до площини α дорівнює 5 см. Знайдіть площу трикутника ABC.

БАГАТОГРАННИКИ І ТІЛА ОБЕРТАННЯ

У завданнях 123–128 треба обрати з пропонованих відповідей одну, яка є, на вашу думку, правильною.

123. Знайдіть бічну поверхню правильної шестикутної призми, найбільша діагональ якої дорівнює 13 дм, а бічне ребро 5 дм.

А	Б	В	Г	Д
360 дм	360 дм^2	180 дм^2	90 дм^2	180 дм

124. Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, в якого сторони основи дорівнюють 3 та 4 см і вона утворює з площиною основи кут $60°$.

А	Б	В	Г	Д
1 дм	2,5 см	$10\sqrt{3}$ см	$\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$ см

125. Висота правильної чотирикутної піраміди 7, а сторона основи 8. Знайдіть бічне ребро даної піраміди.

А	Б	В	Г	Д
8	$\sqrt{103}$	7	9	Інша відповідь

126. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 4 і утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть з точністю до 0,1 площу основи піраміди.

А	Б	В	Г	Д
10,1	10,2	10,0	11	Інша відповідь

127. Знайдіть довжину кола основи конуса, якщо його твірна дорівнює 5, а висота 4.

А	Б	В	Г	Д
9	6	3π	9π	6π

128. Висота і твірна конуса дорівнюють 20 см і 25 см відповідно. Знайдіть радіус вписаної в даний конус півкулі, основа якої належить основі конуса.

А	Б	В	Г	Д
12π	6	12	9	Інша відповідь

У завданнях 129–130 треба обрати правильні, на вашу думку, твердження і записати їхні номери.

- *ПРАВИЛЬНИХ ТВЕРДЖЕНЬ МОЖЕ БУТИ КІЛЬКА.*
- *МОЖЕ БУТИ ТАКЕ, ЩО ПРАВИЛЬНИХ ТВЕРДЖЕНЬ НЕМАЄ.*

129. Які твердження є **правильними?**

1) У будь-якого паралелепіпеда всі грані – прямокутники.
2) Будь-яка правильна призма за основу має квадрат.
3) Діагоналі прямої призми завжди мають рівні довжини.
4) Конус можна отримати обертанням рівнобедреного трикутника навколо висоти, що проведена до основи цього трикутника.
5) Зрізаний конус можна отримати обертанням рівнобедреної трапеції навколо прямої, що містить середини основ цієї трапеції.

130. Які твердження є **правильними?**

1) У правильного тетраедра ребро основи може не дорівнювати бічному ребру.
2) У правильної трикутної піраміди ребро основи може не дорівнювати бічному ребру.
3) Правильна трикутна піраміда є правильним тетраедром.
4) Правильний тетраедр є правильною трикутною пірамідою.
5) У будь-якій правильній піраміді бічні грані є рівнобедреними трикутниками.

У завданнях 131–133 до кожного виразу лівого стовпчика (позначеного літерою) підберіть словосполучення з правого стовпчика (позначеного цифрою) так, щоб утворилися правильні твердження. Запишіть відповідні пари «літера–цифра». УВАГА:

• деякі словосполучення правого стовпчика можуть бути використаними кілька разів, а деякі – залишитися незадіяними;

• одному виразу лівого стовпчика можуть відповідати кілька словосполучень правого;

• треба вказати всі можливі пари.

131. Утворіть **правильні** твердження.

	А) тетраедра		1) трикутник.
			2) чотирикутник.
ПЕРЕРІЗОМ		МОЖЕ БУТИ	3) п'ятикутник.
			4) шестикутник.
	Б) куба		5) семикутник.
			6) восьмикутник.

132*. Утворіть **правильні** твердження.

А) Точка, рівновіддалена від вершин багатокутника,	1) завжди проектується у центр вписаного в нього кола.
Б) Точка, рівновіддалена від вершин трикутника,	2) завжди проектується у центр описаного навколо нього кола.
В) Точка, рівновіддалена від вершин n-кутника ($n > 3$),	3) може проектуватися у центр його зовнівписаного кола.
Г) Точка, рівновіддалена від сторін трикутника,	4) може проектуватися в точку поза вказаною фігурою.
Д) Точка, рівновіддалена від сторін n-кутника ($n > 3$),	

133*. Утворіть **правильні** твердження.

А) Вершина піраміди, всі ребра якої однаково нахилені до площини основи,	1) може проектуватися в точку поза основою піраміди.
Б) Вершина піраміди, всі грані якої однаково нахилені до площини основи,	2) завжди проектується в центр описаного навколо основи кола.
В) Вершина правильної піраміди, що має за основу n-кутник ($n > 3$),	3) завжди проектується в центр кола, вписаного в основу піраміди.
Г) Вершина правильної піраміди, що має за основу трикутник,	4) проектується в точку, рівновіддалену від площин граней даної піраміди.
Д) Вершина піраміди, всі грані якої утворюють однакові кути з висотою піраміди,	5) проектується в точку, рівновіддалену від ребер даної піраміди.

До завдань 134–140 запишіть тільки відповідь.

134. Площа перерізу куба площиною, що проходить через діагоналі верхньої та нижньої основ, дорівнює $16\sqrt{2}$ см^2. Знайдіть довжину ребра куба.

135. Точка K знаходиться всередині куба на відстані 2 см, 4 см і 3 см від трьох його ребер, які мають спільну вершину. Знайдіть відстань між точкою K і цією вершиною.

136*. У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ усі грані – рівні ромби; $\angle A_1AD + \angle A_1AB = 180°$. Знайдіть кут між прямими B_1D і AC.

137. Основою піраміди є прямокутний трикутник з кутом 60°. Бічні ребра цієї піраміди нахилені до площини основи під кутом 45°. Висота піраміди дорівнює 10 дм. Знайдіть катет трикутника основи, що є протилежним до її заданого гострого кута.

138. У куб з ребром a вкладено три однакових циліндри висотою a, кожен з яких дотикається до поверхні куба і двох інших циліндрів. Знайдіть радіуси циліндрів.

139. Радіус основи конуса 9 см, висота 7 см. Яку найбільшу площу може мати переріз конуса площиною, проведеною через його вершину?

140. Довжина твірної зрізаного конуса 29 см, висота – 21 см, радіуси основ відносяться як 5 : 9. Знайдіть периметр осьового перерізу.

ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ТА ОБ'ЄМИ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

У завданнях 141–146 треба обрати з пропонованих відповідей одну, яка є, на вашу думку, правильною.

141. Площа поверхні куба 96. **Знайдіть ребро** куба.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{6}$	16	4	8	Інша відповідь

142. Діагональ бічної грані правильної чотирикутної призми дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 30°. **Знайдіть об'єм** призми.

А	Б	В	Г	Д
144 см^3	144 см^2	484 см^3	192 см^3	Інша відповідь

143. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює $18\sqrt{3}$, а її висота – 8. **Знайдіть сторону** основи.

А	Б	В	Г	Д
6	3	$3\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$

144. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди дорівнює 60 м^2, а сторона основи – 6 м. **Знайдіть об'єм** піраміди.

А	Б	В	Г	Д
48 м^3	360 м^3	192 м^2	192 см^3	Інша відповідь

145. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 24π, а його об'єм – 48π. **Знайдіть висоту** циліндра.

А	Б	В	Г	Д
2π	6	2	9	3

146. Площа бічної поверхні конуса дорівнює 11, а довжина твірної – $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. **Знайдіть площу основи** конуса.

А	Б	В	Г	Д
16π	16	121	242	Інша відповідь

До завдань 147–188 запишіть тільки відповідь.

147. У прямокутному паралелепіпеді сторони основи відносяться як 2 : 1, а діагональний переріз є квадратом із площею 25 м^2. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

148. Основа призми – квадрат зі стороною $\sqrt{4-\sqrt{3}}$ см. Одна з бічних граней теж є квадратом, а інша – ромб з кутом 60°. Знайдіть повну поверхню призми.

149. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює $2\sqrt{3}$ дм, а бічна грань утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм піраміди.

150. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює $\sqrt[4]{48}$. Бічна грань нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

151. У правильній чотирикутній піраміді ребро основи дорівнює $3\sqrt{6}$. Об'єм піраміди дорівнює 54. Знайдіть кут між бічним ребром і площиною основи піраміди.

152. Плоский кут при вершині правильної шестикутної піраміди дорівнює 30°. Знайдіть бічну поверхню піраміди, якщо довжина бічного ребра 2 дм.

153. Основою піраміди є прямокутник із сторонами 18 і 24 см. Усі бічні ребра піраміди однакові і дорівнюють по 25 см. Знайдіть об'єм піраміди.

154*. У похилому паралелепіпеді площі двох бічних граней дорівнюють 20 см^2 і 30 см^2, а кут між ними 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його бічне ребро дорівнює 5 см.

155*. Основа піраміди – прямокутник. Дві бічні грані піраміди містять її висоту, яка дорівнює H, а дві інші нахилені до основи під кутами α і β. Знайдіть об'єм піраміди.

156*. Основа піраміди – прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α. Бічна грань, що містить катет, протилежний до даного кута, перпендикулярна до основи, а дві інші нахилені до неї під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди.

157*. Основа піраміди – прямокутний трикутник з катетом a і протилежним йому кутом α. Бічна грань, що містить гіпотенузу цього трикутника, перпендикулярна до основи, а дві інші нахилені до неї під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди.

158*. В основі піраміди лежить ромб з гострим кутом α. Дві бічні грані піраміди, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи. Дві інші нахилені до неї під кутом β, а відстань від основи висоти піраміди до цих граней дорівнює d. Знайдіть об'єм піраміди.

159*. В основі піраміди лежить ромб з тупим кутом β. Дві бічні грані піраміди, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи. Дві інші нахилені до неї під кутом α, а відстань від середини висоти піраміди до цих граней дорівнює l. Знайдіть об'єм піраміди.

160*. Бічні ребра прямокутного тетраедра (всі плоскі кути при вершині – прямі) дорівнюють a, β, c. Знайдіть його висоту.

161. Діаметр основи конуса дорівнює твірній і дорівнює $2\left(\sqrt[6]{\dfrac{3}{\pi^2}}\right)$ см. Знайдіть об'єм конуса.

162. У скільки разів збільшиться площа бічної поверхні конуса, якщо радіус його основи збільшити в 3 рази, а твірну – в 2 рази?

163. Твірна конуса дорівнює $\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\pi}}$ см. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо кут при вершині осьового перерізу прямий.

164. Твірна конуса дорівнює діаметру основи. Знайдіть висоту конуса, якщо площа його бічної поверхні дорівнює 150π.

165. Круговий сектор радіуса R потрібно згорнути в конус. Якої довжини повинна бути дуга цього сектора, щоб утворився рівносторонній конус?

166. Розгортка бічної поверхні циліндра – квадрат, площа якого дорівнює 76π. Знайдіть площу основи циліндра.

167. Площа основи циліндра відноситься до площі його осьового перерізу як $\pi : 4$. Знайдіть кут між діагоналями осьового перерізу.

168. Об'єм кулі дорівнює 135 см^3. Знайдіть об'єм другої кулі, діаметр якої в 3 рази більший, ніж діаметр даної кулі.

169. Об'єм кулі дорівнює 12 см^3. Знайдіть об'єм другої кулі, площа поверхні якої в 9 разів більша, ніж площа поверхні даної кулі.

170. Площа перерізу кулі площиною дорівнює 16π см^2. Знайдіть відстань між площиною перерізу і центром кулі, якщо об'єм кулі дорівнює $\frac{500\pi}{3}$.

171. Площа перерізу кулі площиною у 8 разів менша за площу поверхні кулі. Знайдіть відстань між площиною перерізу і центром кулі, якщо радіус кулі дорівнює $\sqrt{242}$ см.

172. Рівнобедрений трикутник з основою $2\sqrt{\frac{5}{\pi}}$ см і висотою $\frac{5}{2\sqrt{\pi}}$ см обертається навколо висоти. Знайдіть площу повної поверхні фігури обертання.

173. Квадрат зі стороною $\sqrt[6]{\frac{9}{8\pi^2}}$ см обертається навколо діагоналі. Знайдіть об'єм фігури обертання.

174. Ромб з діагоналями $\sqrt{15}$ і $\frac{60}{\pi}$ обертається навколо більшої діагоналі. Знайдіть об'єм отриманої фігури обертання.

175. Площа поверхні кулі дорівнює 330 см^2. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, описаного навколо кулі.

176. Циліндр вписано в правильну чотирикутну призму таким чином, що вісь циліндра збігається з віссю симетрії призми. Об'єм призми дорівнює $\frac{772}{\pi}$. Знайдіть об'єм циліндра.

177. У правильну чотирикутну піраміду вписано конус. Знайдіть об'єм конуса, якщо об'єм піраміди дорівнює $\frac{288}{\pi}$.

178. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює $9\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{\pi}}$ і нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть об'єм кулі, вписаної в піраміду.

179. У конус вписано кулю. Знайдіть об'єм кулі, якщо твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α.

180*. Основою чотирикутної піраміди $SABCD$ є прямокутник $ABCD$, в якого $AB = a$, $AD = \beta$. Грані SAD і SAB перпендикулярні до площини основи, а грань SCD нахилена до неї під кутом 45°. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо піраміди.

181*. Двогранний кут при бічному ребрі правильної трикутної піраміди дорівнює 2α. Висота піраміди дорівнює h. Знайдіть об'єм конуса, описаного навколо цієї піраміди.

182*. Основою піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною a. Одна з бічних граней є таким самим трикутником і перпендикулярна до площини основи. Знайдіть радіус описаної навколо піраміди сфери.

183*. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сфера дотикається до ребер AD, DD_1, CD і прямої BC_1. Знайдіть радіус сфери, якщо довжина ребра куба дорівнює 1.

184*. Правильна n-кутна призма вписана в кулю радіуса R. Ребро основи призми дорівнює a. Знайдіть висоту призми.

185*. Знайдіть кут між бічною гранню і площиною основи правильної зрізаної піраміди, якщо площа поверхні кулі, вписаної в дану піраміду, відноситься: 1) до бічної поверхні цієї піраміди як $\pi : 3\sqrt{3}$; 2) до суми площ основ цієї піраміди як $8\pi : 45\sqrt{3}$.

186*. Бічні ребра і дві сторони основи трикутної піраміди мають однакову довжину a, а кут між рівними сторонами основи дорівнює α. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.

187*. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гострим кутом α. Усі бічні ребра піраміди однакової довжини a. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус описаної навколо неї сфери дорівнює R.

188*. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гострим кутом α. Усі двогранні кути при основі дорівнюють β. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус вписаної в неї сфери дорівнює R.

Якщо ви хочете навчитися плавати, то сміливо ступайте у воду, а якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх!

Д. Пойя

ГОТУЄМОСЯ ДО ВСТУПУ У ВТНЗ

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Рівень задач цієї рубрики орієнтовано на рівень вимог для вступників до технічних ВНЗ або третьої частини завдань ЗНО. Зрозуміло, що завдання, які чекають на вас на іспитах, можуть різнитися за рівнем складності. Задачі, пропоновані далі, поділено на два рівні складності (дещо складніші – позначено зірочкою).

Пропонуємо розв'язувати задачі із записом основних логічних кроків міркувань.

1. Через вершину M трикутника MHP провели площину β паралельно прямій HP. Відрізки HH_1 і PP_1 – перпендикуляри до β, $HM = 17$ см, $PM = 10$ см, $HP = 9$ см. Знайдіть площу трикутника H_1MP_1, якщо відстань від прямої HP до площини β дорівнює $\sqrt{15}$ см.

2. У похилій трикутній призмі провели площину, яка перетинає три її бічних ребра і паралельна основам призми. Доведіть, що центроїди основ і перерізу містяться на одній прямій.

3. Дано дві паралельні площини α і β та множина трикутників, таких, що в кожному трикутнику одна сторона належать площині α, а середина іншої – β. Яку фігуру утворює множина вершин цих трикутників, що не належать α?

4. Дано дві паралельні площини α і β та множина трикутників, таких, що в кожному трикутнику дві вершини належать площині α, а третя – β. Яку фігуру утворює множина центроїдів цих трикутників?

5. У піраміді $DABC$ точки M і H – середини ребер AD і DC відповідно, $DA = DB = DC = AC = 2$ см, $AB = BC$, $\angle ABC = 90°$. Знайдіть:

1) площу бічної поверхні піраміди;
2) площу перерізу піраміди площиною BMH;
3) кут між площинами BMH і ABC;
4) розклад вектора $\overline{MK}$ за векторами $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, якщо K – середина відрізка BH;
5) (побудовою) лінію перетину площин MBH і ABC.

6. У правильній чотирикутній призмі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторони основи дорівнюють 1, а бічне ребро 4. На ребрах D_1D і B_1B дано відповідно точки M і N так, що $D_1M : MD = 1 : 1$, $B_1N : NB = 3 : 1$. Знайдіть: **1)** довжину MN; **2)** кути між $\overline{MN}$ і векторами $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{A_1A}$; **3)** площу перерізу призми площиною, яка проходить через MN, паралельно AC.

7*. Основа прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ – трикутник з прямим кутом A. Точки K і E – середини ребер A_1B_1 і AC відповідно, M – точка перетину діагоналей грані AA_1B_1B, точка P належить відрізку C_1C, до того ж $CP : PC_1 = 2 : 1$. Доведіть, що прямі KE і MP – мимобіжні.

8. Доведіть, якщо точка переміщується у площині основи правильної піраміди і притому залишається всередині цієї основи, то сума відстаней від цієї точки до бічних граней піраміди є величиною сталою.

9*. Усі грані паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – рівні ромби; кути між ребрами, що мають спільну вершину A, рівні. З'ясуйте, чи будуть перпендикулярними прямі A_1C і B_1D_1.

10*. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}=1$.

11*. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$.

12*. Сторона правильної шестикутної піраміди дорівнює a, площа бічної поверхні цієї піраміди S. Знайдіть кут між бічними гранями піраміди.

13. Основою піраміди є рівнобедрена трапеція із бічною стороною a і гострим кутом φ. Усі бічні грані утворюють з основою піраміди кут α. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

14. Бічне ребро правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює стороні меншої основи і дорівнює a. Кут між бічним ребром і стороною більшої основи α. Знайдіть площу діагонального перерізу даної піраміди.

15. У трикутній зрізаній піраміді через сторону верхньої основи провели площину, паралельну протилежному бічному ребру. В якому відношенні розділився об'єм зрізаної піраміди, якщо її сторони основ відносяться як 1 : 2?

16*. Вершини прямокутника лежать на колах основ циліндра, радіус якого 13 см, а твірна – 32 см. Знайдіть площу даного прямокутника, якщо довжини його сторін відносяться як 1 : 4.

17. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо площа осьового перерізу дорівнює 48 м^2, а кут розгортки бічної поверхні дорівнює $216°$.

18. Найбільша можлива площа перерізу конуса площиною, проведеною через його вершину, в 2 рази більша за площу основи. Знайдіть кут між твірною і площиною основи конуса.

19*. Два конуси мають спільну висоту – вершина одного є центром основи другого і навпаки. Знайдіть довжину кола, по якому перетинаються дані конуси, якщо радіуси їх основ дорівнюють 10 см і 15 см.

20. Площі основ зрізаного конуса a^2 і b^2. Його висоту поділено на 5 рівних частин. Через точки поділу проведено площини, паралельні основам зрізаного конуса. Знайдіть площі перерізів.

21*. У конус вписано циліндр так, що його верхня основа дотикається до бічної поверхні конуса, а нижня лежить у площині основи конуса. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо висота конуса дорівнює $10\sqrt{3}$ см, висота циліндра $4\sqrt{3}$ см, а твірна конуса нахилена до площини основи під кутом $60°$.

22*. У правильну чотирикутну піраміду вписано циліндр так, що його верхня основа дотикається до бічних граней піраміди, а нижня лежить у площині основи піраміди. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо сторона основи піраміди дорівнює 10 м, висота циліндра $4\sqrt{3}$ м, а кут нахилу бічних граней піраміди до площини основи $60°$.

23*. Доведіть, якщо сфера дотикається до всіх ребер трикутної піраміди, то суми мимобіжних ребер піраміди рівні між собою.

24*. Сфера дотикається до бічних граней піраміди в центрах описаних навколо цих граней кіл. Плоскі кути при вершині цієї піраміди рівні між собою. Доведіть, що ця піраміда правильна.

25*. Сфера дотикається до трьох ребер основи трикутної піраміди у їхніх серединах і перетинає бічні ребра також у їхніх серединах. Доведіть, що піраміда правильна.

26*. Куля радіуса R дотикається до всіх ребер правильної трикутної призми. Обчисліть площу бічної поверхні призми.

27*. Розв'яжіть попередню задачу для правильної шестикутної піраміди.

28*. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди α. Висота піраміди H є діаметром сфери. Знайдіть довжину лінії перетину піраміди і сфери.

29*. Розв'яжіть попередню задачу для правильної чотирикутної піраміди.

30*. Кожна з чотирьох куль радіуса R дотикається до трьох інших. Знайдіть радіус сфери, що дотикається до всіх чотирьох даних куль.

31*. У правильну трикутну зрізану піраміду вписано кулю. Крім того, існує куля, що дотикається до всіх ребер піраміди. Знайдіть сторони верхньої і нижньої основ піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює a.

32. Основа прямого паралелепіпеда – ромб з кутом $60°$. Через сторону основи і середину протилежного бічного ребра провели площину під кутом $45°$ до площини основи. Площа перерізу дорівнює $18\sqrt{6}$ см^2. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

33. Висота циліндра дорівнює H. Через твірну циліндра проведено дві площини, які перетинають циліндр. Кут між площинами дорівнює α, а площі утворених перерізів однакові і дорівнюють Q. Висота циліндра дорівнює H. Знайдіть об'єм циліндра.

34. Об'єм трикутної піраміди, що побудована на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$, дорівнює $\sqrt{15}$. Знайдіть довжину ребра OC, якщо $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$, $OB=OA=2$.

35. Основа похилої трикутної призми – правильний трикутник. Одна з вершин верхньої основи проектується в центр нижньої основи. Бічні ребра призми утворюють з площиною основи кут $45°$. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота дорівнює 4.

36*. У похилій трикутній призмі $DEFD_1E_1F_1$ $\angle E_1ED=\angle E_1EF<90°$, $EF=ED$, $DF=m$, $EE_1=l$. Кут між рівними бічними гранями дорівнює $90°$. Знайдіть об'єм призми.

37. Основа призми – правильний трикутник. Добуток ребер одного з тригранних кутів призми у $2\frac{2}{3}$ раза більший від об'єму призми. Знайдіть кут нахилу бічного ребра до площини основи.

38. Основа прямої призми – трапеція, периметр якої 58 см. Площі паралельних бічних граней 96 см^2 і 264 см^2, а двох інших – 156 см^2 і 180 см^2. Знайдіть об'єм призми.

39*. Площини AB_1C_1 і A_1BC поділяють правильну трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$ на чотири частини. Знайдіть відношення об'ємів цих частин.

40. Довжина кожного бічного ребра піраміди 65 см. Її основою є трапеція із довжинами сторін 14 см, 30 см, 50 см, 30 см. Знайдіть об'єм піраміди.

41. Площина проходить через середину висоти конуса паралельно його основі і поділяє його на частини, різниця об'ємів яких V. Знайдіть об'єм конуса.

42. У сферу вписано рівносторонній конус і рівносторонній циліндр. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо площа повної поверхні циліндра дорівнює S.

43. Навколо кулі описано рівносторонній конус і рівносторонній циліндр. Знайдіть об'єм циліндра, якщо об'єм конуса дорівнює Q.

44. Площина $7x + 4y + z - 30 = 0$ проходить через центр кулі, яка дотикається до всіх координатних площин. Знайдіть площу поверхні кулі.

45*. Висота правильного тетраедра 12 см. Точка, рівновіддалена від усіх вершин тетраедра, є центром сфери, радіус якої 4 см. Знайдіть площу тієї частини сфери, яка міститься всередині тетраедра.

46*. Рівносторонній конус і півкуля, радіус якої R, мають спільну основу і розміщені з одного боку від неї. Знайдіть площу поверхні тієї частини півкулі, яка міститься всередині конуса.

47*. Відношення об'єму конуса до об'єму вписаної кулі дорівнює 8 : 3. Знайдіть приблизно (з точністю до десятка у градусах) градусну міру кута при вершині осьового перерізу конуса.

48. Навколо кулі радіуса R описано зрізаний конус, об'єм якого в m разів більший від об'єму кулі. Знайдіть радіуси основ конуса.

49*. Відношення радіусів описаної та вписаної куль правильної трикутної піраміди дорівнює n. Знайдіть кут нахилу бічного ребра до площини основи піраміди.

50*. Радіуси вписаної та описаної куль правильної трикутної піраміди дорівнюють відповідно r і R см. Знайдіть:
1) об'єм піраміди; 2) площу повної поверхні піраміди.

Геометр створює методи розв'язування не лише тих питань, що виникають внаслідок сучасних потреб, а й для майбутніх, які виникнуть, можливо, завтра, можливо, – через тисячу років.

О.М. Крилов

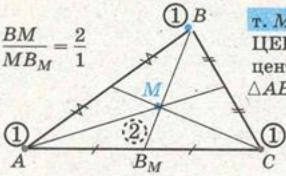
УЗАГАЛЬНЮЮЧІ ОПОРНІ СХЕМИ

ОК-1

Чудові точки трикутника

ТОЧКА ПЕРЕТИНУ МЕДІАН

$\frac{BM}{MB_M} = \frac{2}{1}$



т. M – ЦЕНТРОЇД – центр ваги $\triangle ABC$

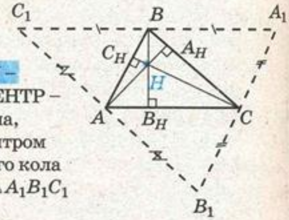
1 – *одиничні маси*

B_M – *центр ваги* $[AC]$

M – *центр ваги* $[BB_M]$

ТОЧКА ПЕРЕТИНУ ВИСОТ

т. H – ОРТОЦЕНТР – єдина, бо є центром описаного кола навколо $\triangle A_1B_1C_1$



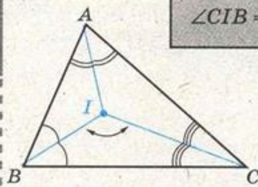
$$\left.\begin{array}{l} A_1C_1 \parallel AC \\ B_1C_1 \parallel BC \\ A_1B_1 \parallel AB \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} ABA_1C - \textit{паралелограм} \\ AC_1BC - \textit{паралелограм} \end{array} \Bigg| \Rightarrow BA_1 = AC = C_1B$$

BB_H – *серединний перпендикуляр до* $[C_1A_1]$

ТОЧКА ПЕРЕТИНУ СЕРЕДИННИХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРІВ – центр описаного кола

т. O – рівновіддалена від вершин $\triangle ABC$

$$\angle CIB = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$$



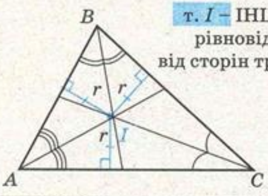
$\underline{\triangle CIB}$:

$$\angle CIB = 180^\circ - \frac{\angle C}{2} - \frac{\angle B}{2} = 180^\circ - \frac{\angle C + \angle B}{2} =$$

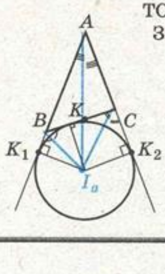
$$= 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}.$$ Щ. в. д.

ТОЧКА ПЕРЕТИНУ БІСЕКТРИС – центр вписаного кола

т. I – ІНЦЕНТР – рівновіддалена від сторін трикутника



ТОЧКА ПЕРЕТИНУ БІСЕКТРИСИ КУТА ТРИКУТНИКА З БІСЕКТРИСАМИ ЗОВНІШНІХ КУТІВ ТРИКУТНИКА



т. I_a – центр зовнівписаного кола

$$\left.\begin{array}{l} I_aC \equiv l_{KCK_2} \\ I_aB \equiv l_{KBK_1} \end{array}\right| \Rightarrow d(I_a; (AK_2)) = d(I_a; (AK_1))$$

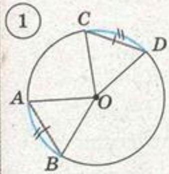
$$\Downarrow$$

$$I_aA \equiv l_A$$

т. I_a – *рівновіддалена від* $[BC]$, (AB) і (AC)

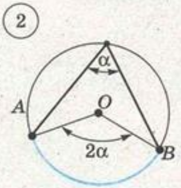
Опорні факти про коло

1



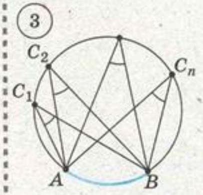
$$AB = CD \Updownarrow \smile AB = \smile CD$$

2



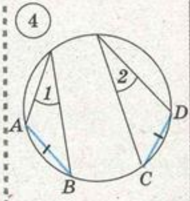
$$\alpha = \frac{1}{2}\smile AB$$

3



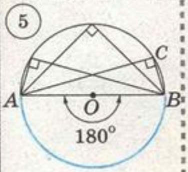
$$\angle AC_1B = \ldots = \angle AC_nB$$

4



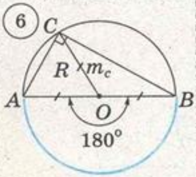
$$AB = CD \Leftrightarrow \angle 1 = \angle 2$$

5



$$AB = 2R \Updownarrow \angle ACB = 90^\circ$$

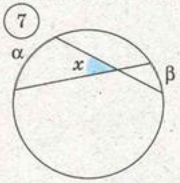
6



$$\angle C = 90^\circ$$

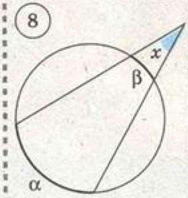
$$R = m_c = \frac{c}{2}$$

7



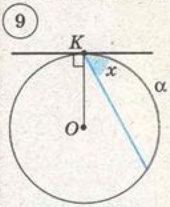
$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

8



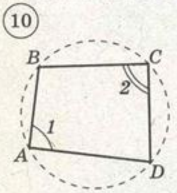
$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

9



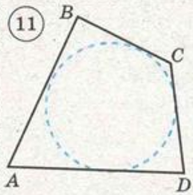
$$x = \frac{\alpha}{2}$$

10



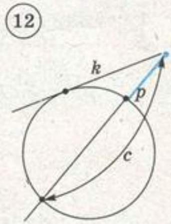
$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ \Updownarrow ABCD - \text{вписаний}$$

11



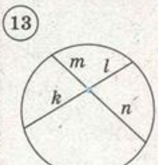
$$AD + BC = AB + CD \Updownarrow ABCD - \text{описаний}$$

12



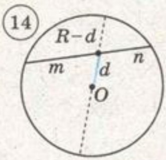
$$k^2 = p \cdot c$$

13



$$m \cdot n = k \cdot l$$

14

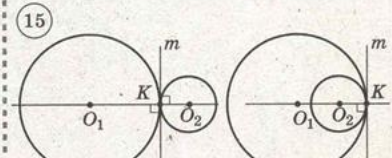


$$m \cdot n = (R + d)(R - d)$$

$$m \cdot n = R^2 - d^2$$

$$\boxed{d^2 = R^2 - m \cdot n}$$

15

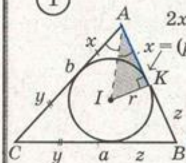


$$\left.\begin{array}{l} O_1K \perp m \\ O_2K \perp m \end{array}\right| \Rightarrow K \in (O_1O_2)$$

ОК-3

Опорні задачі кола

1



$2x+2y+2z=2p$

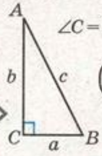
$x=(p-a)$

$x=p-(y+z)$

$\Rightarrow$

$r=(p-a)\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$

$p\overset{\triangle}{=}\dfrac{P}{2}$

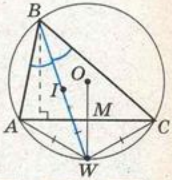


$\angle C=90^\circ\to \operatorname{tg}\dfrac{C}{2}=1$

$\dfrac{a+b-c}{2}=r$

$2r=a+b-c=a+b-2R$

$r+R=\dfrac{a+b}{2}$



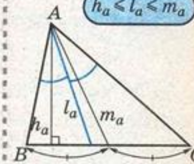
$AW=WI=WC$

$WM\perp AC$

$\Downarrow$

$O\in WM$

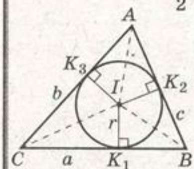
$h_a\leqslant l_a\leqslant m_a$



2

$S=S_1+S_2+S_3=$

$=\dfrac{1}{2}ra+\dfrac{1}{2}rb+\dfrac{1}{2}rc$



$r=\dfrac{S}{p}$

$p\overset{\triangle}{=}\dfrac{P}{2}$

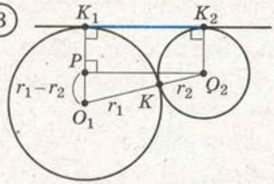
$\Rightarrow$

$r=\dfrac{S}{p}\qquad \dfrac{1}{r}=\dfrac{a+b+c}{2S}=$

$=\dfrac{a}{ah_a}+\dfrac{b}{bh_b}+\dfrac{c}{ch_c}$

$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}$

3

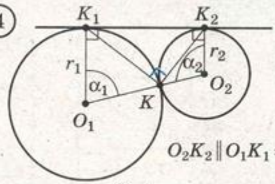


$O_2P\perp O_1K_1\Rightarrow K_1K_2=O_2P;$

$O_2P=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}$

$K_1K_2=2\cdot\sqrt{r_1\cdot r_2}$

4



$O_1K_1\perp K_1K_2$

$O_2K_2\perp K_1K_2$

$\Downarrow$

$O_2K_2\parallel O_1K_1\Rightarrow \alpha_1+\alpha_2=180^\circ$

$$\left.\begin{aligned}\angle KK_1K_2&=\frac{\alpha_1}{2}\\ \angle KK_2K_1&=\frac{\alpha_2}{2}\end{aligned}\right|\Rightarrow \angle K_1KK_2=180^\circ-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$$

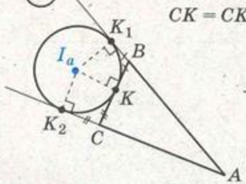
$\angle K_1KK_2=90^\circ$

Зовнівписане коло (до $\triangle ABC$)

5

$$\left.\begin{aligned}BK_1&=BK\\ CK&=CK_2\end{aligned}\right|\Rightarrow BC=$$

$=K_1B+K_2C$



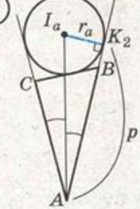
$AK_1=AB+BK_1$

$+\ \parallel$

$AK_2=AC+CK_2$

$AK_1=AK_2=p$

6



$r_a=p\cdot\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$

$r=\dfrac{S}{p}=(p-a)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$

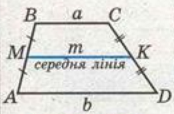
(див. № 1)

$\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}=\dfrac{S}{p\cdot(p-a)}$

$r_a=\dfrac{S}{p-a}$

Опорні факти про трапецію

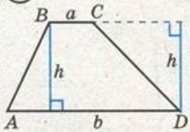
1



$m \parallel a \parallel b$

$m = \dfrac{a+b}{2}$

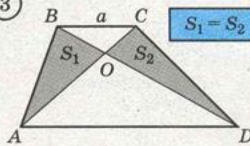
2



$ABCD$ – *трапеція*

$S = h \cdot \dfrac{a+b}{2}$

3

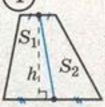


$S_1 = S_2$

$S_1 = S_{ABC} - S_{BOC} = S_{BCD} - S_{BOC}$

рівні

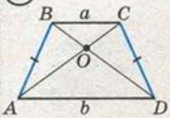
4



$S_1 = S_2$

(*бо* h – *спільна*)

5



$AB = CD$

$\Downarrow \Uparrow$

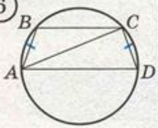
$\angle A = \angle D$

$\angle B = \angle C$

$AC = BD$,
$BO = OC$, $AO = OD$

$\angle A + \angle C = 180^\circ$
$\angle B + \angle D = 180^\circ$

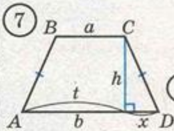
6



$AB = CD$

$R_{ABCD} = R_{ACD}$

7

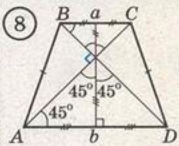


$AB = CD$

$\Downarrow$

$t = \dfrac{a+b}{2} = m$ сер. л.	$x = \dfrac{b-a}{2}$	$S = th$

8



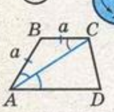
$AB = CD$, $AC \perp BD$

$\Downarrow$

$h = \dfrac{a+b}{2} = m$ сер. л.

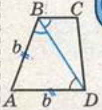
$S = h^2 = m^2$

9



$AC \equiv l_A$

$AB = a$



$BD \equiv l_B$

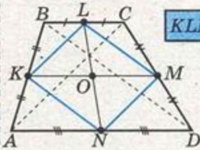
$AB = b$

10

Якщо K, L, M, N – *середини сторін*

$\Downarrow$

$KLMN$ – *паралелограм*

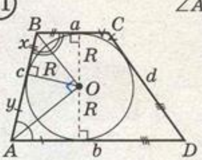


(*бо* $LM \parallel BD \parallel KN$, $KL \parallel AC \parallel NM$)

$KO = OM$; $OL = ON$

якщо $AB = CD \Rightarrow AC = BD$ *і* $KLMN$ – *ромб*

11



$\angle AOB = 180^\circ - \dfrac{\angle A}{2} - \dfrac{\angle B}{2} =$

$= 180^\circ - \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$\triangle AOB$: $R^2 = x \cdot y$

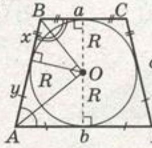
$\angle AOB = 90^\circ$

$R = \sqrt{xy}$

$a + b = d + c$

$h = 2R$

12



$AB = CD$

$\Downarrow$

$x = \dfrac{a}{2}$

$y = \dfrac{b}{2}$

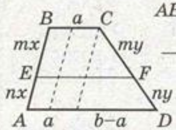
$R = \dfrac{\sqrt{ab}}{2}$

$h = \sqrt{ab}$

ОК-5

Опорні задачі трапеції

①

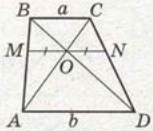


$ABCD$ – трапеція

$EF \parallel AD$

$\Downarrow$

②



$ABCD$ – трапеція

$MN \parallel AD$

$\Downarrow$

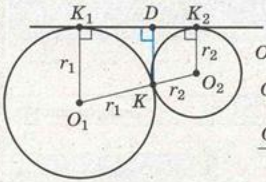
$\boxed{MO = ON}$

$$\boxed{EF = \frac{an + bm}{m + n}} \Rightarrow \boxed{MN = \frac{2ab}{a + b}} \Leftarrow \boxed{\frac{BM}{MA} = \frac{CN}{ND} = \frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OA} = \frac{a}{b}}$$

$\Downarrow$

③

$$\boxed{d(K;\, K_1K_2) = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}}$$



$KD \parallel O_1K_1 \parallel O_2K_2$ і

$O_1K_1K_2O_2$ – трапеція;

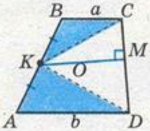
$O_1K_1 = r_1,\ O_2K_2 = r_2$;

$O_1K = r_1 \quad KO_2 = r_2$

$\Downarrow$

$$d(K;\, K_1K_2) = KD = \frac{r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_1}{r_1 + r_2} = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$$

④



$ABCD$ – трапеція

$AK = KB$

$KM \perp CD$

$\Downarrow$

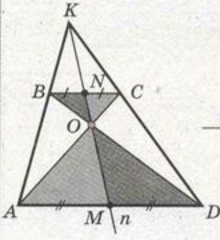
$\boxed{S = KM \cdot CD}$

$$\underbrace{S_{KBC} + S_{AKD}}_{\frac{1}{2}S} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2}b \cdot \frac{h}{2}$$

$$\frac{1}{2}S \Rightarrow S_{KCD} = \frac{1}{2}S \text{ і } S = 2S_{KCD}$$

⑤

$ABCD$ – трапеція



$BN = NC$

$AM = MD$

$\Downarrow$

$\boxed{\{K;\, N;\, O;\, M\} \in n}$

⑥

$ABCD$ – описана трапеція

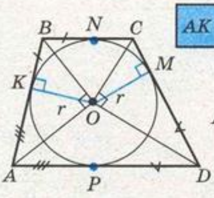
$\Downarrow$

$\boxed{AK \cdot KB = CM \cdot MD}$

$\Downarrow$

$AP \cdot BN = NC \cdot PD$

$$\boxed{\frac{BN}{NC} = \frac{PD}{AP}}$$

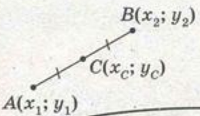


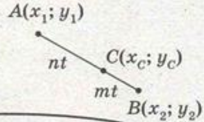
1) $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$; $OK \perp AB$, $OM \perp CD$

2) $\triangle AOB$ і $\triangle COD$: $KB \cdot AK = r^2 = CM \cdot MD$

ОК-6

Прямі й відрізки на координатній площині





$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Необхідна і достатня умова $C(x; y) \in (AB)$

$$\frac{y_C - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_A}$$

$$\frac{AC}{CB} = 1 \Rightarrow x_C = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y_C = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad \frac{AC}{CB} = \frac{n}{m} \Rightarrow C\left(\frac{nx_2 + mx_1}{n+m};\ \frac{ny_2 + my_1}{n+m}\right)$$

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ (n): $ax + by + c = 0$

Пам'ятаємо:
- тільки за умови $b \neq 0$ можна записати як $y = kx + l$ ($n \nparallel Oy$);
- при $b = 0$, $n \parallel Oy$, рівняння $x = \text{const}$;
- при $a = 0$, $n \parallel Ox$, рівняння $y = \text{const}$;
- при $c = 0$ рівняння $y = kx$

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ (n), ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДВІ ЗАДАНІ ТОЧКИ $A(x_1; y_1)$ І $B(x_2; y_2)$

Випадок 1

$x_1 = x_2 \triangleq c$

$\Downarrow$

$AB \parallel Oy$

(n): $x = c$

Випадок 2

$x_1 \neq x_2$

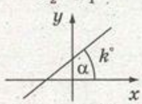
$\Downarrow$

$AB \nparallel Oy$

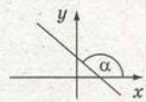
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$y = kx + l$

$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ кутовий коефіцієнт



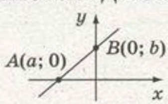
$k = \operatorname{tg}\alpha > 0$



$k = \operatorname{tg}\alpha < 0$

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ВІДРІЗКАХ

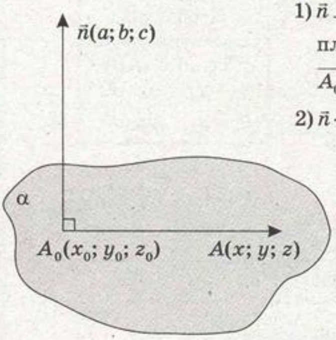
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



ДВІ ПРЯМІ НА ПЛОЩИНІ

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$			$y = k_1x + c_1$ і $y = k_2x + c_2$		
збігаються, якщо	**паралельні,** якщо	**перетинаються,** якщо	**перетинаються,** якщо	**паралельні,** якщо	**перпендикулярні,** якщо
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2$ $c_1 \neq c_2$	$k_1 = -\frac{1}{k_2}$

Рівняння площини і нормалі до неї



1) $\vec{n} \perp \alpha \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{A_0A}$, де $A(x; y; z)$ – довільна точка площини α: $A_0(x_0; y_0; z_0) \in \alpha$, $\vec{n} \perp \alpha$.
$\overrightarrow{A_0A} = (\overrightarrow{x - x_0; y - y_0; z - z_0})$.

2) $\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_0A} = 0$, тоді $-ax_0 - by_0 - cz_0 \triangleq d$, тобто

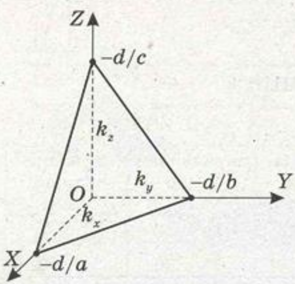
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

– рівняння площини, що проходить через $(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $(\overrightarrow{a; b; c})$

Рівняння площини:
$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$$
α

Вектор, перпендикулярний до площини $ax + by + cz = 0$:
$$\vec{n} = (\overrightarrow{a; b; c})$$

$d = 0$	т. $O(0; 0; 0) \in \alpha$	$a = 0$	$\vec{n} = (0; b; c) \Rightarrow \vec{n} \perp OX, \alpha \parallel (OX)$
$b = 0$	$\alpha \parallel (OY)$	$c = 0$	$\alpha \parallel (OZ)$
$a = d = 0$	$\alpha \supset (OX)$	$a = b = 0$	$\alpha \supset (XOY)$
$b = d = 0$	$\alpha \supset (OY)$	$a = c = 0$	$\alpha \supset (XOZ)$
$c = d = 0$	$\alpha \supset (OZ)$	$b = c = 0$	$\alpha \supset (YOZ)$



Якщо $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$, рівняння площини $ax + by + cz + d = 0$ можна представити у вигляді:

$$\frac{x}{-d/a} + \frac{y}{-d/b} + \frac{z}{-d/c} - 1 = 0$$

Рівняння площини у відрізках $\dfrac{x}{k_x} + \dfrac{y}{k_y} + \dfrac{z}{k_z} = 1$

ОК-8

Дещо про площини

ВИЗНАЧЕННЯ КУТА МІЖ ПЛОЩИНАМИ МЕТОДОМ КООРДИНАТ

$$\cos(\alpha_1 \hat{} \alpha_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|};$$

$$\boxed{\cos(\alpha_1 \hat{} \alpha_2) = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}}$$

УМОВИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ І ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ ДВОХ ПЛОЩИН

Умова $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ $\Longleftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$,

тобто

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \triangleq \lambda}$$

Умова $\alpha_1 \perp \alpha_2$ $\Longleftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$,

тобто

$$\boxed{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0}$$

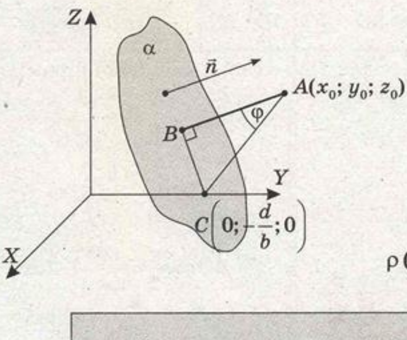
ЯКЩО

$$a_1 = a_2,\ b_1 = b_2,\ c_1 = c_2 \text{ і } d_1 \neq d_2, \text{ то}$$

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \text{ і } a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

паралельні

ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПЛОЩИНИ



$$\vec{n} = \overrightarrow{(a; b; c)} \perp \alpha;$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{\left(x_0; \frac{d}{b} + y_0; z_0\right)};$$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{CA}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{CA}|};$$

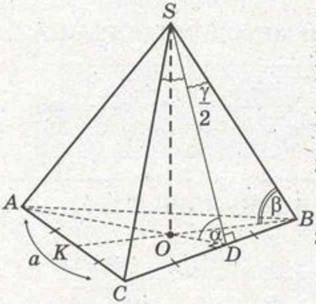
$$\rho(A; \alpha) = |AB| = |CA| \cos\varphi;$$

$$\rho(A; \alpha) = |CA| \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{CA}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{CA}|} = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{CA}|}{|\vec{n}|}.$$

$$\boxed{\rho\left((x_0; y_0; z_0);\ (ax + by + cz + d = 0)\right) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

ОК-9

Перехід між кутами правильної трикутної піраміди



$AB = AC = CB \triangleq a$; $(SCB)\,\hat{}\,(ABC) \triangleq \alpha$;
$SB\,\hat{}\,(ABC) \triangleq \beta$; $\angle CSB \triangleq \gamma$.

Побудова: $SO \perp (ABC)$; $SD \perp CB$.

1) $\angle CSD = \angle DSB = \dfrac{\gamma}{2}$ (бо $SC = SB$; $SD \perp CB$).

2) $\left.\begin{array}{l} SO \perp (ABC) \\ OB = \text{Пр}_{(ABC)}\, SB \end{array}\right| \Rightarrow SB\,\hat{}\,(ABC) = \angle SBO = \beta.$

3) $\left.\begin{array}{l} SO \perp (ABC) \\ SD \perp CB \\ OD = \text{Пр}_{(ABC)}\, SD \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} OD \perp SB \text{ (за ТПП)}, \\ (SCB)\,\hat{}\,(ABC) = \angle SDO = \alpha. \end{array}$

АЛГОРИТМ ПОШУКУ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ДВОМА КУТАМИ

1) Знайти два прямокутні трикутники, що містять ці кути і мають спільну сторону. <u>Спочатку</u> двічі записати цю сторону; <u>потім</u> попереду поставити знак «$\triangle$», а позаду літеру, що визначить відповідний кут у трикутнику.

<u>спочатку</u>:

$\alpha \leftrightarrow \beta$

$SO \qquad SO$

<u>потім</u>:

$\alpha \Leftrightarrow \beta$

$\triangle SOD \qquad \triangle SOB$

2) Записати всі три пари з літер, що позначають трикутники (це сторони трикутника). Виділити спільну сторону та сторону, що належить основі. Зайве закреслити.

$\alpha \leftrightarrow \beta$

$\triangle SOD \qquad \triangle SOB$

$\underline{SO}$; $\underline{\underline{OD}}$; $\cancel{SD}$ $\qquad$ $\underline{SO}$; $\underline{\underline{OB}}$; $\cancel{SB}$

3) Спільну сторону за допомогою тригонометричної функції кута визначити через неспільну сторону (виходячи з відповідного трикутника); останню записати через довжину сторони основи.

$SO = OD\,\text{tg}\,\alpha = OB\,\text{tg}\,\beta$

$OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\,\text{tg}\,\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\,\text{tg}\,\beta$

$\boxed{\text{tg}\,\alpha = 2\,\text{tg}\,\beta}$

Відповідно наведеному алгоритму для трикутної правильної піраміди маємо:

$\dfrac{\gamma}{2} \leftrightarrow \beta$

$\triangle SBD \qquad \triangle SBO$

$\underline{SB}$; $\underline{\underline{BD}}$; $\cancel{SD}$ $\qquad$ $\underline{SB}$; $\underline{\underline{OB}}$; $\cancel{SO}$

$SB = \dfrac{BD}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{OB}{\cos\beta}$; $\quad BD = \dfrac{a}{2}$, $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $\quad \dfrac{a}{2\sin\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3\cos\beta}$

$\boxed{3\cos\beta = 2\sqrt{3}\sin\frac{\gamma}{2}}$

$\dfrac{\gamma}{2} \leftrightarrow \alpha$

$\triangle SDB \qquad \triangle SDO$

$\underline{SD}$; $\underline{\underline{DB}}$; $\cancel{SB}$ $\qquad$ $\underline{SD}$; $\underline{\underline{OD}}$; $\cancel{SO}$

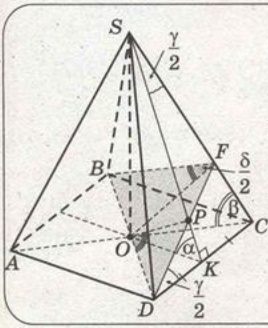
$SD = BD\,\text{ctg}\,\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{OD}{\cos\alpha}$; $\quad DB = \dfrac{a}{2}$;

$OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \qquad \dfrac{a}{2}\,\text{ctg}\,\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}$

$\boxed{\text{ctg}\,\frac{\gamma}{2}\cos\alpha = \sqrt{3}}$

ОК-10

Перехід між кутами правильної чотирикутної піраміди



$SO \perp (ABC)$; $(BFD) \perp SC$; $SK \perp DC$.

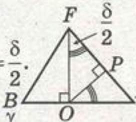
$SC\,\hat{}\,(ABC) = \angle SCO \triangleq \beta$; $(SDC)\,\hat{}\,(ABC) = \angle SKO \triangleq \alpha$;

$(SBC)\,\hat{}\,(SDC) = \angle BFD \triangleq \delta$; $\angle DSC \triangleq \gamma$.

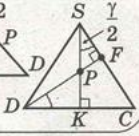
1) $\left.\begin{array}{l}(BFD) \perp (SDC) \\ (SOK) \perp (SDC)\end{array}\right| \Rightarrow \quad (BFD) \cap (SOK) = OP \perp (SDC)$

Тоді $OP \perp SK$; $OP \perp DF$.

2) $\triangle BFD$: $\angle POD = \angle OFD = \dfrac{\delta}{2}$.



3) $\triangle DSC$: $\angle FDC = \angle KSC = \dfrac{\gamma}{2}$.



Перехід між кутами виконуємо за алгоритмом (ОК-9):

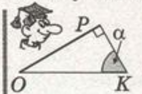
$\alpha \leftrightarrow \beta$

$\triangle SOK$ $\quad$ $\triangle SOC$

SO; OK; $\cancel{SK}$ $\quad$ SO; OC; $\cancel{SC}$

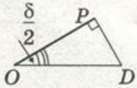
$SO = OK\operatorname{tg}\alpha = OC\operatorname{tg}\beta$; $OK = \dfrac{a}{2}$;

$OC = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}\operatorname{tg}\beta}$



$\alpha \leftrightarrow \dfrac{\delta}{2}$

$\triangle OPK$ $\quad$ $\triangle OPD$



OP; OK; $\cancel{PK}$ $\quad$ OP; OD; $\cancel{PD}$

$OP = OK\sin\alpha = OD\cos\dfrac{\delta}{2}$; $OK = \dfrac{a}{2}$; $OD = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{\sin\alpha = \sqrt{2}\cos\dfrac{\delta}{2}}$

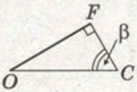
$\alpha \leftrightarrow \dfrac{\gamma}{2}$

$\triangle SKO$ $\quad$ $\triangle SKC$

SK; OK; $\cancel{SO}$ $\quad$ SK; KC; $\cancel{SC}$

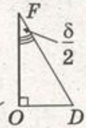
$SK = \dfrac{OK}{\cos\alpha} = KC\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$; $OK = \dfrac{a}{2}$;

$KC = \dfrac{a}{2}$ $\quad$ $\boxed{\cos\alpha = \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}}$



$\beta \leftrightarrow \dfrac{\delta}{2}$

$\triangle OFC$ $\quad$ $\triangle OFD$



OF; OC; $\cancel{FC}$ $\quad$ OF; OD; $\cancel{FD}$

$OF = OC = \sin\beta = OD\operatorname{ctg}\dfrac{\delta}{2}$; $OD = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $OC = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{\sin\beta = \operatorname{ctg}\dfrac{\delta}{2}}$

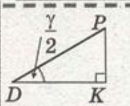
$\beta \leftrightarrow \dfrac{\gamma}{2}$

$\triangle SCO$ $\quad$ $\triangle SCK$

SC; CO; $\cancel{SO}$ $\quad$ SC; CK; $\cancel{SK}$

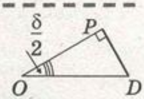
$SK = \dfrac{CO}{\cos\beta} = \dfrac{CK}{\sin\dfrac{\gamma}{2}}$; $OC = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$CK = \dfrac{a}{2}$ $\quad$ $\boxed{\cos\beta = \sqrt{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}}$



$\dfrac{\gamma}{2} \leftrightarrow \dfrac{\delta}{2}$

$\triangle PDK$ $\quad$ $\triangle PDO$



PD; DK; $\cancel{KP}$ $\quad$ PD; OD; $\cancel{OP}$

$PD = \dfrac{DK}{\sin\dfrac{\gamma}{2}} = OD\sin\dfrac{\delta}{2}$; $DK = \dfrac{a}{2}$; $OD = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{\cos\dfrac{\gamma}{2}\sin\dfrac{\delta}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

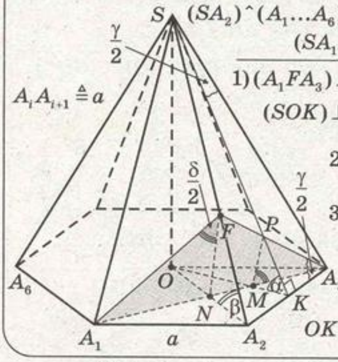
ОК-11

Перехід між кутами правильної шестикутної піраміди

$SO\perp(A_1\dots A_6)$; $(A_1FA_3)\perp SA_2$; $SK\perp A_2A_3$;

$(SA_2)\hat{\ }(A_1\dots A_6)=\angle SA_2O\triangleq\beta$; $(SA_2A_3)\hat{\ }(A_1\dots A_6)=\angle SKO\triangleq\alpha$;

$(SA_1A_2)\hat{\ }(SA_2A_3)=\angle A_1FA_3\triangleq\delta$; $\angle A_iSA_{i+1}\triangleq\gamma$.



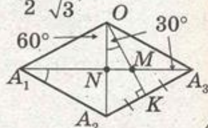
1) $(A_1FA_3)\perp(SA_2A_3)$, $(SOK)\perp(SA_2A_3)$ $\Rightarrow$ $(A_1FA_3)\cap(SOK)=(MP)\perp(SA_2A_3)$ і $MP\perp SK$; $MP\perp A_3F$.

2) $\underline{\underline{\triangle A_1FA_3}}$: $\angle PMA_3=\angle A_3FN=\dfrac{\delta}{2}$.

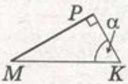
3) $\underline{\underline{A_1\dots A_6 \text{ і } \triangle MKA_3}}$: $MK=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt3}$;

$NA_2=\dfrac{a}{2}$;

$OK=A_1N=\dfrac{a\sqrt3}{2}$; $OA_2=a$.



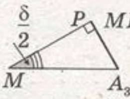
Перехід між кутами виконуємо за алгоритмом (ОК-9):



$\alpha\leftrightarrow\dfrac{\delta}{2}$

$\triangle MPK$ $\quad$ $\triangle MPA_3$

$\underline{MP}$; $\underline{\underline{KM}}$; $\cancel{PK}$ $\quad$ $\underline{MP}$; $\underline{\underline{A_3M}}$; $\cancel{PA_3}$



$MP=KM\sin\alpha=A_3M\cos\dfrac{\delta}{2}$; $MK=\dfrac{a}{2\sqrt3}$;

$A_3M=\dfrac{a}{\sqrt3}$; $\boxed{\sin\alpha=\sqrt2\cos\dfrac{\delta}{2}}$

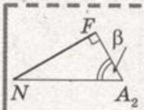
$\alpha\leftrightarrow\beta$

$\triangle SOK$ $\quad$ $\triangle SOA_2$

$\underline{SO}$; $\underline{\underline{OK}}$; $\cancel{SK}$ $\quad$ $\underline{SO}$; $\underline{\underline{OA_2}}$; $\cancel{SA_2}$

$SO=OK\,\mathrm{tg}\,\alpha=OA_2\,\mathrm{tg}\,\beta$; $OK=a\dfrac{\sqrt3}{2}$;

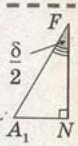
$OA_2=a$; $\boxed{\mathrm{tg}\,\beta=\dfrac{\sqrt3}{2}\mathrm{tg}\,\alpha}$



$\beta\leftrightarrow\dfrac{\delta}{2}$

$\triangle FNA_2$ $\quad$ $\triangle FNA_1$

$\underline{FN}$; $\underline{\underline{NA_2}}$; $\cancel{FA_2}$ $\quad$ $\underline{FN}$; $\underline{\underline{NA_1}}$; $\cancel{FA_1}$



$FN=NA_2\sin\beta=NA_1\,\mathrm{ctg}\dfrac{\delta}{2}$; $NA_2=\dfrac{a}{2}$;

$\boxed{\sin\beta=\sqrt3\,\mathrm{ctg}\dfrac{\delta}{2}}$ $\quad$ $NA_1=a\dfrac{\sqrt3}{2}$;

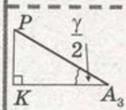
$\alpha\leftrightarrow\dfrac{\gamma}{2}$

$\triangle SKO$ $\quad$ $\triangle SKA_3$

$\underline{SK}$; $\underline{\underline{OK}}$; $\cancel{SO}$ $\quad$ $\underline{SK}$; $\underline{\underline{KA_3}}$; $\cancel{SA_3}$

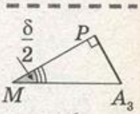
$SK=\dfrac{OK}{\cos\alpha}=KA_3\,\mathrm{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$; $OK=a\dfrac{\sqrt3}{2}$;

$KA_2=\dfrac{a}{2}$; $\boxed{\cos\alpha=\sqrt3\,\mathrm{tg}\dfrac{\gamma}{2}}$



$\dfrac{\gamma}{2}\leftrightarrow\dfrac{\delta}{2}$

$\triangle PA_3K$ $\quad$ $\triangle PA_3M$



$\underline{PA_3}$; $\underline{\underline{A_3K}}$; $\cancel{KP}$ $\quad$ $\underline{PA_3}$; $\underline{\underline{A_3M}}$; $\cancel{MP}$

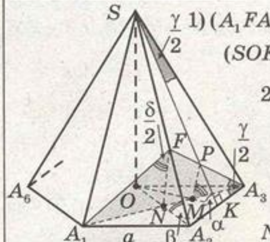
$PA_3=\dfrac{A_3K}{\cos\dfrac{\gamma}{2}}=A_3M\sin\dfrac{\delta}{2}$; $A_3K=\dfrac{a}{2}$; $A_3M=\dfrac{a}{\sqrt3}$

$\boxed{\cos\dfrac{\gamma}{2}\sin\dfrac{\delta}{2}=\dfrac{\sqrt3}{2}}$

ОК-12

Перехід між кутами правильної n-кутної піраміди

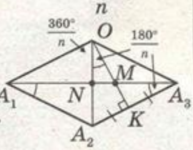
$SO \perp (A_1 \ldots A_6)$; $(A_1FA_2) \perp SA_2$; $SK \perp A_2A_3$; $(SA_2)\hat{\ }(A_1 \ldots A_6) = \angle SA_2O \triangleq \beta$;
$(SA_2A_3)\hat{\ }(A_1 \ldots A_6) = \angle SKO \triangleq \alpha$; $(SA_1A_2)\hat{\ }(SA_2A_3) = \angle A_1FA_3 \triangleq \delta$; $\angle A_1FA_3 \triangleq \gamma$.



1) $\left.\begin{matrix}(A_1FA_3) \perp (SA_2A_3) \\ (SOK) \perp (SA_2A_3)\end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix}((A_1FA_2) \cap (SOK)) = (MP) \perp (SA_2A_3) \\ \text{і } MP \perp SK;\ MP \perp A_3F.\end{matrix}$

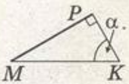
2) $\underline{\triangle A_1FA_3}: \angle PMA_3 = \angle A_1FN = \delta/2$;
$\underline{\triangle A_2SA_3}: \angle KSA_3 = \angle FA_3A_2 = \gamma/2$.

3) $\underline{A_1 \ldots A_6}$, $OK = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}$; $A_1N = a\cos\dfrac{180^\circ}{n}$;
$NA_2 = a\sin\dfrac{180^\circ}{n}$; $OA_2 = \dfrac{a}{2\alpha\dfrac{180^\circ}{n}}$.



4) $\triangle MKA_3: MK = \dfrac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$; $MA_3 = \dfrac{a}{2\cos\dfrac{180^\circ}{n}}$.

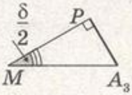
Перехід між кутами виконуємо за алгоритмом (ОК-9):



$\alpha \leftrightarrow \dfrac{\delta}{2}$

$\triangle MPK$ $\quad \triangle MPA_3$

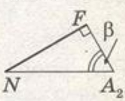
$\underline{MP}$; $\underline{\underline{KM}}$; $\cancel{PK}$ $\quad \underline{MP}$; $\underline{\underline{A_3M}}$; $\cancel{PA_3}$



$MP = KM\sin\alpha = MA_3\cos\dfrac{\delta}{2}$;

$MK = \dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$; $A_3M = \dfrac{a}{2\cos\dfrac{180^\circ}{n}}$;

$$\boxed{\cos\frac{\delta}{2} = \sin\frac{180^\circ}{n}\sin\alpha}$$



$\beta \leftrightarrow \dfrac{\delta}{2}$

$\triangle FNA_2$ $\quad \triangle FNA_1$

$\underline{MP}$; $\underline{\underline{KM}}$; $\cancel{PK}$ $\quad \underline{MP}$; $\underline{\underline{A_3M}}$; $\cancel{PA_3}$

$FN = NA_2\sin\beta = NA_1\operatorname{ctg}\dfrac{\delta}{2}$;

$NA_2 = a\sin\dfrac{180^\circ}{n}$; $NA_1 = a\cos\dfrac{180^\circ}{n}$;

$$\boxed{\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} = \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}\sin\beta}$$

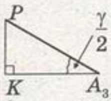
$\beta \leftrightarrow \dfrac{\gamma}{2}$

$\triangle SA_2O$ $\quad \triangle SA_2K$

$\underline{SA_2}$; $\underline{\underline{OA_2}}$; $\cancel{SO}$ $\quad \underline{SA_2}$; $\underline{\underline{A_2K}}$; $\cancel{SK}$

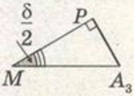
$SA_2 = \dfrac{A_2O}{\cos\beta} = \dfrac{A_2K}{\sin\dfrac{\gamma}{2}}$; $OA_2 = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$;

$A_2K = \dfrac{a}{2}$ $\quad \boxed{\sin\dfrac{\gamma}{2} = \sin\dfrac{180^\circ}{n}\cos\beta}$



$\dfrac{\gamma}{2} \leftrightarrow \dfrac{\delta}{2}$

$\triangle PA_3K$ $\quad \triangle PA_3M$



$\underline{PA_3}$; $\underline{\underline{A_3K}}$; $\cancel{PK}$ $\quad \underline{PA_3}$; $\underline{\underline{A_3M}}$; $\cancel{PM}$

$PA_3 = \dfrac{A_3K}{\cos\dfrac{\gamma}{2}} = A_3M\sin\dfrac{\delta}{2}$; $A_3M = \dfrac{a}{2\cos\dfrac{180^\circ}{n}}$

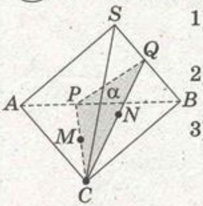
$A_3K = \dfrac{a}{2}$; $\quad \boxed{\sin\dfrac{\delta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2} = \cos\dfrac{180^\circ}{n}}$

Побудова перерізів багатогранників

I. **Якщо дві площини мають дві спільні точки, то пряма, проведена через ці точки, є лінією перетину цих площин.**

Наприклад, побудуємо переріз тетраедра $SABC$ площиною α, що проходить через:

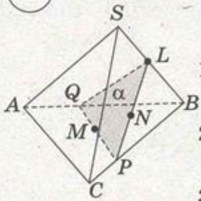
1 $M \in (ABC)$; $N \in (CSB)$; C.



Побудова.
1) У (CSB): $(CN) \cap (SB) \triangleq Q$.
2) У (ABC): $(CM) \cap (AB) \triangleq P$.
3) $\{P; Q\} \subset (ASB)$
$\{P; Q\} \subset \alpha$
$\Downarrow$
$(PQ) = \alpha \cap (ASB)$.

$\triangle PQC$ **– шуканий переріз.**

2 $M \in (ABC)$; $N \in (CSB)$; $L \in [SB]$.



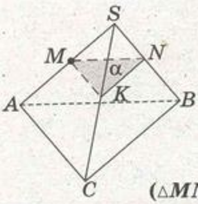
Побудова.
1) У (CSB): $(LN) \cap (CB) \triangleq P$.
2) У (ABC): $(PM) \cap (AB) \triangleq Q$.
3) $\alpha \cap (ASB) = (LQ)$.

$\triangle PQL$ **– шуканий переріз.**

II. **Лінії перетину двох паралельних площин третьою – паралельні між собою.**

Наприклад, побудуємо переріз площиною α, що проходить через:

3 $M \in (AS)$; $\alpha \parallel (ABC)$; $SABC$ *– тетраедр.*

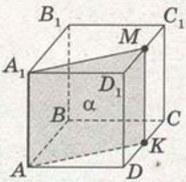


Побудова.
1) $MK \parallel AC$.
2) $MN \parallel AB$.

$\triangle MNK$ **– шуканий переріз.**
($\triangle MNK \sim \triangle ABC$)

4 $M \in [D_1C_1]$; (AA_1); $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *– куб.*

Аналіз. $(AA_1B_1B) \parallel (DD_1C_1C)$, тоді $\alpha \cap (DD_1C_1C) \parallel (AA_1) \parallel (DD_1)$.

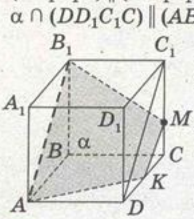


Побудова.
$MK \parallel DD_1$.

AA_1MK **– шуканий переріз (прямокутник).**

5 $[AB_1]$; $M \in [CC_1]$; $ABCDA_1B_1C_1D_1$ **– куб.**

Аналіз. $(AA_1B_1B) \parallel (DD_1C_1C)$, тоді $\alpha \cap (DD_1C_1C) \parallel (AB_1) \parallel (DC_1)$.

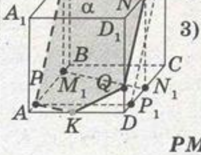


Побудова.
$MK \parallel DC_1$.

AB_1MK **– шуканий переріз (трапеція).**

6 $M \in [A_1B_1]$; $K \in [AD]$; $N \in [D_1C_1]$; $ABCDA_1B_1C_1D_1$ **– куб.**

Побудова. 1) $\left.\begin{matrix} MM_1 \parallel BB_1 \\ NN_1 \parallel DD_1 \end{matrix}\right| \Rightarrow M_1N_1 \parallel MN$;



2) $PK \parallel M_1N_1$ (тоді $PK \parallel MN$);
3) $\left.\begin{matrix} PP_1 \parallel AD \\ MM_2 \parallel B_1C_1 \end{matrix}\right| \Rightarrow P_1M_2 \parallel PM$;
4) $NQ \parallel P_1M_2$ (тоді $NQ \parallel PM$).

$PMNQK$ **– шуканий переріз.**

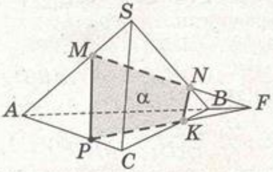
ОК-14

Побудова перерізів багатогранників

III. Спільна точка трьох площин (вершина тригранного кута) є спільною точкою ліній їх попарного перетину (ребер тригранного кута)

(7) Наприклад, побудуємо переріз площиною α, що проходить через: $M \in [AS]$; $N \in [SB]$; $K \in [CB]$; $SABC$ – тетраедр.

Аналіз. Площини α, (ASB) і (ABC) при попарному перетині утворюють тригранний кут. Його вершиною є точка $(AB) \cap (MN) \triangleq F$.



Тоді $((\alpha \cap (ABC)) \cap (AB)) = F$.

$$\left.\begin{matrix}\{P; K\} \subset \alpha \\ \{P; K\} \subset (ABC)\end{matrix}\right| \Rightarrow (\alpha \cap (ABC)) = (FK).$$

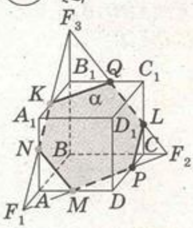
Побудова.

1) $(MN \cap AB) \triangleq F$.

2) $(FK) \cap (AC) \triangleq P$. **$PMNK$ – шуканий переріз.**

---

(8)  $M \in [AD]$; $N \in [AA_1]$; $K \in [A_1B_1]$; $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.



Побудова.

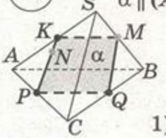
1) $(NK) \cap (AB) \triangleq F_1$ – вершина тригранного кута, грані якого належать площинам (AA_1B), (ABC) і α.
2) $(F_1M) \cap (DC) \triangleq P$.
3) $(F_1M) \cap (BC) \triangleq F_2$ – спільна точка площини α; (ABC); (BB_1C).
4) $(NK) \cap (BB_1) \triangleq F_3$ – спільна точка площини α; (ABB_1); (BB_1C).
5) $(F_3F_2) \cap (CC_1) \triangleq L$; $(F_3F_2) \cap (B_1C_1) \triangleq Q$.

$MNKQLP$ – шуканий переріз.

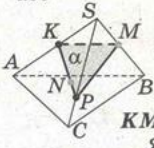
IV. Якщо площина проходить через пряму, паралельну другій площині, і перетинає цю площину, то лінія перетину паралельна даній прямій.

Наприклад, побудуємо переріз площиною α, що проходить через:

(9) $M \in [SB]$; $N \in (ASC)$; $\alpha \parallel (AB)$; $SABC$ – тетраедр.



або



Аналіз.

$(\alpha \cap (ASB)) \parallel (AB)$;

$(\alpha \cap (ABC)) \parallel (AB)$.

Побудова.

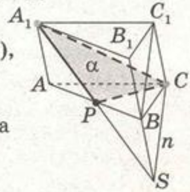
1) У (ASB): $(KM) \parallel (AB)$;
$(KN) \cap (AC) \triangleq P$;
(або $(KN) \cap (SC) \triangleq P$).
2) Якщо $(KN) \cap (AC)$, то $(PQ) \parallel (AB)$ і **$KMQP$ – шуканий переріз.**

Якщо $(KN) \cap (SC)$, то **KMP – шуканий переріз.**

(10)  A_1; C; $\alpha \parallel (BC_1)$; $ABCA_1B_1C_1$ – призма.

Аналіз. $\alpha \cap (BB_1C) \triangleq n$.

Побудова.



1) Будуємо $n \parallel (BC_1)$,
$C \in n$;
$S \triangleq n \cap (BB_1)$.
2) S – спільна точка площин α; (BB_1C); (AA_1B).

$$\left.\begin{matrix}\{S; A_1\} \subset \alpha \\ \{S; A_1\} \subset (AA_1B)\end{matrix}\right| \Rightarrow (\alpha \cap (AA_1B)) = (A_1S).$$

Будуємо (A_1S), $(A_1S) \cap (AB) \triangleq P$.

$\triangle PA_1C$ – шуканий переріз.

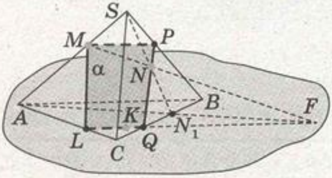
ОК-15

Побудова перерізів багатогранників

V. Якщо пряма лежить у площині перерізу, то точка її перетину з певною площиною грані фігури є вершиною тригранного кута, що утворено площинами: перерізу, грані фігури і допоміжною площиною, яка містить дану пряму.

(11) Наприклад, побудуємо переріз площиною α, що проходить через: **$M \in [AS]$; $N \in (SBC)$; $K \in (ABC)$; $SABC$ – тетраедр.**

1) Шукаємо $(MN) \cap (ABC)$: *допоміжна площина* (MSN): $(MSN) \cap (CB) \triangleq N_1$, тоді $(MSN) \cap (ABC) = (AN_1)$; $F \triangleq (AN_1) \cap (MN)$ – вершина тригранного кута, тобто $(MN) \cap (ABC) = F$.



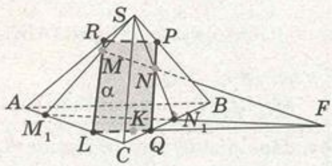
2) $\{F; K\} \subset \alpha$, $\{F; K\} \subset (ABC) \Big| \Rightarrow \alpha \cap (ABC) = (KF)$, $(KF) \cap (CB) \triangleq Q$; $(KF) \cap (AC) \triangleq L$.

3) $\{N; Q\} \subset (SCB)$, $\{N; Q\} \subset \alpha \Big| \Rightarrow \alpha \cap (SCB) = (NQ)$, $(NQ) \cap (SB) \triangleq P$.

$LMPQ$ – шуканий переріз.

---

(12) **$M \in (ASC)$; $N \in (SCB)$; $K \in (ABC)$; $SABC$ – тетраедр.**



1) *Допоміжна площина* (MSN):
$(MSN) \cap (CB) \triangleq N_1$;
$(MSN) \cap (AC) \triangleq M_1$;
$(MSN) \cap (ABC) = (M_1N_1)$;
$(M_1N_1) \cap (MN) \triangleq F$;
$(MN) \cap (ABC) = F$.
F – вершина тригранного кута, що утворений площинами:
α, (ABC), (MSN).

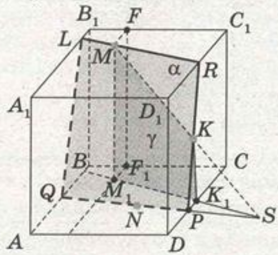
2) $(\alpha \cap (ABC)) = (KF)$:
$(KF) \cap (CB) \triangleq Q$;
$(KF) \cap (AC) \triangleq L$.

3) $(\alpha \cap (ASC)) = (ML)$;
$(ML) \cap (AS) \triangleq R$.

4) $(\alpha \cap (SCB)) = (QN)$;
$(QN) \cap (SB) \triangleq P$.

$LRPQ$ – шуканий переріз.

(13) **$M \in (A_1B_1C_1)$; $K \in (DD_1C_1)$; $N \in (ABC)$; $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед.**



1) *Допоміжна площина* $\gamma \parallel (CC_1)$ (тобто $\gamma \perp (ABC)$):

а) $KK_1 \parallel CC_1$;

б) $\left.\begin{matrix} MF \perp B_1C_1 \\ FF_1 \parallel CC_1 \\ MM_1 \parallel CC_1 \\ M_1F_1 \perp BC \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} (MKK_1) \triangleq \gamma; \\ \gamma \cap (ABC) = (M_1K_1); \\ (MK) \cap (M_1K_1) \triangleq S. \end{matrix}$

S – вершина тригранного кута, що утворений площинами: γ, α, (ABC).

2) $\alpha \cap (ABC) = (SN)$: $(SN) \cap (CD) \triangleq P$; $(SN) \cap (AB) \triangleq Q$.

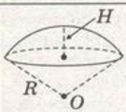
3) $\alpha \cap (DD_1C) = (PK)$: $(PK) \cap (D_1C_1) \triangleq R$.

4) $\alpha \cap (A_1B_1C_1) = (RM)$: $(RM) \cap (A_1B_1) \triangleq L$.

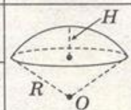
$RPQL$ – шуканий переріз.

ОК-16

Площі поверхонь

$S_{\text{біч призми}}$	$P_{\perp}l$	l – довжина бічного ребра; $P_{\perp}$ – периметр перпендикулярного перерізу (площиною, що перпендикулярна до бічних ребер).
$S_{\text{біч прямої призми}}$	Pl	P – периметр основи; l – довжина бічного ребра.
$S_{\text{біч правильної піраміди}}$	$\frac{1}{2}Ph$	P – периметр основи; h – апофема.
$S_{\text{біч правильної зріз піраміди}}$	$\frac{1}{2}(P_1+P_2)h$	$P_{1,2}$ – периметр основи; h – апофема.
$S_{\text{біч циліндра}}$	$2\pi RH$	R – радіус основи; H – висота.
$S_{\text{біч конуса}}$	πRl	R – радіус основи; l – твірна.
$S_{\text{біч зріз конуса}}$	$\pi(R_1+R_2)l$	$R_{1,2}$ – радіуси основи; l – твірна.
$S_{\text{поверхні кулі}}$	$4\pi R^2$	R – радіус кулі.
$S_{\text{сегментної поверхні}}$	$2\pi RH$	 R – радіус основи; H – висота сегментної поверхні.

Об'єми

$V_{\text{призми}}$	$S_{\text{осн}}H = S_{\perp}l$	l – довжина бічного ребра; $S_{\perp}$ – площина перпендикулярного перерізу.
$V_{\text{прямокут паралелепіпеда}}$	abc	a, b, c – його виміри.
$V_{\text{піраміди}}$	$\frac{1}{3}S_{\text{осн}}H$	$S_{\text{осн.}}$ – площа основи.
$V_{\text{зріз піраміди}}$	$\frac{H}{3}\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)$	$S_{1,2}$ – площі основ.
$V_{\text{конуса}}$	$\frac{1}{3}\pi R^2H$	R – радіус основи.
$V_{\text{зріз конуса}}$	$\frac{1}{3}\pi H(R_1^2+R_1R_2+R_2^2)$	$R_{1,2}$ – радіуси основи.
$V_{\text{кулі}}$	$\frac{4}{3}\pi R^3$	R – радіус кулі.
$V_{\text{кульового сектора}}$	$\frac{2}{3}\pi R^2H$	
$V_{\text{кульового сегмента}}$	$\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)$	
$V_{\text{тіла обертання}}$	$\pi\int_a^b f^2(x)dx$	Тіло, обмежене площинами $x=a$, $x=b$ і обертанням $y=f(x)\geqslant 0$ навколо (Ox).

$T' \underset{k}{\sim} T \longrightarrow S':S=k^2$ ←	Фігури T і T' подібні	→ $T' \underset{k}{\sim} T \longrightarrow V':V=k^3$

Предметний покажчик

СЛОВНИЧОК НЕСТАНДАРТНИХ ТЕРМІНІВ

Бісектор двогранного кута – півплощина, що поділяє його на два рівні двогранні кути.

Еліпс – геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох заданих точок (фокусів) є величиною сталою.

Зовнівписане коло трикутника – коло, що дотикається до однієї зі сторін трикутника й продовження двох інших його сторін.

Інцентр трикутника – точка перетину бісектрис трикутника.

Ортоцентр трикутника – точка перетину висот трикутника.

Криволінійна трапеція – частина площини, яку обмежено двома відрізками, перпендикулярними до третього, і кривою (що перетинає два перші відрізки).

Тор – поверхня, яка утворюється під час обертання кола навколо прямої, що його не перетинає і лежить у площині початкового кола.

ТТП – скорочення словосполучення «теорема про три перпендикуляри».

Центроїд (центр ваги, або центр мас) трикутника – точка перетину медіан трикутника.

Const – означає «стала величина».

ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ

Завдання 1

9. 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 4^2$; 2) $y^2 + z^2 = 2^2$; 3) $|x| = 3$; 4) $x^2 + z^2 = 1$ і $|y| = 1$. **10.** 1) Наприклад, $(\pm 2\sqrt{2};\ 0;\ 1)$. Порада. Одночасно виконуються співвідношення $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$ і $y^2 + z^2 = 1^2$, отже, $x^2 = 8$; 2) Наприклад, $(2;\ 2;\ \pm 1)$. Порада. Одночасно виконуються співвідношення $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$ і $z^2 = 1$; 3) Розв'язків немає. Порада. Одночасно виконуються співвідношення $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$, $y^2 + z^2 = 1$ і $x^2 = 1$, $1 + 1 \neq 3^2$; 4) Розв'язків немає. Порада. Одночасно виконуються співвідношення $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$, $y^2 + z^2 = 1^2$, $x^2 + z^2 = 2^2$. Якщо додати два останніх співвідношення і врахувати перше, маємо $z^2 = 1 + 4 - 9 < 0$; 5) Розв'язків немає. Порада. Аналогічно до попереднього отримайте $y^2 = 3^2 - 1 - 14^2 < 0$; 6) Розв'язків немає. Порада. Аналогічно до попереднього отримайте $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$ і $2(x^2 + y^2 + z^2) = 1 + 1 + 2^2$, $9 \neq 6$; 7) Розв'язків немає. Порада. Аналогічно до попереднього отримайте $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$ і $x^2 + y^2 + z^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2$, $9 \neq 3$. **11.** $(0;\ 2;\ -3)$; $(-1;\ 2;\ 0)$; $(-1;\ 0;\ -3)$. **12.** $(3;\ 0;\ 0)$; $(0;\ -4;\ 0)$; $(0;\ 0;\ \sqrt{7})$. **13.** 1) $D\ (3;\ 3;\ 0)$, $B_1(3;\ 0;\ 3)$, $C_1(0;\ 3;\ 3)$, $D_1(3;\ 3;\ 3)$, $d = 3\sqrt{3}$; 2) $D(2;\ 2;\ 0)$, $A_1(2;\ 0;\ 2)$, $C_1(0;\ 2;\ 2)$, $D_1(2;\ 2;\ 2)$, $d = 2\sqrt{3}$. **14.** $O(0;\ 0;\ 0)$, $C\left(0;\ 0;\ 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $A\left(2\sqrt{\frac{2}{3}};\ 2\sqrt{\frac{2}{3}};\ 0\right)$, $B\left(2\sqrt{\frac{2}{3}};\ 0;\ 0\right)$, $O_1\left(0;\ 0;\ -2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $C_1\left(0;\ -2\sqrt{\frac{2}{3}};\ 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $A_1\left(2\sqrt{\frac{2}{3}};\ 2\sqrt{\frac{2}{3}};\ -2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $B_1\left(2\sqrt{\frac{2}{3}};\ 0;\ -2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. **15.** Можливі два випадки: $A_1(1;\ 1;\ 0)$, $B_1(2;\ 1;\ 0)$, $C_1(2;\ 2;\ 0)$, $D_1(1;\ 2;\ 0)$; $A_1(1;\ 1;\ 2)$, $B_1(2;\ 1;\ 2)$, $C_1(2;\ 2;\ 2)$, $D_1(1;\ 2;\ 2)$. **16.** 1) $D(2;\ 3;\ 0)$, $B_1(2;\ 0;\ 5)$, $C_1(0;\ 3;\ 5)$, $D_1(2;\ 3;\ 5)$; $d = \sqrt{38}$; 2) $D(4;\ 6;\ 0)$, $A_1(4;\ 0;\ 2)$, $C_1(0;\ 6;\ 2)$, $D_1(4;\ 6;\ 2)$; $d = 2\sqrt{14}$. **17.** 1) $C(2;\ 1;\ 0)$; 2) $B(-8;\ 4;\ -19)$; 3) $A(-24;\ 8;\ 28)$. **18.** 1) $m = 2$, $n = -5$; 2) $m = -0{,}5$, $n = 2$; 3) $m = 1$, $n = -1$; 4) $m = 2$, $n = -1$. **19.** 1) $C_1(0;\ 4;\ 2)$, $K(1;\ 2;\ 2)$; 2) $C_1(0;\ 4;\ 6)$, $D_1(3;\ 4;\ 6)$, $K(1{,}5;\ 2;\ 6)$. **20.** 1) $3\frac{\sqrt{37}}{5}$; 2) $2\frac{\sqrt{37}}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{37}}{3}$. **21.** $a = \frac{3}{2}$. **22.** 1) Множина точок $(x;\ 0{,}75 - 0{,}5x;\ 0{,}5)$, де $x \in R$; 2) Множина точок $(x;\ 2;\ 1)$, де $x \in R$; 3) $\left(-\frac{3}{16};\ \frac{13}{4};\ \frac{3}{4}\right)$. Порада. Знайдіть $T\left(-\frac{3}{4};\ \frac{1}{2};\ 0\right)$. **23.** $P_1(4;\ 4;\ 6)$, $E(2;\ 4;\ 6)$. **24.** Існує. Кожна з сум двох сторін більша за третю сторону. Порада. Отримайте $AB = \sqrt{6}$, $AC = 1$, $BC = \sqrt{5}$ і доведіть відповідні нерівності. **25.** 1) Рівнобедрений; 2) Прямокутний; 3) Рівносторонній. **26.** 1) $45°$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. **27.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Порада. Врахуйте, що точка $O(0;\ 0;\ 0)$ рівновіддалена від точок A, B, C. Тоді вона проектується в центр правильного трикутника ABC. **28.** 1) Порада. Знайдіть кути між шуканими площинами і площиною xOy або доведіть паралельність прямих AB і A_1B_1, AC і A_1C_1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Порада. Врахуйте, що точка $O(0;\ 0;\ 0)$ рівновіддалена від точок A, B, C, а також від точок A_1, B_1, C_1. Отже, ортогональні проекції точки O на (ABC) та $(A_1B_1C_1)$ збігаються з центрами K і K_1 правильних трикутників ABC та $A_1B_1C_1$. Шукана відстань дорівнює відстані між центрами цих трикутників (бо відповідні перпендикуляри до вказаних площин належать одній прямій). Координати точок K і K_1 знайдіть як координати точок, що ділять медіани AP і A_1P_1 трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершин A і A_1.

29. 1) $M\left(2; 4; \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$; 2) $MT = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. Порада. Врахуйте: $AB \perp OY$; за теоремою про три перпендикуляри $CB \perp OY$; $C(4; 4; 0)$. **30.** 1) Так; 2) $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3\sqrt{3}}{2}; 1\right)$. **31.** Можливі чотири випадки. **32.** Порада. Див. приклад 1 § 1. **33.** Порада. Див. приклад 2 § 1. **34.** 1) Порада. Спочатку доведіть рівність усіх бічних ребер; 2) Прямокутний; (2; 2; 3). Порада. Знайдіть довжини відрізків AB, AC і BC та переконайтеся, що за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, трикутник ABC прямокутний ($\angle A = 90°$). Обґрунтуйте, що основа H висоти SH збігається із серединою відрізка BC.

Завдання 2

3. 1) Ні; 2) Ні; 3) Так. **4.** 1) Так; 2) Так; 3) Ні; 4) Так. **5.** 1) Ні; 2) Так; 3) Так. **8.** $z = 1$. **9.** $\left(\dfrac{1}{3}; 0; 0\right)$, $\left(0; \dfrac{1}{3}; 0\right)$, $\left(0; 0; \dfrac{1}{2}\right)$. **10.** 1) xOy; 2) Паралельна xOz і проходить через точку $y = \dfrac{1}{4}$; 3) Паралельна xOy і проходить через точку $z = \dfrac{1}{4}$; 4) Паралельна yOz і проходить через точку $x = \dfrac{1}{4}$; 5) Містить вісь Oz і бісектрису кута між променем Ox і від'ємною піввіссю ординат; 6) Проходить через точки $(-1; 0; 0)$ і $(0; 0; -1)$ паралельно Oy; 7) Перетинає осі в точках $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$. **11.** 1) $z = \pm 2$; 2) $x = \pm 3$; 3) $y = \pm 1$. **12.** 1) $x + d = 0$; 2) $y + d = 0$; 3) $z + d = 0$; 4) $ax + by + d = 0$; 5) $by + cz + d = 0$; 6) $ax + cz + d = 0$; 7) $z + d = 0$. **13.** 1) $y - 1 = 0$, $x = 0$, $z = 0$; 2) $x - 2 = 0$, $y - 2 = 0$, $z - 2 = 0$; 3) $x - 4 = 0$, $y - 4 = 0$, $z = 0$. **14.** 1) $4y + 6z + 9 = 0$; 2) $x - y = 0$; 3) $4x + 6y - 3 = 0$. **15.** 1) Ні; 2) Так; 3) Так. **16.** 1) $x + y + z = 1$. Порада. Скористайтеся рівнянням площини у відрізках; 2) $3x = 2y - 6z - 6 = 0$. Порада. Див. до (1). **17.** $z = 0$, $z = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $x = -1$. **18.** Вісь абсцис: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; вісь ординат: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; вісь аплікат: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. **19.** 1) Пряма, перпендикулярна до xOy, $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$. Пряма, перпендикулярна до yOz, $\begin{cases} y = a \\ z = b \end{cases}$. Пряма, перпендикулярна до xOz, $\begin{cases} x = a \\ z = b \end{cases}$; 2) $\begin{cases} y = 0 \\ x = a \end{cases}$ при $a \neq 0$; 3) $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ при $a \neq 0$ і $b \neq 0$. **20.** 1) $(1; 1; 1)$, $(x; 2x - 1; 3x - 2)$ – підставляйте x, яке побажаєте. Проте можна підставити якесь числове значення однієї зі змінних у задану систему і знайти значення інших двох координат як розв'язок отриманої системи; 2) $(0; 1; 4)$, $(x; 1 - 3x; 4 - 7x)$. Порада. Розв'яжіть систему, вважаючи x параметром, і підставляйте довільне його значення. **21.** 1) Мимобіжні; 2) Перетинаються в точці $(0; 1; 1)$. Порада. Об'єднайте дві системи в одну і розв'яжіть. **22.** 1) Паралельні; 2) Перетинаються в точці $(-2; 3; 1)$. **23.** 1) $(3; 0; 5)$, $(5; 1; 8)$, $(1; -1; 2)$. Порада. Запишіть подвійну рівність у вигляді системи двох рівнянь, підставте певне значення однієї зі змінних і отримайте значення двох інших. (Ми підставляли $y \in \{0, \pm 1\}$); 2) Див. пораду до (1). **24.** 1) Так – належать осі Oz; 2) Так – належать прямій $\begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$; 3) Ні; 4) Ні; 5) Ні. **25.** 1) Перетинаються в точці $(-3; -3; -4)$; 2) Перетинаються в точці $(-3; 3; 1)$. **26.** 1) Так. Порада. Запишіть пряму як $\begin{cases} x+1=y-1 \\ x+1=2z+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2z+3 \\ x=2z+1 \end{cases}$, підставте звідси y і x в рівняння сфери, переконайтесь, що отримане квадратне рівняння на z має додатний дискримінант; 2) Ні. **27.** 1) $\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}; -2+\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$; 7) $\left(2; -2+\frac{2\sqrt{5}}{5}; 0\right)$. **28.** 1) Пряма; 2) Коло; 3) Гіпербола; 4) Парабола. **30.** 1) $2\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $5\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 6) 1.

Завдання 3

15. 1) Так: $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – довільні неколінеарні вектори або колінеарні однаково напрямлені ненульові; 2) Так: $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – довільні колінеарні протилежно напрямлені; 3) Ні. **16.** 1) $x=3$; 2) $x=-3$. **17.** 1) $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{2}$; 2) $x=4$, $y=-2$. **18.** 1) $x \in \{3; -2\}$; 2) -1. **19.** Так, бо задані вектори компланарні. **20.** 1) Так; 2) Ні; 3) Так; 4) Ні. **22.** 1) $\overrightarrow{AC_1}$; 2) $\overrightarrow{DB_1}$; 3) $\overrightarrow{DB_1}$; 4) $\overrightarrow{A_1C}$; 5) $\overrightarrow{BD_1}$. **23.** $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{D_1O}=-0{,}5\overrightarrow{AA_1}+0{,}5\overrightarrow{AB}-0{,}5\overrightarrow{AD}$. **24.** $\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{BA}+0{,}5\overrightarrow{BB_1}+0{,}5\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{A_1M}=-\overrightarrow{BA}-0{,}5\overrightarrow{BB_1}+0{,}5\overrightarrow{BC}$. **25.** $\overrightarrow{AM}=0{,}5\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{BN}=0{,}5\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{MN}=0{,}5(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$. **26.** $\overrightarrow{AM}=0{,}5(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})$. **27.** 1) $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+0{,}5\,\overrightarrow{AA_1}$; 2) $\overrightarrow{DA_1}=\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{CD_1}$.

Завдання 4

1. 1) $3\overrightarrow{HL}-2\overrightarrow{HK}$; 2) $2\overrightarrow{HK}-\overrightarrow{HL}$; 3) $\lambda\overrightarrow{HL}+(1-\lambda)\overrightarrow{HK}$. **3.** П о р а д а. Розгляньте $\triangle DMC$ і скористайтеся формулою (**) § 6. **4.** П о р а д а. Розгляньте $\triangle DMC$ і скористайтеся формулою (**) § 6. **10.** П о р а д а. Скористайтеся твердженням задачі 3 та прикладом 2 § 6. **11.** П о р а д а. Спочатку доведіть, що $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})$. **12.** $\frac{1}{3}$. **13.** П о р а д а. Доведіть компланарність векторів $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$. Для цього використайте ознаку компланарності трьох векторів. П о р а д а. Скористайтеся формулою (***) § 6. **15.** П о р а д а. Скористайтеся № 12.

Завдання 5

4. 1) $-2\vec{e}_1+4\vec{e}_3$; 2) $2\vec{e}_1+4\vec{e}_2+4\vec{e}_3$; 3) $-2\vec{e}_1+4\vec{e}_2-4\vec{e}_3$; 4) $6\vec{e}_1-4\vec{e}_2$; 5) $-12\vec{e}_1+16\vec{e}_2-8\vec{e}_3$. **5.** 1) $\overrightarrow{CK}(3;0;-3)$; 2) $\overrightarrow{MD}$ $(-3; -3; -3)$; 3) П о р а д а. Покажіть, що $\overrightarrow{DH}=2\overrightarrow{DM}$. **7.** 1) $\sqrt{17}$; 2) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{5}$; 4) $5\sqrt{17}$; 5) $\sqrt{105}$; 6) $\sqrt{29}$. **8.** $n=-\sqrt{0{,}5}$. **9.** $m=5$. **10.** $m=3$. **11.** 1) Так; 2) Ні; 3) Ні; 4) Так; 5) Ні. **12.** $m=n=-1$. **13.** 1) Так; 2) Ні; 3) Так; 4) Ні; 5) Ні; 6) Ні. **14.** 1) 2; 2) 2; 3) 5; 4) 6. **15.** 1) $m=3$; 2) $m=4$; 3) $m=2$; 4) $m=1$. **16.** 1) 0; 2) 0,5; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $-0{,}5$; 6) -1; 7) 1. **17.** З Ox – гострий, з Oy – тупий, з Oz – прямий. **18.** 1) $n=-0{,}5$; 2) $n \in \varnothing$, оскільки $-1 : 1 \neq 0 : 2$; 3) $n=\frac{3}{4}$. **19.** $m=2$. **20.** $m=-3$. **21.** 1) -1; 2) 1; 3) 0; 4) 1. **22.** 1) 40; 2) $\frac{6-2\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}=-6-5\sqrt{2}$. **23.** Може, якщо $\vec{a}$ і $\vec{c}$ колінеарні та ненульові. **24.** Так. **25.** 150°. **27.** 1) $\sqrt{15}$; 2) 5. **28.** -21. П о р а д а. Розгляньте скалярний квадрат $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$. **29.** -25. П о р а д а. Див. до № 28. **30.** 0. **31.** k. **32.** 12.

Завдання 6

1. 1) 60°; 2) 45°. 2. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}$. П о р а д а. Не забудьте, що кут між прямими не може бути тупим. 3. 6. П о р а д а. Спочатку переконайтесь, що A не належить (OC). Далі розгляньте $\triangle AOC$, знайдіть довжини двох його сторін та (за допомогою скалярного добутку) косинус кута між ними. Скористайтеся формулою для обчислення площі трикутника через значення синуса його кута. 4. $3\sqrt{2}$. П о р а д а аналогічна до № 3. 5. П о р а д а. Розгляньте три некомпланарні вектори з початком в основі висоти піраміди і кінцями в її вершинах за базис. 6. П о р а д а аналогічна до № 5. 7. П о р а д а. Див. доведення теореми 3. 8. П о р а д а. Скористайтеся властивістю скалярного добутку двох векторів. 9. 1 : 1. П о р а д а. Скористайтеся умовою компланарності векторів. 10. П о р а д а. Виберіть три некомпланарних вектори, наприклад, $\overline{BA} = \vec{a}$, $\overline{BC} = \vec{b}$, $\overline{BD} = \vec{c}$; розкладіть за ними вектор $\overline{BD}$; з рівності $(\vec{a} - \vec{c})^2 = (\vec{b} - \vec{c})^2$ отримайте $(\vec{a} - \vec{b})\vec{c} = 0$. 11. 1) $MN = l\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$. 12. П о р а д а. Див. доведення теореми 3. 13. $AM : MB_1 = BN : NC_1 = 2 : 1$ або $AM : MB_1 = 5 : 1$, $BN : NC_1 = 2 : 1$. 14. П о р а д а. Прийміть вектори зі спільним початком в одній з вершин паралелепіпеда, напрямлені вздовж його граней, за базис; розкладіть за ними вектори, що мають спільний початок у точці перетину діагоналей паралелепіпеда, а кінці їх містяться у його вершинах; врахуйте, що $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. 15. П о р а д а аналогічна до № 14.

Завдання 7

2. [0; 1]. 3. 1) $\sqrt{1-\alpha^2}$; 2) $\sqrt{1-\beta^2}$; 3) Так, якщо кут між векторами 45°. 4. $(\vec{a}\cdot\vec{b}) : \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| = \operatorname{tg}(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b})$. 5. Площа діагонального перерізу прямого паралелепіпеда менша за суму площ двох його суміжних граней. Рівність виконується, якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$. П о р а д а. Розкладіть дані вектори за ортами. 6. 1) 0; 2) 0; 3) 0; 7. 1) $\overline{A_1A}$; 2) $\overline{C_1B_1}$; 3) $2\overline{AB}$; 4) $2\overline{A_1A}$; 5) $\overline{BD}$.

Завдання 8

2. 1) $\left(1; -3; -\frac{3}{4}\right)$; 2) (3; −5; 4, 25); 3) (−1; 1; 0,75); 4) (−9; 6; 4,75). 3. $A_1(-1{,}5; -4; 2)$, $B_1(1{,}5; 4; -2)$. 6. $(x+11)^2 + (y-6)^2 + (z-12)^2 = 4$. 7. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 4$. 8. $3x - y + 8z - 33 = 0$. 9. $x - 2y + 3z + 10 = 0$. 10. (0; 3; 0,5). 11. 1) (−1; −2; 3); 2) (−3; −2; 5); 3) (9; −12; 11). 14. Площина паралельна даним площинам і рівновіддалена від них. 16. 1) $x + y + z - 9 = 0$. П о р а д а. Див. § 10, приклад 6. 17. Безліч точок площини $x + y + z - 6 = 0$. П о р а д а. Шукана площина паралельна даним і проходить через точку (2; 2; 2). 18. (0; 4; 4), (−4; 1; 4), (0; 4; −1), (−4; 14 −1) або (−4; 4; 4), (0; 4; 9), (−4; 1; 9). 19. 1) Так; 2) Ні. П о р а д а. Проаналізуйте випадок мимобіжних прямих; 3) Так. 20. Ні. 22. 1) 72°; 2) 36°. 25. Рівнобока трапеція. 26. 1) (1; −2; 1). П о р а д а. Див. приклад 9 § 10; 2) (2; −1; 2). П о р а д а. Паралельним перенесенням $\vec{n}(-1; -1; -1)$ перетворіть точку $M(1; 1; 1)$ на $O(0; 0; 0)$, доведіть, що при такому перетворенні дана площина перетвориться сама на себе. Точка симетрична O відносно даної площини $O_1(1; -2; 1)$ – див. (1). Оберненим перетворенням паралельного перенесення $\vec{m}(1; 1; 1)$ отримаємо шукану точку; 3) (2; −2; 0). П о р а д а. Див. пораду до (2). 28. 1) Узагалі кажучи – ні (тільки якщо вона правильна);

2) Ні; 3) Так; 4) Ні; 5) Так. **32.** $x_1 = -x$, $y_1 = -y$, $z_1 = z$. **33.** $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4$. Порада. Див. приклад 10 § 10. **35.** Порада. Врахуйте, що площі подібних фігур відносяться як квадрати коефіцієнтів подібності. **36.** 1) $(x + 1{,}2)^2 + (y - 2{,}4)^2 + (z - 3{,}6)^2 = 3{,}6^2$. Порада. Див. приклад 12 § 10; 2) $(x + 1{,}4)^2 + (y - 0{,}2)^2 + (z - 1{,}4)^2 = 3{,}6^2$. Порада. Паралельним перенесенням $\vec{n}(-1;-1;-1)$ перетворіть точку $M(1; 1; 1)$ на $O(0; 0; 0)$, маємо задачу (1). Здійсніть обернене паралельне перенесення на $\vec{m}(1; 1; 1)$; 3) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 3{,}6^2$. **37.** 1) $x - 2y + z + 1{,}5 = 0$. Порада. Див. приклад 11 § 10; 2) $x - 2y + z - 6 = 0$. Порада. Паралельним перенесенням $\vec{n}(0; 2; -1)$ перетворіть точку $M(0; -2; 1)$ на $O(0; 0; 0)$, маємо задачу, аналогічну до (1). Здійсніть обернене паралельне перенесення на $\vec{m}(0; -2; 1)$; 3) $x - 2y + z + 14 = 0$. Порада. Розв'язування аналогічне до (2).

Завдання 9

4. 1) Так; 2) Ні. **5.** 1) Ні; 2) Так. **7.** Ні. **12.** 1) 90°; 2) 60°. **13.** 16. **14.** 30°. **15.** 120°. **16.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **17.** 30°. **18.** 45°. **19.** $\arcsin(\sin\alpha \cdot \sin\beta)$. **20.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **21.** 26 см. Порада. Доведіть, що точка M та її проекції на грані даного кута містяться в одній площині. Розгляньте два прямокутні трикутники з вершиною M, катети яких дорівнюють відстані проекції точки M на грані кута. **22.** 26 см. Порада аналогічна до попередньої задачі. **23.** $\sqrt{61}$. **25.** 90°. **26.** Півплощина, що ділить даний двогранний кут на два рівні двогранні кути (бісектор). **27.** Частина площини, паралельна ребру двогранного кута, обмежена гранями цього кута. **28.** Півплощина, яка міститься всередині двогранного кута, паралельна його бісектору і має за границю пряму на грані даного кута.

Завдання 10

5. 1) Так; 2) Так; 3) Так. **6.** 1) Ні; 2) Так; 3) Ні; 4) Так. **7.** $\sqrt{14}$ см. Порада. Представте дану точку як вершину прямокутного паралелепіпеда. Треба знайти діагональ цього паралелепіпеда, якщо дано діагоналі трьох його граней. **8.** 4 см. Порада. Представте дану точку як вершину прямокутного паралелепіпеда. Треба знайти діагональ грані паралелепіпеда, якщо дано діагональ паралелепіпеда та діагоналі двох інших його граней. **9.** $\arccos\frac{1}{3}$. **10.** $\omega - \arccos\frac{1}{3}$. **11.** 90°. **13.** $2a(1 + \sqrt{3})$. **14.** $\frac{3}{4}\cos\frac{\alpha}{2}$. **15.** $\frac{\cos\alpha}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$. **16.** $2\arccos\frac{1}{2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$. **17.** $a\sqrt{\frac{1-2\cos\varphi}{3}}$.

Завдання 11

4. Безліч. Порада. Уявіть піраміду з n-кутником в основі. Яким би великим не було число n, завжди можна побудувати піраміду, основа якої має $n + 1$ вершин. **5.** 6) Порада. Порахуйте ребра тетраедра. **7.** 6) Порада. Див. № 5. **9.** Ні. **10.** Так. **11.** Так. Порада. Спробуйте провести діагональ у трикутній призмі. **12.** Її бічні грані рівні між собою, але можуть не дорівнювати трикутнику основи. **13.** Порада. Скористайтеся означенням призми. **14.** Куб. **15.** Ні. **16.** Ні. **17.** 9. Порада. За кількістю ребер. **18.** 1) 12; 2) 24. **19.** Так. **20.** 16-кутник. **21.** 1) $n + 1$, $2n$, $n = 1$; 2) 4 n. **22.** Порада. Порахуйте спочатку ребра основи і додайте до них число бічних ребер. **23.** $360°(n - 1)$. **24.** 1) Ні; 2) Так. **25.** 1) Так; 2) Ні.

Завдання 12

12. 1) $\sqrt{61}$ см; 2) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см. **13.** 60 см^2. **14.** 225 см^2. **15.** 420 дм^2. **16.** Порада. Порахуйте спочатку багатогранні кути при ребрах однієї основи. **17.** $n - 2$. **18.** Порада. Скористайтеся означенням призми. **19.** Ні. Порада. Кількість ребер призми кратна 3. **21.** 1) 1; 2) 2. **23.** 6 см. **24.** 324 см^2. **25.** 12 см^2. **26.** 54 см^2. **27.** $144\sqrt{74}$ см^2 або $144\sqrt{314}$ см^2. Порада. Скористайтеся теоремою косинусів для трикутника, утвореного двома сторонами основи та її діагоналлю. Врахуйте, що умові відповідають два випадки. **28.** 10 см. **29.** 60 см^2. **30.** 90 см^2. **31.** 16 см^2. **32.** 10 см^2. **33.** 7,5 м^2. **34.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. **35.** $\frac{2}{3}a$. Порада. Введіть прямокутну систему координат, запишіть рівняння площини EBD і скористайтеся формулою відстані від точки до площини. **36.** 1) $\frac{\sqrt{6}}{8}a^2$; 2) $\frac{3\sqrt{15}}{16}a^2$. **37.** 1) $0{,}4\sqrt{10}a$; 2) $0{,}125\sqrt{10}a$. **38.** $\sqrt{\frac{7}{3}}a$. Порада. Запишіть у векторній формі умову перпендикулярності MN і (BA_1C). **39.** $4a\sqrt{b^2 - 0{,}25a^2}$. **40.** $2\sqrt{2}a$. **42.** 492. **43.** $130 + 12\sqrt{10}$. **44.** $S_1 + S_2 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2}$. **45.** $\sqrt{b^2 - 7a^2}$, $\sqrt{b^2 - 3a^2}$.

Завдання 13

1. 1) Ні; 2) Ні. **2.** 72 см^2. **3.** 4 см. **4.** $4(4 + \sqrt{10})$ см^2. **5.** $0{,}5\sqrt{2}$ см. **6.** 6 м. **7.** 4 см. **8.** $1{,}5\sqrt{2}$ см. **9.** 1) 2 arctg1,5. Порада. Позначте сторону основи як a, розгляньте два прямокутних трикутники, що мають за спільний катет висоту піраміди, а за гіпотенузи – апофему та бічне ребро; 2) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{6}$. Порада. Див. пораду до (1). **10.** 54 см^2. **11.** 120 см^2. **12.** $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{3}$. **13.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}$. **14.** $30\sqrt{3}$ дм. **15.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{3}$ і $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. **16.** $48\sqrt{2}$ см^2. **17.** $18\sqrt{3}$ см^2. Порада. З'ясуйте, що це правильний тетраедр і $S_б = 3S_о$. **18.** $40\sqrt{3}$ см^2. **19.** $6\sqrt{30}$ см^2. **20.** $2{,}5(\sqrt{3} + 3 + \sqrt{5})$ см^2. **21.** $7\sqrt{3}(1 + 2\sqrt{2})$ см^2. Порада. Зверніть увагу, що діагональ ромба кожної з основ дорівнює його стороні. З'ясуйте, що дві бічні грані – рівні між собою прямокутні трапеції, а дві бічні грані – рівні між собою рівнобічні трапеції. **22.** 12 см. **23.** 1064 см. **24.** 508 см^2. **25.** Порада. Врахуйте, що площі подібних фігур відносяться як квадрати коефіцієнтів подібності. Трикутник перерізу подібний до трикутника більшої з основ з коефіцієнтом $q = \frac{a+b}{2} : b = \frac{1}{2}(k+1)$, де k – коефіцієнт подібності трикутників основ (a і b – відповідні лінійні елементи меншої та більшої основ). **26.** Між ребром і основою $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}$, апофемою і основою $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{2}$. Порада. Скористайтеся опорною задачею – прикладом 1 § 16. **27.** $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}\left(1 + \frac{\sqrt{4 - 3\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}\right)$. Порада. Скористайтеся опорною задачею – прикладом 2 § 16. **28.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right)$. **29.** $\frac{b^2}{2}(1 - \cos\alpha + 3\sin\alpha)$. **30.** $R^2\sqrt{3}\sin^2\alpha\left(1 + \sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$. **31.** $a^2\sin\alpha\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$. **32.** Ви-

сота $\dfrac{d}{\cos\beta}$. Ребро основи $\dfrac{d}{\sin\alpha\sin\beta}$. **33.** Висота $\dfrac{2l}{\cos\alpha}$. Ребро основи $\dfrac{2l}{\sin\alpha\sin\beta}$.
35. Порада. Скористайтеся опорними задачами – прикладами 1, 2 § 16. Скористайтеся $\cos15° = \sqrt{\dfrac{1+\cos30°}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$; 3) $2\arcsin(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}})$; 4) $2\arcsin\left(2\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\cos\left(\dfrac{180°}{n}\right)\right)$. **36.** 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$; 2) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$; 3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\dfrac{\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{180°}{n}\right)}{6\sin^2\left(\dfrac{180°}{n}\right)}$. Порада. Див. до № 35.

Завдання 14

1. 1) Так; 2) Ні. **2.** $a\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **3.** $2a$. Порада. Доведіть, що цей переріз – паралелограм. Позначте довжину одного з відрізків, що січна площина відтинає від ребра тетраедра як x, і виразіть довжини сторін перерізу через a і x. **4.** Наприклад, тетраедр, дві грані якого перпендикулярні й одна з них є рівнобедреним трикутником, а друга – ні. **5.** Наприклад, тетраедр, одне бічне ребро якого перпендикулярне до основи, що є гострокутним трикутником. **7.** Перпендикуляр, проведений з A до (BCD), належить усім трьом даним площинам. **9.** $18(2 + \sqrt{3} + \sqrt{6})$ см^2. **10.** $0{,}25a^2(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6})$. **11.** $6\sqrt{2}$ см. **12.** $3\sqrt{2}$ см. **13.** $2\arccos\dfrac{\sqrt{2}(5+\sqrt{17})}{16}$. Порада. Скористайтеся результатом № 26 завдання 13 і опорними задачами – прикладами 1, 2 § 16. **14.** $2\operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{33}}{6}$. Порада. Врахуйте, що заданий відрізок є медіаною гіпотенузи – бічного ребра. Скористайтеся опорною задачею – прикладом 2 § 16. **15.** $\dfrac{3a^2}{4\sqrt{4\sin^2\varphi-1}}$. **16.** Порада. Скористайтеся правилом чотирьох точок або теоремою 3. **20.** 108 см^2. **22.** Порада. Доведіть, що висоти граней ABC і DAB, проведені з вершин C і D, матимуть спільну точку E на ребрі AB; основа H висоти тетраедра лежить на відрізку CE; $\angle DEH \triangleq \alpha$, $\angle CDE = 90°$; $S = S_2 : \cos\alpha$ і $\cos\alpha = \dfrac{DE}{CE} = \dfrac{2S\cdot AB}{2S_1\cdot AB} = \dfrac{S}{S_1}$. **23.** 22 см^2. **24.** $\sqrt{\dfrac{(1+\sqrt{5})}{2}}$. Порада. Врахуйте, що тетраедр не може бути рівногранним (бо рівногранний тетраедр не містить плоских прямих кутів) і не може бути прямокутним (бо основа прямокутного тетраедра – гострокутний трикутник).

Завдання 15

1. 1) Ні; 2) Так; 3) Ні; 4) Так, але не для довільного циліндра. **4.** H = 18 см, R = 6 см. **5.** $H = R = 5\sqrt{5}$ см. **6.** $\left(\dfrac{6}{\pi}+4\sqrt{3}\right)$ м^2. **7.** У 3 шари і 2 витки 4-го шару. **8.** 1) $150\sqrt{3}$ см^2; 2) 240 см^2. **9.** 84 см^2. **10.** 168 см^2. **11.** $2(\pi - \operatorname{arctg}\pi)$. **12.** $\dfrac{r\sqrt{3}}{2}$. **13.** 1) $\dfrac{Q\sqrt{3}}{2}$; 2) $\dfrac{4Q}{5}$. **14.** 60 см. **15.** 1) $\dfrac{Q}{2}$; 2) $\dfrac{Q\sqrt{2}}{2}$; 3) $\dfrac{Q\sqrt{3}}{2}$. **16.** 24π см^2. **17.** 6 см. **18.** 14π см^2. Порада. Запишіть довжини хорд AB і BC, за якими перерізи перетинають одну з основ через площі цих перерізів і висоту H циліндра. Тоді $AC = \frac{7\sqrt{3}}{H}$ (за теоремою косинусів) і $AC = 2r\cos 60°$. $S_б = 2\pi rH = 2\pi \cdot \frac{7\sqrt{3}}{H} \cdot H$. **19.** 1) 38 см²; 2) 155 см². П о р а д а. Див. № 18. **20.** $24\sqrt{3}$ см. П о р а д а. Проведіть через дану пряму площину, паралельну осі циліндра. Тоді відстань між цією площиною і віссю дорівнюватиме 5 см. **21.** $10\pi(5 + 4\sqrt{2})$ см². П о р а д а. Доведіть, що дані хорди паралельні і що задана відстань між ними дорівнює відстані між серединами цих хорд. Спроектуйте одну з хорд на площину другої основи і розгляньте утворені прямокутні трикутники. **22.** 50π см². П о р а д а. Див. № 18. **23.** 126π см². П о р а д а. Нехай вершини A і B квадрата $ABCD$ належать верхній основі. Позначте як A_1 проекцію A на площину нижньої основи. Доведіть за ТТП, що $A_1D \perp DC$. **24.** $400(1 + 2\sqrt{2})$ см². **25.** $\frac{\pi a^2 \operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha}$. **26.** $\frac{\pi Q}{4}$. **27.** 36π м². **28.** 6 см. **29.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **30.** $\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$. **31.** $\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$.

Завдання 16

2. 17 см. **3.** 1260 см². **4.** 1) 108π см²; 2) 72π см²; 3) 36π см². **5.** 5 см. **6.** $6\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ м. **7.** 1) $5\sqrt{3}$ см; 2) 5 см. **8.** 0,9 πм². **9.** $64\pi(3 + 2\sqrt{3})$ см². **10.** 1) $\frac{r\sqrt{4l^2 - r^2}}{4}$; 2) $\frac{r}{2}\sqrt{2l^2 - r^2}$. **11.** 1) 80 π дм²; 2) 144π дм². **12.** $\frac{169\pi\sqrt{2}}{8}$ м². **13.** 40. **14.** $\pi l^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}$. **15.** $\frac{1}{\pi}\sqrt{Q(\pi l^2 - Q)}$. **16.** $\frac{1}{6}\pi a^2(3 + \sqrt{3})$. **17.** $\frac{\pi a^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **18.** 1) r^2; 2) $r^2\sqrt{2}$; 3) $r^2\sqrt{3}$. **19.** 1) 200 см²; 2) $\frac{100\sqrt{6}}{3}$ см²; 3) $\frac{200\sqrt{3}}{9}$ см². **20.** $\frac{H}{3}\operatorname{ctg}\alpha$. **21.** 180°. **22.** 1) $n^2 : m^2$; 2) $a^2 : (a - b)^2$. **23.** 45°. **24.** 45°. **25.** Осьовий переріз. **26.** $\frac{H\sqrt{6}}{3}$. П о р а д а. Шуканим є радіус кола, описаного навколо основи правильної трикутної піраміди, в якої всі плоскі кути при вершині прямі. **27.** 896π см². **29.** 176π см². **30.** 1) 12 см; 2) $6\sqrt{2}$ см; 3) $4\sqrt{3}$ см. **31.** 1) $\frac{\pi n^2}{4}(7 \pm 4\sqrt{3})$, πn^2; 2) πn^2, $\frac{\pi n^2}{4}(3 \pm 2\sqrt{2})$; 3) πn^2, $\frac{\pi n^2}{4}$ або $\frac{9\pi n^2}{4}$. **32.** 20 см. **33.** $\pi h^2(2{,}5 + 2\sqrt{2})$. **34.** 11 см і 21 см. **35.** $(3 + 2\sqrt{2}) : 1$. **36.** Круг. **37.** $\frac{\sqrt{13}}{4 - \sqrt{13}}$. **38.** $\frac{3}{8}\sqrt{15}l^2$. **39.** 4 см. **41.** 75 см. **42.** $\frac{3l^2}{4}(2 - \sqrt{3})$, $\frac{3}{8}l^2(2\sqrt{3} - 3)$. **43.** $5\frac{17}{23}$ см. **44.** $a(\sqrt{6} - 2)$. **45.** $\frac{1}{2}a\sqrt{6}(\sqrt{2} - 1)$.

Завдання 17

1. $2R_{Землі}$. **2.** ~ 15 000 км. **4.** Екватор. **6.** 1) 12 см; 2) 16 дм; 3) $\sqrt{a^2 - b^2}$. **7.** $\frac{\sqrt{4R^2 - m^2}}{2}$. **9.** 1) Так; 2) Ні. **10.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$. **11.** 1) $O(0;\ 0;\ 0)$, $R = 4$; 2) $O(0;\ 0;\ 0)$, $R = \sqrt{5}$; 3) $O(5;\ 1;\ -1)$, $R = 3$; 4) $O(-1;\ 0;\ 0)$, $R = 3$; 5) $O(1;\ -2{,}5;\ 0{,}5)$, $R = \sqrt{7{,}5}$. **12.** 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 = 64$; 3) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. **13.** $\sqrt{22}$. **14.** 1) $O(0;\ 0;\ 0)$,

$R = 2$; 2) $O(0;\ 1;\ 0)$, $R = \sqrt{3}$; 3) $O(1;\ 0;\ 0)$, $R = \sqrt{3}$; 4) $O\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $R = \sqrt{\frac{8}{3}}$. **15.** 1) $(-14;\ -1;\ -1)$; 2) $\frac{3\pi}{4}$. **16.** 1600π дм^2. **17.** 4π дм. **18.** 1) $5\sqrt{2}\pi$ см; 2) $2\sqrt{3}\pi$ см. **19.** 1) 4π см; 2) 12π см; 3) $\frac{2}{15}\pi\arcsin\frac{a}{12}$ см. **20.** 22 дм або 2 дм. **21.** 1) 12 см; 2) 10 см; 3) $15 - a$ см. **22.** 1 м або 7 м. **23.** $\frac{\pi R^2}{4}(4 - \sin^2\alpha)$. **24.** 12 см. Порада. Див. приклад 2 § 20. **26.** 3 : 4. **27.** 225π см^2 і 100π см^2. **28.** 21 см. **29.** 8 : 5. **30.** 1) 32; 2) 72; 3) 50; 4) 120. **31.** 1 м. **32.** 1) Не мають спільних точок; 2) Дотикаються. **33.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, a; 2) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{a}{2}$, $a\sqrt{3}$. **34.** $R\mathrm{tg}^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)$, $R\mathrm{ctg}^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)$. **35.** 1) Порада. З'ясуйте, що таких сфер чотири, їх радіуси: 5 од., 10 од., 15 од., 30 од.; 2) Таких сфер дві: $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 9$ і $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$. **36.** $x - 2y + 3z + 14 = 0$. **37.** $\pi R^2 \sin\alpha$. **38.** 35 см. **39.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$. **40.** 1) Перетинаються; 2) Не мають спільних точок. **41.** $2x - 3y + z = 0$. **42.** 11 см або 25 см. **43.** 1) Площина; 2) Циліндрична поверхня; 3) Конічна поверхня. **44.** Порада. З'ясуйте, що можливі такі випадки: два кола, або коло і точка поза ним, або дві точки, або одна точка, або таких точок немає. **45.** 1) Дві сфери, якщо $R > r$; одна сфера, якщо $R < r$; 2) При $Q = \pi R^2$ – центр заданої кулі. При $Q < \pi R^2$ – сфера радіуса $\sqrt{R^2 - \frac{Q}{\pi}}$, центр якої збігається з центром заданої кулі; 3) Сфера, радіус якої вдвічі менший за радіус даної кулі; 4) Великий круг даної кулі без кола цього круга; 5) При $a < 2R$, де R – радіус кулі, – сфера радіуса $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$, центр якої збігається з центром даної кулі. При $a = 2R$ – центр даної сфери.

Завдання 18

1. 16 см^2. **2.** 2,5 дм. **3.** $6\sqrt{3}$ м. **4.** $\sqrt{\frac{Q\sqrt{3}}{24}}$. **5.** $18\sqrt{3}R^2$. **6.** $\frac{SR}{2a}$. **7.** Порада. Скористайтеся тим, що суми протилежних сторін описаного чотирикутника рівні. **8.** $90° - \frac{180°}{n}$. **9.** 9,5 дм. **10.** 3136 см^2. **11.** 41 дм. **12.** 14 см. **13.** 14 м. **14.** 14 дм. **15.** 13 см. **16.** 9,5 см. **17.** 702 дм^2. **18.** $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2\sqrt{2}}$. **19.** 2) $4R^2\sqrt{2}$. **22.** 1) $l > H\sqrt{2}$; 2) $l = H\sqrt{2}$; 3) $l < H\sqrt{2}$. **23.** $5\frac{11}{14}$ см. **24.** 1) $\frac{a}{2}\sqrt{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **25.** $\frac{a}{4}\sqrt{6}$. **26.** 13,5 см. **27.** $8\frac{\sqrt{3}}{3}$ дм. **28.** $\frac{3}{4}H$. **29.** $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ м. **30.** $3\sqrt{2}$ м. **31.** $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ м. **32.** 1) $\frac{9}{16}R^2\sqrt{3}$; 2) $\frac{16}{9}R^2$; 3) $\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$. **33.** $2\sqrt{7}$ дм. **34.** $2\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$ дм. Порада. Знайдіть синус кута між бічним ребром і основою, скориставшись опорною задачею – прикладом 2 § 16. Продовжіть висоту піраміди до її перетину з описаною сферою і розгляньте утворений прямокутний трикутник (його гіпотенуза дорівнює двом радіусам даної сфери).

35. 1) $\frac{d\sqrt{1+4\mathrm{tg}^2\beta}}{\sin^2\beta}$; 2) $\frac{m}{2\mathrm{tg}^2\alpha}(4+\mathrm{tg}^2\alpha)^{\frac{3}{2}}$. Порада. Див. до № 34. 37. $\frac{a}{2\sin\alpha\sin2\varphi}$.

41. $\frac{4}{23}\sqrt{161}$ м. 42. 0,48 дм = 4,8 см. 43. $\frac{a\sin2\alpha\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\sin\alpha}$. 44. Порада. Скористайтесь опорною задачею – прикладом 2 § 16. 1) $d\left(1+\sqrt{2}\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}\right)$; 2) $m\left(2\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1\right)$; 3) $\frac{\sqrt{2}a\cos\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{2(1+\sqrt{-\cos\sigma})}$; 4) $\frac{2b\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-3\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}}}{1+\sqrt{3}\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}$. 46. У 2 рази. 47. 1) $\sqrt{3}$ дм; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ дм.

48. 1) $2\sqrt{3}$ дм; 2) $2\sqrt{3}$ дм. 49. 8 : 3. 50. 1) У 3 рази; 2) У 2,4 раза. 53. $\mathrm{arcctg}(6\pm\sqrt{23})$. 54. $\mathrm{arctg}\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}$.

Завдання 19

2. 3. 3. 750 л. 4. 18. 5. 7,5 кг. 6. 60 м^3. 7. Так. 8. $9\sqrt{7}$ см^3. 10. 4 м. 11. 1) Трьома взаємно перпендикулярними площинами, що проходять через середини ребер; 2) Поділити ребро на 5 рівних частин і провести через ці позначки площини паралельно основам. 12. 6 м^3. 13. $\sqrt{S_1S_2S_3}$. 14. $\frac{3R^3}{8}$. 15. $8R^3$. 16. 1) $\frac{d^3m(1-m^2)}{2}$; 2) $d^3n^2\sqrt{1-2n^2}$.

Завдання 20

2. 720,75 м^3 або 810 м^3. 3. 0,8 м. 4. $2\sqrt{3}$ м^3. 5. 532 г. 6. $1500\sqrt{3}$ дм^3. 7. 225 см^2, 125 см^3. 8. $\frac{Q\sqrt{Q}}{2}$. 9. 192 см^3. 10. 1) $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ см^3; 2) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см^3. 11. $480\sqrt{3}$ куб. од. 12. 3 см^3. 13. $5148\sqrt{3}$ дм^3. 14. 168 см^3. 15. $252\sqrt{7}$ см^3. 16. $\frac{Q}{2}\sqrt{\frac{S}{2\sqrt{3}}}$. 17. $\frac{7}{4}Q$. 18. $\frac{S^2\sin2\beta}{2a}$. 19. $\frac{1}{8}$ м^3. 20. $192\sqrt{3}$ см^3. 21. $\frac{1}{2}S\sqrt{\pi Q}$. 22. $8\pi a^3$. 23. $\frac{\pi a^2H}{4\cos^2\alpha}$. 24. $\frac{\pi RS}{2\cos\alpha}$. 25. 1) $3\sqrt{3} : 4\pi$; 2) $2 : \pi$; 3) $3\sqrt{3} : 2\pi$; 4) $2\sqrt{2} : \pi$; 5) $\left(\frac{1}{2}k\cdot\sin\frac{360^\circ}{k}\right) : \pi$. 26. $\frac{\pi a^3\mathrm{tg}^3\alpha}{4(\mathrm{tg}\alpha+2)}$. 27. 5400 см^3. 28. $\frac{243}{4}$. 29. $30\sqrt{3}$ см^3. 30. Так. 31. $\frac{125\sqrt{3}}{2}$ дм^3. Порада. Доведіть, що похилі бічні грані – квадрати. 32. $\frac{a^2b\sqrt{3}}{12}$. Порада. Доведіть, що $AA_1 \perp BC$; побудуйте перпендикулярний переріз призми площиною, що проходить через BC, і знайдіть його площу. 33. $\frac{343\sqrt{2}}{4}$ см^3. Порада. Доведіть, що грань, яка проходить через другий катет, – квадрат. 34. 30°. 35. 18 720 см^3. 36. 1530 см^3. 37. $\frac{\pi a^3}{8}\sqrt{2}$. 38. $H=r\sqrt{2}$.

Завдання 21

1. 259 700м^3. 2. Співвідношення золотого перерізу ≈ 1,65. 3. 1) $\frac{5a^2\sqrt{3}}{6}$ м^3; 2) $\frac{10a^2}{3}$ м^3; 3) $5a^2\sqrt{3}$ м^3. 4. 1 : 1. 5. 1 : 5. 6. Площина паралельна основі. 7. $\frac{\sqrt{3}}{9}$ м^3.

8. 1) $\frac{a^3}{24}$; 2) $\frac{a^3}{6}$; 3) $\frac{3a^3}{4}$. **9.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **10.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **11.** 1) $\frac{\sqrt{3}l^3\cos^2\beta\sin\beta}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{3}l^3\operatorname{tg}\alpha}{(4+\operatorname{tg}^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}$. Порада. Скористайтесь результатом (1) і опорною задачею – прикладом 2 § 16; 3) $\frac{4l^3\sin^2\frac{\gamma}{2}\sqrt{1+2\cos\gamma}}{3}$. Порада. Див. пораду до (2); 4) $\frac{l^3\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\left(3-\operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2}\right)}{12}$. Порада. Див. пораду до (2). **13.** 0,5 м³ = 500 дм³. **14.** 8 см³. **15.** 108 см³. **16.** 18 см³. **17.** $\frac{1}{12}ab\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg}\varphi$. **18.** $\frac{abc}{6}$. **19.** 6 см. **21.** $\frac{100r^3}{9}$. **22.** $\frac{32R^3\operatorname{tg}^4\alpha}{3(2+\operatorname{tg}^2\alpha)^3}$. **23.** $\frac{2r^3\operatorname{tg}\alpha\left(1+\sin\frac{\beta}{2}\right)^2}{3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\sin\beta}$. **24.** $\frac{4}{3}R^3\sin^2 2\beta\sin^2 2\alpha\sin^2\beta\operatorname{tg}\alpha$. **25.** $\frac{2V}{a_1^2+a_2^2+a_1a_2}$. **26.** 1 м. **27.** $\frac{7\sqrt{47}a^3}{192}$. **28.** 32,25 см³. **29.** 872 см³. **30.** 42 см³. **31.** 24 см³. **32.** $H\sqrt[3]{1-\frac{2Q\sqrt{3}}{a^2H3}}$. **33.** $\frac{343q}{218}, \frac{125q}{218}$. **34.** $\frac{m^3V}{m^3+n^3}, \frac{n^3V}{m^3+n^3}$. **35.** $\frac{1}{24}(m^3-n^3)\operatorname{tg}\varphi$. **36.** $\frac{H}{\sqrt[3]{m+1}}$. **37.** $\frac{\sqrt[3]{m+n}}{\sqrt[3]{m+n}-\sqrt[3]{m}}$. **38.** $\frac{H\sqrt[3]{m(m+n)}}{\sqrt[3]{(m+n)(p+n+m)}}, \frac{H\sqrt[3]{(m+n)}}{\sqrt[3]{(p+n+m)}}$. **39.** 1500π см³. **40.** 1) 2,25 π см³; 2) 9 см; 3) $\sqrt{\frac{3Q}{\pi H}}$. **41.** $\frac{225\pi}{7}$ см³. **42.** $\frac{225\pi}{7}$ дм³. **43.** 3 см³. **44.** 5 см³. **45.** 72. **46.** 204 см³. **47.** $3078\sqrt{10}\pi$ см³. **48.** 294 см³. **49.** $\frac{1}{2}$ см³. **50.** $\frac{\pi a^3}{2}$. **51.** $\frac{9\pi a^3}{2}$. **52.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{36}$. **53.** $\arccos\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}+1}$. Порада. Розгляньте центральний переріз і знайдіть косинус шуканого кута з трикутника, що має за вершини точки: дотику кола до твірної, центр кулі, вершину конуса. **54.** $\frac{2\pi r^3}{3}\left(\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2-1\right)$. Порада. Розгляньте прямокутний трикутник, гіпотенузою якого є твірна, а вершиною прямого кута – центр кулі. **55.** $\frac{20\pi R^3}{81}\operatorname{tg}\alpha$. Порада. Розгляньте паралелограм, обмежений твірною конуса, діагоналлю прямокутника центрального перерізу циліндра, діаметрами основ циліндра і конуса.

Завдання 22

1. $4\pi\cdot 6375^2$ км². **2.** Увісьмох. **3.** Таке саме. **4.** 440π см². **5.** $\frac{35\pi}{16}\approx 7$ м³. **6.** 1 : 64. **7.** У 4 рази. **8.** 100. **9.** 125. **10.** $R=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. **11.** 1) 64π см², $\frac{256\pi}{3}\approx 256$ (см³); 2) $10\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\approx 10$ (см), $400\,\pi\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\approx 1200$ (см²); 3) 4 см, $\frac{256\pi}{3}\approx 256$ (см³). **12.** 324π см². **13.** 1) 12π кв. од.; 2) 64π кв. од.; 3) 500π см³. **17.** 387 см². **18.** 131 см². **19.** 135 см². **20.** $\frac{125}{8}$ см². **21.** 112 см². **22.** 27π см². **23.** $0,25\operatorname{ctg}\alpha\sin^3\alpha$. **24.** 2 : 1. **25.** 60° або

$\arccos 0{,}2$ (близько до 80°). **28.** $\frac{9\pi}{16}$. **29.** 1) πa^2; 2) $3\pi a^2$; 3) $2\pi a^2$; 4) $\frac{19\pi a^2}{9}$. **30.** 8π дм². **31.** 180π см². **32.** $\frac{2\pi r^3}{3}((\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha)^2 - 1)$. Порада. Врахуйте, що у діаметральному перерізі маємо вписане в рівнобічну трапецію коло, центр якого – точка перетину кутів трапеції, гострий кут прямокутного трикутника (гіпотенуза – бічна сторона, вершина прямого кута – центр кола) при вершині більшої основи дорівнює $90° - \alpha$. **33.** $n : m$. **34.** $\arcsin 2\sqrt{\frac{2m}{4s + m}}$. **35.** $12\pi(12 - \sqrt{11})$ см². **37.** $6\pi a^2(26 - 15\sqrt{3})$. **38.** $(2 + \sqrt{3}) : 1$.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

ПОВТОРЕННЯ ПЛАНІМЕТРІЇ

1. В. **2.** В. **3.** Г. **4.** Г. **5.** В. **6.** Б. **7.** А. **8.** Д. **9.** В. **10.** Г. **11.** Д. **12.** Б. **13.** Г. **14.** В. **15.** Г. **16.** В. **17.** Б. **18.** А. **19.** Д. **20.** Б. **21.** В. **22.** Д. **23.** Г. **24.** Д. **26.** В. **27.** Г. **29.** Д. **30.** Д. **31.** В. **32.** А. **33.** Д.

ПОВТОРЮЄМО КУРС СТЕРЕОМЕТРІЇ ЗА 10 КЛАС

47. Б. Порада. Доведіть, що твердження 1–3 – хибні, а 4–5 – правильні. **48.** В. Порада. Доведіть, що твердження 1–2 – хибні, а 3–5 – правильні. **49.** Г. Порада. Доведіть, що твердження 4 – хибне, а інші – правильні. **50.** Б. **51.** А. Порада. Не забудьте розглянути випадок, коли шукана площина збігається з площиною трикутника. **52.** А. Порада. Не забудьте розглянути випадок, коли шукана площина збігається з площиною трикутника. **56.** 4. **57.** 2; 3; 4. **58.** 3; 4. Порада. Твердження 1 і 5 не завжди виконуються. Твердження 2 – хибне, бо середня лінія або паралельна даній площині, або належить цій площині. **59.** 1; 2; 3; 5. **60.** 3; 4. **62.** Вона паралельна прямим AB і CD. **64.** Шукана площина поділяє відрізки MA, MB, MC у відношенні 2 : 1, починаючи від M. **65.** Шукана площина проходить через середини відрізків MA і MB. **69.** Перпендикуляри проходять через центри шестикутників і середину спільної діагоналі або паралельно цим прямим. **73.** 1) Площина (перпендикулярна до даної прямої); 2) Площина (перпендикулярна до $[AB]$ у його середині); 3) Дві площини (паралельні α і віддалені від неї на a); 4) Площина; 5) Площина; 6) Або перпендикуляр до площини ABC, якщо $A \notin (BC)$, або порожня множина, якщо $A \in (BC)$.

ПОВТОРЮЄМО КУРС СТЕРЕОМЕТРІЇ ЗА 11 КЛАС

74. 1) $\overline{AD_1}$; 2) $\overline{A_1B}$; 3) $\overline{AD}$; 4) $\overline{D_1C}$; 5) $\overline{B_1A}$; 6) $\overline{AD_1}$. **76.** 1–Б, 2–А, 3–В, 4–В. **77.** Немає правильних тверджень. **78.** Правильні твердження: 1, 2, 4. **79.** В. **80.** Д. **81.** В. **82.** А. **83.** $-\frac{3}{2}$. **84.** $\vec{a} \perp \vec{c}$. **85.** $n = m = 1$. **86.** $5x - 3y + z - 6 = 0$. **87.** $15x + 10y + 6z - 30 = 0$. **88.** Можливі чотири випадки: $x + y + z - 11 = 0$, $x + y - z + 5 = 0$, $x - y + z - 7 = 0$, $x - y - z + 9 = 0$. **89.** 1) $ax + by + cz - d = 0$; 2) $-ax + by + cz + d = 0$.

90. 14 кв. од. **91.** (2; 2; 2). **92.** $4y + 4z - P = 0$. **93.** $\sqrt{6}$. **99.** 90°. **100.** 91 см². Порада. Доведіть, що проекція AT_1 висоти AT трикутника ABC є висотою трикутника AB_1C_1 і $KK_1 = 5$ см. **103.** 90°. **104.** $10\sqrt{3}$ дм. **105.** $\frac{2a}{13}(4 - \sqrt{13})$. **106.** 65 см². **107.** 198 см. **118.** $60\sqrt{3}$ см³.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВСТУПУ У ВТНЗ

3. Площина γ, паралельна β, не проходить між α і β, віддалена від β на половину відстані між α і β. **4.** Площина, паралельна α і β, віддалена від α на третину відстані між даними площинами. **5.** 1) $S_6 = \sqrt{7} + \sqrt{3}$; 2) $S_{\text{пер}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$; 3) $60° - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\overline{MK} = -0{,}25\overline{AD} + 0{,}5\overline{AB} + 0{,}25\overline{AC}$; 5) $PT \parallel AC$. **7.** Порада. Скористайтеся координатним методом. **8.** Порада. Розгляньте об'єм піраміди. **9.** Так. **10.** Немає розв'язку. Порада. Врахуйте, що перший корінь – відстань між точками $M(x; y; z)$ і $A(1; 0; 0)$, а другий – між M і $B(0; 1; 0)$; $MA + MB > AB$. **11.** Усі точки відрізка AB, де $A(0; 0; 1)$ і $B(1; 0; 0)$. **12.** $2\arcsin\frac{\sqrt{3}\sqrt{4S^2 + 9a^4}}{4S}$. **13.** $2\frac{a^2\sin\varphi\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **14.** $2\sqrt{2}a^2\sqrt{-\cos 2\alpha}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **15.** 3 : 4. **16.** 256 см² або 400 см². **17.** 96π м². **18.** 15°. **19.** 12 см. **20.** $\frac{4a^2 + b^2}{5}$, $\frac{3a^2 + 2b^2}{5}$, $\frac{2a^2 + 3b^2}{5}$, $\frac{a^2 + 4b^2}{5}$. **21.** $48\sqrt{3}$ см². **22.** $8\sqrt{3}\pi$ м². **26.** $6R^2\sqrt{3}$. **27.** $12R^2$. **28.** $\frac{\pi H\alpha}{120\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{3\sin\frac{\alpha}{2}}}$. **29.** $\frac{\pi H\alpha}{90}\cdot\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. **30.** $R\left(\frac{2}{3}\sqrt{6} \pm 1\right)$. **32.** 324 см³. **33.** $\frac{\pi Q^2}{4H\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **34.** 6. Порада. Візьміть за основу піраміди $\triangle AOB$, тоді її висотою буде OC. Спираючись на значення заданих скалярних добутків, доведіть, що кути COB і COA – прямі. Знайдіть косинус кута AOB, скориставшись властивістю скалярного добутку векторів. **35.** $60\sqrt{3}$ см³. **36.** $\frac{m^2 l}{4}$. Порада. Див. пораду до задачі № 19 завдання 20. **37.** 60°. **38.** 2160 см³. **39.** 1 : 3 : 3 : 5. **40.** 160 см³. **41.** $\frac{4}{3}V$. **42.** $S^2 : Q$. **44.** 25π см², 400π см², 64π см², 16π см². **45.** 32π см². **46.** $0{,}5\pi R^2(7 - 2\sqrt{3})$. **47.** Близько 50° або близько 80°.

ЗМІСТ

---

* Зірочкою у змісті позначено позапрограмний матеріал та матеріал, який відповідає програмі профільного вивчення математики.