Міжнародний гуманітарний університет

Григор'єва Т.І.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ПСИХОЛОГІЇ

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
галузі знань 05 Соціальні та поведінкові науки
за спеціальністю 053 Психологія.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Одеса - 2024

Григор'єва Т.І. Конспект лекцій з дисципліни «Математичні методи в психології» (Галузь знань – 05; Соціальні та поведінкові науки; Спеціальність – 053 Психологія; Освітній ступінь – Бакалавр) / Григор'єва Т.І.; Міжнародний гуманітарний університет – О.: МГУ, 2024. – 55 с.

Рецензенти:

Меленчук Н.І. – кандидат психологічних наук, доцент, доцент кафедри педагогіки та психології Міжнародного гуманітарного університету.

Бикова С.В. – кандидат психологічних наук, доцент, доцент кафедри філософії, політології, психології та права Одеської державної академії будівництва та архітектури.

Конспект лекцій з дисципліни «Математичні методи в психології»
затверджений на засіданні кафедри педагогіки та психології
(№ 1 від 29 серпня 2024 року)

Видання спрямоване закріпити та поглибити теоретичний навчальний матеріал з дисципліни «Математичні методи психології»; містять методичні вказівки до структури курсу, перелік питань до заліку; список рекомендованих джерел та додатки в якому подані критерії оцінювання за дисципліною. Також важливим результатом методичного видання є систематизація теоретичного навчального матеріалу з метою підвищення рівня засвоєння навчального матеріалу.

Зміст

Вступ…… …… ……..….4

Програма навчальної дисципліни «Математичні методи психології»…….…… 4

Структура навчальної дисципліни «Математичні методи психології» ….. 7

Зміст лекцій з дисципліни «Математичні методи психології»……... 7

Лекція 1. Похибки наближених значень чисел …… 8

Лекція 2. Методи теорії ймовірностей …….. 15

Лекція 3. Випадкові величини …….. 18

Лекція 4. Статистичні методи в психології……. 21

Лекція 5. Дисперсійний аналіз. Кореляційний та регресійний аналіз……23

Питання до залку з дисципліни «Математичні методи психології»…...24

Рекомендована література ……...……27

Додатки ……...……29
..

Додаток А. Види та методи контролю ……....……...…….29

Додаток Б. Оцінювання здобувачів вищої та фахової передвищої освіти за навчальну дисципліну у Міжнародному гуманітарному університеті. …….30

Додаток В. Критерії загальних результатів оцінювання знань здобувачів …….....…….....32

ВСТУП

Дисципліна «Математичні методи в психології» сприяє розвитку логічного та аналітичного мислення і надає змогу здобувачам оволодіти методами збору, систематизації, узагальнення, математичної обробки та інтерпретації емпіричних даних, формуванні навичок їх комп'ютерної обробки.

Мета навчальної дисципліни «Математичні методи в психології» полягає у формуванні знань і навичок застосування математичних та статистичних методів для аналізу, інтерпретації та обґрунтування результатів психологічних досліджень. Застосування математичних підходів дозволяє зробити дослідження більш об'єктивними, точними та науково обґрунтованими.

Передумови для вивчення дисципліни – знання із таких дисциплін як-от: «Філософія», «Логіка», «Загальна психологія», «Психодіагностика», «Академічна доброчесність та професійна етика», «Інформаційні технології в діяльності психолога».

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Тема 1. Похибки наближених значень чисел

Основні задачі теорії наближених обчислень в психології. Абсолютна та відносна похибки. Дії над наближеними значеннями чисел. Обчислення з наперед заданою точністю.

Тема 2. Методи теорії ймовірностей

Правила комбінаторики. Ймовірність події. Теореми додавання та множення ймовірностей. Формула повної ймовірності. Формула Байєса. Формула Бернуллі. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Теорема Пуассона.

Тема 3. Випадкові величини

Закони розподілу та числові характеристики дискретної випадкової величини та неперервної випадкової величини. Основні розподіли дискретних випадкових величин. Неперервні розподіли. Нормальний розподіл. Закон великих чисел. Центральна гранична теорема. Системи випадкових величин. Коваріація двох випадкових величин. Коефіцієнт кореляції.

Тема 4. Статистичні методи в психології

Вимірювальні шкали. Генеральна та вибіркова сукупність. Міри центральної тенденції. Статистичний ряд розподілу та його числові характеристики. Статистичні оцінки параметрів розподілу. Перевірка статистичних гіпотез. Параметричні та непараметричні методи порівняння двох вибірок досліджуваних.

Тема 5. Дисперсійний аналіз. Кореляційний та регресійний аналіз

Моделі: випадкова, детермінована, змішана. Однофакторний і двофакторний дисперсійний аналіз. Завдання кореляційного і регресійного

аналізу. Парна лінійна регресійна модель. Рангова кореляція. Нелінійна парна кореляція. Множинна кореляція і регресія. Побудова регресійних моделей. Багатовимірний статистичний аналіз.

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Назви змістових модулів і тем	**Кількість годин**							
	денна форма				**Заочна форма**			
	усього	**у тому числі**			**усього**	**у тому числі**		
		лекц.	**практ**	**сам. роб.**		**лекц.**	**практ**	**сам. роб.**
Тема 1. Похибки наближених значень чисел	14	2	4	8	14		2	12
Тема 2. Методи теорії ймовірностей	20	2	6	12	20		2	18
Тема 3. Випадкові величини	20	4	6	10	20	2		18
Тема 4. Статистичні методи в психології	18	4	6	8	18	2		16
Тема 5. Дисперсійний аналіз. Кореляційний та регресійний аналіз	18	2	6	10	18		2	16
Усього годин	**90**	**14**	**28**	**48**	**90**	**4**	**6**	**80**
ПІДСУМКОВИЙ КОНТРОЛЬ - залік								

ЗМІСТ ЛЕКЦІЙ З ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ПСИХОЛОГІЇ»

Тема 1. Похибки наближених значень чисел

Математика – наука про кількісні співвідношення та просторові форми дійсності, вона являє собою цілісну систему взаємопов’язаних понять, аксіом, теорем, операцій та правил їх виконання. Вона є однією з найдавніших наук і виникла як засіб відображення та перетворення дійсності, як потреба людини в обчисленнях та вимірюваннях.

Як і інші науки, математика ділиться на фундаментальну й прикладну, перша з яких розробляє математичні методи, а друга застосовує їх на практиці.

Розділ математики, що має справу з створенням та обґрунтуванням чисельних алгоритмів для рішення складних задач різних областей науки, називають ***прикладною математикою.***

Головна задача прикладної (обчислювальної) математики – фактичне виявлення рішення з необхідною точністю. Цим вона відрізняється від класичної математики, яка основну увагу приділяє дослідженню умов існування та властивостей рішення.

В історії прикладної математики можна умовно виділити 3 періоди.

Перший період почався 3-5 тисяч років тому. Він був пов'язаний з веденням конторських книг, обчисленням площ і об'ємів, розрахунками простих механізмів; іншими словами – з нескладними задачами арифметики, алгебри та геометрії. Обчислювальними засобами служили спочатку власні пальці, а потім – рахівниці. Вихідні дані містять мало цифр, і більшість викладок виконано точно, без округлень.

Другий період почався з Ньютона. В цей період вирішені завдання астрономії, геодезії і розрахунку механічних конструкцій, що зводяться до звичайного диференціального рівняння, або до алгебраїчних систем з великим числом невідомих. Обчислення виконувались з округленнями; нерідко від результату вимагалась висока точність, тому доводилось зберігати до 8 значущих цифр.

Обчислювальні засоби стали різноманітними: таблиці елементарних функцій, потім арифмометр і логарифмічна лінійка. Швидкість цих засобів була невеликою, і розрахунки зайняли дні, тижні і навіть місяці.

Третій період почався приблизно в 40-х роках 20 століття. Військові задачі потребували недоступної для людини швидкості і привели до розробки ЕОМ. Швидкість навіть найпростіших ЕОМ настільки перевищувала швидкість механічних засобів, що стало можливим проводити обчислення великого об'єму. Це дозволило численно вирішувати нові класи задач. Для рішення багатьох задач досі використовують методи, розроблені в «доелектронний» період, але також з'явилося безліч нових чисельних методів.

Розповсюдженим способом рішення є застосування чисельних алгоритмів (чисельні методи). Їх існує велика кількість і спочатку вони не були пов'язані з використанням ЕОМ, а здійснювалися вручну. Поява комп'ютерів зробила дуже зручним і простим (оскільки вони використовуються в пакетах математичних програм) їх застосування.

Чисельні методи – це методи наближеного або точного розв'язування задач чистої або прикладної математики, які ґрунтуються на побудові послідовності дій над скінченною множиною чисел. Основні вимоги до чисельних методів, щоб вони були стійкими та збіжними.

Методи обчислень називаються ***стійкими***, якщо результати неперервно залежать від вхідних даних задачі, або, якщо похибка округлення, пов'язана з реалізацією методів обчислень на комп'ютерах, залишається обмеженою при заданих межах зміни параметрів методів обчислень.

Методи обчислень називаються ***збіжними***, якщо результати прямують до точного розв'язання задачі при прямуванні параметрів методів обчислень до певних граничних значень.

Основне питання теорії методів обчислень: отримання методів обчислень, які задовольняють вимогам високої точності, стійкості та економічності.

Складання чисельних методів, що задовольняють цим вимогам, представляє собою складну задачу оптимізації методів обчислень.

Сучасні чисельні методи націлені на розробку методів розв'язування складних задач математичної фізики і не тільки. Крім цього, є множина задач, пов'язаних зі статистикою, банківською справою, теорією страхування, багато екологічних задач. Все це відноситься до області чисельних методів і так званої обчислювальної математики. Може скластися враження, що до появи комп'ютерів чисельних методів не існувало, але насправді це звісно не так. Чисельні методи існували з тих пір як з'явились числа, з появою чисел виникли і обчислення.

Для розв'язання математичних задач в основному існує три групи методів:

Аналітичні методи, в яких розв'язок задачі подається у вигляді аналітичних виразів. Їх перевагами є: запис розв'язку у загальному вигляді; висока точність і малий об'єм комп'ютерної пам'яті для зберігання розв'язку. Основний недолік – неуніверсальність, бо тільки невелика частина математичних задач може бути розв'язана аналітично.

Графічні методи, в яких розв'язок задачі знаходиться візуально. Їх перевагою є наочність. Недоліками графічних методів є: велика трудомісткість; низька точність (залежить від точності побудови графіків); неуніверсальність (графіки можна побудувати тільки для невеликої розмірності та ін.).

Чисельні методи, що дозволяють звести розв'язування задачі до виконання скінченного числа арифметичних і логічних дій з числами. При цьому розв'язок визначається як набір чисел, які надалі можуть бути інтерпретовані різним способом (наприклад, подані у вигляді таблиць, графіків, анімації тощо). Їх перевагами є: абсолютна універсальність, бо теоретично можуть бути застосовані для розв'язання будь-яких задач; добре пристосовані для реалізації на комп'ютері. Недоліком є велика трудомісткість у ході ручного рахунку, що, зазвичай, не є проблемою, оскільки вони призначені для використання на комп'ютері.

Таким чином, чисельні методи є основним апаратом розв'язання математичних задач, а їх значущість тільки збільшуватиметься у міру вдосконалення комп'ютерної техніки.

Чисельні методи бувають двох типів: прямі та ітераційні. В ***прямих методах*** розв'язок задачі досягається за скінченну кількість кроків методу після виконання останнього кроку, в ***ітераційних методах*** виконується ряд ітерацій методу до отримання наближеного розв'язку із заданою точністю.

В основному чисельні методи є ітераційними.

Ітерація – це повторення сукупності операцій або процедур для покращення наявного (поточного) наближеного розв'язку задачі.

Нехай x* – розв'язок задачі, тоді ітераційний метод будує так звану ітераційну послідовність $\{x^{(k)}\}$(k=0,1,2,…) наближень розв'язку, при цьому $x^{(k)}$ повинно наближатися до x* зі збільшенням k.

Алгоритм ітераційного методу

1. Задається початкове наближення розв'язку $x^{(0)}$ (на основі апріорних знань про задачу).

2. На k-й ітерації методу (k = 0, 1, 2, …) буде поточне наближення розв'язку $x^{(k)}$. Далі обчислюється наступне наближення $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$, де Ф і є сукупністю операцій або процедур для покращення наближеного розв'язку задачі, яка є суттю конкретного чисельного методу.

3. Перевіряється критерій зупинення ітерацій, тобто перевіряється: чи є отримане наближення $x^{(k+1)}$ розв'язку x^* достатньо близьким (до заданої точності).

Варто зазначити, що вид критерію зупинення ітерацій (тобто припинення обчислень за ітераційним методом) залежить від виду розв'язуваної математичної задачі.

Математика цікавить науковців не сама по собі, а як засіб розв'язання прикладних задач. Чисельні методи на даний час являються ключовим елементом математичного моделювання економічних, соціальних, фізичних, біологічних та інших об'єктів.

Розглянемо, як розв'язується будь-яка реальна задача. Один із способів розв'язання – експеримент. Отримаємо точну відповідь на запитання, але занадто повільним і дорогим способом. Інший спосіб – математичний аналіз конструкції або явища. Такий аналіз застосовується не для реальних явищ, а для деяких математичних моделей цих явищ. У процесі рішення будь-якої задачі визначають 4 етапи (Рис.)

,

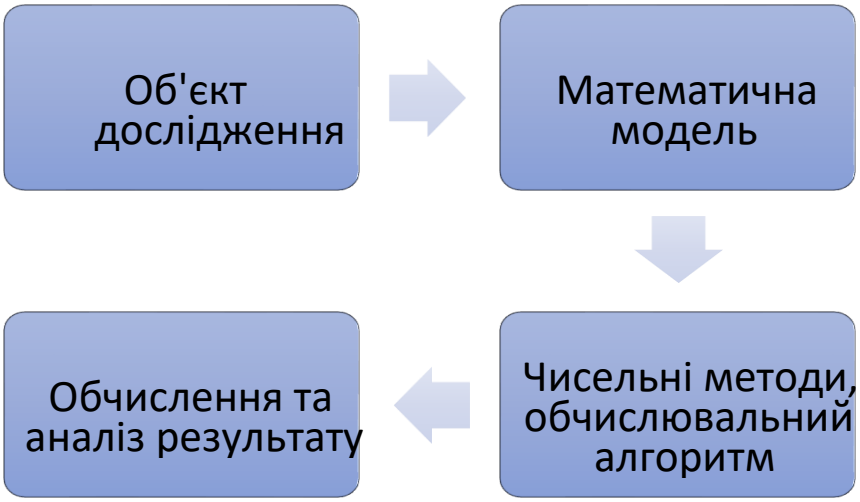

Рис. Етапи рішення задачі

Визначення об'єкту дослідження включає точну постанову умов та цілей розв'язування задач. Далі, враховуючи найбільш суттєві властивості реального об'єкту дослідник описує їх за допомогою математичної моделі.

Існує певна послідовність створення методів обчислень, тісно пов'язана з математичним моделюванням. Для створення методів обчислень, які

використовуються для рішення прикладної задачі, як правило, виконують наступну послідовність етапів:

1. **Виконують аналіз предметної галузі дослідження, виділяють основні закономірності, зв'язки між ними і основні величини, які визначають процеси у досліджуваних об'єктах.**

В кінці цього етапу формулюється задача дослідження.

2. **Створення математичної моделі об'єкта.**

Математична модель – це сукупність рівнянь і нерівностей, які визначають зв'язок між змінними задачі.

Будь-яке досліджуване явище нескінченно складне. Воно пов'язане з іншими явищами природи, які можуть бути не цікавими для задачі, яка розглядається. Математична модель має охоплювати найважливіші для даної задачі сторони явища. Найбільш складна і відповідальна робота при постановці задачі – полягає у виборі зв'язків та характеристик явища, суттєвих для даної задачі.

Якщо математична модель обрана недостатньо ретельно, то які б методи не використовувалися для обчислення – всі висновки будуть недостатньо надійними, а в деяких випадках зовсім неправильними.

3. **Створення методів обчислень, які дають можливість отримати рішення системи рівнянь і нерівностей. Етап математичного дослідження.**

Залежно від складності моделі застосовуються різні математичні підходи. Для більш грубих і нескладних моделей використовуються аналітичні методи. Через грубість моделі фізична точність цього підходу невелика: нерідко такий підхід дозволяє оцінити лише порядки величин. Для більш точних і складних моделей аналітичні розв'язки доводиться отримувати дуже рідко. Звичайно теоретики користуються наближеними математичними методами, які дозволяють отримувати задовільні якісні і кількісні результати. Для найбільш складних і точних моделей основним методом є чисельний.

У всіх випадках математична точність розв'язання має бути в декілька разів вищою, ніж очікувана фізична точність моделі. Шукати вищу математичну точність немає сенсу, так як на загальну точність відповіді це не вплине. Але нижча математична точність неприпустима.

4. **Тестування методу рішення математичної моделі.** Зазвичай виконують на прикладах відомих задач. Якщо рішення співпадають, то математичну модель і метод рішення признають створеними і рекомендують використовувати для моделювання. Інакше повертаються до першого етапу, удосконалюють постановку задачі і повторюють усі етапи до тестування.

5. **Виконання розрахунків, аналіз отриманих результатів, формулювання висновків і рекомендацій.**

Чисельні методи є одним із наймогутніших математичних засобів розв'язання задачі. Найпростіші чисельні методи ми використовуємо усюди, наприклад, добуваючи квадратний корінь на аркуші паперу. Існують задачі, де

без достатньо складних методів обчислень не вдалося б отримати відповіді; класичний приклад – відкриття Нептуна за аномаліями руху Урану.

Сучасні чисельні методи і могутні електронні обчислювальні машини (ЕОМ) дали можливість вирішувати такі задачі, про які півстоліття назад люди могли тільки мріяти. Але застосовувати чисельні методи далеко не просто. Цифрові ЕОМ уміють виконувати тільки арифметичні дії і логічні операції. Тому крім розробки математичної моделі, потрібна ще розробка алгоритму, що зводить всі обчислення до послідовності арифметичних і логічних дій. Вибирати модель і алгоритм треба з урахуванням швидкості і об'єму пам'яті ЕОМ: занадто складна модель може виявитися машині не під силу, а дуже проста – не дасть фізичної точності. Сам алгоритм і програма для ЕОМ повинен бути ретельно перевірений. Перевірка алгоритму також складна процедура.

Строге математичне обґрунтування алгоритму рідко буває вичерпним дослідженням. Наприклад, більшість доказів збіжності ітераційних процесів справедливо лише при точному виконанні всіх обчислень; практично ж число десяткових знаків, що зберігаються, рідко становить 5-6 при «обчисленнях вручну» і 10-12 при обчисленнях на ЕОМ. Тому остаточну оцінку методу можна дати тільки після випробування його в практичних розрахунках.

Для складних задач розробка чисельних методів і складання програм для ЕОМ дуже трудомістка і займає від декількох тижнів до декількох років. Вартість комплексу налагоджених програм нерідко порівнянна з вартістю експериментальної фізичної установки. Зате проведення окремого розрахунку по такому комплексу набагато швидше і дешевше, ніж проведення окремого експерименту. Такі комплекси дозволяють підбирати оптимальні параметри досліджуваних конструкцій, що не під силу експерименту.

Проте чисельні методи не всесильні. Вони не заперечують всі інші математичні методи. Починаючи дослідження проблеми, доцільно використовувати найпростіші моделі та аналітичні методи. І лише у випадку чіткого розуміння основних понять явища, треба переходити до повної моделі і до використання складних методів обчислень; навіть в цьому випадку чисельні методи вигідно застосовувати в поєднанні з точними і наближеними аналітичними методами.

Для оцінки чисельних методів, тобто порівняння між собою методів для розв'язання однієї задачі, вводять такі їх основні характеристики:

− трудомісткість;
− порядок методу;
− збіжність;
− швидкість збіжності;
− стійкість до погрішностей обчислень;
− стійкість до погрішностей у відправних даних.

Під ***трудомісткістю методу*** розуміють кількість і якість обчислень, необхідних для досягнення достатньо близького наближення розв'язку задачі.

Під ***порядком методу*** розуміють вимоги до знань про функції, що входять у математичне формулювання задачі (наприклад, використання в методі похідних цих функцій):

− метод нульового порядку, якщо він використовує тільки значення цих функцій;

− метод першого порядку, якщо він використовує значення функцій і їх перших похідних;

− метод другого порядку, якщо він використовує значення і функцій та їх перших і других похідних і т. д.

Чисельний метод називається таким, що ***збігається***, якщо наближення $x^{(k)}$ прямує до розв'язку x^* зі збільшенням k. Очевидно, що методи, які не збігаються, не цікаві з прикладної точки зору. Тому одним з найважливіших етапів при введенні нового чисельного метода є теоретичне доведення його збіжності, тобто формулювання умов, за яких метод гарантовано збігається. В основному розрізняють такі швидкості збіжності методів.

1. **Лінійна збіжність.** Говорять, що послідовність $\{x^{(k)}\}(k = 0, 1, 2, \dots)$ лінійно збігається до розв'язку x^* (або зі швидкістю геометричної прогресії), якщо існують числа $q\epsilon(0,1)$ і $k_0 > 0$ такі, що

$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq q\|x^{(k)} - x^*\|$ для всіх $k \geq k_0$.

Тут норма $\|x - y\|$ означає відстань між x і y.

2. **Надлінійна збіжність.** Говорять, що послідовність $\{x^{(k)}\}$

$(k = 0, 1, 2, \dots)$ надлінійно збігається до розв'язку x^*, якщо існує послідовність $\{q_k\}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$, $q_k\epsilon(0,1)$ для всіх k, така, що $\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq q_k\|x^{(k)} - x^*\|$ і $q_k \to 0$ при $k \to \infty$.

3. **Квадратична збіжність.** Говорять, що послідовність $\{x^{(k)}\}(k = 0, 1, 2, \dots)$ квадратично збігається до розв'язку x^*, якщо існують числа $C > 0$ і $k_0 > 0$ такі, що

$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq C\|x^{(k)} - x^*\|^2$ для всіх $k \geq k_0$.

Під ***стійкістю до погрішностей обчислень*** розуміють те, що застосування чисельного методу приводить до розв'язку задачі на комп'ютері, незважаючи на помилки округлень і обчислень. Для цього в чисельних методах, якщо потрібно, передбачаються додаткові операції, що не змінюють суть методу, але забезпечують його стійкість до помилок обчислень.

Під ***стійкістю до погрішностей у відправних даних*** розуміють те, що при невеликих погрішностях у відправних даних застосування чисельного методу дозволяє отримати наближений розв'язок задачі з не дуже великою погрішністю. Стійкість до погрішностей у відправних даних досягається, як правило, шляхом модифікації чисельного методу, тобто внесенням змін до суті методу.

Правильний аналіз похибок забезпечує обґрунтованість висновків та достовірність результатів моделювання і вимірювань. Похибки обчислень дозволяють оцінити надійність і точність результатів.

Похибка — різниця між точним значенням величини та її наближеним значенням.

Причини виникнення похибок: обмежена точність вимірювальних приладів; округлення чисел у обчисленнях; методичні недоліки обчислень.

Пряма та обернена задачі теорії похибок

Пряма задача: визначення похибки результату на основі похибок вихідних даних. Наприклад, оцінка похибки суми, різниці, добутку або частки наближених чисел.

Обернена задача: встановлення вимог до точності вихідних даних для забезпечення заданої точності результату.

Абсолютна та відносна похибки

Нехай

$\boldsymbol{a}$ – точне значення деякої величини,

$\boldsymbol{a}^*$ – найближче значення цієї величини.

Тоді

похибка ε наближеного значення величини визначається за формулою:

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{\varepsilon}$$

абсолютна похибка $\boldsymbol{\Delta_a}$ наближеного значення величини визначається формулою:

$$\boldsymbol{\Delta_a} = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^*| = |\boldsymbol{\varepsilon}|$$

гранична абсолютна похибка $\overline{\boldsymbol{\Delta_a}}$ наближеного значення величини визначається за формулою:

$$\boldsymbol{\Delta_a} = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^*| \leq \overline{\boldsymbol{\Delta_a}}$$

На практиці задають граничну абсолютну похибку $\overline{\boldsymbol{\Delta_a}}$, користуючись правилом (якщо невідомі інші дані про $\overline{\boldsymbol{\Delta_a}}$): *Якщо наближене значення деякої величини записане у десятковій системі числення, то гранична абсолютна похибка* $\overline{\boldsymbol{\Delta_a}}$ *дорівнює одиниці останнього знаку (якщо значення одержане без округлення) та половині одиниці останнього знаку (якщо значення одержане з округленням). Останнім знаком вважають перший справа.*

Відносна похибка $\boldsymbol{\delta}$ наближеного значення величини визначається як відношення абсолютної похибки до модуля точного або наближеного значення

$$\boldsymbol{\delta_a} = \frac{|\boldsymbol{\varepsilon}|}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\boldsymbol{\Delta_a}}{|\boldsymbol{a}|} \quad \text{або} \quad \boldsymbol{\delta_a} = \frac{|\boldsymbol{\varepsilon}|}{|\boldsymbol{a}^*|} = \frac{\boldsymbol{\Delta_a}}{|\boldsymbol{a}^*|}$$

Граничною відносною похибкою називають величину $\overline{\boldsymbol{\delta_a}}$, що задовольняє умову:

$$\frac{\boldsymbol{\Delta_a}}{|\boldsymbol{a}|} \leq \overline{\boldsymbol{\delta_a}} \quad \text{або} \quad \frac{\boldsymbol{\Delta_a}}{|\boldsymbol{a}^*|} \leq \overline{\boldsymbol{\delta_a}}\,.$$

Таким чином,

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^* \pm \boldsymbol{\Delta_a},$$

де $\boldsymbol{\Delta_a} = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^*|$.

А оскільки $\boldsymbol{\delta_a} = \frac{\boldsymbol{\Delta_a}}{|\boldsymbol{a}^*|}$, то

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^*(\mathbf{1} \pm \boldsymbol{\delta_a})$$

Або, оскільки $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^*| \leq \overline{\boldsymbol{\Delta_a}}$, то

$$\boldsymbol{a}^* - \overline{\boldsymbol{\Delta_a}} \leq \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{a}^* + \overline{\boldsymbol{\Delta_a}}$$

$$\boldsymbol{a}^*\left(\mathbf{1} - \overline{\boldsymbol{\delta_a}}\right) \leq \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{a}^*\left(\mathbf{1} + \overline{\boldsymbol{\delta_a}}\right)$$

Тут $\overline{\boldsymbol{\Delta_a}}$ і $\overline{\boldsymbol{\delta_a}}$ граничні абсолютна та відносна похибки; $\overline{\boldsymbol{\delta_a}} = \frac{\overline{\boldsymbol{\Delta_a}}}{|\boldsymbol{a}^*|}$.

Значущими цифрами числа називають всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва.

Наприклад:

1. x = 4,570345 – всі цифри в запису цього числа значущі;
2. x = 0,007614 – значущі цифри тільки 7,6,1,4;
3. x = 0,03105600 – значущі цифри 3,1,0,5,6,0,0
   (два останні нулі в запису числа є значущими);

4. а) x = 3750000 – всі цифри значущі;
   б) x = $3{,}75 \cdot 10^6$ – значущі цифри тільки 3,7,5.

Значуща цифра наближеного числа називається **правильною в широкому сенсі (розумінні)**, якщо гранична абсолютна похибка $\overline{\boldsymbol{\Delta_a}}$ цього числа не перевищує одиниці десяткового розряду, що відповідає цій цифрі.

В іншому випадку цифра називається **сумнівною в широкому сенсі.**

Значуща цифра наближеного числа називається **правильною у вузькому сенсі**, якщо гранична абсолютна похибка $\overline{\boldsymbol{\Delta_a}}$ цього числа не перевищує половини одиниці десяткового розряду, що відповідає цій цифрі. В іншому випадку цифра називається **сумнівною у вузькому сенсі**.

Зауваження 1. Сумнівні цифри замінюють у цілому числі нулями.

Зауваження 2. Якщо наближене число записується без вказівки його граничної абсолютної похибки $\overline{\boldsymbol{\Delta_a}}$, то записується тільки правильні його цифри (як у широкому так і у вузькому сенсі). При цьому правильні нулі у кінці числа не відкидаються.

Оцінка похибки

Операція	Δ	δ	Операція	Δ	δ
$x+y$	$\Delta_x+\Delta_y$	$\frac{\lvert x\rvert}{\lvert x+y\rvert}\delta_x + \frac{\lvert y\rvert}{\lvert x+y\rvert}\delta_y$	$x\,/\,y$	$\frac{x\Delta_y+y\Delta_x}{y^2}$	$\delta_x+\delta_y$
$x-y$	$\Delta_x+\Delta_y$	$\frac{\lvert x\rvert}{\lvert x-y\rvert}\delta_x + \frac{\lvert y\rvert}{\lvert x-y\rvert}\delta_y$	x^n	$nx^{n-1}\Delta_x$	$n\delta_x$
$x\cdot y$	$x\Delta_y + y\Delta_x$	$\delta_x+\delta y$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{\sqrt[n]{x}}{nx}\Delta x$	$\frac{\delta_x}{n}$

Похибки при обчисленні наближених значень функції однієї змінної

Нехай задана деяка диференційна функція $y=f(x)$ та x-наближене значення аргументу x_0.

Наближеним значенням y функції y_0 вважають то значення, яке вона набирає при наближеному значенні аргументу, тобто $y=f(x)$, а $y_0=f(x_0)$. Виникає запитання про похибку цього наближення. Як відомо з курсу математичного аналізу, при досить малому приросту аргумента $\Delta(x)$ приріст функції $\Delta(y)$ приблизно дорівнює її диференціалу:

$$\Delta(y)=f(x)-f(x_0)\approx f'(x)\cdot\Delta(x).$$

Якщо відома абсолютна похибка аргументу $\Delta(x)>|x-x_0|$, то *абсолютну похибку функції* можна визначити по формулі

$$\Delta(y)=|f'(x)|\cdot\Delta(x).$$

Відносна похибка функції, визначається по формулі

$$\delta(y)=\frac{\Delta(y)}{|y|}=\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\cdot\Delta(x).$$

Похибки при обчисленні наближених значень функції декількох змінних

Розглянемо тепер функцію, що диференціюється, наприклад, трьох змінних $u = f(x, y, z)$. Нехай x, y, z – наближені значення аргументів x_0, y_0, z_0, обчислені з абсолютними похибками $\Delta(x)$, $\Delta(y)$, $\Delta(z)$. Наближеним значенням u функції u_0 вважають то значення, яке вона набирає при наближених значеннях аргументів $u = f(x, y, z)$, а точним значенням вважають $u_0 = f(x_0, y_0, z_0)$. Для визначення похибок, як і у випадку функції одної змінної, скористаємося формулою диференціала, замінивши їм приріст функції:

$$\Delta u = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) \approx \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\Delta z.$$

Абсолютну похибку $\Delta(u)$ функції при відомих абсолютних похибках аргументів $\Delta(x)$, $\Delta(y)$, $\Delta(z)$ знаходимо по формулі

$$\Delta(u) = \left|\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\right|\Delta z.$$

Відносну похибку визначимо наступним виразом

$$\delta(u) = \frac{\Delta(u)}{|u|}.$$

Тема 2. Методи теорії ймовірностей

У повсякденному житті нам часто доводиться зустрічатися з різними явищами і фактами, які ми називаємо випадковими. Зокрема, інформація, на основі якої розв'язуються практичні задачі в економіці, зазвичай носить наближений, неточний, випадковий характер. Наприклад, власник магазину не знає, скільки буде покупців, бізнесмен – яким буде завтра курс гривні, банкір – чи повернуть йому позику. Але й у випадкових фактах за певних умов можуть бути виявлені певні закономірності. Ці закономірності вивчає теорія ймовірностей. Для розв'язання задач, пов'язаних з аналізом економічної інформації, використовують ймовірнісні та статистичні методи, оскільки характерною особливістю теорії ймовірностей є те, що вона розглядає явища, в яких в тій чи іншій формі присутня невизначеність.

Широко розповсюджене уявлення пов'язує невизначеність і, отже, ймовірність з такими ситуаціями як гра в кості, в рулетку, витягування карт з колоди і т.п. Саме потреба у розв'язуванні практичних задач, пов'язаних з азартними іграми, а також з питаннями страхування і демографії, якими в середині 17 ст. займались такі відомі вчені як Ґюйгенс, Паскаль, Ферма і Яків Бернуллі, призвела до виникнення теорії ймовірностей як самостійної науки. Як і в кожній математичній дисципліні, в теорії ймовірностей існують деякі початкові, первісні поняття, які покладені в її основу. Першим таким поняттям є поняття випадкової події. До нього приходимо так.

По-перше, під подією розуміємо таку дію, про яку можна сказати, що вона відбулась, або відбувається, або може відбутись, або неможлива.

Приклади:

1) 1 вересня почалось навчання у Міжнародному гуманітарному у університеті (подія відбулась).

2) При киданні монети герб випаде зверху (може відбутись, може не відбутись).

3) Витягнути зелену кульку зі скриньки, яка містить 1 білу і 1 чорну кульку (неможлива подія).

По-друге, поняття випадкової події пов'язане з заданням певного комплексу умов.

Приклади комплексів умов:

1) На тверду плоску рівну поверхню кидається кубик правильної форми, виготовлений з однорідного матеріалу, з гранями, позначеними одним, двома,..., шістьома очками.

2) Ведеться спостереження за певною частиною неба в зоряну ніч протягом деякого проміжку часу.

3) Серед населення якого-небудь населеного пункту вибирають навмання 100 чол.

Процес реалізації певного комплексу умов називається експериментом. Тепер можемо дати означення випадкової події. Випадкова подія – це подія, яка може відбутись або не відбутись в результаті здійснення деякого експерименту, тобто в результаті реалізації певного комплексу умов.

Приклади випадкових подій (в зв'язку з вищевказаними комплексами умов):

1) Випадання грані кубика з парною кількістю очок.

2) Поява комети.

3) Наявність хоча б 10-ти чоловік з вищою освітою серед вибраних ста чоловік.

Якщо під час кожної реалізації заданого комплексу умов подія обов'язково відбувається, то вона називається вірогідною. Якщо ж в результаті експерименту подія обов'язково не відбудеться, то це – неможлива подія.

Очевидно, що після одноразового здійснення експерименту, ми не виявимо закономірностей, які властиві для конкретної випадкової події. Однак закономірності можна виявити, якщо здійснювати експеримент багаторазово в однакових умовах.

Наприклад, дані реєстрації народжувань дітей в невеликому населеному пункті за невеликий період часу не дають стійких співвідношень між кількістю народжених хлопчиків і дівчаток. Однак якщо зібрати статистичні дані по всій країні за тривалий період (кілька десятиріч) і проаналізувати їх, то виявиться певна закономірність: на кожну 1000 народжених припадає в середньому 515 хлопчиків.

Отже, другим з початкових понять теорії ймовірностей є поняття масовості явищ (подій).

Масові явища розглядаються як протилежність до одиничних і масовість може проявлятись:

1) в часі;

2) в просторі;

3) і в часі, і в просторі.

Тепер ми можемо остаточно сформулювати, що є предметом теорії ймовірностей.

Предметом теорії ймовірностей є вивчення кількісних закономірностей, характерних для масових однорідних випадкових подій.

Теорія ймовірностей є теоретичною базою для математичної статистики.

Предмет математичної статистики – дослідження закономірностей, яким підпорядковані масові випадкові явища, на підставі статистичних даних – результатів спостережень. Ці закономірності вивчають за допомогою методів теорії ймовірностей.

Статистичне означення ймовірності

Нехай деякий експеримент здійснюється п разів і при цьому в результаті m випробувань відбувається подія А. Відношення m/n називається відносною частотою появи події А в серії з п випробувань. Теорія ймовірностей вивчає лише такі події, для яких має місце властивість стійкості частот. Вона полягає в тому, що частота появи події А при великій кількості випробувань мало відрізняється від деякого числа.

Наприклад, якщо багато разів підкидати монету, то частота випадання герба буде мало відрізнятися від 1/2. Частота народження хлопчика для великої кількості проаналізованих даних буде мало відрізнятися від 0,515.

Звідси, логічно міркуючи, отримуємо так зване статистичне означення ймовірності. Ймовірністю події називається об'єктивно існуюча величина, навколо якої групуються відносні частоти цієї події при великій кількості випробувань. Позначаємо P(A) – ймовірність події А.

Легко зрозуміти, що за значеннями відносних частот можна отримати лише наближене значення ймовірності, тому з точки зору математики таке означення є недосконалим.

Якщо формулювати досконале статистичне означення з точки зору математики, то можна сказати, що ймовірністю події є границя, до якої прямує відносна частота появи події при необмеженому зростанні кількості випробувань:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m(n)}{n}.$$

Це означення належить німецькому математику Ріхарду Мізесу.

Комбінаторика

Разміщення $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

Перестановки $P_m = m!$

Сполучення $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

Класичне означення ймовірності

$P(A) = \dfrac{m}{n}$

m – кількість наслідків, що сприяють події A,

n – загальна кількість наслідків

Властивості ймовірності

$0 \le P(A) \le 1$ для будь-якої події

$P(\Omega)=1$ для достовірної події

$P(\varnothing)=0$ для неможливої події

Ймовірність протилежної події $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Залежні і незалежні події

Дві події називаються незалежними, якщо ймовірність однієї з них не залежить від появи іншої. В іншому випадку події називаються залежними.

Теореми додавання ймовірностей для сумісних подій

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Умовна ймовірність

$P_A(B) = P(B/A)$ – ймовірність події B за умови, що подія A вже настала

Для незалежних подій $P_A(B) = P(B)$

Теореми множення ймовірностей для залежних подій

$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$

Теореми множення ймовірностей для незалежних подій

$P(AB) = P(A)P(B)$

Формула повної ймовірності

Нехай подія А може статися разом з однією з попарно несумісних подій $H_1, H_2, ..., H_n$, які утворюють повну групу (гіпотези). Тоді

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) P_{H_k}(A)$$

Формула гіпотез Байєса

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k) P_{H_k}(A)}{P(A)}$$

Формула Бернуллі

$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$,

$q = 1 - p$, $\qquad C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Найбільш ймовірне число появи події А в n випробуваннях

$np - q \le k \le np + p$

Формула Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{a^m e^{-a}}{m!}, \quad a = np$$

Локальна теорема Муавра-Лапласа

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$ – функція Гауса.

Властивості функції Гауса

1. $\varphi(x)>0$ для всіх x;
2. функція $\varphi(x)$ - парна, $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$. Для $|x| \geq 4$ $\varphi(x) \approx 0$;
4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

$$P(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ - функція Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ - нормована функція Лапласа

Властивості функції Лапласа

1. $\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$
2. $\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x)$
3. функція $\Phi_0(x)$ - непарна, $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$
4. Для $x \geq 4$ $\Phi(x) = 1$, $\Phi_0(x) = 0{,}5$

Тема 3. Випадкові величини

Оскільки результат експерименту може змінюватися від випадку до випадку, то кількісна ознака, яка в ньому розглядається, взагалі кажучи, є змінною величиною, до того ж випадковою. Отже, випадкова величина – це величина, яка в результаті експерименту з випадковим результатом набуває того чи іншого числового значення.

Прикладами випадкових величин, що набувають різних числових значень під впливом багатьох випадкових факторів, можуть бути:

а) кількість очок, яка випадає на верхній грані за одне кидання грального кубика;

б) кількість бракованих виробів серед п навмання вибраних;

в) кількість кидань монети до першої появи герба;

г) кількість викликів, які надходять на телефонну станцію протягом деякого проміжку часу;

д) тривалість часу обслуговування покупця;

е) час виконання деякого завдання і т. д.

Випадкові величини позначатимемо великими літерами X, Y, Z, …, а їхні можливі значення – малими літерами x, y, z, …, латинського алфавіту.

У наведених прикладах траплялися два типи випадкових величин: дискретні величини, множини можливих значень яких скінченні або зліченні, - приклади а) – г) і неперервні величини, множини можливих значень яких суцільно заповнюють деякий інтервал, – приклади д), е)

Зазначимо, що за теоретико-множинним трактуванням основних понять теорії ймовірностей випадкова величина X є функція елементарної події: $X=X(\omega)$, де ω − елементарна подія, яка належить простору $\Omega(\omega\in\Omega)$. При цьому множина можливих значень випадкової величини X складається з усіх значень, яких набуває функція $X(\omega)$. Якщо ця множина скінченна або зліченна, то випадкова величина X називається дискретною, якщо незліченна – неперервною.

Наведемо приклади дискретної і неперервної випадкових величин.

1. Симетричну монету кидають двічі. Нехай випадкова величина X – кількість появ герба. Простір елементарних подій складається з чотирьох елементів:

$\Omega=\{\omega_1=(ЦЦ), \omega_2=(ЦГ), \omega_3=(ГЦ), \omega_4=(ГГ)\}$.

Таблиця значень випадкової величини має такий вигляд:

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$X(\omega_i)$	0	1	2	3

2. Нехай випадкова величина Y є час очікування трамвая на зупинці. Якщо відомо, що проміжок часу між прибуттям трамваїв не перевищує T, то значення Y належать відрізку [0,T].

Для того, щоб описати випадкову величину, необхідно вказати не тільки множину її можливих значень, а й охарактеризувати ймовірності всіх можливих подій, пов'язаних із випадковою величиною (наприклад, імовірність того, що вона набуде того чи іншого значення або потрапить у деякий інтервал). Такий повний опис випадкової величини називається її законом розподілу.

У випадку довільного ймовірнісного простору (Ω,F,P) не будь-які функції, визначені на Ω, можна розглядати як випадкові величини. Вивчаючи закони розподілу випадкових величин, часто доводиться відповідати на питання: яка ймовірність того, що значення випадкової величини $X(\omega)$ належать до тієї чи іншої множини. Отже, для достатньо широкого класу множин $\{B\}$ на числовій прямій повинна бути впевненість, що множина $\{\omega: X(\omega) \in B\}$ належить σ-алгебрі подій F, і тому можна розглядати ймовірність $P\{\omega: X(\omega) \in B\}$. Виявляється, достатньо припустити, що для кожного інтервалу $(-\infty, x)$ множина $\{\omega: X(\omega) \in (-\infty, x)\} = \{\omega: X(\omega) < x\}$ належить σ-алгебрі подій F, і тоді для кожної множини

дійсних сисел B, яка зображається як об'єднання або перетин скінченної або зліченної кількості проміжків, отримаємо, що $\{\omega: X(\omega) \in B\} \in F$.

Означення. Нехай (Ω,F,P) – імовірнісний простір. Випадковою величиною назвемо дійсну функцію $X=X(\omega)$, визначену на Ω і таку, що для кожного дійсного числа x виконується співвідношення:

$\{\omega: X(\omega) < x\} \in F$.

Означення. Функція дійсної змінної x, $x \in R = (-\infty, +\infty)$, визначена рівністю

$F(x)=P\{\omega: X(\omega) < x\} = P$ {X<x},< p=""></x},<>

називається функцією розподілу випадкової величини $X = X(\omega)$.

Функція розподілу є найбільш загальною формою закону розподілу, придатною для характеристики всіх випадкових величин (як дискретних, так і неперервних). Знаючи функцію розподілу F(x) випадкової величини X, можна обчислити ймовірності будь-яких подій, які з нею пов'язані.

Властивості функції розподілу

- • Імовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку [a, b) дорівнює приросту її функції розподілу на цьому проміжку, тобто $\{a \le x \le b\}=F(b)-F(a)$.

  Доведення. Оскільки $\{X‹b\}=\{Xa\}+\{a \le X \le b\}$, то за аксіомою адитивності (події-доданки – несумісні):

  $F(b)=P\{X‹b\}=P\{X‹a\}+P\{a \le X \le b\}=F(a)+P\{a \le X \le b\}$,

  звідки $P\{a \le X \le b\}=F(b)-F(a)$.
- • Значення функції розподілу належать відрізку [0, 1], тобто $0 \le F(x) \le 1$.
- • Якщо $x_1 \le x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$, тобто F(x) – неспадна функція.

Доведення. Якщо $x_1 \le x_2$, то $A=\{X<x_1\} \subset B=\{X<x2\}$, тому $P(A) \le P(B)$, тобто $F(x1) \le F(x2)$.</x</x

- • $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1 \quad i \quad \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0.$

Доведення. $F(\infty) = P\{X < \infty\} = P(\Omega) = 1; \quad F(-\infty) = P\{X < -\infty\} = P(\varnothing)=0.$

- • $\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$, тобто функція F(x) – неперервна зліва.

Доведення. Розглянемо довільну зростаючу числову послідовність

$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

і позначимо $An=\{xn \le X \le x0\}$. Тоді послідовність подій $A1 \supset A2 \supset ... \supset An \supset ...$ − спадна, причому $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. За аксіомою неперервності $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(\varnothing)=0$. З другого боку,

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P\{x_n \le X < x_0\} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(F(x_0) - F(x_n)\right) = F(x_0) - F(x_0 - 0) = 0.$$

- • $P\{X=x\}=F(x+0)-F(x)$.

Доведення. $P\{X = x\} = F(x+0) - F(x)$., де $A = \{X = x\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тоді послідовність подій $A1 \supset A1 \supset ... \supset An \supset ...$ - спадна. За аксіомою неперервності $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$ ⇒

$$\Rightarrow P\{X=x\}=\lim_{n\to\infty}\left(F(x+\frac{1}{n})-F(x)\right)=F(x+0)-F(x).$$

Дискретні випадкові величини. Закон розподілу

Означення. Випадкова величина називається дискретною, якщо множина її можливих значень є скінченною або зліченною.

Нехай X – дискретна випадкова величина, можливими і єдино можливими значеннями якої є числа x1,x2,...,xn. Через pk={X=xk} позначимо ймовірність того, що випадкова величина X набуває значення xk, pk≥0.

Події {X=xk}, $k=\overline{1,n}$ утворюють повну групу попарно несумісних подій, тому $\sum_{k=1}^{n} p_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$

Означення. Законом розподілу ймовірностей (законом розподілу) дискретної випадкової величини називається відповідність між усіма її можливими значеннями та їхніми ймовірностями.

Табличний запис закону розподілу – це таблиця значень xk випадкової величини та відповідних їхніх імовірностей pk:

x_k	x_1	x_2	...	x_n
p_k	p_1	p_2	...	p_n

За допомогою табличного запису закону розподілу можна визначити функцію розподілу F(x) випадкової величини X за формулою:

$$F(x)=P\{X<x\}=\sum_{k:x_k<x} p_k,$$

у якій сумування проводиться за усіма індексами k, для яких xkk випадкової величини X є нескінченною і зліченною, то її закон розподілу також можна записати у формі таблиці, яка складатиметься з двох нескінченних рядків:

xk:x1,x2,...,xn,...

pk:p1=P{X=x1}, p2=P{X=x2},...,pn=P{X=xn},... до того ж

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

<u>Приклад.</u>

У грошовій лотереї розігрується 2 виграші по 1000 грн, 10 виграшів по 100 грн і 100 виграшів по 10 грн за загальної кількості білетів 10000. Визначити закон розподілу випадкової величини X – виграшу власника одного лотерейного білета.

Розв'язання. Можливими значеннями дискретної випадкової величини X є числа x1=1000, x2=100, x3=10, x4=0. Відповідні їхні ймовірності обчислюємо за формулою: pk=nk/n, де nk – кількість виграшних білетів на відповідну суму гривень, n – кількість всіх білетів лотереї. Одержимо:

$$p_1 = \frac{2}{10000} = 0,0002; \quad p_2 = \frac{10}{10000} = 0,001; \quad p_3 = \frac{100}{10000} = 0,01;$$

$$p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) = 1 - (0,0002 + 0,001 + 0,01) = 0,9888.$$

Закон розподілу випадкової величини X запишемо у вигляді таблиці:

$X=x_k$	1000	100	10	0
$P=p_k$	0,0002	0,001	0,01	0,9888

<u>Приклад.</u>

Дискретна випадкова величина X має закон розподілу ймовірностей, що заданий таблицею:

$X=x_k$	-2	1	4	6
$P=p_k$	0,2	0,1	0,3	0,4

Знайти функцію розподілу випадкової величини X.

Розв'язання. Якщо x≤-2, то F(x)=P{X‹x}=0, бо подія X‹x} неможлива.

Якщо -2‹x≤1, то F(x)=P{X‹x}=0,2, бо подія {X‹x} є сумою двох несумісних подій: {X=-2}, яка має ймовірність 0,2, і {X=1}, яка має ймовірність 0,1.

Якщо 4‹x≤6, то F(x)=P{X‹x}=0,2+0,1+0,3=0,6, бо подія {X‹x} є сумою трьох несумісних подій: {X=-2}, яка має ймовірність 0,2, {X=1}, яка має ймовірність 0,1 і {X=4}, яка має ймовірність 0,3.

Якщо x>6, то F(x)=P{X‹x}=1, бо подія {X‹x} є вірогідною.

Отже, функція розподілу заданої дискретної випадкової величини має такий аналітичний вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ 0,2, & -2 < x \le 1; \\ 0,3, & 1 < x \le 4; \\ 0,6, & 4 < x \le 6; \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Графік функції розподілу дискретної випадкової величини має "східчастий" характер

Основні закони розподілу дискретних випадкових величин

Біномний закон розподілу. Нехай проводиться n незалежних випробувань за схемою Бернуллі і p=P(A) − імовірність появи події A в кожному окремому випробуванні. Сформулюємо задачу: написати закон розподілу дискретної випадкової величини X – кількості появ події A в цих n випробуваннях.

Випадкова величина X може набути значень

x0, x1, x2, ... , xn=n.

Імовірності можливих значень xk випадкової величини X обчислимо за біномною формулою:

$$p_k = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p$$

і одержимо закон розподілу описаної випадкової величини X, який називається біномним.

$X=x_k$	0	1	2	...	n
$P=p_k$	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	p^n

Раніше ми вже переконалися, що

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

<u>Приклад.</u>

Прилад складається з чотирьох елементів і ймовірність наявності технічних неполадок у кожному з них становить 0,5. Написати закон розподілу випадкової величини X – кількості елементів приладу, в яких наявні технічні неполадки.

Розв'язання. Можливими значеннями дискретної випадкової величини X є числа x0=0, x1=1, x2=2, x3=3, x4=4. За біномною формулою обчислимо відповідні ймовірності цих значень, знаючи, що p=q=1/2:

$$p_0 = C_4^0 p^0 q^4 = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16};$$

$$p_1 = C_4^1 pq^3 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4};$$

$$p_2 = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8};$$

$$p_3 = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \qquad p_4 = C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

Зробимо перевірку: p0+p1+p2+p3+p4=1/16+1/4+3/8++1/4+1/16=1. Закон розподілу даної випадкової величини має форму таблиці:

$X=x_k$	0	1	2	3	4
$P=p_k$	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

З таблиці видно, що найімовірніша кількість елементів приладу, в яких є технічні неполадки, k0=2.

Розподіл Пуассона. Розподіл імовірностей дискретної випадкової величини X, яка набуває значень

xk:0,1,2, ..., n, ...

з імовірностями

$$p_k = P\{X = x_k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

називається законом розподілу Пуассона, що залежить від параметра λ, λ>0.

Розподіл Пуассона записують у формі таблиці:

$X=x_k$	0	1	2	...	n	...
$P=p_k$	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$	...

Сумуючи всі ймовірності розподілу Пуассона і використовуючи рівність

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!},$$

отримуємо підтвердження основної властивості розподілу:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1.$$

Під час вивчення схеми Бернуллі було зауважено, що при великих n для обчислення ймовірностей Pn(k) доцільно використовувати асимптотичні формули Пуассона, які полегшують ці обчислення. Зокрема, з асимптотичної формули Пуассона випливає, що за допомогою розподілу Пуассона можна апроксимувати біномний закон розподілу, коли кількість експериментів n необмежено зростає

($n \to \infty$) й одночасно ймовірність успіху в одному експерименті необмежено зменшується ($p \to 0$) так, що їх добуток np наближається до числа

$$\lambda : \lim_{n\to\infty} np = \lambda.$$

<u>Приклад.</u>

Електронна пошта банку підтримує зв'язки із сотнею абонентів. Імовірність того, що за одиницю часу на електронну пошту надійде повідомлення від абонента, становить 0,02. Написати закон розподілу випадкової величини X – кількості повідомлень від абонентів за одиницю часу.

Розв'язання. У даному випадку проводиться n=100 випробувань за схемою Бернуллі, і випадкова величина X може набувати значень x0=0, x1=1, x2=2, x3=3, x4=4, ..., x100=100. Імовірність події A – надходження повідомлення від одного абонента є мала, а число n=100 – велике і λ=100·0,02=2, тому відповідні ймовірності обчислюємо за формулою (1):

$$p_0 = P_{100}(0) \approx e^{-2} \approx 0{,}1353;$$
$$p_1 = P_{100}(1) \approx 2e^{-2} \approx 0{,}2707;$$
$$p_2 = P_{100}(2) \approx 2e^{-2} \approx 0{,}2707;$$
$$p_3 = P_{100}(3) \approx \frac{4}{3}e^{-2} \approx 0{,}1804;$$
$$p_4 = P_{100}(4) \approx \frac{2}{3}e^{-2} \approx 0{,}0902;$$

.....

$$p_{100} = P_{100}(100) = 1 - \sum_{k=0}^{99} P_{100}(k).$$

Закон розподілу описаної в задачі випадкової величини X записуємо у формі таблиці:

$X=x_k$	0	1	2	3	4	...
$P=p_k$	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	...

З таблиці видно, що найімовірніша кількість повідомлень від абонентів за одиницю часу – одне або два.

Неперервні випадкові величини. Щільність розподілу

Вище неперервною випадковою величиною ми назвали випадкову величину X, можливі значення якої суцільно заповнюють деякий скінченний або нескінченний проміжок на числовій прямій. Це означення ми далі уточнимо.

Оскільки множина можливих значень неперервної випадкової величини незліченна, то для неї непридатна характеристика розподілу у формі переліку її значень та відповідних імовірностей хоча б з тієї причини, що значення цієї множини неможливо записати як послідовність. Тому характеристика розподілу такої величини базується на понятті функції розподілу.

Означення. Випадкову величину X називають неперервною (або абсолютно неперервною), якщо існує невід'ємна функція p(x) така, що для всіх x функція розподілу випадкової величини X визначається у вигляд

$$F(x) = P\{X < x\} = \int_{-\infty}^{x} p(u)\,du,$$

до того ж функція p(x) неперервна всюди, крім, можливо, скінченної кількості точок

З означення (2) випливає, що функція розподілу неперервної випадкової величини неперервна (інтеграл – неперервна функція верхньої межі інтегрування). Функція p(x) називається щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини X. В точках своєї неперервності функцію p(x) можна визначити як похідну функції розподілу: p(x)=F'(x).

Спираючись на співвідношення (2) та властивості функції розподілу, можемо також записати:

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} p(u)\,du - \int_{-\infty}^{a} p(u)\,du = \int_{a}^{b} p(x)\,dx.$$

З неперервності функції розподілу неперервної випадкової величини виводимо, що P{X=x}=F(x+0)-F(x)=0. Тому для неперервної випадкової величини X

$$P\{a \le X \le b\} = P\{a < X \le b\} = P\{a \le X < b\} = P\{a < X < b\} = \int_{a}^{b} p(x)\,dx.$$

Використовуючи, що F(+∞)=1, з (2) отримуємо основну властивість щільності розподілу

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1.$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

А. Рівномірний розподіл. Нехай на проміжок [a,b] навмання кидають точку, отже, ймовірність потрапляння точки на деяку частину проміжка пропорційна довжині цієї частини проміжка. Випадкову величину визначимо як координату тієї точки відрізка, в яку влучила кинута точка:

X(ω)=ω, ω∈[a,b].

Визначимо функцію розподілу випадкової величини X.

Якщо x≤a, то F(x)=P{X‹x}=P(Ø)=0. Якщо x∈(a,b], то F(x)=P{X‹x}=c(x-a) (імовірність пропорційна довжині проміжка [a,x)). Тоді

F(b)=P{X‹x}=P(Ω)=1=c(b-a) ⇒ c=1/(b-a).

Отже, рівномірний розподіл задають функцією

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b; \\ 1, & x \ge b, \end{cases}$$

яка, очевидно, є неперервною. Відповідну щільність розподілу ймовірностей можна визначити як похідну функції розподілу

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Перевіримо основну властивість щільності розподілу

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \int_{a}^{b} p(x)\,dx = \int_{a}^{b} \frac{dx}{b-a} = 1.$$

Б. Нормальний розподіл. Надзвичайно важливу роль у теорії ймовірностей відіграє нормальний розподіл (закон Гаусса). Він проявляється у всіх випадках, коли випадкова величина X є наслідком дії великої кількості різних випадкових факторів, кожний з яких окремо має на величину X незначний вплив.

Означення. Неперервна випадкова величина X називається розподіленою за нормальним законом, або нормально розподіленою, з параметрами −∞<a0, якщо її щільність розподілу має вигляд:</a

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Перевіримо для нормального розподілу основну властивість щільності розподілу. Для цього в інтегралі

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

зробимо заміну $t = \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}$. Тоді $x = \sigma\sqrt{2}\,t + a;\ dx = \sigma\sqrt{2}\,dt$ і враховуючи, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi},$$

одержимо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1.$$

Обчислимо ймовірність попадання значень нормально розподіленої випадкової величини у заданий інтервал. Для цього в інтегралі

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

зробимо заміну t=(x-a)/σ. Тоді x=σt+a; dx=σdt і враховуючи, що

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \Phi(x), \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{0}^{b} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \int_{0}^{a} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \right) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

одержимо:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Отже, імовірність попадання значень нормально розподіленої випадкової величини в інтервал (α,β) дорівнює різниці значень функції Лапласа Φ(x),якщо

$$x = \frac{\beta-a}{\sigma} \quad i \quad x = \frac{\alpha-a}{\sigma}:$$

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Оскільки функція Φ(x) табульована, то формула (3) є зручною для обчислень.

Якщо взяти α=a-ε, β=a+ε, то з (3) отримаємо:

$$P\{a-\varepsilon < X < a+\varepsilon\} = P\{|X-a| < \varepsilon\} =$$
$$= \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right),$$

тобто

$$P\{|X-a| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Приймемо у формулі (4) ε=3σ Одержимо:

P{|X-a|‹3σ}=2Φ(3)=2·0,49865=0,9973,

тобто ймовірність події {|X-a|‹3σ} близька до одиниці, а це означає, що ця подія майже вірогідна. Звідси маємо так зване правило "трьох сигм": якщо випадкова величина нормально розподілена, то практично вірогідно, що абсолютна величина її відхилення від параметра а не перевищує потроєного параметра σ.

В. Показниковий розподіл. У практичних застосуваннях теорії ймовірностей часто трапляються випадкові величини, які мають показниковий розподіл.

Означення. Неперервна випадкова величина X називається розподіленою за показниковим законом або показниково розподіленою, з параметром α, якщо щільність розподілу її ймовірностей має вигляд:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

де α>0 - параметр розподілу.

Перевіримо для нормального розподілу основну властивість щільності розподілу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} \alpha e^{-\alpha x}\,dx = -e^{-\alpha x}\Big|_{0}^{\infty} = 0-(-1) = 1.$$

Оскільки для x>0

$$\int_{-\infty}^{x} p(u)\,du = \int_{0}^{x} \alpha e^{-\alpha u}\,du = -e^{-\alpha u}\Big|_{0}^{x} = -e^{-\alpha x} - (-1) = 1 - e^{-\alpha x},$$

то відповідна функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Обчислимо ймовірність попадання значень показниково розподіленої випадкової величини у заданий інтервал:

$$P\{a < X < b\} = \int_{a}^{b} p(x)\,dx = \int_{a}^{b} \alpha e^{-\alpha x}\,dx = -e^{-\alpha x}\Big|_{a}^{b} = e^{-\alpha a} - e^{-\alpha b}.$$

Серед усіх законів розподілу неперервних випадкових величин лише показниковому притаманна властивість відсутності післядії, а саме: якщо випадкову величину пов'язати з часом,

то для показникового закону розподілу минуле не впливає на передбачення подій у майбутньому. Наприклад, якщо випадкова величина T – тривалість безвідмовної роботи приладу має показниковий розподіл, то час роботи приладу впродовж інтервалу часу (0,t0) не впливає на величину ймовірності його безвідмовної роботи впродовж наступного інтервалу час (t0,t0+t) а залежить лише від довжини t цього інтервалу.

Час безвідмовної роботи деякого приладу – показниково розподілена випадкова величина T з параметром α=0,02. Знайти ймовірність того, що прилад працюватиме безвідмовно не менше ніж 100 год.

Розв'язання. За формулою (5) обчислюємо:

$$P\{T \geq 100\} = P\{100 \leq T < \infty\} =$$
$$= P\{100 < T < \infty\} = e^{-0,02 \cdot 100} - e^{-\infty} = e^{-2} \approx 0,1353.$$

Випадкові вектори та їхні функції розподілу

Дуже часто в імовірнісних моделях доводиться розглядати відразу кілька випадкових величин. Наприклад, кількість очок, яка випаде за одночасного кидання двох гральних кубиків, є можливим значенням системи двох випадкових величин X і Y, де X – кількість очок, яка випаде на першому кубику, Y – кількість очок, яка випаде на другому кубику. У математичній моделі в таких випадках на ймовірнісному просторі (Ω,F,P) визначені кілька випадкових величин X1,X2,...,Xn, які іноді зручно розглядати як координати випадкового вектора X=(X1,X2,...,Xn)із n-вимірного простору Rn. При цьому випадкові величини X1,X2,...,Xn можуть бути як дискретними, так і неперервними. Закон розподілу випадкового вектора X=(X1,X2,...,Xn) у загальному випадку визначається функцією розподілу.

Означення. Функцією розподілу n-вимірної випадкової величини (X1,X2,...,Xn) називається ймовірність сумісного виконання нерівностей:

$$X_1 < x_1, \ X_2 < x_2, \ \ldots, \ X_n < x_n; \qquad x_i \in \mathbb{R}, \qquad i = \overline{1,n},$$

тобто

F(X1,X2,...,Xn)=P{X1‹x1, X2‹x2,..., Xn‹xn}

Властивості функції розподілу розглянемо для випадку n=2, тобто для двовимірної випадкової величини (X, Y). Функція розподілу F(x,y) має такі властивості

•F(x, y) − неспадна функція за кожним аргументом;

•для функції F(x, y) виконуються такі граничні співвідношення:

F(-∞, y)=0, F(x, -∞)=0, F(-∞, -∞)=0, F(+∞, +∞)=1;

• $\lim\limits_{y \to \infty} F(x,y) = F(x,\infty) = F_X(x); \qquad \lim\limits_{x \to \infty} F(x,y) = F(\infty,y) = F_Y(y),$

де Fx(x)− функція розподілу випадкової величини X; Fy(y)− функція розподілу випадкової величини Y.

Двовимірні випадкові величини

Двовимірну випадкову величину (X, Y) назвемо дискретною, якщо її складові X і Y є дискретними одновимірними випадковими величинами, і неперервною, якщо її складові X і Y є непервними одновимірними випадковими величинами. Складові X і Y двовимірної випадкової величини (X, Y) називають ще її компонентами.

А. Випадок дискретної величини. Для задання дискретної випадкової величини (X, Y) досить задати її можливі значення (xi ,yk) та ймовірності кожного з них:

pik=P{X=xi,Y=yk}, i,k=1,2,...

Для одновимірних випадкових величин X і Y введемо позначення:

pi=P{X=xi}, i=1,2,...; qk=P{Y=yk}, k=1,2,... .

Знайдемо зв'язок між імовірностями pik та pi і qk. Для цього достатньо зауважити, що подію {X=xi} можна представити як суму попарно несумісних подій:

{X=xi}={X=xi, Y=y1}+{X=xi, Y=y2}+...,

звідки за акісомою адитивності

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}$$

.

Аналогічно можна отримати формулу

$$q_k = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ik}$$

. Нарешті,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p_{ik} = \sum_{k=1}^{\infty} q_k = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Б. Випадок неперервної величини. Для двовимірної неперервної випадкової величини (X ,Y) існує невід'ємна функція p(x , y) така, що функція розподілу випадкового вектора (X ,Y) визначається у вигляді

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)\,du\,dv,$$

до того ж функція p(x, y) неперервна всюди, крім, можливо, скінченної кількості точок і називається щільністю розподілу ймовірностей випадкового вектор (X, Y).

З (6) випливає, що в точках неперервності щільність розподілу можна визначити як другу мішану похідну функції розподілу:

$$p(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Використовуючи, що F(+∞, +∞)=1, з (6) отримуємо основну властивість щільності розподілу випадкового вектора (X, Y):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dxdy = 1.$$

Якщо можливі значення двовимірної неперервної випадкової величини (X ,Y), розміщені в області G⊂R2, то формула (6) набуває вигляду:

$$P\{(x,y)\in G\} = \iint_{G} p(x,y)\,dxdy.$$

Знаючи щільність розподілу p(x, y) випадкового вектора (X, Y), можна знайти щільності розподілу його компонент px(x) та py(y). Справді,

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} p(u,v)\,dudv,$$

звідки

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,v)\,dv.$$

Аналогічно можна отримати формулу для py(y):

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u,y)\,du.$$

Незалежність випадкових величин

У попередньому пункті ми показали, як, знаючи закон розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) знайти закон розподілу окремих величин X і Y. Виникає природне питання: чи не можна, знаючи закони розподілу окремих випадкових величин X і Y, знайти закон розподілу випадкового вектора (X, Y)? Виявляється, що це можна зробити лише в одному43 частковому випадку, коли випадкові величини X і Y є незалежні.

Означення. Випадкові величини називаються X1,X2,...,Xn незалежними, якщо для будь-яких дійсних чисел x1,x2,...,xn

F(x1,x2,...,xn)=F1(x1)·F2(x2)·...·Fn(xn)·,

де F(x1,x2,...,xn)− функція розподілу випадкового вектора X1,X2,...,Xn Fk(xk) − функція розподілу випадкової величини Xk, $k=\overline{1,n}$.

Розглянемо випадок n=2. Якщо , X Y − дискретні випадкові величини, то їхня незалежність означає, що для будь-яких i, k події {X=xi} і {Y=yk} є незалежні, тому

pik=P{X=xi, Y=yk}=P{X=xi}·P{Y=yk}=pi, qk, i,k=1,2,... .

Нехай X, Y − неперервні випадкові величини з функціями розподілу Fx(x) і Fy(y) і щільностями розподілу ймовірностей px(x) та py(y) відповідно. Нехай F(x, y) і p(x, y)− функція розподілу і щільність розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y). Тоді за означенням незалежності X і Y маємо: F(x, y)=Fx(x)·Fy(y). Диференціюючи двічі (по x і по y), одержимо:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F'_X(x) \cdot F'_Y(y),$$

тобто p(x, y)=px(x)·py(y).

Можна показати, що умова (7) є не лише необхідною, а й достатньою для незалежності неперервних випадкових величин X і Y. Справді, якщо (7) виконується, то

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)\,du\,dv = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p_X(u)\,p_Y(v)\,du\,dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,du \int_{-\infty}^{y} p_Y(v)\,dv = F_X(x) \cdot F_Y(y),$$

а це означає, що X і Y – незалежні.

Дискретна випадкова величина

Закон розподілу

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

Інтегральная функція розподілу $F(x) = P(X < x)$

Математичне сподівання $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

Дисперсія $D(X) = M(X - M(X))^2$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал *(a;b)*

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

Неперервна випадкова величина

Інтегральна функція розподілу $F(x) = P(X < x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Диференціальна функція розподілу (щільність розподілу ймовірностей)

$$f(x) = F'(x)$$

Умови нормування $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Математичне сподівання $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

Дисперсія $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(x))^2$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервал *(a;b)*

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$$

Біноміальний закон розподілу

$P_n(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$, $q=1-p$

$M(X)=np$ $D(X)=npq$ $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

$np-q\le k\le np+p$

Розподіл Пуассона

$P_n(X=m)=\dfrac{a^m e^{-a}}{m!}$, $a=np$

$M(X)=D(X)=a$

Для простійшего пуассоновського потоку: $P_k(t)=\dfrac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$,

λ - інтенсивність потока

Рівномерний закон розподілу

$$X\sim R[a,b]\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$$

$M(X)=\dfrac{a+b}{2}$ $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$ $\sigma(X)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Експоненціальний (показниковий) закон розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ ke^{-kx}, & x\ge 0\end{cases}\qquad k>0$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-kx}, & x\ge 0\end{cases}$$

$M(X)=\dfrac{1}{k}$ $D(X)=\dfrac{1}{k^2}$ $\sigma(X)=\dfrac{1}{k}$

Нормальний закон розподілу

$X\sim N(m,\sigma)$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

m – математичне сподівання,

σ - середнє квадратичне відхилення

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - m}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - m}{\sigma}) = \Phi_0(\frac{\beta - m}{\sigma}) - \Phi_0(\frac{\alpha - m}{\sigma})$$

$$P(|X - m| < \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) - 1 = 2\Phi_0(\frac{\varepsilon}{\sigma})$$

$$F(x) = \Phi(\frac{x - m}{\sigma})$$

$P(|X - m| < 3\sigma) \approx 1$ (правило трьох сигм)

$\boldsymbol{P(|x - m| < \sigma) = 2\Phi(1) \approx 0{,}6837;}$

$\boldsymbol{P(|x - m| < 2\sigma) = 2\Phi(2) \approx 0{,}9545;}$

$\boldsymbol{P(|x - m| < 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 0{,}9973.}$

Стандартний розподіл $X \sim N(0{,}1)$ - це нормальний розподіл при $m = 0$, $\sigma = 1$

$$f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$F(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Центральна гранична теорема

Якщо незалежні випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ однаково розподілені з математичним сподіванням m_x і дисперсією $D_x = \sigma^2$, то при $n \to \infty$ закон розподілу суми $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$ наближається до нормального

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_S \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - m_s)^2}{2\sigma_s^2}}$$

$$m_S = M(S) = \sum_{k=1}^{n} M(X_k) = n m_x$$

$$\sigma_S^2 = D(S) = \sum_{k=1}^{n} D(X_k) = n\sigma^2$$

Наслідок центральної граничної теореми

При достатньо великих n (вже при n>10)

$$P\left(\alpha \le \sum_{k=1}^{n} X_k \le \beta\right) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{\beta - m_S}{\sigma_S}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_S}{\sigma_S}\right)\right)$$

Коваріація двох випадкових величин

$$K_{XY} = \operatorname{cov}(X, Y) = M((X - MX)(Y - MY)) = \mu_{1,1}$$

$$K_{XY} = M(X \cdot Y) - MX \cdot MY$$

$$K_{XX} = DX \qquad K_{YY} = DY$$

Якщо (X,Y) - дискретна двомірна випадкова величина, то

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - MX)(y_j - MY)p_{ij}\ .$$

Якщо (X,Y) - неперервна двомірна випадкова величина, то

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - MX)(y - MY)f(x,y)dxdy$$

або

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\,f(x,y)dxdy - MX \cdot MY$$

Коефіцієнт кореляції двох випадкових величин X **і** Y

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$$

Тема 4. Статистичні методи в психології

Слово «статистика» часто асоціюється зі словом «математика», і це лякає студентів, які пов'язують математику зі складними формулами, що потребують високого рівня абстрагування.

Але, як говорить Мак – Коннел, статистика – це перш за все спосіб мислення, і для її використання потрібно лише мати небагато здорового глузду ы знати основи математики. В нашому повсякденному житті ми, самі про це не здогадуючись, постійно займаємося статистикою, плануючи бюджет, розраховуючи споживання бензину автомобілем, оцінюючи зусилля, які необхідні для засвоєння якогось курсу, з врахуванням отриманих до цих пір оцінок, передбачаючи ймовірність доброї чи поганої погоди по метеорологічному прогнозу або взагалі оцінюючи як вплине та чи інша подія на наше особисте або сумісне майбутнє, – нам постійно приходиться відбирати, класифікувати і впорядковувати інформацію, пов'язувати її з іншими даними так, щоб можна було робити висновки, які б дали можливість прийняти вірне рішення.

Всі ці види діяльності мало відрізняються від тих операцій, які лежать в основі наукового дослідження і полягає в синтезі даних, отриманих на різних групах об’єктів в тому - 5 - чи іншому експерименті, в їх порівнянні з метою вияснити риси відмінності між ними, в їх співставленні з метою виявити показники, що змінюються в одному напрямку, і, на кінець, в передбаченні окремих фактів на основі тих висновків, до яких призводять отримані результати. Саме в цьому і заклечається мета статистики в науках взагалі, особливо в гуманітарних. В останніх немає нічого абсолютно достовірного, і без статистики висновки у більшості випадків були б чисто інтуїтивними і не могли б складати солідну основу для інтерпретації даних, отриманих в інших дослідженнях.

Математична статистика є ключовим інструментом у психологічних дослідженнях, який забезпечує об'єктивність, точність і надійність результатів, сприяючи науковій обґрунтованості висновків та рішень.

Основні задачі математичної статистики

1. Аналіз закономірностей у випадкових явищах.
2. Оцінка параметрів генеральної сукупності на основі вибірки.
3. Побудова статистичних моделей.
4. Перевірка статистичних гіпотез.
5. Прогнозування на основі аналізу даних.

Обґрунтування вибору математичного методу дослідження. Вибір методу залежить від мети дослідження (оцінка, прогнозування, порівняння); типу даних (кількісні чи якісні); обсягу вибірки; характеру розподілу змінних (нормальний чи ні); наявності зв'язків між змінними.

Вимірювання і шкали

Поняття вимірювання у психології: процес отримання числових даних для оцінки психічних явищ і процесів. Вимірювання у психології є процесом кількісного або якісного оцінювання психологічних явищ.

Види вимірювальних шкал

1. **Номінальна шкала**. Класифікація об’єктів за категоріями без упорядкування (наприклад, стать, професія, типи темпераменту).
2. **Порядкова шкала**. Дозволяє впорядковувати об’єкти, але без рівності інтервалів між значеннями (наприклад, ранжування рівнів стресу, рівень тривожності: низький, середній, високий).
3. **Інтервальна шкала**. Забезпечує не лише упорядкування, а й рівність інтервалів, але не має абсолютного нуля (наприклад, шкала температури за Цельсієм).
4. **Шкала відношень**. Включає абсолютний нуль, що дозволяє порівнювати значення за пропорціями (наприклад, час реакції).

Генеральна та вибіркова сукупність

Генеральна сукупність охоплює всі об’єкти, що є предметом дослідження, тоді як вибіркова сукупність є підмножиною генеральної, яка використовується для аналізу.

Збір первинного матеріалу, робота з даними та їх обробка

1. **Етапи збору даних**. Формулювання мети дослідження. Вибір методів (опитування, експеримент, спостереження). Підготовка інструментів (анкети, тести).
2. **Обробка даних**. Кодування даних. Побудова статистичних рядів розподілу. Обчислення числових характеристик.

Міри центральної тенденції включають середнє арифметичне, моду та медіану. Середнє арифметичне показує середнє значення сукупності, мода відображає найчастіше значення, а медіана — центральне значення, що ділить сукупність навпіл.

Статистичний ряд розподілу — це впорядкований набір даних, який показує частоту повторюваності значень. Його числові характеристики включають середнє, дисперсію та стандартне відхилення. Емпірична функція розподілу визначає відносну частоту випадкової величини, не перевищуючи заданого значення.

Показники варіації статистичного ряду

Дисперсія (σ^2) - середній квадрат відхилень від середнього значення.

Стандартне відхилення (σ) - корінь квадратний з дисперсії.

Розмах варіації - різниця між максимальним і мінімальним значенням.

Коефіцієнт варіації (V) - відношення стандартного відхилення до середнього значення.

Полігон частот — ламана, що з'єднує точки, відповідні частотам значень. Полігон відносних частот показує частку кожного значення відносно загальної кількості спостережень. Гістограма частот та гістограма відносних частот графічно відображають розподіл даних.

Статистичні оцінки параметрів розподілу включають точкові (наприклад, середнє значення) та інтервальні оцінки, що визначають довірчий інтервал для параметра.

Побудова довірчих інтервалів. Довірчий інтервал — інтервал, який з ймовірністю $1-\alpha$ містить істинне значення параметра.

Перевірка статистичних гіпотез

Психологічна гіпотеза — це обґрунтоване припущення про наявність певного психологічного явища, його закономірностей, зв'язків або механізмів. **Психологічна гіпотеза** формується на основі теоретичних знань, емпіричних спостережень і попередніх досліджень. Гіпотеза служить орієнтиром у проведенні психологічного дослідження і визначає його основну мету та завдання.

Наукові психологічні гіпотези висуваються для пояснення конкретних психологічних феноменів і їх взаємозв'язків. Формулюються на основі існуючих теорій і знань. Приклад: "Інтенсивність тривожності впливає на продуктивність розумової діяльності".

Статистичні гіпотези є формалізованим відображенням наукової гіпотези у вигляді математичних тверджень, які можна перевірити за допомогою методів статистичного аналізу.

Етапи перевірки статистичних гіпотез:

1. Формулювання нульової (H_0) та альтернативної (H_1) гіпотез.
2. Вибір рівня значущості (α).
3. Вибір статистичного критерію.
4. Розрахунок p-значення.
5. Висновок: прийняття або відхилення H_0.

Перевірка статистичних гіпотез передбачає прийняття або відхилення припущення про розподіл даних. Гіпотезу про нормальний розподіл перевіряють за критерієм Пірсона (χ^2-критерій), який порівнює емпіричний та теоретичний розподіли.

Приклад побудови моделі психологічної задачі за допомогою психологічної та статистичної гіпотези

Приклад: Вплив музики на рівень концентрації уваги у студентів

Постановка задачі

Дослідник хоче з'ясувати, чи впливає прослуховування класичної музики під час виконання завдання на рівень концентрації уваги у студентів.

1. Формулювання психологічної гіпотези

Психологічна гіпотеза. Прослуховування класичної музики покращує рівень концентрації уваги у студентів під час виконання завдань.

2. Формулювання сатистичних гіпотез

Нульова гіпотеза (H_0). Музика не впливає на рівень концентрації уваги. Середній показник рівня уваги у студентів з музикою і без музики однаковий.

Альтернативна гіпотеза (H_1). Музика позитивно впливає на рівень концентрації уваги. Середній показник рівня уваги в групі з музикою вищий, ніж у групі без музики.

3. Дослідження

1. **Збір даних**.

У дослідженні беруть участь дві групи студентів (по 30 осіб у кожній).

Група 1. Виконує завдання під класичну музику.

Група 2. Виконує те ж завдання у тиші.

Для оцінки концентрації використовують стандартний тест на увагу (наприклад, пошук чисел на час), результатом якого є кількість правильних відповідей.

2. **Збір показників**:

Група 1 (з музикою). Середній результат = 85 балів,
стандартне відхилення = 10.

Група 2 (без музики). Середній результат = 78 балів,
стандартне відхилення = 12.

4. Статистичний аналіз

Метод перевірки: двовибірковий t-тест для незалежних вибірок.

Гіпотези:

H_0: $\mu 1 = \mu 2$ (середні значення рівні).

H_1: $\mu 1 > \mu 2$ (середнє значення групи з музикою більше).

Обчислення t-статистики та p-значення:

Якщо $p < 0.05$, H_0 відхиляється на користь H_1.

5. Результати

Після розрахунків отримали:

$$t = 2.45, p = 0.01.$$

Оскільки $\mathbf{p < 0.05}$, нульова гіпотеза відхиляється. Це означає, що прослуховування класичної музики має значущий позитивний вплив на рівень концентрації уваги.

6. Висновок

На основі отриманих результатів підтверджується психологічна гіпотеза: класична музика покращує рівень концентрації уваги у студентів.

Цей приклад демонструє, як психологічна гіпотеза спочатку формулюється на основі теоретичних міркувань, а потім перевіряється за допомогою статистичних методів.

Параметричні та непараметричні методи порівняння двох вибірок

Параметричні методи порівняння вибірок включають t-критерій Стьюдента. Його застосовують для однієї вибірки, щоб оцінити відмінність середнього значення від теоретичного; незалежних вибірок, щоб порівняти середні двох груп; залежних вибірок, щоб оцінити різницю між парними спостереженнями.

Непараметричні методи, такі як критерій U-Манна-Уітні, використовуються, коли дані не відповідають нормальному розподілу. Він дозволяє порівнювати медіани двох незалежних вибірок.

Усі ці методи забезпечують можливість коректного аналізу психологічних даних, інтерпретації результатів і формулювання висновків, що сприяє розв'язанню завдань психології.

Обґрунтування вибору технології психологічної допомоги. Вибір базується на аналізі результатів психологічних тестів; індивідуальних особливостей клієнта; даних статистичного аналізу ефективності методів.

Використання інформаційних та комунікаційних технологій у дослідженнях психолога. Застосування програм для статистичного аналізу (SPSS, R, Python). Використання онлайн-опитувань і тестів для збору даних (гугл форма). Автоматизація аналізу великих масивів даних. Візуалізація результатів (графіки, діаграми).

Критерій Стьюдента (t-критерій) — це статистичний тест, який використовується для перевірки гіпотез про середні значення однієї або двох вибірок, коли розподіл вибірки є нормальним або близьким до нормального, а розмір вибірки невеликий (звичайно, менше 30).

Типи задач, де застосовується критерій Стьюдента

1. **Перевірка середнього значення однієї вибірки (One-sample t-test)**. Застосовується, коли необхідно перевірити, чи дорівнює середнє значення вибірки заданому значенню. Наприклад, чи середній бал студентів з певного предмету дорівнює 70.
2. **Перевірка рівності середніх значень двох незалежних вибірок (Independent two-sample t-test)**. Використовується для порівняння середніх значень двох незалежних груп, наприклад, чи відрізняється середня зарплата чоловіків та жінок в одній організації.
3. **Перевірка рівності середніх значень двох залежних вибірок (Paired t-test)**. Використовується для порівняння середніх значень двох залежних або парних вибірок. Наприклад, дослідження ефективності нового препарату шляхом порівняння середніх показників здоров'я до і після лікування у однієї і тієї ж групи пацієнтів.
4. **Оцінка довірчих інтервалів для середнього значення**. t-критерій використовується для побудови довірчих інтервалів для середнього значення вибірки, коли розмір вибірки невеликий і стандартне відхилення популяції невідоме.

Приклади задач

1. **Порівняння ефективності двох методів навчання**. Є дві групи студентів, одна з яких навчається за традиційною методикою, а інша — за новою. Застосування t-критерію дозволяє визначити, чи є статистично значуща різниця в середніх балах між цими групами.
2. **Оцінка впливу дієти на вагу**. Перед початком і після закінчення дієти вимірюється вага групи людей. Застосування парного t-тесту дозволяє оцінити, чи є статистично значущі зміни у вазі після дієти.
3. **Перевірка відповідності середнього значення стандарту**. Виробник напоїв хоче перевірити, чи середній вміст цукру в новому продукті відповідає встановленому стандарту 20 грам на порцію. Для цього застосовується одновибірковий t-тест.

Критерій Стьюдента є потужним інструментом для статистичного аналізу, особливо коли дані мають нормальний розподіл і розмір вибірки невеликий. Цей метод допомагає перевіряти гіпотези, що стосуються середніх значень, і широко використовується в психології.

Критерій Пірсона (χ^2-критерій) – це статистичний тест, який використовується для перевірки гіпотез про відповідність спостережуваних і теоретичних частот або для оцінки зв'язку між категоріальними змінними. Його часто застосовують у задачах, де дані представлені у вигляді таблиць спряженості (таблиць частот).

Типи задач, де застосовується критерій Пірсона

1. **Перевірка відповідності спостережуваних і теоретичних розподілів (χ^2-тест на відповідність)**. Використовується, коли необхідно перевірити, чи спостережувані частоти в певних категоріях відповідають теоретично очікуваним частотам. Наприклад, чи відповідає спостережуваний розподіл виборців певного віку теоретично очікуваному розподілу.
2. **Перевірка незалежності двох категоріальних змінних (χ^2-тест незалежності)**. Застосовується, коли потрібно перевірити, чи є залежність між двома категоріальними змінними. Наприклад, чи залежить вибір певного товару від статі покупця.
3. **Перевірка однорідності (χ^2-тест на однорідність)**. Використовується для перевірки, чи однакові розподіли певної змінної в різних вибірках. Наприклад, перевірка, чи однакові розподіли улюблених видів спорту серед студентів різних факультетів.

Приклади задач

1. **Перевірка генетичних розподілів**. В задачах генетики часто використовують критерій Пірсона для перевірки, чи спостережуваний розподіл ознак у потомстві відповідає теоретичному розподілу за законом Менделя.
2. **Аналіз маркетингових даних**. Наприклад, дослідження залежності між віковою групою та вибором певного типу продукту. Критерій Пірсона допоможе визначити, чи існує зв'язок між цими двома змінними.

3. **Перевірка рівномірності розподілу голосів на виборах**. Якщо є підозри на фальсифікації, χ^2-тест можна застосувати для перевірки відповідності спостережуваних результатів голосування теоретичному рівномірному розподілу.

4. **Оцінка ефективності рекламних кампаній**. Аналіз залежності між регіоном та ефективністю рекламної кампанії (кількість покупок після проведення кампанії в різних регіонах).

Критерій Пірсона є дуже корисним для аналізу якісних даних, зокрема для перевірки відповідності спостережуваних даних очікуваним значенням або для оцінки залежності між двома категоріальними змінними. Він широко використовується в психології, соціальних науках, медицині, маркетингу, генетиці та інших галузях, де необхідно аналізувати взаємозв'язки між категоріальними змінними.

U-критерій Манна-Уїтні (також відомий як **тест Манна-Уїтні** або **непараметричний U-тест**), є одним із найбільш використовуваних непараметричних методів для порівняння двох незалежних вибірок. Він дозволяє визначити, чи відрізняються розподіли двох вибірок без припущення про нормальний розподіл.

Сутність U-критерію Манна-Уїтні: U-критерій Манна-Уїтні перевіряє нульову гіпотезу про те, що дві вибірки походять з однакових розподілів. Тобто, він оцінює, чи одна з вибірок має значно більші або менші значення порівняно з іншою

Тема 5. Дисперсійний аналіз. Кореляційний та регресійний аналіз

Дисперсійний аналіз, кореляційний та регресійний аналіз є ключовими методами математичної статистики, які використовуються для оцінки достовірності результатів психологічних досліджень, встановлення зв'язків між змінними та побудови моделей для прогнозування.

Дисперсійний аналіз застосовується для оцінки міжгрупових та внутрішньогрупових дисперсій. Міжгрупова дисперсія відображає варіацію між середніми значеннями груп, а внутрішньогрупова – варіацію всередині кожної групи. У психології однофакторний дисперсійний аналіз дозволяє оцінити вплив одного фактора на залежну змінну. Модель такого аналізу порівнює середні значення декількох груп і визначає, чи є різниця між ними статистично значущою. Наприклад, дослідження ефективності різних методів навчання на академічну успішність студентів. У випадку двофакторного дисперсійного аналізу враховується вплив двох факторів одночасно, причому з врахуванням або без врахування взаємодії між ними. Наприклад, аналіз впливу статі та віку на рівень тривожності. Результати дисперсійного аналізу інтерпретуються на основі статистичних критеріїв, що дозволяє зробити висновки про значущість впливу факторів.

Кореляційний аналіз використовується для вивчення зв’язку між змінними. Кореляція може бути лінійною, нелінійною, парною або множинною. Парна кореляція визначає зв’язок між двома змінними, а множинна – між

кількома незалежними змінними і однією залежною. Основними показниками кореляції є коефіцієнт кореляції Пірсона для кількісних даних і Спірмена для рангових даних. Коефіцієнт Пірсона використовується для нормального розподілу і кількісних змінних, а Спірмена – для непараметричних даних, наприклад, ранжування рівня стресу. Коефіцієнт кореляції Кендалла застосовується для невеликих вибірок і дозволяє оцінити силу зв'язку між ранговими змінними. Множинний кореляційний аналіз допомагає встановити комплексний вплив кількох змінних на одну залежну змінну. Його реалізація можлива за допомогою статистичних пакетів, таких як SPSS чи R.

Коефіцієнт кореляції Пірсона

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Де: r – коефіцієнт кореляції Пірсона;
x_i і y_i – значення змінних X та Y для i-го спостереження;
$\bar{x}$ і $\bar{y}$ – середні значення змінних X та Y;
n – кількість спостережень.

Коефіцієнт кореляції Спірмена

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

Де r_s – коефіцієнт кореляції Спірмена;
d_i – різниця між рангами відповідних значень x_i і y_i;
n — кількість спостережень.

Формула коефіцієнта кореляції Кендалла

$$\tau = \frac{C - D}{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

Де C – кількість узгоджених пар спостережень (x_i, y_i) і (x_j, y_j)
(якщо $x_i > x_j$ та $y_i > y_j$ або якщо $x_i < x_j$ та $y_i < y_j$);
D – кількість неузгоджених пар (якщо $x_i > x_j$ та $y_i < y_j$ або якщо $x_i < x_j$ та $y_i > y_j$);
n – кількість спостережень.

Регресійний аналіз використовується для побудови моделей, що описують залежність між змінними. У психології часто застосовують лінійну регресію для вивчення впливу змінних, таких як мотивація та успішність, на загальний результат. Нелінійні регресійні моделі застосовуються у випадках складних залежностей, наприклад, для моделювання психологічних реакцій на стрес. Логістична регресія використовується для прогнозування бінарних результатів, наприклад, наявності або відсутності депресії. Її особливістю є використання ймовірностей для побудови моделей. Множинна регресія дозволяє оцінити вплив кількох факторів на залежну змінну, що є важливим у психологічних дослідженнях.

Багатовимірний статистичний аналіз охоплює **кластерний**, **дискримінантний** і **факторний** аналіз.

Кластерний аналіз використовується для групування об'єктів на основі схожості, наприклад, для класифікації учнів за стилями навчання.

Дискримінантний аналіз дозволяє створити моделі для класифікації об'єктів за групами, наприклад, у дослідженні професійної орієнтації.

Факторний аналіз спрямований на визначення прихованих факторів, що впливають на змінні, наприклад, виявлення основних компонентів, які визначають особистісні характеристики. Спільними рисами кластерного, дискримінантного та факторного аналізу є аналіз багатовимірних даних, тоді як відмінності полягають у меті: класифікація, побудова дискримінантної моделі або виявлення факторів.

Висновки за результатами багатовимірного аналізу дозволяють систематизувати дані, глибше зрозуміти природу досліджуваних явищ та представити результати у вигляді графіків і діаграм, що сприяє більш ефективній інтерпретації та використанню у практичній діяльності.

Приклади застосування математичних методів в психологічних задачах

Математичні методи займають важливе місце у вирішенні психологічних задач, забезпечуючи точність аналізу, систематизацію даних та прогнозування результатів. Розглянемо приклади застосування основних математичних методів у психології.

Приклад 1. Описова статистика. Використовується для підсумування та упорядкування психологічних даних.

Наприклад, середній рівень стресу у вибірці людей визначається шляхом обчислення середнього арифметичного. Медіана дозволяє оцінити середню точку розподілу даних, а стандартне відхилення вказує на варіабельність показників.

Приклад 2. Кореляційний аналіз. Використовується для виявлення взаємозв'язку між двома змінними.

Наприклад, дослідження взаємозв'язку між рівнем стресу та академічною успішністю може показати, чи впливає високий рівень стресу на зниження оцінок. Коефіцієнт кореляції Пірсона визначає силу та напрямок цього зв'язку. Кореляція змінюється від -1 до 1. Значення, близьке до 1 або -1, вказує на сильний зв'язок, а близьке до 0 – на слабкий. Нариклад, кореляція між тривалістю сну та продуктивністю на роботі складає 0.7, що вказує на сильний позитивний зв'язок.

Приклад 3. Регресійний аналіз. Використовується для прогнозування значення залежної змінної на основі незалежних змінних. Наприклад, за допомогою регресійного аналізу можна передбачити рівень професійного вигорання на основі таких змінних, як тривалість робочого дня, кількість стресових ситуацій та рівень підтримки в колективі. Нариклад, якщо коефіцієнт регресії між кількістю годин роботи та рівнем вигорання дорівнює 0.5, то збільшення робочого часу на 1 годину підвищує рівень вигорання на 0.5 бала.

Приклад 4. Тестування гіпотез дозволяє перевіряти припущення щодо відмінностей або зв'язків між змінними. Наприклад, за допомогою t-тесту можна перевірити, чи існують статистично значущі відмінності між рівнем мотивації у

групах чоловіків і жінок. Критерій χ^2 дозволяє визначити, чи відрізняється розподіл категорійних змінних, наприклад, типів темпераменту серед різних вікових груп.
Правило: Встановіть нульову гіпотезу H0 (наприклад, відмінності немає) та альтернативну H1. Використовуйте критичне значення для прийняття рішення.
Приклад: У дослідженні мотивації p-значення = 0.03. Оскільки $p < 0.05$, нульова гіпотеза відхиляється.
Приклад 5. Факторний аналіз використовується для виявлення латентних змінних або факторів, що пояснюють взаємозв'язки між великою кількістю змінних. Наприклад, у психометрії цей метод допомагає виділити ключові компоненти, такі як екстраверсія або нейротизм, на основі відповідей респондентів у психологічних тестах.
Нариклад, у тестуванні особистісних рис можна виділити два фактори: соціальна активність та емоційна стабільність.
Приклад 6. Кластерний аналіз використовується для групування об'єктів за схожістю. Наприклад, кластеризація школярів за рівнем мотивації до навчання може допомогти виявити групи з низькою, середньою та високою мотивацією для подальшої розробки педагогічних підходів. Якщо обрати метрику відстані (наприклад, евклідову) та метод кластеризації (ієрархічний або k-means), то в результаті групування студентів за їхнім стилем навчання ми отримаємо три основні кластери: теоретики, практики та інтегратори.
Приклад 7. Аналіз надійності та валідності тестів використовується в психологічному тестуванні для оцінки якості інструментів. Наприклад, коефіцієнт Кронбаха (α) дозволяє оцінити внутрішню узгодженість тесту, а аналіз кореляцій між пунктами тесту виявляє, наскільки кожен пункт відповідає загальній шкалі. Надійність вважається прийнятною, якщо $\alpha > 0.7$. Для тесту на депресію значення $\alpha = 0.85$ свідчить про високу надійність.
Приклад 8. Моделювання психологічних процесів використовується для аналізу складних систем. Наприклад, моделювання прийняття рішень в умовах стресу за допомогою математичних моделей, таких як дерева рішень, дозволяє передбачити реакції людей на певні ситуації.
Правило: Створіть модель, що описує основні етапи процесу, та перевірте її адекватність на основі емпіричних даних.
Приклад: Модель прийняття рішень у кризових ситуаціях включає три етапи: оцінка ризику, вибір стратегії та реалізація рішення.
Приклад 9. Дискримінантний аналіз застосовується для класифікації об'єктів за заданими критеріями. Наприклад, аналіз даних про респондентів дозволяє класифікувати їх на групи з високим та низьким рівнем тривожності.
Правило: Використовуйте функцію дискримінантів для максимізації різниць між групами.
Приклад: Аналіз студентів показує, що фактори "академічна підтримка" і "самостійність" ефективно відокремлюють групи з різним рівнем мотивації.
Приклад 10. Психометрія використовується для побудови та аналізу шкал у тестах. Наприклад, за допомогою математичних методів визначаються

оптимальні порогові значення тестів на визначення депресії, щоб мінімізувати помилкові результати.
Правило: Обчисліть дискримінаційну здатність кожного пункту тесту, щоб забезпечити його відповідність загальній шкалі.
Приклад: У тесті на стрес видалено пункт із низьким коефіцієнтом кореляції ($r = 0.1$).

Приклад 11. Багатовимірний аналіз – Використовується для аналізу даних, що мають велику кількість змінних. Наприклад, аналіз впливу декількох факторів, таких як тривалість сну, рівень фізичної активності та раціон харчування, на рівень когнітивних функцій у людей похилого віку.
Правило: Використовуйте методи зменшення розмірності (наприклад, головні компоненти) для спрощення інтерпретації результатів.
Приклад: Дослідження показало, що когнітивні функції найбільше залежать від тривалості сну та збалансованого харчування.

Застосування математико-статистичних методів у психології дозволяє отримати точні результати, що сприяють глибшому розумінню психічних явищ та ефективному вирішенню практичних задач. Використання комп'ютерних засобів, таких як SPSS, R чи Python, значно спрощує проведення аналізу та підвищує його ефективність.

ПИТАННЯ ДО ЗАЛІКУ
З ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ПСИХОЛОГІЇ»

1. Похибки обчислень. Основні задачі теорії наближених обчислень.
2. Абсолютна та відносна похибки.
3. Дії над наближеними значеннями чисел.
4. Обчислення з наперед заданою точністю.
5. Оцінка похибок значень функцій.
6. Статистичне означення ймовірності. Геометричне означення ймовірності. Класичне означення ймовірності.
7. Сумісні і несумісні події. Теореми додавання ймовірностей .
8. Умовна ймовірність. Залежні та незалежні події. Теореми множення ймовірностей.
9. Протилежні події. Ймовірність протилежної події.
10. Формула повної ймовірності. Формула гіпотез Байєса.
11. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі.
12. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Теорема Пуассона.
13. Випадкові величини. Закони розподілу та числові характеристики дискретної випадкової величини та неперервної випадкової величини.
14. Властивості математичного сподівання. Моменти. Дисперсія. Властивості дисперсії
15. Біномінальний розподіл. Розподіл Пуассона. Рівномірний закон.
16. Нормальний розподіл. Показниковий розподіл.
17. Параметри нормального розподілу. Правило трьох сигм.
18. Закон великих чисел.
19. Системи випадкових величин. Числові характеристики двомірних випадкових величин. Дискретні випадкові вектори. Неперервні випадкові вектори.
20. Коваріація двох випадкових величин. Властивості коваріації. Коефіцієнт кореляції
21. Надійність психодіагностичного інструментарію.
22. Основні задачі математичної статистики. Генеральна та вибіркова сукупність. Збір первинного матеріалу, робота з даними та їх обробка.
23. Статистичний ряд розподілу.
24. Емпірична функція розподілу. Побудова полігону частот і полігона відносних частот. Гістограма частот і гістограма відносних частот.
25. Числові характеристики вибіркового розподілу.
26. Статистичні оцінки параметрів розподілу.
27. Інтервальні оцінки. Побудова довірчих інтервалів.
28. Перевірка статистичних гіпотез. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл за критерієм Пірсона.
29. Параметричні методи порівняння двох вибірок досліджуваних. Статистичний критерій t-Стьюдента для однієї вибірки. Статистичний критерій t-Стьюдента для незалежних вибірок. Статистичний критерій t-

Стьюдента для залежних вибірок.

30. Непараметричні методи порівняння вибірок досліджуваних. Статистичний критерій U-Манна-Уітні.
31. Використання інформаційних і комунікаційних технологій в дослідженнях психолога.
32. Дисперсійний аналіз і його реалізація в статистичних пакетах.
33. Основні методи кореляційного аналізу. Коефіцієнт кореляції Пірсона. Коефіцієнт кореляції Спірмена. Коефіцієнт кореляції Кендалла.
34. Множинний кореляційний аналіз.
35. Основні етапи регресійного аналізу. Логістична регресія в статистичних пакетах. Побудова регресійних моделей.
36. Основні методи аналізу багатовимірних даних: кластерний, дискримінантний, факторний аналіз. Аналіз та систематизація одержаних результатів.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Стрелковська І.В. Теорія ймовірностей та випадкові процеси (для фахівців у галузі ІТ-технологій) / І.В. Стрелковська, В.М. Паскаленко. – Одеса: ОНАЗ, 2018. – 384 с.
2. Стрелковська І.В. Математична статистика / І.В. Стрелковська, В.М. Паскаленко. – Одеса: ОНАЗ, 2019. – 110 с.
3. Вдовенко В.В. Математичні методи в психології: Навчально-методичний посібник. – Кіровоград: ПП «Центр оперативної поліграфії» Авангард», 2017. – 112 с.
4. Москальов І.О., Лисенко Д.П. Застосування методів математичної статистики у психологопедагогічних дослідженнях: навч. посіб. Київ : НУОУ, 2023. 187 с.
5. Статистичні методи у психології: курс лекцій з дисципліни для студентів денної та заочної форми навчання спеціальності 053 Психологія ОС «Магістр» / І.О. Корнієнко, О.Ю. Воронова.– Мукачево: МДУ, 2019. – 44 с.
6. Чисельні методи: Навчальний посібник. / Волонтир Л.О, Зелінська О.В., Потапова Н.А., Чіков І.А., Вінницький національний аграрний університет. – Вінниця: ВНАУ, 2020 – 322 с.

Допоміжна

1. Климчук В.О. Факторний аналіз: використання у психологічних дослідженнях // Практична психологія та соціальна робота. – 2006. – №8. – С. 43-48.
2. Руська Р. В. Теорія імовірності та математична статистика в психології : навч. посіб. – Тернопіль. – 2020. – 112 с. Навч.посіб.– Тернопіль.– 2020. – 112 с.
3. Климчук В.О. Математичні методи у психології. Навчальний посібник для студентів психологічних спеціальностей. — К.: Освіта України. — 2009. — 288 с.

4. Лиходєєва Г.В. Комп'ютерний практикум з математичної статистики : навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2018. 98 с.

Інформаційні ресурси

1. Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського [Електронний ресурс]: [Веб-сайт]. – Електронні дані. – Київ: НБУВ, 2013-2015. – Режим доступу: www.nbuv.gov.ua
2. Український інститут інтелектуальної власності [Електронний ресурс]: [Веб-сайт]. – Електронні дані. – Київ: УІІВ, 2017. – Режим доступу: http://www.uipv.org
3. Математичні методи в психології. Курс відео лекцій. URL: https://www.youtube.com/channel/UCu7Tj9z4NnyenGXmkvMGEnA/videos

ДОДАТКИ

Додаток А

ВИДИ ТА МЕТОДИ КОНТРОЛЮ

Види контролю	**Складові оцінювання**	
	Для екзамену	**Для заліку**
поточний контроль, який здійснюється у ході: проведення практичних (лабораторних) занять, виконання самостійної роботи, індивідуальних завдань, дослідна робота здобувача тощо.	**50%**	**100%**
підсумковий контроль	**50%**	

Методи діагностики знань (контролю)	фронтальне опитування; наукова доповідь, реферати, усне повідомлення, індивідуальне опитування; робота у групах; ділова гра, розв`язання ситуаційних завдань, кейсів, практичних завдань, екзамен(залік)

Додаток Б.

ОЦІНЮВАННЯ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ТА ФАХОВОЇ ПЕРЕДВИЩОЇ ОСВІТИ ЗА НАВЧАЛЬНУ ДИСЦИПЛІНУ У МІЖНАРОДНОМУ ГУМАНІТАРНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

(*поточний контроль, підсумковий контроль, загальний результат оцінювання)*

ЕКЗАМЕН

Поточний контроль

Види роботи	Планові терміни виконання	Форми контролю та звітності	Максимальний відсоток оцінювання
Систематичність і активність роботи на практичних (лабораторних) заняттях			
1.1. Підготовка до практичних (лабораторних) занять	Відповідно до робочої програми та розкладу занять	Перевірка обсягу та якості засвоєного матеріалу під час практичних (лабораторних) занять	**30**
Виконання завдань для самостійного опрацювання			
1.2. Індивідуальне тестування, завдання, підготовка реферату (есе) за заданою тематикою	Відповідно до робочої програми та розкладу занять	Розгляд відповідного матеріалу під час аудиторних занять або ІКР[1], перевірка конспектів навчальних текстів тощо	**10**
Виконання індивідуальних завдань, дослідна робота здобувача			
1.3. Інші види індивідуальних завдань, в т.ч. підготовка наукових публікацій, участь у роботі круглих столів, конференцій тощо.	Відповідно до робочої програми та розкладу занять	Обговорення результатів проведеної роботи під час аудиторних занять, наукових конференцій та круглих столів.	**10**
Разом балів за поточний контроль			**50**
Підсумковий контроль екзамен			**50**
Загальний результат оцінювання			**100**

Поточний контроль знань здобувачів освіти при формі контролю **екзамен** (максимум 50 балів) оцінюється за шкалою *(«2», «3», «4», «5»)*, з обов'язковим переведенням балів за кожний вид роботи таким чином:

- за підготовку до аудиторних занять (максимум 30 балів) здобувачу освіти необхідно мати не менше 1/2 оцінок від загальної кількості практичних (лабораторних) занять, для переводу балів за підготовку до аудиторних занять середньоарифметична оцінка множиться на коефіцієнт 6;
- за виконання завдань для самостійного опрацювання (тестування, завдання, підготовка реферату (есе) за заданою тематикою) (максимум 10 балів) здобувачу освіти необхідно мати не менше 1/2 оцінок від загальної кількості

[1] Індивідуально-консультативна робота викладача зі здобувачами

програмного матеріалу, що виноситься на самостійне вивчення, для переводу зазначених балів середньоарифметична оцінка множиться на коефіцієнт 2;
- за інші види індивідуальних завдань, в т.ч. підготовку наукових публікацій, участь у роботі круглих столів, конференцій тощо (максимум 10- балів) здобувачу освіти необхідно мати не менше 1/2 оцінок від загальної кількості інших видів індивідуальних завдань, для переводу балів за підготовку середньоарифметична оцінка множиться на коефіцієнт 2.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗА ПОТОЧНИЙ КОНТРОЛЬ

- «2» - виставляється за неправильну відповідь (письмову роботу), яка не відповідає змісту теми та свідчить про нерозуміння її основних положень;
- «3» - виставляється за відповідь (письмову роботу), яка відповідає змісту теми, але є неповною і неточною у визначенні понять, свідчить про неповне розуміння основних положень навчального матеріалу, свідчить про те, що знання студента мають фрагментарний, поверховий характер;

- «4» - оцінюється правильна і обґрунтована відповідь (письмова робота), з якої видно, що студент знає й розуміє теоретичний матеріал в обсязі навчальної теми, володіє необхідними навичками, не допускає суттєвих помилок.

- «5» - оцінюється повна, правильна, ґрунтовна відповідь (письмова робота) на запитання теми, що передбачає логічність і послідовність викладу матеріалу, володіння термінологією, показує вміння повно й глибоко використовувати теоретичні знання в практичній площині.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ЗДОБУВАЧІВ ЗА ЕКЗАМЕН

(максимум 50 балів) Рівень знань оцінюється:

Рівень знань оцінюється:

- від 40 до 50 балів - студент виявляє особливі творчі здібності, вміє самостійно знаходити та опрацьовувати необхідну інформацію, демонструє знання матеріалу, проводить узагальнення і висновки;
- від 30 до 40 балів - студент володіє знаннями матеріалу, але допускає незначні помилки у формуванні термінів, категорій, проте за допомогою викладача швидко орієнтується і знаходить правильні відповіді;
- 20 - 30 балів - студент відтворює значну частину теоретичного матеріалу, виявляє знання і розуміння основних положень, з допомогою викладача може аналізувати навчальний матеріал, але дає недостатньо обґрунтовані, невичерпні відповіді, допускає помилки.
- 10 - 20 балів - володіє навчальним матеріалом на середньому рівні, допускає помилки, серед яких є значна кількість суттєвих;
- 0 - 10 балів - володіє навчальним матеріалом на рівні, вищому за початковий, значну частину його відтворює на репродуктивному рівні, на всі запитання дає необґрунтовані, невичерпні відповіді, допускає помилки.

<u>ЗАЛІК</u>

Поточний контроль			
Види роботи	**Планові терміни виконання**	**Форми контролю та звітності**	**Максимальний відсоток оцінювання**
Систематичність і активність роботи на практичних (лабораторних) заняттях			
1.1. Підготовка до практичних (лабораторних) занять	Відповідно до робочої програми та розкладу занять	Перевірка обсягу та якості засвоєного матеріалу під час практичних (лабораторних) занять	**60**
Виконання завдань для самостійного опрацювання			
1.2. Індивідуальне тестування, завдання, підготовка реферату (есе) за заданою тематикою	Відповідно до робочої програми тарозкладу занять	Розгляд відповідного матеріалу під час аудиторних занять або ІКР[2], перевірка конспектів навчальних текстів тощо	**20**
Виконання індивідуальних завдань, дослідна робота здобувача			
1.3. Інші види індивідуальних завдань, в т.ч.підготовка наукових публікацій, участь у роботі круглих столів, конференцій тощо.	Відповідно до робочої програми тарозкладу занять	Обговорення результатів проведеної роботи під час аудиторних занять, наукових конференцій та круглих столів.	**20**
Разом балів за поточний контроль			**100**
Загальний результат оцінювання			**100**

Поточний контроль знань здобувачів освіти при формі контролю **залік** (максимум 100 балів) оцінюється за шкалою *(«2», «3», «4», «5»)*, з обов'язковим переведенням балів за кожний вид роботи таким чином:

- за підготовку до аудиторних занять (максимум 60 балів) здобувачу освіти необхідно мати не менше 1/2 оцінок від загальної кількості практичних (лабораторних) занять, для переводу балів за підготовку до аудиторних занять середньоарифметична оцінка множиться на коефіцієнт 12;
- за виконання завдань для самостійного опрацювання (тестування, завдання, підготовка реферату (есе) за заданою тематикою) (максимум 20 балів)

[2] Індивідуально-консультативна робота викладача зі здобувачами

здобувачу освіти необхідно мати не менше 1/2 оцінок від загальної кількості програмного матеріалу, що виноситься на самостійне вивчення, для переводу зазначених балів середньоарифметична оцінка множиться на коефіцієнт 4;
- за інші види індивідуальних завдань, в т.ч. підготовку наукових публікацій, участь у роботі круглих столів, конференцій тощо (максимум 20- балів) здобувачу освіти необхідно мати не менше 1/2 оцінок від загальної кількості інших видів індивідуальних завдань, для переводу балів за підготовку середньоарифметична оцінка множиться на коефіцієнт 4.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗА ПОТОЧНИЙ КОНТРОЛЬ

- «2» - виставляється за неправильну відповідь (письмову роботу), яка не відповідає змісту теми та свідчить про нерозуміння її основних положень;
- «3» - виставляється за відповідь (письмову роботу), яка відповідає змісту теми, але є неповною і неточною у визначенні понять, свідчить про неповне розуміння основних положень навчального матеріалу, свідчить про те, що знання студента мають фрагментарний, поверховий характер;
- «4» - оцінюється правильна і обґрунтована відповідь (письмова робота), з якої видно, що студент знає й розуміє теоретичний матеріал в обсязі навчальної теми, володіє необхідними навичками, не допускає суттєвих помилок.
- «5» - оцінюється повна, правильна, ґрунтовна відповідь (письмова робота) на запитання теми, що передбачає логічність і послідовність викладу матеріалу, володіння термінологією, показує вміння повно й глибоко використовувати теоретичні знання в практичній площині.

Додаток В.

КРИТЕРІЇ ЗАГАЛЬНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ ЗДОБУВАЧІВ

(для іспиту / заліку)

Рівень знань оцінюється:

- «відмінно» / «зараховано» А - від 90 до 100 балів. Студент виявляє особливі творчі здібності, вміє самостійно знаходити та опрацьовувати необхідну інформацію, демонструє знання матеріалу, проводить узагальнення і висновки. Був присутній на лекціях та семінарських заняттях, під час яких давав вичерпні, обґрунтовані, теоретично і практично правильні відповіді, має конспект з виконаними завданнями до самостійної роботи, презентував реферат (есе) за заданою тематикою, проявляє активність і творчість у науково-дослідній роботі;
- «добре» / «зараховано» В - від 82 до 89 балів. Студент володіє знаннями матеріалу, але допускає незначні помилки у формуванні термінів, категорій, проте за допомогою викладача швидко орієнтується і знаходить правильні відповіді. Був присутній на лекціях та семінарських заняттях, має конспект з виконаними завданнями до самостійної роботи, презентував реферат (есе) за заданою тематикою, проявляє активність і творчість у науково-дослідній роботі;
- «добре» / «зараховано» С - від 74 до 81 балів. Студент відтворює значну частину теоретичного матеріалу, виявляє знання і розуміння основних положень, з допомогою викладача може аналізувати навчальний матеріал, але дає

недостатньо обґрунтовані, невичерпні відповіді, допускає помилки. При цьому враховується наявність конспекту з виконаними завданнями до самостійної роботи, реферату та активність у науково-дослідній роботі;

- «задовільно» / «зараховано» D - від 64 до 73 балів. Студент був присутній не на всіх лекціях та семінарських заняттях, володіє навчальним матеріалом на середньому рівні, допускає помилки, серед яких є значна кількість суттєвих. При цьому враховується наявність конспекту з виконаними завданнями до самостійної роботи, рефератів (есе);
- «задовільно» / «зараховано» E - від 60 до 63 балів. Студент був присутній не на всіх лекціях та семінарських заняттях, володіє навчальним матеріалом на рівні, вищому за початковий, значну частину його відтворює на репродуктивному рівні, на всі запитання дає необґрунтовані, невичерпні відповіді, допускає помилки, має неповний конспект з завданнями до самостійної роботи.
- «незадовільно з можливістю повторного складання» / «не зараховано» FX – від 35 до 59 балів. Студент володіє матеріалом на рівні окремих фрагментів, що становлять незначну частину навчального матеріалу.
- «незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни» / «не зараховано» F – від 0 до 34 балів. Студент не володіє навчальним матеріалом.

Таблиця відповідності результатів контролю знань за різними шкалами

100-бальною шкалою	**Шкала за ECTS**	**За національною шкалою**	
		екзамен	**залік**
90-100 (10-12)	A	Відмінно	зараховано
82-89 (8-9)	B	Добре	
74-81(6-7)	C		
64-73 (5)	D	Задовільно	
60-63 (4)	E		
35-59 (3)	FX	незадовільно	не зараховано

Методичне видання

Григор'єва Т.І.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ПСИХОЛОГІЇ

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
галузі знань 05 Соціальні та поведінкові науки
за спеціальністю 053 Психологія.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ