Society's Innovative Development Paradigms in the Era of Digital Transformation and Artificial Intelligence

Katowice 2026

Парадигми інноваційного розвитку суспільства в епоху цифрової трансформації та штучного інтелекту

Монографія

Редактори: Тетяна Несторенко,
Марина Ажажа

The University of Technology in Katowice Press

2026

Редакційна колегія:

Марина Ажажа – д.н.з держ.упр., професор,
Запорізький національний університет, Україна
Назар Добош – к.е.н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», Україна
Надія Дубровіна – к.е.н., PhD, доцент, Братиславський університет
економіки і менеджменту, Словаччина
Домініка Каліта – Сілезька академія
Олександра Мандич – д.е.н., професор, Державний біотехнологічний університет, Україна
Тетяна Несторенко – к.е.н., професор AS, Сілезька академія;
доцент, Бердянський державний педагогічний університет, Україна
Александер Остенда – PhD, професор AS, Сілезька академія
Ірина Остополець – к.психол.н., доцент, Мелітопольський державний педагогічний
університет ім.Б.Хмельницького, Україна
Інеса Хмеляр – к.п.н., доцент, КЗВО «Рівненська медична академія», Україна

Наукові рецензенти :

Вікторія Гурочкіна – д.е.н., професор, Зеленогорський університет
Андрій Папінко – PhD, Західноукраїнський національний університет, Україна
Віта Семанюк – д.е.н., професор, Західноукраїнський національний університет, Україна

Автори несуть повну відповідальність за текст, дані, цитати та ілюстрації.

ISBN 978-83-68422-12-2
DOI: 10.54264/M057

Редакційне упорядкування:
Видавництво Вищої технічної школи в Катовіце
Вул.Рольна, 43, 40-555 Катовіце, Сілезьке воєводство, Польща
tel. (32) 202 50 34; fax: (32) 252 28 75
email: kontakt@wydawnictwo.wst.pl
www.akademiaslaska.pl, www.wydawnictwo.wst.pl

Copyright by Academy of Silesia, Katowice, 2026

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА 7

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗАСАДИ ТА ЦИФРОВА ТРАНСФОРМАЦІЯ ОСВІТНЬОГО СЕРЕДОВИЩА 9

1.1. Інноваційні освітні технології як засіб підвищення ефективності навчання політичної, економічної і соціальної географії *(Оксана Браславська)* 10

1.2. Інформаційні та інноваційні технології як інструмент забезпечення якості професійної підготовки фахівців у сфері транспортної логістики в Україні та Республіці Польщі *(Людмила Базиль, Денис Жежерун, Валерій Орлов)* 18

1.3. Цифрова дидактика в системі сучасної освіти: виклики, можливості та перспективи *(Микола Близнюк, Дмитро Угрин, Ярослав Радько)* 35

1.4. Програми підготовки докторів філософії з прикладної математики в Україні: відповідність тематичному ландшафту монографічної літератури *(Всеволод Богаєнко, Василь Горбачук)* 46

1.5. Порівняльний аналіз інтерактивних інструментів візуалізації нейронних мереж у контексті навчання інформатики учнів старшої школи *(Тимофій Драгні)* 54

1.6. Дизайн і мистецтво в умовах цифрової трансформації: нові методології дослідження та перспективи розвитку *(Алла Дяченко)* 60

1.7. Цифровізація економіки, підприємництва й освіти: трансформація термінології, компетенцій і знань *(Святослав Жуков)* 67

1.8. Інноваційні технології у корекційно-розвивальному процесі закладу дошкільної освіти *(Тетяна Кудярська)* 75

1.9. Сучасні синтаксичні технології в мовній освіті: інноваційне моделювання модифікацій предиката в парадигмі речення *(Олена Куц)* 87

1.10. Національно-патріотичне виховання в цифровому суспільстві: сучасні технології, можливості та виклики *(Інна Найда)* 95

1.11. Штучний інтелект як засіб мультимодального збагачення творчої взаємодії з дітьми п’ятого року життя *(Ірина Новоселецька)* 102

1.12. Впровадження інноваційних освітніх методик у сферу забезпечення національної безпеки України в умовах воєнного стану *(Василь Омельчук, Олександр Калініченко)* 109

1.13. Викладання німецької мови з використанням цифрових ресурсів за рекомендацією Goethe-Institut в рамках програми DLL *(Олена Павлишинець, Богдана Петришак)* 116

1.14. Навчання студентів з освоєнням інноваційних методик дослідження в медицині *(Оксана Полянська, Ігор Полянський, Ольга Гулага, Інна Москалюк)* 124

1.15. Формування цифрових, педагогічних і ШІ-компетентностей викладача ЗВО для роботи в гібридному форматі *(Інна Прудченко)* 128

1.16. Розвиток системного мислення студентів закладів вищої освіти: проблеми та шляхи їх розв’язання *(Лідія Сліпчишин)* 134

1.17. Особливості взаємозв'язку емоційної сфери та навчально-професійної мотивації майбутніх митців *(Марина Софілканич, Світлана Шевченко)* 141

1.18. Здоров'язбережувальна компетентність як інтегральний результат міждисциплінарної підготовки майбутніх медичних працівників *(Інеса Хмеляр, Леся Кушнір, Оксана Бурбан)* 147

1.19. Індустрія туризму України: проблеми, задачі та технології підготовки кадрів на основі врахування світового досвіду *(Сергій Цвілий, Тетяна Кукліна, Павло Бобрикін)* 158

РОЗДІЛ 2. СТРАТЕГІЧНЕ УПРАВЛІННЯ ЕКОНОМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ ТА ЦИФРОВІ ТРАНСФОРМАЦІЇ РИНКІВ 166

2.1. Інформаційно-аналітичне забезпечення прийняття управлінських рішень у проєктах публічно-приватного партнерства *(Марина Ажажа, Артур Дашков, Дмитро Цикін, Марина Койнаш, Олена Раєвнєва)* 167

2.2. Системно-динамічна модель стратегічного управління логістикою експорту сільськогосподарської продукції *(Олег Бернацький, Віктор Нагаєв)* 176

2.3. Розвиток цифрово орієнтованого менеджменту персоналу в аграрних підприємствах *(Сергій Вашечко, Віктор Нагаєв)* 182

2.4. Інформаційні технології в професійній діяльності економістів: міждисциплінарний вимір *(Зоя Гадецька)* 189

2.5. Цифрова трансформація податкового адміністрування в Україні: передумови та концептуальна модель податкової екосистеми *(Наталія Гембарська, Орися Волошин)* 196

2.6. Спектральний аналіз потокових даних ENTSO-E для виявлення аномалій арбітражних ігор на зональних ринках електроенергії *(Віктор Годлюк)* 204

2.7. Гібридні моделі прогнозування цін в різних сегментах ринку електроенергії *(Таміла Голоцукова, Геннадій Голоцуков)* 210

2.8. Економіка постачання у новому тисячолітті *(Василь Горбачук, Андрій Камуз, Лілія Товстенко)* 218

2.9. Цифрова аналітика та штучний інтелект у дослідженні й прогнозуванні поведінки працівників і споживачів *(Тетяна Гринів, Зоряна Скибінська)* 225

2.10. Моделі та методи прогнозування цін на ринках електроенергії *(Максим Дунаєвський)* 233

2.11. Веб-геопортали та інтерактивні туристичні карти як засіб популяризації туристичного потенціалу Кіровоградської області *(Антоніна Зарубіна, Лариса Семенюк)* 241

2.12. Інтегрована платформа ризик-менеджменту банку в умовах цифровізації та драйвери системної трансформації *(Людмила Зверук, Вікторія Гук)* 247

2.13. Бюджетний потенціал регіону в системі публічних фінансів України: сутність, складові та механізми нарощування *(Аліна Козенко)* 253

2.14. Алгоритмічна оптимізація часу руху одноланкового робота-маніпулятора за заданою криволінійною траєкторією *(Василь Кот, Юрій Лотюк, Валентина Юскович-Жуковська)* 260

2.15. Передумови застосування спектрального аналізу для виявлення аномалій у процесах електроенергетичних ринків в реальному часі *(Олександр Кушнір)* 271

2.16. Просторова концентрація соціально-економічної активності України в умовах війни *(Наталія Лисяк, Наталія Самотій)* 279

2.17. «Розумна логістика» як драйвер штучного інтелекту в умовах Industry 5.0: виклики цифрової трансформації та перспективи соціотехнічної еволюції *(Вікторія Оглобліна, Каріна Бєлоконь, Сергій Загородній)* 287

2.18. Прогнозування цін на електроенергію на ринках «На добу наперед», внутрішньодобовому та балансуючому: від статистичних моделей до глибокого навчання *(Дмитро Рибачок)* 295

2.19. Корпоративний договір як цивільно-правовий договір у корпоративному праві *(Микола Скаржинський, Ольга Зіньова)* 301

2.20. Інновації та інноваційність, як невід'ємні елементи розвитку та існування сучасного суспільства *(Олександр Скляренко)* 307

2.21. Інтелектуалізація пошуку та персоналізація клієнтського досвіду в електронній комерції на основі штучного інтелекту *(Тетяна Тардаскіна)* 314

РОЗДІЛ 3. СОЦІОГУМАНІТАРНІ ПАРАДИГМИ, ШТУЧНИЙ ІНТЕЛЕКТ І ТЕХНОЛОГІЇ ЗДОРОВ'ЯЗБЕРЕЖЕННЯ 323

3.1. Еволюція штучного інтелекту: сучасні тенденції та нові вектори розвитку *(Валентина Воронкова, Ольга Венгер, Олександр Фурсін)* 324

3.2. Коеволюційно-синергетична парадигма розвитку штучного інтелекту: самоорганізація, нелінійність і соціотехнічна трансформація *(Валентина Воронкова, Віталіна Нікітенко, Андрій Крупа)* 330

3.3. Онлайн-платформи як інструмент цифровізації та підвищення доступності соціальних послуг в Україні *(Олена Балухтіна)* 336

3.4. Моделювання поведінкових стратегій LLM-агентів в ітераційній грі «дилема в'язня» *(Валентин Водяницький, Валентина Юскович Жуковська)* 342

3.5. Ефективні шляхи та методи боротьби з тривожністю підлітків ВПО *(Людмила Галічій, Світлана Шевченко)* 351

3.6. Інноваційні цифрові технології психологічної підтримки військовослужбовців при роботі з травмою *(Олеся Єсіна)* 357

3.7. Трансформаційна гра як інструмент формування психологічного благополуччя особистості *(Дар'я Камишан)* 364

3.8. Особливості психологічного навантаження на бойових медиків в умовах війни *(Ігор Коваль, Роман Яремко, Каріна Дида)* 369

3.9. Психологічні особливості розвитку мотиваційної сфери внутрішньо переміщених осіб засобами арт-терапії *(Ірина Колдун, Світлана Шевченко)* 376

3.10. Сучасні технології та інноваційні підходи до багаторічної підготовки спортсменів і спортсменок у біатлоні *(Сергій Лазоренко, Віта Ворона)* 384

3.11. Цифрова емпатія як новий феномен психології онлайн-комунікації *(Юрій Ліннік, Дмитро Лисиця, Юлія Лисиця)* 393

3.12. Мехатронний тренажер STEPUP на базі LEGO SPIKE Prime як інструмент дозованої реабілітації нижніх кінцівок *(Юрій Лотюк, Віталій Переходько)* 404

3.13. Впровадження сучасних технологій у спортивну підготовку кваліфікованих бейсболістів *(Тетяна Маленюк, Вікторія Бабаліч, Галина Панченко)* 412

3.14. My Jump Lab як засіб цифрового біомеханічного аналізу рухів у фізичному вихованні та спорті *(Олена Маркова)* 420

3.15. Персоналізація VR-експозиційної терапії засобами штучного інтелекту в роботі з тривожними та фобічними розладами *(Інна Медвідь, Ольга Біцюта)* 427

3.16. Психологічні особливості переживання втрати цивільними в умовах війни *(Єлизавета Овсяннікова, Світлана Шевченко)* 432

3.17. Соціальне середовище як чинник успішної реадаптації ветеранів війни до цивільного життя *(Анна Полякова)* 439

3.18. Віртуальні музеї та цифрові колекції у дослідженні, вивченні та збереженні історико-культурної спадщини України *(Юлія Руденко)* 445

3.19. Вплив занять фізичною культурою на розвиток лідерських якостей учнів старшого шкільного віку *(Ірина Сундукова, Олексій Стасенко, Михайло Корнєєв)* 453

3.20. Цифрова компетентність майбутніх медсестер: ключові характеристики в епоху технологічної медицини *(Дмитро Филипюк, Роман Шустик, Василь Палапа)* 461

3.21. Мотивація як фактор формування педагогічної майстерності у майбутніх учителів фізичної культури *(Ольга Шевченко, Наталія Щербатюк)* 467

АННОТАЦІЇ (ABSTRACTS) 474

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ (INFORMATION ABOUT THE AUTHORS) 494

2.14. АЛГОРИТМІЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ ЧАСУ РУХУ ОДНОЛАНКОВОГО РОБОТА-МАНІПУЛЯТОРА ЗА ЗАДАНОЮ КРИВОЛІНІЙНОЮ ТРАЄКТОРІЄЮ

Василь Кот, Юрій Лотюк, Валентина Юскович-Жуковська

Анотація. *У розділі досліджується проблема алгоритмічної оптимізації часу руху одного роботизованого маніпулятора вздовж заданої криволінійної траєкторії за умов обмеженості керуючих впливів. Запропоновано підхід, що ґрунтується на застосуванні методів комп'ютерного моделювання та алгоритмічної оптимізації, в межах якого складна криволінійна траєкторія апроксимується послідовністю прямолінійних відрізків. Формування оптимального керування здійснюється на основі двофазного принципу «bang-bang» (релейного керування), що передбачає послідовну зміну режимів максимального прискорення та сповільнення. Для автоматичного вибору ефективної структури апроксимованої траєкторії розроблено алгоритм оптимізації, який мінімізує загальний час руху з урахуванням геометричної похибки апроксимації та динамічних обмежень маніпулятора. Алгоритм передбачає формування множини допустимих вузлів траєкторії, обчислення характеристик можливих відрізків та пошук оптимальної послідовності переходів методом динамічного програмування. На основі запропонованої математичної моделі реалізовано програмний модуль мовою Python.*

Ключові слова: *алгоритмічна оптимізація, апроксимація траєкторії, динамічне програмування, релейне керування (bang-bang control), комп'ютерне моделювання.*

Вступ

Одноланкові роботи-маніпулятори є базовими елементами робототехнічних і автоматизованих систем. Вони застосовуються у позиціонуванні, транспортних операціях, навчально-дослідницьких стендах і як спрощені моделі для відпрацювання алгоритмів керування. Для повторюваних операцій однією з ключових характеристик є швидкодія: навіть невелике скорочення тривалості одного циклу може суттєво впливати на продуктивність системи (Демидюк et al., 2023; Бомба & Кот, 2025; Gattringer et al., 2022).

У вихідній постановці задача полягає в переміщенні маніпулятора між заданими положеннями вздовж наперед визначеної криволінійної траєкторії. Така траєкторія може задаватися технологічними обмеженнями, геометрією робочої зони або вимогами до обходу перешкод. Безпосереднє розв'язання задачі мінімального часу для довільної кривої у неперервному вигляді є складним, тому практично доцільним є перехід до дискретного подання шляху (Pham & Pham, 2018; Huang et al., 2023).

Сучасні методи time-optimal path parameterization (TOPP) показують, що для заданого геометричного шляху мінімізація часу може виконуватися з урахуванням динамічних обмежень приводів і множини допустимих швидкостей (Pham & Pham, 2018). Подальший розвиток пов'язаний із включенням обмежень на ривок і використанням вибіркових алгоритмів (Huang et al., 2023), а також із експериментальною перевіркою time-optimal маніпуляцій на наперед заданих траєкторіях (Gattringer et al., 2022). Водночас для простої одноланкової системи, де криву доцільно замінювати ламаною і явно враховувати часові витрати на повороти між її сегментами, важливим залишається питання алгоритмічного вибору самої ламаної, а не лише часової параметризації вже заданого шляху.

У базовій моделі апроксимація кривої ламаною переводить задачу до послідовності прямолінійних поступальних переміщень і поворотів у точках зламу. Однак рівномірне розбиття має принциповий недолік: у ділянках малої кривизни воно створює зайві вузли, а в ділянках великої кривизни може бути недостатньо точним. Крім того, якщо у вузлах передбачається зупинка перед зміною напрямку, збільшення кількості сегментів не лише підвищує точність, а й додає часові витрати на повторні розгони, гальмування та повороти (Демидюк et al., 2023; Бомба & Кот, 2025).

Мета дослідження

Метою дослідження є розроблення алгоритму оптимального вибору вузлів ламаної апроксимації заданої криволінійної траєкторії одноланкового робота-маніпулятора, який мінімізує сумарний час руху за заданого допустимого геометричного відхилення від початкової кривої.

Для досягнення мети розв'язуються такі завдання: формалізація геометричної та динамічної моделей; отримання локальних часових функцій для поступального й обертального руху; введення критерію допустимості хорди; побудова рекурентного співвідношення динамічного програмування; програмна реалізація; чисельне порівняння з рівномірною апроксимацією.

Наукова новизна

Наукова новизна полягає у формулюванні задачі вибору вузлів ламаної як задачі динамічного програмування другого порядку з часовою функцією переходу, що одночасно враховує довжину нового сегмента та кут повороту між трьома послідовними вузлами. На відміну від рівномірної дискретизації, запропонований алгоритм розміщує вузли нерівномірно відповідно до локальної геометрії траєкторії та часової вартості руху.

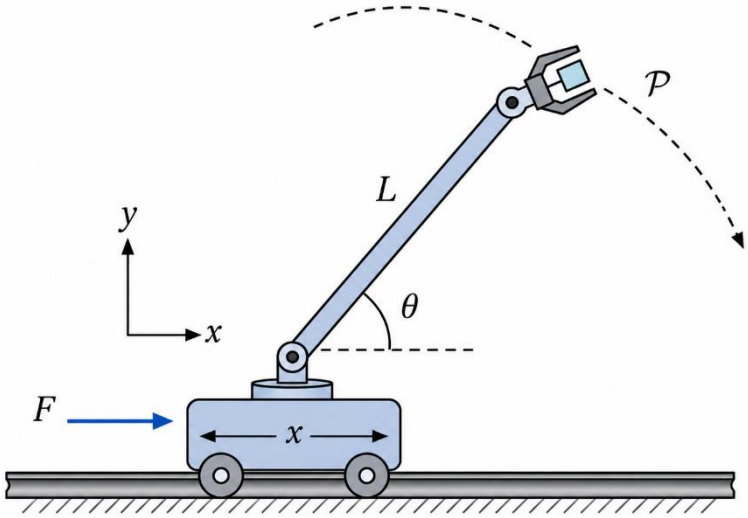


Рис. 1. Схема одноланкового робота-маніпулятора та заданої траєкторії

Джерело: розроблено авторами

Аналіз досліджень і постановка задачі

Проблема мінімального часу руху робота вздовж заданого шляху є класичною задачею оптимального керування. Параметричні підходи до оптимізації транспортних операцій одноланкових і нелінійних маніпуляційних систем розглянуто в працях М. В. Демидюка та співавторів (Демидюк, 2021a, 2021b; Демидюк et al., 2023). Для одноланкової системи з додатковими пружними впливами задачу оптимізації руху досліджено також у роботі А. Я. Бомби та В. В. Кота (Бомба & Кот, 2025). Для часової параметризації наперед заданого шляху на основі аналізу досяжності запропоновано підхід TOPP-RA (Pham & Pham, 2018), тоді як вибірковий алгоритм з урахуванням обмеження на ривок розвинено в роботі Huang et al. (2023). Експериментальне дослідження time-optimal маніпуляцій уздовж наперед заданого шляху наведено в Gattringer et al. (2022). У ширшому контексті автоматичного керування для аналізу нестаціонарних систем використовуються й асимптотичні методи (Рашевський, 2018).

Зазначені методи переважно припускають, що геометричний шлях уже відомий і достатньо гладкий (Pham & Pham, 2018; Huang et al., 2023; Gattringer et al., 2022). У цій роботі розглядається інша, комплементарна постановка: початкова крива відома, але для

простого алгоритмічного керування вона замінюється ламаною, а отже, необхідно визначити, де саме розмістити вузли, щоб поєднати геометричну точність і мінімальний час.

Нехай задана плоска крива

$$r(u) = [x(u)\, y(u)\,], \qquad u \in [u_0, u_1]. \tag{1}$$

Її довжина від початку до параметра u визначається як

$$s(u) = \int_{u_0}^{u} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}\, d\xi\,. \tag{2}$$

Для дискретного алгоритму інтервал $[u_0, u_1]$ замінюється множиною M кандидатних параметрів

$$U = \{u_0, u_1, \dots, u_{M-1}\}, \quad u_0 < u_1 < \cdots < u_{M-1}, \tag{3}$$

яким відповідають точки $p_i = r(u_i)$. Потрібно вибрати підпослідовність

$$P = (i_0, i_1, \dots, i_N), \quad i_0 = 0, \quad i_N = M - 1, \tag{4}$$

що визначає ламану апроксимацію траєкторії.

Динамічна модель і локальні функції часу

Розглянемо рух уздовж одного прямолінійного сегмента довжини l. Для спрощеної одноланкової системи сумарну приведену масу позначимо m. Дотичне рівняння руху має вигляд

$$m\ddot{s} = F, \qquad |F| \le F_{max}. \tag{5}$$

Граничне прискорення

$$a_{max} = \frac{F_{max}}{m}. \tag{6}$$

За нульової початкової та кінцевої швидкості мінімально-часове керування має дві фази: максимальний розгін і максимальне гальмування (Демидюк, 2021a; Демидюк et al., 2023). Для симетричних обмежень отримуємо

$$t_{tr}(l) = 2\sqrt{\frac{l}{a_{max}}}. \tag{7}$$

Ця залежність є локальною ваговою функцією прямолінійного сегмента.

Нехай два сусідні сегменти утворюють кут θ. Для зміни орієнтації використовується момент приводу τ:

$$J\ddot{\varphi} = \tau, \qquad |\tau| \le \tau_{max}, \tag{8}$$

де J – приведений момент інерції. Максимальне кутове прискорення дорівнює

$$\alpha_{max} = \frac{\tau_{max}}{J}. \tag{9}$$

За аналогічного двофазного керування мінімальний час повороту на кут θ становит (Демидюк, 2021а; Бомба & Кот, 2025)

$$t_{rot}(\theta) = 2\sqrt{\frac{|\theta|}{\alpha_{max}}}. \tag{10}$$

Для одноланкової моделі з рівномірно розподіленою масою ланки m_l, зосередженим вантажем m_p на кінці та довжиною L використано оцінку

$$J = \frac{1}{3}m_l L^2 + m_p L^2. \tag{11}$$

Прийнята модель передбачає зупинку у вузлі перед поворотом і новим поступальним сегментом. Це обмеження є консервативним, але робить часову функцію аналітичною та придатною для алгоритмічного пошуку. Для систем, у яких допускається безперервний рух зі зміною орієнтації, доцільно застосовувати TOPP/TOPP-RA або інші методи часової параметризації (Pham & Pham, 2018; Huang et al., 2023).

Для кожної пари кандидатних точок $i < j$ утворимо хорду. Її довжина

$$l_{ij} = \| p_j - p_i \|_2. \tag{12}$$

Геометричну похибку хорди визначимо як максимальну відстань від проміжних вибіркових точок початкової кривої до відрізка $\underline{p_i p_j}$:

$$e_{ij} = \max_{k=i,\dots,j} d\left(p_k, \underline{p_i p_j}\right). \tag{13}$$

Перехід $i \to j$ є допустимим, якщо

$$e_{ij} \le \varepsilon, \tag{14}$$

де ε – заданий допуск апроксимації.

Кут зміни напрямку у вузлі j для трьох послідовних вузлів $i < j < k$ обчислюється за скалярним добутком:

$$\theta_{ijk} = arccos\frac{(p_j - p_i)^T (p_k - p_j)}{\| p_j - p_i \|_2 \| p_k - p_j \|_2}. \tag{15}$$

Сумарний час для вибраної ламаної P становить

$$T(P) = \sum_{r=0}^{N-1} t_{tr}\left(l_{i_r i_{r+1}}\right) + \sum_{r=1}^{N-1} t_{rot}\left(\theta_{i_{r-1} i_r i_{r+1}}\right). \tag{16}$$

Отже, оптимізаційна задача має вигляд

$$P^* = \underset{P}{argmin} T(P), \qquad \text{за умов } e_{i_r i_{r+1}} \le \varepsilon. \tag{17}$$

Важливо, що локальна вартість повороту залежить не від двох, а від трьох вузлів. Тому класичний найкоротший шлях з одним індексом стану недостатній.

Алгоритм динамічного програмування

Введемо стан (i, j), який означає: маніпулятор досяг вузла j, а останній пройдений сегмент з'єднує вузли i та j. Значення D_{ij} – найменший час для всіх допустимих ламаних, що закінчуються таким станом.

Для першого сегмента поворот відсутній, тому

$$D_{0j} = t_{tr}(l_{0j}), \qquad e_{0j} \le \varepsilon. \tag{18}$$

При додаванні нового вузла k виникає поворот у вузлі j та рух по сегменту $j \to k$. Рекурентне співвідношення має вигляд

$$D_{jk} = \min_{i<j} \{D_{ij} + t_{rot}(\theta_{ijk}) + t_{tr}(l_{jk})\}, \tag{19}$$

де мінімум береться лише за допустимими переходами $i \to j$ і $j \to k$.

Кінцевий час

$$T_{min} = \min_{i<M-1} D_{i,M-1}. \tag{20}$$

Разом із D_{ij} зберігається попередній стан, що дозволяє зворотним проходом відновити всю послідовність вузлів оптимальної ламаної.

У прямій реалізації кількість станів не перевищує $O(M^2)$, а для кожного переходу аналізується третій індекс. Тому часову складність динамічного програмування можна оцінити як $O(M^3)$, а пам'ять – як $O(M^2)$. Наївне попереднє визначення похибок усіх хорд також має кубічну складність, якщо для кожної пари (i, j) переглядаються всі проміжні точки. Для прикладних задач із сотнями кандидатних точок така складність є прийнятною; для великих M можливе прискорення через ієрархічну дискретизацію, попередню сегментацію за кривизною або структури для швидкого оцінювання максимальної відстані.

Алгоритм 1. Оптимальний вибір вузлів ламаної

1. *Дискретизувати початкову криву в M кандидатних точках.*
2. *Для всіх $i < j$ обчислити l_{ij} і e_{ij}; залишити переходи з $e_{ij} \le \varepsilon$.*
3. *Ініціалізувати $D_{0j} = t_{tr}(l_{0j})$ для допустимих перших сегментів.*
4. *Для кожного стану (i, j) перебрати $k > j$ з допустимим сегментом $j \to k$.*
5. *Обчислити θ_{ijk} і кандидатне значення за (19).*
6. *Якщо воно менше поточного D_{jk}, оновити D_{jk} і зберегти попередника (i, j).*
7. *Вибрати найкращий кінцевий стан $(i, M-1)$.*
8. *Виконати зворотне відновлення вузлів.*
9. *Повернути P^*, T_{min} та локальні часові характеристики.*

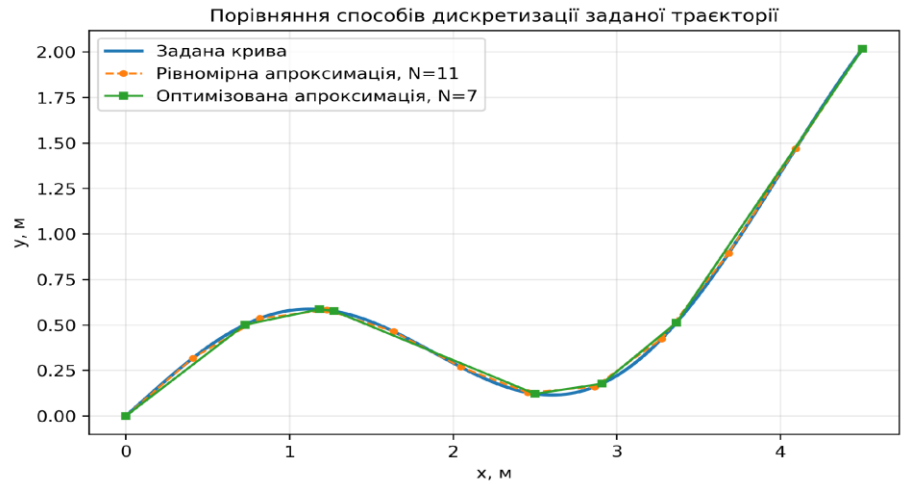


Рис. 2. Порівняння рівномірної та алгоритмічно оптимізованої апроксимації траєкторії
Джерело: побудовано авторами

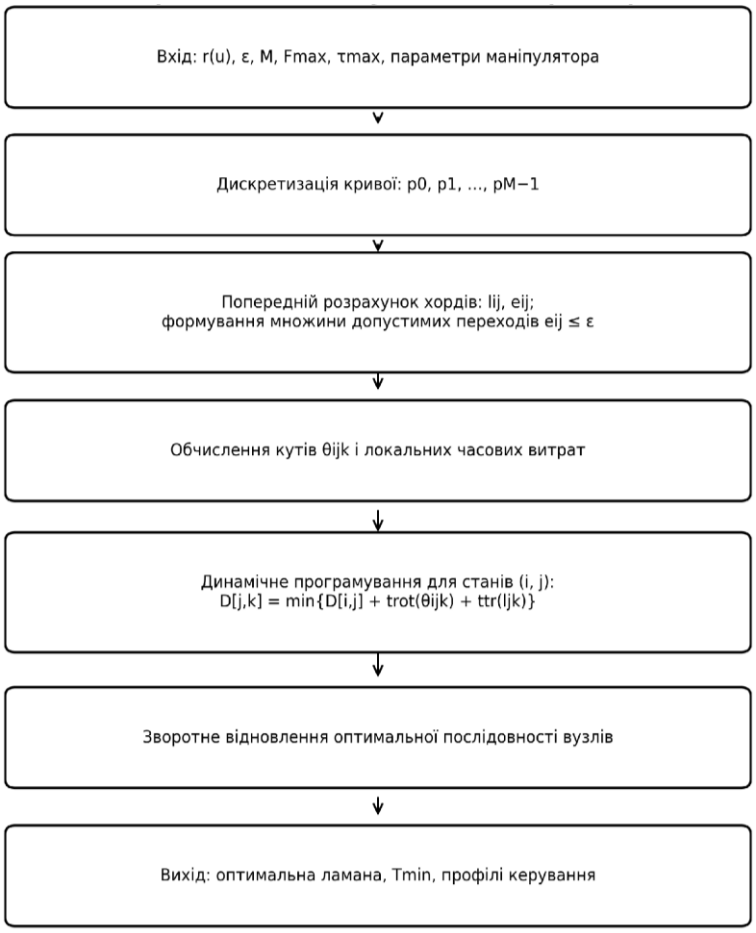


Рис. 3. Блок-схема алгоритму оптимізації вузлів ламаної траєкторії
Джерело: побудовано авторами

Програмна реалізація

Алгоритм реалізовано мовою Python. Для векторних операцій використано NumPy, а для побудови графіків – Matplotlib. Важливою властивістю реалізації є відсутність залежності від спеціалізованих оптимізаційних пакетів: задача розв'язується власним рекурентним алгоритмом, що полегшує інтеграцію в навчальні й вбудовані програмні модулі.

Нижче наведено завершений код ядра алгоритму. Функція optimize_polyline формує матрицю допустимих хорд, виконує динамічне програмування та повертає індекси оптимальних вузлів і мінімальний час.

```
import math
import numpy as np


def curve(u):
    """Test curved trajectory."""
    u = np.asarray(u)
    x = u
    y = 0.5 * np.sin(1.6 * u) + 0.08 * u**2
    return np.column_stack((x, y))


def point_segment_distance(points, a, b):
    """Distances from a set of points to segment a-b."""
    ab = b - a
    den = float(np.dot(ab, ab))
    if den == 0.0:
        return np.linalg.norm(points - a, axis=1)

    t = ((points - a) @ ab) / den
    t = np.clip(t, 0.0, 1.0)
    proj = a + t[:, None] * ab
    return np.linalg.norm(points - proj, axis=1)


def turning_angle(a, b, c):
    """Unsigned angle between segments a-b and b-c."""
    v1 = b - a
    v2 = c - b
    cos_value = np.dot(v1, v2) / (
        np.linalg.norm(v1) * np.linalg.norm(v2)
    )
    cos_value = np.clip(cos_value, -1.0, 1.0)
    return math.acos(float(cos_value))


def optimize_polyline(
    u0=0.0,
    u1=4.5,
    candidates=100,
    eps=0.03,
    a_max=10.0,
    alpha_max=13.6363636364,
):
    u = np.linspace(u0, u1, candidates)
    p = curve(u)
    m = len(u)

    feasible = np.zeros((m, m), dtype=bool)
    length = np.zeros((m, m), dtype=float)

    # Preprocessing of all possible chords.
    for i in range(m - 1):
        for j in range(i + 1, m):
            segment_points = p[i:j + 1]
            d = point_segment_distance(
                segment_points, p[i], p[j]
            )
```

```
        error = float(np.max(d))
        if error <= eps:
            feasible[i, j] = True
            length[i, j] = np.linalg.norm(p[j] - p[i])

def t_translation(i, j):
    return 2.0 * math.sqrt(length[i, j] / a_max)

def t_rotation(i, j, k):
    theta = turning_angle(p[i], p[j], p[k])
    if theta <= 1e-15:
        return 0.0
    return 2.0 * math.sqrt(theta / alpha_max)

inf = float("inf")
dp = {}
previous = {}

# Initial states: one segment from the start.
for j in range(1, m):
    if feasible[0, j]:
        dp[(0, j)] = t_translation(0, j)
        previous[(0, j)] = None

# Second-order dynamic programming.
for j in range(1, m - 1):
    active = [state for state in dp if state[1] == j]
    for i, _ in active:
        base = dp[(i, j)]
        for k in range(j + 1, m):
            if not feasible[j, k]:
                continue

            value = (
                base
                + t_rotation(i, j, k)
                + t_translation(j, k)
            )
            state = (j, k)

            if value < dp.get(state, inf):
                dp[state] = value
                previous[state] = (i, j)

final_states = [
    state for state in dp if state[1] == m - 1
]
best = min(final_states, key=lambda state: dp[state])

# Backtracking.
states = []
state = best
while state is not None:
    states.append(state)
    state = previous[state]
states.reverse()

nodes = [0]
for i, j in states:
    if nodes[-1] != i:
        nodes.append(i)
    if nodes[-1] != j:
        nodes.append(j)
```

```
    return {
        "time": dp[best],
        "indices": nodes,
        "u": u[nodes],
        "points": p[nodes],
    }


if __name__ == "__main__":
    result = optimize_polyline()
    print("Minimum time:", round(result["time"], 6), "s")
    print("Segments:", len(result["indices"]) - 1)
    print("u nodes:", np.round(result["u"], 6))
```

Для тестових параметрів програма повертає мінімальний час близько 5.654946 s і сім сегментів. Отримані вузли параметра –
u:[0; 0,7273; 1,1818; 1,2727; 2,5000; 2,9091; 3,3636; 4,5000].

Ця послідовність наочно демонструє нерівномірність дискретизації: в областях, де криву можна наближати довгою хордою без перевищення допуску, алгоритм не створює зайвих вузлів; у ділянках більшої кривизни вузли ущільнюються.

Для перевірки алгоритму використано тестову траєкторію

$$r(u) = [u\ 0.5sin(1.6u) + 0.08u^2\ ], \qquad 0 \le u \le 4.5. \tag{21}$$

Довжина цієї кривої, обчислена чисельно з високою щільністю вибірки, становить приблизно 5,632 м.

Таблиця 1. Параметри обчислювального експерименту

Параметр	Позначення	Значення
Маса ланки	m_l	5 кг
Маса вантажу	m_p	2 кг
Довжина ланки	L	0,6 м
Максимальна поступальна сила	F_{max}	70 Н
Максимальний момент	τ_{max}	18 Н·м
Приведене прискорення	a_{max}	10 м/с²
Момент інерції	J	1,32 кг·м²
Кутове прискорення	α_{max}	13,636 рад/с²
Допуск апроксимації	ε	0,03 м
Кількість кандидатних точок	M	100

Джерело: розраховано авторами

Порівняння з рівномірною дискретизацією

Для рівномірного розбиття кількість сегментів послідовно збільшувалася до моменту виконання умови $e_{max} \le 0{,}03$ м. При $N = 10$ сегментах похибка ще становила близько 0,0330 м, тому першим допустимим рівномірним варіантом є $N = 11$.

Запропонований алгоритм використовує ті самі геометричні та динамічні обмеження, але дозволяє вибирати нерівномірні відстані між вузлами.

Результати наведено в табл. 2.

Результат не означає, що сім рівномірних сегментів є достатніми. Навпаки, для $N = 7$ рівномірна апроксимація має похибку близько 0,0675 м і не задовольняє обмеженню. Перевага досягається саме завдяки оптимальному **розташуванню** семи сегментів.

Таблиця 2. Порівняння методів дискретизації

Показник	Рівномірна апроксимація	Запропонований алгоритм
Кількість сегментів N	11	7
Максимальна похибка, м	0,0271	0,0295
Час поступального руху, с	4,946	3,689
Час поворотів, с	2,563	1,966
Загальний час, с	7,509	5,655
Скорочення часу	—	**24,69 %**

Джерело: розраховано авторами

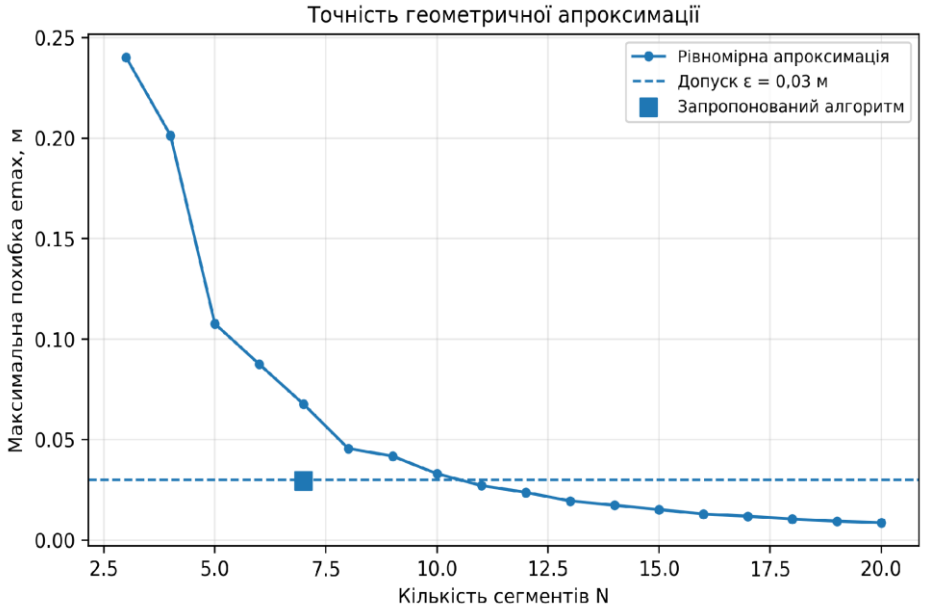


Рис. 4. Залежність максимальної похибки апроксимації від кількості сегментів і положення оптимізованого розв'язку

Джерело: побудовано авторами

Інтерпретація результатів

Рис. 4 показує протилежну тенденцію для геометричної похибки: зі збільшенням числа рівномірних сегментів похибка зменшується. Таким чином, у задачі фактично існує конфлікт між точністю представлення кривої та часовою ефективністю. Запропонований алгоритм вирішує цей конфлікт як задачу умовної оптимізації: він не мінімізує похибку як таку, а використовує допустимий ресурс ε для зменшення часу.

Отримане скорочення 24,69 % є результатом конкретного модельного прикладу і не повинно переноситися на інші маніпулятори без повторного розрахунку. Величина виграшу залежить від форми кривої, співвідношення поступальних і обертальних можливостей приводу, допустимої похибки та щільності кандидатної сітки.

Висновки

У роботі зведено задачу мінімізації часу руху одноланкового робота-маніпулятора вздовж заданої криволінійної траєкторії з переважно аналітичної постановки на алгоритмічну задачу, придатну для програмної реалізації.

Запропоновано представляти початкову криву множиною кандидатних точок і автоматично вибирати підмножину вузлів ламаної. Допустимість сегмента визначається максимальною геометричною похибкою, а цільова функція – сумою мінімальних часів поступального руху та поворотів. Завдяки залежності вартості повороту від трьох послідовних вузлів задача сформульована як динамічне програмування другого порядку.

Для локального руху використано аналітичні залежності двофазного bang-bang керування. Отримана рекурентна схема забезпечує глобально оптимальний результат у межах заданої дискретної множини кандидатних точок. Для прямої реалізації складність становить $O(M^3)$ за часом і $O(M^2)$ за пам'яттю.

У модельному експерименті за допуску 0,03 м оптимізована нерівномірна ламана містила сім сегментів проти одинадцяти в першому допустимому рівномірному розбитті. Загальний розрахунковий час зменшився з 7,509 с до 5,655 с, тобто на 24,69%, при збереженні заданої точності апроксимації.

Подальші дослідження будуть спрямовані на: адаптивне формування кандидатної сітки за кривизною; включення обмежень швидкості та ривка; багатокритеріальну оптимізацію часу й енергоспоживання; моделювання неперервного проходження вузлів без повної зупинки; експериментальну верифікацію на реальному робототехнічному стенді; узагальнення алгоритму на багатоланкові маніпулятори.

Список використаних джерел

Бомба, А. Я., & Кот, В. В. (2025). Оптимізація руху одноланкового робота при малому впливі демпферних пружин. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Технічні науки, 1*(109), 140–153. https://doi.org/10.31713/vt1202512.

Демидюк, М. В. (2021a). Метод параметричної оптимізації в задачах оптимального керування нелінійними маніпуляційними системами. *Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук:* Матеріали XXVI Міжнародної наукової конференції (с. 97–101).

Демидюк, М. В. (2021b). Параметрична оптимізація циклічних транспортних операцій маніпуляторів з активними і пасивними приводами. *Моделювання, керування та інформаційні технології,* 5, 122–124. https://doi.org/10.31713/MCIT.2021.39.

Демидюк, М. В., Демидюк, П. М., & Ширко, М. І. (2023). Параметрична оптимізація циклічних транспортних операцій одноланкового маніпулятора з активними та пасивними приводами. *Прикладні проблеми механіки і математики*, 21, 64–71. https://doi.org/10.15407/apmm2023.21.64-71.

Рашевський, М. О. (2018). Асимптотичний аналіз нестаціонарних систем автоматичного керування. *Математичне моделювання*, 2, 72–78. https://doi.org/10.31319/2519-8106.2(39)2018.154210.

Gattringer, H., Mueller, A., Oberherber, M., & Kaserer, D. (2022). Time-optimal robotic manipulation on a predefined path of loosely placed objects. *Modeling and experiment. Mechatronics,* 84, 102753. https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2022.102753.

Huang, H., Liu, H., Xia, C., & Mei, H. (2023). Sampling-based time-optimal path parameterization with jerk constraints for robotic manipulation. *Robotics and Autonomous Systems*, 170, 104530. https://doi.org/10.1016/j.robot.2023.104530.

Pham, H., & Pham, Q.-C. (2018). A new approach to time-optimal path parameterization based on reachability analysis. *IEEE Transactions on Robotics, 34*(3), 645–659. https://doi.org/10.1109/TRO.2018.2819195.