Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Вища математика
Частина 1

Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія
Диференціальне числення

Виконання типових
розрахункових завдань

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за спеціальностями 133 Галузеве машинобудування,
186 Видавництво та поліграфія

**Укладачі: О. І. Кушлик-Дивульська, Т. В. Авдєєва,
Н. П. Селезньова**

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2025

УДК 514.74, 514.742.2, 514.12 (514)
517, 517.2

Укладачі: *Кушлик-Дивульська Ольга Іванівна*, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ КПІ ім. Ігоря Сікорського;
Авдєєва Тетяна Василівна, старший викладач кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ КПІ ім. Ігоря Сікорського;
Селезньова Надія Петрівна, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ КПІ ім. Ігоря Сікорського.

Рецензент *Л. М. Іллічева, канд. фіз.-мат. наук, доцент,*
Національний авіаційний університет

Відповідальний редактор *В. М. Горбачук, доктор фіз.-мат. наук, професор,*
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 3 від 09.01.2025 р.)
за поданням вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 13 від 18.12.2024 р.)

Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення: виконання типових розрахункових завдань [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спец. 133 Галузеве машинобудування, 186 «Видавництво та поліграфія» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. І. Кушлик-Дивульська, Т. В. Авдєєва, Н. П. Селезньова. – Електрон. текст. дані (1 файл: 5,8 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 223 с.

Навчальний посібник містить масив завдань освітнього компонента, необхідні для опанування основних понять та навичок розв’язання задач з лінійної, векторної алгебри, аналітичної геометрії та диференціального числення функції однієї змінної. Наведено 30 варіантів індивідуальних розрахункових завдань. Показано розв’язування одного варіанта завдань з обґрунтуваннями, теоретичними відомостями за темами освітнього компонента навчальної дисципліни «Вища математика», відповіді до двох варіантів. Додатки містять довідковий матеріал основних тем.

Для студентів технічних спеціальностей Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

УДК 514.74, 514.742.2, 514.12 (514)
517, 517.2

Реєстр. № НП 24/25-189. Обсяг 12,0 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025

Зміст…….. 3
Передмова……. 4
Варіанти завдань розрахункової роботи…… 5
Додаткові завдання…….. 79
1. Метод координат…… 79
2. Рівняння прямої на площині……. 90
3. Криві другого порядку…….. 98
Розв’язування типового варіанта з теоретичними обґрунтуваннями……. 109
Варіанти завдань для підготовки до модульних контрольних робіт…….. 162
Елементи лінійної алгебри…… 162
Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії……... 171
Вступ до математичного аналізу. Похідні функції однієї змінної, їх застосування……. 183
Варіанти завдань для підготовки до залікових та екзаменаційних робіт 196
Список літератури…… 212
Додаток. Довідник деяких тем дисципліни «Вища математика»…… 214

Передмова

Навчальне видання відповідає силабусу освітнього компонента, який складено відповідно до освітньої програми підготовки бакалаврів «*Технології друкованих і електронних видань»,* розробленої з урахуванням Стандарту вищої освіти України: перший (бакалаврський) рівень, галузь знань 18 – Виробництво та технології, спеціальність 186 – Видавництво та поліграфія. Більшу частину викладеного матеріалу охоплено для спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» освітніх програм «Комп'ютеризовані технології поліграфічних систем», «Комп'ютерно-інтегровані технології проектування обладнання хімічної інженерії», «Інжиніринг обладнання виробництва полімерних та будівельних матеріалів та виробів».

Ґрунтовне вивчення освітнього компонента «Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення» є одним з основних, що формують базову підготовку для вивчення навчальної дисципліни «Вища математика», зокрема, її розділу «Математичний аналіз», сприяє формуванню математичної освіти майбутнього фахівця.

В навчальний посібник включено завдання за розділами «Елементи лінійної алгебри», «Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії», «Вступ до математичного аналізу». Велика кількість завдань за індивідуальними варіантами (30 варіантів), розв'язування типового варіанта з короткими теоретичними відомостями, відповіді підсилюють ефективність роботи студентом над розрахунковою роботою. Також навчальне видання містить завдання для підготовки до написання модульних контрольних робіт за відповідними темами, практичні завдання до залікової, екзаменаційної роботи. За основу написання теоретичної частини та розв'язків типових розрахункових завдань укладачами взято відомі навчальні посібники [1], [2], [3], [4], також використано матеріал власних напрацювань [5], [6], [7], [8], [9], [10]. Матеріал посібника є більш повним виданням [6], [9].

Навчальне видання призначено для студентів денної та заочної форми навчання технічних спеціальностей. Його можна використати для студентів економічних спеціальностей, також для підготовки до занять, заліків, екзаменів студентами всіх форм навчання, які вивчають подібний матеріал.

Варіанти завдань розрахункової роботи

Варіант 1

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 18, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$

2. *Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії*

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(-5,4,1)$, $A_2(3,-2,0)$, $A_3(7,-6,4)$, $A_4(-1,-1,5)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(0,-3,-2)$ і пряму $L: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1.5}{-1} = \dfrac{z}{1}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 2x+y+z-2=0, \\ 2x-y-3z+6=0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(2,0), B(0,2)$ та $C(-1,-1)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH та її довжину;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $2x^2+5y^2-12x+10y+13=0$; б) $2x^2-3x+y-5=0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=\dfrac{2}{|x|}-3$; б) $y=4^{3x-1}+5$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2\operatorname{arctg}x-\sin x}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x)=\begin{cases}\cos x,\ x\le 0,\\ x^2+1,\ 0<x<1,\\ x,\ x\ge 1;\end{cases}$ б) $f(x)=4^{\frac{1}{x}}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y=\sqrt{x}\sin 3x+e^{-x^2}$; б) $y=\operatorname{arctg}4x+\dfrac{\lg(4x^2-1)}{x}$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t^2.\end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y=(2x^2-7)\ln(x-1)$, $y^V=?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3+2x$ в точці з абсцисою $x=1$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$ і побудувати її графік.

Варіант 2

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A-B\cdot A+A^{-1}$, якщо $A=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\0&1&3\\4&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-4&1\\3&0&-2\\1&-1&5\end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=14,\\ x_1+x_2+x_3=6,\\ 2x_1+3x_2-x_3=5\end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} x_2 - x_1 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$

2. *Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії*

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(-4,1,3)$, $A_2(0,2,3)$, $A_3(-1,5,2)$, $A_4(0,-4,1)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(2,-1,1)$ і пряму $L: \dfrac{x-4.5}{1} = \dfrac{y+3}{-0.5} = \dfrac{z-2}{1}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0, \\ x + 3y + z + 14 = 0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(2,0)$, $B(-1,4)$ та $C(-4,-2)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $x^2 - y^2 + 6x + 4y - 4 = 0$; б) $2x^2 - 4x + 3y - 1 = 0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = 2\mathrm{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 1$; б) $y = 5e^{2x+1} + 1$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^6 - x^3 + 2x}{2x^6 - 1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \sin x}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 1, \\ 2x, & x \geq 1; \end{cases}$ б) $f(x) = 3^{\frac{1}{4 - x^2}}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y = x^3 e^{-x^2 + x} + \arcsin\sqrt{x}$; б) $y = \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} + \lg(4x^2 + 10)$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x = \mathrm{arctgt}, \\ y = \dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y = (3 - x^2)\ln^2 x$, $y''' = ?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^2 - x$ в точці з абсцисою $x_0 = 0$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$ і побудувати її графік.

Варіант 3

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(1,-3,4)$, $A_2(0,-1,2)$, $A_3(7,2,-3)$, $A_4(-1,2,3)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(1,1,1)$ і пряму $L: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1.5}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} x-2y+z-4=0, \\ 2x+2y-z-8=0. \end{cases}$ Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(2,1), B(-3,2)$ та $C(-2,3)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $2x^2+3y^2-4x+6y-7=0$; б) $2y^2-2y+5x-2=0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = \left|\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$; б) $y = 3+\log_{0,2}(x+1)$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{u\to -2} \dfrac{u^3+4u^2+4u}{(u+2)(u-3)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 2, \\ x+1, & x > 2; \end{cases}$ б) $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y = e^{2x}\cos 3x + \operatorname{arctg} x^2$; б) $y = \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x^2+3}} + \lg(3x^2+13)$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y = x\cos x^2$, $y''' = ?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \sqrt{x-1}$ в точці з абсцисою $x_0 = 5$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{3-3x}{x^2}$ і побудувати її графік.

Варіант 4

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$,

$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(0,-3,1)$, $A_2(2,-3,-4)$, $A_3(-1,-1,2)$, $A_4(0,2,3)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(1, 2, 3)$ і пряму $L: \dfrac{x-0.5}{0} = \dfrac{y+1.5}{-1} = \dfrac{z-1.5}{1}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ x-y-2z+2=0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(3,2)$, $B(-2,-2)$ та $C(1,-4)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $4x^2 - y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$; б) $y^2 - 4y + 4x = 0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = \log_{0,1}(3x-7)$; б) $y = \dfrac{3}{2-x} + 5.$

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+7n^2-2}{6n^3-4n+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos^3 x}{x\sin 2x}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x) = \begin{cases} -1, & x \le 0, \\ x-1, & 0 < x \le 1, \\ x^3+2, & x > 1; \end{cases}$ б) $f(x) = 4^{\frac{1}{x+3}}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y = 2^{x^3}\lg(4x+1) + \sin^2 3x$; б) $y = \arcsin x^2 + \dfrac{\cos 3x}{\sqrt{x}}$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y = \dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$, $y''' = ?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ і побудувати її графік.

Варіант 5

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 7 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність та у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 8. \end{cases}$

2. *Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії*

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(1,-2,3)$, $A_2(4,-3,-2)$, $A_3(4,5,-1)$, $A_4(0,1,-3)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(1, 0, -1)$ і пряму $L: \dfrac{x-3.5}{2} = \dfrac{y-1.5}{2} = \dfrac{z}{0}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 2x+3y+z+6=0, \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(-1,4)$, $B(2,2)$ та $C(-3,2)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$; б) $2x^2-4x+y-3=0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=\dfrac{3}{|x-1|}$; б) $y=3\operatorname{arctg}(2x+3)$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg}x}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x)=\begin{cases} 1, & x<0, \\ \sin x, & 0\le x<\pi, \\ x, & x\ge\pi; \end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{|x+3|}{x+3}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y=10^{-4x}\sin 3x+\operatorname{arctg}x$; б) $y=\lg(3x^2-1)+\dfrac{e^{-x^2}}{x}$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, \\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y = \dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$, $y''' = ?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \dfrac{\ln x}{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

Варіант 6

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(-1,2,-3)$, $A_2(5,-4,0)$, $A_3(-2,3,1)$, $A_4(0,-4,-2)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(2,1,0)$ і пряму $L: \dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y+1.5}{-1} = \dfrac{z+0.5}{1}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 3x+y-z-6=0, \\ 3x-y+2z=0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(-2,-3)$, $B(2,3)$ та $C(2,-1)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $x^2+4y^2+2x-32y+64=0$; б) $x^2-2x+y-2=0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = \log_{0,5}(x-5)$; б) $y = \frac{2}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - 2.$

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 5n}$; б) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 - 12}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x) = \begin{cases} -(x+1), & x \le -1, \\ (x+1)^2, & -1 < x \le 0, \\ x, & x > 0; \end{cases}$ б) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y = \sqrt[3]{x^2}\cos^2 x + \arccos 2x$; б) $y = \lg(x^3 - 4x) + \frac{5^{-x}}{x}$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y = (4x^3 + 5)e^{2x+1}$, $y^V = ?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \frac{3x-4}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \frac{4x}{4 + x^2}$ і побудувати її графік.

Варіант 7

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(-3,4,1)$, $A_2(5,-3,1)$, $A_3(-1,-2,-3)$, $A_4(-4,2,-3)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(-2,-3,0)$ і пряму $L: \dfrac{x+0.5}{1} = \dfrac{y+1.5}{0} = \dfrac{z-0.5}{1}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} x+5y+2z+11=0, \\ x-y-z-1=0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(-3,-4)$, $B(0,0)$ та $C(1,-2)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $9x^2-25y^2-18x-100y-316=0$; б) $x^2-12x+6y+2=0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=|2x|-3$; б) $y=2\arcsin(x+1)+3$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 0, \\ \sqrt{x}, & 0<x<4, \\ 1, & x\ge 4; \end{cases}$ б) $f(x)=14^{\frac{1}{6-x}}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y=\ln(\ln(1+x^2))$; б) $y=10^{1-\sin^4 3x}+\dfrac{\arcsin x}{1+x}$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t^2}, \\ y = \dfrac{1}{t^2+1}. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y = x^2 \sin(5x-3),\ y''' = ?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 2\sqrt{2}\sin x$ в точці з абсцисою $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x^3+1}{x^2}$ і побудувати її графік.

Варіант 8

1. *Елементи лінійної алгебри*

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 = 7, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

2. *Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії*

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(-4,3,1)$, $A_2(0,1,-5)$, $A_3(2,4,3)$, $A_4(-5,3,1)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(-1, 0, -1)$ і пряму $L: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1.5}{0} = \dfrac{z-2}{1}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 3x + 4y - 2z + 1 = 0, \\ 2x - 4y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(0,2)$, $B(-3,-1)$ та $C(4,2)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $4x^2 + y^2 - 16x - 6y + 21 = 0$; б) $2x^2 - 4x - y - 3 = 0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = |4x| - 1;$ б) $y = 2\arccos(x+1) - 3.$

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1000n^3 + 3n^2}{0{,}001n^4 - 100n^3 + 1};$ б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x};$ в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sin 3x}.$

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0, \\ \sin x, & 0 < x \le \pi, \\ x - 2, & x > \pi; \end{cases}$ б) $f(x) = 10^{-\frac{1}{7-x}}.$

3.4. Знайти похідну: а) $y = \sqrt[3]{2x-1}\sin 3x;$ б) $y = 5^{x^2-2x} + \dfrac{\ln 4(x-1)}{x^2}.$

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y = \dfrac{\ln x}{x^2},\ y^{IV} = ?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \arcsin\dfrac{x-1}{2}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1.$

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{16}{x(x-4)}$ і побудувати її графік.

Варіант 9

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1},$

якщо $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 3\\ 3 & 4 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 10, \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(1,3,6)$, $A_2(2,2,1)$, $A_3(-1,0,1)$, $A_4(-4,6,-3)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(0,2,1)$ і пряму $L: \dfrac{x-1.5}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 5x + y - 3z + 4 = 0, \\ x - y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(2,2)$, $B(-2,-3)$ та $C(2,-4)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $x^2 + 2y^2 + 8x - 4 = 0$; б) $-2y^2 + x + 12y - 14 = 0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = \arccos(3x + 2)$. б) $y = \ln(x - 1) + 1$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 2n - 1}{n^3 + 4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos^5 x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \le 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 2, & x > \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$ б) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y = (1 + 2x)e^{\operatorname{tg}^3 x}$; б) $y = 2^{x\cos x} + e^{-x/2} \cdot \sin 2x$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 2\sec^2 t. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y=(2x+3)\ln^2 x$, $y'''=?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\dfrac{x-1}{1+x^2}$ в точці з абсцисою $x_0=0$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$ і побудувати її графік.

Варіант 10

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A-B\cdot A+A^{-1}$, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\ 4 & 0 & -1\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}2x_1+x_2+4x_3=16,\\ 3x_1+2x_2+x_3=10,\\ x_1+3x_2+3x_3=16\end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=8,\\ 3x_1+x_2-2x_3=7,\\ 2x_1+5x_2-3x_3=-12.\end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(0,-1,-1)$, $A_2(-2,3,5)$, $A_3(1,-5,-9)$, $A_4(-1,-6,3)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(3,-3,-1)$ і пряму $L: \dfrac{x-6}{5} = \dfrac{y-3.5}{4} = \dfrac{z+0.5}{0}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} x-y-z-2=0, \\ x-2y+z+4=0. \end{cases}$ Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(6,2)$, $B(0,-2)$ та $C(-4,0)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $9x^2+16y^2-90x+32y+97=0$; б) $x^2-12x+6y+2=0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = 2^{-\frac{x}{3}+1}$; б) $y = 3 + \dfrac{5}{2x+1}$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \le 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x \le 1, \\ 2, & x > 1; \end{cases}$ б) $f(x) = 2^{\frac{1}{x+4}}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y = x^4 \left(\dfrac{1}{2}\ln x + 1\right)^2$; б) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3\text{-}x}{x\text{-}2}}$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x$, $y''' = ?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \arccos 3x$ в точці з абсцисою $x_0 = 0$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ і побудувати її графік.

Варіант 11

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв’язки: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(7,2,4)$, $A_2(7,-1,-2)$, $A_3(3,3,1)$, $A_4(-4,2,1)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об’єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(3,3,3)$ і пряму $L: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1.5}{0} = \dfrac{z-3}{1}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 4x+y-3z+2=0, \\ 2x-y+z-8=0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(-2,0)$, $B(1,1)$ та $C(-2,-2)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $5x^2+6y^2-10x-12y-4=0$; б) $x^2+3y+2=0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=3\arcsin(3x+1)$; б) $y=e^{-2x+1}-2$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x^2-1}{3x^3+5x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^3+1}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x)=\begin{cases} 1, & x\le -1, \\ -x, & -1<x<0, \\ x^2, & x\ge 0; \end{cases}$ б) $f(x)=3^{\frac{1}{(2+x)^2}}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y=\sqrt{x}\arcsin x+2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$; б) $y=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\ln\sin t. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y=\dfrac{\ln x}{x^3}$, $y^{IV}=?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x-x^3$ в точці з абсцисою $x_0=-1$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \ln\dfrac{x+1}{x+2}$ і побудувати її графік.

Варіант 12

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(1,1,-1)$, $A_2(2,3,1)$, $A_3(3,2,1)$, $A_4(5,9,-8)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(2,-2,-3)$ і пряму $L: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+0.5}{0} = \dfrac{z+1.5}{0}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 6x-7y-4z-2=0, \\ x+7y-z-5=0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(1,3)$, $B(-1,-4)$ та $C(-3,1)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $5x^2-6y^2+10x-12y-31=0$; б) $x^2-10y-2x-19=0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=\log_{0,3}(2x+1)$; б) $y=2+\dfrac{3}{x-5}$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-4x+1}{3x^2+5x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^3+2x^2+x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x)=\begin{cases}-x^2,\ x\le 0,\\ \dfrac{x}{3},\ x>0;\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$; б) $y=\operatorname{arctg}(\cos^2 x)+\dfrac{e^{-x}}{x}$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases}x=e^t,\\ y=\arcsin t.\end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y=(4x+3)2^{-x}$, $y^V=?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=2x^2+5$ в точці з абсцисою $x_0=-1$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{x^3+2}{x^2}$ і побудувати її графік.

Варіант 13

1.Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A-B\cdot A+A^{-1}$,

якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 5\\ 2 & 0 & -1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3=8,\\ 2x_1-x_2-3x_3=-1,\\ x_1+5x_2+x_3=0\end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$

2. *Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії*

2.2. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(2,3,1)$, $A_2(4,1,-2)$, $A_3(6,3,7)$, $A_4(7,5,-3)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.3. Задано точку $M(-1, 2, 0)$ і пряму $L: \dfrac{x+0.5}{1} = \dfrac{y+0.7}{-0.2} = \dfrac{z-2}{2}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.4. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 3x + 3y - 2z - 1 = 0, \\ 2x - 3y + z + 6 = 0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.5. Точки $A(-2,1)$, $B(-3,-2)$ та $C(2,1)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.6. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $5x^2 - 4y^2 + 16y - 36 = 0$; б) $2y^2 - 4x + 7 = 0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = 2^{3x-1} + 4$; б) $y = \left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right|$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^3 + x - 1}{3x^2 + 5x - 2}$; б) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$; в) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+5} - 2}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \le -1, \\ 1, & -1 < x < 0, \\ 4^x, & x \ge 0; \end{cases}$ б) $f(x) = 15^{\frac{1}{8-x}}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y = \sqrt{x^3 + x + \frac{1}{x}}$; б) $y = x \arcsin\sqrt{x} + 4^{-\sin^2 x}$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y = e^{1-2x} \cdot \sin(2 + 3x)$, $y^{IV} = ?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = e^{1-x^2}$ в точці з абсцисою $x_0 = -1$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \frac{4 - 2x}{1 - x^2}$ і побудувати її графік.

Варіант 14

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ -3x_1 + 9x_2 + x_3 + 13x_4 = 5. \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(1,2,0)$, $A_2(1,-1,2)$, $A_3(0,1,-1)$, $A_4(-3,0,1)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(-1,0,1)$ і пряму $L: \dfrac{x+0.5}{0} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-4}{2}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 8x - y - 3z - 1 = 0, \\ x + y + z + 10 = 0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(-4,-2)$, $B(0,-3)$ та $C(2,2)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$; б) $4y - x^2 + 6x - 29 = 0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = 4 - \dfrac{3}{2-3x}$; б) $y = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 3x - 1}{x^3 - 4x^2 + 4x - 2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$; в) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{\sqrt{x+6} - 2}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 2, \\ 8 - 2x, & x > 2; \end{cases}$ б) $f(x) = 11^{\frac{1}{2+x}}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y=\sqrt{x-1}\cdot \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; б) $y=7^{\cos^2\frac{x}{2}}+\dfrac{\ln(1+\cos x)}{x}$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x=\operatorname{tg}x, \\ y=\dfrac{1}{\sin 2t}. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y=\dfrac{\ln(3+x)}{3+x}$, $y'''=?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\sqrt[3]{x^2}-1$ в точці з абсцисою $x_0=1$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y=x\ln x$ і побудувати її графік.

Варіант 15

1.Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A-B\cdot A+A^{-1}$,

якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв’язки: $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3-x_4=11, \\ 2x_1+x_2-3x_3+4x_4=-5, \\ 2x_1-13x_2+11x_3-8x_4=49, \\ 4x_1+9x_2-13x_3+14x_4=-37. \end{cases}$

2. *Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії*

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(1,3,0)$, $A_2(4,-1,2)$, $A_3(3,0,1)$, $A_4(-4,3,5)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(0,-3,-2)$ і пряму $L: \dfrac{x-0.5}{0} = \dfrac{y+1.5}{-1} = \dfrac{z-1.5}{1}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 6x-5y-4z+8=0, \\ 6x+5y+3z+4=0 \end{cases}$.

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(-2,1)$, $B(2,0)$ та $C(-2,-3)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $x^2+4y^2+4x-16y-8=0$; б) $y-x^2+8x-15=0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = e^{-2x} + 1$; б) $y = 3\arccos(2x - 1)$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + 5x + 5}$; б) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ 2 + x, & x \ge 0; \end{cases}$ б) $f(x) = 13^{\frac{1}{5+x}}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y = \dfrac{2x + 1}{\sqrt[3]{x^3 + 4}}$; б) $y = \operatorname{arctg}^2(\ln x) + \dfrac{\cos^4 x}{1 + x^3}$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x = \sqrt[4]{t^3 - 1}, \\ y = \ln t. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y = (2x^3 + 1)\cos x$, $y^V = ?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 3x + \dfrac{1}{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$ і побудувати її графік.

Варіант 16

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв’язки: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 19, \\ 7x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

2. *Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії*

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(-1,2,-3)$, $A_2(4,-1,0)$, $A_3(2,1,-2)$, $A_4(3,4,5)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об’єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(1,0,1)$ і пряму $L: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{4}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} x+5y-z-5=0, \\ 2x-3y-2z+3=0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(2,4), B(-2,0)$ та $C(2,-2)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$; б) $y^2-6y-4x+29=0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=\dfrac{3}{2-x}+2;$ б) $y=\operatorname{ctg}\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right).$

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{x^3+2x^2-7}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{(x+1)(x-2)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}2x.$

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\le 0, \\ 0, & 0<x<1, \\ \lg x, & x\ge 1; \end{cases}$ б) $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}.$

3.4. Знайти похідну: а) $y=\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}+xe^{-x}$; б) $y=\operatorname{tg}^2(x^3+1).$

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x=a\cos^2 t, \\ y=a\sin^2 t. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y=(x^2+3)\ln(x-3),\ y^{IV}=?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 1 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}$ в точці з абсцисою $x_0 = 3$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y = x^2 \ln x$ і побудувати її графік.

Варіант 17

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$,

якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + x_3 + 3x_4 = -4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(-1,2,4)$, $A_2(-1,-2,-4)$, $A_3(3,0,-1)$, $A_4(7,-3,1)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(-1,0,1)$ і пряму $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 2x-3y+z+6=0, \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(2,3)$, $B(-3,0)$ та $C(2,-1)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$; б) $y - x^2 - 6x + 1 = 0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = \log_{0,5}(3x-1)$; б) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{4x^2-x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x^2+4x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-5}-2}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x)=\begin{cases}\cos x,\ x\le-\dfrac{\pi}{3},\\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\pi}{3}<x<2,\\ \dfrac{1}{x},\ x\ge2;\end{cases}$ б) $f(x)=-\dfrac{6}{x+3}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$; б) $y=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}+\arccos x^2+\ln^5 10$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases}x=\operatorname{tg}t,\\ y=\sin^2 t.\end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y=(1-x-x^2)e^{\frac{x-1}{2}}$, $y^{IV}=?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ в точці з абсцисою $x_0=-2$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{3x^4+1}{2x^3}$ і побудувати її графік.

Варіант 18

1.Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A-B\cdot A+A^{-1}$,

якщо $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-3&0\\10&2&7\\10&7&8\end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

2. *Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії*

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(0,-3,1)$, $A_2(-4,1,2)$, $A_3(2,-1,5)$, $A_4(3,1,-4)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(0,2,1)$ і пряму $L: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-1}{2}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 5x+y+2z+4=0, \\ x-y-3z+2=0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(2,3)$, $B(-1,2)$ та $C(2,-3)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$; б) $2y-y^2-4x+5=0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=-\frac{2}{3}\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)$; б) $y=\frac{1}{x-2}-1$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-1}{3x^2+2x+12}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+3x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1, \\ 2x, & 1<x<3, \\ x+3, & x\ge 3; \end{cases}$ б) $f(x)=\frac{4}{4-x^2}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y=3\cdot\sqrt[3]{5x^4+x^5-\frac{5}{x}}$; б) $y=\ln(e^x+2^{x^2})+x\cos x$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x=a\arcsin t, \\ y=\ln(1-t^2). \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y=\frac{1}{x}\cdot\sin 2x$, $y'''=?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\dfrac{1}{3x+2}$ в точці з абсцисою $x_0=2$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$ і побудувати її графік.

Варіант 19

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A-B\cdot A+A^{-1}$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 5\\ 2 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}x_1-4x_2-2x_3=-3,\\ 3x_1+x_2+x_3=5,\\ 3x_1+x_2+2x_3=-2\end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-2x_4=4,\\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4=5,\\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4=11,\\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4=6.\end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(1,3,0)$, $A_2(4,-1,2)$, $A_3(3,0,1)$, $A_4(-4,3,5)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(2,1,0)$ і пряму $L: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+3}{2}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 4x+y+z+2=0, \\ 2x-y-3z-8=0. \end{cases}$ Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(1,4)$, $B(-2,1)$ та $C(-1,-2)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$; б) $4y - y^2 - 8x + 5 = 0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = \dfrac{3}{2}\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$; б) $y = e^{3x-1} - 2$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+1}{6x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin 3x}{5x}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x)=\begin{cases}x-3, & x<0,\\ x+1, & 0\le x\le 4,\\ 3+\sqrt{x}, & x>4;\end{cases}$ б) $f(x)=2^{\frac{1}{9-x^2}}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y=2^x e^{-x}+\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$; б) $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}+\sin^2 3x$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases}x=\arccos t,\\ y=\sqrt{1-t^2}.\end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y=(x+7)\ln(x+4)$, $y^V=?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x-\dfrac{2}{3}x^3$ в точці з абсцисою $x_0=1$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y=(2+x^2)e^{-x}$ і побудувати її графік.

Варіант 20

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A-B\cdot A+A^{-1}$, якщо $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 5\\ 2 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

2. *Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії*

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(7,1,2)$, $A_2(-5,3,-2)$, $A_3(3,3,5)$, $A_4(4,5,-1)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(-1,2,0)$ і пряму $L: \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-2}{0}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 2x+y-3z-2=0, \\ 2x-y+z+6=0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(1,2)$, $B(-2,0)$ та $C(3,-2)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$; б) $4y^2+3x-16y+13=0$

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=3\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)-1$; б) $y=\left|\frac{1}{2}\cos 2x\right|$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4+x+3}{x^3-x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x\sin 3x}{1-\cos 2x}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0, \\ x, & 0<x\le 1, \\ 2, & x>1; \end{cases}$ б) $f(x)=5^{\frac{1}{1-x^2}}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y=\frac{\sqrt{1+\cos^3 x}}{1+\sin 3x}$; б) $y=x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arctg}e^{2x}$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=t^3. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y=(3x-7)\cdot 3^{-x}$, $y^{IV}=?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 2 + x^2 - x$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ і побудувати її графік.

Варіант 21

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$,

якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(3,2,7)$, $A_2(1,3,2)$, $A_3(-2,1,2)$, $A_4(4,0,0)$.

Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(2,-1,1)$ і пряму $L: \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} x+y-2z-2=0, \\ x-y+z+2=0. \end{cases}$ Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(0,2), B(-1,-1)$ та $C(-2,2)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$; б) . $x^2 - 2y + 4x + 2 = 0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = -\log_{0,5}(x+5)$; б) $y = -\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2}{5x^2+x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1-x^2}{3x}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x)=\begin{cases}3x^2,\ x\le 0,\\ x-1,\ 0<x\le 2,\\ 1,\ x>2;\end{cases}$ б) $f(x)=5^{\frac{1}{4-x^2}}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}+e^{2x}$; б) $y=\dfrac{4\ln x}{1-\ln x}+\arccos\dfrac{1}{x}+xe^{x^2}$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases}x=t+\sin t,\\ y=2+\cos t.\end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y=\dfrac{\ln(2x+5)}{2x+5}$, $y'''=?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x+\sqrt[3]{x}$ в точці з абсцисою $x_0=1$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{x^3-3}{x}$ і побудувати її графік.

Варіант 22

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A-B\cdot A+A^{-1}$, якщо $A=\begin{pmatrix}2&-1&4\\3&-1&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(-2,1,0)$, $A_2(2,2,5)$, $A_3(3,1,2)$, $A_4(1,-2,1)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

3) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

4) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

5) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

6) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(1,1,1)$ і пряму $L: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} x+5y-z+11=0, \\ x-y+2z-1=0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(-1,2)$, $B(-2,-2)$ та $C(3,0)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$; б) $2x^2-4x+2y-3=0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=-\arccos(5x-2)$. б) $y=\ln(x+4)-1$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+x+5}{4x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0, \\ 1, & 0<x<1, \\ 2-\lg x, & x\ge 1; \end{cases}$ б) $f(x)=2^{\frac{1}{4x+1}}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y=x^3\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4}-\dfrac{2^{\sin x}}{\sqrt{x}}$; б) $y=\sqrt[3]{\ln\cos x}+\operatorname{ctg}^3\dfrac{3x}{4}$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y=e^{\frac{x}{2}}\cdot\sin 2x$, $y^{IV}=?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=1+\dfrac{4}{x^3-1}$ в точці з абсцисою $x_0=2$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x^2 - 5}{x - 3}$ і побудувати її графік.

Варіант 23

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(-2,-1,-1)$, $A_2(0,3,2)$, $A_3(3,1,-4)$, $A_4(-4,7,3)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(1,2,3)$ і пряму $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} x - y + z - 2 = 0, \\ x - 2y - z + 4 = 0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(-2,2)$, $B(-1,-2)$ та $C(2,0)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$; б) $4y^2 + 3x - 16y + 13 = 0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = 5^{-\frac{x}{3}+1}$; б) $y = 2 + \frac{5}{2x-1}$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^5 + 4x^3 + 1}{9x^5 + 7x - 2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5\arcsin 4x}{7x}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x)=\begin{cases}\sin 2x,\ x\le 0,\\ 0,\ 0<x<1,\\ \lg(x-1),\ x\ge 1;\end{cases}$ б) $f(x)=2^{\frac{1}{x+10}}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y=\operatorname{ctg}7x\cdot\arccos x+\dfrac{(x-4)^5}{x^2+x}$; б) $y=3^{\sin\ln x}-\cos\sqrt[3]{2}x$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases}x=\sec t,\\ y=\operatorname{tg}t.\end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y=\dfrac{\ln x}{x^5}$, $y'''=?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x-\dfrac{x+1}{x^4+1}$ в точці з абсцисою $x_0=1$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{x}{3-x^2}$ і побудувати її графік.

Варіант 24

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A-B\cdot A+A^{-1}$, якщо $A=\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&1&-1\\-2&4&-1\\-2&1&6\end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}2x_1-x_2+5x_3=4,\\ 5x_1+2x_2+13x_3=2,\\ 3x_1-x_2+5x_3=0\end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(-2,1,2)$, $A_2(4,0,0)$, $A_3(3,2,7)$, $A_4(1,3,2)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(0,-3,-2)$ і пряму $L: \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+4}{-1}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 6x - 7y - z - 2 = 0, \\ x + 7y - 4z - 5 = 0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(1,3)$, $B(-1,-1)$ та $C(1,-1)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0;$ б) $x^2 - 2x + y - 2 = 0.$

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = -3\arcsin(4x - 3);$ б) $y = 4^{-2x+1} + 2.$

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^2 + x + 9}{10x^3 + 5x^2 + 4x};$ б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1};$ в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 4x}.$

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \le 0, \\ 2x^2, & 0 < x < 1, \\ x - 3, & x \ge 1; \end{cases}$ б) $f(x) = e^{\frac{1}{6x-1}}.$

3.4. Знайти похідну: а) $y = \dfrac{\operatorname{arctg} 5x}{e^{\frac{3x}{2}}} - \cos^2 x \cdot \ln x;$ б) $y = \sqrt[4]{\operatorname{tg}(x^4)} + \cos \lg 2.$

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \dfrac{1}{1-t}. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y = x\ln(1 - 3x)$, $y^{IV} = ?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \operatorname{arctg} x$ в точці з абсцисою $x_0 = 1.$

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{4x^2}{4 + x^2}$ і побудувати її графік.

Варіант 25

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8, \\ 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(1,3,2)$, $A_2(3,2,7)$, $A_3(4,0,0)$, $A_4(-2,1,2)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(1,0,-1)$ і пряму $L: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{6} = \dfrac{z+3}{6}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} x+5y+2z-5=0, \\ 2x-5y-z+5=0. \end{cases}$ Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(-1,2)$, $B(-2,-3)$ та $C(3,2)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$; б) $y^2 - 4y + x - 2 = 0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = \log_{0,5}(2x-1)$; б) $y = \left| \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{6} \right) \right|$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+3}{-4x^3+x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-x-6}{x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\arcsin x}{\sin 4x}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x) = \begin{cases} -3x, & x \le 0, \\ 1-x^2, & 0 < x \le 2, \\ x+1, & x > 2; \end{cases}$ б) $f(x) = \dfrac{1}{(2+x)^3}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y = e^{-4x} \cdot \sin^3 x + \dfrac{\arcsin\dfrac{x}{2}}{x^4 - 1}$; б) $y = \ln\sin\dfrac{2x+3}{2x+1}$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y = (x^2 + 3x + 1)e^{3x+2}$, $y^V = ?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \dfrac{x-4}{x+2}$ в точці з абсцисою $x_0 = 0$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{\ln x}{x}$ і побудувати її графік.

Варіант 26

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & -4 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18. \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(3,1,-2)$, $A_2(1,-2,1)$, $A_3(-2,1,2)$, $A_4(4,0,0)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(3,-3,-1)$ і пряму $L: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{2}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} x - 3y + z + 2 = 0, \\ x + 3y + 2z + 14 = 0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(1,1)$, $B(-2,-1)$ та $C(3,-3)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$; б) $y^2 + 4y + 6x - 2 = 0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = 4 - \dfrac{3}{2+3x}$; б) $y = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4 + 15}{7x^2 + 5x + 1}$; б) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 10x}{x}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x) = \begin{cases} -x + 4, & x \le 0, \\ 2x^2, & 0 < x \le 2, \\ x^3 - 1, & x > 2; \end{cases}$ б) $f(x) = \dfrac{1}{|2 - x|}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y = \dfrac{(2x-4)^5}{\sqrt[4]{x}} + \operatorname{arctg} 2x \cdot 3^x$; б) $y = \lg^3\left(1 + \cos\dfrac{x}{3}\right)$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^{2^{`}}}}. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y = (5x - 8) \cdot 2^{-x}$, $y^{IV} = ?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \ln(x + 1)$ в точці з абсцисою $x_0 = 0$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \ln(9 - x^2)$ і побудувати її графік.

Варіант 27

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$,

якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ -5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 13x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(3,10,-1)$, $A_2(-2,3,-5)$, $A_3(-6,0,-3)$, $A_4(1,-1,2)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(-2,-3,0)$ і пряму $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 2x+3y-2z+6=0, \\ x-3y+z+3=0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(2,3), B(-3,0)$ та $C(2,-1)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2-x+\frac{2}{3}y-1=0$; б) $-y^2-4y+x-2=0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=-e^{-2x}+2$; б) $y=2\arccos(3x-1)$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-2x+1}{5x^3+4x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{7x^2+23x+6}{x^2+8x+15}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-x+1})$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x)=\begin{cases} -\operatorname{tg}x, & x\le 0, \\ x^2, & 0<x\le 2, \\ 1/x, & x>2; \end{cases}$ б) $f(x)=\frac{1}{x^2}-2$.

3.4. Знайти похідну: а) $y=xe^{\sqrt{x}}+\frac{\ln\cos x}{\sqrt{1+5x}}$; б) $y=\arcsin^2(x^2)-\sqrt[3]{\operatorname{tg}1}\cdot x^3$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{t}}. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y = \dfrac{\ln(x-2)}{x-2}$, $y^{V} = ?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \dfrac{4x - x^2}{4}$ в точці з абсцисою $x_0 = 4.$

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$ і побудувати її графік.

Варіант 28

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв’язки: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

2. *Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії*

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(1,0,2)$, $A_2(1,2,-1)$, $A_3(2,-2,1)$, $A_4(2,1,0)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(2,-2,-3)$ і пряму $L: \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+3}{2}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 3x+4y+3z+1=0, \\ 2x-4y-2z+4=0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(3,2)$, $B(0,-3)$ та $C(5,-2)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $x^2+4y^2+2x-32y+64=0$; б) $x=2y^2-12y+4$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = 3^{-\frac{2x}{3}-1}$; б) $y = \left|\operatorname{ctg}\left(x - \pi/3\right)\right|$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3 - 4x + 6}{3x^2 + 2x + 1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{5x}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x \le 0, \\ x^3, & 0 < x \le 1, \\ 2, & x > 1; \end{cases}$ б) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{2 - x}$.

3.4. Знайти похідну: а) $y = \sqrt{(3x+1)^3} \cdot \arccos x - \dfrac{1 + \cos 4x}{x\sqrt{2}}$; б) $y = 10^{\sin^2 x}$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln\cos t. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y = e^{-x}(\cos 2x - 3\sin 2x)$, $y^{IV} = ?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \sqrt[3]{x-1}$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{5x}{4 - x^2}$ і побудувати її графік.

Варіант 29

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(1,2,-3)$, $A_2(1,0,1)$, $A_3(-2,-1,6)$, $A_4(0,-5,-4)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(-1,0,1)$ і пряму $L: \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 3x+3y+z-1=0, \\ 2x-3y-2z+6=0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(-2,1)$, $B(-1,-2)$ та $C(2,3)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $9y^2-16x^2-64x-54y-127=0$; б) $y^2-6y+4x+12=0$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=-\ln\left(x+\frac{2}{3}\right)+2$; б) $y=\left|\frac{1}{3}\sin 2x\right|$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-8x+1}{7x^5+4x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x)=\begin{cases} -\operatorname{ctg}x, & x\le 0, \\ x, & 0<x\le 3, \\ 3, & x>3; \end{cases}$ б) $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2-x}$.

3.4. Знайти похідну:

а) $y=5^{-2x}\cdot\sin^3 x-\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; б) $y=\lg\operatorname{tg}\ln x+\sqrt{\cos\frac{\pi}{12}x}$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x = c\text{h}t, \\ y = \sqrt[3]{\text{sh}^2 t}. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y = \dfrac{\log_3 x}{x^2}$, $y^{IV} = ?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \text{tg}2x$ в точці з абсцисою $x_0 = 0.$

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x-3}{(x-2)^2}$ і побудувати її графік.

Варіант 30

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

1.2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

2.

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(1,0,2)$, $A_2(1,2,-1)$, $A_3(2,-2,1)$, $A_4(2,1,0)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

2.2. Задано точку $M(3,3,3)$ і пряму $L: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-4}{3}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями $\begin{cases} 6x-5y+3z+8=0, \\ 6x+5y-4z+4=0. \end{cases}$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

2.4. Точки $A(2,2)$, $B(-3,0)$ та $C(1,-1)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y - 1 = 0$; б) $x - 5 = 4y^2 - 24y$.

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = e^{-\frac{x}{3}+1}$; б) $y = \dfrac{2x-5}{2x+1}$.

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+6x-3}{5x^2+10}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x) = \begin{cases} -\operatorname{tg} x, & x \le 0, \\ x-4, & 0 < x \le 3, \\ 3-x, & x > 3; \end{cases}$ б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

3.4. Знайти похідну:

а) $y = \sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)} + \ln(\sqrt{1+e^x} - 1)$; б) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1+x}{1-x}$.

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4 \dfrac{t}{2}. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y = (5x-1)\ln^2 x$, $y''' = ?$

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \dfrac{x}{\sqrt{3+x^2}}$ в точці з абсцисою $x_0 = 0$.

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x^2}{4-x^2}$ і побудувати її графік.

Додаткові завдання

1. Метод координат

1. На рис.1 у системі координат зображено трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Ребра $AA_1,\ BB_1$ і CC_1 паралельні осі Oy. Визначити координати точок $A_1,\ B_1$ і C_1, якщо $AB = AC$ і $AA_1 = 10$.

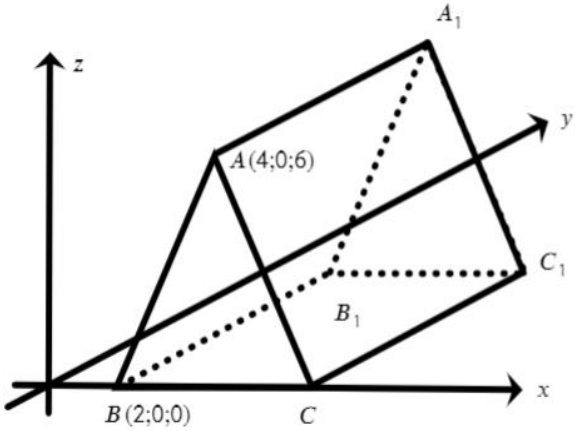


Рис. 1.1

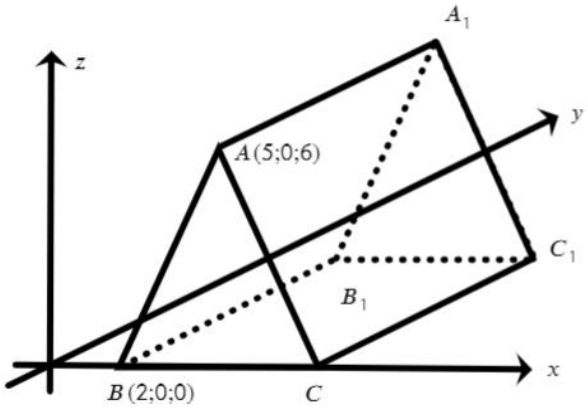


Рис. 1.2

2. На рис. 1.1 у системі координат зображено трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Ребра $AA_1,\ BB_1$ і CC_1 паралельні осі Oy. Визначити координати точок $A_1,\ B_1$ і C_1, якщо $AB = AC$ і $CC_1 = 2BC$. Знайти площу повної поверхні призми та її об'єм.

3. На рис. 1.1 у системі координат зображено трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Ребра $AA_1,\ BB_1$ і CC_1 паралельні осі Oy. Визначити координати точок $A_1,\ B_1$ і C_1, якщо $AB = AC$ і $CC_1 = 3BC$. Знайти площу повної поверхні призми та її об'єм.

4. На рис. 1.1 у системі координат зображено трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Ребра $AA_1,\ BB_1$ і CC_1 паралельні осі Oy. Визначити координати точок $A_1,\ B_1$ і C_1, якщо $AB = AC$ і $CC_1 = 4BC$. Знайти площу повної поверхні призми та її об'єм.

5. На рис. 1.2 у системі координат зображено трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Ребра $AA_1,\ BB_1$ і CC_1 паралельні осі Oy. Визначити координати

точок A_1, B_1 і C_1, якщо $AB = AC$ і чотирикутник BB_1C_1C є квадратом. Знайти площу повної поверхні призми та її об'єм.

6. На рис. 1.3 у системі координат зображено прямокутний паралелепіпед на якому зверху розташовано куб. Визначити координати вершин куба, якщо відомі координати точки $A(4; 8; 6)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об'єм.

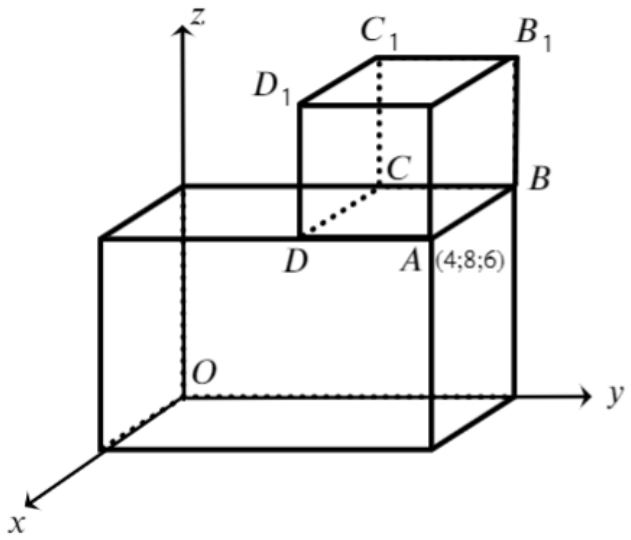


Рис. 1.3

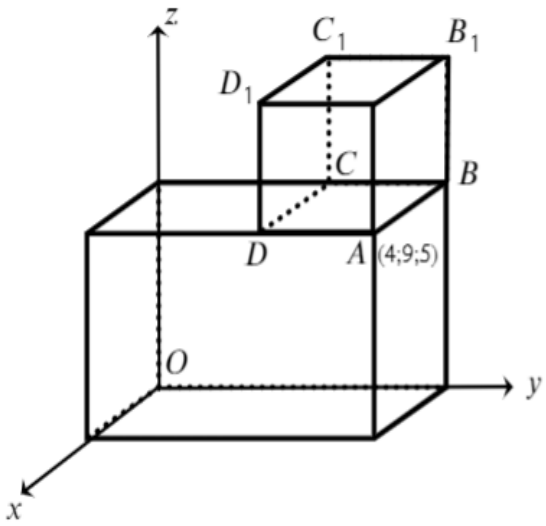


Рис. 1.4

7. На рис. 1.4 у системі координат зображено прямокутний паралелепіпед на якому зверху розташовано куб. Визначити координати вершин куба, якщо відомі координати точки $A(4; 9; 5)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об'єм.

8. На рис. 1.5 у системі координат зображено прямокутний паралелепіпед на якому зверху розташовано куб. Визначити координати вершин куба, якщо відомі координати точки $A(5; 9; 7)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об'єм.

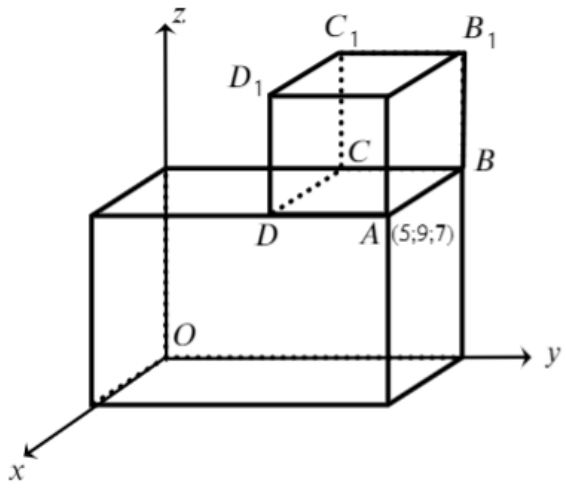


Рис. 1.5

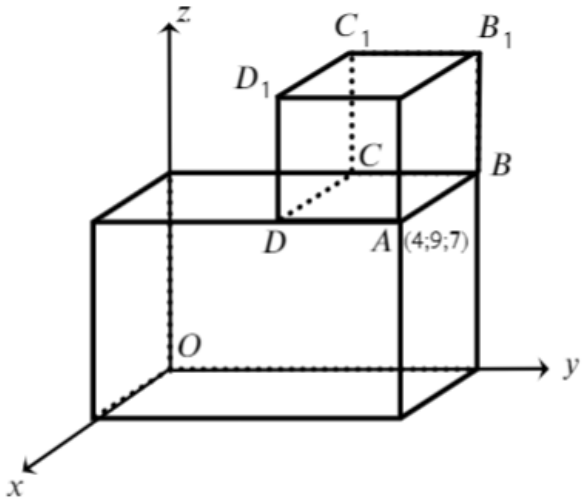


Рис. 1.6

9. На рис. 1.6 у системі координат зображено прямокутний паралелепіпед на якому зверху розташовано куб. Визначити координати вершин куба, якщо відомі координати точки $A(4; 9; 7)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об'єм.

10. На рис. 1.7 у системі координат зображено прямокутний паралелепіпед на якому зверху розташовано куб. Визначити координати вершин куба, якщо відомі координати точки $A(5; 8; 7)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об'єм.

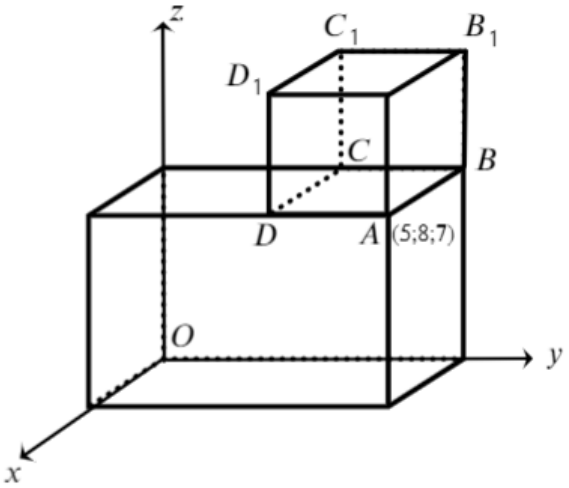


Рис. 1.7

11. На рис. 1.8 у системі координат зображено куб на якому зверху розташовано правильну чотирикутну піраміду із висотою, що дорівнює

половині висоти куба. Точка D розташована над центром основи. Визначити всі координати вершин комбінованого тіла, якщо відомі координати точки $A(0;6;0)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об'єм.

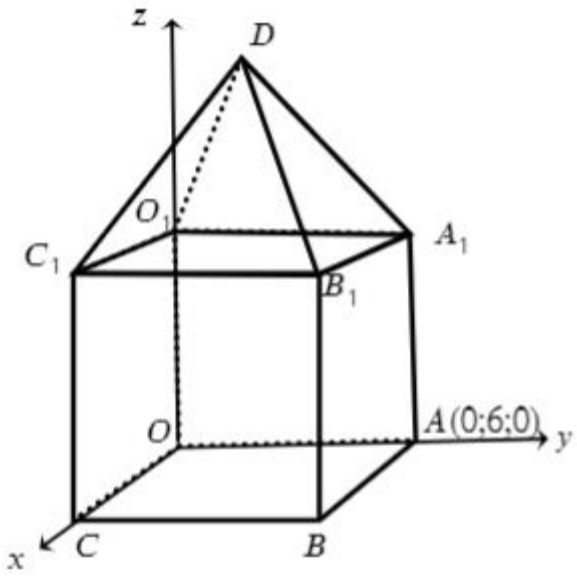


Рис. 1.8

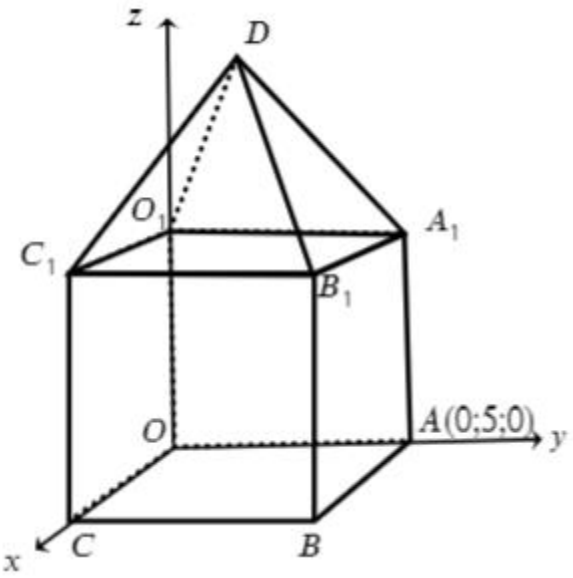


Рис. 1.9

12. На рис. 1.9 у системі координат зображено куб, на якому зверху розташовано правильну чотирикутну піраміду із висотою, що дорівнює половині діагоналі основи куба. Точка D розташована над центром основи. Визначити всі координати вершин комбінованого тіла, якщо відомі координати точки $A(0;5;0)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об'єм.

13. На рис. 1.10 у системі координат зображено куб на якому зверху розташовано правильну чотирикутну піраміду із висотою, що дорівнює половині висоти куба. Точка D розташована над центром основи. Визначити всі координати вершин комбінованого тіла, якщо відомі координати точки $C(4;0;0)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об'єм.

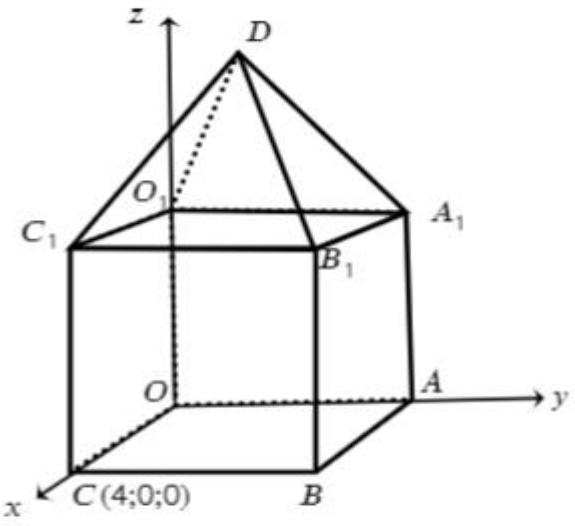


Рис. 1.10

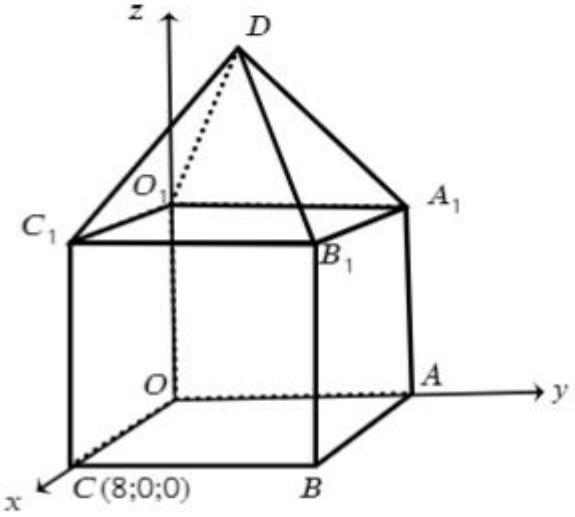


Рис. 1.11

14. На рис. 1.11 у системі координат зображено куб, на якому зверху розташовано правильну чотирикутну піраміду із висотою, що дорівнює половині висоти куба. Точка D розташована над центром основи. Визначити всі координати вершин комбінованого тіла, якщо відомі координати точки $C(8;0;0)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об'єм.

15. На рис. 1.12 у системі координат зображено куб на якому зверху розташовано правильну чотирикутну піраміду із висотою, що дорівнює половині висоти куба. Точка D розташована над центром основи. Визначити всі координати вершин комбінованого тіла, якщо відомі координати точки $C(10;0;0)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об'єм.

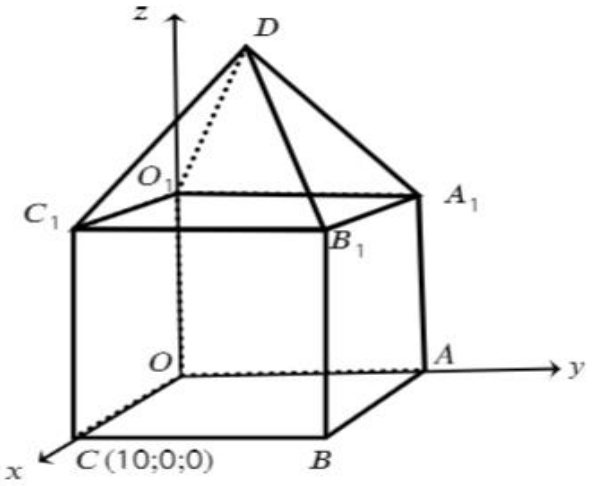


Рис. 1.12

16. На рис. 1.13 у системі координат зображено чотирикутну піраміду із прямокутником в основі. Точка V розташована над точкою перетину діагоналей основи. Визначити всі координати вершин піраміди, якщо відомі координати точок $D(0;1;0), V(1;2;6)$. Знайти площу повної поверхні піраміди та її об'єм.

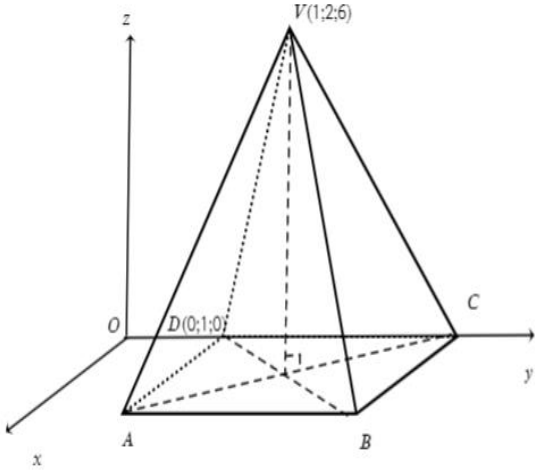


Рис. 1.13

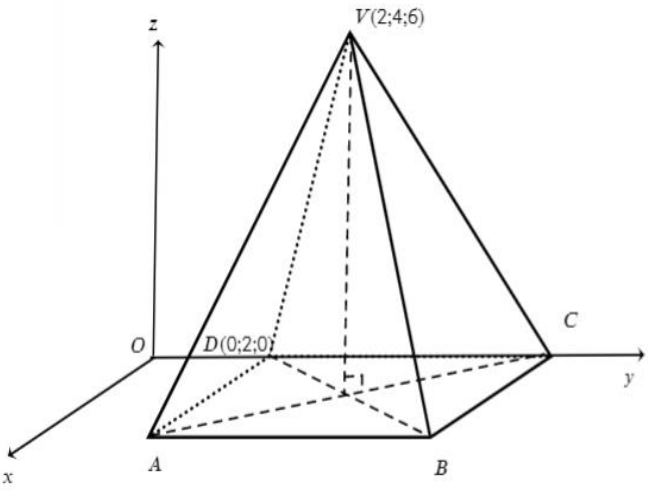


Рис. 1.14

17. На рис. 1.14 у системі координат зображено чотирикутну піраміду із прямокутником в основі. Точка V розташована над точкою перетину діагоналей основи. Визначити всі координати вершин піраміди, якщо відомі координати точок $D(0;2;0), V(2;4;6)$. Знайти площу повної поверхні піраміди та її об'єм.

18. На рис. 1.15 у системі координат зображено чотирикутну піраміду із прямокутником в основі. Точка V розташована над точкою перетину діагоналей основи. Визначити всі координати вершин піраміди, якщо відомі координати точок $D(1;1;0), V(4;3;5)$. Знайти площу повної поверхні піраміди та її об'єм.

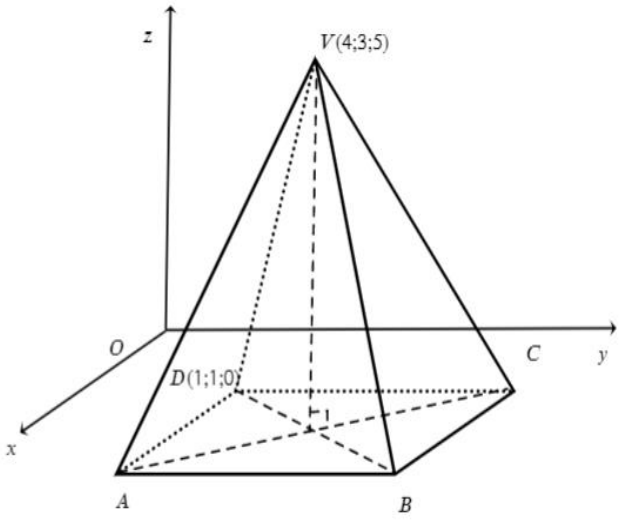


Рис. 1.15

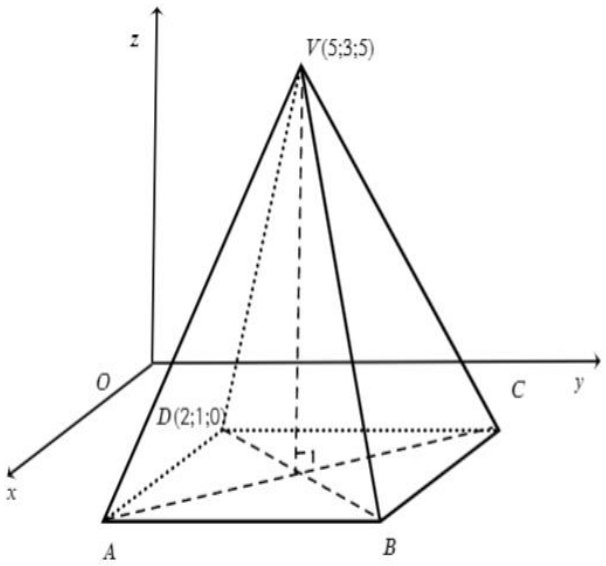


Рис. 1.16

19. На рис. 1.16 у системі координат зображено чотирикутну піраміду із прямокутником в основі. Точка V розташована над точкою перетину діагоналей основи. Визначити всі координати вершин піраміди, якщо відомі координати точок $D(2;1;0), V(5;3;5)$. Знайти площу повної поверхні піраміди та її об'єм.

20. На рис. 1.17 у системі координат зображено чотирикутну піраміду із прямокутником в основі. Точка V розташована над точкою перетину діагоналей основи. Визначити всі координати вершин піраміди, якщо відомі координати точок $D(0;2;0), V(3;5;6)$. Знайти площу повної поверхні піраміди та її об'єм.

21. На рис. 1.18 у системі координат зображено прямокутний паралелепіпед на якому зверху розташовано правильну трикутну призму, причому трикутник FA_1B_1 прямокутний рівнобедрений ($\angle A_1FB_1 = 90^0,\ A_1F = FB_1$). Визначити всі координати вершин комбінованого тіла, якщо відомі координати точки $D_1(8;6;8)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об'єм.

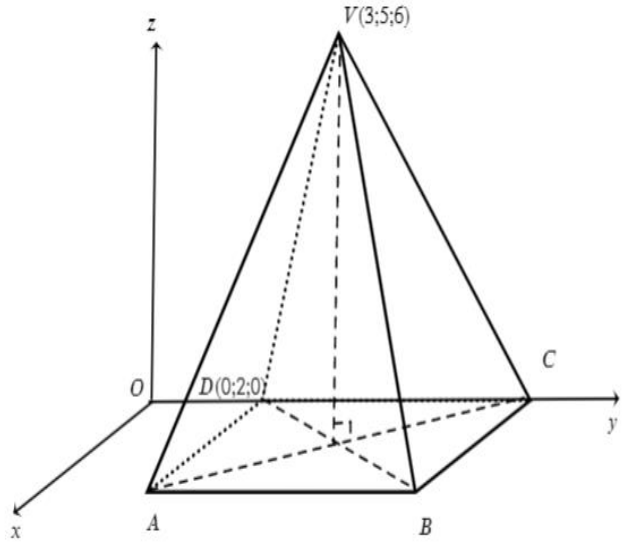


Рис. 1.17

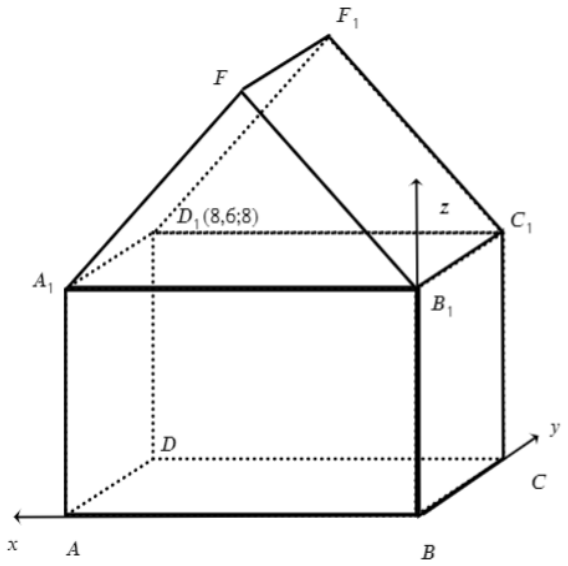


Рис. 1.18

22. На рис. 1.19 у системі координат зображено прямокутний паралелепіпед на якому зверху розташовано правильну трикутну призму, причому трикутник FA_1B_1 прямокутний рівнобедрений ($\angle A_1FB_1 = 90^0,\ A_1F = FB_1$). Визначити всі координати вершин комбінованого тіла, якщо відомі координати точки $D_1(8;6;10)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об'єм.

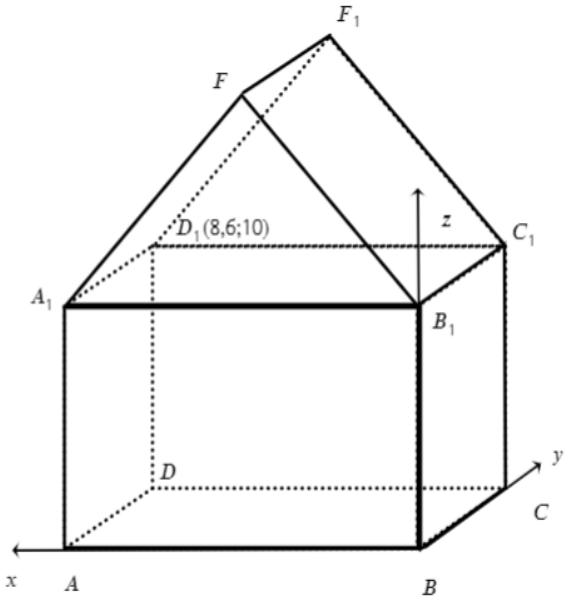


Рис. 1.19

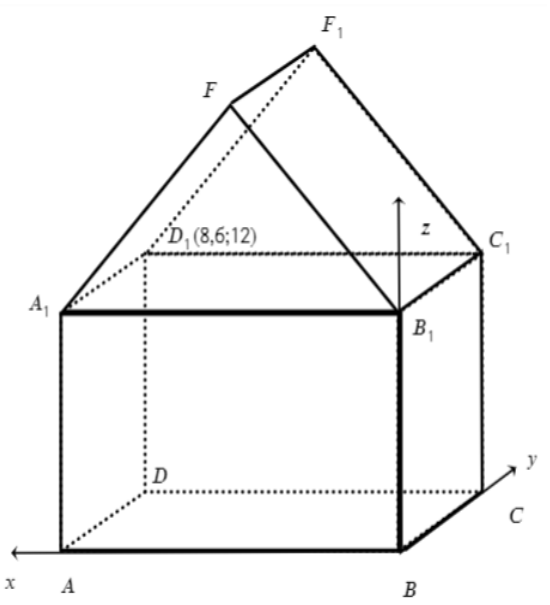


Рис. 1.20

23. На рис. 1.20 у системі координат зображено прямокутний паралелепіпед на якому зверху розташовано правильну трикутну призму, причому трикутник FA_1B_1 прямокутний рівнобедрений ($\angle A_1FB_1 = 90^0,\ A_1F = FB_1$). Визначити всі координати вершин комбінованого тіла, якщо відомі координати точки $D_1(8;6;12)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об'єм.

24. На рис. 1.21 у системі координат зображено прямокутний паралелепіпед на якому зверху розташовано правильну трикутну призму, причому трикутник FA_1B_1 прямокутний рівнобедрений ($\angle A_1FB_1 = 90^0,\ A_1F = FB_1$). Визначити всі координати вершин комбінованого тіла, якщо відомі координати точки $D_1(4;3;6)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об'єм.

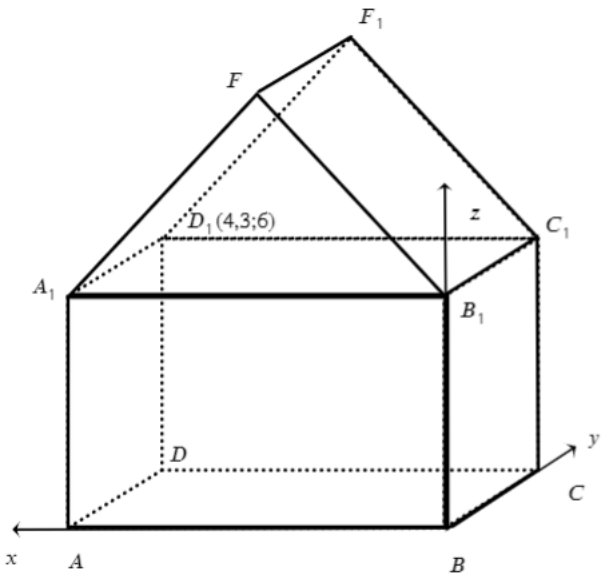


Рис. 1.21

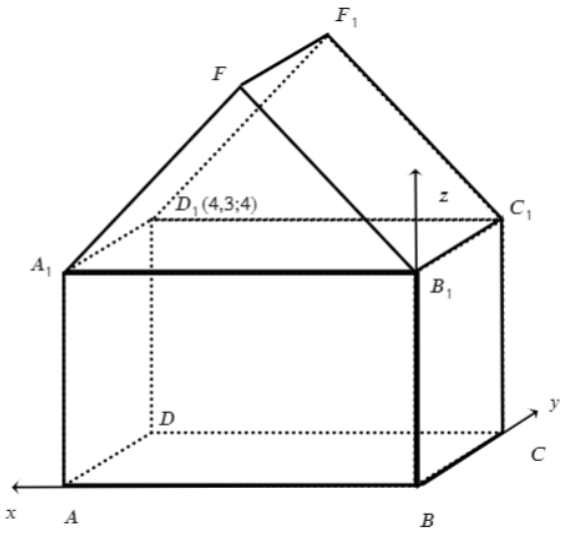


Рис. 1.22

25. На рис. 1.22 у системі координат зображено прямокутний паралелепіпед на якому зверху розташовано правильну трикутну призму, причому трикутник FA_1B_1 прямокутний рівнобедрений ($\angle A_1FB_1 = 90^0,\ A_1F = FB_1$). Визначити всі координати вершин комбінованого тіла,

якщо відомі координати точки $D_1(4;3;4)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об’єм.

26. На рис. 1.23 у системі координат зображено біпіраміду з прямокутником в основі (основа розташована в площині Oxy). Визначити всі координати вершин комбінованого тіла, якщо відомі координати точки $V(4;3;5)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об’єм.

27. На рис. 1.24 у системі координат зображено біпіраміду з прямокутником в основі (основа розташована в площині Oxy). Визначити всі координати вершин комбінованого тіла, якщо відомі координати точки $V(2;3;4)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об’єм.

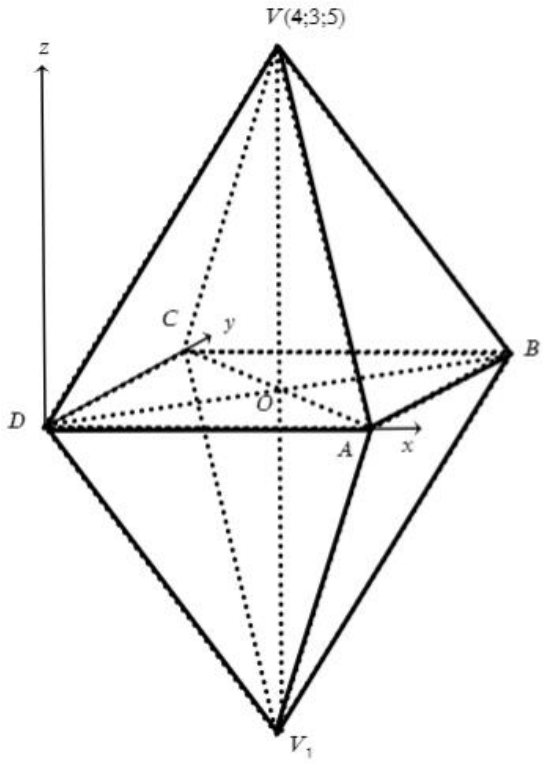


Рис. 1.23

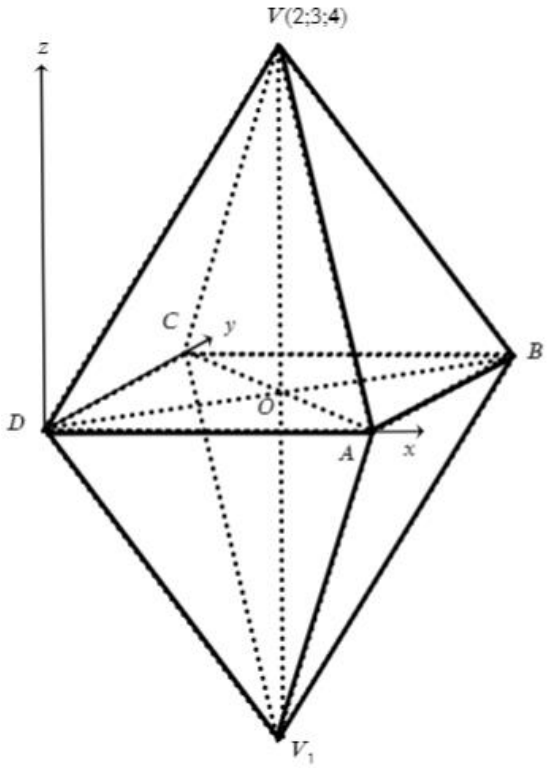


Рис. 1.24

28. На рис. 1.25 у системі координат зображено біпіраміду з квадратом в основі (основа розташована в площині Oxy). Визначити всі координати вершин комбінованого тіла, якщо відомі координати точки $V(4;4;5)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об’єм.

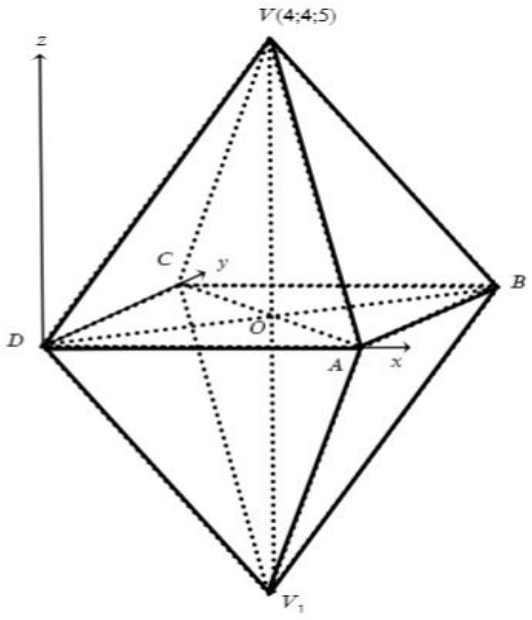


Рис. 25

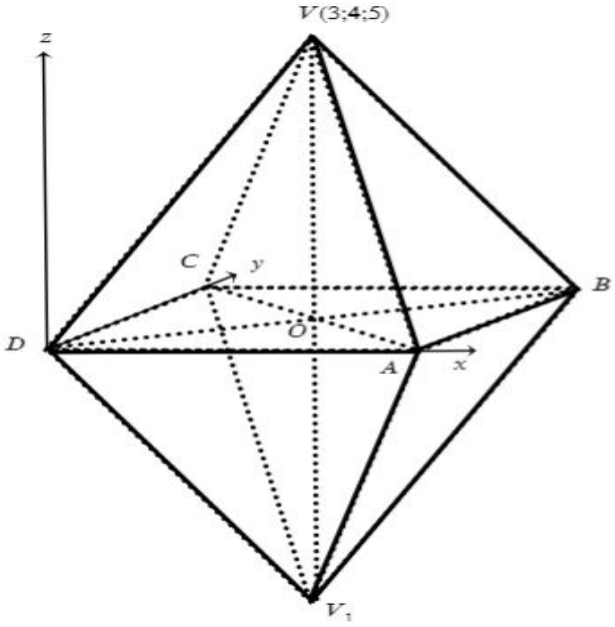


Рис. 1.26

29. На рис. 1.26 у системі координат зображено біпіраміду з прямокутником в основі (основа розташована в площині Oxy). Визначити всі координати вершин комбінованого тіла, якщо відомі координати точки $V(3;4;5)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об'єм.

30. На рис. 1.27 у системі координат зображено біпіраміду з прямокутником в основі (основа розташована в площині Oxy). Визначити всі координати вершин комбінованого тіла, якщо відомі координати точки $V(4;4;3)$. Знайти площу повної поверхні комбінованого тіла та його об'єм.

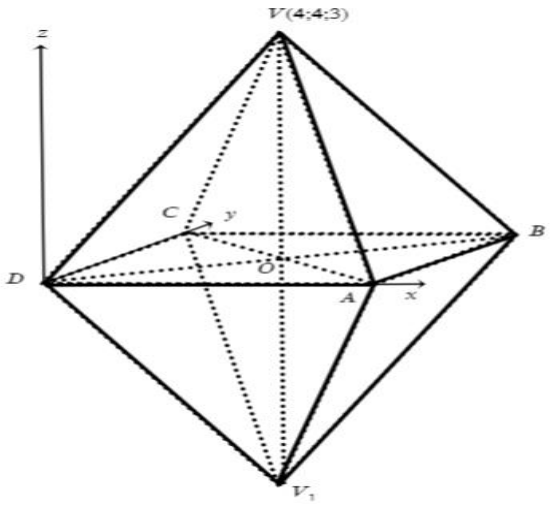


Рис. 1.27

2. Рівняння прямої на площині

1. Зарплата менеджера з продажів має залежати від планових і фактичних обсягів продажів: чим більше він продає, тим більше заробляє. Менеджеру платять за роботу щотижня, причому його заробітна плата складається з базової заробітної плати плюс комісійні від продажів. На рис. 2.1 в системі координат OWS, де W обсяги продажу, S щотижнева заробітна плата представлено графік, що демонструє залежність S від W. Точка A представляє продажі в розмірі 60 тис. грн і відповідну заробітну плату в розмірі 4.5 тис. грн. Точка B представляє продажі на величину 72 тисяч гривень і відповідну заробітну плату 5.1 тис. грн. Знайти рівняння прямої AB, що відповідають закону нарахування щотижневої платні. Обчисліть зарплату Менеджера за тиждень, якщо його продажі становлять 100 тис. грн.

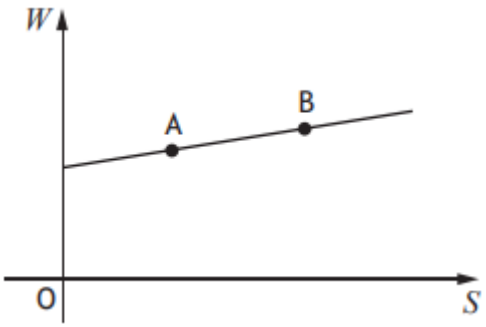


Рис. 2.1

2. Між пунктами A та B по прямій проходить автострада. На плані місцевості ці пункти мають координати (1; 5) та (13; 14) (розміри дано в кілометрах). Об'єкт C з координатами (7; 7) у тій самій системі треба з'єднати найкоротшою дорогою з цією автострадою (рис. 2.2). Знайти на автостраді точку входження до неї дороги та довжину дороги.

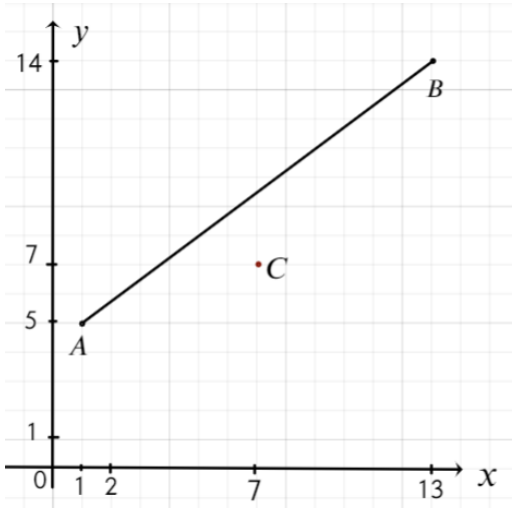


Рис. 2.2

3. Між пунктами A та B по прямій проходить автострада. На плані місцевості ці пункти мають координати $(2; 4)$ та $(8; 1)$ (розміри дано в кілометрах). Об'єкт C з координатами $(6; 7)$ треба з'єднати найкоротшою дорогою з цією автострадою (рис. 2.3). Знайти на автостраді точку входження до неї дороги та довжину дороги.

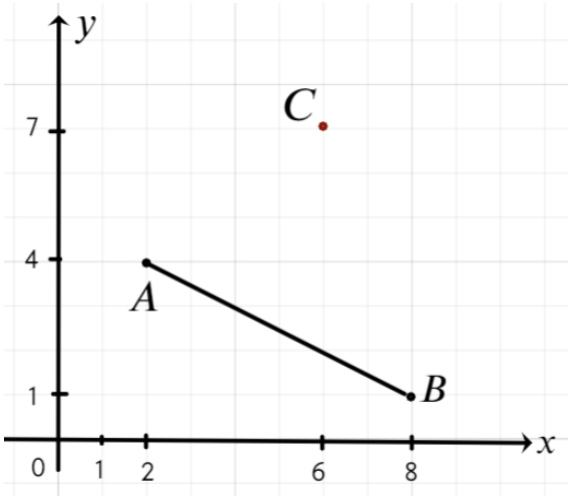


Рис. 2.3

4. На плані місцевості прямолінійна ділянка залізниці у відповідних одиницях масштабу задається рівнянням $y = x + 3$, а автомобільна дорога, що йде паралельно до неї, рівнянням $y = x + 6$. Знайти відстань між дорогами.

5. На плані місцевості прямолінійна ділянка залізниці у відповідних одиницях масштабу задається рівнянням $y=2x+3$, а автомобільна дорога, що йде паралельно до неї, рівнянням $y=2x-6$. Знайти відстань між дорогами.

6. Витрати перевезення вантажу двома різними засобами транспорту (A та B) виражаються відповідно залежностями: $y=5x+5$ та $y=2x+20$, де x – відстань перевезення в сотнях км, y – відповідні транспортні витрати. Побудуйте графіки цих залежностей і виділіть діапазони відстаней, на яких один із цих засобів транспорту є більш економним.

7. Витрати перевезення вантажу двома різними засобами транспорту (A і B) виражаються відповідно залежностями: $y=3x+5$ та $y=2x+20$, де x – відстань перевезення в сотнях км, y – відповідні транспортні витрати. Побудуйте графіки цих залежностей і виділіть діапазони відстаней, на яких один із цих засобів транспорту є більш економічним.

8. На плані певної території пункти N,P,Q мають відповідно координати (в кілометрах). Пункти N та Q з'єднані шосейною дорогою. Знайти на шосе точку найкоротшого входження (рис. 2.4) дороги з пункту P та довжину цієї дороги.

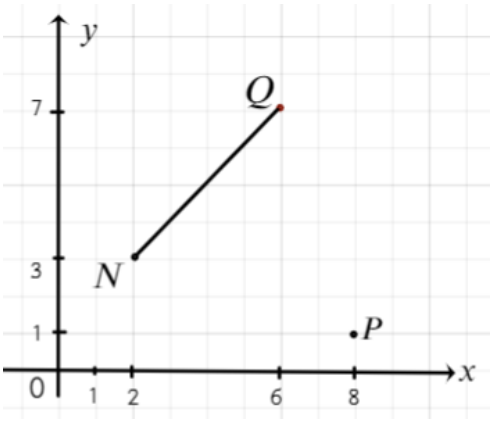


Рис. 2.4

9. На плані певної території пункти N,P,Q мають відповідно координати (в кілометрах). Пункти P та Q з'єднані шосейною дорогою.

Знайти на шосе точку найкоротшого входження дороги з пункту N та довжину цієї дороги (рис. 2.5).

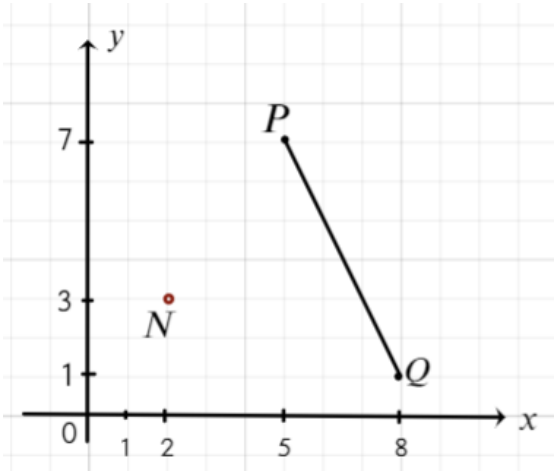


Рис. 2.5

10. Два підприємства A і B, відстань між якими 100 км, виробляють однакові вироби, витрачаючи на виготовлення кожного виробу p гривень. Транспортні витрати на перевезення одного виробу від підприємства A до споживача дорівнюють k грн/км, а від підприємства B – $3k$ грн/км. Знайдіть геометричне місце точок розташування пунктів споживання, в яких ціна виробів першого і другого підприємств буде однаковою, якщо ціна складається з витрат на виробництво та транспортних витрат.

11. Два підприємства A і B, відстань між якими 200 км, виробляють однакові вироби, витрачаючи на виготовлення кожного виробу p гривень. Транспортні витрати на перевезення одного виробу від підприємства A до споживача дорівнюють $2k$ грн/км, а від підприємства B – $3k$ грн/км. Знайдіть геометричне місце точок розташування пунктів споживання, в яких ціна виробів першого і другого підприємств буде однаковою, якщо ціна складається з витрат на виробництво та транспортних витрат.

12. Залежність урожаю моркви y (ц/га) від фотосинтетичного потенціалу x (%) виражається прямою, що проходить через початок координат і точку A (6; 420). Записати рівняння функціональної залежності та визначити врожайність моркви, якщо фотосинтетичний потенціал 360.

13. Залежність урожаю моркви y (ц/га) від фотосинтетичного потенціалу x (%) виражається прямою, що проходить через початок координат і точку A (5; 400). Записати рівняння функціональної залежності та визначити врожайність моркви, якщо фотосинтетичний потенціал 300.

14. Витрати на виробництво 100 одиниць деякого товару становлять 300 грн, а на 500 одиниць товару вони становлять 600 грн. Визначте функцію витрат виробництва та вартість 300 одиниць товару за умови, що функція лінійна.

15. Витрати на виробництво 1000 одиниць деякого товару становлять 20000 грн, а на 5000 одиниць товару вони становлять 60000 грн. Визначте функцію витрат виробництва та вартість 4000 одиниць товару за умови, що функція лінійна.

16. Витрати на виробництво 10 одиниць деякого товару становлять 300 грн, а на 60 одиниць товару вони становлять 500 грн. Визначте функцію витрат виробництва та вартість 100 одиниць товару за умови, що функція лінійна.

17. Витрати на виробництво 5 одиниць деякого товару становлять 1000 грн, а на 15 одиниць товару вони становлять 6000 грн. Визначте функцію витрат виробництва та вартість 100 одиниць товару за умови, що функція лінійна.

18. Витрати перевезення вантажу двома різними засобами транспорту (A – автомобіль і B – потяг) виражаються відповідно залежностями: $y = 5x + 50$ та $y = 12x + 36$, де x – відстань перевезення у сотнях кілометрів, y – відповідні транспортні витрати. Побудуйте графіки цих залежностей і виділіть діапазони відстаней, на яких більш економічним є один із цих засобів транспорту. Знайдіть відстань, починаючи з якої більш економічним буде перший засіб. Визначте найбільш економічний варіант перевезень.

19. Витрати перевезення вантажу двома різними засобами транспорту (A – автомобіль і B – потяг) виражаються відповідно залежностями:

$y = 50x + 150$ та $y = 25x + 250$, де x – відстань перевезення у сотнях кілометрів, y – відповідні транспортні витрати. Побудуйте графіки цих залежностей і виділіть діапазони відстаней, на яких більш економічним є один із цих засобів транспорту. Знайдіть відстань, починаючи з якої більш економічним буде другий засіб. Визначте найбільш економічний варіант перевезень на відстань 300 км.

20. Промінь світла від ліхтарика, що спрямований по прямій $y = 2x - 8$, відбивається від дзеркала, що розташовано на осі абсцис. Визначте точку зустрічі променя з віссю та рівняння відбитого променя.

21. Промінь світла від ліхтарика, що спрямований по прямій $y = 4x - 20$, відбивається від дзеркала, що розташовано на осі абсцис. Визначте точку зустрічі променя з віссю та рівняння відбитого променя.

22. На заводі непрямі витрати коштів (не залежать від кількості продукції, що випускається), становлять d тис. грн на рік. Витрати, що напряму залежать від кількості виробленої продукції, становлять s грн на кожну одиницю продукції. Ціна одиниці продукції v грн. Скільки одиниць продукції повинен випустити завод за рік, щоб отримати не менше p грн річного прибутку?

23. На заводі непрямі витрати коштів (не залежать від кількості продукції, що випускається), становлять $d = 100$ тис. грн. на рік. Витрати, що напряму залежать від кількості виробленої продукції, становлять $s = 2000$ грн. на кожну одиницю продукції. Ціна одиниці продукції $v = 7000$ грн. Скільки одиниць продукції повинен випустити завод за рік, щоб отримати не менше $p = 500$ тис. грн річного прибутку?

24. На заводі непрямі витрати коштів (не залежать від кількості продукції, що випускається), становлять $d = 400$ тис. грн на рік. Витрати, що напряму залежать від кількості виробленої продукції, становлять $s = 200$ грн на кожну одиницю продукції. Ціна одиниці продукції $v = 600$ грн. Скільки

одиниць продукції повинен випустити завод за рік, щоб отримати не менше $p = 10$ млн. грн річного прибутку?

25. Витрати на перевезення вантажу двома видами транспорту виражаються формулами $y = 5x + 150$, $y = 4x + 250$, де x – відстань перевезень у кілометрах, y – транспортні витрати в гривнях. Визначте, який вид транспорту вигідніший для перевезень залежно від відстані перевезень. Який вид транспорту вигідніший для перевезення вантажів на відстані 50, 100 та 150 км?

26. Доставка піци кур'єром можлива двома способами: самокатом або велосипедом. Витрати на доставку піци кур'єром на самокаті та на велосипеді виражаються формулами $y = 4x + 10$, $y = x + 25$, де x – відстань перевезень в кілометрах, y – транспортні витрати в гривнях. Визначте, який вид транспорту вигідніший для перевезень залежно від відстані перевезень. Який вид транспорту вигідніший для перевезення вантажів на відстані 3, 4, 5 та 6 км?

27. Визначте функціональну залежність калорійності молока від жирності. Ця залежність є прямолінійною. Відомо, що 100 мл 1.5% молока має енергетичну цінність 47 ккал, 100 мл молока жирністю 3.2% має енергетичну цінність 61 ккал. За цією формулою визначте калорійність 100 мл молока жирністю 2% та 6%. та побудуйте графік отриманої залежності.

28. Визначте функціональну залежність калорійності молока від жирності. Ця залежність є прямолінійною. Відомо, що 100 мл 0.5% молока має енергетичну цінність 39 ккал, 100 мл молока жирністю 3.5% має енергетичну цінність 64 ккал. За цією формулою визначте калорійність 100 мл молока жирністю 2% та 6%.

29. Місто C, розташоване по прямій між населеними пунктами A та B, забезпечується деяким товаром як з пункту A, так і з пункту B. Доставка 1 тонни цього товару із міста A обходиться в 50 тис. грн. З міста B доставка 1тонни товару – 70 тис. грн. Транспортування 1 тонни вантажу на відстань 1

км коштує 10 грн. Відстань між пунктами A і B дорівнює 100 км. Записати та побудувати графіки функції витрат на доставку 1 тонни товару в місто C з пунктів A та B.

30. Завод C отримує товар з двох баз A та B, що знаходяться по прямій на відстані 100 км, причому завод C знаходиться між базами. Доставка 1 тонни цього товару з бази A обходиться в 5 тис. грн, а з бази B доставка 1тонни товару – 8 тис. грн. Транспортування 1 т вантажу на відстань 1 км коштує 10 грн. Записати та побудувати графіки функції витрат на доставку 1 тонни товару в місто C з баз A та B.

31. За різними технологіями виготовлення, собівартість партії цукерок представлено у вигляді формул: $y = 2 + 0{,}2x$ і $y = 10 + 0{,}04x$, де x – кількість цукерок у партії, y – собівартість цієї партії цукерок в гривнях. Визначте, яка технологія вигідніша і починаючи з якої кількості цукерок.

32. Витрати y (в грн) на виготовлення партії ялинкових прикрас визначають за формулою $y = ax + b$, де x – обсяг партії. Для першого технологічного процесу відомий закон $y = 14{,}5x + 200$ виготовлення прикрас. Для другого відомо, що виготовлення 100 одиниць прикрас обійшлися у 1575 грн, а на створення 300 одиниць було витрачено 4525 грн. Провести оцінку двох варіантів технологічного процесу і знайти собівартість продукції для кожного при $x = 200, \quad x = 1000.$

33. Під час поїздки на таксі ми платимо 50 грн. за подання машини та 10 грн за кожен кілометр шляху. Запишіть формулу функціональної залежності y від x, якщо y – плата за таксі в гривнях; x – відстань у кілометрах. Чи є дана функція лінійною? Вкажіть область визначення цієї функції. Скільки кілометрів проїхав пасажир, якщо він заплатив за поїздку 320 гривень?

34. Під час поїздки на таксі ми платимо фіксовану величину грн за подання машини та певну кількість грн за кожен кілометр шляху. Запишіть формулу функціональної залежності y від x, якщо y – плата за таксі в

гривнях; x – відстань у кілометрах. Відомо, що за 8 км пасажир заплатив 114 грн, а за 12 км пасажир заплатив 146 грн. Чи є ця функція лінійною? Скільки кілометрів проїхав пасажир, якщо він заплатив за поїздку 210 гривень? Обчислити вартість подорожі на 5 км.

35. Витрати власного виробництва на 100 одиниць продукції становлять 3000 грн, а на 180 одиниць – 5000 грн. Записати та побудувати описану функцію витрат. Визначте графічним способом витрати на виробництво 60, 150, 200 одиниць продукції, вважаючи, що функція витрат є лінійною.

36. Витрати власного виробництва на 20 одиниць продукції становлять 1000 грн, а на 180 одиниць – 7000 грн. Записати та побудувати описану функцію витрат. Визначте графічним способом витрати на виробництво 60, 100, 240 одиниць продукції, вважаючи, що функція витрат є лінійною.

3. Криві другого порядку

1. Василь запускає спортивний бумеранг. Відомо, що цей бумеранг описав коло, діаметр якого 30 метрів. Потрібно визначити шлях, який описав при цьому центр мас бумерангу (рис. 3.1).

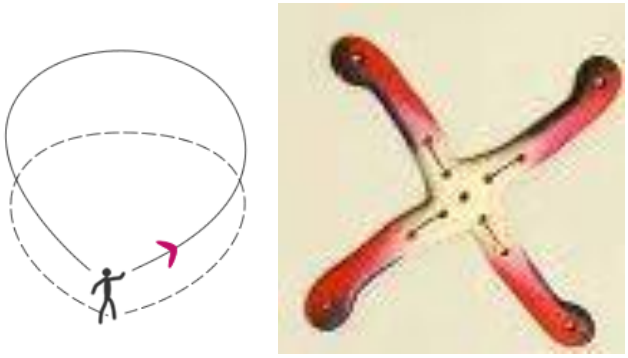


Рис. 3.1

2. Василь запускає спортивно-ігровий бумеранг. Відомо, що цей бумеранг описав коло, діаметр якого 10 метрів (рис. 3.2). Потрібно визначити шлях, який описав центр мас бумерангу.

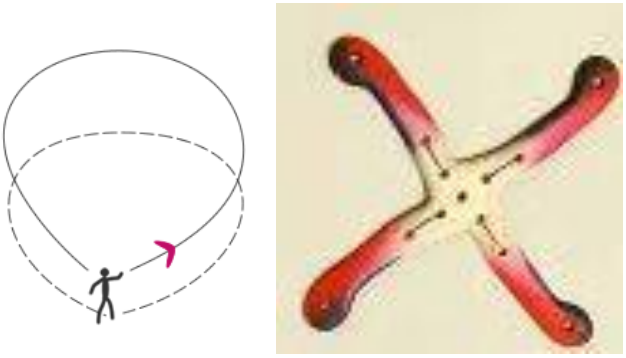


Рис. 3.2

3. Атракціон у тематичному парку має «карету» з місцями для учасників, прикріплену до штанги довжиною 15 метрів. Штанга коливається уздовж дуги кола, центр якого розташовано у місці кріплення штанги до опори (точка *C*), від положення *A* до *B* як показано на рисунку. Довжина великої дуги *AB* дорівнює 62,83 метра. В спокої платформа знаходиться на висоті 1 метр від поверхні (рис. 3.3). Обчисліть величину більшого кута *ACB*, максимальну точку підйому, точку розташування кріплення штанги до опори.



Рис. 3.3

4. На рис. 3.4 схематично представлена траєкторія стрибка спортсмена. Відомо, що довжина стрибка 5 метрів, а максимальна висота цього стрибка – 60 сантиметрів. Записати рівняння траєкторії стрибка спортсмена у вигляді $y = a\left(x - x_0\right)^2 + y_0$, знайти вісь симетрії параболи та її фокус.

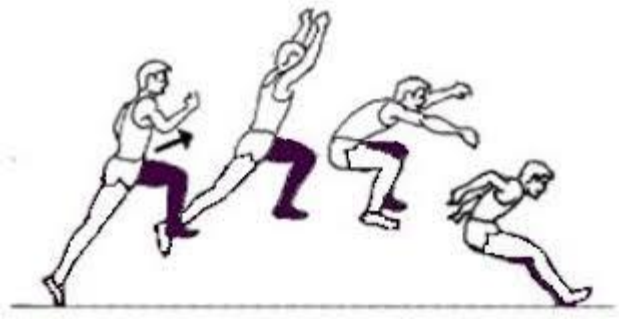


Рис. 3.4

5. На рис. 3.5 схематично представлена траєкторія стрибка жабки. Відомо, що довжина стрибка 2 м, а максимальна висота цього стрибка – 1 м. Записати рівняння траєкторії стрибка жабки у вигляді рівняння $y = a\left(x - x_0\right)^2 + y_0$, знайти вісь симетрії параболи та її фокус.



Рис. 3.5

6. На рис. 3.6 схематично представлено графік польоту м’яча при грі в американський футбол. Відомо, що м’яч пролетів над самою поперечиною (3 метри) на відстані 30 метрів від гравця, що виконував філд-гол. Висота максимального підйому м’яча при цьому ударі була 4 метри та знаходилася на відстані 20 метрів від точки удару (точка $(20;4)$ є вершиною). Записати рівняння траєкторії польоту м’яча у вигляді $y = a\left(x - x_0\right)^2 + y_0$, знайти вісь симетрії параболи та її фокус.

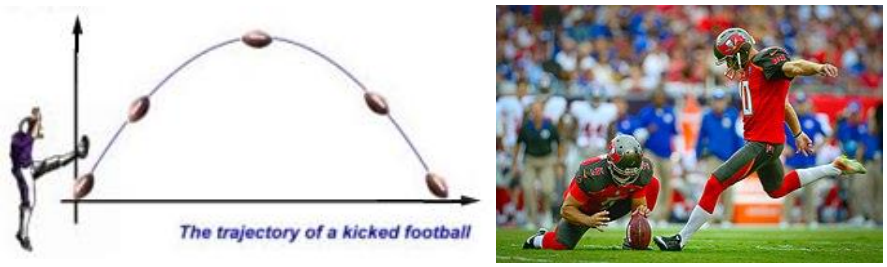


Рис. 3.6

7. На рис. 3.7 схематично представлено графік польоту баскетбольного м’яча при штрафному (триметровому) киданні. Відомі точки максимального підйому м’яча $(2;4)$ та центр кошика $(3;3)$. Знайти рівняння траєкторії польоту м’яча у вигляді рівняння $y=a\left(x-x_0\right)^2+y_0$, знайти вісь симетрії параболи та її фокус.



Рис. 3.7

8. На рис. 3.8 схематично представлено графік функції $y=\left(x+a\right)^2+b$. Знайти значення параметрів a,b, якщо відома вісь симетрії параболи та точка на параболі $(-3;8)$. Знайти множину значень функції, координати вершини параболи та фокус.

9. На рис. 3.9 схематично представлено графік функції $y=\left(x+a\right)^2+b$.. Знайти значення параметрів a,b, якщо відомі координати вершини параболи $(2;-4)$. Знайти множину значень функції, вісь симетрії параболи та координати фокуса.

10. На рис. 3.10 схематично представлено графік функції $y=\left(x+a\right)^2+b$. Знайти значення параметрів a,b, якщо відомі координати вершини параболи $(4;20)$. Знайти множину значень функції, вісь симетрії параболи та її фокус.

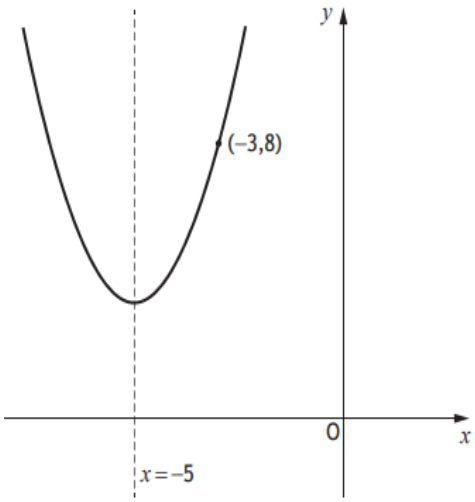


Рис. 3.8

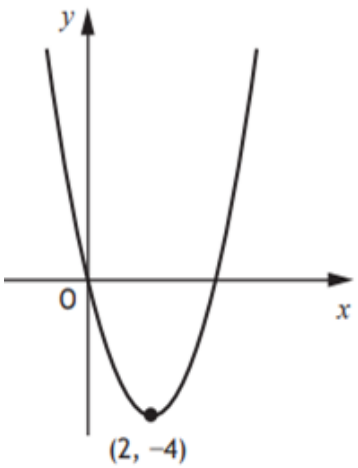


Рис. 3.9

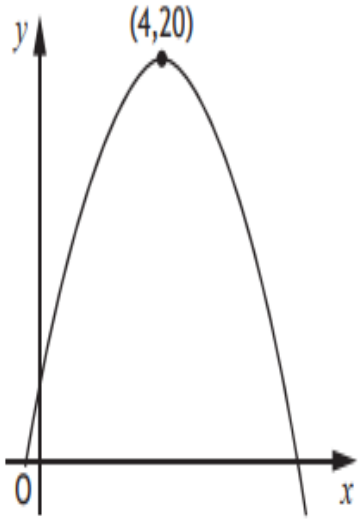


Рис. 3.10

11. На скелі висота якої 20 метрів стоїть хлопчик (рис. 3.11). Він щосили б'є по футбольному м'ячу, який потім летить зі скелі. Траєкторія польоту м'яча відносно горизонтальної площадки на вершині скелі описується формулою $h = 20t - 4t^2$. Обчислити висоту м'яча над площадкою скелі через 2 секунди. Через який час м'яч вперше впаде на землю?

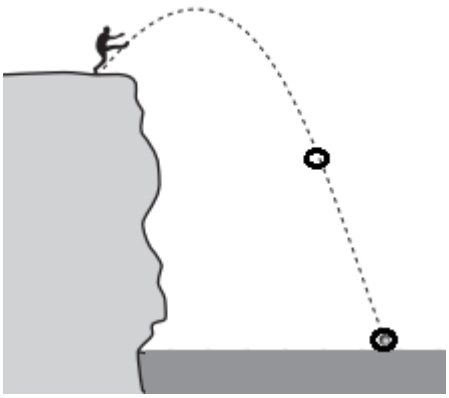


Рис. 3.11

12. На скелі висота якої 10 метрів стоїть хлопчик (рис. 3.11). Він щосили б'є по футбольному м'ячу, який потім летить зі скелі. Траєкторія польоту м'яча відносно горизонтальної площадки на вершині скелі описується формулою $h = 20t - 4t^2$. Обчислити висоту м'яча над площадкою скелі через 3 секунди. Через який час м'яч вперше впаде на землю?

13. На схемі, рис. 3.12, показано шлях маленької ракети, яка випущена в повітря з гармати. Висота ракети через t секунд визначається як

$h = 100t - 16t^2$. Через скільки секунд ракета вперше опиниться на висоті 136 метрів? Як визначите дальність польоту ракети? Чи досягне ракета висоти 157 метрів? Обґрунтуйте свою відповідь.

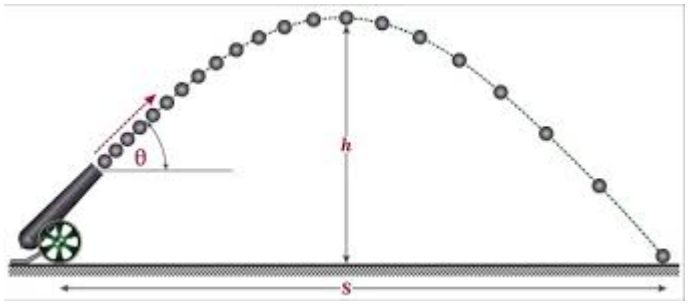


Рис. 3.12

14. Висота польоту корка з ігристого вина (в сантиметрах) через t секунд описується рівнянням $h = 160t - 80t^2$ відносно шийки пляшки (рис. 3.13), що знаходиться на висоті 120 см над рівнем підлоги. Через скільки секунд корок опиниться на висоті 200 см від підлоги? На яку максимальну відстань може відлетіти корок? Чи досягне корок стелі, якщо її висота 2.25 метрів? Обґрунтуйте свою відповідь.



Рис. 3.13

15. На схемі нижче (рис. 3.14) показано шлях маленької ракети, яка випущена в повітря з гармати. Висота ракети через t секунд визначається як $h = 100t - 16t^2$. Через скільки секунд ракета вдруге опиниться на висоті 136 метрів? Як визначите дальність польоту ракети? Чи досягне ракета висоти 155 метрів? Обґрунтуйте свою відповідь.

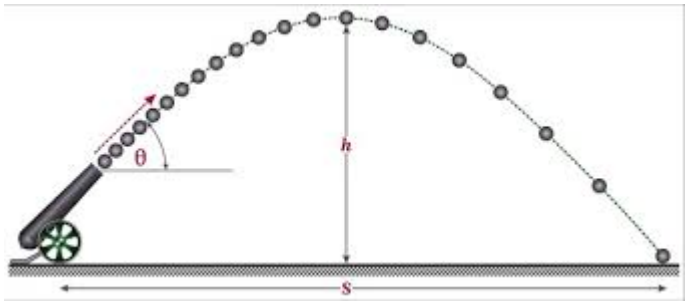


Рис. 3.14

16. Висота польоту корка з ігристого вина (в сантиметрах) через t секунд описується рівнянням $h = 160t - 80t^2$ відносно шийки пляшки (рис. 3.13), що знаходиться на висоті 120 см над рівнем підлоги. Через скільки секунд корок опиниться на висоті 180 см від підлоги? На яку максимальну відстань може відлетіти корок? Чи досягне корок стелі, якщо її висота 2 метри? Обґрунтуйте свою відповідь.

17. Є маленька катапульта висотою 20 см (центр чаші у піднятому стані), яка стріляє ядрами (рис. 3.15). Висота h (у сантиметрах) положення ядра через t секунд визначається як $h = 20t - t^2$. Через скільки секунд ядро вперше опиниться на висоті 50 сантиметрів? Як визначите дальність польоту ядра? Чи можна такою катапультою збити ціль, що знаходиться на висоти 120 сантиметрів? Обґрунтуйте свою відповідь.



Рис. 3.15

18. Гармата знаходиться на скелі висотою 20 метрів. Висота знаходження ядра визначається формулою $h = 20t - 5t^2$. Через скільки секунд ядро вперше опиниться на висоті 15 метрів відносно скелі? Як визначите

дальність польоту ядра? Чи досягне ядро висоти 25 метрів відносно скелі? Розмірами гармати нехтуємо. Обґрунтуйте свою відповідь.

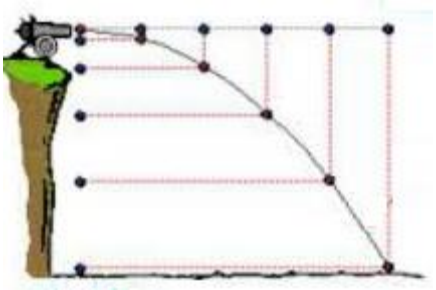


Рис. 3.16

19. Гармата знаходиться на горизонтальній площадці (рис. 3.16). Висота знаходження ядра через t секунд визначається за формулою $h = 180t - 100t^2$. Через скільки секунд ядро вперше опиниться на висоті 65 метрів відносно рівня висоти дула гармати? Як визначите дальність польоту ядра? Чи досягне ядро висоти 80 метрів відносно рівня гармати? Обґрунтуйте свою відповідь.

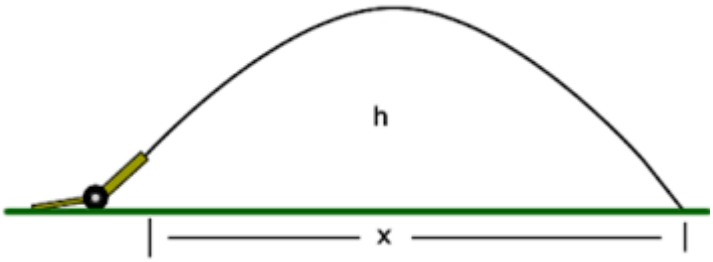


Рис. 3.17

20. Гармата знаходиться на горизонтальній площадці (рис. 3.17). Висота знаходження ядра через t секунд визначається за формулою $h = 200t - 100t^2$. Через скільки секунд ядро вдруге опиниться на висоті 96 метрів відносно рівня висоти дула пушки? Як визначити, чи буде ціль у безпеці, якщо між нею та пушкою розташована перешкода висотою 100 метрів? Чи досягне ядро висоти 102 метри відносно рівня гармати? Обґрунтуйте свою відповідь.

21. На рис. 3.18 схематично представлено графік функції $y = ax^2$. Знайти значення параметра a, якщо відомо, що парабола проходить через

точку $(4;48)$. Знайти множину значень цієї функції, координати вершини параболи, її вісь симетрії та фокус.

22. На рис. 3.19 схематично представлено графік функції $y = ax^2$. Знайти значення параметра a, якщо відомо, що парабола проходить через точку $(-3;45)$. Знайти множину значень цієї функції, координати вершини параболи, її вісь симетрії та фокус.

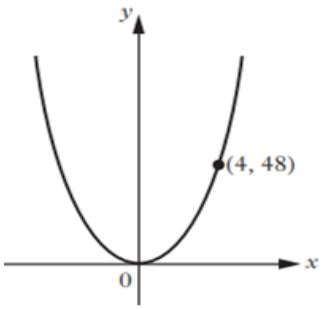


Рис. 3.18

23. На рис. 3.20 схематично представлено графік функції $y = 16t - t^2$. Знайти множину значень цієї функції, координати вершини параболи, її вісь симетрії та фокус. Знайти всі значення, за яких точка піднімається на висоту 60.

24. На рис. 3.21 схематично представлено графік функції $y = 20 - (x-4)^2$. Знайти множину значень функції, координати вершини параболи, її вісь симетрії та фокус.

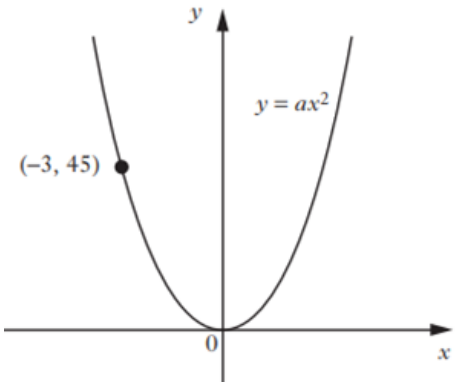


Рис. 3.19

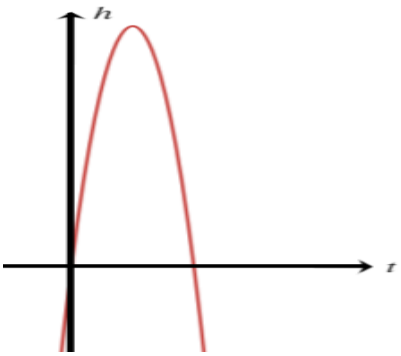


Рис. 3.20

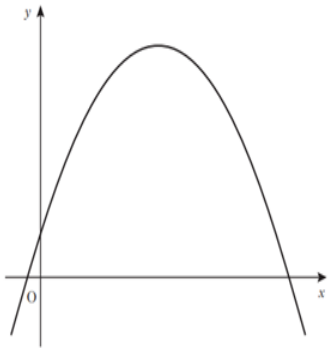


Рис. 3.21

25. На рис. 3.21 схематично представлено графік параболічної функції $y=12-(x-3)^2$. Знайти множину значень функції, координати вершини параболи, її вісь симетрії та фокус.

26. На рис. 3.22 схематично представлено графік функції $y=kx^2$. Знайти значення параметра k, якщо відомо, що парабола проходить через точку $(2;-12)$. Знайти множину значень цієї функції, координати вершини параболи, її вісь симетрії та фокус.

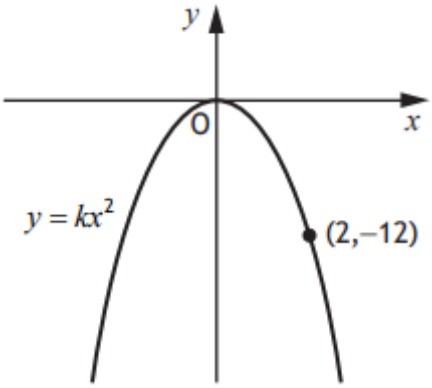


Рис. 3.22

27. На рис. 3.21 схематично представлено графік функції $y=80-(x-8)^2$. Знайти множину значень функції, координати вершини параболи, її вісь симетрії та фокус.

28. На рис. 3.21 схематично представлено графік функції $y=10-(x-5)^2$. Знайти множину значень функції, координати вершини параболи, її вісь симетрії та фокус.

29. На рис. 3.21 схематично представлено графік функції $y=30-(x-5)^2$. Знайти множину значень функції, координати вершини параболи, її вісь симетрії та фокус.

30. Атракціон у парку має «гойдалку» з місцем для учасника, що прикріплена до штанги довжиною 10 метрів. Штанга коливається уздовж дуги кола, центр якого розташовано у місці кріплення штанги до опори (точка C), від положення A до B як показано на рис. 3.23. Довжина великої

дуги AB дорівнює 41,89 метра. Обчисліть величину більшого кута ACB, максимальну точку підйому, точку розташування кріплення штанги до опори, якщо в спокої платформа знаходиться на висоті 0.5 метрів від поверхні.



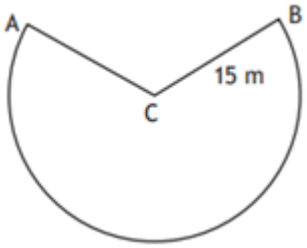


Рис. 3.23

Розв'язування типового варіанта з теоретичними обґрунтуваннями (29 варіант)

1. Елементи лінійної алгебри

1.1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

Розв'язування.

Виконуємо завдання за діями.

1. ***Добутком*** матриці A на число α називається матриця $C = \alpha A$ такого ж розміру, елементи якої

$$c_{ij} = \alpha a_{ij},$$

де a_{ij} – елементи матриці A, тобто при множенні матриці на число треба всі елементи матриці помножити на це число.

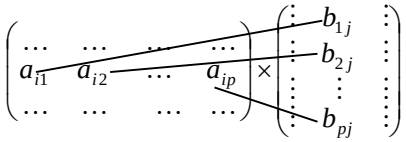
Знайдемо $3A$. Для того, щоб помножити матрицю на число треба кожний елемент цієї матриці помножити на вказане число:

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -6 & 3 \\ 9 & 12 & 3 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. ***Добутком матриці*** $A = (a_{ij})$ розміру $m \times p$ на матрицю $B = (b_{ij})$ розміру $p \times n$ називається така матриця $C = AB$ розміру $m \times n$, $C = (c_{ij})$, кожний елемент можна знайти за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Кожний елемент матриці C утворюється як сума добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, тобто за схемою:



Обчислюємо добуток матриць $B \cdot A$.

Для того, щоб знайти добуток двох вказаних матриць розміру 3×3 треба знайти суму добутків елементів кожного рядка на відповідні елементи певного стовпця, тобто для знаходження елемента, що розташовано на позиції ij треба знайти:

$a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j}, \quad i, j = 1,2,3$ (принцип: рядок на стовпчик).

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot(-3) - 5\cdot 3 + 2\cdot(-1) & 0\cdot(-2) - 5\cdot 4 + 2\cdot 0 & 0\cdot 1 - 5\cdot 1 + 2\cdot(-2) \\ 0\cdot(-3) + 0\cdot 3 + 3\cdot(-1) & 0\cdot(-2) + 0\cdot 4 + 3\cdot 0 & 0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 3\cdot(-2) \\ 1\cdot(-3) - 4\cdot 3 + 7\cdot(-1) & 1\cdot(-2) - 4\cdot 4 + 7\cdot 0 & 1\cdot 1 - 4\cdot 1 + 7\cdot(-2) \end{pmatrix}.$$

Отже, $B \cdot A = \begin{pmatrix} -17 & -20 & -9 \\ -3 & 0 & -6 \\ -22 & -18 & -17 \end{pmatrix}$.

3. Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до квадратної матриці A, якщо добуток цих матриць дорівнює одиничній матриці, тобто

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Обернена матриця існує для будь-якої квадратної матриці A, яка є ***невиродженою***, тобто, коли $\det A \neq 0$.

Алгоритм знаходження оберненої матриці

1. Обчислити визначник матриці A. Якщо $\det A \neq 0$, то матриця A має обернену, в іншому випадку оберненої матриці не існує.

2. Обчислити алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів a_{ij} матриці A.

Записати обернену матрицю для матриці третього порядку за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \qquad (2.1)$$

де A_{ij} *– алгебраїчні доповнення до відповідних елементів матриці* A.

Отже, для знаходження оберненої матриці треба спочатку переконатися, що вона буде існувати. Для цього треба обчислити її визначник.

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\cdot(-8-0) + 2\cdot\big(-6-(-1)\big) + 1\cdot\big(0-(-4)\big) = 24-10+4 = 18 \neq 0.$$

Отримали визначник відмінний від нуля, тому обернена матриця існує.

Обчислюємо алгебраїчне доповнення до кожного елемента матриці за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$, де M_{ij} – це мінор (визначник меншого порядку), отриманий шляхом викреслення i рядка та j стовпця. До елементів першого рядка маємо:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -8-0 = -8,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-6+1) = 5,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0-(-4) = 4.$$

Алгебраїчні доповнення до елементів другого рядка:

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -(4-0) = -4,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6-(-1) = 7,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2.$$

Алгебраїчні доповнення до елементів третього рядка:

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2-4 = -6,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-3-3) = 6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -12-(-6) = -6.$$

Складаємо матрицю алгебраїчних доповнень $\begin{pmatrix} -8 & 5 & 4 \\ -4 & 7 & 2 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}$, яку транспонуємо

$$\begin{pmatrix} -8 & -4 & -6 \\ 5 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Тепер можемо записати обернену матрицю A^{-1} до матриці A:

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -8 & -4 & -6 \\ 5 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку коректності обчислення оберненої матриці. Для цього, за означенням оберненої матриці, знайдемо добуток $A^{-1} \cdot A$.

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -8 & -4 & -6 \\ 5 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 24-12+6 & 16-16+0 & -8-4+12 \\ -15+21-6 & -10+28+0 & 5+7-12 \\ -12+6+6 & -8+8+0 & 4+2+12 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. *Сумою (різницею)* матриць A *і* B називається матриця C, елементи якої

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \left(c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}\right),$$

де a_{ij} та b_{ij} – відповідно елементи матриць A і B. При цьому записують

$$C = A + B \quad \left(C = A - B\right).$$

Додавати або віднімати можна тільки матриці однакових розмірів.

Виконуємо останню дію, підставляємо знайдені матриці у вираз $3A - B \cdot A + A^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} -9 & -6 & 3 \\ 9 & 12 & 3 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -17 & -20 & -9 \\ -3 & 0 & -6 \\ -22 & -18 & -17 \end{pmatrix} + \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -8 & -4 & -6 \\ 5 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -9+17-\frac{8}{18} & -6+20-\frac{4}{18} & 3+9-\frac{6}{18} \\ 9+3+\frac{5}{18} & 12+0+\frac{7}{18} & 3+6+\frac{6}{18} \\ -3+22+\frac{4}{18} & 0+18+\frac{2}{18} & -6+17-\frac{6}{18} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{136}{18} & \frac{248}{18} & \frac{210}{18} \\ \frac{221}{18} & \frac{223}{18} & \frac{168}{18} \\ \frac{346}{18} & \frac{326}{18} & \frac{192}{18} \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 136 & 248 & 210 \\ 221 & 223 & 168 \\ 346 & 326 & 192 \end{pmatrix}$$

Зауваження. Для зручності ми винесли $\frac{1}{18}$ за матрицю, тобто скористалися правилом «множення матриці на число».

Відповідь: $3A - BA + A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 136 & 248 & 210 \\ 221 & 223 & 168 \\ 346 & 326 & 192 \end{pmatrix}$.

1.2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

Розв’язування.

1. Правила Крамера. Для системи лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома змінними вигляду $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ формули Крамера записують у вигляді:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ − головний визначник системи, а визначники

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

є допоміжними визначниками, які отримують з визначника Δ заміною першого, другого і третього стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Отже, треба з’ясувати, чи можна застосовувати цей метод до даної системи. Для цього обчислимо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta = 2 \cdot 9 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 3 = 29.$$

Далі обчислимо три допоміжні визначники, що отримані з основного шляхом заміни відповідного стовпчика стовпцем вільних коефіцієнтів:

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}4&-1&1\\-5&0&-3\\1&3&-1\end{vmatrix}=4\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&-3\\3&-1\end{vmatrix}-1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-5&-3\\1&-1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-5&0\\1&3\end{vmatrix};$$

$$\Delta_{x_1}=4\cdot 9+1\cdot 8+1\cdot(-15)=29\Rightarrow x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=\frac{29}{29}=1.$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}2&4&1\\1&-5&-3\\3&1&-1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-5&-3\\1&-1\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&-3\\3&-1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&-5\\3&1\end{vmatrix};$$

$$\Delta_{x_2}=2\cdot 8-4\cdot 8+1\cdot 16=0\Rightarrow x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=\frac{0}{29}=0.$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}2&-1&4\\1&0&-5\\3&3&1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&-5\\3&1\end{vmatrix}-1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&-5\\3&1\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&0\\3&3\end{vmatrix};$$

$$\Delta_{x_3}=2\cdot 15+1\cdot 16+4\cdot 3=58\Rightarrow x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=\frac{58}{29}=2.$$

Отримали такий розв'язок: $(x_1;x_2;x_3)=(1;0;2)$.

2. Розв'яжемо тепер цю систему лінійних рівнянь матричним методом.

Матричний метод для системи третього порядку

Нехай дано систему: $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}$

Розглянемо три матриці:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

Перша матриця називається *матрицею коефіцієнтів системи*, друга *матрицею-стовпцем змінних*, третя – *матрицею-стовпцем вільних членів*. Тоді систему можна записати у матричному вигляді: $A\cdot X=B$. Якщо матриця системи рівнянь невироджена $(\Delta\neq 0)$, то розв'язок системи знаходимо у вигляді $X=A^{-1}\cdot B$ або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо тепер цю систему лінійних рівнянь матричним методом, перепишемо її в матричному вигляді. У перший стовпчик виписуємо коефіцієнти при змінній x_1, у другий стовпчик – при змінній x_2, аналогічно, в третій стовпчик – при змінній x_3:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

З попереднього пункту знаємо визначник матриці коефіцієнтів. Він відмінний від нуля, тому можна застосувати матричний метод.

Перепишемо $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ у матричному рівнянні таким чином:

$$A \cdot X = B.$$

Розв'язок системи знаходимо тоді, як розв'язок матричного рівняння, у вигляді: $X = A^{-1} \cdot B$.

Знайдемо обернену матрицю. Обчислюємо алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці. До елементів першого рядка маємо:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 9; A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+9) = -8; A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Алгебраїчні доповнення до елементів другого рядка:

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(1-3) = 2; A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5; A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -(6-(-3)) = -9.$$

Алгебраїчні доповнення до елементів третього рядка:

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3; A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-6-1) = 7; A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Тепер можемо записати обернену матрицю, не забуваємо транспонувати матрицю алгебраїчних доповнень:

$$A^{-1}=\frac{1}{29}\begin{pmatrix}9 & 2 & 3\\ -8 & -5 & 7\\ 3 & -9 & 1\end{pmatrix}.$$

Зауваження. Зробимо перевірку коректності обчислення оберненої матриці. Для цього знайдемо добуток $A^{-1}\cdot A=\frac{1}{29}\begin{pmatrix}9 & 2 & 3\\ -8 & -5 & 7\\ 3 & -9 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -3\\ 3 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{29}\begin{pmatrix}18+2+9 & -9+0+9 & 9-6-3\\ -16-5+21 & 8+0+21 & -8+15-7\\ 6-9+3 & -3+0+3 & 3+27-1\end{pmatrix}=\frac{1}{29}\begin{pmatrix}29 & 0 & 0\\ 0 & 29 & 0\\ 0 & 0 & 29\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Отже, обернену матрицю знайдено правильно.

Підставимо її в рівняння $X=A^{-1}\cdot B$:

$$X=\frac{1}{29}\begin{pmatrix}9 & 2 & 3\\ -8 & -5 & 7\\ 3 & -9 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ -5\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{29}\begin{pmatrix}36-10+3\\ -32+25+7\\ 12+45+1\end{pmatrix}=\frac{1}{29}\begin{pmatrix}29\\ 0\\ 58\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$$

Відповідь: $(x_1;x_2;x_3)=(1;0;2)$.

1.3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності описати всі її розв'язки: $\begin{cases}2x_1+x_2-4x_3=0,\\ 3x_1+5x_2-7x_3=0,\\ 4x_1-5x_2-6x_3=0.\end{cases}$

Розв'язування.

Теорема Кронекера-Капеллі. *Система лінійних алгебраїчних рівнянь*

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}$$

сумісна тоді і тільки тоді, коли $r(A)=r(B)$, *де* $r(A),r(B)-$ *ранги матриці* A *та розширеної матриці* B.

Наслідок 1. Якщо $r(A)=r(B)=n$, тобто кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок (визначена), якщо $r(A)=r(B)=k<n$ – система невизначена (має безліч розв'язків), причому $(n-k)$ змінних обирають базовими, через решту змінних (вільні) виражають базові.

Наслідок 2. Якщо $r(A)<r(B)$, тоді система несумісна.

Теорема. *Однорідна система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими має відмінні від нульового розв'язки лише у тому випадку, коли її визначник дорівнює нулю.*

Наслідок 3. Однорідна система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими завжди сумісна:

1) має єдиний розв'язок $x_1=x_2=x_3=0$ (тривіальний розв'язок), якщо її головний визначник не дорівнює нулю;

2) має відмінні від нульового розв'язки лише у тому випадку, коли її визначник дорівнює нулю (в системі буде або два незалежних рівняння: $r(A)=r(B)=2$ або одне $r(A)=r(B)=1$). В обох випадках система невизначена і має безліч розв'язків.

Для того, щоб було зручно розв'язувати систему, спочатку у перший рядок запишемо різницю першого та другого рядків:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Розширена матриця є матрицею системи з нульовим, четвертим, стовпцем. Згідно до видів елементарних перетворень останній стовпець можна викреслити, тому працюємо з основною матрицею системи.

Перший рядок візьмемо за базисний. У другий ряд запишемо результат додавання першого рядка, помноженого на три та другого рядка; у третій рядок запишемо результат додавання першого рядка, що множиться на чотири та третього рядка:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & -21 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці дорівнює двом, а змінних три, тому треба ввести один параметр. Нехай $x_2 = A$. Тоді другий рядок набуває вигляду:

$$-7x_2 + 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_3 = 7x_2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{7}{2}A.$$

Відповідно, перший рядок матриці:

$$-x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -4x_2 + 3x_3 \Rightarrow x_1 = -4A + 3 \cdot \frac{7}{2}A \Rightarrow x_1 = \frac{13}{2}A.$$

Відповідь: $(x_1; x_2; x_3) = \left(\frac{13}{2}A; A; \frac{7}{2}A\right), \quad A \in R.$

Зауваження. Для зручності обчислень можна покласти $x_3 = \frac{7}{2}x_2,\ x_2 = 2t.$ Тоді $x_1 = 13t,\ x_2 = 2t,\ x_3 = 7t.$

Наведемо для повнішої картини застосування методу Гаусса приклади.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ методом Гаусса.

Розв'язування.

Складемо розширену матрицю з коефіцієнтів при невідомих системи та вільних членів, 4-ий стовпець є стовпцем вільних членів. Помножимо перший рядок на (–1) і додамо до другого, помножимо перший рядок на (–2) і додамо до третього. У першому стовпчику утворились нулі, крім першого рядка. Потім помножимо другий рядок на 5 і додамо до третього.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Матриця, без врахування 4-го стовпця, звелась до виду трикутного вигляду, отже, система сумісна і визначена: $r(A) = r(B) = 3$. Запишемо у вигляді системи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_3 = -4. \end{cases}$$

З третього рівняння визначаємо x_3, з другого x_2 і з першого x_1.

$$x_3 = -4 \div (-2); \quad x_3 = 2;$$
$$x_2 = 1 - x_3 = 1 - 2 = -1;$$
$$x_1 = 5 - 2x_2 - 3x_3 = 5 + 2 - 6 = 1.$$

Відповідь: (1; -1; 2).

Приклад 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x - y + 2z = 4, \\ 3x - y - z = 2, \\ 5x - 3y + 3z = 6 \end{cases}$ методом Гаусса.

Розв'язування.

Складаємо розширену матрицю. Помножимо перший рядок на (–3) і додамо до другого, помножимо перший рядок на (–5) та додамо до третього. Потім помножимо другий рядок на (–1) і додамо до третього:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & -10 \\ 0 & 2 & -7 & -14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ми отримали рядок, всі коефіцієнти якого дорівнюють нулю, а вільний член не дорівнює нулю. Такий запис матриці говорить про те, що $r(A) < r(B), r(A) = 2, r(B) = 3.$ Отже, система несумісна.

Відповідь: система не має розв'язків.

Розглянемо також приклади розв'язування системи у випадку більшої кількості рівнянь від кількості невідомих та навпаки.

Приклад 3. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і описати всі її розв'язки:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$

Розв'язування.

а) Система складається із трьох рівнянь та має чотири невідомі змінні. Розв'язуємо методом Гаусса. Записуємо матрицю, в якій останній стовпець буде стовпцем вільних членів. Перший рядок вважатимемо базовим. Його множимо на (-2) і додаємо до другого рядка, також множимо на (-3) і додаємо до третього рядка. Отримано:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ другий і третій рядки пропорційні,

визначається змінна $x_4 = 1.$ Ранг матриці та розширеної матриці співпадають, дорівнюють 2, а кількість невідомих в системі – 4. Тоді дві змінні вибирають вільними.

Отже, із першого рівняння системи маємо:

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2 \ .$$

Покладемо $x_1 = u, \ x_2 = v, u, v \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1 - 3u - 4v.$

Відповідь. $(u, v, 1 - 3u - 4v, 1), u, v \in \mathbb{R}.$

б) Записуємо хід розв'язування (без пояснень дій-елементарних перетворень над рядками матриці).

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \\ 0 & -13 & 9 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -13 & 9 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -35 & -35 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Система сумісна і визначена: $r(A) = r(B) = 3$=кількості невідомих.

Переписуємо у вигляді системи $\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12, \\ 2x_2 - 3x_3 = 1, \ 2x_2 = 3x_3 + 1 \Rightarrow x_2 = 2, \\ x_3 = 1, \end{cases}$

також з першого рівняння $x_1 = 12 + 7x_3 - 8x_2 = 3.$

Відповідь. $(3, 2, 1).$

Приклад 4. Розв’язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$

Розв’язування.

Напишемо цю систему у вигляді розширеної матриці системи і виконаємо дії, зазначені в методі Гаусса, з її рядками, використовуючи символічний запис для короткого пояснення розв’язування.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \overset{\text{(-3), (–2)}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так як в результаті еквівалентних перетворень отримано матрицю з двома нульовими рядками і двома ненульовими, то ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює двом: $r(A) = r(B) = 2.$ Отже, система сумісна, невизначена. Отриманій матриці системи відповідає система рівнянь, рівносильна заданій:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 10. \end{cases}$$

Послідовно розв’язуючи отримані рівняння системи відносно, наприклад, змінних x_1, x_2, отримаємо розв’язок:

$$x_1 = -3 + 2x_2 - x_4; \quad x_3 = -5 + \frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_4.$$

Система рівнянь містить чотири невідомих, а незалежних рівнянь є тільки два. Звідси також робимо висновок, що система має безліч розв’язків. Наприклад, вважаючи невідомі x_2, x_4 вільними і покладаючи їх рівними нулю, знайдемо частинний розв'язок даної неоднорідної системи: $x_0 = (-3; 0; -5; 0).$

Відповідь. $\left(-3 + 2u - v, u, -5 + \frac{5}{2}u - \frac{3}{2}v, v\right), u, v \in \mathbb{R}.$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

2.1. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(1,2,-3)$, $A_2(1,0,1)$, $A_3(-2,-1,6)$, $A_4(0,-5,-4)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

Розв'язування.

Будуємо піраміду в просторі за вказаними точками.

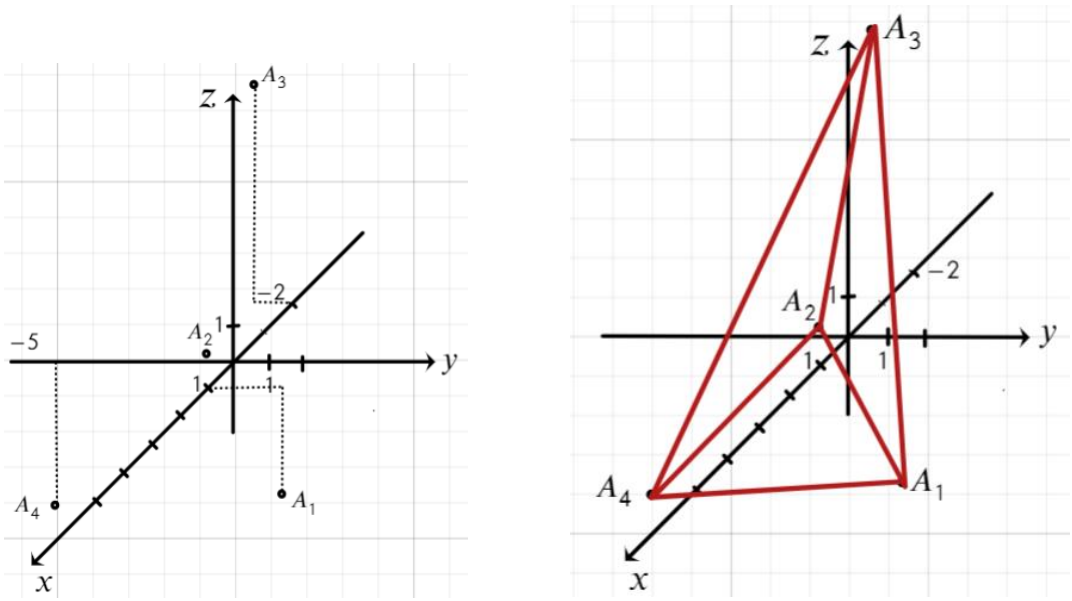


Рис. 2.1.1. Побудова піраміди

1) Рівняння прямої, що проходить через 2 вказані точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, записують таким чином

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Таке рівняння зводиться до прямої в канонічному вигляді

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

де $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка прямої, $\vec{a}=(l,m,n)$ – координати напрямного вектора, паралельного до прямої.

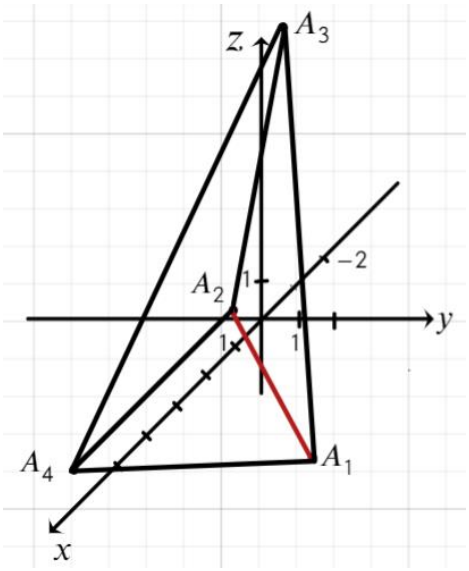


Рис. 2.1.2. Пряма A_1A_2

Записуємо шукану пряму A_1A_2 (рис. 2.1.2):

$$\frac{x-1}{1-1}=\frac{y-2}{0-2}=\frac{z+3}{1+3};$$

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{4}.$$

За напрямний вектор $\vec{a}=(l,m,n)$ для ребра A_1A_2 бажано взяти колінеарний вектору $\overrightarrow{A_1A_2}$, тобто $\vec{a}=(0,-1,2)$. Отже, канонічні рівняння ребра:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{2}.$$

Довжина відрізка між вказаними двома точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ обчислюється за формулою

$$M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

тому довжина ребра:

$$A_1A_2 = \sqrt{(1-1)^2 + (0-2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{0+4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Зауваження. Довжину ребра також обчислюють як довжину вектора. За умовою задачі $\overrightarrow{A_1A_2} = (0,-2,4)$, $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{0+4+16} = 2\sqrt{5}$.

2) ***Геометричний зміст векторного добутку*** − модуль вектора векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на вказаних векторах:

$$S_{пар} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.$$

Площа трикутника обчислюється за формулою:

$$S_{тр} = \frac{1}{2} S_{пар} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.$$

Площу грані $A_1A_2A_3$ (рис. 2.1.3), як площу трикутника, обчислимо із геометричного змісту векторного добутку:

$$S = \frac{1}{2} S_{паралелограма} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right|.$$

Координати вектора векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які задані координатами, обчислюються за формулою:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

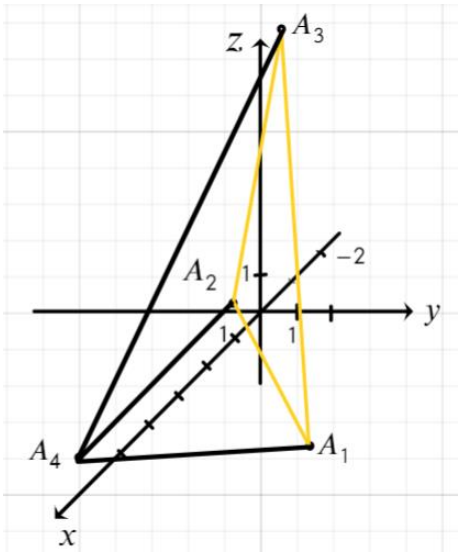


Рис. 2.1.3. Грань $A_1A_2A_3$

Координати векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$ та $\overrightarrow{A_1A_3}$: $\overrightarrow{A_1A_2}=(0,-2,4)$, $\overrightarrow{A_1A_3}=(-3,-3,9)$.

Векторний добуток дорівнює:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -2 & 4\\ -3 & -3 & 9\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 3\end{vmatrix}=6\cdot\left(\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix}\right)=$$

$$=6\left((-3+2)\vec{i}-(0+2)\vec{j}+(0-1)\vec{k}\right)=6\left(-\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}\right).$$

Отже, $\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=6\left(-\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}\right)$, тоді

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\frac{6}{2}\sqrt{1+4+1}=3\sqrt{6}\text{ од. площі.}$$

Зауваження. При обчисленні визначника винесено із другого та третього рядка множники 2 та 3, відповідно з врахуванням властивості: якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника помножити на стале число *C*, то й визначник помножиться на *C (спільний множник рядка або стовпця можна виносити за знак визначника)*.

3) ***Геометричний зміст мішаного добутку*** – обчислення об'єму паралелепіпеда, який побудований на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, як на сторонах:

$$V_{пар}=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

Для об'єму піраміди (рис. 2.1.4) маємо наступну формулу:

$$V_{піраміди}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

Слід зауважити, що вектори повинні мати спільний початок.

Якщо вектори задані своїми координатами, то мішаний добуток знаходять за формулою:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

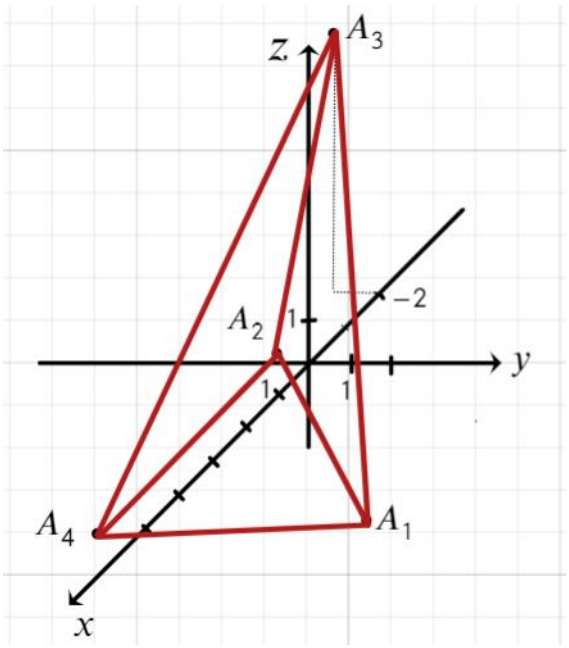


Рис. 2.1.4. Вигляд піраміди

Об'єм піраміди V знайдемо за допомогою мішаного добутку векторів: $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, координати векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ обчислено вище, а для $\overrightarrow{A_1A_4} = (-1;-7;-1)$.

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 9 \\ -1 & -7 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (3+9) + 4 \cdot (21-3) = 96.$$

Зауважимо, що обчислення визначника проведено за елементами першого рядка.

Отже, $V_{пір.} = \frac{1}{6} \cdot |96| = 16$ *куб. од.*

4) Нехай площина (α) задана в просторі своїми трьома точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$. Тоді точка $M(x;y;z)$, як точка простору, теж лежить в цій площині, тобто $M \in (\alpha) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ – компланарні. Запишемо умову компланарності векторів (мішаний добуток дорівнює 0):

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0 .$$

Рівняння площини, що проходить через 3 вказані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ має вигляд

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

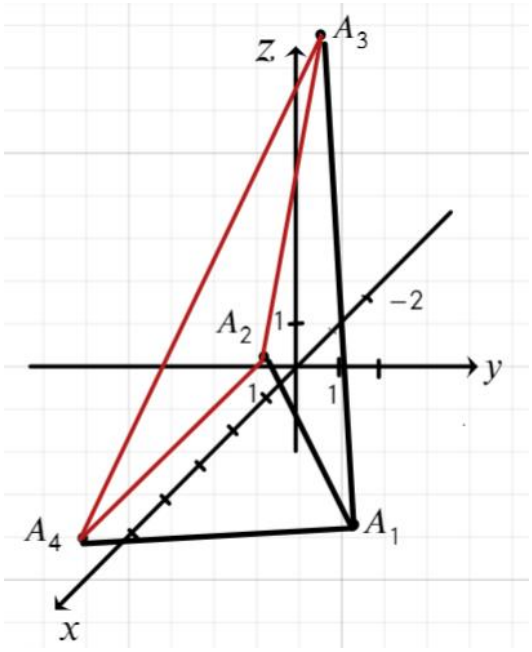


Рис. 2.1.5. Площина $A_2A_3A_4$

Підставляємо вихідні значення, тобто координати точок (рис. 2.1.5) $A_2(1,0,1)$, $A_3(-2,-1,6)$, $A_4(0,-5,-4)$, в записану вище формулу

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -2-1 & -1 & 6-1 \\ 0-1 & -5 & -4-1 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -3 & -1 & 5 \\ -1 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

звідки і записуємо рівняння площини (обчислення визначника за елементами 1-го рядка):

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 0, \; 30(x-1) - 20y + 14(z-1) = 0.$$

Ділимо останнє на 2 та розкриваємо дужки:

$$15(x-1)-10y+7(z-1)=0,\ 15x-10y+7z-22=0.$$

Отже, рівняння площини $A_2A_3A_4$: $15x-10y+7z-22=0.$

5) Кут між векторами обчислюють із скалярного добутку за формулою

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}},$$

де вектори задані своїми координатами $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$.

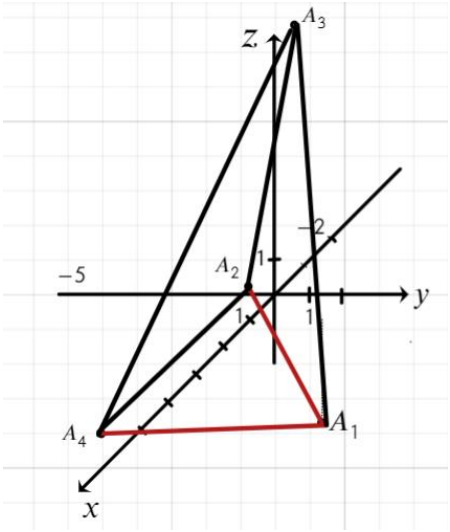


Рис. 2.1.6. Кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4

Отже, кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 (рис. 2.1.6) позначимо як кут α між векторами $\overrightarrow{A_1A_2}=(0;-2;4)$ та $\overrightarrow{A_1A_4}=(-1;-7;-1)$.

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}=\frac{0+14-4}{\sqrt{4+16}\sqrt{1+49+1}}=\frac{10}{2\sqrt{255}}=\frac{5}{\sqrt{255}}\approx 0,313;$$

$$\alpha=\arccos\frac{5}{\sqrt{255}}.$$

6) Двогранний кут між гранями піраміди (рис. 2.1.7) обчислюють як кут між векторами-нормалями площин, які містять дані грані, через скалярний добуток, як в попередньому пункті. Із п.2) маємо для грані $A_1A_2A_3$ нормальний вектор $\vec{n}_1=(1,2,1)$, із п.4), відповідно, $\vec{n}_2=(15,-10,7)$, тому:

$$\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{|15-20+7|}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{225+100+49}}=\frac{2}{\sqrt{6\cdot 374}}=\frac{1}{\sqrt{561}}\approx 0,042.$$

$$\beta=\arccos\frac{1}{\sqrt{561}}.$$

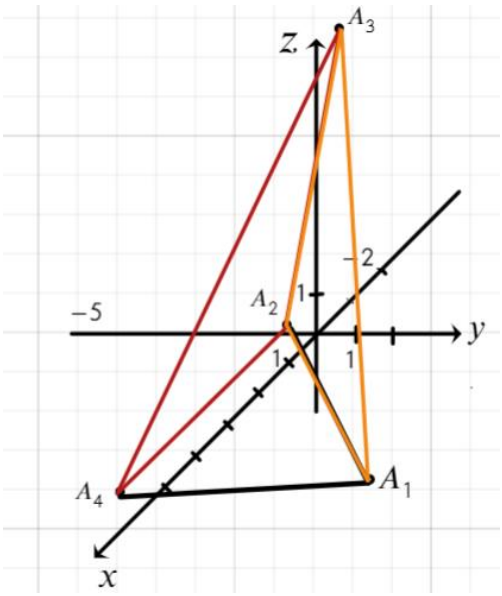


Рис. 2.1.7. Вигляд кута між гранями

7) Відстань d точки від площини обчислюють через нормальне рівняння площини. Загальне рівняння площини $Ax+By+Cz+D=0$ зводять до нормального рівняння, помноживши його на нормуючий множник

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

знак якого треба брати протилежним знаку вільного члена. Для вказаної точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ і площини, записаної нормальним рівнянням

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

справедлива формула:

$$d=\left|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p\right|.$$

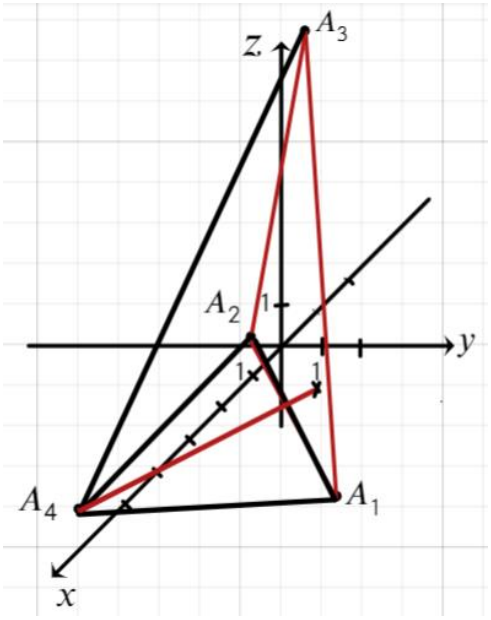


Рис. 2.1.8. Вигляд відстані від точки до площини (по перпендикуляру)

Запишемо рівняння грані у вигляді

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

де $\vec{n}_1=(A,B,C)=(1,2,1)$ (вектор колінеарний векторному добутку з пункту 2) і точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – одна із вказаних точок грані, візьмемо т. $A_1(1,2,-3)$.

Маємо:

$$(x-1)+2(y-2)+(z+3)=0,$$

$x+2y+z-2=0$ – загальне рівняння грані $A_1A_2A_3$.

Також рівняння потрібної грані можна записати, як площину, яка проходить через три точки з відомими їхніми координатами.

Зведемо загальне рівняння площини до нормального рівняння.

Нормуючий множник будемо брати зі знаком «плюс», оскільки вільний член у загальному рівнянні площини від'ємний:

$$\mu=\frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Множимо на нього:

$$\frac{1}{\sqrt{6}}x+\frac{2}{\sqrt{6}}y+\frac{1}{\sqrt{6}}z-\frac{2}{\sqrt{6}}=0.$$

В отримане нормальне рівняння грані підставляємо координати точки $A_4(0,-5,-4)$.

$$d=\left|\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot 0+\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot(-5)+\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot(-4)-\frac{2}{\sqrt{6}}\right|=\left|\frac{-16}{\sqrt{6}}\right|=\frac{16}{\sqrt{6}}.$$

Від'ємний знак відхилення $d=|\delta|$ вказує на розміщення початку координат та точки $A_4(0,-5,-4)$ в одному підпросторі відносно вказаної площини.

Зауваження. Якщо площина задана загальним рівнянням, то відома формула обчислення відстані від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ у вигляді:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Отже, за формулою відстані

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\cdot 0+2\cdot(-5)+1\cdot(-4)-2|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{16}{\sqrt{6}}.$$

Відповідь: 1) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{-2}$, $2\sqrt{5}$; 2) $3\sqrt{6}$ од. кв.; 3) 16 од. куб.;

4) $15x-10y+7z-22=0$; 5) $\cos\alpha\approx 0{,}313$; 6) $\cos\alpha\approx 0{,}042$; 7) $\frac{16}{\sqrt{6}}$.

2.2. Задано точку $M(-1,0,1)$ і пряму $L:\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{3}$.

1) Написати рівняння площини, що проходить через пряму L і точку M.

2) Написати рівняння площини, що проходить через точку M, перпендикулярно до прямої L.

3) Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L, та обчислити відстань від точки M до прямої L.

4) Знайти точку, симетричну точці M, відносно прямої L.

Розв'язування.

На рис. 2.2.1 зображено точний рисунок прямої в просторі, також показано схематично побудову площини.

1) Рівняння площини запишемо у вигляді

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

де $\vec{n}=(A,B,C)$ – вектор нормалі, точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка, яка належить площині. За точку візьмемо $M(-1,0,1)$.

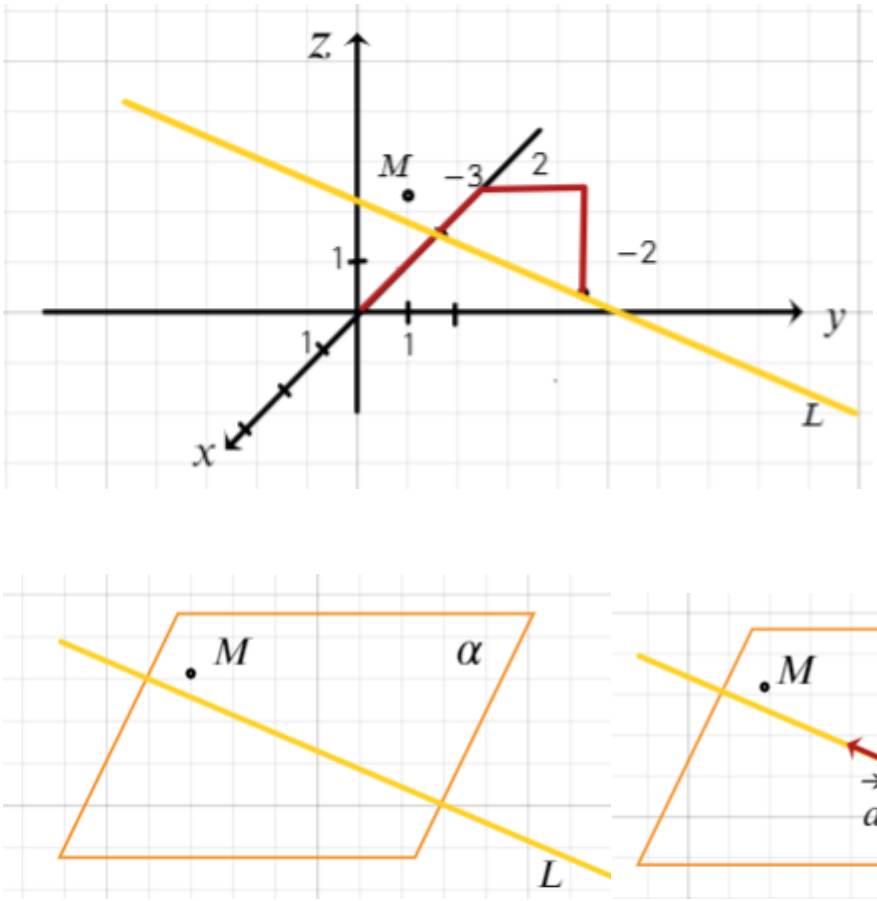


Рис. 2.2.1. Пряма L в просторі, побудова площини.

Вектор нормалі потрібно визначити за умовою задачі. Так як шукана площина (α) проходить через пряму $L:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z+2}{3}$, то її нормальний вектор $\vec{n}$ перпендикулярний до напрямного вектора прямої, тобто до вектора $\vec{a}=(1,-5,3)$. З іншого боку, точка прямої $M_0(-3,2,-2)$ належить прямій L, тому і належить також шуканій площині. Таким чином, вектор $\overrightarrow{M_0M}=(2,-2,3)$ перпендикулярний до нормального вектора $\vec{n}$. Отже, $\vec{n}\perp\vec{a},\vec{n}\perp\overrightarrow{M_0M}\Rightarrow\vec{n}\,\|\left(\vec{a}\times\overrightarrow{M_0M}\right)$. Обчисливши векторний добуток

$$\vec{a}\times\overrightarrow{M_0M}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 2 & -3\\ 1 & -5 & 3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2 & -3\\ -5 & 3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & -5\end{vmatrix}=-9\vec{i}+3\vec{j}+8\vec{k},$$

знаходимо нормальний вектор площини $\vec{n}=(9,-3,-8)$.

Оскільки площина проходить через точку $M(-1,0,1)$, то записуємо рівняння площини:

$$9(x+1)-3(y-0)-8(z-1)=0\Rightarrow 9x-3y-8z+17=0,$$

тобто площина $(\alpha): 9x-3y-8z+17=0.$

Зауваження. Таке ж рівняння площини отримують, підставивши в формулу точку прямої $M_0(-3,2,-2)$.

2) Нехай пряма задана канонічними рівняннями: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$,

а площина (α) – загальним рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$. Умова перпендикулярності прямої та площини: вектори $\vec{n}$ і $\vec{a}-$ колінеарні (рис. 2.2.2), тобто

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

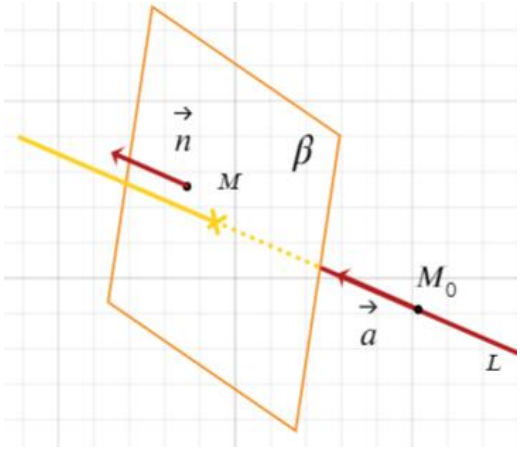


Рис. 2.2.2. Перпендикулярність прямої і площини

Напрямний вектор прямої L в цьому випадку є перпендикулярним до шуканої площини. Отже, його можна взяти за вектор нормалі $\vec{n} = (1, -5, 3)$ до площини. Тоді рівняння площини напишемо так:

$$(x+1) - 5(y-0) + 3(z-1) = 0 \text{ або } x - 5y + 3z - 2 = 0.$$

3) Якщо пряма перетинає площину, то система рівнянь

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p} \end{cases}$$

має єдиний розв'язок. Перейшовши в канонічних рівняннях прямої до рівнянь в параметричній формі

$$x = x_0 + mt;\ \ y = y_0 + nt;\ \ z = z_0 + pt,$$

після підстановки в загальне рівняння площини, знаходять значення t, яке відповідає точці перетину $P(x_P, y_P, z_P)$ (рис. 2.2.3).

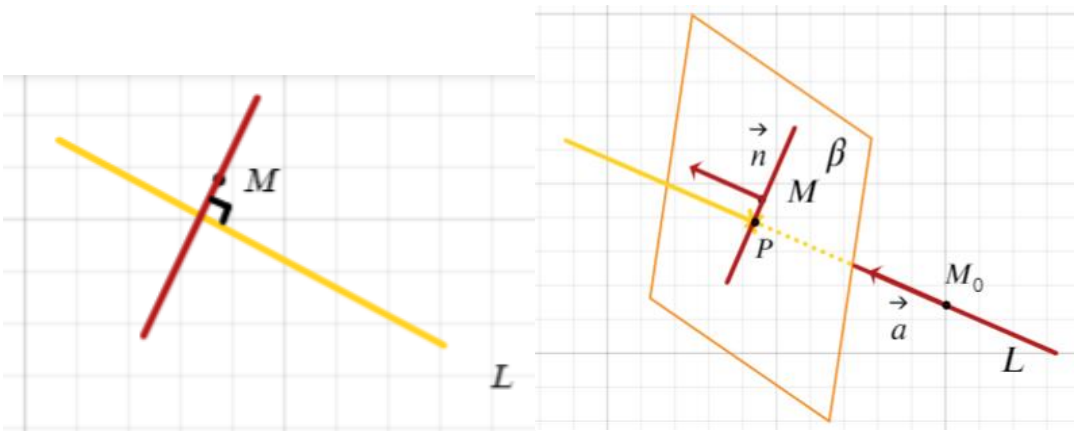


Рис. 2.2.3. Побудова перпендикуляра, знаходження точки перетину прямої і площини.

Із п. 2), знаючи точку перетину побудованої площини з прямою L, рівняння перпендикуляра записують у вигляді прямої:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

яка проходить через вказані точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$. Також використовують канонічні рівняння прямої, відповідним чином прорахувавши напрямний вектор. Відповідно, відстань від точки M до

прямої L буде дорівнювати відстані від точки M до точки P, $d = d(m.M, пряма\ L) = |MP|$.

Розв'язуємо задачу. Спочатку шукаємо точку перетину прямої з побудованою до неї перпендикулярною площиною. Записуємо параметричні рівняння прямої $L: \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3} \Rightarrow \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3} = t, t \in \mathbb{R}$.

$$x = -3 + t,\ y = 2 - 5t,\ z = -2 + 3t; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - 5y + 3z - 2 = 0, \\ x = -3 + t, \\ y = 2 - 5t, \\ z = -2 + 3t, t \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

$$-3 + t - 5(2 - 5t) + 3(-2 + 3t) - 2 = 0 \Rightarrow 35t - 21 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{5}.$$

Отже, координати точки $P(x_P, y_P, z_P)$:

$$x_P = -3 + \frac{3}{5} = -\frac{12}{5},$$

$$y_P = 2 - 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = -1,$$

$$z_P = -2 + 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{1}{5}.$$

Запишемо рівняння перпендикуляра до прямої. Напрямний вектор буде паралельним вектору $\overrightarrow{MP}$:

$$\overrightarrow{MP} = \left(-\frac{12}{5} + 1, -1, -\frac{1}{5} - 1\right) = \left(-\frac{7}{5}, -1, -\frac{6}{5}\right) \Rightarrow \vec{a} \parallel \overrightarrow{MP} \Rightarrow \vec{a} = (7, 5, 6).$$

Рівняння перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L в канонічному вигляді:

$$MP: \frac{x+1}{7} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{6}.$$

Відстань від точки M до прямої L:

$$d = \left|\overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + 1 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{49+25+36}{25}} = \sqrt{\frac{110}{25}} = \frac{\sqrt{110}}{5}.$$

4) Оскільки, за симетрією відносно прямої, відстані до прямої повинні бути рівними, то використовують формули поділу відрізка навпіл.

Нехай точки A, B мають координати $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, тоді формули для знаходження координат середини відрізка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

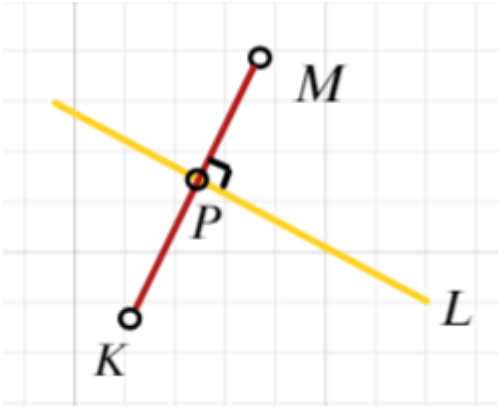


Рис. 2.2.4. Побудова симетричної точки відносно прямої

Позначимо симетричну точку відносно прямої (рис. 2.2.4), як точку $K(x_K, y_K, z_K)$, тоді точка $P(x_P, y_P, z_P)$ є серединою відрізка MK. Із формул ділення відрізка навпіл маємо:

$$-\frac{12}{5} = \frac{-1 + x_K}{2} \Rightarrow 5x_K = -24 + 5 \Rightarrow x_K = -\frac{19}{5} = -3,6;$$

$$-1 = \frac{0 + y_K}{2} \Rightarrow y_K = -2;\quad -\frac{1}{5} = \frac{1 + z_K}{2} \Rightarrow 5z_K = -2 - 5 \Rightarrow z_K = -\frac{7}{5} = -1,4.$$

Точка $P(-3,6; -2; -1,4)$ – симетрична точці M відносно прямої L.

Відповідь. 1) $9x - 3y - 8z + 17 = 0$; 2) $x - 5y + 3z - 2 = 0$; 3) $\frac{x+1}{7} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{6}, \frac{\sqrt{110}}{5}$;

4) $P(-3,6; -2-1,4)$.

2.3. Пряма L задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} 3x+3y+z-1=0, \\ 2x-3y-2z+6=0. \end{cases}$$

Написати її канонічні та параметричні рівняння.

Розв'язування.

Пряму в просторі можна задати рівняннями площин (рис. 2.3.1), які по ній перетинаються, тобто у вигляді системи двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0, \\ A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0, \end{cases}$$

тобто як загальні рівняння прямої.

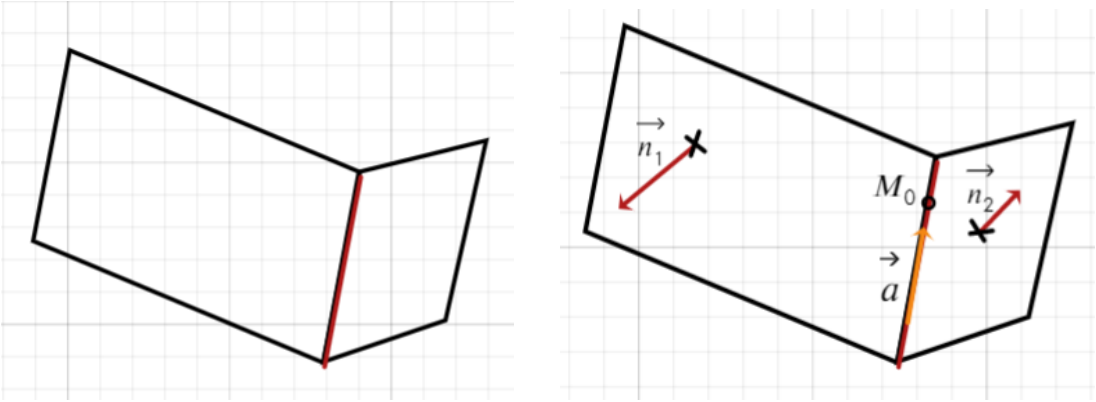


Рис. 2.3.1. Пряма як перетин двох площин

Оскільки ці рівняння не дуже зручні, то систему рівнянь, якою задається пряма, зводять до канонічного виду. Для цього потрібно:

1) визначити координати однієї з точок прямої (покласти, наприклад, $z=0$ і знайти x та y).

2) визначити координати напрямного вектора $\vec{a}=(m,n,p)$.

Очевидно, що $\vec{a}\perp\vec{n}_1, \vec{a}\perp\vec{n}_2$, де $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ – нормальні вектори площин, заданих рівняннями в системі. Тоді можна обрати напрямний вектор, як вектор векторного добутку нормальних векторів площин або колінеарний йому:

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Для того щоб скласти канонічне рівняння прямої, потрібно знати точку, що належить прямій, та напрямний вектор прямої.

1. Виконуємо завдання покроково.

Точку на прямій виберемо довільно. Для цього покладемо, наприклад, $z = 0$. Якщо так виявиться незручним – зробимо інакше. При $z = 0$ система набуває вигляду:

$$\begin{cases} 3x + 3y - 1 = 0, \\ 2x - 3y + 6 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, що $x = -1,\ y = \frac{4}{3}$ – розв'язки цієї системи. Отже, точка $\left(-1; \frac{4}{3}; 0\right)$ належить даній прямій.

2. Вектори нормалей до площин, перетином яких є дана пряма, є вектори $\vec{n}_1 = (3;3;1)$ та $\vec{n}_2 = (2;-3;-2)$. Векторним добутком двох векторів є вектор, перпендикулярний до кожного з них. Знайдемо цей вектор:

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(-6+3) - \vec{j}\,(-6-2) + \vec{k}\,(-9-6) = -3\vec{i} + 8\vec{j} - 15\vec{k}. =$$

Будь-який вектор, колінеарний до даного, також буде напрямним вектором прямої. Зручно взяти вектор $(3;-8;15)$. Складаємо канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y - \frac{4}{3}}{-8} = \frac{z}{15}.$$

Напишемо тепер ці рівняння в параметричному вигляді, прирівнявши кожен дріб до параметра t:

$$x = -1 + 3t;\ y = \frac{4}{3} - 8t;\ z = 15t.$$

Відповідь. $\frac{x+1}{3}=\frac{y-\frac{4}{3}}{-8}=\frac{z}{15}$; $x=-1+3t;\ y=\frac{4}{3}-8t;\ z=15t.$

2.4. Точки $A(-2,1), B(-1,-2)$ та $C(2,3)$ – вершини трикутника (рис. 2.6).

Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

Розв'язування.

Будуємо точний рисунок трикутника на площині (2.4.1).

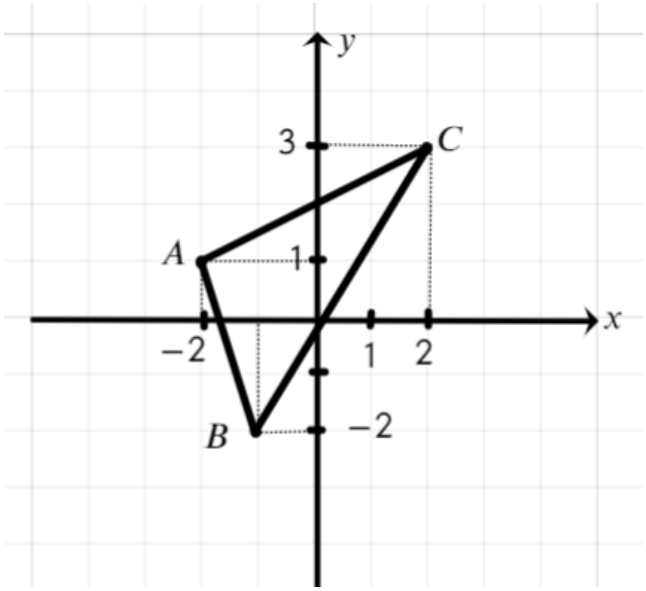


Рис. 2.4.1.Трикутник на площині

1) Для рівняння медіани CM та обчислення її довжини знаходимо координати точки $M(x_0, y_0)$ (рис. 2.4.2), як середини відрізка AB:

$$x_0=\frac{-2+1}{2}=-\frac{3}{2},\ y_0=\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через дві точки: $M\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ та $C(2,3)$:

$$\frac{x-2}{-\frac{3}{2}-2}=\frac{y-3}{-\frac{1}{2}-3},\qquad \frac{x-2}{-\frac{7}{2}}=\frac{y-3}{-\frac{7}{2}};\qquad x-2=y-3.$$

Зводимо рівняння до загального вигляду: $x-y+1=0.$

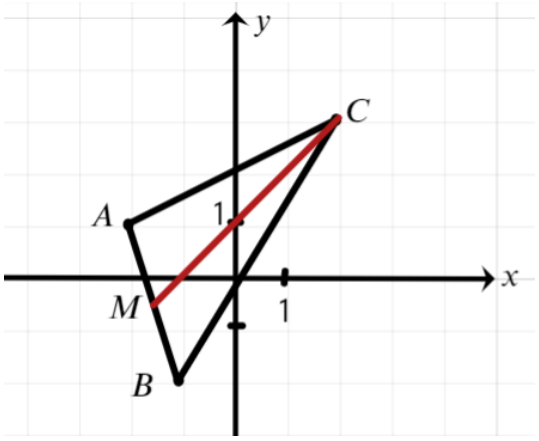


Рис. 2.4.2 Побудова медіани

Довжину медіани обчислимо за формулою відстані між двома точками:

$$CM=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\sqrt{2\cdot\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}\sqrt{2}.$$

2) Для рівняння висоти AH (рис. 2.4.3) записуємо спочатку рівняння прямої BC, що проходить через дві точки $B(-1,-2)$ та $C(2,3)$.

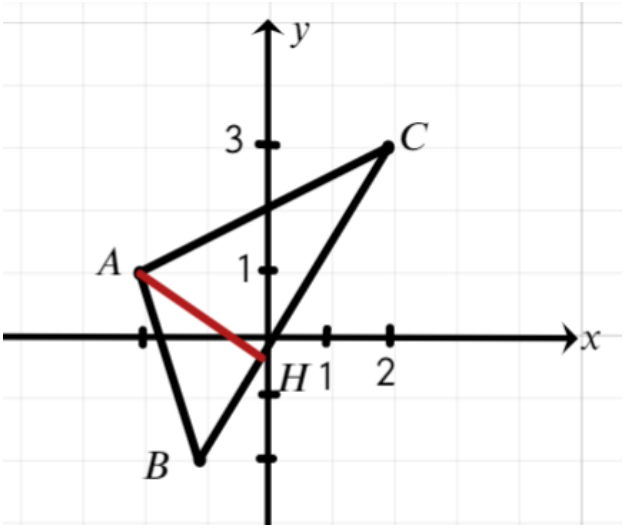


Рис. 2.4.3. Висота в трикутнику

Отже,

$$\frac{x+1}{2+1}=\frac{y+2}{3+2}, \qquad \frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{5};$$

тобто маємо канонічне рівняння сторони із напрямним вектором $\vec{a}=(3,5)$, який є вектором нормалі для шуканої висоти. Запишемо її вигляді:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0,$$

де точка $M_0(x_0,y_0)$ належить прямій, а вектор $\vec{a}(a_1,a_2)$ є вектором нормалі як напрямний вектор прямої *BC*. Підставляємо дані і одержуємо:

$$3(x+2)+5(y-1)=0 \quad \Rightarrow \quad 3x+5y+1=0,$$

тобто $3x+5y+1=0$ – рівняння висоти *AH*.

3) Прямі паралельні, якщо їх напрямні вектори колінеарні (або рівні), тому один із напрямних векторів прямої *AC*, що є вектором $\overrightarrow{AC}=\left(4,2\right)$, зручно взяти за колінеарний. Запишемо шукану пряму (рис. 2.4.4) в канонічному вигляді із напрямним вектором $\vec{a}\left(2,1\right)$:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}.$$

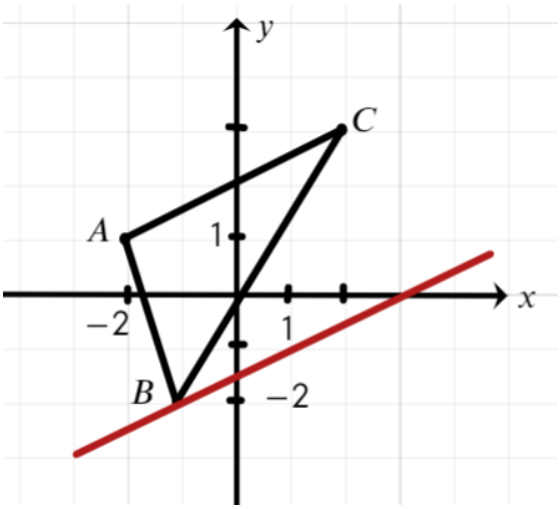


Рис. 2.4.4. Паралельні прямі

Зводимо до загального рівняння прямої: $x+1=2\left(y+2\right)\Rightarrow x-2y-3=0$.

Відповідь:

1) $x-y+1=0$, $\frac{7}{2}\sqrt{2}$; 2) $3x+5y+1=0$; 3) $x-2y-3=0$.

2.5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $9y^2-16x^2-64x-54y-127=0$; б) $y^2-6y+4x+12=0.$

Розв'язування.

а) В рівнянні кривої виділимо повні квадрати за змінними x, y.

$$9y^2-54y=9(y^2-6y+9-9)=9(y-3)^2-81;$$
$$-16x^2-64x=-16(x^2+4x+4-4)=-16(x-2)^2+64.$$

Підставимо отримані вирази у рівняння кривої

$$9(y-3)^2-16(x+2)^2=144.$$

Поділивши ліву та праву частини рівняння на 144, зведемо рівняння кривої до канонічного вигляду

$$\frac{(y-3)^2}{16}-\frac{(x+2)^2}{9}=1.$$

Якщо фокуси гіперболи лежать на осі OY в точках $F_1(0;-c)$, $F_2(0;c)$, то її рівняння має вигляд:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$$

Рівняння асимптот такої гіперболи $y=\pm\frac{b}{a}x$, а рівняння директрис $y=\pm\frac{b}{e}$, де *ексцентриситетом* гіперболи називається відношення півфокусної відстані до її дійсної півосі:

$$e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}>1.$$

Отже, ми отримали рівняння гіперболи з півосями $a=3, b=4.$ Центр гіперболи міститься в точці $(-2,3)$, вершини лежать на прямій $x=-2$, їхні координати $F_2(-2,7), F_1(-2,-1).$ Для ексцентриситета маємо $e=\frac{c}{b}=\frac{5}{4}$, також для директрис $d_{1,2}=\pm\frac{b^2}{c}=\pm\frac{16}{5}$ в системі координат xOy, $y=\pm\frac{4}{3}x$ –

рівняння асимптот. На рис. 2.5.1 зображено вказану спряжену гіперболу (виконано паралельне перенесення в центр симетрії для зручності побудови).

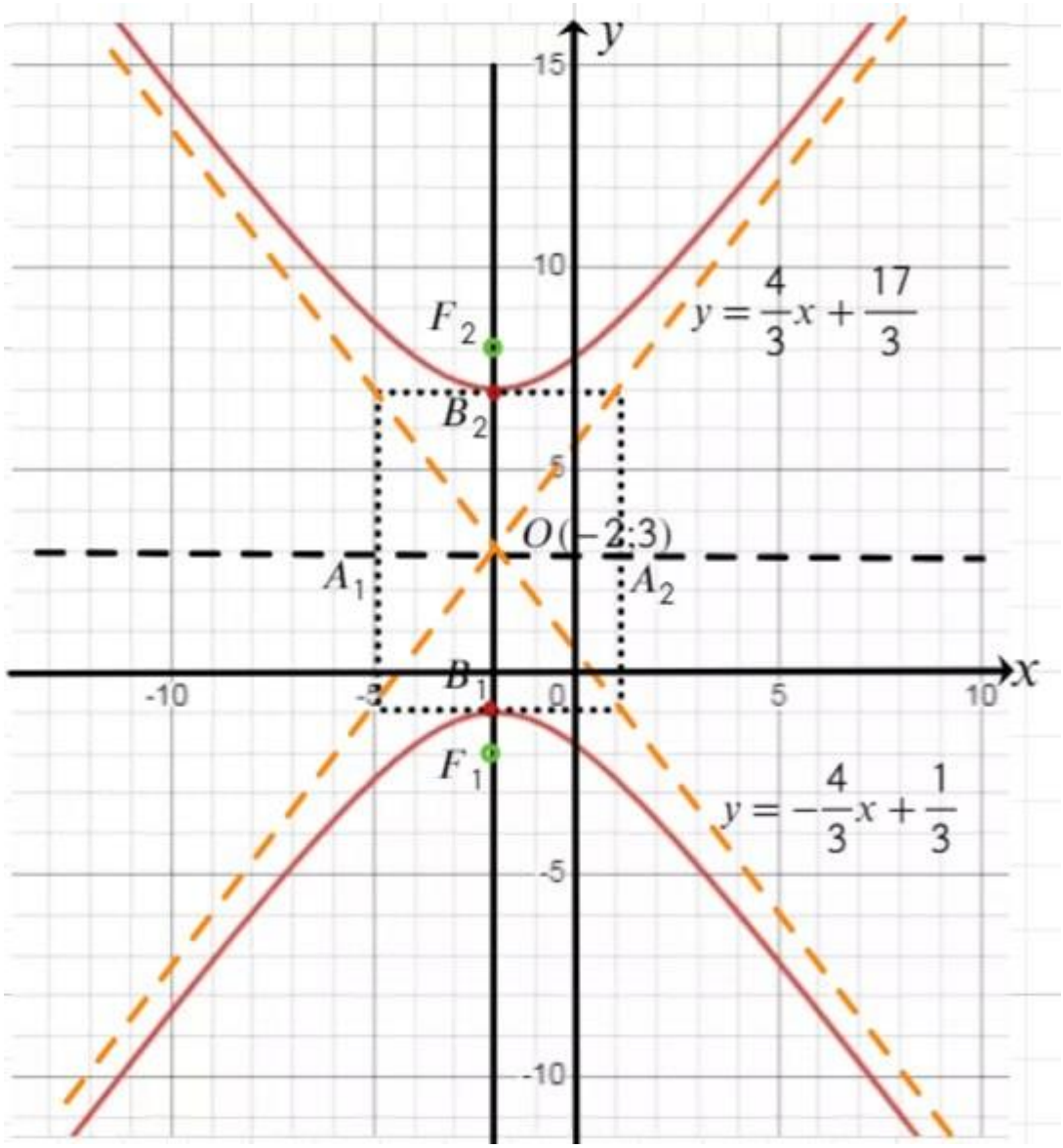


Рис. 2.5.1. Вигляд дослідженої гіперболи

б) В рівнянні кривої виділимо повний квадрат за змінною y. Тоді рівняння нашої кривої набуває такого вигляду:

$$(y-3)^2=-4x-3\Rightarrow(y-3)^2=-4\left(x+\frac{3}{4}\right).$$

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь OX, має вигляд $y^2=2px$, де p – параметр параболи.

Якщо $p > 0$, то гілки параболи напрямлені вправо, якщо $p < 0$, то гілки напрямлені вліво. Фокус параболи знаходиться у точці $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$.

Якщо вершина параболи знаходиться у точці $C(x_0; y_0)$, а вісь симетрії паралельна осі *Ox*, то рівняння параболи має вигляд:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

Для такої параболи зі зміщеною вершиною її фокус знаходиться в точці $F\left(x_0 + \frac{p}{2}; y_0\right)$, рівняння директриси $x = x_0 - \frac{p}{2}$.

Отже, $(y-3)^2 = -4\left(x + \frac{3}{4}\right)$ є параболою, координати точки вершини $\left(-\frac{3}{4};3\right)$, $2p = -4 \Rightarrow \frac{p}{2} = -1$. Відповідно, рівняння директриси $x = \frac{1}{4}$, точка $F\left(-1\frac{3}{4};3\right)$ – фокус. На рис. 2.5.2 зображено параболу.

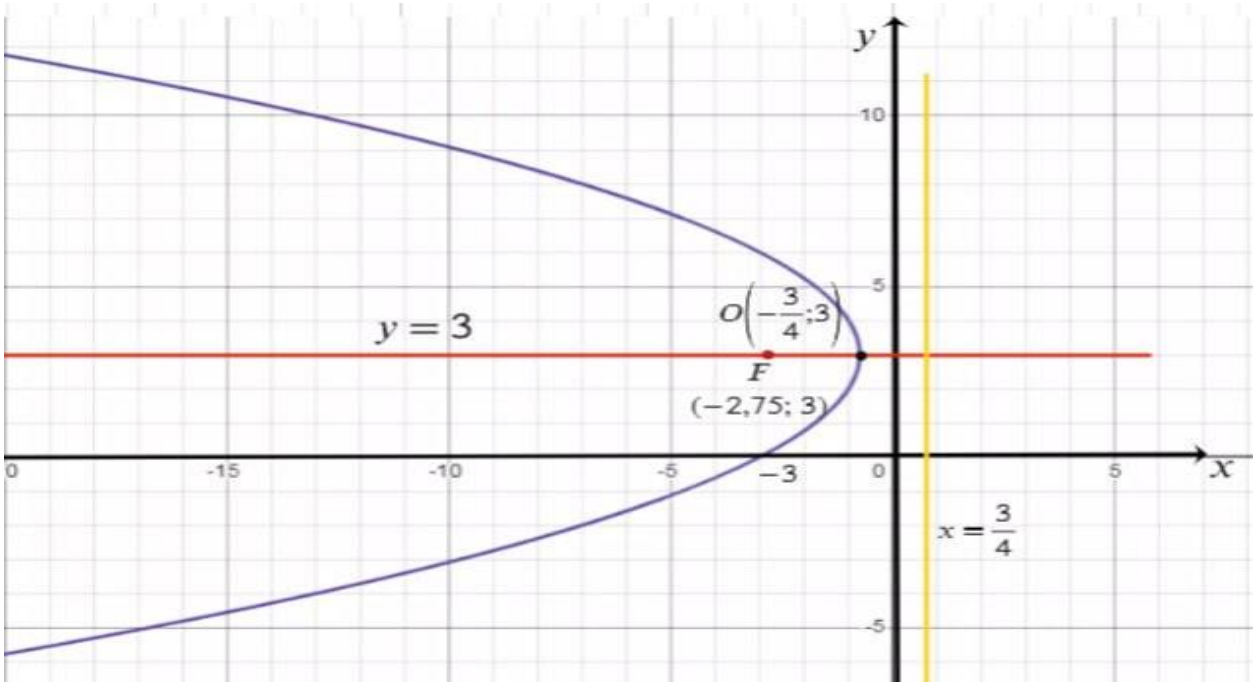


Рис. 2.5.2. Парабола

3. Вступ до математичного аналізу

3.1. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=-\ln\left(x+\frac{2}{3}\right)+2;$ б) $y=\left|\frac{1}{3}\sin 2x\right|.$

Розв'язування.

а) Перед побудовою графіка слід визначити область допустимих значень – ОДЗ. Відомо, що логарифмічна функція існує при додатному аргументу, тобто при $x+\frac{2}{3}>0$. Отже, наша функція існує для $x\in\left(-\frac{2}{3};\infty\right)$. Пряма $x=-\frac{2}{3}$ є вертикальною асимптотою, оскільки $\lim\limits_{x\to\frac{-2}{3}+0}\left(-\ln\left(x+\frac{2}{3}\right)+2\right)=+\infty$. Графік можна будувати і за точками (за допомогою відомих програмних продуктів), і за допомогою перетворень над основною елементарною функцією $y=\ln x.$

Ланцюжок перетворень для послідовності побудови графіка:

1) $y=\ln x$ (початковий графік, рис. 3.1 а));

2) $y=\ln\left(x+\frac{2}{3}\right)$ (зсув по осі абсцис на $\frac{2}{3}$ вліво, рис. 3.1 б));

3) $y=-\ln\left(x+\frac{2}{3}\right)$ (симетричне відображення відносно осі *OX*, рис. 3.1 в));

4) $y=-\ln\left(x+\frac{2}{3}\right)+2$ (підняття вгору на 2 одиниці, рис. 3.1 г)).

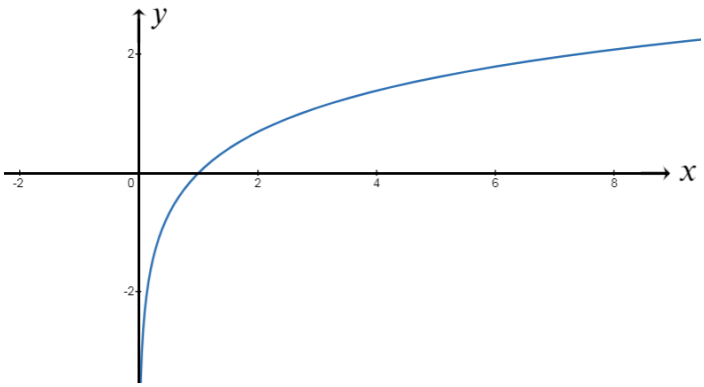


Рис. 3.1.1 а)

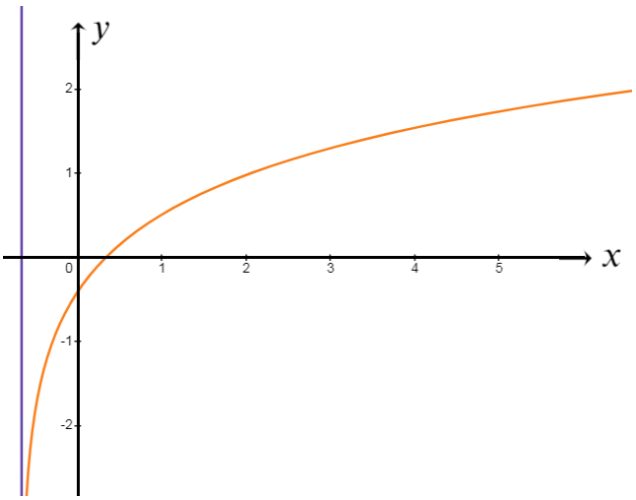


Рис. 3.1.1 б)

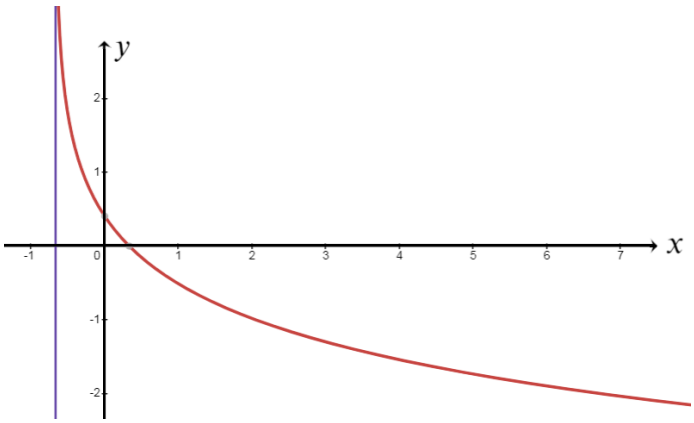


Рис. 3.1.1 в)

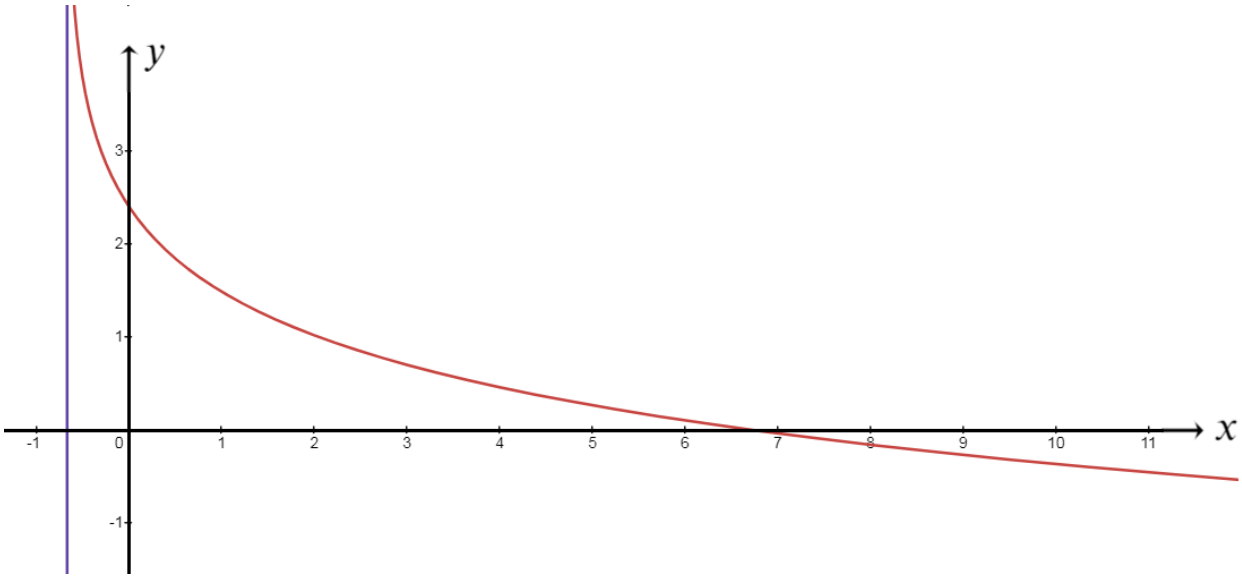
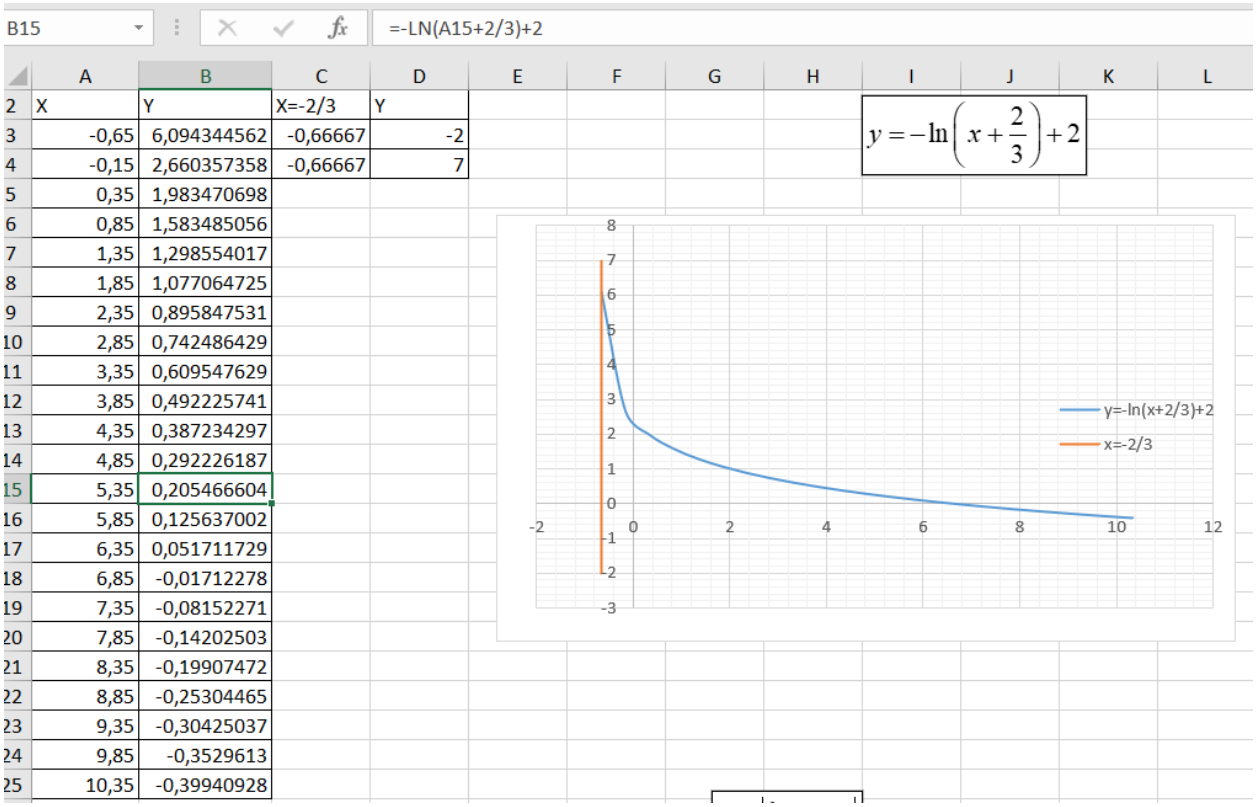


Рис. 3.1.1 г)

На рис. 3.1.2 показано побудову графіка за точками в Excel.



	A	B	C	D
2	X	Y	X=-2/3	Y
3	-0,65	6,094344562	-0,66667	-2
4	-0,15	2,660357358	-0,66667	7
5	0,35	1,983470698		
6	0,85	1,583485056		
7	1,35	1,298554017		
8	1,85	1,077064725		
9	2,35	0,895847531		
10	2,85	0,742486429		
11	3,35	0,609547629		
12	3,85	0,492225741		
13	4,35	0,387234297		
14	4,85	0,292226187		
15	5,35	0,205466604		
16	5,85	0,125637002		
17	6,35	0,051711729		
18	6,85	-0,01712278		
19	7,35	-0,08152271		
20	7,85	-0,14202503		
21	8,35	-0,19907472		
22	8,85	-0,25304465		
23	9,35	-0,30425037		
24	9,85	-0,3529613		
25	10,35	-0,39940928		

Рис. 3.1.2. Побудова графіка в Excel

б) ОДЗ: $x \in (-\infty;\infty)$. Функція є парною, її графік є симетричним відносно осі *OY*:

$$y(-x)=\left|\frac{1}{3}\sin(-2x)\right|=\left|\frac{1}{3}\sin 2x\right|=y(x).$$

Також $y(x)\geq 0$, що випливає із формули задання цієї функції.

На рис. 3.1.3 а) −3.1.3 г) показано ланцюжок перетворень з побудовою остаточного графіка функції.

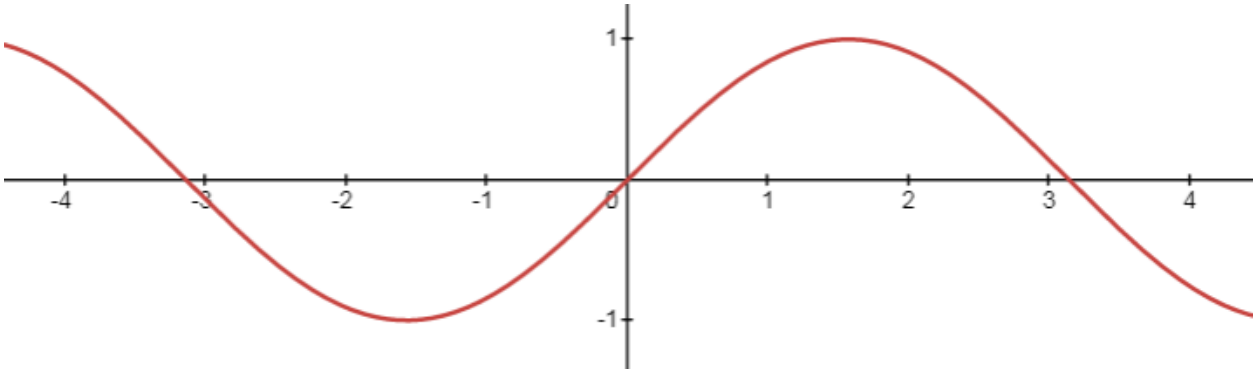


Рис. 3.1.3 а)

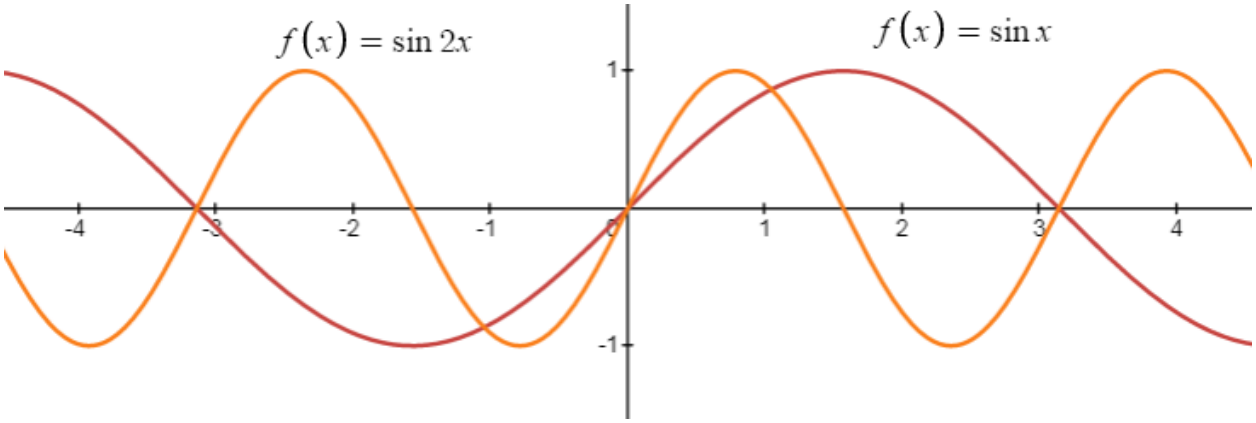


Рис. 3.1.3 б)

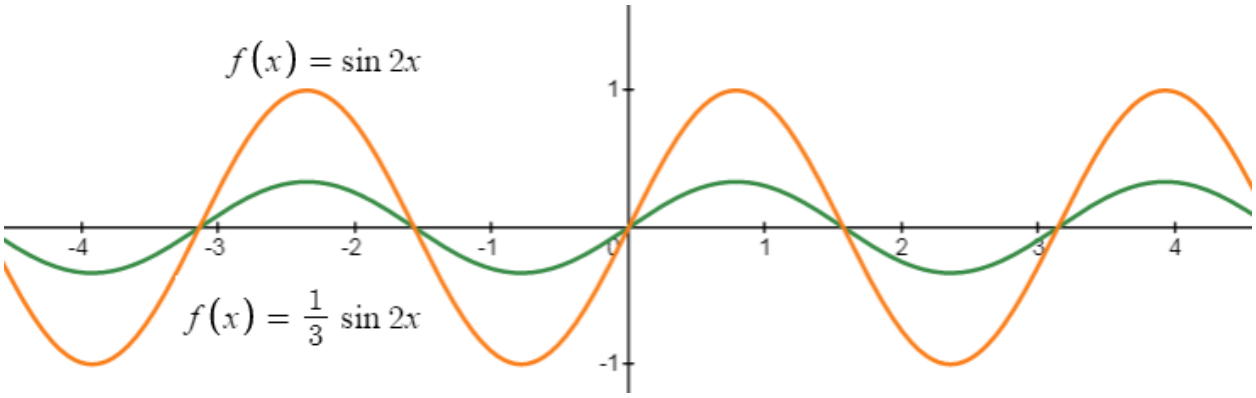


Рис. 3.1.3 в)

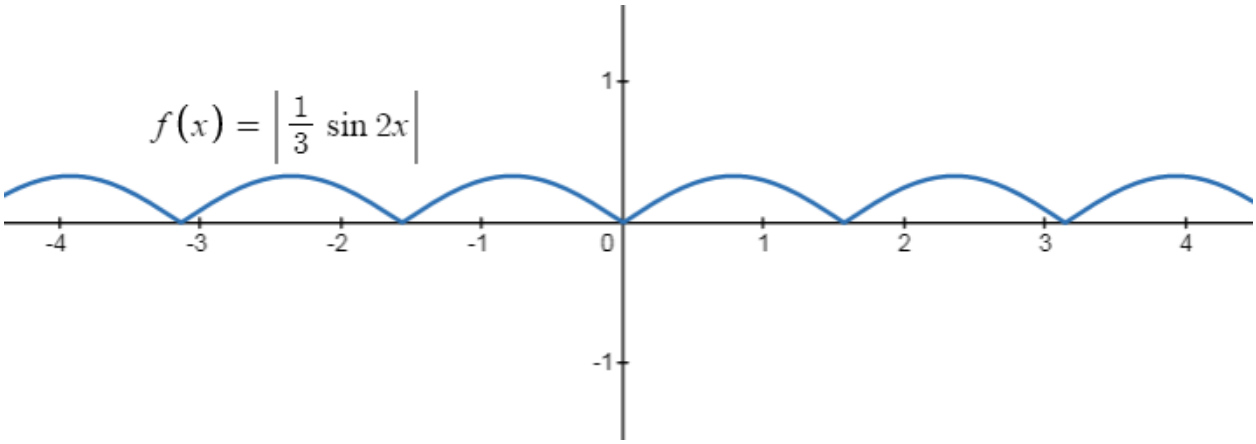
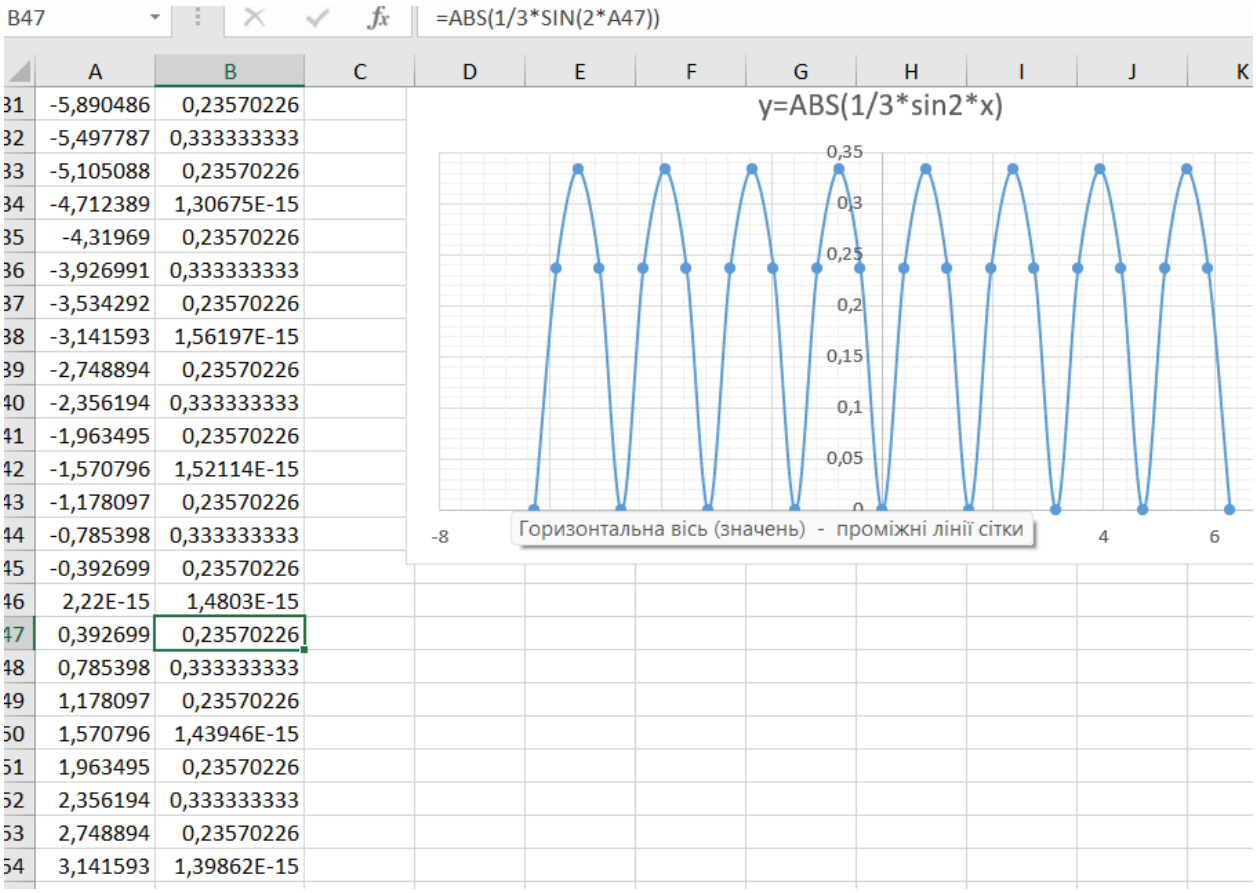


Рис. 3.1.3 г)

Побудову (рис. 3.1.4) також виконано за допомогою програмного документу Excel.



	A	B
31	-5,890486	0,23570226
32	-5,497787	0,333333333
33	-5,105088	0,23570226
34	-4,712389	1,30675E-15
35	-4,31969	0,23570226
36	-3,926991	0,333333333
37	-3,534292	0,23570226
38	-3,141593	1,56197E-15
39	-2,748894	0,23570226
40	-2,356194	0,333333333
41	-1,963495	0,23570226
42	-1,570796	1,52114E-15
43	-1,178097	0,23570226
44	-0,785398	0,333333333
45	-0,392699	0,23570226
46	2,22E-15	1,4803E-15
47	0,392699	0,23570226
48	0,785398	0,333333333
49	1,178097	0,23570226
50	1,570796	1,43946E-15
51	1,963495	0,23570226
52	2,356194	0,333333333
53	2,748894	0,23570226
54	3,141593	1,39862E-15

Рис. 3.1.4. Побудова графіка в Excel

3.2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-8x+1}{7x^5+4x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}$.

Розв'язування.

$$\text{а)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4-8x+1}{7x^5+4x^2+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(\frac{1}{x}-\frac{8}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^5\left(7+\frac{4}{x^3}+\frac{4}{x^5}\right)}=\frac{0}{7}=0.$$

При обчисленні границі дробово-раціональної функції винесли найстаршу степінь x, правила обчислення границь на нескінченності та $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0,\ n>0.$

б) Підставляємо значення $x=2$ в вираз, отримуємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, тобто число 2 є також і коренем квадратного рівняння. Розкладаємо знаменник на множники і обчислюємо границю.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-1)}=\frac{1}{2-1}=1.$$

в) Підстановка значення $x=4$ в вираз дає невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Домножимо чисельник і знаменник на спряжену величину чисельника:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{(1+2x-9)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Відповідь. а) 0; б) 1; в) $\frac{1}{3}$.

3.3. Дослідити функцію на неперервність. Класифікувати точки розриву.

а) $f(x)=\begin{cases}-\operatorname{ctg}x, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 3,\\ 3, & x>3;\end{cases}$ б) $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2-x}.$

Розв'язування.

а) Знаходимо ліву та праву границі функції $f(x)$ в точках $x=0, x=3$. Також врахуємо область визначення функції $y=\operatorname{ctg}x$.

Для точки $x=0$:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}(-\operatorname{ctg}x)=+\infty,\quad \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} x=0.$$

Отже, границя зліва є нескінченністю, тоді $x=0$ – точка розриву 2-го роду.

Для точки $x=3$ ліва границя $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-0} x=3$ і права також $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+0} 3=3$, тобто $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=f(3)=3$, відповідно, точка $x=3$ є точкою неперервності.

Точки $x_n=\pi n;\ n=-1;-2;\ldots$, які не входять в ОДЗ функції, теж є точками розриву 2-го роду (рис. 3.3.1):

$$\lim_{x\to \pi n-0} f(x)=\lim_{x\to \pi n-0}(-\operatorname{ctg} x)=+\infty,\ \lim_{x\to \pi n+0} f(x)=\lim_{x\to \pi n+0}(-\operatorname{ctg} x)=-\infty,\ n\in\mathbb{Z}_-.$$

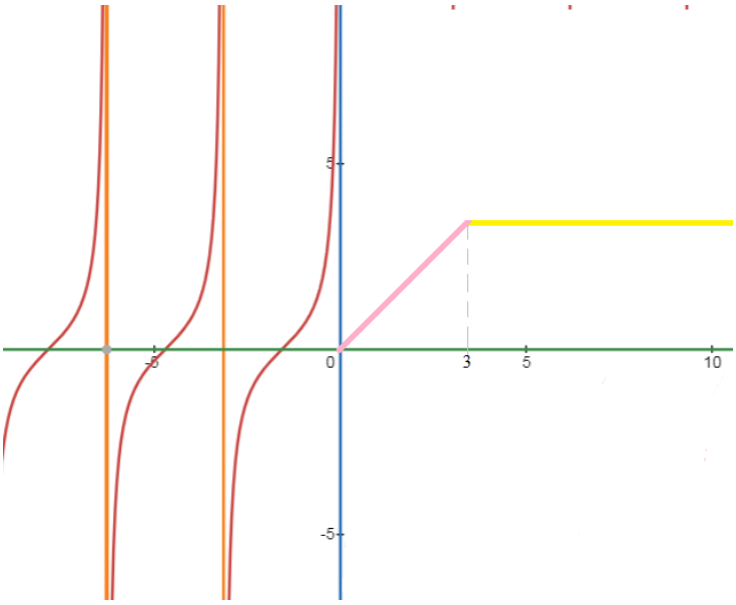


Рис. 3.3.1. Графік функції, точки розриву

Відповідь. $x=0, x_n=\pi n;\ n=-1;-2;\ldots$, –точки розриву 2-го роду.

б) Точки $x_1=0,\ x_2=2$ не належать ОДЗ функції (рис. 3.3.2). Вони є точками розриву другого роду:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} f(x)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{2-x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{2-x}=-\infty,$$

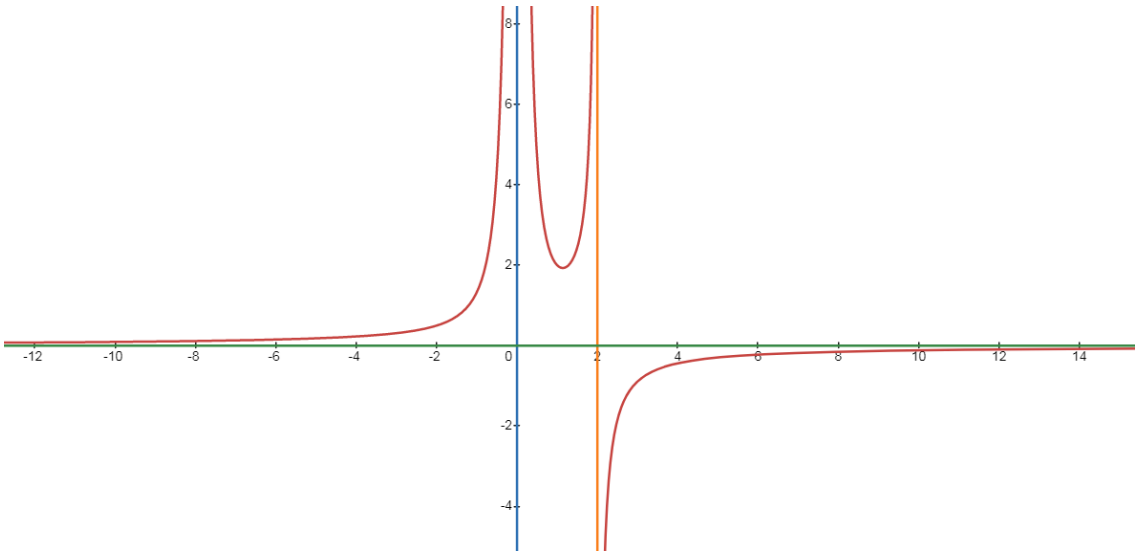


Рис. 3.3.2. Графік функції $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2-x}$

Відповідь. $x=0, x=2$ –точки розриву 2-го роду.

Зауваження. На рис. 3.3.3 показано побудову графіка завдання 3.3 а) за допомогою використання умовного оператора в програмному пакеті Excel.

B107 =IF(A107<=0;-COT(A107);IF(A107<=3;A107;3))

	A	B
94	-10	1,542351045
95	-9,9	1,943434744
96	-9,8	2,538824718
97	-9,7	3,541222629
98	-9,6	5,648517393
99	-9,44	65,6891463
100	-9,4	-40,3501867
101	-9,3	-7,97259991
102	-9,2	-4,37365515
103	-9,1	-2,96999833
104	-9	-2,21084541
105	-8,9	-1,72734368
106	-8,8	-1,38668007
107	-8,7	-1,12923287
108	-8,6	-0,92418672
109	-8,5	-0,75394066
110	-8,4	-0,6076402
111	-8,3	-0,47815375
112	-8,2	-0,36052285
113	-8,1	-0,25110497
114	-8	-0,14706506
115	-7,9	-0,04605088
116	-7,8	0,05403413
117	-7,7	0,155210274

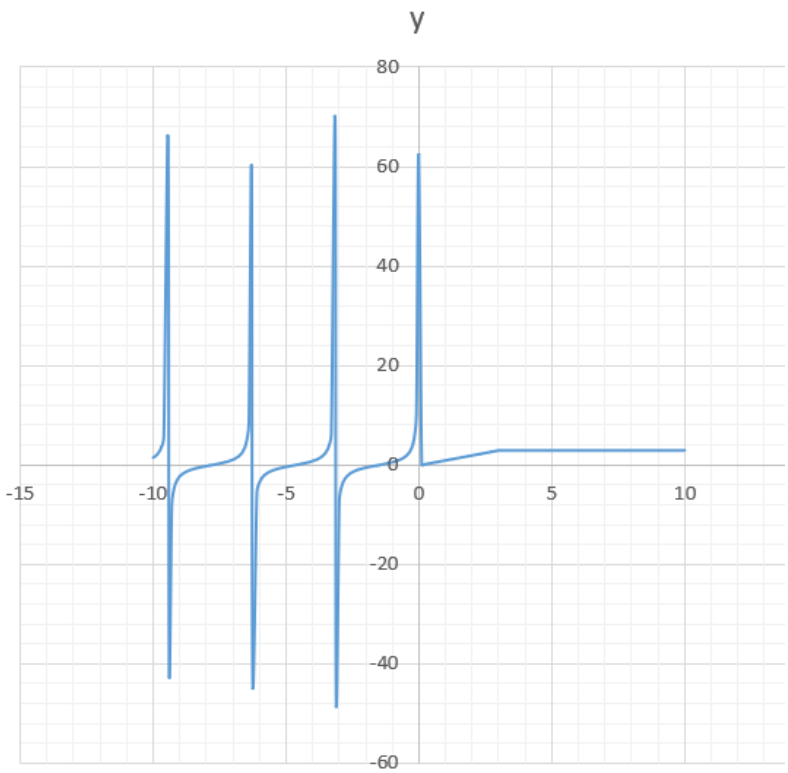


Рис. 3.3.3. Побудова графіка з умовним оператором

3.4. Знайти похідну:

а) $y = 5^{-2x} \cdot \sin^3 x - \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1};$ б) $y = \lg \operatorname{tg} \ln x + \sqrt{\cos \dfrac{\pi}{12} x}.$

Розв'язування.

а) Знайдемо похідну від алгебраїчної суми як алгебраїчну суму похідних доданків, далі похідну за основним правилом добутку, правилом частки для другого доданку. Також враховуємо правило диференціювання складеної функції.

$$y' = \left(5^{-2x}\right)' \cdot \sin^3 x + 5^{-2x} \cdot (\sin^3 x)' -$$

$$- \frac{(x^2 - x + 1)' \cdot (x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1) \cdot (x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)^2} =$$

$$= 5^{-2x} \cdot (-2) \cdot \ln 5 \cdot \sin^3 x + 5^{-2x} \cdot 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x -$$

$$- \frac{(2x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1) \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} =$$

$$= 5^{-2x} \sin^2 x \cdot (3\cos x - 2\ln 5 \sin x) - \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

б) $y' = (\lg \operatorname{tg} \ln x)' + \left(\sqrt{\cos \dfrac{\pi}{12} x}\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(\ln x) \cdot \ln 10 \cdot \cos^2 (\ln x) \cdot x} - \dfrac{\dfrac{\pi}{12} \sin\left(\dfrac{\pi}{12} x\right)}{2\sqrt{\cos \dfrac{\pi}{12} x}}.$

Відповідь. а) $5^{-2x} \sin^2 x \cdot (3\cos x - 2\ln 5 \sin x) - \dfrac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$;

б) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}(\ln x) \cdot \ln 10 \cdot \cos^2 (\ln x) \cdot x} - \dfrac{\dfrac{\pi}{12} \sin\left(\dfrac{\pi}{12} x\right)}{2\sqrt{\cos \dfrac{\pi}{12} x}}.$

3.5. Знайти y''_{xx} від параметрично заданої функції: $\begin{cases} x = c\text{h}t, \\ y = \sqrt[3]{\text{sh}^2 t}. \end{cases}$

Розв'язування.

Знайдемо похідну за формулою обчислення похідної від параметрично заданої функції $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in T, \end{cases}$ яка має вигляд: $y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$. Другу похідну y''_{xx} знайдемо за формулою

$$y''_{xx} = y''(x) = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

$$x'_t = \operatorname{sh} t;\ y'_t = \frac{2}{3}\operatorname{sh}^{-\frac{1}{3}} t \cdot \operatorname{ch} t;\ y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{2}{3}\operatorname{sh}^{-\frac{1}{3}} t \cdot \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} = \frac{2}{3} \cdot \operatorname{ch} t \cdot \operatorname{sh}^{-\frac{4}{3}} t;$$

Обчислюємо $(y'_x)'_t$:

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{2}{3}\operatorname{ch} t\right)' \cdot \operatorname{sh}^{-\frac{4}{3}} t + \frac{2}{3}\operatorname{ch} t \cdot \left(\operatorname{sh}^{-\frac{4}{3}} t\right)' = \left(\frac{2}{3}\operatorname{sh} t\right) \cdot \operatorname{sh}^{-\frac{4}{3}} t + \frac{2}{3}\operatorname{ch} t \cdot \left(-\frac{4}{3}\operatorname{sh}^{-\frac{7}{3}} t \cdot \operatorname{ch} t\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\operatorname{sh}^{-\frac{1}{3}} t - \frac{8}{9}\operatorname{ch}^2 t \cdot \operatorname{sh}^{-\frac{7}{3}} t.$$

Тоді

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{2}{3}\operatorname{sh}^{-\frac{1}{3}} t - \frac{8}{9}\operatorname{ch}^2 t \cdot \operatorname{sh}^{-\frac{7}{3}} t}{\operatorname{sh} t} = \frac{2}{3}\operatorname{sh}^{-\frac{4}{3}} t\left(1 - \frac{4}{3}\operatorname{ch}^2 t \cdot \operatorname{sh}^{-2} t\right) = \frac{2}{3}\operatorname{sh}^{-\frac{4}{3}} t\left(1 - \frac{4}{3}\operatorname{cth}^2 t\right).$$

Відповідь. $\begin{cases} y''_{xx} = \dfrac{2}{3}\operatorname{sh}^{-\frac{4}{3}} t\left(1 - \dfrac{4}{3}\operatorname{cth}^2 t\right), \\ x(t) = \operatorname{ch} t. \end{cases}$

3.6. Знайти похідну вказаного порядку: $y = \dfrac{\log_3 x}{x^2}$, $y^{IV} = ?$

Розв'язування.

Обчислимо похідну заданого порядку, застосовуючи наступну теорему:

Теорема *(формула Лейбніца). Якщо функції* $u(x)$ *й* $v(x)$ *мають у точці* x *похідні* n*-го порядку, то функція* $u(x) \cdot v(x)$ *також* n *раз диференційована в цій точці, причому*

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)},$$

де C_n^k *–число сполучень із* n *елементів по* k.

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{k!} \qquad 1 \le k \le n$$

і за означенням $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$, $C_n^0 = 1$.

Покладемо $u = \log_3 x, v = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$. Для похідної 4-го порядку формула Лейбніца має вигляд:

$$y^{IV} = (u \cdot v)^{IV} = u^{IV} \cdot v + 4u''' \cdot v' + 6u'' \cdot v'' + 4u' \cdot v''' + u \cdot v^{IV}.$$

Обчислюємо похідні функцій $u(x)$, $v(x)$ до четвертого порядку включно.

$$u = \log_3 x, u' = \frac{1}{x \ln 3} = \frac{1}{\ln 3} x^{-1}, u'' = -\frac{1}{\ln 3} x^{-2}, u''' = \frac{2}{\ln 3} x^{-3}, u^{IV} = -\frac{6}{\ln 3} x^{-4};$$

$$v = \frac{1}{x^2} = x^{-2}, v' = -2x^{-3}, v'' = 6x^{-4}, v''' = -24x^{-5}, v^{IV} = 120x^{-6}.$$

Отже, за формулою

$$y^{IV} = (u \cdot v)^{IV} = \left(\frac{\log_3 x}{x^2}\right)^{IV} = -\frac{6}{\ln 3} x^{-4} \cdot x^{-2} + 4 \cdot \frac{2}{\ln 3} x^{-3} \cdot \left(-2x^{-3}\right) + 6 \cdot \left(-\frac{1}{\ln 3} x^{-2}\right) \cdot 6x^{-4} +$$

$$+4 \cdot \left(\frac{1}{\ln 3} x^{-1}\right) \cdot \left(-24x^{-5}\right) + \log_3 x \cdot 120x^{-6} =$$

$$= \frac{x^{-6}}{\ln 3}(-6-16-36-96) + 120x^{-6} \log_3 x = \frac{120}{x^6} \log_3 x - \frac{154}{x^6}.$$

Зауваження. Для даного порядку похідної можна і безпосередньо її обчислювати і переконатись, що результати співпадають.

Представимо функцію в такому вигляді:

$$y = x^{-2} \cdot \log_3 x = x^{-2} \cdot \frac{\ln x}{\ln 3} = \frac{1}{\ln 3}(x^{-2} \cdot \ln x).$$

$$y' = \frac{1}{x^3 \ln 3} - \frac{2 \ln x}{x^3 \ln 3}; \; y'' = \frac{6 \ln x}{x^4 \ln 3} - \frac{5}{x^4 \ln 3};$$

$$y''' = \frac{26}{x^5 \ln 3} - \frac{24 \ln x}{x^5 \ln 3};\ y^{IV} = \frac{120 \ln x}{x^6 \ln 3} - \frac{154}{x^6 \ln 3}.$$

Відповідь. $\frac{120}{x^6} \log_3 x - \frac{154}{x^6}$.

3.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \operatorname{tg} 2x$ в точці з абсцисою $x_0 = 0$.

Розв'язування. Рівняння дотичної до графіка функції $y = y(x)$ в точці (x_0, y_0):

$$y - y(x_0) = y'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

рівняння нормалі: $y - y(x_0) = \frac{-1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0)$.

Обчислюємо:

$$y' = \left(\operatorname{tg} 2x\right)' = \frac{2}{\cos^2 2x} \quad \Rightarrow \quad y'(0) = \frac{2}{\cos^2 0} = 2.$$

$$y(x_0) = \operatorname{tg}(2 \cdot x_0) = \operatorname{tg} 0 = 0.$$

Отже, рівняння дотичної: $y - 0 = y'(0) \cdot (x - 0)$ або $y = 2x$.

Рівняння нормалі: $y - 0 = \frac{-1}{2} \cdot (x - 0) \quad \Rightarrow y = \frac{-1}{2} x.$

Відповідь. $y = 2x$, $y = \frac{-1}{2} x.$

3.8. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x - 3}{(x - 2)^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язування.

Загальна схема дослідження функції

Розглянемо загальну схему дослідження функції $y = f\left(x\right)$ та побудови її графіка. Вона складається з наступних етапів.

1. Знайти область визначення функції.

2. Якщо функція має точки розриву, то з'ясувати їх характер, а також дослідити поведінку функції на межах області визначення (скінченних чи нескінченних). Знайти асимптоти функції (вертикальні, горизонтальні, похилі).

3. Дослідити функцію на парність.

4. Дослідити функцію на періодичність.

5. Знайти нулі функції (корені рівняння $f(x)=0$) та інтервали знакосталості функції (інтервали, на яких функція зберігає знак: є додатною або від'ємною). Область визначення розбивається на інтервали знакосталості нулями та точками розриву функції.

6. Знайти локальні екстремуми та проміжки зростання та спадання функції.

7. Знайти проміжки, на яких графік функції зберігає напрям опуклості, а також точки перегину графіка.

За результатами виконаного дослідження побудувати графік.

1. ОДЗ: $x-2\neq 0,\ x\neq 2.$

2. Точка розриву цієї функції – $x=2.$ Знайдемо правосторонню та лівосторонню границі функції в цій точці.

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x-3}{(x-2)^2}=-\infty,\quad \lim_{x\to 2-0}\frac{x-3}{(x-2)^2}=-\infty.$$

Отже, точка $x=2$ є точкою розриву другого роду. Тоді функція має вертикальну асимптоту $x=2.$ Функція також має горизонтальну асимптоту $y=0$, оскільки

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-3}{(x-2)^2}=0.$$

3. Функція є ні парною, ні непарною.

$$y(-x)=\frac{-x-3}{(x-2)^2}\neq y(x).$$

4. Функція неперіодична.

5. Нуль функції: $x=3, y=0.$ Для $x>3\Rightarrow y>0,$ а для $x<3, x\neq 2\Rightarrow y<0.$

6. Проведемо дослідження за допомогою першої похідної функції.

Теорема. **(Необхідна умова локального екстремуму)**. *Якщо функція* $f(x)$ *має у точці* x_0 *локальний екстремум та диференційована у цій точці, то* $f'(x_0)=0$.

Внутрішні точки області визначення функції, в яких похідна функції дорівнює нулю, називають стаціонарними. Критичні точки – це точки, в яких похідна функції рівна нулю, або не існує.

Теорема. (Перша достатня умова локального екстремуму*). Нехай функція визначена у точці* x_0 *– критична точка функції* $f(x)$*, неперервної у цій точці, і нехай існує окіл* $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ *точки* x_0*, у якому функція має похідну* $f'(x)$*, можливо, крім самої точки* x_0*, тоді:*

1) якщо у інтервалі $(x_0-\delta; x_0)$ *похідна* $f'(x)>0$*, а у інтервалі* $(x_0; x_0+\delta)$ $f'(x)<0$*, то* x_0 *є точкою локального максимуму функції* $f(x)$*;*

2) якщо у інтервалі $(x_0-\delta; x_0)$ *похідна* $f'(x)<0$*, а у інтервалі* $(x_0; x_0+\delta)$ $f'(x)>0$*, то* x_0 *є точкою локального мінімуму функції* $f(x)$*;*

3) *якщо у обох інтервалах* $(x_0-\delta; x_0)$ *і* $(x_0; x_0+\delta)$ *похідна* $f'(x)$ *має той самий знак, то* x_0 *не є точкою екстремуму функції* $f(x)$.

З теорем випливає наступне правило дослідження функції на екстремум. Щоб знайти локальні екстремуми функції $f(x)$, треба:

1) знайти критичні точки функції $f(x)$;

2) відзначити їх у області визначення функції;

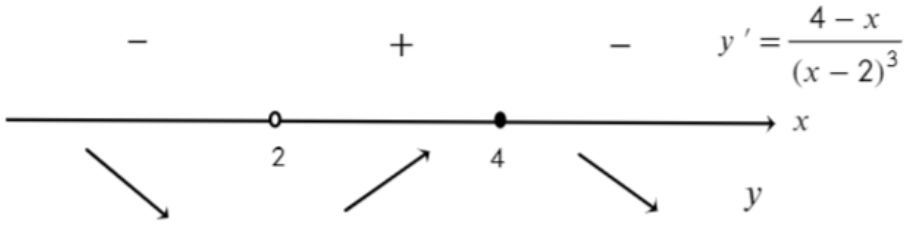
3) дослідити знак похідної на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення критичними точками;

4) за зміною знаку $f'(x)$ при переході через критичні точки зліва направо визначити точки максимумів та мінімумів і обчислити значення функції у цих точках.

Обчислюємо похідну:

$$y' = \frac{(x-2)^2 - 2(x-2)(x-3)}{(x-2)^4} = \frac{4-x}{(x-2)^3}.$$

Критичні точки функції: $x = 4,\ x = 2.$



При $x < 2$ та при $x > 4$ функція спадає $(y' < 0)$, а при $x \in (2,4)$ – зростає $(y' > 0)$. Отже, $x = 2$ є точкою, де похідна змінює свій знак, але в цій точці ні похідна, ні сама функція не існують, тому вона не є екстремальною точкою. В околі точки $x = 4$ відбувається зміна знака похідної та вона належить ОДЗ. Отже, $x = 4$ є точкою максимуму функції, $y(4) = \frac{1}{4}.$

7. Проведемо дослідження за допомогою другої похідної функції.

Означення. Точку на графіку функції $y = f(x)$, що відокремлює його частини з різною випуклістю, називають *точкою перегину*.

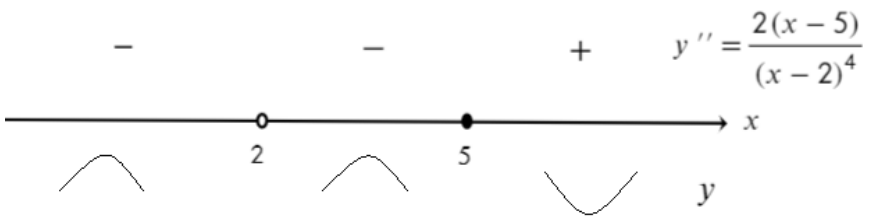
Для знаходження точок перегину графіка функції використовують наступну теорему.

Теорема. **(Достатня умова існування точок перегину***). Нехай x_0 – точка області визначення функції, у якій $f''(x)$ дорівнює нулю, або не існує. Якщо при переході через цю точку друга похідна $f''(x)$ змінює свій знак, то точка графіка функції $y = f(x)$ з абсцисою x_0 є точкою перегину.*

Якщо $f''(x) < 0$, то графік функції опуклий вгору, а для $f''(x) > 0$ графік функції опуклий вниз.

$$y'' = \frac{-(x-2)^3 - 3(x-2)^2(4-x)}{(x-2)^6} = \frac{2x-10}{(x-2)^4} = \frac{2(x-5)}{(x-2)^4}.$$

Особливими точками є точки $x = 2,\ x = 5.$



При $x \in (-\infty;2) \cup (2;5)$, $y'' < 0$. На цьому проміжку функція опукла вгору. При $x \in (5;\infty)$, $y'' > 0$, тобто функція опукла вниз. Точка $x = 5$ є точкою перегину графіка функції, $y(5) = \frac{2}{9}$.

На основі проведеного дослідження будуємо графік функції (рис. 3.8.1).

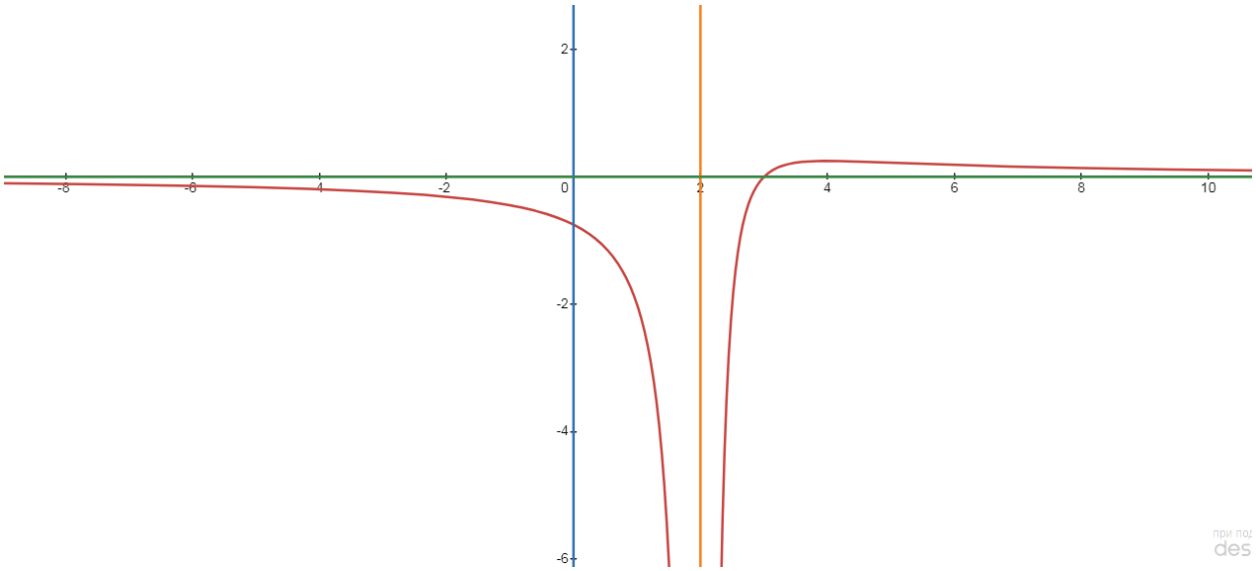


Рис. 3.8.1. Графік функції $y = \frac{x-3}{(x-2)^2}$.

Варіанти завдань для підготовки до модульних контрольних робіт

Елементи лінійної алгебри

Ззавдання (1) для МКР ***«Елементи лінійної алгебри»***

Варіант 1

1. Означення визначника 3-го порядку, його застосування до розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

2. Методом Крамера розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ x + 5y - 4z = -5, \\ 4x + y - 3z = -4. \end{cases}$$

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 3 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Означити добуток матриць і виконати дію $A \cdot B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 2

1. Алгебраїчні доповнення у визначнику 3-го порядку та властивості визначника, які пов'язані з ними.

2. Методом Гаусса розв'язати систему

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 2x + 4y + 6z = 4, \\ 3x + y - z = 1. \end{cases}$$

3. Розв'язати рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Означити добуток матриць і виконати дію $A \cdot B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Варіант 3

1. Визначник 3-го порядку, його основні властивості.

2. Розв'язати систему матричним способом

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ x - 2y + 4z = 1, \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$$

3. Знайти обернену матрицю A^{-1}, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Означити добуток матриць і виконати дію $A \cdot B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 4

1. Правила Крамера розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

2. Методом Гаусса розв'язати систему

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 2, \\ x + 5y - 8z = -5, \\ 4x + y - 6z = -4. \end{cases}$$

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Означити добуток матриць і виконати дію $A \cdot B$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Варіант 5

1. Метод Гаусса розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

2. Методом Крамера розв'язати систему

$$\begin{cases}2x-4y+4z=1,\\ x-2y+4z=3,\\ 3x-y+5z=2.\end{cases}$$

3. Знайти обернену матрицю A^{-1}, якщо

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

4. Означити добуток матриць і виконати дію $A\cdot B$, якщо $A=\begin{pmatrix}0 & -2\end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}.$$

Варіант 6

1. Дослідження систем лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь.

2. Розв'язати систему матричним способом

$$\begin{cases}2x-y+z=2,\\ 3x+2y+2z=-2,\\ x-2y+z=1.\end{cases}$$

3. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\\ -2 & 1 & -3 & -5\end{pmatrix}$.

4. Означити добуток матриць і виконати дію $A\cdot B$, якщо $A=\begin{pmatrix}7 & 4 & 2\\ 6 & -3 & 5\end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}.$$

Варіант 7

1. Матриці, їх класифікація.

2. Методом Гаусса розв'язати систему

$$\begin{cases} x-2y+z=4, \\ 2x-3y-z=3, \\ 4x-y+z=11. \end{cases}$$

3. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Означити добуток матриць і виконати дію $A \cdot B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Варіант 8

1. Ранг матриці і його обчислення.

2. Розв'язати систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0, \\ x+2y-5z=0, \\ 3x+y-2z=0. \end{cases}$$

3. Знайти обернену матрицю A^{-1}, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Означити добуток матриць і виконати дію $A \cdot B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Варіант 9

1. Дії над матрицями.

2. Методом Гаусса розв'язати систему

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + 2z = -1, \\ 4x + y - 4z = -2. \end{cases}$$

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Означити добуток матриць і знайти B^2, якщо $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Варіант 10

1. Матричний спосіб розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

2. Розв'язати систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 0, \\ x - y + 4z = 0, \\ 5x + 2y + 10z = 0. \end{cases}$$

3. Знайти обернену матрицю A^{-1}, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Означити добуток матриць і виконати дію $A \cdot B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповіді.

Варіант 1. **2.** $(5,6,10)$. **3.** $r = 2$. **4.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 6 & 9 & -3 \\ -10 & -15 & 5 \end{pmatrix}$.

Варіант 3. **2.** $\left(\frac{9}{25},\frac{2}{25},\frac{1}{5}\right)$**. 3.** $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$**. 4.** $\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix}$**.**

Варіант 7. **2.** $\left(\frac{7}{3},0,\frac{5}{3}\right)$**. 3.** $\begin{pmatrix}7 & -2\\ 10 & -2\\ -11 & 4\end{pmatrix}$**. 4.** (15).

Завдання (2) для МКР ***«Елементи лінійної алгебри»***

Варіант 1

1. Означення визначника 2-го порядку, його властивості.

2. Методом Гаусса розв'язати систему $\begin{cases}x+5y-4z=-5,\\ 2x-3y+z=2,\\ 4x+y-3z=-4.\end{cases}$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}2 & 1 & 11 & 2\\ 1 & 0 & 4 & -1\\ 11 & 4 & 56 & 5\\ 3 & 0 & 12 & -3\end{pmatrix}$.

4. Розв'язати рівняння

$$X\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Варіант 2

1. Мінори та алгебраїчні доповнення. Визначники 3-го порядку, їх властивості.

2. Методом Гаусса дослідити систему $\begin{cases}x+2y+3z=0,\\ 2x+4y+6z=4,\\ 3x+y-z=1.\end{cases}$

3. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 2\\ 3 & 7 & 3\end{pmatrix}$.

4. Розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 3

1. Визначники 3-го порядку, їх властивості.

2. Методом Гаусса розв'язати систему $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$

3. Знайти обернену матрицю A^{-1}, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Варіант 4

1. Мінори та алгебраїчні доповнення. Визначники 3-го порядку, їх властивості.

2. Методом Гаусса дослідити систему $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 0, \\ x + 5y - 8z = -5, \\ 4x + y - 6z = -4. \end{cases}$

3. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Варіант 5

1. Обернена матриця, її обчислення.

2. Методом Крамера розв'язати систему $\begin{cases} 2x - 4y + 4z = 2, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$

3. Знайти A^{-1}, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Знайти $2A$-$3B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 6

1. Матриці, види матриць.

2. Методом Гаусса дослідити систему $\begin{cases} 2x-y+z=2, \\ 3x+2y+2z=-2, \\ x-2y+z=1. \end{cases}$

3. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.

4. Розв’язати рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 7

1. Матриці, лінійні операції над матрицями.

2. Методом Гаусса розв’язати систему $\begin{cases} x-2y+z=4, \\ 2x+3y-z=3, \\ 4x-y+z=11. \end{cases}$

3. Знайти обернену матрицю A^{-1}, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Знайти AB-A, якщо

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 8

1. Матриці, множення матриць.

2. Методом Гаусса дослідити систему $\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ 2x-y+3z=0, \\ x+y-z=0. \end{cases}$

3. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Варіант 9

1. Ранг матриці, його обчислення.

2. Методом Крамера розв'язати систему $\begin{cases} x+2y+3z=5, \\ 2x-y-z=1, \\ x+3y+4z=6. \end{cases}$

3. Знайти A^{-1}, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти $2A+4B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 10

1. Матричне розв'язання лінійних систем.

2. Методом Гаусса дослідити систему $\begin{cases} 2x-y+3z=0, \\ x+2y-5z=0, \\ 3x+y-2z=0. \end{cases}$

3. Знайти A^{-1}, зробити перевірку, якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Обчислити $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповіді.

Варіант 1. **2.** (5; 6; 10). **3.** $r(A)=2$. **4.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Варіант 2. **2.** Несумісна. **3.** $r(A)=2$. **4.** $\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 25 & 8 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}$.

Варіант 3. **2.** (-1; 0; 1). **3.** $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

Завдання для МКР ***«Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії»***

Завдання (1) для технічних спеціальностей

Варіант 1

1. Рівняння площини, що проходить через точку і має вказаний вектор нормалі.

2. Записати рівняння площини, яка проходить через вісь *OX* та точку (1; 2; -3).

3. Знайти проекцію точки (2; 3; 4) на пряму $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$.

4. Задані точки $P(2;3)$, $Q(-1;0)$. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку Q, перпендикулярно до відрізка PQ.

5. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, та її рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$, а відстань між фокусами $2c=26$.

Варіант 2

1. Рівняння прямої в просторі, що проходить через вказану точку та має відомий напрямний вектор.

2. Записати рівняння площини (в загальному вигляді), яка відтинає на осях координат відрізки довжиною 2, -3, -4.

3. Записати рівняння перпендикуляра до площини $x+3y-4z=13$, який проходить через точку (2; -1; 3) та визначити координати основи даного перпендикуляра.

4. Вивести рівняння геометричного місця точок, відхилення яких від прямої $8x-15y-25=0$ дорівнює 2.

5. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат та відстань між директрисами $\frac{8}{3}$ і ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{2}$.

Варіант 3

1. Неповні рівняння площини у просторі.

2. Знайти відстань від точки $A(1;\ -1;\ 2)$ до площини $4x-4y+2z+30=0.$ Яке взаємне розміщення точки, початку координат та площини?

3. Знайти гострий кут між двома прямими $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{2}$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{2}$.

4. Знайти проекцію точки $P(-8;12)$ на пряму, яка проходить через точки $A(2;-3)$ та $B(-5;1).$

5. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат та відстань між директрисами 32 і ексцентриситет $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

Варіант 4

1. Рівняння площини у відрізках. Побудова площин.

2. Написати рівняння площини, якщо точка (2; 1; -3) є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на шукану площину.

3. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{5}$ з площиною $x+2y-2z-4=0.$

4. Знайти відстань між паралельними прямими $3x-4y-10=0,\quad 6x-8y+5=0.$

5. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ординат, симетрично відносно початку координат та відстань між директрисами $10\frac{2}{3}$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{4}$.

Варіант 5

1. Нормальне рівняння площини в просторі.

2. Записати рівняння площини, паралельної осі OZ, яка проходить через точки (1; 0; 1) та (-2; 1; 3).

3. Знайти напрямні косинуси прямої $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$.

4. Довести, що пряма $2x+y+3=0$ перетинає відрізок, обмежений точками (-5; 1) і (3; 7).

5. Визначити і описати криву $y = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

Варіант 6

1. Обчислення відстані від точки до прямої в просторі.

2. Знайти відстань між паралельними площинами $x-y+z-1=0$ і $2x-2y+2z-6=0$.

3. Знайти пряму, яка проходить через точку (1; -3; 2) та є перпендикулярною до прямих $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$, $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+3}{-5}$.

4. Дані послідовні вершини опуклого чотирикутника $A(-3;1)$, $B(3;9)$, $C(7;6)$ та $D(-2;-6)$. Знайти точку перетину його діагоналей.

5. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ординат, симетрично відносно початку координат та відстань між фокусами 24, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

Варіант 7

1. Відстань та відхилення точки від площини.

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку (-1; 3; 7) та координатну вісь OY.

3. Знайти координати основи A перпендикуляра до площини $x-3y+4z+5=0$, який проходить через точку (2; 1; -1).

4. Через точку (-4; 2) провести пряму, яка перпендикулярна до прямої $2x-3y=6=0.$

5. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо вона симетрична відносно осі OX і проходить через точку (2; 4).

Варіант 8

1. Пряма, яка проходить через дві вказані точки.

2. Через точку $P(1;-1;3)$ провести площину, перпендикулярно до площин $x-2y-23=0,\quad 3x+2y-z-1=0.$

3. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку (-1; 2; -2) і паралельна до прямої $\begin{cases} x-y=2, \\ y-2z=1 \end{cases}$.

4. Задано вершини трикутника $A(1;2)$, $B(2;3)$, $C(-1;-1)$. Скласти рівняння його висоти AD та обчислити її довжину.

5. Визначити і описати криву $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1.$

Варіант 9

1. Умова мимобіжності двох прямих.

2. Знайти відстань між площинами $2x+2y-z-15=0$ і $4x+4y-2z+11=0.$

3. Знайти проекцію точки (3; 1; -1) на площину $x+2y+3z-30=0.$

4. Задано рівняння двох сторін прямокутника $3x-2y-5=0,\quad 2x+3y+7=0$ і одну з його вершин $A(-2;1)$. Обчислити площу цього прямокутника.

5. Фокуси гіперболи збігаються з фокусами еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$ Скласти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет дорівнює 2.

Варіант 10

1. Рівняння площини, яка проходить через три вказані точки.

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат і точку (2; 1; -1) та є перпендикулярною до площини $2x-3z=0.$

3. Записати параметричні рівняння прямої, яка проходить через точки $A(3;-1;4)$ та $B(1;1;2)$.

4. Знайти відстань та відхилення точки $M_0(1;-3)$ від прямої $5x-12y+52=0$.

5. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо вона симетрична відносно осі *OX* і проходить через точку (-4; -2).

Відповіді.

***Варіант 2*. 2.** $6x-4y-3z-12=0$. **3.** $M_0(3;2;-1)$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-4}$.

4. $8x-15y+59=0$. **5.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

***Варіант 4*. 2.** $2x+y-3z-14=0$. **3.** $M_0(-2;0;-3)$. **4.** $d=5/2$.

5. $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$.

***Варіант 7*. 2.** $7x+z=0$. **3.** $M_0(2;1;-1)$. **4.** $3x+2y+8=0$. **5.** $y^2=8x$.

Завдання (2)для МКР ***«Елементи аналітичної і векторної алгебри»***

Варіант 1

1. Мішаний добуток трьох векторів, його означення, властивості.

2. Дані вектори $\vec{a}=\{2;-1,2\}$, $\vec{b}=\{1;2,-3\}$, $\vec{c}=\{3;-4,7\}$. Обчислити $\vec{a}\times\vec{b}+2\vec{c}$.

3. Знайти кут між прямою $x=1+t$, $y=-3+\sqrt{2}\,t$, $z=3-t$ та площиною, яка проходить через точку $P(2;3,-5)$, перпендикулярно прямій $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+4}{2}$

4. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо $b=15$, $F(-10,0)$.

Варіант 2

1. Геометрична властивість мішаного добутку трьох векторів.

2. Обчислити мішаний добуток векторів $\vec{a}=\{2;-1,-1\}$, $\vec{b}=\{1;3,-1\}$, $\vec{c}=\{1;1,4\}$.

3. Знайти кут між площиною, яка проходить через точку $P(4;0,-1)$ паралельно прямим $\frac{x}{3}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-2}{-1}$, $\frac{x-7}{1}=\frac{y+8}{-2}=\frac{z}{1}$ і площиною $8x+y-z=0$.

4. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо $a=13, e={}^{14}\!/_{13}$.

Варіант 3

1. Вираз мішаного добутку трьох векторів через координати.

2. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}=\{2;-1,2\}$, $\vec{b}=\{1;2,-3\}$.

3. Знайти кут між прямими $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ та $\begin{cases}x+y-z=0,\\ x-y-5z=8.\end{cases}$

4. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо D: $x=-4$.

Варіант 4

1. Знайти кут між двома площинами, умова перпендикулярності площин.

2. Перевірити, що точки $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$, $D(1;5;0)$ належать одній площині і обчислити площу чотирикутника *ABCD*.

3. Знайти кут між прямою $\begin{cases}x+y-z=0,\\ x-y-5z=8\end{cases}$ та площиною $x+3y-2z=0$

4. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо $b=2$, $F\left(4\sqrt{2},0\right)$.

Варіант 5

1. Знайти кут між прямою і площиною, умова перпендикулярності прямої та площини.

2. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, $D(3;7;2)$.

3. Знайти кут між прямою $\begin{cases}x=3t-2,\\ y=0,\\ z=-t+3\end{cases}$ та прямою, яка проходить через точки $A(-1;0;-3)$, $B(-3;0;-4)$.

4. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо $a=7$, $e=\sqrt{85}/7$.

Варіант 6

1. Еліпс, його канонічне рівняння, властивості.

2. Обчислити об'єм паралелепіпеда з вершинами $A(5;1;-4)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;3;-4)$, $D(2;2;2)$.

3. Знайти кут між площиною $3x-4z+10=0$ і площиною, яка відтинає на осях відрізки $a=1, b=2, c=3$.

4. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо $D: x=5$.

Варіант 7

1. Гіпербола, її канонічне рівняння, асимптоти.

2. Перевірити чи компланарні вектори $\vec{a}=\{2;3,-1\}$, $\vec{b}=\{1;-1,3\}$, $\vec{c}=\{1;9,-11\}$.

3. Знайти кут між прямою $\begin{cases} x=t+5, \\ y=-4t-1, \\ z=t-4 \end{cases}$ та прямою, яка проходить через точку C(-3,-2,6), перпендикулярно площині $3y-4z=5$.

4. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо $a=11$, $e=\sqrt{57}/11$.

Варіант 8

1. Знайти кут між двома площинами, умова паралельності площин.

2. Чи лежать точки $A(5;7;-2)$, $B(-3;1;-1)$, $C(-9;4;-4)$, $D(1;5;0)$ в одній площині?

3. Знайти кут між прямою, яка проходить через точку $D(-9;7;8)$, перпендикулярно площині $x+5y-z=7$, і площиною $7x-y-5z=0$.

4. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо $b=2\sqrt{10}$, $F(-11,0)$.

Варіант 9

1. Парабола, її канонічне рівняння, властивості.

2. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами $A(2;2;2)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;4)$, $D(5;5;6)$.

3. Вершини трикутника – точки $A(-2;3;0)$, $B(0;1;0)$, $C(4;5;2)$. Знайти кут між медіаною трикутника BD та прямою $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{1}$.

4. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо $D: x = -2$.

Варіант 10

1. Коло, його канонічне рівняння, означення.

2. Чи компланарні вектори $\vec{a} = \{2; -1; -1\}$, $\vec{b} = \{1; 3; -1\}$, $\vec{c} = \{1; 1; 4\}$?

3. Знайти кут між площиною, яка проходить через точки $A(3; -1; 2)$, $B(4; -1; 1)$, $C(2; 0; 2)$, та прямою $\begin{cases} x = -3t, \\ y = 3t + 5, \\ z = -t + 10. \end{cases}$

4. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо $b = 4$, $F(9, 0)$.

Відповіді.

Варіант 1. **2.** $(5; 0; 19)$. **3.** $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{6}$. **4.** $\frac{x^2}{\left(5\sqrt{13}\right)^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1$.

Варіант 2. **2.** 33. **3.** $\cos\varphi = \frac{5}{66}$. **4.** $\frac{x^2}{13^2} - \frac{y^2}{\left(3\sqrt{3}\right)^2} = 1$.

Варіант 3. **2.** $\frac{3}{2}\sqrt{10}$. **3.** $\varphi = 0$. **4.** $y^2 = 16x$.

Контрольна робота *(типові завдання)* ***з аналітичної геометрії***

Варіант 1

1. Доведіть, що вектори $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ утворюють базис і розкладіть вектор $\vec{x}$ за цим базисом: $\vec{x} = \{-2, 4, 7\}$, $\vec{p} = \{0, 1, 2\}$, $\vec{q} = \{1, 0, 1\}$, $\vec{r} = \{-1, 2, 4\}$.

2. Знайти відстань від точки M_0 до площини, що проходить через точки $M_1, M_2, M_3: M_1(-3, 4, -7)$, $M_2(1, 5, -4)$, $M_3(-5, -2, 0)$, $M_0(-12, 7, -1)$.

3. Написати канонічне рівняння прямої L, заданої загальним рівнянням, знайти кут між площинами, які перетинаються по прямій L:

$2x + y + z - 2 = 0, 2x - y - 3z + 6 = 0.$

4. Знайти точку перетину площини та прямої, знайти кут між прямою та площиною: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$, $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Варіант 2

1. Доведіть, що вектори $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ утворюють базис і розкладіть вектор $\vec{x}$ за цим базисом: $\vec{x}=\{6,12,-1\}$, $p=\{1,3,0\}$, $\vec{q}=\{2,-1,1\}$, $\vec{r}=\{0,-1,2\}$.

2. Знайти відстань від точки M_0 до площини, що проходить через точки M_1,M_2,M_3: $M_1(-1,2,-3)$, $M_2(4,-1,0)$, $M_3(2,1,-2)$, $M_0(1,-6,-5)$.

3. Написати канонічне рівняння прямої L, заданої загальним рівнянням , знайти кут між площинами, які перетинаються по прямій L: $x-3y+2z+2=0, x+3y+z+14=0.$

4. Знайти точку перетину площини та прямої, знайти кут між прямою та площиною: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5}, x+2y-5z+20=0.$

Варіант 3

1. Доведіть, що вектори $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ утворюють базис і розкладіть вектор $\vec{x}$ за цим базисом: $\vec{x}=\{1,-4,4\}$, $\vec{p}=\{2,1,-1\}$, $\vec{q}=\{0,3,2\}$, $\vec{r}=\{1,-1,1\}$.

2. Знайти відстань від точки M_0 до площини, що проходить через точки M_1,M_2,M_3: $M_1(-3,-1,1)$, $M_2(-9,1,-2)$, $M_3(3,-5,4)$, $M_0(-7,0,-1)$.

3. Написати канонічне рівняння прямої L, заданої загальним рівнянням , знайти кут між площинами, які перетинаються по прямій L: $x-2y+z-4=0, 2x+2y-z-8=0.$

4. Знайти точку перетину площини та прямої, знайти кут між прямою та площиною: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}, x-3y+7z-24=0.$

Варіант 4

1. Доведіть, що вектори $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ утворюють базис і розкладіть вектор $\vec{x}$ за цим базисом: $\vec{x}=\{-9,5,5\}$, $\vec{p}=\{4,1,1\}$, $\vec{q}=\{2,0,-3\}$, $\vec{r}=\{-1,2,1\}$.

2. Знайти відстань від точки M_0 до площини, що проходить через точки M_1,M_2,M_3: $M_1(1,-1,1)$, $M_2(-2,0,3)$, $M_3(2,1,-1)$, $M_0(-2,4,21)$.

3. Написати канонічне рівняння прямої L, заданої загальним рівнянням , знайти кут між площинами, які перетинаються по прямій L:

$x+y+z-2=0, x-y-2z+2=0.$

4. Знайти точку перетину площини та прямої, знайти кут між прямою та площиною: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2}$, $2x-y+4z=0.$

Варіант 5

1. Доведіть, що вектори $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ утворюють базис і розкладіть вектор $\vec{x}$ за цим базисом: $\vec{x}=\{-5,-5,5\}$, $\vec{p}=\{-2,0,1\}$, $\vec{q}=\{1,3,-1\}$, $\vec{r}=\{0,4,1\}$.

2. Знайти відстань від точки M_0 до площини, що проходить через точки M_1,M_2,M_3: $M_1(1,2,0)$, $M_2(1,-1,2)$, $M_3(0,1,-1)$, $M_0(2,-1,4)$.

3. Написати канонічне рівняння прямої L, заданої загальним рівнянням , знайти кут між площинами, які перетинаються по прямій L:

$2x+3y+z+6=0,\quad x-3y-2z+3=0.$

4. Знайти точку перетину площини та прямої, знайти кут між прямою та площиною: $\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0}$, $3x+y-5z-12=0.$

Варіант 6

1. Доведіть, що вектори $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ утворюють базис і розкладіть вектор $\vec{x}$ за цим базисом: $\vec{x}=\{13,2,7\}$, $\vec{p}=\{5,1,0\}$, $\vec{q}=\{2,-1,3\}$, $\vec{r}=\{1,0,-1\}$.

2. Знайти відстань від точки M_0 до площини, що проходить через точки M_1,M_2,M_3: $M_1(1,0,2)$, $M_2(1,2,-1)$, $M_3(2,-2,1)$, $M_0(-5,-9,1)$.

3. Написати канонічне рівняння прямої L, заданої загальним рівнянням , знайти кут між площинами, які перетинаються по прямій L:

$3x+y-z-6=0, 3x-y+2z=0.$

4. Знайти точку перетину площини та прямої, знайти кут між прямою та площиною: $\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}$, $x+3y-5z+9=0.$

Відповіді

Варіант 3. **1.** $\vec{x}=-\vec{p}+3\vec{r}$. **2.** 0. **3.** $\frac{x-4}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$, $\cos\varphi=1/\sqrt{6}$.

4. $M_0(0;-1;3)$, $\sin\varphi=1/\sqrt{1239}$.

Варіант 4. **1.** $\vec{x}=-\vec{p}-\vec{q}+3\vec{r}$. **2.** $142/\sqrt{101}$. **3.** $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{2}$, $\cos\varphi=\sqrt{2}/3$.

4. $M_0(2;0;-1), \sin\varphi = 10/\sqrt{105}$.

Варіант 5. **1.** $\vec{x} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$. **2.** $1/\sqrt{38}$. **3.** $\frac{x+3}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{9}$, $\cos\varphi = 4/7$.

4. $M_0(7;1;2), \sin\varphi = 2/\sqrt{70}$.

Завдання для МКР ***«Криві 2-го порядку на площині»***

Варіант 1

1. Записати рівняння лінії центрів двох кіл $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$, $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$.

2. На еліпсі $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ знайти точку, відстань якої від правого фокуса в чотири рази більша за відстань від лівого фокуса.

Варіант 2

1. Визначити тип кривої та зобразити цю криву графічно: $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$.

2. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \frac{2}{3}$, фокальний радіус точки M еліпса дорівнює 10. Обчислити відстань від точки M до односторонньої з цим фокусом директриси.

Варіант 3

1. Визначити тип кривої та зобразити цю криву графічно: $3x^2 + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$,

2. Знайти рівняння кола, описаного навколо трикутника з вершинами $A(7; 7)$, $B(0;8)$, $C(-2; 4)$.

Варіант 4

1. Визначити тип кривої та зобразити цю криву графічно: $x^2 + 3y^2 + 2x - 2y = 0$,

2. Записати рівняння кола з центром у точці (6; 7), що дотикається до прямої $5x - 12y = 24$.

Варіант 5

1. Визначити тип кривої та зобразити цю криву графічно: $x^2 + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0,$

2. В еліпс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ вписано правильний трикутник так, що одна з його вершин збігається з правим кінцем великої осі. Знайти координати двох інших вершин.

Варіант 6

1. Визначити тип кривої та зобразити цю криву графічно: $9x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0.$

2. Записати рівняння прямої, що дотикається до еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ у точці (2; – 3).

Варіант 7

1. Визначити тип кривої та зобразити цю криву графічно: $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$

2. Знайти рівняння тих дотичних до еліпса $3x^2 + 8y^2 = 45,$ відстань яких від центра еліпса дорівнює 3.

Варіант 8

1. Визначити тип кривої та зобразити цю криву графічно: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0.$

2. Гіпербола дотикається до прямої $x - y = 2$ у точці (4; 2). Скласти рівняння гіперболи.

Варіант 9

1. Визначити тип кривої та зобразити цю криву графічно: $4x^2 - y^2 - 8x + 4y - 1 = 0$

2. До параболи $y^2 = 12x$ провести дотичну, паралельно прямій $2x + y - 7 = 0.$

Варіант 10

1. Визначити тип кривої та зобразити цю криву графічно: $5x^2 - y^2 + 10x + 4y - 1 = 0$

2. Знайти кут між асимптотами гіперболи, в якої ексцентриситет $\varepsilon = 2$.

Відповіді.

***Варіант* 2. 1.** Коло: $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 11$. **2.** 15.

***Варіант 3.* 1.** $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 + \left(y+\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}$. **2.** *Вказівка:* радіус описаного навколо трикутника кола $R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$. Рівняння кола: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

***Варіант 6.* 1.** $\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{2}{9}} + \frac{(y+1)^2}{2} = 1$. **2.** $y = \frac{x}{2} - 4$.

Вступ до математичного аналізу. Похідні функції однієї змінної, їх застосування

Завдання для МКР ***«Вступ до математичного аналізу»***

Варіант 1

1. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{x^2 - 16}$.

2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos 5x}{e^{x^2} - 1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3 + x - 1}$.

3. Побудувати графіки елементарних функцій.

а) $y = \frac{2}{|x|} - 3$; б) $y = 4^{3x-1} + 5$.

Варіант 2

1. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{25 - x^2}$.

2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1 - 2\sin x)}{\sin 3x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^6 - x^3 + 2x}{2x^6 - 1}$.

3. Побудувати графіки елементарних функцій.

а) $y = 2\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$; б) $y = 5e^{2x+1} + 1$.

Варіант 3

1. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{5x - x^2}$.

2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{u \to -2} \frac{u^3 + 4u^2 + 4u}{(u+2)(u-3)}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}\,\pi x}{\ln(1+2x)}$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + 4x - x^4}{x + 3x^2 + 2x^4}$.

3. Побудувати графіки елементарних функцій.

а) $y = \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$; б) $y = 3 + \log_{0,2}(x+1)$.

Варіант 4

1. Знайти область визначення функції $y = \frac{1}{x^2 - 3}$.

2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n^3 + 7n^2 - 2}{6n^3 - 4n + 3}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 2x}}{e^{3x} - 1}$; в) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$.

3. Побудувати графіки елементарних функцій.

а) $y = \log_{0,1}(3x - 7)$; б) $y = \frac{3}{2 - x} + 5$.

Варіант 5

1. Знайти область визначення функції $y = \frac{1}{x^5 - 16x}$.

2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \mathrm{tg}\,x}{1 - e^{x^2}}$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1\right)$.

3. Побудувати графіки елементарних функцій.

$y = \frac{3}{|x-1|}$; б) $y = 3\mathrm{arctg}(2x + 3)$.

Варіант 6

1. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.

2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 5n}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1 - \ln(e - x)}$; в) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 - 12}$.

3. Побудувати графіки елементарних функцій.

а) $y = \log_{0,5}(x - 5)$; б) $y = \dfrac{2}{3}\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 2$.

Варіант 7

1. Знайти область визначення функції $y = \arccos\dfrac{2x - 3}{5}$.

2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1000n^3 + 3n^2}{0{,}001n^4 - 100n^3 + 1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\pi\left(1 + x/3\right)\right)}{e^{6x} - 1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$.

3. Побудувати графіки елементарних функцій.

а) $y = |2x| - 3$; б) $y = 2\arcsin(x + 1) + 3$.

Варіант 8

1. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{-x} + \sqrt{4 + x}$.

2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n + 2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{arctg} 3x}{4 - \sqrt{16 + x}}$; в) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - 3x + 2}$.

3. Побудувати графіки елементарних функцій.

а) $y = 2e^{-3x+1} - 4$. б) $y = \dfrac{2}{x + 5} - 1$.

Варіант 9

1. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$.

2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 2n - 1}{n^3 + 4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin 3x}}{\operatorname{tg} 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos^5 x}{x^2}$.

3. Побудувати графіки елементарних функцій.

а) $y = \arccos(3x + 2)$. б) $y = \ln(x - 1) + 1$.

Варіант 10

1. Знайти область визначення функції $y = \lg(5x - x^2 - 6)$.

2. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 + 2x^2}}{\ln(1 - x^2)}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$.

3. Побудувати графіки елементарних функцій.

а) $y = 2^{-\frac{x}{3}+1}$; б) $y = 3 + \dfrac{5}{2x+1}$.

Відповіді.

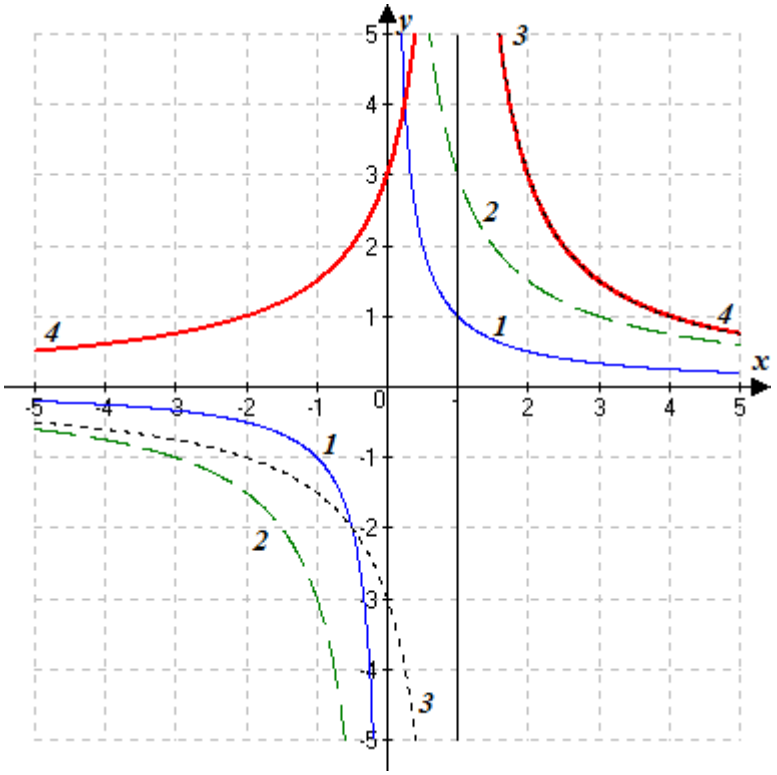
Варіант 5. **1.** $x \neq 0, x \neq \pm 2$. **2.** а) $\dfrac{1}{2}$; б) 0; в) $\dfrac{3}{4}$.

3. а) Виконується наступна послідовність побудов:

1) $y = \dfrac{1}{x}$ (початковий графік)

2) $y = \dfrac{3}{x}$ (розтяг по осі ординат в 3 рази)

3) $y = \dfrac{3}{x-1}$ (зсув по осі абсцис на 1 вправо)



4) $y=\dfrac{3}{|x-1|}$ (симетричне відображення від'ємної частини відносно осі абсцис).

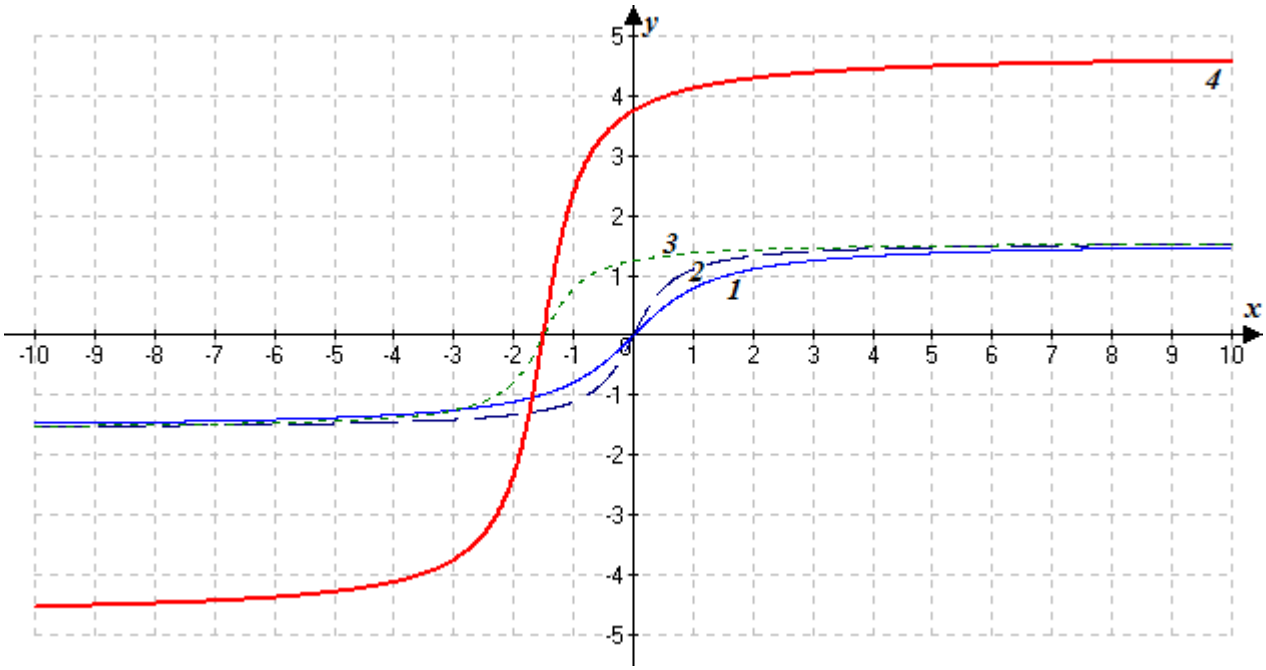
б) $y=3\operatorname{arctg}(2x+3)$

1) $y=\operatorname{arctg}x$ (початковий графік)

2) $y=\operatorname{arctg}(2x)$ (стискання по осі абсцис в 2 рази)

3) $y=\operatorname{arctg}(2x+3)=\operatorname{arctg}2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$ (зсув по осі абсцис на 1,5 вліво)

4) $y=3\operatorname{arctg}(2x+3)$ (розтяг по осі ординат в 3 рази)



Завдання (1) для МКР ***«Похідні функції однієї змінної, їх застосування»***

Варіант 1

1. Дослідити асимптоти функції $y=e^{1/(x-1)}$.

2. Знайти похідні функцій: а) y', якщо $y=tg^{2}\dfrac{x}{2}-2\ln\cos\dfrac{x}{2}$;

б) y', якщо $e^{x^3y}=x^2+y^2$; в) y_x', якщо $\begin{cases}x=1+e^{at},\\ y=at+e^{-at}.\end{cases}$

3. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x\ln x$ в точці $x = 1$.

Варіант 2

1. Дослідити асимптоти функції $y = e^{-x}/x^2$.

2. Знайти похідні функцій: а) y', якщо $y = \arcsin\dfrac{x}{1+x^3} - 2\ln(x+4)$;

б) y', якщо $e^y = x + xy^2$; в) y_x', якщо $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

3. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \sqrt{x+1}$ в точці $x = 3$.

Варіант 3

1. Дослідити на неперервність функцію $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.

2. Знайти похідні функцій: а) y', якщо $y = 3\sin x\cos^2 x + \sin^3 x$;

б) y', якщо $x^y = y^x$; в) y_x', якщо $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin^2 t. \end{cases}$

3. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ в точці (1; 1).

Варіант 4

1. Знайти інтервали монотонності і точки екстремуму функції $y = x^2 - 2\ln x$.

2. Знайти похідні функцій: а) y', якщо $y = \sqrt{\alpha\sin^2 x + \beta\cos^2 x}$;

б) y', якщо $\ln y + \dfrac{x}{y} = c$; в) y_x', якщо $\begin{cases} x = e^{3t^2}, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$.

3. Знайти наближено значення функції $y = e^{1-x^2}$ при $x = 1{,}05$.

Варіант 5

1. Дослідити асимптоти функції $y=\frac{1}{1-2^{\frac{1}{x}}}$.

2. Знайти похідні функцій: а) y', якщо $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x+x$;

б) y', якщо $\operatorname{arctg}(x+y)=2x^2+y$; в) y''_{x^2}, якщо $\begin{cases} x=a\cos^2 t\sin t, \\ y=a\sin^2 t. \end{cases}$

3. Скласти рівняння нормалі до кривої $y=\sqrt[3]{x-1}$ в точці (0;-1).

Варіант 6

1. Знайти інтервали монотонності і точки екстремуму функції $y=xe^{-x}$.

2. Знайти похідні функцій: а) y', якщо $y=x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)$;

б) y', якщо $e^{xy}=\sin^2(x+y)$; в) y_x', якщо $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}t, \\ y=\frac{1}{2}t^2. \end{cases}$

3. Знайти наближено за допомогою диференціала $\sqrt[4]{16,64}$.

Варіант 7

1. Дослідити асимптоти функції $y=\operatorname{arctg}{}^{1}\!\!\diagup\!\!_{x}$.

2. Знайти похідні функцій: а) y', якщо $y=\sqrt{\cos x}\,a^{\sqrt{\cos x}}$;

б) y', якщо $x^3y-3x^2y^2+5y^3-3x+4=0$; в) y_x', якщо $\begin{cases} x=\operatorname{tg}t, \\ y=\sin^2 t. \end{cases}$

3. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3+2x$ в точці (1;3).

Варіант 8

1. Дослідити асимптоти функції $y=\frac{1}{1+e^{1/x}}$.

2. Знайти похідні функцій: а) y', якщо $y=\operatorname{arctg}\ln\frac{1}{x}-2(x+4)^2$;

б) y', якщо $e^y = x + xy^2$; в) y_x', якщо $\begin{cases} x = a(\sin t - t\cos t), \\ y = a(\cos t + t\sin t). \end{cases}$

3. Знайти наближено значення функції $y = x\ln(x-2)$ при $x = 3{,}001$.

Варіант 9

1. Дослідити асимптоти функції $y = e^{-1/x}$.

2. Знайти похідні функцій: а) y', якщо $y = -\dfrac{\cos x}{3\sin^3 x} - \dfrac{4}{3}\operatorname{ctg}^3 x + x$;

б) y', якщо $tg(x+y) + \dfrac{y}{x} = 2x^2 + y$; в) y_x', якщо $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$

3. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ в точці (3; 2).

Варіант 10

1. Знайти інтервали монотонності і точки екстремуму функції $y = x\ln x$

2. Знайти похідні функцій: а) y', якщо $y = x\sin(\ln x - \dfrac{\pi}{4})$;

б) y', якщо $(x^2+1)^{2x} = \operatorname{tg}(x+y)$; в) y_x', якщо $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t^2, \\ y = e^{at}. \end{cases}$

3. Знайти наближено за допомогою диференціала $\sqrt[3]{27{,}0081}$.

Відповіді.

Варіант 1. **1.** $x = 0$ – вертикальна асимптота. **2.** а) $y = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\dfrac{1}{\sin x/2} - \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$,

б) $y' = \dfrac{2x - 3e^{x^3 y}x^2 y}{e^{x^3 y}x^2 - 2y}$, в) $\begin{cases} y_x' = \dfrac{t - a\,e^{-at}}{a\,e^{at}}, \\ x = 1 + e^{at}. \end{cases}$. **3.** $y = x - 1$, $y = -x + 1$.

Варіант 2. **1.** $(0;\,0) - \min$, $(2;\,4e^{-2}) - \max$, зростає на проміжку $(0;\,2)$, спадає на $(-\infty;\,0) \cup (2;\,+\infty)$. **2.** а) $y = \dfrac{1 - 2x^3}{(1+x^3)\sqrt{(1+x^3)^2 - x^2}} - \dfrac{2}{x+4}$,

б) $y' = \dfrac{1 + y^2}{e^y - 2xy}$, в) $\begin{cases} y_x' = -\operatorname{tg} t, \\ x = a\cos^3 t. \end{cases}$ **3.** $2{,}05$.

Варіант 3. **1.** $x=1$ – точка розриву 1-го роду (усувний) , $x=-1$ – точка розриву 2-го роду (нескінчений). **2.** а) $y=3\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x$,

б) $y'=\dfrac{xy\ln y-y^2}{xy\ln x-x^2}$, в) $\begin{cases} y'_x=\dfrac{2\arcsin t}{e^t\sqrt{1-t^2}}, \\ x=e^t. \end{cases}$ **3.** $y=-x+2$, $y=x$.

Завдання (2) для МКР ***«Похідні функції однієї змінної, їх застосування»***

Варіант 1

1. Знайти похідну заданої функції

$y=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)+x\left(5x^2+3\right)\sqrt{4x^2+1}.$

2. Знайти похідну другого порядку y''_{xx} від функції, заданої параметрично: $\begin{cases} x=\sin t+\cos t, \\ y=\cos 2t. \end{cases}$

3. Перевірити, чи функція $y=y(x)$, задана неявно рівнянням $\mathrm{F}(x,y)=0$, є розв'язком даного диференціального рівняння $(C=\text{const})$:

$\mathrm{F}(x,y)=x^3+3x^2y-y^3-C;\quad (x^2+2xy)dx+(x^2-y^2)dy=0.$

4. Дослідити функцію $y=\dfrac{x^3+2}{x^2-1}$ на асимптоти.

Варіант 2

1. Знайти похідну заданої функції $y=\dfrac{x\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}+\ln\sqrt{1-9x^2}$.

2. Знайти похідну другого порядку y''_{xx} від функції, заданої параметрично: $\begin{cases} x=t\sin t+\cos t, \\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$

3. Перевірити, чи функція $y=y(x)$, задана неявно рівнянням $\mathrm{F}(x,y)=0$, є розв'язком даного диференціального рівняння $(C=\text{const})$:

$\mathrm{F}(x,y)=x^2-2xy+2y^2-C;\quad (x-2y)dy+(y-x)dx=0.$

4. Дослідити функцію $y=\dfrac{3}{x^2+3x}$ на монотонність та точки екстремума.

Варіант 3

1. Знайти похідну заданої функції $y = 2\ln\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2}$.

2. Знайти похідну другого порядку y''_{xx} від функції, заданої параметрично: $\begin{cases} x = \operatorname{sh} t, \\ y = \operatorname{ch}^{2/3} t. \end{cases}$

3. Перевірити, чи функція $y = y(x)$, задана неявно рівнянням $\mathrm{F}(x, y) = 0$, є розв'язком даного диференціального рівняння $(C = \text{const})$: $\mathrm{F}(x, y) = x^2 + y^2 - Cx; \quad 2xyy' + x^2 - y^2 = 0.$

4. Дослідити функцію $y = \dfrac{2x}{4-x^2}$ на опуклість та точки перегину.

Варіант 4

1. Знайти похідну заданої функції $y = \dfrac{x^3}{\arcsin x} + \dfrac{x^2+1}{x}\sqrt{1-x^2}$.

2. Знайти похідну другого порядку y''_{xx} від функції, заданої параметрично: $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \ln\cos 2t. \end{cases}$

3. Перевірити, чи функція $y = y(x)$, задана неявно рівнянням $\mathrm{F}(x, y) = 0$, є розв'язком даного диференціального рівняння $(C = \text{const})$: $\mathrm{F}(x, y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{C^2} - 1; \quad (4 - x^2)y' + xy = 0.$

4. Дослідити функцію $y = \dfrac{2+x}{x^2-9}$ на асимптоти.

Варіант 5

1. Знайти похідну заданої функції $y = 2\arccos\dfrac{3}{2x+1} + \sqrt{x^2 + x - 2}$.

2. Знайти похідну другого порядку y''_{xx} від функції, заданої параметрично: $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arccos t. \end{cases}$

3. Перевірити, чи функція $y = y(x)$, задана неявно рівнянням $\mathrm{F}(x, y) = 0$, є розв'язком даного диференціального рівняння $(C = \text{const})$: $\mathrm{F}(x, y) = x - y - Ce^{\frac{x}{y-x}}$; $yy' + x - 2y = 0$.

4. Дослідити функцію $y = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$ на монотонність та точки екстремума.

Варіант 6

1. Знайти похідну заданої функції

$y = \ln\left(2x + \sqrt{1+4x^2}\right) - \sqrt{1+4x^2}\,\operatorname{arcctg} 2x.$

2. Знайти похідну другого порядку y''_{xx} від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos^3\left(t/2\right). \end{cases}$$

3. Перевірити, чи функція $y = y(x)$, задана неявно рівнянням $\mathrm{F}(x, y) = 0$, є розв'язком даного диференціального рівняння $(C = \text{const})$: $\mathrm{F}(x, y) = (1 + x^2)(1 + y^2) - C$; $(x + xy^2)dx + (y + yx^2)dy = 0$.

4. Дослідити функцію $y = \dfrac{1}{16x^4 - 1}$ на асимптоти.

Варіант 7

1. Знайти похідну заданої функції $y = 3\arccos\dfrac{1}{2x+3} - 2\sqrt{x^2 + 3x + 2}$.

2. Знайти похідну другого порядку y''_{xx} від функції, заданої параметрично: $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = 1/\sqrt{1-2t}. \end{cases}$

3. Перевірити, чи функція $y = y(x)$, задана неявно рівнянням $\mathrm{F}(x, y) = 0$, є розв'язком даного диференціального рівняння $(C = \text{const})$: $\mathrm{F}(x, y) = (y - 2x)^3 - C(y - x - 1)^2$; $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$.

4. Дослідити функцію $y = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$ на асимптоти.

Варіант 8

1. Знайти похідну заданої функції

$y = \ln\left(3x + \sqrt{1+9x^2}\right) - x\left(2x^2+3\right)\sqrt{1+9x^2}$.

2. Знайти похідну другого порядку y''_{xx} від функції, заданої параметрично: $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t}, \\ y = \sqrt[3]{1-t}. \end{cases}$

3. Перевірити, чи функція $y = y(x)$, задана неявно рівнянням $\mathrm{F}(x, y) = 0$, є розв'язком даного диференціального рівняння $(C = \text{const})$: $\mathrm{F}(x, y) = y - (C - \cos y)x^2$; $2ydx + \left(x^3 \sin y - x\right)dy = 0$.

4. Дослідити функцію $y = \dfrac{x^2}{x^2+3}$ на опуклість та точки перегину.

Варіант 9

1. Знайти похідну заданої функції $y = \ln\left(2x - \sqrt{1+4x^2}\right) + \dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{x}$.

2. Знайти похідну другого порядку y''_{xx} від функції, заданої параметрично: $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = 1/\sin t. \end{cases}$

3. Перевірити, чи функція $y = y(x)$, задана неявно рівнянням $\mathrm{F}(x, y) = 0$, є розв'язком даного диференціального рівняння $(C = \text{const})$: $\mathrm{F}(x, y) = x^2 y + 3xy^2 - y^3 - C$; $\left(2xy + 3y^2\right)dx + \left(x^2 + 6xy - 3y^2\right)dy = 0$.

4. Дослідити функцію $y = \dfrac{2x^2+1}{x^3 - x}$ на асимптоти.

Варіант 10

1. Знайти похідну заданої функції $y = \sqrt{4 - 10x - 3x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \arcsin \dfrac{3x+5}{3\sqrt{3}}$.

2. Знайти похідну другого порядку y''_{xx} від функції, заданої параметрично: $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$

3. Перевірити, чи функція $y = y(x)$, задана неявно рівнянням $\mathrm{F}(x, y) = 0$, є розв'язком даного диференціального рівняння $(C = \text{const})$: $\mathrm{F}(x, y) = 3xy^2 + yx^2 + 3y + x^2 - C$; $\left(2xy + 3y^2 + 2x\right)dx + \left(x^2 + 6xy + 3\right)dy = 0$.

4. Дослідити функцію $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$ на монотонність та точки екстремума.

Відповіді.

Варіант 1. **1.** $y' = \dfrac{80x^4 + 39x^2 + 5}{\sqrt{4x^2 + 1}}$.

2. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = -2 \cdot \dfrac{2\cos 2t(\cos t - \sin t) + \sin 2t(\sin t + \cos t)}{(\cos t - \sin t)^3}, \\ x = \sin t + \cos t. \end{cases}$

3. Так, є розв'язком даного диференціального рівняння.

4. $x = \pm 1$ – вертикальні асимптоти, $y = x -$ похила асимптота.

Варіант 2.

1. $y' = \dfrac{\arccos 3x - 12x\sqrt{1 - 9x^2}}{\left(1 - 9x^2\right)\sqrt{1 - 9x^2}}$. **2.** $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{t\cos^3 t}, \\ x = t\sin t + \cos t. \end{cases}$

3. Так, буде розв'язком даного диференціального рівняння.

4. $\left(0; -\frac{4}{3}\right)$ – точка максимума; зростає на проміжку $\left(-\infty; -3\right) \cup \left(-3; -\frac{3}{2}\right)$, спадає на $\left(-\frac{3}{2}; 0\right) \cup \left(0; +\infty\right)$.

Варіант 4.

1. $y' = \dfrac{3x^2 \arcsin x - \dfrac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}}}{\arcsin^2 x} + \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)\sqrt{1 - x^2} - \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

2. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1 + \sin^2 2t}{\cos^4 2t}, \\ x = \sin 2t. \end{cases}$

3. Не є розв'язком даного диференціального рівняння.

4. $x = \pm 3$ – вертикальні асимптоти, $y = 0 -$ горизонтальна асимптота.

Варіанти завдань для підготовки до залікових та екзаменаційних робіт

Завдання (1) для підготовки до заліку

Варіант 1

1. Властивості визначників. Знайти $|A|$, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Пряма лінія у просторі. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $M(-2;1;2)$, паралельно прямій $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$.

3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$.

4. Дослідити систему за теоремою Кронекера-Капеллі $\begin{cases} x+2y-4z=1, \\ 2x+y-5z=-1, \\ x-y-z=-2. \end{cases}$

5. Знайти похідну функції $y=x^2\,arctg^3 x+e^{-4\ln x}$.

6. Дослідити на неперервність функцію $y=2^{1/x^2}$.

Варіант 2

1. Обернена матриця, її обчислення. Розв'язати матричне рівняння

$$X\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Пряма лінія на площині. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-1;2)$, паралельно прямій $3x-4y+5=0$.

3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

4. Дослідити систему за теоремою Кронекера-Капеллі $\begin{cases} 2x-3y+z=0, \\ x+y+z=0, \\ 3x-2y+2z=0. \end{cases}$

5. Знайти похідну функції $y=\sqrt[3]{3x+1}\arcsin x^2+3^{\cos 2x}$.

6. Дослідити на неперервність функцію $y=\dfrac{6}{x+3}$.

Варіант 3

1. Дії над матрицями, їх властивості. Обчислити $A\cdot B+2A$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

2. Площина в просторі. Написати рівняння площини, яка проходить через точки $A(0;-1;\ 5)$, $B(0;-6;\ 1)$, $D(0;-1;-1)$.

3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$.

4. Дослідити систему за теоремою Кронекера-Капеллі $\begin{cases}2x-y+3z=0,\\ x+2y-5z=0,\\ 3x+y-2z=0.\end{cases}$

5. Знайти похідну функції $y=\dfrac{\ln(tg\,x)}{x^2}-e^{\arcsin x}$.

6. Дослідити на неперервність функцію $y=\begin{cases}x+4,\ x<-1,\\ x^2+2,\ x\ge -1\end{cases}$.

Варіант 4

1. Множення матриць, властивості операції множення. Обчислити $B\cdot A-B$, якщо $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

2. Кут між прямими в просторі. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1;\ 2;\ 3)$, перпендикулярно площині $2x-y-z=0$.

3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{5x^2-x-10}$.

4. Дослідити систему за теоремою Кронекера-Капеллі $\begin{cases}x+2y-3z=-3,\\ 3x+2y-4z=2,\\ 2x-y=7.\end{cases}$

5. Знайти похідну функції $y=\dfrac{\left(x^2+1\right)^3}{e^{-x}}+\ln(\sin\ 3x)$.

Варіант 5

1. Лінійні операції над векторами в R^3. Дано точки $M_1(1;\ 2;\ -1), M_2(0;-1;\ 3),\ M_3(1;\ 1;\ 3)$. Обчислити $2\overrightarrow{M_1M_2}-3\overrightarrow{M_1M_3}$.

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1;\ -2;\ 1)$, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{N}\{2;-1;\ 3\}$.

3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2}$.

4. Дослідити систему за теоремою Кронекера-Капеллі $\begin{cases} x+2y-3z=-3, \\ 3x+2y-4z=2, \\ 2x-y=7. \end{cases}$

5. Знайти похідну функції $y=\dfrac{\left(x^2+1\right)^3}{e^{-x}}+\ln(\sin\ 3x)$.

6. Дослідити на неперервність функцію $y=\begin{cases} x+4,\ x<-1, \\ x^2+2, x\geq -1. \end{cases}$.

Варіант 6

1. Скалярний добуток векторів. Нехай $\vec{a}\{1;\ -2;\ 2\}$, $\vec{b}\{-1;\ 0;\ 3)$. Обчислити $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\left|\vec{a}\right|$.

2. Скласти рівняння прямої на площині, яка проходить через точку $O(0;\ 0)$, перпендикулярно прямій $2x-3y=0$.

3. Означення границі функції. Дії з границями. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^x$

4. Дослідити систему за теоремою Кронекера-Капеллі $\begin{cases} x+y+2z=2, \\ 3x+y+5z=14, \\ 2x+y+2z=5. \end{cases}$

5. Знайти похідну функції, заданої параметрично $\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=2-\cos^2 t. \end{cases}$

6. Дослідити на неперервність функцію $y=\begin{cases} \ln x\ ,\ x>0, \\ x^2\ ,\ x\leq 0. \end{cases}$.

Варіант 7

1. Векторний добуток векторів. Нехай $\vec{a}\{1;-2;2\}$, $\vec{b}\{-1;0;3\}$. Обчислити $\vec{a}\times 2\vec{b}$.

2. Скласти рівняння прямої на площині, яка проходить через дві задані точки $A(-1;2), B(1;-1)$.

3. Властивості функцій, які мають границю. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}$

4. Дослідити систему за теоремою Кронекера-Капеллі $\begin{cases} x+2y-4z=1, \\ 2x+y-5z=-1, \\ x-y-z=-2. \end{cases}$

5. Знайти похідну функції, заданої параметрично $\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=\ln\sin t. \end{cases}$

6. Дослідити на неперервність функцію $y=\begin{cases} x, & x\le 0, \\ 1/x^2, & x>0. \end{cases}$

Варіант 8

1. Мішаний добуток векторів. Знайти об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a}\{2;-1;-1\}$, $\vec{b}\{1;3;-1\}$, $\vec{c}\{1;1;4\}$.

2. Скласти рівняння прямої на площині, яка проходить через точку $A(-1;2)$ з кутовим коефіцієнтом 2.

3. Границі послідовності, їх властивості. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$

4. Дослідити систему за теоремою Кронекера-Капеллі $\begin{cases} x-2y+4z=3, \\ 2x-4y+3z=1, \\ 3x-y+5z=2. \end{cases}$

5. Знайти похідну функції, заданої параметрично $\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=\cos t/(1+2\cos t). \end{cases}$

6. Дослідити на неперервність функцію $y=\begin{cases} 1, & x>0, \\ \sqrt{1+x^2}, & x\le 0. \end{cases}$

Варіант 9

1. Дані точки $M_1(1;\ 1;\ 3)$, $M_2(2;\ 0;\ 3)$, $M_3(4;-1;\ 0)$. Обчислити $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$, $\left|\overrightarrow{M_1M_3}\right|$.

2. Скласти рівняння прямої в просторі, яка проходить через точку $M(1;\ -1;\ 2)$, паралельно до площин $2x-y+1=0$, $3x+y-z=0$.

3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$

4. Дослідити систему за теоремою Кронекера-Капеллі $\begin{cases} x+2y+z=5, \\ x+z=3, \\ x+y=2. \end{cases}$

5. Знайти похідну функції $y=x^3\lg^2(\sin 3x)+3\,arctg\sqrt[4]{x}$.

6. Дослідити на неперервність функцію $y=\begin{cases} x,\ x\le 0, \\ \ln(2x),\ x>0. \end{cases}$

Варіант 10

1. Множення матриць, властивості операції множення. Обчислити $A\cdot B-2A$, якщо $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Скласти рівняння прямої на площині, яка проходить через точку $M(-1;\ 2)$, перпендикулярно прямій $2x-y+3=0$.

3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x}$.

4. Дослідити систему за теоремою Кронекера-Капеллі $\begin{cases} x+y+2z=4, \\ 2x-y+2z=0, \\ 4x+y+4z=6. \end{cases}$

5. Знайти похідну функції, задану параметрично $\begin{cases} x=\arcsin\sqrt{t} \\ y=\ln(t^2-1) \end{cases}$.

6. Дослідити на неперервність функцію $y=e^{\frac{1}{x+1}}$.

Відповіді.

Варіант 1. **1.** $|A| = -29$. **2.** $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{1}$. **3.** 2. **4.** $x = 2z - 1,\ y = z + 1.$

5. $y = 2x\,\mathrm{arctg}^3 x + 3x^2 \frac{\mathrm{arctg}^2 x}{1+x^2}$. **6.** $x = 0$ – точка розриву 2-го роду.

Варіант 2. **1.** $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 32 & -18 \end{pmatrix}$. **2.** $3x - 4y + 11 = 0$. **3.** 0,25. **4.** $x = -4t,\ y = -t,\ z = 5t$. **5.** $y = \frac{\arcsin x^2}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}} + \sqrt[3]{3x+1}\,\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} - 3^{\cos 2x}\ln 3 \cdot 2\sin 2x$. **6.** $x = -3$ – точка розриву 2-го роду.

Варіант 3. **1.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **2.** $5x + 6y + 6 = 0$. **3.** 2 . **4.** $x = -t,\ y = 13t,\ z = 5t$.

5. $y = \frac{\left(tg\,x\cos^2 x\right)^{-1} x^2 - 2x\ln(tg\,x)}{x^4} - \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$. **6.** $x = -1$ – точка неперервності функції.

Завдання (2) за I семестр для заліку

Білет 1

1. Поняття числової послідовності та її границі.

2. Рівняння прямої на площині.

Приклади: **1.** Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n)$.

2. Знайти похідну: $y = \frac{1}{24}(x^2 + 8)\sqrt{x^2 - 4} + \frac{x^4}{16}\arcsin\frac{2}{x},\ \ |x| \geq 2$.

3. Чи є колінеарними вектори $\vec{c}_1$ та $\vec{c}_2$, побудовані за векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$?

$\vec{a} = \{1, -2, 3\}, \vec{b}\{3, 0, -1\}, \vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b}, \vec{c}_2 = 3\vec{b} - \vec{a}.$

Білет 2

1. Задачі, що призводять до поняття похідної.

2. Вектори, лінійні операції над векторами. Довжина вектора.

Приклади: **1.** Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$.

2. Знайти похідну: $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}{\sqrt{2}}$.

3. Чи є колінеарними вектори $\vec{c}_1$ та $\vec{c}_2$, побудовані за векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$?

$\vec{a}=\{1,0,1\},\vec{b}\{-2,3,5\},\vec{c}_1=\vec{a}+2\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{a}-\vec{b}.$

Білет 3

1. Геометричний зміст похідної. Рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.

2. Скалярний добуток векторів, його властивості, кут між двома векторами.

Приклади: **1.** Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3})$.

2. Знайти похідну: $y=\sin\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\dfrac{\sin^2 3x}{3\cos 6x}$.

3. Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$, якщо $A(1,-2,3)$, $B(0,-1,2)$, $C(3,-4,5)$.

Білет 4

1. Умови паралельності і перпендикулярності прямих.

2. Поняття диференційованості функції та диференціала. Умови диференційованості. Зв'язок диференціалу з похідною.

Приклади: **1.** Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+5)}-n)$.

2. Знайти похідну: $y=(\ln\operatorname{tg}(x/2)-x/\sin 5x)^3$.

3. Чи є компланарними вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, якщо $\vec{a}=\{1,5,2\},\vec{b}=\{-1,1,-1\},\vec{c}=\{1,1,1\}$.

Білет 5

1. Системи лінійних однорідних рівнянь.

2. Границя функції в нескінченності.

Приклади: **1.** Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n(n-1)})$.

2. Знайти похідну: $y = x - \ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right) - 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arctge}^{\frac{x}{2}}$.

3. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4, якщо $A_1(7,2,4)$, $A_2(7,-1,-2), A_3(3,3,1), A_4(-4,2,1)$.

Білет 6

1. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь.

2. Ознаки існування границі.

Приклади: **1.** Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

2. Знайти похідну: $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\sqrt{x^4+1}-x^2}}{x}, \quad x>0.$

3. Чи є компланарними вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},$ якщо

$\vec{a}=\{3,1,-1\}, \vec{b}=\{1,0,-1\}, \vec{c}=\{8,3,-2\}$.

Білет 7

1. Асимптоти графіка функції.

2. Ранг матриці.

Приклади: **1.** Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$.

2. Знайти похідну: $y = \ln\dfrac{\sin x}{\cos x+\sqrt{\cos 2x}}$.

3. Чи є колінеарними вектори $\vec{c}_1$ та $\vec{c}_2$, побудовані за векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$?

$\vec{a}=\{-2,4,1\}, \vec{b}\{1,-2,7\}, \vec{c}_1 = 5\vec{a}+3\vec{b}, \vec{c}_2 = 2\vec{a}-\vec{b}$.

Білет 8

1. Лінійні операції над матрицями.

2. Опуклість функції. Точки перегину.

Приклади: **1.** Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

2. Знайти похідну: $y=\sqrt{(3-x)(2+x)}+5\arcsin\sqrt{\dfrac{x+2}{5}}$.

3. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (координати векторів в просторі задати самостійно).

Білет 9

1. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.

2. Системи лінійних рівнянь. Метод Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь.

Приклади: **1.** Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$.

2. Знайти похідну: $y=x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)+\dfrac{1}{2}(\arcsin x-x)$.

3. Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$:
$A(0,-3,6),\ B(-12,-3,-3),\ C(-9,-3,-6)$.

Білет 10

1. Відстань від точки до прямої в просторі та на площині.

2. Екстремум функції.

Приклади: **1.** Обчислити границю числової послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$.

2. Знайти похідну: $y=\arcsin\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)+\ln\left(\mathrm{e}^{2x}+\sqrt{\mathrm{e}^{4x}-1}\right)$.

3. Чи є компланарними вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, якщо $a=\{1,-1,-3\}, b=\{3,2,1\}, c=\{2,3,4\}$.

Відповіді.

Білет 2. **1.** 1. **2.** $y'=\dfrac{2\sqrt{2}}{2-\sin^2 2x}$. **3.** Вектори неколінеарні.

Білет 3. **1.** $\frac{3}{2}$. **2.** $y'=\dfrac{1}{3}\dfrac{\sin 6x}{\cos^2 6x}=\dfrac{tg\,6x}{3\cos 6x}$. **3.** $\cos\angle BAC=-1$.

Білет 4. **1.** $\frac{5}{2}$. **2.** $y'=3\left(\ln tg\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{\sin 5x}\right)^2\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{\sin 5x-5x\cos 5x}{\sin^2 5x}\right)$.

3. Вектори некомпланарні $\left(\Delta = -2 \neq 0\right)$.

Білет 5. **1.** $\frac{1}{2}$. **2.** $y' = e^{-x/2}\operatorname{arctg} e^{x/2}$. **3.** $V = 21{,}5$.

Варіанти (практична частина) завдань для підготовки до екзамену

Варіант 1

1. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти $A \cdot B - B \cdot A$.

2. Для точок $A(4, 4, -1)$, $B(1, -2, 5)$, $C(1, -2, 1)$, $D(1, 3, -3)$ знайти $np_{\overline{AB}}\overrightarrow{CD}$.

3. Пряма L задана рівнянням $\begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0, \\ 2x - y - 3z + 6 = 0 \end{cases}$. Написати канонічні рівняння цієї прямої.

4. Дослідити функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x < \pi/2, \\ x, & x \geq \pi/2 \end{cases}$ на неперервність. Класифікувати точки розриву.

5. Дослідити функцію $y = x^2 e^{-x}$ на монотонність і точки екстремума.

6. Знайти похідну: а) $y = e^{-x} + \dfrac{\arcsin x^2}{x}$; б) $e^{\frac{x}{y}} = y\sqrt{x}$.

Варіант 2

1. Знайти обернену матрицю для матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.

3. Задано координати вершин трикутника $A(6, 2)$, $B(30, -5)$, $C(12, 19)$. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

4. Дослідити функцію $f(x)=\begin{cases} x,\ x\le 0,\\ \operatorname{tg}x,\ 0<x\le \pi/4,\\ 2,\ x>\pi/4 \end{cases}$ на неперервність. Класифікувати точки розриву.

5. Дослідити функцію $y=\ln(x^2-3x)+5$ на монотонність і точки екстремума.

6. Знайти похідну: а) $y=\sqrt{x}\sin 3x+e^{-x^2}$; б) $\sqrt{xy^3}=\log_2(x+y)$.

Варіант 3

1. Знайти обернену матрицю для матриці $A=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Для точок $A_1(4,1,2)$, $A_2(1,1,0)$, $A_3(3,0,5)$ знайти $\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}$ та кут між прямими A_1A_2 і A_1A_3.

3. Задано точку $M(0,-3,-2)$ і пряму L: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{1}$. Написати рівняння площини, що проходить через точку *M*, перпендикулярно вказаній прямій.

4. Дослідити функцію $f(x)=\begin{cases} \cos x,\ x\le 0,\\ 1-x,\ 0<x\le 2,\\ x^2,\ x>2 \end{cases}$ на неперервність. Класифікувати точки розриву.

5. Знайти похідну: а) $y=\operatorname{arctg}4x+\dfrac{\lg(4x^2-1)}{x}$; б) $\sqrt{xy}=\ln y$.

6. Дослідити функцію $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ на монотонність і точки екстремума.

Варіант 4

1. Знайти обернену матрицю для матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Для точок $A_1(4,1,2)$, $A_2(1,1,0)$, $A_3(3,0,5)$ обчислити площу трикутника $A_1A_2A_3$.

3. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(0,-3,-2)$, перпендикулярно до площини $2x+3y-5z-2=0$.

4. Дослідити функцію $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, x\le 0,\\ 1, 0<x<2,\\ x-2, x\ge 2\end{cases}$ на неперервність. Класифікувати точки розриву.

5. Знайти похідну: а) $y=x^3e^{-x^2+x}+\arcsin\sqrt{x}$; б) $xy=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

6. Дослідити функцію $y=x^2-\ln x^2$ на монотонність і точки екстремума.

Варіант 5

1. Для матриці $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ знайти A^2.

2. Встановити, чи компланарні вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, якщо $\vec{a}=(3,2,2)$, $\vec{b}=(1,-1,3)$, $\vec{c}=(1,9,-11)$.

3. При якому значенні коефіцієнта A площина $Ax+2y-z+5=0$ паралельна прямій $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{2}$?

4. Дослідити функцію $f(x)=\begin{cases}x-1, x\le 0,\\ x^2, 0<x<2,\\ 2x, x\ge 2\end{cases}$ на неперервність. Класифікувати точки розриву.

5. Знайти похідну: а) $y=e^{2x}\cos 3x+\operatorname{arctg}x^2$; б) $e^{xy}=x+y$.

6. Дослідити функцію $y=\dfrac{x^2}{2^x}$ на монотонність і точки екстремума.

Варіант 6

1. Для матриць $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}-5\\ 9\\ 1\end{pmatrix}$ знайти $2A\cdot B$.

2. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (4, -4, 2)$, $\vec{b} = (2, 3, 6)$.

3. Задано координати вершин трикутника $A(-12, 6)$, $B(12, -1)$, $C(-6, 23)$. Знайти рівняння висоти CD і її довжину.

4. Дослідити функцію $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 2, & x > 1 \end{cases}$ на неперервність. Класифікувати точки розриву.

5. Знайти похідну: а) $y = \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x^2 + 3}} + \lg(3x^2 + 13)$; б) $\ln(1 - y^2) = x\sqrt{y}$.

6. Дослідити функцію $y = \dfrac{10}{1 + \sin^2 x}$ на монотонність і точки екстремума.

Варіант 7

1. Знайти обернену матрицю для матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (4, -4, 2)$, $\vec{b} = (2, 3, 6)$.

3. Задано координати вершин трикутника $A(8, 0)$, $B(-4, -5)$, $C(-8, -2)$. Знайти рівняння висоти CD і рівняння однієї із середніх ліній даного трикутника.

4. Дослідити функцію $f(x) = \begin{cases} x - 3, & x < 0, \\ x + 1, & 0 \le x \le 4, \\ 3 + \sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$ на неперервність. Класифікувати точки розриву.

5. Знайти похідну: а) $y = \arcsin x^2 + \dfrac{\cos 3x}{\sqrt{x}}$; б) $xy = e^{\frac{x}{y}}$.

6. Дослідити функцію $y = \dfrac{e^{-x^2}}{x + 1}$ на монотонність і точки екстремума.

Варіант 8

1. Дано матриці $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Знайти $A\cdot B+A$.

2. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(4,-4,2)$, $\vec{b}=(2,3,6)$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A_1(1,2,3)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}=(2,-4,3)$.

4. Дослідити функцію $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 1,\\ 2x, & 1<x<3,\\ x+3, & x\ge 3\end{cases}$ на неперервність. Класифікувати точки розриву.

5. Знайти похідну: а) $y=10^{-4x}\sin 3x+\operatorname{arctg}x$; б) $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}=y\sqrt{x}$.

6. Дослідити функцію $y=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$ на монотонність і точки екстремума.

Варіант 9

1. Для матриці $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ знайти A^3.

2. Задано точки $A(0,-1,2)$ і $B(-1,1,4)$. Знайти координати, довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$.

3. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M_1(0,1,2)$, паралельно до векторів $\vec{a}_1=(2,0,1)$, $\vec{a}_2=(1,1,0)$.

4. Дослідити функцію $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le -\pi/3,\\ 1/2, & -\pi/3<x<2,\\ 1/x, & x\ge 2\end{cases}$ на неперервність. Класифікувати точки розриву.

5. Знайти похідну: а) $y=\lg(3x^2-1)+\dfrac{e^{-x^2}}{x}$; б) $\sqrt{xy^3}=\dfrac{y-1}{x}$.

6. Дослідити функцію $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$ на монотонність і точки екстремума.

Варіант 10

1. Знайти обернену матрицю для матриці $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 3\\ 3 & 4 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

2. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}$ і $\vec{n}=4\vec{a}+5\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=1,\ \ |\vec{b}|=2,\ \ (\hat{\vec{a}},\vec{b})=\pi/3$.

3. Записати пряму L: $\begin{cases}x-3y+2z+2=0,\\ x+3y+z+14=0\end{cases}$ в канонічних рівняннях.

4. Дослідити функцію $f(x)=\begin{cases}\sin x,\ x\le 0,\\ 0,\ 0<x<1,\\ \lg x,\ x\ge 1\end{cases}$ на неперервність. Класифікувати точки розриву.

5. Знайти похідну: а) $y=\lg(x^3-4x)+\dfrac{5^{-x}}{x}$; б) $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=4+xy$.

6. Дослідити функцію $y=x\sqrt{1-x^2}$ на монотонність і точки екстремума.

Відповіді.

Варіант 1. **1.** $\begin{pmatrix}0 & 0\\ -6 & 0\end{pmatrix}$. **2.** -6. **3.** $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z}{-2}$. **4.** $x=0$ – точка неперервності, $x=\pi/2$ – точка розриву 2-го роду. **5.** $(x=0,\ f(0)=0)$ – точка мінімума; $(x=2,\ f(2)=4e^{-2})$ – точка максимума; $(-\infty,0),(2,+\infty)$ – проміжки спадання; $(0,2)$ – проміжок зростання. **6.** а) $y'=-e^{-x}+\dfrac{2x^2-\sqrt{1-x^4}\arcsin x^2}{x^2\sqrt{1-x^4}}$; б) $y'=\dfrac{y^3-2ye^{x/y}\sqrt{x}}{2x\left(y^2+e^{x/y}\sqrt{x}\right)}$.

Варіант 5. **1.** $\begin{pmatrix}3 & 4 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$. **2.** Компланарні. **3.** -2. **4.** $x=0$ – точка розриву 1-го роду (типу стрибка), $x=2$ – точка неперервності.

5. а) $y' = e^{2x}\left(2\cos 3x - 3\sin 3x\right) + \dfrac{2x}{1+x^4}$; б) $y' = \dfrac{1 - ye^{xy}}{xe^{xy} - 1}$. **6.** $\left(x = 0,\ f(0) = 0\right)$ – точка мінімума; $\left(x = 2/\ln 2,\ f\left(2/\ln 2\right) = \dfrac{4}{\ln^2 2 \cdot 2^{2/\ln 2}}\right)$ – точка максимума;

$(-\infty, 0), \left(2/\ln 2, +\infty\right)$ – проміжки спадання; $\left(0, 2/\ln 2\right)$ – проміжок зростання.

Варіант 7. **1.** $-0{,}1\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 13 & -10 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. **2.** $\cos\varphi = \dfrac{-13}{\sqrt{6969}}$. **3.** $12x + 5y + 106 = 0$ – рівняння висоти; $3x + 4y - 24 = 0$ – рівняння середньої лінії, паралельної стороні *BC*. **4.** $x = 0$ – точка розриву 1-го роду (типу стрибка), $x = 4$ – точка неперервності.

5. а) $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}} - \dfrac{\cos 3x + 6x\sin 3x}{2x\sqrt{x}}$; б) $y' = \dfrac{ye^{x/y} - y^3}{xy^2 + xe^{x/y}}$. **6.** Функція монотонно спадна на області визначення.

Список літератури

1. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: У 3 ч.: Навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. − К: Книги України ЛТД, 2009. – Ч. 1. −578 с.

2. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: У 3 ч.: Навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. − К: Книги України ЛТД, 2010. –Ч. 2. −470 с.

3. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2015. – 648 с.

4. Дубовик В.П. Вища математика. Збірник задач: навч. посіб. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2015. – 480 с.

5. Кушлик-Дивульська О. І. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс] : навчальний посібник [для студентів Видавничо-поліграфічного інституту спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія»] / О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук ; відп. ред. С. Д. Івасишен; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,15 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 141 с. – Назва з екрана. – Доступ: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/19572.

6. Кушлик-Дивульська О.І. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс]: збірник типових завдань кредитного модуля «Вища математика-1» для студентів видавничо-поліграфічного інституту / НТУУ «КПІ» ; уклад. О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Н. П. Селезньова. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,67 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 149 с. – Назва з екрана. – Доступ : http://ela.kpi.ua/handle/123456789/10429.

7. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс] : збірник завдань ДКР навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів видавничо-поліграфічного інституту спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія» (заочна форма

навчання) / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук. – Електронні текстові дані (1 файл: 726,49 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 43 с. – Назва з екрана. – Доступ: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/19210

8. Авдєєва Т. В. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної. Навчально-методичний посібник [Електронний ресурс] / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Т. В. Авдєєва, О. В. Борисенко, О. Ю. Дюженкова, В. В. Листопадова. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 84 с. – Назва з екрана. – Доступ: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/46065

9. Авдєєва Т. В., Листопадова В. В., Шраменко В. М. Вища математика: Ліінійна алгебра. Аналітична геометрія: Розрахункова робота [Електронне навчальне видання] / Київ, «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2019. – 120 с. – Назва з екрана. – Доступ: http://kmf.kpi.ua

10. Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Елементи векторної алгебри. Конспект лекцій. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / О.В. Кузьма, О. В. Суліма, Т. О. Рудик, Н. П. Селезньова; Н. В. Назаренко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,50 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 127 с. – Назва з екрана. – Доступ: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42310

Додаток

Довідник деяких тем дисципліни «Вища математика»

Додаток 1. Лінійна алгебра

Визначники: другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

або $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$

Правила Крамера для системи лінійних алгебраїчних рівнянь з двома змінними $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$ мають вигляд:

$x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}$, за умови, що $\Delta \neq 0$

для системи трьох лінійних рівнянь з трьома змінними $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$

записують у вигляді: $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$.

Матричний спосіб (для системи 3-го порядку) $X = A^{-1}B$, або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Модуль вектора: $\vec{a}=(x_0,\ y_0,\ z_0),\quad |\vec{a}|=\sqrt{x_0{}^2+\ y_0{}^2+z_0{}^2}$.

Координати вектора

$\overrightarrow{AB},\quad A(x_0,\ y_0,\ z_0),\ B(x_1,\ y_1,\ z_1),\ \overrightarrow{AB}=(x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0).$

Умова колінеарності векторів: $\vec{a}=(x_0,\ y_0,\ z_0),\ \vec{b}=(x_1,\ y_1,\ z_1),\quad \frac{x_0}{x_1}=\frac{y_0}{y_1}=\frac{z_0}{z_1}.$

Скалярний добуток:

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,\quad \vec{a}\vec{b}=x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1,\ \cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}.$$

Умова перпендикулярності векторів: $\vec{a}\vec{b}=0,\quad x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1=0.$

Проекція вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$: $np_{\bar{b}}\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$.

Векторний добуток: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}=(y_0z_1-y_1z_0)\vec{i}-(x_0z_1-x_1z_0)\vec{j}+(x_0y_1-x_1y_0)\vec{k}$.

Площа паралелограма, трикутника, побудованих на векторах $\vec{a},\vec{b}$: $S_{пар}=|\vec{a}\times\vec{b}|,\ S_{тр}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Мішаний добуток: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$.

Об’єм паралелепіпеда та піраміди: $V_{пар}=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|,\ V_{пір}=\frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

Пряма на площині

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$ $\perp$ до вектора $\vec{N}(A, B)$: $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

Загальне рівняння прямої: $Ax+By+C=0$.

Кут φ між двома прямими, які задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$: $\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n)$: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$.

Рівняння прямої через дві точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$: $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$.

Параметричні рівняння прямої: $\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt. \end{cases}$

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k: $y-y_0=k(x-x_0)$ (прямі перпендикулярні: $k_1\cdot k_2=-1$).

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k: $y=kx+b$.

Для прямих $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ тангенс кута між ними через їх кутові коефіцієнти обчислюють за формулою: $\operatorname{tg}\alpha=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

Відстань від точки $M(x_0,\ \ y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Криві 2-го порядку

Рівняння кола з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$ радіуса R: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Рівняння еліпса з центром в точці $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

Рівняння гіперболи з центром в точці $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm1$, $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm1$.

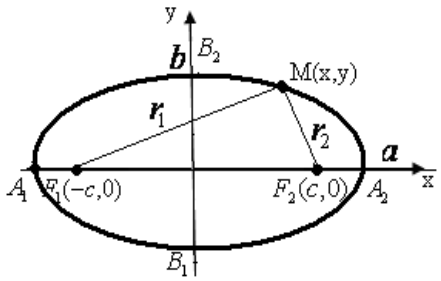
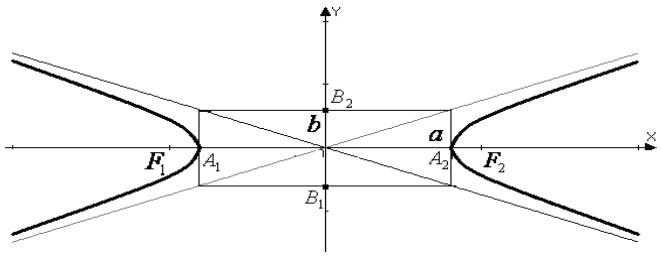
Рівняння параболи з вершиною $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

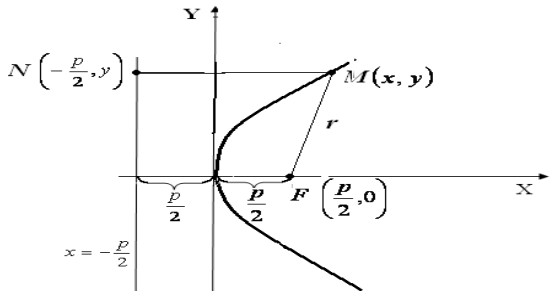
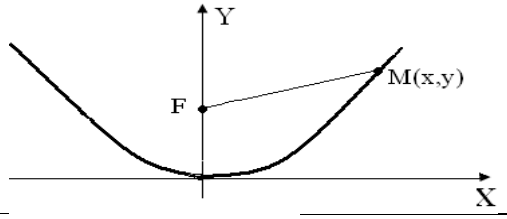
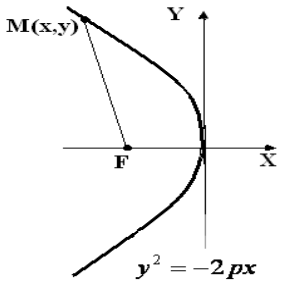
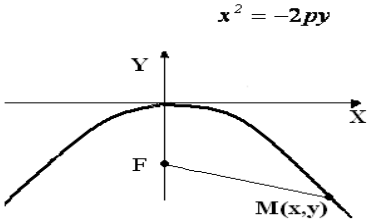
$y^2=2px$, $x^2=2py$; $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$, $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$.

Криві другого порядку та їх центри

Крива	**Канонічне рівняння**	**Центр кривої**
еліпс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases}\frac{1}{a^2}x=0\\ \frac{1}{b^2}y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$
точка	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	
уявний еліпс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	
гіперболи	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$	$\begin{cases}\frac{1}{a^2}x=0\\ \frac{1}{b^2}y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$
прямі, що перетинаються	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	
парабола	$y^2=2px,\ \ p\neq 0$	$\begin{cases}p=0\\ y=0\end{cases}$ нецентральна лінія
паралельні прямі	$y^2=a^2,\ \ a>0$	$\begin{cases}0=0\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow y=0$
здвоєна пряма	$y^2=0$	
уявні паралельні прямі	$y^2=-a^2,\ \ a>0$	

Основні графіки кривих другого порядку

Еліпс	
Гіпербола	

Парабола	$y^2=2px$	
	$x^2=2py$	
		 

Пряма в просторі

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n, p)$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Кут між двома прямими $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$:

$$\cos\varphi=\frac{m_1 m_2+n_1 n_2+p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Умова паралельності двох прямих: $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_2}{p_2}$, умова перпендикулярності : $m_1 m_2+n_1 n_2+p_1 p_2=0.$

Рівняння прямої через дві точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

Параметричні рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n, p)$:

$$x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z=z_0+pt.$$

Загальні рівняння прямої: $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$.

Площина в просторі

Рівняння площини через точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \perp$ до вектора $\vec{N}(A, B, C)$:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Рівняння площини у відрізках на осях: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Загальне рівняння площини: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Рівняння площини через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Кут між площинами: $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1}\,\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|}$, $\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пряма і площина в просторі

Кут між прямою $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Умова паралельності прямої і площини: $Am + Bn + Cp = 0$, а умова перпендикулярності $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

Поверхні 2-го порядку

Сфера: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, *еліпсоїд:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Циліндри 2-го порядку:

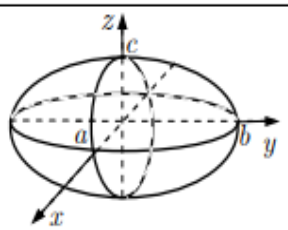
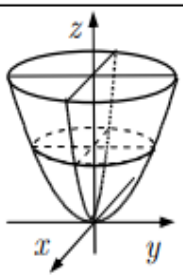
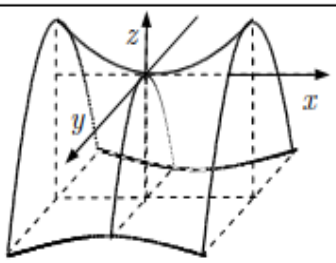
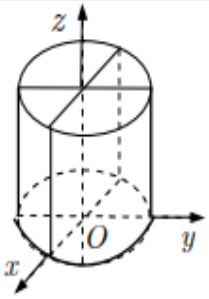
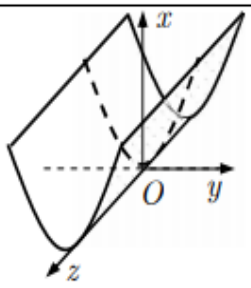
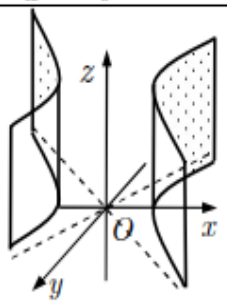
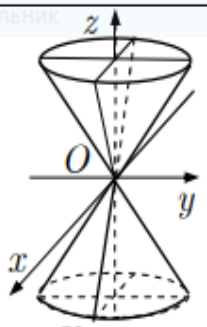
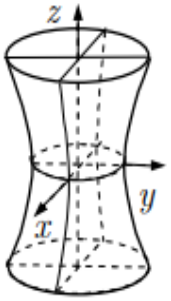
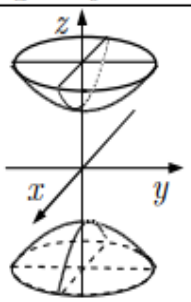
круговий $x^2 + y^2 = R^2$; еліптичний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; гіперболічний $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; параболічний $y^2 = 2px$.

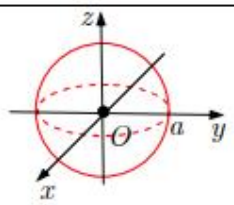
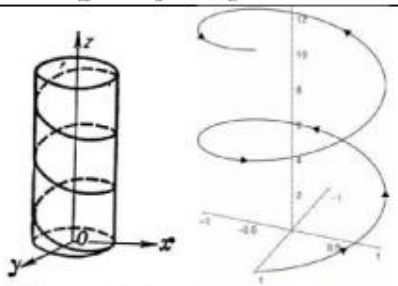
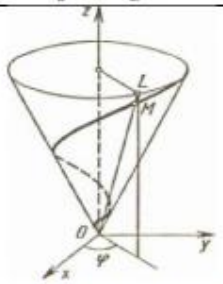
Конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Гіперболоїди: однопорожнинний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, двопорожнинний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

Параболоїд: еліптичний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$; гіперболічний $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$.

Вигляд поверхонь другого порядку

 **Еліпсоїд** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	 **Еліптичний параболоїд** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$	 **Гіперболічний параболоїд** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$
 **Еліптичний циліндр** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	 **Параболічний циліндр** $y^2=2px$	 **Гіперболічний циліндр** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
 **Конус** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$	 **Однопорожнинний гіперболоїд** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	 **Двопорожнинний гіперболоїд** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

 ***Сфера*** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$	 ***Циліндрична гвинтова лінія*** $\begin{cases} x = a\cos t, y = a\sin t, z = \dfrac{ht}{2\pi} \end{cases}$	 ***Конічна гвинтова лінія*** $\begin{cases} x = at\cos t, y = at\sin t, \\ z = bt \end{cases}$

Дві важливі границі: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1\pm x\right)^{\pm\frac{1}{x}}=e.$

Основні еквівалентні величини: $\sin x\sim x,\quad x\to 0;$

$\ln(1+x)\sim x,\ \log_a(1+x)\sim(\log_a e)x,\ x\to 0;\ e^x-1\sim x,\ a^x-1\sim x\ln a,\ x\to 0;\ \arcsin x\sim x,\ x\to 0;$

$\operatorname{tg}x\sim x,\ x\to 0;\ \operatorname{arctg}x\sim x,\ x\to 0;\ (1+x)^{\mu}-1\sim \mu x,\ x\to 0.$

Таблиця похідних

1. $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}.$

2. $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\quad (x>0).$

3. $(\sin x)'=\cos x.$

4. $(\cos x)'=-\sin x.$

5. $(\operatorname{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}.$

6. $(\operatorname{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

7. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad (|x|<1).$

8. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad (|x|<1).$

9. $(\operatorname{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}.$

10. $(\operatorname{arcctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}.$

11. $(a^x)'=a^x\ln a.$

12. $(e^x)'=e^x.$

13. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}\quad (x>0).$

14. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}=\dfrac{\log_a e}{x}\quad (x>0,\ a>0).$

15. $(\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x.$

16. $(\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x.$

17. $(\operatorname{th}x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$

18. $(\operatorname{cth}x)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

Основні правила обчислення похідної

Якщо C – стала величина і $u=\varphi(x),\ v=\psi(x)$ – диференційовані функції, тоді

1) $(C)' = 0,$ 2) $(x)' = 1,$

3) $(u \pm v)' = u' \pm v',$ 4) $(Cu)' = Cu',$

5) $(uv)' = u'v + uv',$ 6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0),$

7) $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$

1. Правило диференціювання складеної функції. Якщо $y = f(u), u = \varphi(x),$ тобто $y = f\left(\varphi(x)\right),$ де функції y та u мають похідні, тоді

$y_x' = y_u' \cdot u_x'$ або в інших позначеннях $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$

2. Диференціювання параметрично заданої функції:

$x = x(t),\ y = y(t), \quad$ то $\quad y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}.$

Рівняння дотичної і нормалі

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),\ y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),\ k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0).$

Екстремуми функцій

Точки, в яких $f'(x_o) = 0 -$ критичні точки функції. Якщо похідна змінює знак з «+» на «-», то точка $x_0 -$ точка максимума, якщо з «-» на «+», то точка мінімума.