Львівський державний університет внутрішніх справ

Ольга Огірко
Наталія Галайко

Вища математика

Частина 1

- Числові множини
- Лінійна та векторна алгебра
- Елементи аналітичної геометрії
- Основи математичного аналізу
- Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної

Львів
2025

УДК 51
О-36
Рекомендовано до друку та розміщення в електронних сервісах ЛьвДУВС
Вченою радою Львівського державного університету внутрішніх справ
(протокол від 30 квітня 2025 р. № 15)

Рецензенти:
***Мельник О. М.*,** кандидат фізико-математичних наук, доцент
Магеровська Т. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент

Огірко О. І., Галайко Н. В.
О-36 Вища математика : навчальний посібник. Львів : Львівський державний університет внутрішніх справ, 2025. Ч. 1. 376 с.

ISBN 978-617-511-420-9

Містить фундаментальні розділи вищої математики, які є основою для формування математичного апарату, що застосовується у технічних і природничих спеціальностях. Матеріал охоплює числові множини, лінійну та векторну алгебру, елементи аналітичної геометрії, основи математичного аналізу, а також диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Сприяє формуванню аналітичного мислення, розвитку навичок математичного моделювання та засвоєнню методів формалізації, що необхідні для розв'язання широкого спектра прикладних завдань у різних галузях науки й техніки.

Для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузей знань: F Інформаційні технології, D Бізнес, адміністрування та право, а також усіх охочих поглибити знання з вищої математики та її застосування.

The textbook contains the fundamental sections of higher mathematics, which are the basis for the formation of the mathematical apparatus used in technical and natural sciences. The material covers numerical sets, linear and vector algebra, elements of analytic geometry, basics of mathematical analysis, as well as differential and integral calculus of functions of one variable. The textbook promotes the formation of analytical thinking, the development of mathematical modeling skills and the mastery of formalization methods necessary for solving a wide range of applied problems in various fields of science and technology.

For applicants of the first (bachelor's) level of higher education in the fields of knowledge: F Information Technology, D Business, Administration and Law, as well as anyone interested in deepening their knowledge of higher mathematics and its applications.

УДК 51

© Огірко О. І., Галайко Н. В., 2025
© Львівський державний університет внутрішніх справ, 2025

ISBN 978-617-511-420-9

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА ……. 9

Розділ 1. **ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ. МНОЖИНА КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ** …….. 12

1.1. Поняття множини. Операції над множинами. Числові множини……. 12

1.2. Комплексні числа та їх геометричне зображення…….. 14

1.3. Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі……. 16

1.4. Модуль, аргумент, тригонометрична та показникова форми комплексного числа…….. 18

1.5. Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі……. 20

1.6. Розв’язування прикладів і задач…… 22

1.7. Контрольні запитання……. 30

1.8. Завдання для самостійного виконання …… 31

Розділ 2. **ЛІНІЙНА АЛГЕБРА** …… 35

2.1. Визначники. Обчислення визначників …….. 35

2.2. Розклад визначника за елементами його рядка або стовпця ……. 39

2.3. Поняття матриці. Основні означення…… 40

2.4. Дії над матрицями ……... 43

2.5. Обернена матриця …….. 45

2.6. Ранг матриці …… 46

2.7. Системи лінійних рівнянь. Основні означення…… 47

2.8. Методи розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь ……... 49

2.8.1. Метод Крамера …… 49

2.8.2. Метод оберненої матриці …….. 51

2.8.3. Метод Гаусса …….. 52

2.9. Однорідні системи лінійних рівнянь ……. 55

2.10. Критерій сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь ……... 56

2.11. Розв’язування прикладів і задач …… 58

2.12. Контрольні запитання …… 76

2.13. Завдання для самостійного виконання …… 77

Розділ 3. **ВЕКТОРНА АЛГЕБРА** …… 85
3.1. Вектори. Загальні поняття та означення …….. 85
3.2. Системи координат ……..... 91
3.3. Вектори в системі координат ……..... 96
3.4. Множення векторів ……..... 98
3.4.1. Скалярний добуток двох векторів ……..... 98
3.4.2. Векторний добуток двох векторів ……..... 99
3.4.3. Мішаний добуток векторів …… 100
3.5. Поняття про *n*-вимірний вектор і векторний простір…….. 102
3.6. Власні числа і власні вектори лінійного перетворення……. 109
3.7. Розв'язування прикладів і задач ……..… 112
3.8. Контрольні запитання …… 127
3.9. Завдання для самостійного виконання …… 129

Розділ 4. **ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА ПЛОЩИНІ І В ПРОСТОРІ** …….. 138
4.1. Пряма на площині ……... 138
4.2. Взаємне розміщення прямих на площині …… 144
4.3. Площина в просторі …… 146
4.4. Взаємне розміщення двох площин…… 149
4.5. Пряма лінія в просторі. Різні види рівнянь прямої в просторі …… 150
4.6. Взаємне розміщення прямих в просторі ……..... 153
4.7. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої та площини …… 154
4.8. Криві другого поряду …… 155
4.8.1. Коло ……. 155
4.8.2. Еліпс ……..... 156
4.8.3. Гіпербола ……. 159
4.8.4. Парабола ……. 161
4.9. Розв'язування прикладів і задач ……..…. 163
4.10. Контрольні запитання ……..... 181
4.11. Завдання для самостійного виконання ……. …… 183

Розділ 5. **ФУНКЦІЯ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ** ……. 191
5.1. Означення функції однієї змінної. Найпростіші класифікації функцій …… 191

5.2. Поняття числової послідовності.
Границя числової послідовності …… 199
5.3. Границя функції в точці ……. 203
5.4. Неперервність функції ……..... 213
5.5. Розв'язування прикладів і задач …….. 217
5.6. Контрольні запитання ……..... 238
5.7. Завдання для самостійного виконання …… 240

Розділ 6. **ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ** ……. 247
6.1. Поняття похідної,
її геометричний та механічний зміст ……. 247
6.2. Правила диференціювання.
Таблиця похідних елементарних функцій …… 250
6.3. Поняття диференціала ……..... 254
6.4. Похідні та диференціали вищих порядків …… 254
6.5. Правило Лопіталя ……... 256
6.6. Формули Тейлора та Маклорена ……..... 257
6.7. Основні теореми диференціального числення …… 258
6.8. Застосування похідної ……..... 261
6.9. Загальна схема дослідження функцій
і побудова їх графіків …….. 266
6.10. Розв'язування прикладів і задач …….. 267
6.11. Контрольні запитання …… 300
6.12. Завдання для самостійного виконання …… 302

Розділ 7. **ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ** ……. 311
7.1. Невизначений інтеграл.
Властивості невизначеного інтеграла.
Основні методи інтегрування……. 311
7.1.1. Первісна та невизначений інтеграл…… 312
7.1.2. Основні методи інтегрування …… 315
7.1.3. Інтегрування раціональних функцій..…… 318
7.1.4. Інтегрування деяких класів
ірраціональних функцій……. 323
7.1.5. Інтегрування деяких класів
тригонометричних функцій……..... 324

7.2. Визначений інтеграл…… 326
7.2.1. Означення визначеного інтеграла. Властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца……... 326
7.2.2. Геометричні застосування визначеного інтеграла…..... 329
7.3. Невластиві інтеграли…… 332
7.3.1. Інтеграли з необмеженими границями (невластиві інтеграли першого роду) ……... 332
7.3.2. Інтеграли від розривних функцій (невластиві інтеграли другого роду) ……. 336
7.4. Розв'язування прикладів і задач…… 338
7.5. Контрольні запитання……. 359
7.6. Завдання для самостійного виконання …… 360

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ……... 366

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК ……. 368

Математика – це велична споруда,
створена уявою людини,
для пізнання Всесвіту
Ле Корбюз'є

Передмова

Математика є однією з найдавніших і найважливіших наук, що виникла з практичних потреб людства й поступово перетворилася на фундаментальну дисципліну, яка пронизує всі сфери знань. Її розвиток розпочався ще в давнину, коли люди навчилися лічити, вимірювати та розв'язувати геометричні задачі. Перші математичні знання знаходять відображення у вавилонських клинописних текстах та єгипетських папірусах, що свідчить про їхнє широке практичне застосування. Справжній розквіт цієї науки припав на XII–XIII століття, коли вчені Близького Сходу та Європи зробили значний внесок у розвиток алгебри, тригонометрії та математичного аналізу.

Сьогодні математика є невіддільною частиною сучасної інженерії, фізики, інформатики, економіки, біології та інших галузей. Вона дозволяє описувати та моделювати природні явища, розробляти складні алгоритми та оптимізувати процеси. Завдяки її методам можливий розвиток штучного інтелекту, криптографії, фінансового аналізу та численних інших сфер, що визначають технологічний прогрес суспільства.

Вища математика як розділ математичної науки формувалася протягом століть, поступово розширюючи свої межі та поглиблюючи методи дослідження. Основним об'єктом її вивчення є змінні величини, тоді як сталі величини мають другорядне значення й належать переважно до сфери елементарної математики. Однак розмежування між елементарною та вищою

математикою доволі умовне, оскільки багато ідей, які сьогодні вважаються частиною вищої математики, були закладені ще в працях Архімеда, хоча їхній подальший розвиток тривав упродовж століть.

З огляду на ключову роль математики у сучасному світі, виникає необхідність у навчальних матеріалах, що систематизують основні поняття та методи цієї науки. Посібник створено з метою забезпечення читачів структурованими знаннями з вищої математики, що охоплюють її фундаментальні аспекти і практичне застосування. Він орієнтований на здобувачів вищої освіти, викладачів, дослідників і всіх, хто прагне глибше зрозуміти математичні закономірності та їхню роль у різних сферах науки й техніки.

Перша частина цього навчального посібника містить сім розділів, які охоплюють основні математичні поняття та методи, необхідні для майбутніх фахівців. У ній розглядаються числові множини, зокрема множина комплексних чисел, їхнє подання, алгебраїчні операції та геометрична інтерпретація на комплексній площині. Лінійна алгебра охоплює матриці, визначники, системи лінійних рівнянь, а також базові операції з векторами та матрицями. Векторна алгебра розглядає основні операції над векторами, скалярний, векторний і мішаний добутки та їхнє застосування в геометричних і прикладних задачах. Елементи аналітичної геометрії на площині й у просторі містять координатний метод, рівняння прямих, площин і кривих другого порядку, а також методи визначення взаємного розташування геометричних об’єктів. Відтак вивчаються функції однієї змінної, їхні основні властивості, поняття границі та неперервності, а також критерії неперервності й їхнє застосування. Диференціальне числення функцій однієї змінної охоплює поняття похідної, її геометричний та фізичний зміст, правила диференціювання та методи дослідження функцій за допомогою похідної. Інтегральне числення функцій однієї змінної включає первісну, визначений та невизначений інтеграли, методи інтегрування та їхнє застосування в геометрії.

Посібник містить детальні пояснення основних математичних понять, що допоможуть сформувати міцну теоретичну базу та забезпечать глибинне розуміння предмета. Крім того, особлива увага приділяється практичним прикладам і завданням різного рівня складності, які сприятимуть кращому засвоєнню матеріалу та розвитку навичок самостійного розв’язування задач.

Використання сучасних методів подання інформації, зокрема візуалізацій, інтерактивних елементів і структурованих пояснень, дасть змогу зробити навчання більш доступним, ефективним і цікавим для здобувачів вищої освіти. Посібник стане не лише корисним довідником, а й дієвим інструментом для формування математичних компетентностей.

Розділ 1

ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ. МНОЖИНА КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

1.1. Поняття множини. Операції над множинами. Числові множини

Під ***множиною*** розуміють сукупність (набір) деяких об'єктів однакової природи. Об'єкти, які утворюють множину, називають її ***елементами***.

Множини позначають великими літерами латинського алфавіту ***A, B, C, ….*** Елементи множин позначають малими літерами ***a, b, c ,*** , ,…

Якщо a є елементом множини A, то записують $a \in A$.

Якщо b не є елементом множини A, то пишуть $b \notin A$.

Множину, яка не містить жодного елемента, називають ***порожньою*** і позначають символом $\varnothing$.

Якщо кожний елемент множини B належить множині A, то множину B називають ***підмножиною множини A.*** Позначають $B \subset A$

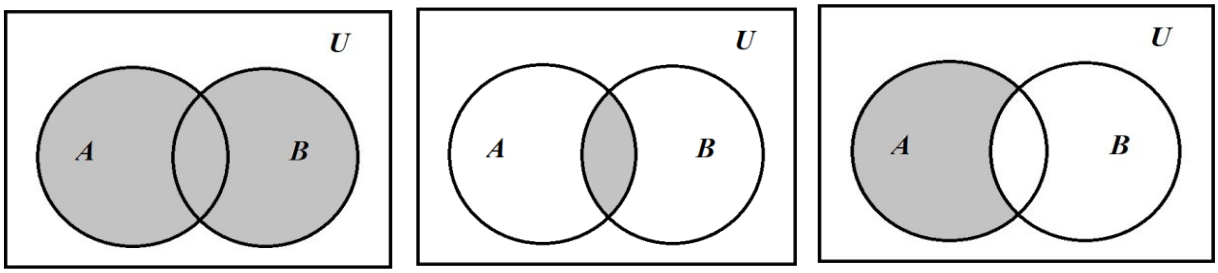
Якщо кожний елемент множини A належить множині B і навпаки – кожний елемент множини B належить множині A, то множини A та B називають ***рівними.***

Множину, яка складається зі скінченної кількості елементів, називають ***скінченною.*** Множину, яка містить безліч елементів, називають ***нескінченною***.

Серед нескінченних множин розрізняють ***зліченні множини***, тобто такі множини, кожному елементу яких можна поставити у відповідність натуральне число (номер).

Об'єднанням (або сумою) двох множин A і B називають множину ***U***, елементи якої належать хоча б одній з множин або ***B*** (рис. 1.1.1 а)).

Позначають $U = A \cup B$



а) б) в)

Рис. 1.1.1. Операції над множинами A і B

Перетином (або добутком) двох множин A **та** ***B*** називають множину ***U***, елементи якої одночасно належать кожній із цих множин ***A*** та ***B*** (рис. 1.1.1 б)).

Позначають $U = A \cap B$.

Різницею множин A і B називають множину ***U*****,** яка складається із тих елементів множини ***A***, що не належать множині ***B*** (рис. 1.1.1 в)).

Позначають $U = A \setminus B$.

Множину, елементами якої є числа, називають ***числовою множиною*****.**

Числові множини:

множина натуральних чисел $N = \{1; 2; \dots; n; \dots\}$;

множина цілих чисел $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots; \pm n; \dots\}$;

множина раціональних чисел $Q = \left\{\frac{p}{q}, p \in Z, q \in N\right\}$;

множина дійсних чисел $R = \{x, x = \alpha, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots\}$, де $\alpha \in Z, \alpha_i$ – цифра десяткової системи числення.

Між цими множинами існує зв'язок:

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

Множина дійсних чисел містить раціональні та ірраціональні числа. Всяке раціональне число є або цілим числом, або скінченним чи періодичним

десятковим дробом. Ірраціональне число – це нескінченний неперіодичний десятковий дріб.

Дійсні числа зображають точками на координатній осі або числовій прямій. Таким чином, між множиною дійсних чисел $\boldsymbol{R}$ і множиною всіх точок прямої можна встановити взаємно однозначну відповідність. Це означає, що кожному числу $x \in \boldsymbol{R}$ відповідає певна точка прямої і, навпаки, кожній точці прямої відповідає певне число.

1.2. Комплексні числа та їх геометричне зображення

Число $i^2 = -1$ називається ***уявною одиницею*** $i = \sqrt{-1}$.

Вираз вигляду

$$z = x + iy \tag{1.2.1}$$

де x, y – дійсні числа (x, $y \in \boldsymbol{R}$,), i – уявна одиниця ***називається комплексним числом*** (алгебраїчною формою комплексного числа).

Множина всіх комплексних чисел позначається $\boldsymbol{C}$.

Число $\boldsymbol{x}$ називається ***дійсною частиною комплексного числа z*** та позначається $x = Re\ z$ (лат. *realis* – дійсний).

Число **y** (коефіцієнт при уявній одиниці) називається ***уявною частиною комплексного числа z*** та позначається $y = \mathrm{Im}\ \mathbf{z}$ (лат. *imaginazy* – уявний).

Будь-яке дійсне число можна розглядати як комплексне число, у якого уявна частина дорівнює нулю:

$$z = x + i0 = x.$$

Отож, множина дійсних чисел $\boldsymbol{R}$ є підмножиною множини комплексних чисел $\boldsymbol{C}$: $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$.

Комплексне число, у якого дійсна частина дорівнює нулю, а уявна частина відмінна від нуля, називається ***чисто уявним***:

$$z = 0 + iy = iy$$

Комплексне число $z = x + iy = 0$, тоді і тільки тоді, коли $x = 0$ і $y = 0$.

Два комплексні числа $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, у яких дійсні частини однакові, а уявні відрізняються тільки знаком, називаються ***комплексно спряженими***.

Два комплексні числа називаються ***рівними,*** якщо, відповідно, рівні їх дійсні та уявні частини.

Нехай $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$, то $z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.

Комплексне число рівне нулю, якщо рівні нулю його дійсна та уявна частини*:* $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Зауваження. Для комплексних чисел не існують поняття «більше», «менше». Ці числа за величиною не порівнюють. Тому не можна, наприклад, сказати, яке з двох комплексних чисел більше $10i$ чи $3i$, $2+5i$ чи $5+2i$.

Протилежними називають комплексні числа $z_1 = x + iy$, $z_2 = -x - iy$, дійсні та уявні частини яких є протилежними числами.

Подібно до того, як дійсні числа можна зображати точками числової прямої, комплексні числа можна зображати точками площини. Геометрично комплексне число $z = a + ib$ зображується точкою $M(a, b)$ (рис. 1.2.1).

Будь-якому дійсному числу відповідає точка $M(x; 0)$, а будь-якому суто уявному числу відповідає точка $M(0; y)$. Тому всі дійсні числа зображуються точками осі абсцис, яка називається ***дійсною віссю***, а всі суто уявні числа зображуються точками осі ординат, яка називається ***уявною віссю***. Комплексною координатою початку координат О є число нуль. У зв'язку з цим початок координат називають нульовою точкою комплексної площини або ***комплексний нуль.***

Зауваження. Комплексне число $z = a + ib$ можна також зобразити радіус вектором OM (a, b), що виходить із початку координат $O(0, 0)$ і закінчується в точці $M(a, b)$

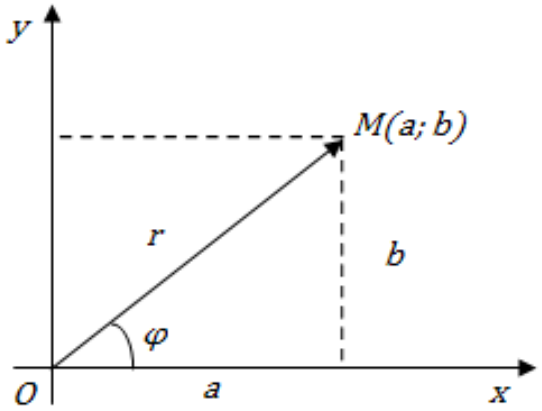


Рис. 1.2.1 Геометрична інтерпретація комплексного числа

Площина xOy умовно називається комплексною площиною змінної z, вісь Ox – дійсною віссю, вісь Oy – уявною віссю.

Площина, на якій зображуються у вигляді точок комплексні числа, називається ***комплексною площиною*** і позначають буквою **C**.

1.3. Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі

Для комплексних чисел визначені операції додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення числа до натурального степеня, добування кореня n-ого степеня, де $n \in \boldsymbol{N}$. Результатом цих операцій є комплексні числа.

Сумою комплексних чисел $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$ називають комплексне число

$$(x_1 + iy_1)+(x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2)+i\,(y_1 + y_2)$$

Тобто, щоб знайти суму двох комплексних чисел, потрібно окремо додати їх дійсні частини та окремо уявні.

Означення суми комплексних чисел поширюється і на випадок трьох і більше доданків.

Сумою комплексно спряжених чисел $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ є дійсне число:

$$z + \bar{z} = (x + iy)+(x - iy) = (x + x)+i\,(y - y) = 2x$$

Різницею комплексних чисел $x_1 + iy_1$ (зменшуване) і $x_2 + iy_2$ (від'ємник) називається комплексне число:

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$$

Тобто, щоб знайти різницю двох комплексних чисел, потрібно окремо відняти їх дійсні частини та окремо уявні.

Множення комплексних чисел $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$ здійснюється за правилом множення двочленів з урахуванням умови $i^2 = -1$ і зведенням подібних доданків:

$$(x_1+iy_1) \cdot (x_2+iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Для множення комплексного числа $z = x + iy$ на дійсне число k потрібно кожну його компоненту помножити на це число k:

$$k \cdot z = k \cdot x + ik \cdot y\,.$$

Зауваження. При піднесенні комплексного числа до натурального степеня можна застосовувати відомі з елементарної математики формули скороченого множення.

Натуральні степені уявної одиниці:

$i^2 = -1$,

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$,

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$.

Отже, для будь-якого натурального k:

$$i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i.$$

Добутком комплексно спряжених чисел $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ є додатнє дійсне число:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

Добуток комплексно спряжених чисел можна знаходити за формулою скороченого множення «різниця квадратів».

Розділити комплексне число $x_1 + iy_1$ (ділене) на комплексне число $x_2 + iy_2$ (дільник) – означає знайти таке число $x + yi$ (частка), яке можна помножити на дільник та отримати ділене.

Ділення комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$і $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_2 \neq 0$ виконується за таким алгоритмом:

1) потрібно чисельник і знаменник дробу $\frac{z_1}{z_2}$ помножити на число $\bar{z}_2$, спряжене до знаменника z_2;

2) врахувати, що $i^2 = -1$, і звести подібні;

3) почленно розділити чисельник на знаменник і одержати частку в алгебраїчній формі

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

1.4. Модуль, аргумент, тригонометрична та показникова форми комплексного числа

Комплексне число $z = x + iy$ можна однозначно визначити не тільки прямокутними координатами x і y, а й полярними r і φ, тобто довжиною вектора r і кутом φ, який утворює вектор r з додатним напрямком осі $0x$ (*рис. 1.2.1).*

Модулем комплексного числа називається довжина вектора, який зображує комплексне число

$$r = |z| = x^2 + y^2 \qquad (1.4.1)$$

Аргументом комплексного числа $z = x + iy$ називається величина кута φ між додатним напрямом осі абсцис і вектором ОМ, що зображує комплексне число $x + yi$.

Позначається $Arg\ z$ або $\varphi = Argz$.

Значення аргументу є додатним числом, якщо кут відкладено проти годинникової стрілки, і від'ємним, якщо кут відкладено за годинниковою стрілкою.

Найменше за абсолютною величиною значення аргументу із проміжку $arg\ z \in (-\pi;\ \pi]$ називається ***головним значенням аргументу z.***

Головне значення аргументу визначається за формулою:

$$argz = \begin{cases} arctg\left(\frac{y}{x}\right),\ x > 0; \\ arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi,\ x < 0, y \geq 0; \\ arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2},\ x = 0,\ y > 0; \\ \frac{\pi}{2},\ x = 0,\ y < 0. \end{cases} \quad (1.4.2)$$

Зауваження. Для числа $z = 0$ модуль дорівнює нулю, а аргумент не визначений.

Кожне комплексне число, що не дорівнює нулю, має нескінчену множину аргументів, які відрізняються один від одного на $2\pi k$, де $k \in Z$.

Якщо на комплексній площині (рис. 1.2.1) ввести також полярну систему координат з полюсом у початку декартової системи координат і полярною віссю, суміщеною з віссю *Ox*, то точку $M\ (x;\ y)$, що зображає комплексне число $z = x + iy$, можна задати полярними координатами $M\ (z;\ \varphi)$, при цьому полярний радіус $r = |z|$, а кут нахилу $\varphi = azg\ z$.

Використовуючи зв'язок декартових і полярних координат

$$\begin{cases} x = zcos\ \varphi, \\ y = zsin\ \varphi \end{cases}$$

комплексне число $z = x + iy$ можна подати у вигляді

$$z = x + iy = rcos\ \varphi + irsin\ \varphi = r\ (cos\ \varphi + isin\ \varphi).$$

Такий запис називається ***тригонометричною формою комплексного числа.***

Врахувавши ***формулу Ейлера*** $e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$, можна перейти від тригонометричної форми *до* ***показникової форми комплексного числа****:*

$$z = r\ (cos\ \varphi + isin\ \varphi) = re^{i\varphi}.$$

1.5. Дії з комплексними числами у тригонометричній та показниковій формах

Додавання і віднімання комплексних чисел простіше і зручніше виконувати, коли вони задані в алгебраїчній формі. Для інших алгебраїчних дій зручніша тригонометрична або показникова форми.

Добутком двох комплексних чисел $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1))$ і $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$ є комплексне число, модуль якого дорівнює добутку модулів співмножників, а аргумент рівний сумі аргументів співмножників:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1) \cdot r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2) =$$
$$= r_1 \cdot r_2(cos\varphi_1 cos\varphi_2 + icos\varphi_1 sin\varphi_2 + isin\varphi_1 cos\varphi_2 - sin\varphi_1 sin\varphi_2)$$
$$= r_1 r_2(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (1.5.1)$$

Під час множення комплексних чисел, заданих у показниковій формі, їх модулі перемножують, а аргументи додають:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (1.5.2)$$

Часткою двох комплексних чисел $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$, що не дорівнюють нулю, є комплексне число, модуль якого дорівнює частці модулів діленого і дільника, а аргумент різниці аргументів діленого і дільника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)}{r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)} = \frac{r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)(cos\varphi_2 - isin\varphi_2)}{r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)(cos\varphi_2 - isin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (1.5.3)$$

При діленні комплексних чисел, які задані у показниковій формі, їх модулі ділять, а аргументи віднімають:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (1.5.4)$$

Натуральним степенем z^n комплексного числа z називається комплексне число, отримане множенням числа z самого на себе n раз, де n – натуральне число.

При піднесенні до n степені, де n – ціле число, використовується формула Муавра:

$$z^n = (z\ (cos\varphi + isin\varphi))^n = r^n\ (cosn\varphi + isinn\varphi) \qquad (1.5.5)$$

При піднесенні до степені комплексних чисел, які задані у показниковій формі, підносять до степеня кожний множник:

$$(re^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{in\varphi} \qquad (1.5.6)$$

Коренем n-го степеня $\sqrt[n]{z}$ з комплексного числа z називається таке комплексне число, n-й степінь якого дорівнює z. Очевидно, що корінь n-го степеня з нуля дорівнює нулю:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\ (cos\varphi + isin\varphi)} = \sqrt[n]{r}(cos\ \frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\ sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}), \qquad (1.5.7)$$

де $k = 0,1, 2, \ldots, n-1$ *– арифметичне значення кореня з додатного числа.*

На комплексній площині всі корені n-го степеня $\sqrt[n]{z}$ з комплексного числа $z \neq 0$ зображуються вершинами правильного n-кутника, вписаного в коло з центром у початку координат і радіусом $\sqrt[n]{r}$.

Правила перетворення однієї форми комплексного числа в іншу

Перехід від алгебраїчної форми до показникової, а також перехід від показникової форми до алгебраїчної може відбуватись через представлення комплексного числа у тригонометричній формі.

Перехід від тригонометричної форми комплексного числа до алгебраїчної відбувається підстановкою у вираз $z = r(cos\varphi + i\ sin\varphi)$ числових значень $cos\varphi$ та $sin\varphi$, тоді розкривають дужки та виконують спрощення, враховуючи, що $\cos(-\varphi) = cos\varphi$, $sin(-\varphi) = -sin\varphi$.

Правило переходу від алгебраїчної до тригонометричної, а потім до показникової форми комплексного числа:

1) знаходять модуль r комплексного числа за формулою: $r = x^2 + y^2$;

2) для знаходження кута φ спочатку визначають геометрично, в якій чверті знаходиться точка z;

3) шукають найменший невід'ємний кут φ, розв'язуючи рівняння:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r};$$

$$\sin\ \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r};$$

$$\text{tg}\ \varphi = \frac{sin\varphi}{cos\varphi} = \frac{y}{x};$$

$$\varphi = arg tg\left|\frac{y}{x}\right|;$$

4) записують комплексне число у тригонометричній формі.

Знаючи модуль та аргумент, записують комплексне число у показниковій формі.

Правило переходу від показникової до тригонометричної, а потім до алгебраїчної форми комплексного числа:

1) визначити з комплексного числа модуль та аргумент;

2) записати число у тригонометричній формі;

3) надати числових значень тригонометричним функціям $cos\varphi$ та $sin\varphi$;

4) підставити числові значення тригонометричних функцій у тригонометричну форму запису числа;

5) записати комплексне число в алгебраїчній формі.

1.6. Розв'язування прикладів і задач

✧✧✧

1. Розв'язати квадратне рівняння $x^2 + 4x + 5 = 0$.

Розв'язання.

Обчислюємо дискримінант:

$$D = 4^2 - 4 \cdot 5 = -16,$$

Оскільки $D < 0$, корені будуть комплексними числами:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2};$$

$$x_1 = -2 + i\,, x_2 = -2 - i\,.$$

Отже, рівняння має два розв'язки, які є комплексно-спряженими числами.

✧✧✧

2. Знайти суму комплексних чисел:

1) $(-3 + 5i) + (4 - 8i)$; 2) $(0 + 2i) + (0 + 5i)$;

3) $(2 + 0i) + (7 + 0i)$; 4) $(-2 + 3i) + (-2 - 3i)$.

Розв'язання.

У розв'язуванні використовуємо правило множення двох многочленів і враховуємо, що $i^2 = -1$

1) $(-3 + 5i) + (4 - 8i) = (-3 + 4) + (5 - 8) \times i = 1 - 3i$;

2) $(0 + 2i) + (0 + 5i) = 0 + 7i = 7i$;

3) $(2 + 0i) + (7 + 0i) = (2 + 7) + (0 + 0) \times i = 9 + 0i = 9$;

4) $(-2 + 3i) + (-2 - 3i) = \big(-2 + (-2)\big) + \big(3 + (-3)\big) \times i = -4 + 0i =$

$= -4$.

✧✧✧

3. Знайти різницю комплексних чисел:

1) $(-5 + 2i) - (3 - 5i)$;

2) $(3 + 2i) - (-3 + 2i)$;

3) $(3 - 4i) - (3 + 4i)$.

Розв'язання.

1) $(-5 + 2i) - (3 - 5i) = (-5 - 3) - \big(2 - (-5)\big)i = -8 - 7i$;

2) $(3 + 2i) - (-3 + 2i) = (3 - (-3)) - (2 - 2)\,i = 6 - 0i = 6$;

3) $(3 - 4i) - (3 + 4i) = (3 - 3) - (4 + 4)\,i = 0 - 8i = -8i$.

✧✧✧

4. Знайти добуток комплексних чисел:

1) $(1-2i)$і $(3+2i)$;

2) $(2+5i)$і $(3+i)$;

3) $(5+i)$і $(3-7i)$.

Розв'язання.

1) $(1-2i)\cdot(3+2i)=3-6i+2i-4i^2=3-6i+2i+4==7-4i$;

2) $(2+5i)\cdot(3+i)=2\cdot 3-3\cdot 5\cdot i+2i+5i^2=1+17i$;

3) $(5+i)\cdot(3-7i)=5\cdot 3-5\cdot 7\cdot i+3i+(-7)i^2=22-32i$.

✧✧✧

5. Піднести до степені комплексні числа:

1) $(2+3i)^2$;

2) $(5-7i)^2$;

3) $(5+3i)^3$.

Розв'язання.

1) $(2+3i)^2=4+2\cdot 2\cdot 3i+9i^2=4+12i-9=5+12i$;

2) $(5-7i)^2=5=25-2\cdot 5\cdot 7i+49i^2=-24-70i$;

3) $(5+3i)^3=125+3\cdot 25\cdot 3i+3\cdot 5\cdot 9i^2+27i^3=125+225i-135-27i=-10+198i$.

✧✧✧

6. Знайти частку комплексних чисел:

1) $(4+5i)\div(4+5i)$;

2) $(3+2i)\div(-3+2i)$;

3) $(5+i)\div(3-7i)$.

Розв'язання.

Чисельник і знаменник домножуємо на спряжене до знаменника, щоб позбутися уявної одиниці в знаменнику.

1) $\frac{3-i}{4+5i}=\frac{(3-i)\cdot(4-5i)}{(4+5i)\cdot(4-5i)}=\frac{12-15i-4i+5i^2}{16+25}=\frac{7-19i}{41}=\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i$;

2) $\frac{(3+2i)}{(-3+2i)} = \frac{(3+2i)\cdot(-3-2i)}{(-3+2i)\cdot(-3-2i)} = \frac{-9-6i-6i-4i^2}{9+4} = \frac{-5-12i}{13} = -\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i;$

3) $\frac{(5+i)}{(3-7i)} = \frac{(5+i)\cdot(3+7i)}{(3-7i)\cdot(3+7i)} = \frac{15+35i+3i+7i^2}{9+49} = \frac{8+38i}{58} = \frac{4}{29} + \frac{19}{29}i.$

✧✧✧

7. Обчислити $\frac{5}{4-i\sqrt{14}} - \frac{5}{2-i\sqrt{14}}$.

Розв'язання.

$\frac{5}{4-i\sqrt{14}} - \frac{5}{2-i\sqrt{14}} = \frac{5\cdot(4+i\sqrt{14})}{(4-i\sqrt{14})\cdot(4+i\sqrt{14})} - \frac{5\cdot(2+i\sqrt{14})}{(2-i\sqrt{14})\cdot(2+i\sqrt{14})} = \frac{20+i5\sqrt{14}}{4^2-(i\sqrt{14})^2} -$

$\frac{10+i5\sqrt{14}}{2^2-(i\sqrt{14})^2} = \frac{20+i5\sqrt{14}}{16-14(i)^2} - \frac{10+i5\sqrt{14}}{4-14(i)^2} = \frac{20+i5\sqrt{14}}{30} - \frac{10+i5\sqrt{14}}{18} =$

$\frac{18(20+i5\sqrt{14})-30(10+i5\sqrt{14})}{540} = \frac{360+i90\sqrt{14}-300-i150\sqrt{14}}{540} = \frac{60-i60\sqrt{14}}{540} = \frac{60(1-i\sqrt{14})}{540} =$

$\frac{1-i\sqrt{14}}{9} = \frac{1}{9} - i\frac{\sqrt{14}}{9}.$

✧✧✧

8. Знайти модуль комплексних чисел

1) $3 + 5i$; 2) $-4i$; 3) $\sqrt{2} - 3i$.

Розв'язання.

1) $r = |3 + 5i| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$;

2) $r = |-4i| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$;

3) $r = \left|\sqrt{2} - 3i\right| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-3)^2} = \sqrt{2 + 9} = \sqrt{11}$.

Множина комплексних з одним і тим же модулем r утворює коло з центром у початку координат.

✧✧✧

9. Знайти добуток комплексних чисел та записати результат у показниковій та алгебраїчній формі, якщо:

$z_1 = 5\left(cos\frac{7\pi}{4} - isin\frac{7\pi}{4}\right)$ та $z_2 = 3\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right)$.

Розв'язання.

Для знаходження добутку двох комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі використовуємо формулу (1.5.1):

$$z = 3\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right) \cdot 5\left(cos\frac{7\pi}{4} - isin\frac{7\pi}{4}\right) = 15\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right)\left(cos\frac{7\pi}{4} - isin\frac{7\pi}{4}\right) = 15\left(cos\frac{5\pi}{4}cos\frac{7\pi}{4} - cos\frac{5\pi}{4}isin\frac{7\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}cos\frac{7\pi}{4} - isin\frac{5\pi}{4}isin\frac{7\pi}{4}\right) =$$

$$15\left(cos\frac{5\pi}{4}cos\frac{7\pi}{4} + sin\frac{5\pi}{4}sin\frac{7\pi}{4} - icos\frac{5\pi}{4}sin\frac{7\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}cos\frac{7\pi}{4}\right) =$$

$$15\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{5\pi}{4}\right) - isin\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{5\pi}{4}\right)\right) = 15\left(cos\frac{\pi}{2} - isin\frac{\pi}{2}\right).$$

Запишемо результат у показниковій формі.

Показникова форма комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$.

Відповідно, $r = 15$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ тому

$$z = 15 \cdot e^{i\pi/2}.$$

Тепер запишемо результат в алгебраїчній формі, для цього використаємо формулу:

$$\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 15cos\frac{\pi}{2} \\ y = 15sin\frac{\pi}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 15 \cdot 0 = 0 \\ y = 15 \cdot 1 = 15 \end{cases};$$

$$z = 15\left(cos\frac{\pi}{2} - isin\frac{\pi}{2}\right) = 15i.$$

✧✧✧

10. Знайти частку комплексних чисел, поданих у тригонометричній формі:

$z_1=4(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$, $z_2=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$

Розв'язання.

Для знаходження частки двох комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі, використовуємо формулу (1.5.3):

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}=\frac{4}{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+isin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right)=$$

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+isin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=2(0+i)=2i$$

✧✧✧

11. Подати комплексне число у тригонометричній та показниковій формах $z=\sqrt{3}-i^3\sqrt{3}$.

Розв'язання.

Використаємо правило переходу від алгебраїчної до тригонометричної, а потім до показникової форми комплексного числа $z=x+iy$.

Спочатку спростимо комплексне число

$$z=\sqrt{3}-i^3\sqrt{3}=\sqrt{3}-i^2\cdot i\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}+i\sqrt{3}$$

Знаходимо модуль *r* комплексного числа за формулою: $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$r=\sqrt{\sqrt{3}^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{6}$$

Знаходимо найменший невід'ємний кут φ: $\varphi=atctg\left|\frac{a}{b}\right|$

$$\varphi=atctg\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{4}$$

Записуємо комплексне число у тригонометричній формі:

$$z=r(cos\varphi+isin\varphi):$$

$$z=\sqrt{6}(cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4})$$

Знаючи модуль та аргумент, записуємо комплексне число у показниковій формі $z=re^{i\varphi}$.

$$z=\sqrt{6}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

✧ ✧ ✧

12. Обчислити $(1 + i)^6$.

Розв'язання.

Запишемо число $z = 1 + i$ в тригонометричній формі: $z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i \sin\frac{\pi}{4})$.

Для знаходження добутку двох комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі, використовуємо формулу $z^n = r^n\ (cosn\varphi+isinn\varphi)$.

$$z^6 = (\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4})^{)6} = (\sqrt{2})^6\left(\cos 6\frac{\pi}{4} + i \sin 6\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$2^3(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2} = 8(0 - i) = -8i.$$

✧ ✧ ✧

13. Перевірити, чи рівні між собою комплексні числа:

$$\sqrt{3} + \text{i} \ \text{та}\ 2(\cos\frac{\pi}{6}+i \sin\frac{\pi}{6})?$$

Розв'язання.

Приведемо комплексне число $2(\cos\frac{\pi}{6}+i \sin\frac{\pi}{6})$ до алгебраїчної форми.

Скориставшись формулою $\begin{cases} x = r cos\varphi \\ y = r sin\varphi \end{cases}$, отримаємо:

$x = 2cos\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,

$y = 2sin\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Таким чином,

$2(\cos\frac{\pi}{6}+i \sin\frac{\pi}{6})= \sqrt{3} + \text{i}$.

Отже, ці комплексні числа рівні між собою.

✧ ✧ ✧

14. Знайти $\sqrt{-5 - 12i}$.

Розв'язання.

Нехай $\sqrt{-5 - 12i} = x + iy$,

тоді $-5-12\mathrm{i}=(x+iy)^2$, або

$$-5-12\mathrm{i}=x^2-y^2+2xy \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-5 \\ 2xy=-12 \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо: *x = 2, y = –3* або *x = –2, y = 3*.

Тому $z_1=2-3i$ та $z_2=-2+3i$.

Тобто $\sqrt{-5-12i}=\pm(2-3i)$

Як бачимо, добування кореня (навіть квадратного) з комплексного числа в алгебраїчній формі – операція доволі складна. Тому спочатку треба записати комплексне число в тригонометричній формі, а потім виконати цю дію.

✧✧✧

15. Знайти корінь п'ятого степеня із числа $z=\sqrt{3}+i$

Розв'язання.

Спочатку запишемо комплексне число в тригонометричній формі:

$$z=\sqrt{3}+i=2\left(cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\,sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

За формулою (1.5.7)

$$\sqrt[5]{z}=\sqrt[5]{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}=\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{5}}=\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{5}}=\omega_k,\ \textit{де } k=0,\ 1,\ 2,\ 3,4.$$

$\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$ – вершини правильного п'ятикутника

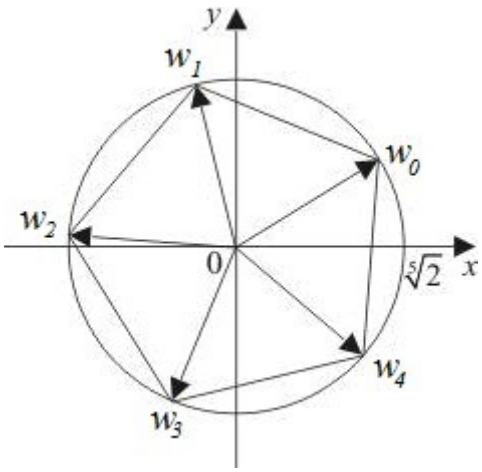
$\omega_0=\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt[5]{2}(cos30^0+i\,sin30^0)$;

$\omega_1=\sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{5}\right)}=\sqrt[5]{2}(cos102^0+i\,sin102^0)$;

$\omega_2=\sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{5}\right)}=\sqrt[5]{2}(cos174^0+i\,sin174^0)$;

$\omega_3=\sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{6\pi}{5}\right)}=\sqrt[5]{2}(cos246+i\,sin246^0)$;

$\omega_4=\sqrt[5]{2}\sqrt[5]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{8\pi}{5}\right)}=\sqrt[5]{2}(cos318^0+i\,sin318^0)$.



Геометрична інтерпретація коренів $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ така, що ці числа є вершинами правильного п'ятикутника, вписаного в коло радіусом $r = \sqrt[5]{2}$ із центром у початку координат.

1.7. Контрольні запитання

1. Що таке множина?
2. Яка множини називається порожньою?
3. Яка множина називається зліченною?
4. Які є числові множини?
5. Які основні операції виконують над множинами?
6. Сформулюйте означення уявної одиниці.
7. Дайте означення алгебраїчної форми комплексного числа.
8. Сформулюйте умови рівності комплексних чисел, записаних у алгебраїчній формі.
9. Що є результатом суми двох комплексних чисел?
10. Як виконується додавання комплексних чисел в алгебраїчній формі?
11. Що є результатом різниці двох комплексних чисел?
12. Як виконується віднімання комплексних чисел в алгебраїчній формі?
13. Що є результатом добутку двох комплексних чисел?
14. Як виконується множення комплексних чисел в алгебраїчній формі?
15. Що є результатом частки двох комплексних чисел?
16. Як виконується ділення комплексних чисел в алгебраїчній формі?

17. Які комплексні числа називають протилежними?

18. Які комплексні числа називають спряженими?

19. Чому дорівнює добуток комплексно спряжених чисел?

20. Як геометрично зображують комплексно спряжені комплексні числа?

21. Які формули можна застосовувати для того, щоб комплексне число, задане в алгебраїчній формі, піднести до додатного цілого степеня?

22. Як знайти модуль та аргумент комплексного числа, записаного в алгебраїчній формі?

23. Як записати комплексне число у тригонометричній формі?

24. Які дії над комплексними числами у тригонометричній формі можна виконати?

25. Як перемножити, поділити два комплексні числа у тригонометричній формі?

26. Як знайти корінь *n*-степеня з комплексного числа?

1.8. Завдання для самостійного виконання

1. Записати дійсні та уявні частини комплексного числа:

1) $1 + i$; 2) $-3 - i$;

3) $n + i\,e$; 4) $-2i$.

2. Записати комплексні числа, спряжені з даними:

1) $1 - i$; 2) $-i$;

3) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$; 4) $-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i$.

3. За умовою рівності комплексних чисел визначити дійсні x і y:

1) $-\mathrm{x} - 2\,i = 7 + yi$;

2) $3i = x - \frac{y}{4}i$;

3) $2 + 5xi - 3yi = 14i + 3x - 5y$;

4) $(3 + i)\,x - (1 - 2i)\,y = 7$.

4. Знайти суму комплексних чисел:

1) $(3+6i)+(-1-5i)$;
2) $(9-5i)+(-2-i)$;
3) $(2+3i)+(6+3i)$;
4) $(7-3i)+(-9+3i)$;
5) $(6+5i)+(4+6i)$;
6) $(-3+5i)+(4-8i)$;
7) $(3+2i)+(-1-5i)$;
8) $(2+3i)+(6-3i)$.

5. Знайти різницю комплексних чисел:

1) $(7+4i)-(1+i)$;
2) $(-5+9i)-(6+i)$;
3) $(6+7i)-(6-5i)$;
4) $(0{,}3+3i)-(-0{,}8+1{,}5i)$;
5) $(2-8i)-(5-i)$;
6) $(5+4i)-(2-3i)$;
7) $\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}i\right)-(-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}i)$;
8) $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{5}i\right)-(\frac{1}{9}-\frac{3}{9}i)$.

6. Знайти добуток комплексних чисел:

1) $(4-3i)\cdot(8+2i)$;
2) $(2-4i)\cdot(3-5i)$;
3) $(2-i)\cdot(-6)$;
4) $2i\cdot 3i$;
5) $(-3-7i)\cdot(-3i)$;
6) $(-5+i)\cdot(5-i)$;
7) $\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}i\right)\cdot(\frac{1}{5}-\frac{3}{4}i)$;
8) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{3}{5}i\right)\cdot(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{9}i)$.

7. Обчислити добуток спряжених комплексних чисел:

1) $(3+5i)\cdot(3-5i)$;
2) $(2+i)\cdot(2-i)$;
3) $(5+i)\cdot(5-i)$;
4) $(5+3i)\cdot(5-3i)$;
5) $(m-ni)\cdot(m+ni)$;
6) $(a+ib)\cdot(a-ib)$;
7) $(0{,}5+0{,}2i)\cdot(0{,}5-0{,}2i)$;
8) $\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{5}i\right)\cdot(\frac{2}{7}-\frac{3}{5}i)$.

8. Знайти частку комплексних чисел:

1) $\frac{2+5i}{3-2i}$;
1) $\frac{5+6i}{i}$;
3) $\frac{3+i}{3-i}$;
4) $\frac{4+8i}{1-3i}$;
5) $\frac{1-i}{1+i}$;
6) $\frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{6}}{-1+i\sqrt{3}}$;
7) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$;
8) $\frac{a}{a+bi}$.

9. Піднести до степеня комплексне число:

1) $(3 + 2i)^2$;
2) $(1 - i)^2$;
3) $(a + 5bi)^2$;
4) $(1 - 2ai)^2$;
5) $(3 + i)^3$;
6) $(2 - 3i)^3$;
7) $(2 + 3i)^4$;
8) $(5 - 2i)^4$.

10. Обчислити:

1) $(1 + i^5)^3 - (6 - i)$;
2) $(3 + 2i)(3 - 2i) - (\sqrt{2}i)^2$;
3) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 + 8i^{16}$;
4) $\frac{1}{1+i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}i\right)^2$;
5) $\frac{5}{1+2i} + (1 - i)^2$;
6) $\frac{5-5i}{2-i} + \frac{(1-i)^6}{2i}$;
7) $(1 + i)^2 + \frac{5i}{2-i}$;
8) $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i} + \frac{5-\sqrt{5}i+i^7}{3}$;
9) $(2 + i\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{3}i + 2i^{17})$;
10) $\frac{4+3i}{4-3i} - 14i^3$.

11. Знайти модулі цих комплексних чисел:

1) $-6 - 7i$;
2) $3 + 2i$;
3) $1 + i$;
4) $5i$;
5) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}$;
6) $-2 + 2\sqrt{3}i$;
7) $-\frac{1}{7} - \frac{1}{2}i$;
8) $\frac{1}{5} - \frac{\sqrt{5}}{3}i$.

12. Виконати дії над комплексними числами, заданими у тригонометричній формі. Результат записати у показниковій формі:

1) $2(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}) \cdot 3(cos\frac{\pi}{12} + isin\frac{\pi}{12})$;

2) $2\sqrt{2}(cos120^0 + isin120^0) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(cos60^0 + isin60^0)$;

3) $2\sqrt{2}(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)) \cdot \sqrt{2}(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right))$;

4) $10(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}) \div 2(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4})$;

5) $3(cos83^0 + isin83^0) \div 2(cos23^0 + isin23^0)$;

6) $3(cos\frac{5\pi}{4}+isin\frac{5\pi}{4}) \div 5(cos\frac{7\pi}{4}+isin\frac{7\pi}{4})$;

13. Подати у тригонометричній та показниковій формах комплексні числа:

1) $3+3i$; 2) $-1+\sqrt{3}i$;

3) $-i$; 4) $-1+i$;

5) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 6) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

7) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$; 8) $-2\left(1-\sqrt{3}\,i\right)$.

14. Записати алгебраїчну форму комплексного числа, записаного у показниковій формі:

1) $2\,e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$; 2) $\sqrt{6}\,e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$;

3)$3\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$; 4) $e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$;

5) $2\,e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$; 6) $\sqrt{3}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$;

7) $\sqrt{6}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$; 8) $4\sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$.

15. Знайти корінь із комплексних чисел:

1) $\sqrt{9(cos4\pi+isin4\pi)}$; 2) $\sqrt[4]{16(cos2\pi+isin2\pi)}$;

3) $\sqrt{4-3i}$; 4) $\sqrt[4]{-16}$;

5) $\sqrt[4]{1+i}$; 6) $\sqrt[3]{5+12i}$;

7) $\sqrt[3]{e^{i\pi}}$; 8) $\sqrt[5]{e^{i\frac{\pi}{3}}}$.

Розділ 2

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

2.1. Визначники. Обчислення визначників

Визначником (детермінантом) другого порядку називається число, яке обчислюють за правилом:

$$\Delta = det = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Символи a_{ij} називаються ***елементами визначника***. Вони можуть бути числами, функціями, алгебраїчними виразами. Положення елемента у визначнику характеризується двома індексами: перший *i* означає номер рядка (зверху вниз), а другий – номер *j* стовпця (зліва направо), на перетині яких знаходиться цей елемент.

Визначником (детермінантом) третього порядку називається число

$$\Delta = \det = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$- a_{32}a_{23}a_{11}$$

Елементи a_{11}, a_{22}, a_{33} утворюють головну діагональ визначника, а a_{31}, a_{22}, a_{13} побічну діагональ.

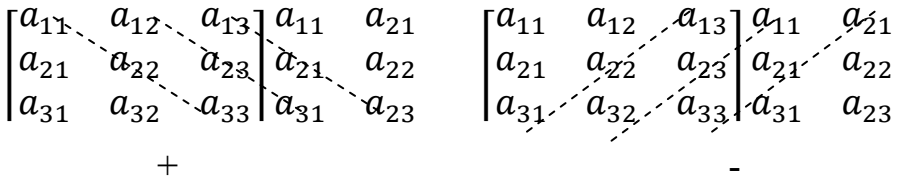
Обчислення виконуються за правилом трикутника: *зі знаком «+» беруться добутки елементів головної діагоналі, а також елементів, розміщених на прямих, паралельних головній діагоналі, та елемента*

розміщеного у відповідному протилежному куті визначника. Зі знаком «–» беруться добутки елементів побічної діагоналі, а також елементів, розміщених на прямих, паралельних побічній діагоналі, та елемента, розміщеного у відповідному протилежному куті визначника.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \bullet & \bullet \\ \bullet & a_{22} & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bullet & a_{12} & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{23} \\ a_{31} & \bullet & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & a_{13} \\ a_{21} & \bullet & \bullet \\ \bullet & a_{32} & \bullet \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & a_{13} \\ \bullet & a_{22} & \bullet \\ a_{31} & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & a_{12} & \bullet \\ a_{21} & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{23} \\ \bullet & a_{32} & \bullet \end{vmatrix}$$

Для обчислення визначників третього порядку використовують також правило Саррюса. За цим правилом у початковому визначнику за третім стовпцем запишемо ще раз перший і другий стовпці: зі своїм знаком у суму входять добуток елементів головної діагоналі та трьох елементів із розміщених вище паралельних їй рядів; із протилежним знаком – добуток елементів побічної діагоналі та трьох елементів із розміщених нижче паралельних їй рядів.



Визначником 4-го порядку називається число, яке позначається так:

$$\Delta = \det = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Аналогічно вводиться поняття визначника вищих порядків.

Визначником n-го порядку, називається число, яке позначається так:

$$D = \det \quad = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Визначники мають низку важливих властивостей, які допомагають ефективно їх обчислювати та застосовувати для прикладних задач.

Властивості визначників (розглянемо на прикладі визначників третього порядку)

1) визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};$$

2) якщо переставити місцями два рядки (стовпці), то визначник змінить знак;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{12} & a_{23} \\ a_{32} & a_{12} & a_{33} \end{vmatrix};$$

3) якщо один із рядків (стовпців) визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

4) якщо визначник має два однакові рядки (стовпці), то він дорівнює нулю;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

5) спільний множник, що міститься в усіх елементах одного рядка (стовпця), можна винести за знак визначника;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

6) якщо у визначнику елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

7) якщо стовпець (рядок) визначника є сумою двох стовпців (рядків), то визначник дорівнює сумі двох відповідних визначників;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

8) визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & a_{23} + ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

9) якщо елементи визначника, що розташовані з одного боку від головної діагоналі, дорівнюють нулю, то такий визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33};$$

10) якщо елементи визначника, що розташовані з обидвох сторін від головної діагоналі, дорівнюють нулю, то такий визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

2.2. Розклад визначника за елементами його рядка або стовпця

Нехай задано визначник n-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $n-1$ порядку, який утворюється з визначника n-порядку викресленням i-го рядка та j-го стовпця (рядка і стовпця, в яких знаходиться елемент a_{ij}).

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема. Визначник довільного порядку n дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_n a_{in} \cdot A_{in};$$

$$\Delta = a_{n1} \cdot A_{n1} + a_{n2} \cdot A_{n2} + \cdots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_n a_{nj} \cdot A_{nj}$$

Ця теорема називається ще ***теоремою розкладу***. Водночас перша формула є розкладом визначника за елементами i-го рядка та j-го стовпця, відповідно.

Наприклад:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} + a_{i4} \cdot A_{i4}$$

Теорема. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчне доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

2.3. Поняття матриці. Основні означення

Прямокутна таблиця чисел $a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1,\ 2, \dots, n,$ складена з *m* рядків та *n* стовпців і записана у вигляді:

$$A = A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

називається ***матрицею.***

Матриці позначають великими літерами латинського алфавіту, наприклад: *A, B, C, D*, а їх елементи – маленькими літерами з двома індексами a_{ij}, де перший індекс i вказує на номер рядка, а другий j – на номер стовпця.

Символічний добуток числа рядків m на число стовпців n називають ***розміром матриці*** й позначають $m \times n$.

Матриці бувають кількох видів:

Матриця-рядок (вектор-рядок), якщо вона складається з одного рядка:

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots\ a_{1n})$$

Матриця-стовпець (вектор-стовпець), якщо вона складається з одного стовпця:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

Квадратна матриця n-го порядку – це матриця, в якій число рядків дорівнює числу стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Про квадратні матриці розмірності $n \times n$ кажуть, що вони мають порядок n.

Діагональна матриця n-го порядку – це матриця, в якої всі елементи, окрім елементів a_{ij} для яких $i = j$, дорівнюють нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Елементи a_{ij}, для яких $i = j$, називають *діагональними*. Сукупність діагональних елементів утворює *головну діагональ матриці*.

Нульова матриця – це матриця довільного порядку, в якої всі елементи дорівнюють нулю.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Одинична матриця – це діагональна матриця, у якої кожний елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, позначається така матриця літерою ***E***.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Верхня трикутна матриця – це квадратна матриця, в якої всі елементи, які розташовані під головною діагоналлю, рівні нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Нижня трикутна матриця – це квадратна матриця, в якої всі елементи, які розташовані над головною діагоналлю, рівні нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Дві матриці – $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ – називаються ***рівними між собою***, якщо вони мають однакові розміри ($A = A_{m^{\times}n}$, $B = B_{m\times n}$) і рівні відповідні елементи: $a_{ij} = b_{ij}$.

Визначником квадратної матриці $\boldsymbol{A = (a_{ij})}$ називається визначник, який складений з елементів матриці і позначається символом *det A*. Таким чином,

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Квадратна матриця А називається ***невиродженою***, якщо її визначник не дорівнює нулю: $det\ A \neq 0$.

Матриця $A^T = (a^T{}_{ij})$ називається ***транспонованою*** до матриці $A = (a_{ij})$, якщо рядки матриці А замінити її стовпцями.

$$A = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = A^T{}_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Квадратна матриця А називається ***симетричною***, якщо $A^T = \text{A}$ (a_{ij}=a_{ji}), і ***кососиметричною***, якщо $A^T = -\text{A}$ (a_{ij}=$-a_{ij}$).

2.4. Дії над матрицями

Матриці A і B називаються ***узгодженими для додавання***, якщо вони мають однакову розмірність $m \times n$.

Сумою двох матриць однакового розміру $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ називається матриця $\boldsymbol{C = A + B}$ такого самого розміру, кожен елемент якої отримується додаванням відповідних елементів цих матриць:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Добутком матриці $\boldsymbol{A = (a_{ij})}$ ***на число*** $\boldsymbol{k}$ називається матриця, отримана множенням кожного елемента матриці A на число $\boldsymbol{k}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = k \cdot A = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриця $(-1) \cdot A$ називається ***протилежною до матриці*** A і позначається $-A$.

Різниця матриць $\boldsymbol{A - B}$ однакових розмірів визначається як сума матриці A і матриці B, помноженої на (–1):

$$A - \text{B} = A + (-1)\text{B}.$$

Матриця A називаються ***узгодженою для множення*** з матрицею B, якщо кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B. Якщо ця умова не виконується, тобто матриці неузгоджені, то множення

таких матриць неможливе. Квадратні матриці одного порядку взаємноузгоджені.

Якщо матриця A узгоджена з матрицею B, то ***добутком матриці*** $\boldsymbol{A_{m\times k} = (a_{ij})}$ ***на матрицю*** $\boldsymbol{B_{k\times n} = (b_{ij})}$ називається така $C_{m\times n}$-матриця, у якої елемент (c_{ij}) дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij} = a_{i1} * b_{1j} + a_{i2} * b_{2j} + \cdots + a_{in} * b_{nj},$$

де $i = 1,2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, k$

Властивості лінійних операцій над матрицями:

Відносно суми:

$A + B = B + A$;

$(A + B) + C = A + (B + C)$;

$(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$.

Відносно добутку на число:

$\lambda A = A\lambda$;

$(\lambda + \mu)\, A = \lambda A + \mu A$ *(дистрибутивність відносно суми чисел);*

$\lambda\,(A + B) = \lambda A + \lambda B$ *(дистрибутивність відносно суми матриць);*

$(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$.

Відносно множення матриць:

$A \cdot B \neq B \cdot A$;

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot \mathrm{C})$;

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;

$A \cdot E = E \cdot A = A$;

$A \cdot O = O \cdot A = O$;

$det(AB) = det\, A \cdot det\, B$, якщо A і B – квадратні матриці однакового порядку.

Матриці A і B називаються ***переставними***, якщо $A \cdot B = B \cdot A$.

Матриці $A_{m\times n}$ та $B_{m\times n}$ називаються ***еквівалентними***, якщо одна з них може бути отримана з іншої за допомогою елементарних перетворень.

Елементарними перетвореннями матриці $A_{m\times n}$ є:

1) перестановка місцями двох рядків (стовпців);

2) множення всіх елементів деякого рядка (стовпця) на число відмінне від нуля;

3) додавання до елементів деякого рядка (стовпця) елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те саме число.

2.5. Обернена матриця

Матрицю B називають ***оберненою до матриці A***, якщо $A \cdot B = E$.

Обернену матрицю до матриці A позначають A^{-1}.

Теорема. Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою ($det\ A \neq 0$), при цьому

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Алгоритм знаходження оберненої матриці:

1) знайти визначник *det A* матриці *A,* якщо він відмінний від нуля, матриця має обернену;

2) скласти матрицю з алгебраїчних доповнень елементів матриці *A*;

3) транспонувати матрицю з алгебраїчних доповнень;

4) кожен елемент транспонованої матриці *A* помножити на *1 / det A*.

Властивості оберненої матриці

1) Обернена матриця A^{-1} для невиродженої матриці A існує і є єдиною і невиродженою;

2) $det\ A^{-1} = (det\ A)^{-1} = \frac{1}{det\ A}$;

3) $(A^{-1})^{-1} = A$;

4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;

5) Якщо існують A^{-1} та B^{-1} то $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Якщо матриця A така, що $A^{-1}=A^T$, то кажуть, що A є ***ортогональною матрицею*** і $A^T \cdot A = A \cdot A^T = E$.

2.6. Ранг матриці

Розглянемо прямокутну матрицю A розмірності $m \times n$. Виділимо в матриці будь-які k рядків і стільки ж стовпців, де k – число, не більше m *і* n, тобто $k \leq min\,(m, n)$.

Визначник порядку k, складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називається ***мінором k-го порядку*** матриці $A = A_{m \times n}$.

Рангом матриці А називається найбільший порядок відмінного від нуля її мінора. Ранг матриці A прийнято позначати $rang\ A$ або *r(A).*

Якщо всі елементи $a_{ij} = 0$, то *rang A = 0.*

Із означення випливають такі *властивості рангу матриці*:

1) ранг матриці рівний нулю тільки тоді, якщо матриця нульова. В інших випадках ранг матриці рівний деякому додатному числу;

2) ранг прямокутної матриці не перевищує меншого із двох чисел m і n, тобто $0 \leq r \leq min(m, n)$;

3) для квадратної матриці *n-го* порядку $r = n$ тільки тоді, якщо матриця невироджена;

4) якщо $r < n$, то визначник матриці дорівнює нулю.

Для знаходження рангу матриці використовують два методи, один з них – *метод обведення.*

Якщо всі мінори першого порядку, тобто елементи матриці, рівні нулю, то $r = 0$. Якщо хоч один із мінорів першого порядку не дорівнює нулю, а всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, то $r = 1$. У випадку, коли є мінор другого порядку, відмінний від нуля, то досліджуємо мінори третього порядку. Так продовжують доти, поки не станеться одне з двох: або всі мінори порядку k дорівнюють нулю, або мінор порядку k не існує, тоді $r = k - 1$.

Другий метод визначення рангу матриці ґрунтується на застосуванні елементарних перетворень для зведення матриці до діагонального вигляду. За таких перетворень ранг матриці не змінюється. Ранг отриманої матриці дорівнює кількості її ненульових діагональних елементів.

2.7. Системи лінійних рівнянь.

Основні означення

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими називається система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі змінні, a_{ij} – коефіцієнти при невідомих, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – вільні члени.

Таку систему можна записати в ***матричній формі***

$$A \cdot X = B,$$

де матриця A (матриця коефіцієнтів) складається з коефіцієнтів при невідомих

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix},$$

матриця-стовпець X складається з невідомих змінних

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

матриця-стовпець B складається з коефіцієнтів $b_1, b_2, \dots, b_m$ вільних членів

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Система лінійних рівнянь називається ***однорідною***, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і ***неоднорідною***, якщо хоч один із них відмінний від нуля.

Множина чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ називається ***впорядкованою***, якщо вказано порядок слідування цих чисел, тобто вказано, яке з них є першим, другим і т. д.

Упорядкований набір чисел називається ***розв'язком системи***, якщо при підстановці цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ усі рівняння системи перетворюються в тотожність.

Систему рівнянь називають ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв'язок, і ***невизначеною***, якщо вона має більше, ніж один розв'язок.

Системи лінійних рівнянь називаються ***еквівалентними***, якщо вони мають одну й ту ж множину розв'язків. Еквівалентні системи отримують, зокрема, внаслідок елементарних перетворень цієї системи. *Елементарні перетворення системи лінійних рівнянь* відповідають елементарним перетворенням матриці за умови, що вони виконуються лише над рядками матриці.

2.8. Методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

2.8.1. Метод Крамера

Метод Крамера (правило Крамера) є одним із методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь із дійсними коефіцієнтами.

За допомогою методу Крамера можна знайти розв'язок системи n лінійних рівнянь з n невідомими (де n – ціле число), якщо визначник матриці коефіцієнтів не дорівнює нулю.

Метод Крамера полягає у знаходженні розв'язку системи лінійних рівнянь за допомогою визначника матриці коефіцієнтів та деяких допоміжних визначників, які можна отримати шляхом заміни стовпців матриці коефіцієнтів на стовпці вільних членів.

Для системи, що містить n рівнянь та n невідомих, введемо позначення

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Визначник Δ називається основним визначником системи. Визначник Δ_j $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ одержується з визначника Δ заміною j-го стовпчика стовпчиком вільних членів.

Теорема (Правило Крамера). Якщо визначник Δ системи n лінійних рівнянь з n невідомими не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулами:

$$x_j = \frac{\Delta j}{\Delta}, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Алгоритм розв'язання системи лінійних рівнянь методом Крамера:

1) записуємо систему лінійних рівнянь у матричному вигляді $A \cdot X = B$, де A – матриця коефіцієнтів, X – матриця-стовпець із невідомих змінних, B – матриця-стовпець із вільних членів;

2) обчислюємо визначник матриці коефіцієнтів системи A Δ;

3) для кожної змінної x_j обчислюємо визначники Δ_j, замінивши стовпець j матрицею-стовпцем із вільних членів B;

4) розв'язок системи лінійних рівнянь шукаємо за формулою $x_j = \Delta_j / \Delta$, де Δ_j – допоміжний визначник для змінної x_j,

а Δ – визначник матриці коефіцієнтів.

Для системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими метод Крамера має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок і його знаходять за ***формулами Крамера***

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\ x_1 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$$

Якщо $\Delta = 0$, а одне з чисел Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} не дорівнює нулю, то ***система розв'язку не має, тобто є несумісною.***

При $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$ система може бути ***несумісною або мати безліч розв'язків.***

При розв'язуванні n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими за правилом Крамера потрібно обчислювати $(n+1)$ визначники n-го порядку. Тому при $n \geq 4$ знаходження визначників призводить до громіздких обчислень, а отже, користуватись формулами Крамера незручно.

Зауваження. Формули Крамера найкраще використовувати тоді, коли визначник системи $\Delta \neq 0$, тобто коли розв'язок єдиний. Якщо кількість лінійних алгебраїчних рівнянь більша від кількості невідомих, то ефективніше використовувати інші методи (методи послідовного або повного виключення невідомих).

2.8.2. Метод оберненої матриці

Метод оберненої матриці (також відомий як матричний метод) – це числовий метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь шляхом використання оберненої матриці.

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3;, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

і визначник основної матриці не дорівнює нулю. Запишемо систему лінійних рівнянь у матричному вигляді $A \cdot X = B$, де A – матриця коефіцієнтів, X – матриця-стовпець із невідомих змінних, B – матриця-стовпець із вільних членів.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Якщо матриця A має обернену матрицю A^{-1}, то

$$A^{-1} \cdot A \cdot \mathrm{X} = A^{-1} \cdot B.$$

Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$, *то розв'язок системи визначається рівністю.*

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Отже, щоб розв'язати систему рівнянь, достатньо знайти матрицю, обернену до матриці системи *A*, і помножити її на матрицю з вільних членів справа.

Алгоритм розв'язування СЛАР – методом оберненої матриці:

1. *Підготовка системи рівнянь*: записуємо систему лінійних рівнянь у матричному вигляді $A \cdot X = B$, де *A* – матриця коефіцієнтів, *X* – матриця-стовпець із невідомих змінних, *B* – матриця-стовпець із вільних членів.

2. *Перевірка визначеності матриці*: переконуємося, що матриця A має ненульовий визначник. Якщо визначник дорівнює нулю, обернена матриця не існує, і метод не може бути застосований.

3. *Обчислення оберненої матриці:* якщо визначник ненульовий, знаходимо обернену матрицю A^{-1} для матриці *A*.

4. *Знаходження розв'язку*: розв'язок системи обчислюється як добуток оберненої матриці A^{-1} та стовпця вільних членів *B*.

2.8.3. Метод Гаусса

Метод Гаусса (також відомий як метод послідовного виключення невідомих) – найбільш потужний та універсальний інструмент для знаходження розв'язку будь-якої системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Суть методу Гаусса полягає в тому, щоб за допомогою елементарних перетворень привести задану систему до системи «сходинкового» трикутного вигляду.

Розглянемо систему *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases},$$

Очевидно, що серед коефіцієнтів a_{i1} хоча б один відмінний від нуля. Якщо ж $a_{11} = 0$, то першим у системі запишемо те рівняння, в якому коефіцієнт при x_1 відмінний від нуля. Позначимо цей коефіцієнт через a'_{11}.

Перетворимо систему, виключаючи x_1 в усіх рівняннях, крім першого. Для цього помножимо перше рівняння на $-\frac{a_{21}}{a'_{11}}$ і додаємо до другого, потім помножимо перше рівняння на $-\frac{a_{31}}{a'_{11}}$ і додаємо до третього і т. д. Водночас може статися так, що друге невідоме x_2також не входить в усі рівняння з номером $i > 1$. Нехай x_k невідоме з найменшим номером, яке входить у будь-яке рівняння, не враховуючи першого. Одержимо систему:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1; \\ a'_{2k}x_k + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{mk}x_k + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_n \end{cases},$$

$k > 1, a'_{11} \neq 0.$

Застосувавши до всіх рівнянь, окрім першого, таку саму процедуру і виконавши ряд елементарних перетворень, одержимо систему:

$$\begin{cases} a''_{11}x_1 + \ldots + a''_{1n}x_n = b''_1; \\ a''_{2k}x_k + \ldots + a''_{2n}x_n = b''_2; \\ a''_{3l}x_l + \ldots + a''_{3l}x_l = b''_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a''_{lk}x_l + \ldots + a''_{ln}x_n = b''_n \end{cases},$$

$a''_{11} \neq 0, a''_{2k} \neq 0.$

Якщо продовжити цей процес, то матимемо систему:

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1; \\ \bar{a}_{2k}x_k + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2; \\ a''_{3l}x_l + \ldots + a''_{3l}x_l = \bar{b}_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{a}_{rs}x_l + \ldots + \bar{a}_{rs}x_n = \bar{b}_r; \\ 0 = \bar{b}_{r+1}; \\ \ldots \\ 0 = \bar{b}_m \end{cases},$$

Таку систему рівнянь називають ***східчастою або трапеціїподібною***.

Система східчастого вигляду вказує на два можливі випадки:

1) якщо система містить рівняння виду $0 = b_t$ і $b_t \neq 0$, то вона очевидно несумісна;

2) якщо система не містить рівнянь виду $0 = b_t$ (коли ліві частини відповідних рівнянь дорівнюють нулю), маємо тотожності, і ці нульові рядки можна відкинути. Тоді матимемо один з двох випадків:

а) кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих – система має єдиний розв'язок;

б) кількість рівнянь менша за кількість невідомих – система має безліч розв'язків.

Алгоритм розв'язування системи n лінійних рівнянь з n невідомими методом Гаусса.

Процес розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса складається з двох етапів.

На *першому етапі (прямий хід)* система рівнянь, за допомогою елементарних перетворень, зводиться до рівносильної їй системи трикутної форми:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \ +\ldots+a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ +\cdots+ a_{2n}x_n = b_{2:}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \ +\cdots+ a_{3n}x_n = b_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 +\ldots+a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 +\ldots+a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad\quad \mathrm{c}_{22}x_2 + \mathrm{c}_{23}x_3 \ +\cdots+ \mathrm{c}_{2n}x_n = d_2; \\ \qquad\qquad\quad \mathrm{c}_{33}x_3 +\cdots+ a_{3n}x_n = d_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}x_n = d_n. \end{cases}$$

На *другому етапі (обернений хід)* з отриманої «сходинкової» системи виконується послідовне знаходження значень невідомих величин.

Якщо кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь, то система має єдиний розв'язок. Якщо система не містить рівнянь виду $0 = d_n$, то вона має безліч розв'язків.

2.9. Однорідні системи лінійних рівнянь

Система *m* лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими називається однорідною, якщо вона має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Ця система завжди має нульовий розв'язок $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, тому, що підстановка нулів замість невідомих у кожне з рівнянь перетворює їх на тотожність. Ненульові розв'язки, якщо вони існують, можна знайти за методом Гауса.

Теорема. Якщо визначник Δ системи *n* лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими дорівнює нулю, а серед алгебраїчних доповнень A_{ij} $(\mathrm{i} = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,n)$ елементів *i*-го рядка є ненульові, то ця система має ненульовий розв'язок, який шукається за формулою:

$$x_j = \mathrm{A}_{ij} \cdot t,$$

де *t* – деякий параметр.

Для системи трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими теорема формулюється так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases}$$

Якщо визначник $\Delta = 0$, то система має безліч розв'язків:

1. Якщо у визначнику Δ існує принаймні один відмінний від нуля мінор другого порядку, наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

Рівняння системи, що містять відміний від нуля мінор, запишемо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -a_{13}x_3 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -a_{23}x_3 0. \end{cases}$$

За формулами Крамера $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

Оскільки x_3 може набувати довільних дійсних значень, то, взявши, що $x_3 = \Delta t$, де t довільне дійсне число, отримаємо:

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t, x_2 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \cdot t, x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot t.$$

2. Нехай тепер визначник системи і всі його мінори другого порядку дорівнюють нулю. Це означає, що коефіцієнти всіх трьох рівнянь пропорційні, тому система зводиться до одного рівняння з трьома невідомими. Надаючи двом невідомим довільних значень, знаходять відповідне їм третє невідоме.

Отже, якщо визначник однорідної системи дорівнює нулю, то така система має безліч розв'язків.

2.10. Критерій сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо систему *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases},$$

Складемо основну матрицю A і розширену $\tilde{A}$ для такої системи. Розширену матрицю у цьому випадку записують з вертикальною прямою рискою, яка відділяє коефіцієнти біля невідомих від вільних членів. Стовпець вільних членів міняти місцями з іншими стовпцями розширеної матриці не можна.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} & b_3 \end{pmatrix}$$

Теорема Кронекера-Капеллі. Система *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими має розв'язок, тобто сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці $r(A)$ дорівнює рангу розширеної матриці $r(\tilde{A})$.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший від числа невідомих, то система має безліч розв'язків.

Базисним мінором матриці називається відмінний від нуля мінор, порядок якого рівний рангу матриці. Допустимо, що $r(A) = r(\tilde{A}) = r$. Для знаходження розв'язків системи візьмемо *r* рівнянь, в яких коефіцієнти, при невідомих утворюють базисний мінор. Інші рівняння відкидаємо. Невідомі, коефіцієнти при яких утворюють базисний мінор, називають ***основними (або базисними)*** і залишають зліва. Інші $(n - r)$ невідомі називають ***вільними*** і переносяться в праві частини рівнянь. Надаючи довільних числових значень вільним невідомим, знаходимо відповідні значення основних невідомих.

Зауваження: метод Гаусса зручно використовувати, записавши систему рівнянь у вигляді розширеної матриці.

2.11. Розв'язування прикладів та задач

✧ ✧ ✧

1. Обчислити визначники другого порядку:

1) $\begin{vmatrix} x & -5x \\ 7x & 8x \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{vmatrix}$

Розв'язання.

1) $\begin{vmatrix} x & -5x \\ 7x & 8x \end{vmatrix} = x \cdot 8x - (-5x) \cdot 7x = 8x^2 + 35x^2;$

2) $\begin{vmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{vmatrix} = cos\alpha \cdot cos\alpha - sin\alpha \cdot sin\alpha = cos^2\alpha + sin^2\alpha.$

✧ ✧ ✧

2. Обчислити визначники третього порядку:

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix};$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 6 \\ 8 & -10 & 7 \end{vmatrix};$

3) $\begin{vmatrix} 7 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & -5 \end{vmatrix};$ 4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix};$

5) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 6 & -8 & 10 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix};$ е) $\begin{vmatrix} 10 & 12 & -7 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$

Розв'язання.

Для обчислення визначника третього поряду використовуємо правило трикутника, тобто перші три доданки є добутками елементів, що стоять на головній діагоналі і в вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно утворюються доданки зі знаком мінус, де за основу береться побічна діагональ.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \cdot 1 -$

$-2 \cdot 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 5 \cdot 1 = 0 + 10 + 2 - 3 - 0 + 5 = 14;$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 6 \\ 8 & -10 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 7 + 2 \cdot 6 \cdot 8 + (-2) \cdot (-10) \cdot (-4) -$

$-8 \cdot 0 \cdot (-4) - (-2) \cdot 2 \cdot 7 - (-10) \cdot 6 \cdot 3 = 96 - 80 + 28 + 180 = 224;$

3. Визначник буде дорівнює нулю, оскільки один із рядків визначника складається тільки з нулів (*властивість 3*):

$$\begin{vmatrix} 7 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & -5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 0 \cdot (-5) + (-6) \cdot 0 \cdot 3 + 0 \cdot 8 \cdot 9 - 3 \cdot 0 \cdot 9 -$$

$$-0 \cdot (-6) \cdot (-5) - 8 \cdot 0 \cdot 7 = 0;$$

4. Визначник третього порядку буде дорівнює нулю, оскільки він має одинакові стовпці (*властивість 4*):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 3 \cdot 5 -$$

$$-5 \cdot 1 \cdot 2 = 10 + 12 - 15 - 12 + 15 - 10 = 0;$$

5. Визначник третього порядку буде дорівнює нулю, оскільки у визначнику елементи двох рядків пропорційні (*властивість 6*):

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 6 & -8 & 10 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-8) \cdot (-3) + (-4) \cdot 10 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 \cdot 5 - (-1) \cdot$$

$$(-8) \cdot 5 - 6 \cdot (-4) \cdot (-3) - 2 \cdot 10 \cdot 3 = 72 + 40 + 60 - 40 - 72 - 60 = 0;$$

6. Визначник третього порядку буде дорівнює добутку елементів головної діагоналі, оскільки елементи, що розташовані з одного боку від головної діагоналі, дорівнюють нулю (*властивість 9*):

$$\begin{vmatrix} 10 & 12 & -7 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 10 \cdot 2 \cdot (-4) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = -80.$$

✧ ✧ ✧

3. Знайти мінор M_{12} до елемента a_{21} та мінор M_{32} до елемента a_{32} визначника $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

Щоб знайти мінор M_{21} до елемента a_{21}, потрібно викреслити у визначнику рядок і стовпчик, які містять вибраний елемент, тому викреслюємо

другий рядок і перший стовпець і обчислюємо визначник нижчого порядку.

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3.$$

Аналогічно обчислюємо і мінор M_{32} до елемента a_{32}:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 6 = 18.$$

✧ ✧ ✧

4. Знайти алгебраїчні доповнення до елементів a_{21} та a_{33} а визначника $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

Алгебраїчні доповнення A_{13} і A_{32} знайдемо за формулою:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 7 = -12;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -(-18 - 0) = -18.$$

✧ ✧ ✧

5. Обчислити визначник 3-го порядку, розклавши його за елементами першого рядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 (0 - 24) + 2 \cdot (-1)^3 (0 - 20) +$$

$$+3 \cdot (-1)^4 (18 + 5) = -24 + 40 + 69 = 85.$$

Зауваження. Цей визначник простіше було б обчислювати, розклавши його за елементами третього рядка (або третього стовпця), оскільки один із доданків не потрібно обчислювати (елемент $a_{33} = 0$).

✧✧✧

6. Обчислити визначник 4-го порядку $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -5\end{vmatrix}$

Розв'язання.

Розкладемо визначник за елементами другого рядка:

$$\Delta= 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -5\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -5\end{vmatrix}+$$

$$+1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -5\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}.$$

Обчислимо кожен із цих визначників за правилом трикутника:

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -5\end{vmatrix}=10+0+0-(-8)-15-0=3;$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -5\end{vmatrix}=5+0+24-(-4)-(-30)-0=63;$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=0+(-2)+18-(-3)-0-(-2)=21.$$

Отже,

$$\Delta= 1\cdot(-1)^{3}\cdot 3+0+1\cdot(-1)^{5}\cdot 63+2\cdot(-1)^{6}\cdot 21=-3-63+42=-24.$$

Як бачимо, обчислення визначника 4-го порядку зводиться до обчислення чотирьох визначників 3-го порядку, а обчислення визначника 5-го порядку – до обчислення п'яти визначників 4-го порядку або двадцяти визначників 3-го порядку. Тому доцільно спочатку перетворити визначник так, щоб в одному з рядків (або стовпців) усі елементи, крім одного, стали нульовими. Цього можна досягти, використавши властивості визначників. Таким чином, обчислення визначника *n*-го порядку зводиться до обчислення лише одного визначника *(n − 1)*-го порядку.

✧✧✧

7. Обчислити визначники:

$$1)\ \Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix};\qquad 2)\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & 17 & -6 & -11 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 9 \\ 8 & 3 & 6 & 8 & 11 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

1. У першому рядку перетворимо всі елементи, крім першого, на нулі. Для цього, залишаючи перший і другий стовпці без змін, до третього додаємо перший, а до четвертого – перший, помножений на *(-2)*. Тоді:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементом першого рядка, одержимо:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=2+(-4)+(-6)-2-$$

$$-3-8=-21.$$

2. У першому стовпці перетворимо всі елементи, крім другого, на нулі. Для цього, залишаючи другий рядок без змін, до першого рядка додаємо другий, помножений на *(-2)*, до третього – перший, до четвертого – перший, помножений на *(-2)*, а до п'ятого – четвертий, помножений на *(-2)*. Тоді матимемо:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 20 & -2 & -6 \\ 0 & -12 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -6 & -7 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементом першого стовпця, і винесемо за знак визначника спільний множник 2 з третього рядка і (-1) з четвертого, одержимо:

$$\Delta_2 = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & -1 & -3 \\ 12 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & -7 \end{vmatrix}.$$

У першому рядку визначника перетворимо всі елементи, крім четвертого, на нулі. Тоді:

$$\Delta_2 = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & -1 & -3 \\ 11 & 10 & 1 & 1 \\ 6 & -31 & -6 & -7 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементом першого рядка, одержимо:

$$\Delta_2 = 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 11 & 10 & 1 \\ 6 & -31 & -6 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-240 + (-30) + 341 - (-60) - 330 - (-124)) = 150.$$

✧✧✧

8. Знайти суму і різницю матриць: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 12 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+2 & -3+1 & 12+(-4) \\ 5+(-3) & -1+5 & 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-2 & -3-1 & 12-(-4) \\ 5-(-3) & -1-5 & 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 16 \\ 8 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

✧✧✧

9. Обчислити матрицю $C = 2A - 4B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Розв'язання.

Використавши формулу множення матриці на число і формулу віднімання матриць, одержимо

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 5 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 10 & -2) \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad 4 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 16 \\ 8 & 24 \end{pmatrix},$$

$$C = 2A - 4B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 10 & -2) \\ 8 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 16 \\ 8 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 18 & -18 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}.$$

✧✧✧

10. Обчислити матрицю $C = A \cdot B$, якщо

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, B = (1 \quad 2)$.

Розв'язання.

1. Матриця $A_{2\times 2}$ узгоджена з матрицею $B_{2\times 3}$, оскільки кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці, тому за означенням маємо

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Зауваження. Тут добуток BA невизначений, оскільки кількість стовпців першої матриці $B_{2\times 3}$ не дорівнює кількості рядків другої матриці $A_{2\times 2}$.

2. $C = A \cdot B = A_{2\times 1} \cdot B_{1\times 2} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 \\ -2 \cdot 1 & -2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Зауваження. З правила множення матриць випливає, що завжди можна перемножити дві квадратні матриці одного порядку; в результаті одержимо матрицю того самого порядку. Зокрема, квадратну матрицю можна помножити

саму на себе, тобто піднести до квадрата; прямокутну неквадратну матрицю піднести до квадрата не можна.

✧✧✧

11. Знайти обернену матрицю для матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ і показати, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Розв'язання.

Обчислюємо визначник матриці A:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 24 + 9 - 4 - 18 - 12 = 3 \neq 0.$$

Матриця A невироджена, тому обернена матриця існує.

Знаходимо алгебраїчні доповнення кожного елемента цієї матриці.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - (-6) = 4;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 3) = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 8) = 2;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - (-4) = 0;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(-4 - (-3)) = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - (-4) = -5;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -(6 - 12) = 6;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7;$$

Складаємо матрицю з алгебраїчних доповнень елементів матриці A $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$.

Транспонуємо матрицю з алгебраїчних доповнень $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -3 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$.

Обернена матриця A^{-1} для заданої матриці A матиме вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -3 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-5}{3} \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-7}{3} \end{pmatrix}.$$

Переконуємося, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-5}{3} \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-7}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-5}{3} \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-7}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

✧ ✧ ✧

12. Знайти ранг матриці:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

1. Серед мінорів першого порядку (тобто елементів матриці) є відмінні від нуля, тому $r(A) \geq 1$.

Усі мінори 2-го порядку

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0,\ M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0,\ M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

дорівнюють нулю. Отож, ранг матриці A дорівнює одиниці $r(A) = 1$.

2) Серед мінорів першого порядку (тобто елементів матриці) є відмінні від нуля, тому $r(A) \geq 1$.

Оскільки один із мінорів другого порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

А всі мінори третього порядку дорівнюють нулю, оскільки містять стовбець, в якому всі елементи нулі. Отже, ранг матриці A дорівнює $r(A) = 2$.

Зауваження. Вказаний метод знаходження рангу матриці не завжди зручний, тому що пов'язаний з обчисленням значного числа визначників. Простіший метод ґрунтується на тому, що ранг матриці не змінюється, якщо над матрицею виконати так звані елементарні перетворення, а саме:

1) переставити місцями два рядки (стовпці);

2) помножити кожен елемент рядка (стовпця) на один і той самий відмінний від нуля множник;

3) додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.

3. Виконаємо елементарні перетворення:

а) в заданій матриці переставимо перший і другий рядки. На місці елемента a_{11} маємо елемент рівний *1*.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ 5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ 5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

б) додамо до елементів другого і третього рядків відповідні елементи першого рядка, помножені на (-3), а до елементів четвертого рядка – відповідні елементи першого, помножені на (-5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -24 \end{pmatrix};$$

в) у першому рядку можна автоматично записати всі нулі, крім першого елемента 1. Цього можна добитись, якщо до елементів 2-го, 3-го, 4-го і 5-го стовпців додати відповідні елементи першого стовпця, помножені відповідно на числа: $(-3), (-3), (-2), (-5)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -24 \end{pmatrix};$$

г) додаймо до елементів третього і четвертого рядків відповідні елементи другого рядка, помножені на число (-2).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

д) в другому рядку на місці елементів $(-7), (-3), (-11)$ запишемо нулі (аналогічно як на третьому кроці).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матриці утворені одна з другої елементарними перетвореннями, отже мають один і той самий ранг.

$$r(A) = 3.$$

✧✧✧

13. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1; \end{cases}$$

трьома способами:

1) методом Крамера; 2) методом Гаусса;

3) методом оберненої матриці.

Розв’язання.

Знаходимо визначник системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 1 - 2 + 1 = -6 \neq 0$$

Отже, система має єдиний розв’язок.

1) методом Крамера.

Знаходимо визначники невідомих:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 1 - 2 + 1 = -6;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 2 - 2 = 0;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 + 2 + 1 = 6;$$

За формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-6}{-6} = 1;$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{0}{-6} = 0;$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{6}{-6} = -1;$$

Відповідь: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$

2) метод Гаусса.

Прямий хід. Зведемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь до східчастого вигляду. Для цього помножимо друге рівняння системи на (-2) і додамо його до першого рівняння, а результат запишемо в другому рядку. Перший рядок системи залишаємо без зміни. Третє рівняння системи множимо на (-1) і додамо до другого рівняння системи, а результат запишемо в третьому рядку.

Внаслідок цього одержимо систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Тепер виключимо змінну x_2 .Для цього третє рівняння системи множимо на 5 і додаємо до другого рівняння цієї ж системи.

Відтак одержимо таку систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_2 - x_3 = 1 \\ -6x_3 = 6 \end{cases}$.

Зворотній хід. З третього рівняння системи знаходимо $x_3 = -1$.

Підставивши це значення в друге рівняння системи, знаходимо $x_2 = 0$. Далі, підставивши знайдені значення x_2 і x_3 в перше рівняння системи, знаходимо $x_1 = 1$.

Відповідь: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$.

Зауваження. Порядок виключення змінних x_1, x_2, x_3 може бути довільним. Якщо, будь яке рівняння системи містить тільки дві (одну) змінні, то його для зручності слід записати в третьому рядку.

3) метод оберненої матриці.

записуємо систему лінійних рівнянь у матричному вигляді $A \cdot X = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$ – матриця коефіцієнтів,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ – матриця-стовпець із невідомих змінних,

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ – матриця-стовпець із вільних членів.

Переконуємося, що матриця A має ненульовий визначник.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 1 - 2 + 1 = -6 \neq 0$$

Знаходимо обернену матрицю A^{-1}.

Для цього обчислюємо всі алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3;$ $A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3;$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1;$ $A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1;$ $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1;$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3;$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5.$

Враховуючи, що $\Delta = \det A = -6$, одержимо

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку, помноживши матрицю A^{-1} на матрицю A.

$$\mathrm{A^{-1}A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ми переконались, що обернена матриця знайдена правильно.

Розв’язок системи знаходимо як добуток оберненої матриці A^{-1} та стовпця вільних членів B

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot(-1)\\ \frac{1}{6}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot(-1)\\ -\frac{1}{6}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{5}{6}\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1=1, x_2=0, x_3=-1$.

✧✧✧

14. Розв’язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса:

1) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1;\\ 2x_1+x_2+2x_3=1;\\ x_1+x_2+3x_3=2;\\ x_1+3x_3=1.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}-x_1+x_2+2x_3=1;\\ x_1+2x_2-x_3=2;\\ 2x_1+x_2-3x_3=1;\\ x_1+5x_2=5.\end{cases}$

Розв’язання.

1. Складемо розширену матрицю і проведемо необхідні елементарні перетворення над рядками матриці даної системи, щоб звести її до трикутного вигляду:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&1&2&1\\1&1&3&2\\1&0&3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&-1\\0&0&2&1\\0&-1&2&0\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&-1\\0&0&2&1\\0&0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&-1\\0&0&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Отже, система $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1;\\ 2x_1+x_2+2x_3=1;\\ x_1+x_2+3x_3=2;\\ x_1+3x_3=1.\end{cases}$ еквівалентна системі трикутного вигляду

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1;\\ -x_2=-1;\\ 2x_3=1;\end{cases}$$

і має єдиний розв’язок $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=1, x_3=\frac{1}{2}$.

2. Складемо розширену матрицю і проведемо необхідні елементарні перетворення над рядками матриці такої системи, щоб звести її до трикутного вигляду:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отже, система $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1; \\ x_1 + 5x x_2 = 5. \end{cases}$ еквівалентна системі трикутного вигляду б) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \\ 3x_2 + x_3 = 3; \end{cases}$ і має безліч розв'язків.

Із системи знаходимо $x_1 = \frac{5}{3}t, x_2 = 1 - \frac{t}{3}, x_3 = t$, де t – довільне число.

✧ ✧ ✧

15. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Розв'язання.

1) визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

тому система має єдиний нульовий розв'язок: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

2) визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

тому система невизначена. Всі мінори другого порядку, що містяться у першому і другому рядках визначника, дорівнюють нулю. Візьмемо друге і третє рівняння системи:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0;$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Ці рівняння мають відмінний від нуля мінор другого порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

тому

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} t, x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot t, x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot t.$$

Отже система має безліч розв'язків: $x_1 = -t, x_2 = 7t,\ x_3 = 3t,$ де t – довільне число.

✧✧✧

16. Дослідити на сумісність систему лінійних рівнянь і розв'язати її, якщо вона сумісна:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

Розв'язання.

1) ранг основної матриці $r(A) = 3$. Щоб обчислити ранг розширеної матриці Ã, зведемо її до трикутного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -4 & -8 & -32 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & -1 & -7 & -23 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & -8 & -32 \\ 0 & -1 & -7 & -23 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отже, $r(A) = r(\tilde{A}) = 3$, оскільки найвищий порядок мінора як матриці A, так і матриці $\tilde{A}$, дорівнює 3. За теоремою Кронекера-Капеллі, вихідна система лінійних рівнянь має розв'язок, причому єдиний, адже кількість невідомих теж дорівнює 3.

Це означає, що два рівняння (перше і четверте) системи можна відкинути. Запишемо ті три рівняння, визначник із коефіцієнтів, які стоять біля невідомих, відмінний від нуля, наприклад:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

тобто розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок цієї системи за методом Крамера. Для цього обчислимо $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$, які одержуються з визначника системи Δ, шляхом заміни стовпців із коефіцієнтів, які стоять біля невідомих, стовпцем із вільних членів:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

За формулами Крамера:

$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1;$ $\qquad$ $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2;$

$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3.$

2) Ранг основної матриці $r(A) = 2$, а ранг розширеної матриці $r(\tilde{A}) = 3$, тому задана система рівнянь несумісна.

2.12. Контрольні запитання

1. Що таке визначник (детермінант) матриці?

2. Які основні властивості визначників?

3. Що таке мінор і алгебраїчне доповнення елементаa_{ij} визначника?

4. Запишіть у загальному вигляді визначники другого, третього та n-го порядків.

5. Як обчислюється визначник третього порядку?

6. Які є методи обчислення визначників?

7. Як змінюється значення визначника при перестановці рядків або стовпців матриці?

8. Що станеться з визначником, якщо один із його рядків (або стовпців) помножити на число?

9. Який зв’язок між визначником та рангом матриці?

10. Що таке матриця?

11. Як визначається і позначається розмір матриці?

12. Які види матриць ви знаєте?

13. Що таке квадратна матриця?

14. Що таке одинична матриця? Які її властивості?

15. Які арифметичні операції можна виконувати над матрицями? Які їхні основні властивості?

16. Які умови повинні виконуватися, щоб дві матриці можна було перемножити?

17. Що таке елементарні перетворення матриць?

18. Що означає еквівалентність матриць?

19. Що таке ранг матриці? Як його знаходять?

20. Яка матриця називається оберненою? Які умови її існування?

21. Як знайти обернену матрицю?

22. Що таке система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)?

23. Які системи називаються сумісними, а які – несумісними?

24. Сформулюйте правило Крамера для розв'язання системи лінійних рівнянь порядку $n \times n$.

25. Як розв'язати систему лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці?

26. Сформулюйте критерій сумісності системи лінійних рівнянь (теорема Кронекера-Капеллі).

27. Як розв'язати систему лінійних рівнянь за допомогою методу Гаусса?

28. Що таке загальний, частинний, базисний та опорний розв'язки системи лінійних рівнянь?

29. Що таке однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь? Як вона розв'язується?

30. За яких умов однорідна система лінійних рівнянь має ненульовий розв'язок?

2.13. Завдання для самостійного виконання

1. Обчислити визначники:

1) $\begin{vmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{15} \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} tg\beta & -1 \\ 1 & ctg\alpha \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \\ 6 & -17 & 8 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -36 \\ 3 & -2 & -27 \\ -10 & -7 & 90 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 7 \\ -4 & -10 & 2 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 9 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 8 & 5 & 3 \end{vmatrix}$;

8) $\begin{vmatrix} 6 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати рівняння:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ x & -4 & 6 \\ -1 & x & -3 \end{vmatrix} = 0;$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & -1 & -x \\ -x & 2x & 1 \end{vmatrix} = 4;$

3) $\begin{vmatrix} \mathrm{x} & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & \mathrm{x} \end{vmatrix} = 9;$

4) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ -x & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 0;$

5) $\begin{vmatrix} \mathrm{x} & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathrm{x}^2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 8 = 0;$

6) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & \mathrm{x}^2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & \mathrm{x} \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 0.$

3. Користуючись властивостями визначників, довести рівності:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\mathrm{x} & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy;$

2) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & a & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix};$

3) $\begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 2 \\ 2+x & 2-x & 4 \\ 3-x & 3+x & 2 \end{vmatrix} = 4x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix};$

4) $\begin{vmatrix} sin^2\alpha & cos^2\alpha & cos\,2\alpha \\ sin^2\beta & cos^2\beta & cos\,2\beta \\ sin^2\gamma & cos^2\gamma & cos\,2\gamma \end{vmatrix} = 0;$

5) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2).$

4. Обчислити визначники накопиченням нулів у рядку чи стовпці:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix};$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix};$

3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & 17 & -6 & -11 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 9 \\ 8 & 3 & 6 & 8 & 11 \end{vmatrix}$.

5. Знайти транспоновану матрицю до заданих:

1) $A = (-1 \quad 3 \quad 0)$;

2) $B = \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ -\frac{1}{124} \\ 9{,}87 \end{pmatrix}$;

3) $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $D = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

5) $E = \begin{pmatrix} -2 & 14 & -8 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$;

6) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -4 & -6 & -5 \\ -5 & -9 & 2 & 8 \\ 4 & -6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Знайти матриці:

а)$-2A + 6B$, б)$3A - 4B$, в) $\frac{-2}{3}A - 5B^T$, якщо

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 15 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 30 & 44 \\ 2 & 25 \end{pmatrix}$;

2) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -6 & 1 \\ -5 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 & 10 \\ -3 & 0 & -16 & 11 \\ -1 & -5 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$;

7. Знайти добуток матриць:

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\\ 5 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -3\\ 5 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix}-2 & 4 & -3\\ 3 & -1 & 5\\ 0 & 3 & -4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -2 & -5\end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -3 & 0 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 8\\ 4 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 7\\ -4 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix}5 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 3\\ 3 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}6\\ -2\\ 7\\ 4\end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4 & -2 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix}5 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$.

8. Довести, що переставний закон добутку двох матриць не виконується. Тобто, що $A \cdot B \neq B \cdot A$

$A = \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 4 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix}6 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

9. Обчислити степені матриць:

1) $\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & 5\end{pmatrix}^2$;

2) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}^3$;

3) $\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 5\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}^2$;

4) $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^2$.

10. Задано многочлен $f(x) = 4x^2 + 2x - 3$. Знайти $f(A)$, якщо

1) $A = \begin{pmatrix}2 & -7\\ -5 & 4\end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix}1 & -5\\ 0 & -6\end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & -4 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 3\\ 7 & 2 & -1\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

(*Підказка*: Відповідно до означення многочлена від матриці одержимо: $f(A) = 4A^2 + 2A - 3E$, де E – одинична матриця третього порядку).

11. Знайти обернену матрицю до матриць. Зробити перевірку:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

12. Розв’язати матричні рівняння:

1) $X\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $X\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

6) $X\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

13. Визначити ранг матриці:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

14. Розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь трьома способами:

а) методом Крамера;

б) методом Гаусса;

в) матричним методом.

1) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 14x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15; \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 31; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -3; \\ 2x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5; \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$

15. Розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса:

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1; \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 = -2; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3; \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2; \\ x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$

16. Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

1) $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 20x_4 = 0; \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 = 0. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$

17. Дослідити на сумісність систему лінійних рівнянь і розв’язати її, якщо вона сумісна:

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 4; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \\ 6x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 11x_4 = 6. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4; \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2; \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5; \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = - - 3; \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3; \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

18. Дослідити і розв’язати систему рівнянь залежно від значення параметра λ:

1) $\begin{cases} \lambda x + \lambda y + (\lambda + 1)z = \lambda; \\ \lambda x + \lambda y + (\lambda - 1)z = \lambda; \\ (\lambda + 1)x + \lambda y + (2\lambda + 3)z = 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} (1 + \lambda)\mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z} = 1; \\ \mathrm{x} + (1 + \lambda)\mathrm{y} + \mathrm{z} = 1; \\ \mathrm{x} + \mathrm{y} + (1 + \lambda)\mathrm{z} = \lambda. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$

4) $\begin{cases} (3 + 2\lambda)x_1 + (1 + 3\lambda)x_2 + \lambda x_3 + (\lambda - 1)x_4 = 3; \\ 3\lambda x_1 + (3 + 2\lambda)x_2 + \lambda x_3 + (\lambda - 1)x_4 = 1; \\ 3\lambda x_1 + 3\lambda x_2 + 3x_3 + (\lambda - 1)x_4 = 1; \\ 3\lambda x_1 + 3\lambda x_2 + \lambda x_3 + (\lambda - 1)x_4 = 1. \end{cases}$

Розділ 3

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

3.1. Вектори.
Загальні поняття та означення

У фізиці, математиці, економіці та інших науках є величини двох видів: одні з них характеризуються тільки числом, а інші – числом і напрямом у просторі.

Величини називаються ***скалярними*** або скалярами, якщо кожна із них визначається своїм числовим значенням у вибраній системі одиниць, наприклад, довжина, площа, об'єм, час, температура.

Величини називаються ***векторними*** або векторами, якщо кожна із них визначається числовим значенням і напрямом. Наприклад, сила, швидкість, прискорення.

Вектором називають напрямлений відрізок, що має початок і кінець (рис. 3.1.1).

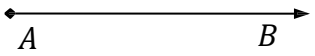


Рис. 3.1.1. Вектор

Першу точку напрямленого відрізка називають *початком вектора*, а другу – *кінцем вектора*.

Вектор із початком у точці A і кінцем у точці B позначають як $\overrightarrow{AB}$. Якщо вказівка на точки несуттєва, то застосовують простіші позначення – однією малою літерою латинки з рискою зверху: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, …

Довжина, або модуль, вектора $\overrightarrow{AB}$ – це відстань між його початком і кінцем (довжина відрізка АВ). Для модуля вектора $\overrightarrow{AB}$ використовують позначення $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $\left|\overrightarrow{a}\right|$.

Якщо початок і кінець вектора збігаються, то вектор називається ***нульовим*** і позначається $\overrightarrow{0}$ або просто 0, а його довжина дорівнює нулю.

Нульовий вектор не має визначеного напрямку.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називають ***одиничним***. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, називається ***ортом вектора*** $\vec{a}$ і позначається $\overrightarrow{a^0}$.

$$\overrightarrow{a^0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Два ненульові вектори $\overrightarrow{a}$ і $\vec{b}$ називають ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Колінеарні ненульові вектори можуть бути однаково напрямленими (позначають $\uparrow\uparrow$) або протилежно напрямленими (позначають $\uparrow\downarrow$) (рис. 3.1.2).

Колінеарність векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ позначають як $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому векторові.

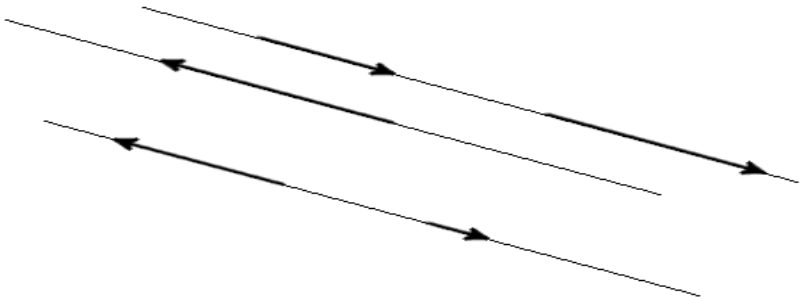


Рис. 3.1.2. Колінеарні ненульові вектори

Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називаються ***рівними,*** коли вони колінеарні, однаково напрямлені і мають рівні довжини.

Два вектори називають ***протилежними***, якщо вони колінеарні, протилежно напрямлені і мають рівні довжини.

Вектори називають ***компланарними***, якщо вони лежать в одній або паралельних площинах.

Вільним називають вектор, який можна переміщати (переносити) у будь-яку точку простору за умови збереження його довжини та напрямку. Далі розглядатимемо тільки вільні вектори.

Лінійні дії з векторами

До лінійних дій над векторами належать додавання, віднімання векторів і множення вектора на число.

Сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{a} + \vec{b}$, який напрямлений від початку вектора $\vec{a}$ до кінця вектора $\vec{b}$, за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$. *Таке правило додавання векторів називають правилом трикутника* (рис. 3.1.3).

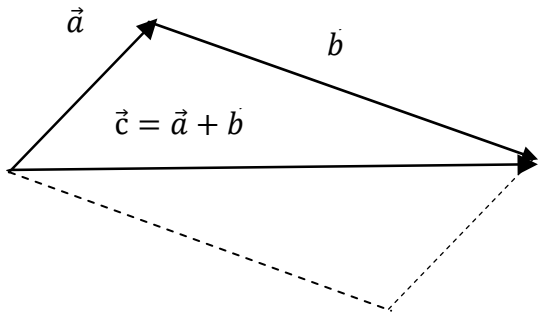


Рис. 3.1.3. Додавання векторів за правилом трикутника

Якщо відкласти вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ від спільної точки О і побудувати на них як на сторонах паралелограм, то сумою $\vec{a} + \vec{b}$ цих векторів є вектор побудований на діагоналі паралелограма *(правило паралелограма)*.

Послідовно використовуючи правило трикутника, ми можемо побудувати суму будь-якого числа довільно розміщених у просторі векторів. Сумою цих векторів буде вектор, початком якого є початок першого вектора і кінцем – кінець останнього вектора – доданка.

Якщо кінець останнього вектора – доданка – збігається з початком першого, то сумою векторів буде нульовий вектор.

Добутком вектора $\vec{a} \neq 0$ на дійсне число $\lambda \neq 0$ називають вектор $\lambda\vec{a}$, довжина якого дорівнює $|\lambda|\,|\vec{a}|$, і який однаково напрямлений з вектором $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежно напрямлений з вектором $\vec{a}$, якщо $\lambda < 0$.

Якщо $\lambda = 0$ або $a = 0$, то вважають, що $\lambda\vec{a} = 0$.

Геометричний зміст операції множення вектора на число такий: множення вектора $\vec{a}$ на число λ можна розуміти як «розтяг» вектора $\vec{a}$ в λ разів при $\lambda > 1$ і «стиск» при $0 < \lambda < 1$, причому при $\lambda < 0$ відбувається ще й зміна напрямку.

Вектор, колінеарний заданому вектору $\vec{a}$, рівний йому за довжиною і протилежно напрямлений називають ***протилежним вектором*** для вектора $\vec{a}$, тобто $-\vec{a}$.

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор $\vec{c}$, що у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$: $\vec{a} - \vec{b}$ якщо $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

Під різницею векторів $\vec{b}$, $\vec{a}$ – розуміють суму векторів $\vec{b}$ та $-\vec{a}$.

Властивості лінійних дій над векторами:

Для довільних векторів $\vec{a}$ $\vec{b}$, та $\vec{c}$ і чисел λ та μ справедливі тотожності:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ комутативність додавання векторів;

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ асоціативність додавання векторів;

3) існує (єдиний) нульовий вектор 0, такий що $0 + \vec{a} = \vec{a} + 0$ – властивість нульового вектора;

4) існує (єдиний) вектор $(\overline{-\vec{a}})$ такий, що $\vec{a} + \overline{-\vec{a}} = 0$ – властивість протилежного вектора;

5) $\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a}) = (\lambda\cdot\mu)\,\vec{a}$ – асоціативність множення вектора на число;

6) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{a}$ – дистрибутивність множення вектора на число щодо додавання чисел;

7) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}\cdot) = \lambda\,\vec{a} + \lambda\,\vec{b}$ – дистрибутивність множення вектора на число щодо додавання векторів.

Властивості лінійних дій над векторами дозволяють виконувати звичні перетворення в лінійних діях над векторами: міняти доданки місцями,

брати вирази в дужки, групувати, виносити за дужки, як скалярні, так і векторні спільні множники.

Множина геометричних векторів з означеними лінійними діями над векторами є ***векторним (геометричним) простором.***

Під векторним (лінійним) простором розуміють множину, на якій означено додавання елементів і множення елемента на дійсне число, що мають властивості відповідні властивості.

Твердження *(критерій колінеарності векторів)*. Вектори $\vec{a} \neq 0$ та $\vec{b}$ колінеарні тоді й лише тоді, коли існує таке число λ, що $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, тобто

$$\vec{a} \parallel \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a},\ \vec{a} \neq 0.$$

Розклад вектора за базисом

Застосовуючи лінійні операції над векторами, можна знаходити суми добутків чисел α_i, де *i=1, 2, ..., n*, на вектори $\overrightarrow{a_i}$: $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \ + \alpha_n\overrightarrow{a_n}$. Вирази такого виду називаються лінійною комбінацією векторів, а числа $\alpha_{i,}$ – коефіцієнтами.

Базисом на прямій називається довільний ненульовий вектор на цій прямій або їй паралельній. ***Базисом на площині*** $\boldsymbol{R^2}$ називається довільна впорядкована пара неколінеарних векторів цієї площини або їй паралельної. ***Базисом у просторі*** $\boldsymbol{R^3}$ називається довільна впорядкована трійка не компланарних векторів. Вектори, що утворюють базис, називаються *базисними.* Розкласти вектор за базисом означає зобразити його у вигляді лінійної комбінації базисних векторів.

Теорема. Кожен вектор, паралельний якій-небудь прямій, можна розкласти за базисом на цій прямій.

Кожен вектор, паралельний якій-небудь площині, можна розкласти за базисом на цій площині.

Кожен вектор можна розкласти за базисом у просторі.

Координати вектора у кожному випадку визначаються однозначно.

Таким чином, базис у просторі дає змогу кожному вектору однозначно зіставити упорядковану трійку чисел (координат цього вектора) і, навпаки, кожній упорядкованій трійці чисел α, β і γ за допомогою базису можна зіставити єдиний вектор $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, де. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектори базису, тобто обраний базис дає змогу встановити взаємно однозначну відповідність між векторами і упорядкованими трійками чисел.

Проекція вектора на вісь

Проекція вектора на вісь – це скалярна величина (число), що дорівнює довжині геометричної проекції вектора, якщо напрями осі й геометричної проекції збігаються; або число, протилежне довжині геометричної проекції вектора, якщо напрями геометричної проекції та осі – протилежні.

Віссю називається напрямлена пряма. Проекцією точки A на вісь l називається основа A_1 перпендикуляра AA_1, опущеного з точки А на вісь l.

Проекцією вектора $\overrightarrow{\text{AB}}$ ***на вісь l*** називається число, що дорівнює величині відрізку A_1B_1 вісі l, де точки A_1 та B_1 є проекціями точок A та B на вісь l (рис. 3.1.4).

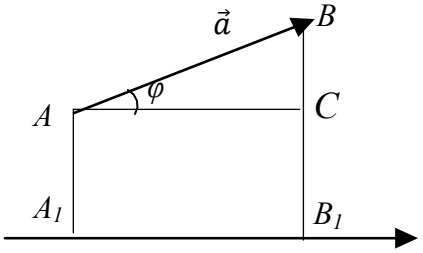


Рис. 3.1.4. Проекція вектора на вісь

Проекцію вектора будемо позначати через $\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB}$ або $\text{пр}_b\,\overrightarrow{AB}$, де b будь-який ненульовий вектор, що задає напрямок проектування.

Властивості проекція вектора на вісь:

1) рівні вектори мають рівні проекції на одну і ту саму вісь;

2) проекція вектора $\vec{a}$ на вісь l дорівнює добутку довжини цього вектора на косинус кута між вектором і віссю, тобто $\text{пр}_l\vec{a} = \overrightarrow{|a|}cos\varphi;$

3) проекція суми векторів $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$, …, $\overrightarrow{a_n}$ на довільну вісь l дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь:

$$\text{пр}_l(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \cdots + \overrightarrow{a_n}) = \text{пр}_l\overrightarrow{a_1} + \text{пр}_l\overrightarrow{a_2} + \text{пр}_l\overrightarrow{a_3} + \cdots + \text{пр}_l\overrightarrow{a_n};$$

4) проекція вектора $\vec{d}$ на вісь l дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вектор перпендикулярний до осі;

5) при множенні вектора на число його проекція множиться на те саме число:

$$\text{пр}_l\mu \cdot \vec{a} = \mu \cdot \text{пр}_l\vec{a}.$$

3.2. Системи координат

Декартова система координат

Розглянемо в просторі точку О і деякий базис, що задається векторами $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$.

Сукупність точки і базису називається ***декартовою системою координат*** у просторі на честь французького математика Р. Декарта. Точка 0 називається ***початком координат***, а осі, які проходять через початок координат в напрямі базисних векторів, називаються ***осями координат***. Перша з них проходить у напрямі вектора $\overrightarrow{e_1}$ і називається ***віссю абсцис***, друга вісь, яка проходить у напрямі вектора $\overrightarrow{e_2}$, – ***віссю ординат*** і третя в напрямі вектора $\overrightarrow{e_3}$ – ***віссю аплікат***.

Площини, які проходять через осі координат, називаються ***координатними площинами***.

Усякій точці простору можна зіставити вектор $\overrightarrow{OM}$, початок якого збігається з початком координат О, а кінець – з точкою M. Такий вектор

називається ***радіусом-вектором*** точки M відносно точки 0. Згідно з теоремою, існують такі дійсні числа x_1, x_2, x_3, що

$$\overrightarrow{OM} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$$

Координати x_1, x_2, x_3 радіуса-вектора точки M відносно початку координат називають ***декартовими координатами точки*** M в цій системі координат і пишуть: $M(x_1, x_2, x_3)$. Координата x_1 називається абсцисою точки M, координата x_2 – ординатою і координата x_3 – аплікатою точки M.

Аналогічно визначаються декартові координати точки на площині і на прямій. Різниця лише в тому, що точка на площині має дві координати, а точка на прямій – одну. Отож, якщо в просторі обрано декартову систему координат, то кожній точці простору відповідає одна упорядкована трійка дійсних чисел – декартові координати цієї точки. І навпаки, для кожної упорядкованої трійки чисел знайдеться єдина точка простору, для якої ці числа є декартовими координатами. Це означає, що обрана тим чи іншим способом декартова система координат установлює взаємно однозначну відповідність між точками простору і упорядкованими трійками чисел.

Система координат на площині визначає таку саму відповідність між точками площини і упорядкованими парами чисел, а на прямій – між точками прямої і дійсними числами.

Прямокутна система координат

Очевидно, декартових систем координат можна задати скільки завгодно. Серед них широко використовується прямокутна декартова система координат. Щоб визначити цю систему, введемо такі поняття.

Упорядкована трійка одиничних попарно ортогональних векторів називається ***ортонормованим базисом***. Позначають ортонормований базис через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, де $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.

Упорядкована трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарних векторів називається ***правою***, якщо з кінця третього вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\vec{a}$

до другого вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки; в протилежному випадку трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається ***лівою***.

Прямокутною декартовою системою координат (або просто прямокутною системою координат) називається декартова система координат, базис якої ортонормований. Прямокутна система координат називається правою (лівою), якщо її ортонормований базис утворює праву (ліву) трійку векторів. Надалі користуватимемося правою системою координат, яка визначається правим ортонормованим базисом: $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$.

Прямокутну систему координат позначають через $0xyz$ ($0x$ – вісь абсцис, $0y$ – вісь ординат, $0z$ – вісь аплікат), а координатні площини – через $0xy$, $0yz$, $0zx$. Вони поділяють простір на вісім октантів.

При зображенні системи координат, як правило, показують лише осі координат; вектори $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ не вказують.

Нехай задана прямокутна система координат $0xyz$ і довільна точка M Радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ цієї точки записують у вигляді

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \text{ або } \vec{r} = (x, y, z).$$

Координати x, y, z радіуса-вектора точки M називаються ***координатами точки M***. Точка M з координатами x, y, z позначається через $M(x, y, z)$.

Прямокутні координати точки на площині і на прямій визначають таким самим способом, як і в просторі.

Полярна система координат

Декартова система координат – не єдиний спосіб визначати за допомогою чисел місце знаходження точки на площині. Для цієї мети використовують багато інших координатних систем. Найважливішою після прямокутної системи координат є полярна система координат.

Полярна система координат задається променем, який виходить із ***полюса*** і називається ***полярною віссю.*** Задають також одиниці масштабу: лінійну – для вимірюванню довжини відрізків і кутову для вимірювання кутів.

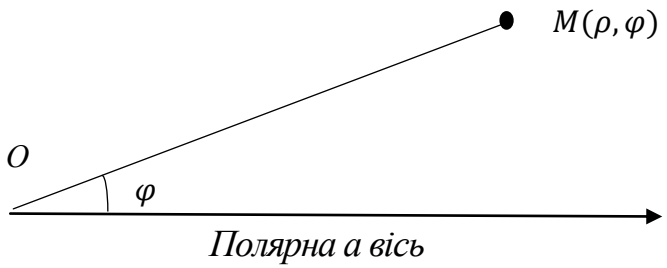


Рис. 3.2.1. Полярна система координат

$\rho = \overrightarrow{|OM|}$ — відстань від полюса O до точки M;

φ – кут між полярною віссю та вектором $\overrightarrow{|OM|}$.

Полярні координати точки $M(\rho, \varphi)$, де $\rho(0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2})$ – полярний радіус, $\varphi\,(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ – полярний кут.

Зв'язок між прямокутними декартовими і полярними координатами точки *M,* якщо початок координат збігається з полюсом, а додатна піввісь абсцис із полярною віссю виражається формулами:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot cos\varphi \\ y = \rho \cdot sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\,\varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Зауваження:

Для визначення полярного кута φ можна застосовувати формулу

$$\varphi = \begin{cases} arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{якщо у} \geq 0 \\ 2 \cdot \pi - arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{якщо у} \leq 0 \end{cases}.$$

Перетворення прямокутних координат

Паралельне перенесення осей координат

Нехай задано дві системи координат Oxy та O_1xy, які розміщені паралельно одна відносно одної.

У системі Oxy точки M та O_1 мають координати $O_1(a,b)$, $M(x,y)$.

В системі координат O_1xy координати точки M знаходяться за формулами перетворення координат при паралельному перенесенні

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$

Поворот осей

Нехай задано системи координат Oxy y та O_{XY}, із спільним початком, а система координат O_{XY} отримана в результаті повороту Oxy на деякий кут α.

У системі координат Oxy точка M має координати $M(x,y)$, а в системі O_{XY} координати точки M, такі $M(X,Y)$.

Введемо дві полярні системи координат із спільним полюсом O і полярними осями Ox та O_X. Тоді

$$\begin{cases} x = \rho \cdot cos(\alpha + \varphi) = \rho \cdot cos\alpha cos\varphi - \rho \cdot sin\alpha sin\varphi \\ y = \rho \cdot sin(\alpha + \varphi) = \rho \cdot sin\alpha cos\varphi + \rho \cdot cos\alpha sin\varphi \end{cases}'$$

оскільки $\begin{cases} x = \rho \cdot cos\varphi \\ y = \rho \cdot sin\varphi \end{cases}'$ то

$$\begin{cases} x = Xcos\alpha - Ysin\alpha \\ y = Xsin\alpha + Ycos\alpha = Ycos\alpha + Xsin\alpha \end{cases}'$$

Розв'язавши останню систему відносно X, Y, одержимо формули перетворення координат при повороті осей

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Звідси можна, навпаки, знайти координати

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

3.3. Вектори в системі координат

Щоб операції над векторами звести до операцій над числами, розглянемо вектори в системі координат.

Координати вектора у просторі

Розглянемо прямокутну декартову систему координат $Oxyz$, в якій здано вектор $\vec{a}$. Це означає, що в ортонормованому базисі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, який задає обрану систему координат, вектор $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, де *x, y, z координати вектора в цьому базисі.* Координати вектора в системі координат $Oxyz$ – це його проекція на осі координат (рис. 3.3.1).

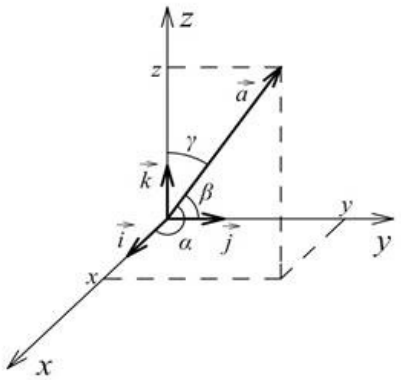


Рис. 3.3.1. Координати вектора в системі координат $Oxyz$

Координати вектора $\overrightarrow{AB}$, що має початок у точці A і кінець в точці B, дорівнюють різниці відповідних координат точок B і A (рис. 3.3.2).

Якщо початком вектора є точка $A(x_A, y_A, z_A)$, а кінцем – точка $B(x_B, y_B, z_B)$, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\ ).$$

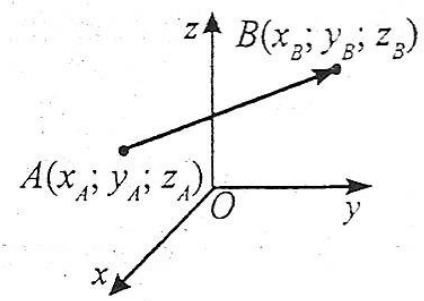


Рис. 3.3.2. Вектор з початком у точці A і кінцем у точці B

Довжина вектора

Довжина вектора (абсолютна величина, або модуль) – довжина відрізка, що зображує вектор. Позначення: $\overrightarrow{|AB|}$ або $\overrightarrow{|a|}$.

Якщо є вектор $\vec{a}\ (x_1, y_1, z_1)$, то

$$\overrightarrow{|a|} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

де $\overrightarrow{|a|}$ – модуль вектора, x_1, y_1, z_1 – його координати.

Якщо початком вектора є точка А(x_A;y_A;z_A), а кінцем – точка В(x_B; y_B; z_B), то довжина вектора:

$$\overrightarrow{|AB|} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (\ z_B - z_A\ )^2}.$$

Напрямні косинуси вектора

Напрямні косинуси вектора – це косинуси кутів, які утворює вектор з осями координат:

$$cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Операції над векторами в координатній формі

Нехай відомі розклади векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ за ортами $\vec{\imath}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

$\vec{a} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ та $\vec{b} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

Координати цих розкладів називаються ***координатами векторів***, а самі вектори часто задають у координатній формі

$$\overrightarrow{a} = (x_1, y_1, z_1) \text{ та } \vec{b} = (x_2, y_2, z_2).$$

Сума векторів у просторі

$$\vec{a}\ (x_1, y_1, z_1) + \vec{b}\ (x_2, y_2, z_2) = \vec{c}\ (x_1 + x_2, y_1 + y_2,\ z_1 + z_2).$$

Різниця векторів у просторі

$$\vec{a}\ (x_1, y_1, z_1) - \vec{b}\ (x_2, y_2, z_2) = \vec{c}\ (x_1 - x_2, y_1 - y_2,\ z_1 - z_2).$$

Множення вектора на число у просторі

$$\mu\cdot\vec{a}\ (x_1, y_1, z_1) = \vec{c}\ (\mu x_1, \mu\, y_1, \mu z_1).$$

Колінеарність векторів у просторі

Якщо є вектори $\vec{a}\ (x_1, y_1, z_1)$ $\vec{b}\ (x_2, y_2, z_2)$ і вони ***колінеарні***, то

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

3.4. Множення векторів

3.4.1. Скалярний добуток двох векторів

Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{|a|} \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos\varphi \qquad (3.4.1)$$

Оскільки $\overrightarrow{|a|}cos\alpha = \text{пр}_b\vec{a}$, $\overrightarrow{|b|}cos\alpha = \text{пр}_a\vec{b}$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{|a|} \cdot \text{пр}_a\vec{b} = \overrightarrow{|b|}\text{пр}_b\vec{a}, \text{ тому}$$

$$\text{пр}_b\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\overrightarrow{|b|}}.$$

Останні формули виражають *геометричний зміст скалярного добутку* векторів: скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного з векторів на проекцію іншого вектора на цей вектор.

Механічний зміст скалярного добутку двох векторів:

Робота A сили $\vec{F}$ з переміщення матеріальної точки з початку в кінець вектора $\vec{s}$, який утворює з вектором $\vec{F}$ кут α, дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення

$$A = \overrightarrow{|F|} \cdot |s| \cdot cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Скалярним добутком двох векторів, які задані у координатній формі, називається число, яке дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів. Позначення таке саме, як і для добутку чисел, $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Якщо є вектори $\overrightarrow{a}\ (x_1, y_1, z_1), \vec{b}\ (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2. \qquad (3.4.2)$$

Геометричні властивості скалярного добутку

1) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (умова перпендикулярності векторів);

2) $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;

3) $\frac{\pi}{2} < \phi \leq \pi \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$;

4) $np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Алгебраїчні властивості скалярного добутку

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;

3) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

4) $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Кут φ між векторами $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ знаходять за формулою

$$cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \qquad (3.4.3)$$

3.4.2 Векторний добуток двох векторів

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, якщо:

1) *довжина вектора* $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\,sin\,\varphi$, де φ – кут між двома векторами;

2) *вектор $\vec{c}$ перпендикулярний* до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) *вектор $\vec{c}$ спрямований* так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки (рис. 3.4.1).

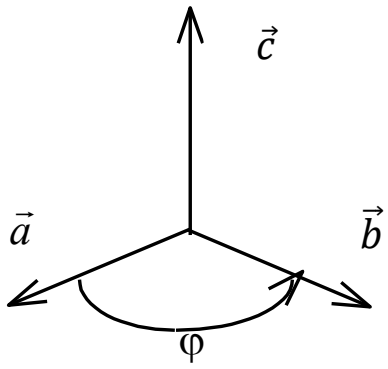


Рис. 3.4.1. Векторний добуток вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$

Властивості векторного добутку:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$ – колінеарні вектори;

2) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

3) $(\lambda\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;

4) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Знайдемо векторні добутки одиничних векторів $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. З колінеарності векторів випливає: $\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$. З того, що одиничні вектори збігаються з напрямом осей прямокутної системи координат, маємо:

$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}\,,\ \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath},\ \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}.$$

Знайдемо координати вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, якщо $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}$.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\,\vec{k}\right) \cdot \left(b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\,\vec{k}\right) =$$

$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{\jmath} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}$$

або

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (3.4.4)$$

Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах.

3.4.3. Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Розглянемо *геометричний зміст змішаного добутку*. Для цього побудуємо на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, вважаючи, що вони не лежать в одній площині, тобто некомпланарні, паралелепіпед (рис. 3.4.2).

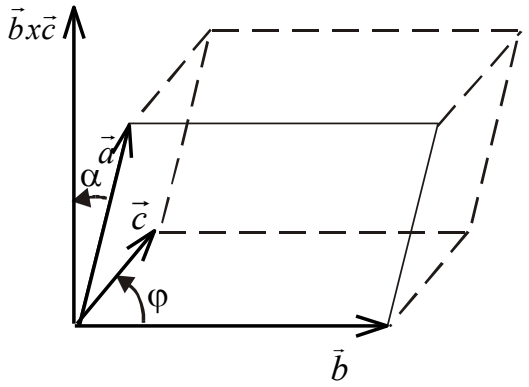


Рис. 3.4.2. Геометричний зміст мішаного добутку векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Знайдемо об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Площа основи його дорівнює модулю векторного добутку векторів $\left|\vec{b} \times \vec{c}\right|$ $s = \left|\vec{b} \times \vec{c}\right| = \left|\vec{c}\right|\left|\vec{b}\right| sin\, \phi$. Висота дорівнює $|\vec{a}|\, cos\, \alpha$. Отже, остаточно маємо:

$$V = |\vec{a}|\, cos\, \alpha \cdot \left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right| sin\, \phi = |\vec{a}|\left|\vec{b} \times \vec{c}\right| cos\, \alpha = \left|\vec{a}\left(\vec{b} \times c\right)\right|.$$

З останнього випливає, що модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. З рівності

$$V = |\vec{a}|\, cos\, \alpha \cdot \left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right| sin\, \phi = |\vec{a}|\left|\vec{b} \times \vec{c}\right| cos\, \alpha = \left|\vec{a}\left(\vec{b} \times c\right)\right|$$

маємо ***умову компланарності трьох векторів*** $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = 0.$$

Ураховуючи формули знаходження скалярного і векторного добутків, маємо:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right)\left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \vec{j} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \vec{k}\right) = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix},$$

або

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (3.4.5)$$

Властивості мішаного добутку:

1) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}\,(\vec{a} \times \vec{b})$

2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b}(\vec{a} \times \vec{c})$.

3.5. Поняття про *n*-вимірний вектор і векторний простір

Упорядковану трійку чисел називають ***тривимірним вектором***, а множину всіх тривимірних векторів називають тривимірним простором і позначають через $\boldsymbol{R^3}$.

Упорядковані пари чисел називають двовимірними векторами, а числа – одновимірними. Множини двовимірних і одновимірних векторів називають, відповідно, двовимірними і одновимірними просторами і позначають через $\boldsymbol{R^2}$, $\boldsymbol{R^1}$.

Узагальнюючи простори $\boldsymbol{R^1}$, $\boldsymbol{R^2}$, $\boldsymbol{R^3}$ приходимо до *n*-вимірного простору n, де *n* – довільне натуральне число.

Якщо довільний вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ простору $\boldsymbol{R^n}$ розглядати як радіус-вектор відповідної точки М відносно початку вибраної системи координат, то координати точки М визначаються як координати цього радіуса-вектора. У зв'язку з цим *n*-вимірний простір $\boldsymbol{R^n}$ можна тлумачити також як множину впорядкованих сукупностей *n* дійсних чисел.

Упорядкована множина *n* дійсних чисел x_1, x_2, ..., x_n називається ***n-вимірним вектором*** $\vec{x}$ і позначається так: $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Усі означення і дії для двомірних і тримірних векторів, заданих у координатній формі, розповсюджуються і на *n*-вимірні вектори ($n \geq 4$).

Два n-вимірні вектори рівні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати рівні.

Вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n)$ і вектор $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3 \ldots, b_n)$ рівні, коли $a_i = b_i$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Сумою двох n-вимірних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є третій *n*-вимірний вектор $\vec{c}$, координати якого дорівнюють сумі відповідних однойменних координат векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсне число λ називається вектор $\vec{d} = \lambda\vec{a}$, координати якого d_i, дорівнюють добутку числа λ на відповідні координати вектора $\vec{a}$, тобто $d_i = \lambda a_i$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Вектор, у якого всі координати дорівнюють нулю, ***називається нульовим вектором*** і позначається $\overrightarrow{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Властивості операцій над довільними векторами:

1) $\vec{a}\ \vec{b}+ = \vec{b} + \vec{a}$ – комутативний (переставний) закон;

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ – асоціативний (сполучний) закон;

3) $\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a}) = (\lambda\cdot\mu)\ \vec{a}$ – асоціативний (сполучний) закон, відносно числового множника;

4) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}\cdot) = \lambda\ \vec{a} + \lambda\ \vec{b}$ – дистрибутивний (розподільний) закон, відносно суми векторів;

5) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\ \vec{a} + \mu\ \vec{a}$ – дистрибутивний (розподільний) закон відносно суми числових множників;

6) існує (єдиний) нульовий вектор $\overrightarrow{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, такий що $\vec{a} + 0 = \vec{a}$;

7) існує (єдиний) вектор $(\overrightarrow{-a})$ такий, що $\vec{a} + \overrightarrow{-a} = 0$;

8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, для довільного вектора $\vec{a}$ (особлива роль числового множника 1).

Множина векторів із дійсними координатами, в якій визначено операції додавання векторів і множення вектора на число, які задовольняють умовам восьми вище наведеним властивостям, називається ***векторним простором***.

Множина всіх *n*-вимірних векторів називається ***n-вимірним простором*** і позначається через $\boldsymbol{R^n}$**.**

Зауваження. Якщо під векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, можна розглядати елементи довільної природи, то відповідна множина елементів називається ***лінійним простором***.

Лінійним простором є, наприклад, множина всіх алгебраїчних многочленів, степені яких не перевищують натурального числа *n*.

Простори $\boldsymbol{R^1}$, $\boldsymbol{R^2}$, $\boldsymbol{R^3}$є окремими випадками простору $\boldsymbol{R^n}$. Їх можна зобразити геометрично; для $n > 3$ простори $\boldsymbol{R^n}$, геометрично вже уявити не можна, проте вони виконують важливу роль у науці і техніці.

Розклад вектора за заданим базисом

Вектор $\vec{b}$ називається ***лінійною комбінацією векторів*** $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, …, $\overrightarrow{a_n}$ векторного простору $\boldsymbol{R^n}$, якщо він дорівнює добутків векторів на довільні дійсні числа

$$\vec{b} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \quad + \alpha_n\overrightarrow{a_n},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – дійсні числа.

Систему векторів $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, …,$\overrightarrow{a_s}$ називають ***лінійно незалежною***, якщо з рівності $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_s\overrightarrow{a_s} = 0$ випливає, що $\alpha_1=\alpha_2= \ldots =\alpha_s=0$.

Систему векторів $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$,…,$\overrightarrow{a_s}$ називають ***лінійно залежною***, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_s$, які не дорівнюють одночасно нулю, що

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_s\overrightarrow{a_s} = 0.$$

Властивості поняття лінійної залежності

1) якщо вектори лінійно залежні, то після додавання до них одного чи кількох нових векторів дістанемо лінійно залежну систему векторів;

2) якщо вектори лінійно незалежні, то після відкидання одного чи кількох векторів дістанемо знову лінійно незалежні вектори;

3) вектори лінійно залежні тоді і лише тоді, коли один із них є лінійною комбінацією інших;

4) два колінеарні вектори лінійно залежні, а два неколінеарні – лінійно незалежні;

5) якщо два ненульові тривимірні вектори лінійно залежні, то вони колінеарні, і навпаки;

6) якщо три ненульові тривимірні вектори лінійно залежні, то вони компланарні, і навпаки;

7) чотири (і більше) тривимірних вектори завжди лінійно залежні.

Поняття лінійної залежності має доволі глибокий зміст і широко використовується в математиці.

Лінійний простір R^n називається n-вимірним, якщо в ньому є *n* лінійно незалежних векторів, а довільні (*n* + 1) вектори *c* уже лінійно залежні.

Іншими словами, розмірність простору – це максимальне число лінійно незалежних векторів цього простору.

Будь-яка система векторів, що складається з більшої кількості векторів, ніж розмірність простору, буде лінійно залежною.

У *n*-вимірному просторі кожна лінійно незалежна система, яка складається з *n* векторів, буде максимальною, а також будь-яка максимальна, лінійно незалежна система векторів у цьому просторі складається з *n* векторів.

Сукупність *n* лінійно незалежних векторів *n*-вимірного простору $\boldsymbol{R^n}$ називається ***базисом.***

Твердження. Довільний вектор $\vec{b}$ лінійного простору $\boldsymbol{R^n}$ можна представити єдиним способом у вигляді лінійної комбінації векторів базису

$$\vec{b} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \quad + \alpha_n\overrightarrow{a_n}$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ називаються координатами вектора $\vec{b}$ в базисі $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$.

Нехай простір має два базиси, а саме: старий $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, … , $\overrightarrow{a_n}$ і новий $\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{b_2}$, … , $\overrightarrow{b_n}$.

Нехай кожний вектор $\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{b_2}$, … , $\overrightarrow{b_n}$ нового базису має в старому базисі координати $b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{ni}$, тобто

$$\begin{cases} \overrightarrow{b_1} = b_{11}\overrightarrow{a_1} + b_{12}\overrightarrow{a_2} + \cdots + b_{1n}\overrightarrow{a_n} \\ \overrightarrow{b_2} = b_{21}\overrightarrow{a_1} + b_{22}\overrightarrow{a_2} + \cdots + b_{2n}\overrightarrow{a_n} \\ \dots\dots\dots\

Таким чином, вектор у старих координатах дорівнює матриці переходу, помноженій на вектор у нових координатах.

Якщо матриця B невироджена, то $\overrightarrow{X^*} = B^{-1}\vec{X}$, тобто одержимо вектор в новому базисі через обернену матриць переходу і координати вектора в старому базисі.

Базисом векторного простору називається будь-яка максимальна (повна) лінійно незалежна система векторів цього простору.

Система векторів $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_r})$ лінійно виражається через систему векторів $(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_s})$, якщо кожний із них є лінійною комбінацією системи, тобто

$$\overrightarrow{b_\iota} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\overrightarrow{a_j}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Дві системи векторів називаються ***еквівалентними***, якщо кожна з них виражається лінійно через іншу.

Кількість векторів, що входять до будь-якої максимальної лінійно незалежної підсистеми цієї системи векторів, називається ***рангом*** цієї системи. Із рангом можна пов'язати і максимальну кількість лінійно незалежних рівнянь у системі лінійних рівнянь.

Зв'язок між базисами

Нехай простір має базис: $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \dots, \overrightarrow{e_n}$.

Якщо взяти довільний вектор $\overrightarrow{a}$, то з максимальності лінійно незалежної системи векторів) випливає, що $\overrightarrow{a} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{e_n}$,
де хоча б одне з α_i відмінне від нуля.

Отже, вектор $\overrightarrow{a}$ є лінійною комбінацією векторів базису. Можна показати, що такий вираз – єдиний для вектора $\overrightarrow{a}$.

Нехай у просторі задано два базиси:

e: $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \dots, \overrightarrow{e_n}$,

e': $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}, \dots, \overrightarrow{e_n'}$.

Кожен вектор нового базису однозначно можна подати через базис у вигляді $\overrightarrow{e_j'} = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}\overrightarrow{e_i}, j = 1, 2, \dots, n.$

Матрицю

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

стовпцями якої є координати векторів нового базису у старому базисі, називатимемо ***матрицею переходу від базису e до базису e'.***

Матриця переходу від одного базису до іншого завжди є невиродженою матрицею, а кількість базисів у просторі дорівнює кількості невироджених квадратних матриць. Якщо є два базиси, то матриці переходу від одного до іншого взаємно обернені.

Зв'язок між координатами довільного вектора $\vec{x}$ у цих двох базисах подається формулою:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Помноживши рівність зліва на матрицю T^{-1}, одержимо:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Звідки знаходимо координати вектора в новому базисі e'.

3.6. Власні числа і власні вектори лінійного перетворення

Лінійні перетворення

Нехай задано векторний простір і вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{a'}$ – деякі елементи цього простору.

Перетворення φ, яке переводить кожен вектор $\overrightarrow{a}$, у деякий вектор $\overrightarrow{a'}$, такий що $\overrightarrow{a'} = \varphi\overrightarrow{a}$, де вектор $\overrightarrow{a'}$ є ***образом*** вектора $\overrightarrow{a}$, називається ***лінійним***, якщо виконуються властивості:

1) $\varphi\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \varphi\overrightarrow{a} + \varphi\overrightarrow{b}$;

2) $\varphi(\alpha\overrightarrow{a}) = \alpha(\varphi\overrightarrow{a})$.

Нехай у просторі задано деякий базис: e: $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$,

Будь-який вектор $\overrightarrow{a}$ у цьому базисі однозначно задається співвідношенням

$$\overrightarrow{a_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overrightarrow{e_j}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Із координат векторів $\overrightarrow{a}$ у такому базисі можна побудувати квадратну матрицю $A = (a_{ij})$, записавши координати векторів $\overrightarrow{a_i}$, як стовпці матриці A, тоді:

$$(\overrightarrow{a_1}, \quad \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}) \cdot A.$$

Матриця A задає лінійне перетворення φ у базисі $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$.. Знаючи матрицю A лінійного перетворення φ в базисі $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$, можна за координатами вектора $\overrightarrow{a}$ в цьому базисі знайти координати його образу $\overrightarrow{a}\varphi$ за формулою

$$\overrightarrow{a'} = \varphi\overrightarrow{a} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ якщо } \overrightarrow{a} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{e_i}.$$

Власні числа і власні вектори лінійного перетворення

Нехай $A = (a_{ij})$ – деяка квадратна матриця розміру $n \times n$ з дійсними елементами, λ – деяке невідоме число. Тоді матриця $A - \lambda E$, де E – одинична матриця, називається ***характеристичною матрицею для матриці A*:**

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Поліном *n*-го степеня $|A - \lambda E|$ називається ***характеристичним поліномом матриці*** *A*, а його корені – ***власними числами матриці*** *A*.

Можна стверджувати, що подібні матриці мають однакові характеристичні поліноми і, як наслідок, однакові власні числа.

Наслідок. Лінійне перетворення φ у різних базисах має різні матриці, але всі вони мають однакові власні числа.

Тому можна стверджувати, що лінійне перетворення φ характеризується набором власних чисел, які далі називатимемо ***спектром лінійного перетворення*** φ, або ***спектром матриці A***.

Розглянемо лінійне перетворення φ у просторі таке, що переводить відмінний від нуля вектор $\vec{b}$ у вектор, пропорційний до самого вектора $\vec{b}$:

$$\varphi\vec{b} = \lambda_0\vec{b}$$

Такий вектор $\vec{b}$ називатимемо ***власним вектором перетворення φ,*** а λ_0 – ***власним числом***, що відповідає цьому власному вектору.

Розглянемо тепер задачу відшукання такого базису для лінійного перетворення φ, в якому б його матриця мала найпростіший діагональний вигляд.

Вважатимемо, що лінійне перетворення φ має такий характеристичний поліном, що всі його корені дійсні і різні. Тобто, розв'язавши рівняння *n*-го порядку $|A - \lambda E| = 0$, знайдемо *n* різних дійсних коренів λ_1, λ_2,..., λ_n. Якщо виконується така умова, то лінійне перетворення φ дійсного лінійного простору має простий спектр.

Кожному власному числу λ_i відповідає певний власний вектор. Власних векторів у цьому разі буде також n. Вони утворюють лінійно незалежну систему векторів. Їх можна розглядати як базис, в якому матриця лінійного перетворення A набуває найпростішого діагонального вигляду.

Квадратичні форми та їх перетворення

Квадратичною формою від n змінних $x_1,\ \ x_2\ , \dots ,\ \ x_n$ у деякому лінійному просторі $\boldsymbol{R^n}$ з фіксованим базисом $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ називається однорідний многочлен другого степеня

$$F\left(x_1, x_{2,}, \dots, x_n\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j, \qquad (3.6.1)$$

де $A = (a_{ij})$ – матриця квадратичної форми; $x_1, x_{2,}, \dots, x_n$ – *координати вектора у просторі* $\boldsymbol{R^n}$.

Матриця A є симетричною, тобто для її елементів справедливі рівності $a_{ij} = a_{ji}\ (i \neq j)$.

Якщо позначити два вектори

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, X^T = \left(x_1, x_{2,}, \dots, x_n\right),$$

то формулу (3.6.1) можна записати матричною рівністю

$$F\left(x_1, x_{2,}, \dots, x_n\right) = X^T A\, X.$$

Нехай у деякому базисі квадратична форма (3.6.1) не містить добутків $x_i x_j (i \neq j)$. Така квадратична форма називається зведеною до ***канонічного вигляду***. Для всякої квадратичної форми існує базис, в якому вона має канонічну форму, тобто

$$F\left(x_1, x_{2,}, \dots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\text{i}}\, {x_i}^2,$$

де λ_{i} – власні числа матриці A.

Таким є базис, складений з ортогональних одиничних (ортонормованих) власних векторів матриці A.

Напрями базисних власних векторів називаються головними напрямними (осями) квадратичної форми.

Отже, щоб звести задану квадратичну форму (3.6.1) до канонічного виразу, треба відшукати власні числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ... її матриці і скласти вираз $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$.

3.7. Розв'язування прикладів і задач

✧✧✧

1. Вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}$ є сторонами трикутника ABC (рис. 3.7.1). Виразіть через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектори $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$, які збігаються з медіанами трикутника ABC.

Розв'язання.

Для знаходження вектора $\overrightarrow{AM}$ розглянемо трикутник BAM (рис. 3.7.1).

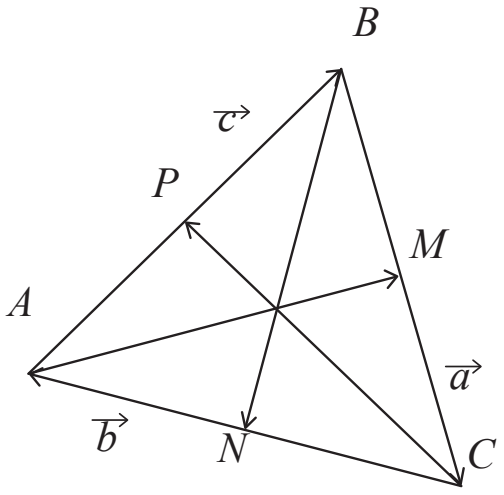


Рис. 3.7.1

Згідно з додаванням векторів за правилом трикутника маємо:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}.$$

Оскільки $\overrightarrow{AM}$ є медіаною сторони $\overrightarrow{BC}$, то ділить її навпіл, тому

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{a}\,.$$

Тоді, згідно з умовами задачі, $\overrightarrow{AM} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$.

З іншого боку, $-\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ і $\vec{a} = -(\vec{c} + \vec{b})$.

Підставивши одержаний результат у вираз для $\overrightarrow{AM}$, знаходимо:

$$\overrightarrow{AM} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} = \vec{c} - \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}).$$

Аналогічно знаходимо

$$\overrightarrow{BN} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \text{ або } \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c}).$$

$$\overrightarrow{CP} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \text{ або } \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}).$$

✧ ✧ ✧

2. Полюс полярної системи координат збігається з початком декартових прямокутних координат, а полярна вісь збігається з додатною піввіссю абсцис. У декартовій прямокутній системі координат дано точку $M\ (-3, 0)$, визначити полярні координати цієї точки.

Розв'язання.

Оскільки, початок координат збігається з полюсом, а додатна піввісь абсцис – із полярною віссю, то зв'язок між прямокутними декартовими і полярними координатами виражається формулами:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \frac{y}{x} \end{cases},$$

де x, y – відповідні координати точки M.

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3 \\ tg\varphi = \frac{0}{-3} = 0 \end{cases},$$

Отже, в полярній системі координат точка *M* має координати (3, 0).

✧ ✧ ✧

3. Дано точки $A(2, 1), B(-1, 3), C(-2, 5)$ Знайти їхні координати в новій системі, якщо початок координат перенесено (без зміни напрямку осей) у точку B.

Розв'язання.

Якщо початок координат нової системи знаходиться у точці $B(-1,3)$, то координати кожної точки в новій системі обчислюються за формулами:

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases},$$

де (x, y) – координати точки в старій системі, а (X, Y) – координати в новій системі, (a, b) – координати точки B.

Координати точки $A(2;1)$ у новій системі:

$$\begin{cases} X = 2 - (-1) = 3 \\ Y = 1 - 3 = -2 \end{cases}.$$

Тобто $A'(3,-2)$.

Координати точки $B(-1,3)$ у новій системі:

$$\begin{cases} X = -1 - (-1) = 0 \\ Y = 3 - 3 = 0 \end{cases}.$$

Тобто $B'(0,0)$ (бо це новий початок координат).

Координати точки $C(-2;5)$ в новій системі:

$$\begin{cases} X = -2 - (-1) = -1 \\ Y = 5 - 3 = 2 \end{cases}.$$

Тобто $C'(-1,2)$.

✧✧✧

4. В системі *Oxy* точка *M* має координати (2,4). Знайти її координати в системі *OXY*, яка утворюється з системи поворотом на кут $\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання.

За формулою повороту осей координат

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

при $x = 2, y = 4, \alpha = \frac{\pi}{2}$ отримуємо:

$$X = 2cos\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{\pi}{2} = 4,$$

$$Y = -2sin\frac{\pi}{2} + 4\cos\frac{\pi}{2} = -2.$$

Отже, в системі *OXY* точка *M* має координати (4, -2).

✧ ✧ ✧

5. Вектор $\overrightarrow{AB}$ має початок у точці $A\ (1, -2, 1)$ і кінець у точці $B\ (3, 4, 4)$. Знайти координати вектора та його довжину.

Розв'язання.

Координати вектора шукаємо за формулою

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A, z_B - z_A)$$

тоді

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 1, 4 - (-2), 4 - 1) = (2, 6, 3)$$

Довжина вектора

$$\overrightarrow{|AB|} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (\ z_B - z_A\ )^2}.$$

$$\overrightarrow{|AB|} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (4 - (-2))^2 + (\ 4 - 1\ )^2} = 7.$$

✧ ✧ ✧

6. Знайти вектор $\vec{a} = (a_x\ , -1,\ a_z)$, колінеарний вектору $\vec{b} = (1\ , -2,\ 5)$.

Розв'язання.

З умови колінеарності векторів маємо:

$$\frac{1}{a_x} = \frac{-2}{-1} = \frac{5}{a_z};$$

$$a_x = \frac{1}{2};\ a_z = \frac{5}{2}.$$

Отже, вектор $\vec{a} = (\frac{1}{2}\ , -1,\ \frac{5}{2})$.

✧ ✧ ✧

7. Довести, що координати орта $\overrightarrow{a^0}$ до вектора $\vec{a} = (a_x\ , a_y,\ a_z)$ збігаються в напрямними косинусами цього вектора.

Розв'язання.

$$\overrightarrow{a^0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{a}|}(a_x\ , a_y,\ a_z) = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \frac{a_z}{|\vec{a}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

✧ ✧ ✧

8. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ і $\vec{n} = 4\vec{a} + 5\vec{b}$, якщо $\overrightarrow{|a|} = 2, \overrightarrow{|b|} = 1, \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання.

Використовуючи властивості скалярного добутку, отримаємо:

$$\vec{m}\cdot\vec{n}=\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(4\vec{a}+5\vec{b}\right)=8\cdot\overrightarrow{a^2}+10\cdot\overrightarrow{a}\cdot\vec{b}-12\cdot\vec{b}\cdot\vec{a}-15\cdot\overrightarrow{b^2}$$

$$=8\cdot\overrightarrow{a^2}-2\cdot\overrightarrow{a}\cdot\vec{b}-15\cdot\overrightarrow{b^2}.$$

Застосувавши формулу (3.4.1) для знаходження скалярного добутку та врахувавши алгебраїчні властивості скалярного добутку, що $\overrightarrow{a^2}=|\vec{a}|^2$, знаходимо

$$\vec{m}\cdot\vec{n}=8\cdot2^2-2\cdot2\cdot1-15\cdot1=13.$$

✧✧✧

9. Знайти довжину вектора $\vec{s}=2\vec{a}-3\vec{b}$, якщо $\overrightarrow{|a|}=1$, $\overrightarrow{|b|}=4$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Розв'язання.

Довжину вектора знаходимо за формулою $|\vec{c}|=\sqrt{\vec{c}^2}$.

$$|\vec{c}|=\sqrt{\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)^2}=\sqrt{4\cdot\overrightarrow{a^2}-12\cdot\overrightarrow{a}\cdot\vec{b}+9\cdot\overrightarrow{b^2}}=\sqrt{124}=2\sqrt{31}.$$

✧✧✧

10. Дано два вектори $\vec{a}(7,2,-1)$ і $\vec{b}(1,2,3)$. Знайти скалярний добуток, кут між векторами, проекцію вектора $\vec{b}$ на напрямок вектора $\vec{a}$, напрамляючі косинуси вектора $\vec{a}$.

Розв'язання.

Вектори задані в координатній формі, тому скалярний добуток знаходимо за формулою (3.4.2).

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=7\cdot1+2\cdot2+(-1)\cdot3=8.$$

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ знаходимо за формулою (3.4.3):

$$cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}=\frac{8}{\sqrt{7^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{8}{\sqrt{54}\cdot\sqrt{14}}.$$

$$cos\varphi\approx0{,}29.$$

Проекцію вектора $\vec{b}$ на напрямок вектор а знаходимо за формулою:

$$np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{8}{\sqrt{54}}.$$

Напрямляючі косинуси вектора $\vec{a}$ – це косинуси кутів, які утворює вектор з осями координат:

$$cos\,\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{7}{\sqrt{54}},$$

$$cos\,\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{\sqrt{54}},$$

$$cos\,\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{-1}{\sqrt{54}}.$$

✧ ✧ ✧

11. Виразити через орти $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$, отр $\overrightarrow{a^0}$ вектора $\vec{a} = (3, -2, 6)$.

Розв'язання.

Виразимо одиничний вектор

$$\overrightarrow{a^0} = \frac{\vec{a}}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+6\vec{k}}{\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}} = \frac{3}{7}\vec{\imath} - \frac{2}{7}\vec{\jmath} + \frac{6}{7}\vec{k}.$$

✧ ✧ ✧

12. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1, -2, 0)$, $B(3, 0, -1)$, $C(0, 3, -2)$.

Розв'язання.

Розглянемо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Оскільки модуль векторного добутку двох векторів дорівнює площі паралелограму, побудованого на цих векторах, як на сторонах, то площа трикутника дорівнює половині модуля векторного добутку $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Знайдемо спочатку координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Координати вектора $\overrightarrow{AB}$, що має початок у точці A і кінець у точці B, дорівнюють різниці відповідних координат точок B і A.

$$\overrightarrow{AB} = (3-1, 0-(-2), -1-0) = (2, 2, -1).$$

Аналогічно знаходимо координати $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC} = (0-1, 3-(-2), -2-0) = (-1{,}5, -2).$$

Знаходимо векторний добуток цих векторів за формулою (3.4.4):

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i} + 5\vec{j} + 12\vec{k}.$$

Отже, $S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 5^2 + 12^2} = \frac{1}{2}\sqrt{170} \approx 6.52$ *кв, од.*

✧✧✧

13. Знайти об'єм піраміди з вершинами $A_1(2,1,-2), A_2(3,3,3), A_3(1,1,2), A_4(-1,-2,-3)$.

Розв'язання.

Розглянемо вектори

$\overrightarrow{A_1A_2} = \big(3-2, 3-1, 3-(-2)\big) = (1,2,5)$;

$\overrightarrow{A_1A_3} = (-1,0,4)$;

$\overrightarrow{A_1A_4} = (-3,-3,-1)$.

Відомо, що об'єм піраміди, побудованої на ребрах A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, дорівнює шостій частині паралелепіпеда, побудованого на цих же ребрах.

Тому

$$Vпірам = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \cdot (\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_2})\right|.$$

Тому застосувавши формулу (3.4.5), отримуємо:

$$Vпірам = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\text{куб. од.}$$

✧✧✧

14. Показати, що вектори $\overrightarrow{a_1} = (3;0;2), \overrightarrow{a_2} = (1;-2;3), \overrightarrow{a_3} = (1;4;5)$ є лінійно незалежними.

Розв'язання.

Складемо рівняння $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3} = 0$. Цю рівність запишемо

$$\alpha_1(3;0;2) + \alpha_2(1;-2;3) + \alpha_3(1;4;5) = 0.$$

Відтак одержуємо систему лінійних рівнянь для знаходження $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Визначник цієї однорідної системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -54 \neq 0.$$

Отже, система має тільки нульовий розв'язок $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Тому однорідна система векторів лінійно незалежна, відповідно до означення.

♢♢♢

15. Задано вектори $\overrightarrow{a_1} = (4;5;2), \overrightarrow{a_2} = (3;0;1), \overrightarrow{a_3} = (-1;4;2)$ і $\vec{d} = (5;7;8)$ в базисі $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$. Показати, що вектори $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

Розв'язання.

Покажемо, що вектори $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ утворюють базис. Для цього складемо визначник із координат цих векторів.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -27 \neq 0.$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ утворюють базис.

Виразимо зв'язок між базисами

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_1} = 4\overrightarrow{b_1} + 5\overrightarrow{b_2} + 2\overrightarrow{b_3} \\ \overrightarrow{a_2} = 3\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_3} \\ \overrightarrow{a_3} = -\overrightarrow{b_1} + 4\overrightarrow{b_2} + 2\overrightarrow{b_3} \end{cases}$$

Матриця переходу від базису $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ до базису $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ має вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо обернену матрицю до матриці B.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B^{-1} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -4 & -7 & 12 \\ -2 & 10 & -21 \\ 5 & 2 & -15 \end{pmatrix}$$

Тепер знайдемо координати вектора $\vec{d}$ в новому базисі

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -4 & -7 & 12 \\ -2 & 10 & -21 \\ 5 & 2 & -15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 27 \\ -108 \\ -81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Отже,

$$\vec{d} = -\overrightarrow{a_1} + 4\,\overrightarrow{a_2} + 3\,\overrightarrow{a_3}\,.$$

✧ ✧ ✧

16. Нехай у трьохвимірному просторі задано базис $\boldsymbol{e}$: $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Вектори

$\overrightarrow{e_1'} = 5\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} - 2\,\overrightarrow{e_3}$,

$\overrightarrow{e_2'} = 2\overrightarrow{e_1} + 3\,\overrightarrow{e_2}$,

$\overrightarrow{e_3'} = -2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$,

утворюють новий базис $\boldsymbol{e'}$. Знайти координати вектора $\vec{a} = \overrightarrow{e_1} + 4\,\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$ в новому базисі $\boldsymbol{e'}$.

Розв'язання.

Побудуємо матрицю переходу від e до e' (стовпцями такої матриці є координати векторів $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ нового базису e' у старому базисі e).

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Delta T = 1.$$

Зв'язок між координатами довільного вектора $\vec{a}$ у двох базисах подається формулами:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб скористатись формулами, знайдемо обернену матрицю до матриці T:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix}.$$

Застосувавши відповідну рівність, отримаємо:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \\ -27 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\vec{a} = -13\overrightarrow{e_1'} + 6\,\overrightarrow{e_2'} - 27\,\overrightarrow{e_3'}.$$

✧✧✧

17. Довести, що кожна з двох систем векторів e і e' є базисом, знайти зв'язок координат одного і того самого вектора в цих базисах.

e: $\overrightarrow{e_1} = (1, 2, 1)$,
$\overrightarrow{e_2} = (2, 3, 3)$,
$\overrightarrow{e_3} = (3, 7, 1)$;

e': $\overrightarrow{e_1'} = (3, 1, 4)$,
$\overrightarrow{e_3'} = (5, 2, 1)$,
$\overrightarrow{e_3'} = (1, 1, -6)$.

Розв'язання.

Аби перевірити, що кожна із систем векторів утворює базис, потрібно знайти їхні ранги. Для трьохвимірного простору ранг кожної з систем має дорівнювати 3.

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$; rang(e)=3, $\Delta(e) = 1$.

$$e' = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -10 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$; rang(e')=3, $\Delta(e') = 4$.

Нехай вектор $\vec{x}$ у базисі $\boldsymbol{e}$ має координати (x_1, x_2, x_3), а в базисі $\boldsymbol{e'}$ координати (x_1', x_2', x_3'). Тоді зв'язок задається формулою $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$.

Знайдемо матрицю переходу з базису e до e'.

$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} T$, для розв'язання потрібно знайти матрицю

$e^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Отримаємо:

$$T = e^{-1}e' = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}.$$

Зв'язок координат одного і того самого вектора в цих базисах:

$x_1 = -27x_1' - 71x_2' - 41x_3'; x_2 = 9x_1' + 20x_2' + 9x_3'; x_3 = 4x_1' + 12x_2' + 8x_3'.$

✧✧✧

18. Лінійне перетворення в базисі $\boldsymbol{e}$: $\overrightarrow{e_1} = (8, -6, 7), \overrightarrow{e_2} = (-16, 7, -13), \quad \overrightarrow{e_3} = (9, -3, 7)$ має матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю в базисі $\boldsymbol{e}'$: $\overrightarrow{e_1'} = (1, -2, 1)$, $\overrightarrow{e_2'} = (3, -1, 2)$, $\overrightarrow{e_3'} = (2, 1, 2)$.

Розв'язання.

Знайдемо спочатку матрицю переходу від базису e до e' з матричного рівняння $e' = eT \Rightarrow T = e^{-1}e$.

Оскільки, матриця $e = \begin{pmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{pmatrix}$, то $e^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & -5 & -15 \\ 21 & -7 & -30 \\ 29 & -8 & -40 \end{pmatrix}$, тоді

$$T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & -5 & -15 \\ 21 & -7 & -30 \\ 29 & -8 & -40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо $T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

За формулою $A' = T^{-1}AT$ знайдемо матрицю лінійного перетворення в новому базисі e′:

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

З прикладу зрозуміло, що вигляд матриці залежить від вибраного базису.

✧✧✧

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Запишемо характеристичну матрицю для матриці A, для знаходження власних чисел і власних векторів, а саме:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}.$$

Відповідна система рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}.$$

Як уже відомо, для того, щоб ця система мала ненульові розв'язки, потрібно, щоб визначник цієї системи дорівнював нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

або $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$.

Корені цього квадратного рівняння є $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Таким чином ми знайшли власні (характеристичні) числа.

Тепер знайдемо власні вектори, які відповідають знайденим власним числам.

Щоб знайти координати власного вектора, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 2$, підставляємо в систему, одержимо:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}.$$

Звідси $x_1 = 2t, x_2 = t$, при довільному $t \neq 0$, є розв'язком цієї системи. Отже, вектор $\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$, t ≠ 0 є власним вектором-стовпчиком матриці A.

Для знаходження координат власного вектора матриці A, що відповідає власному числу $\lambda_2 = 3$, аналогічно, число $\lambda_2 = 3$ підставляємо в систему і одержимо:

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}.$$

Звідси $x_1 = x_2 = t$,

Отже, $x_1 = t, x_2 = t\ t \neq 0$, а вектор-стовпчик $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ є власним вектором, що відповідає власному числу $\lambda_2 = 3$.

✧✧✧

20. Знайти базис, в якому матриця лінійного перетворення набуває діагонального вигляду $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Таким базисом буде базис із власних векторів лінійного перетворення. Для їх знаходження використаємо співвідношення $A\vec{b} = \lambda\vec{b}$, де $\vec{b} = (x_1, x_2, x_3)$ – один із власних векторів.

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 15x_1 - 11x_2 + 5x_3 = \lambda x_1 \\ 20x_1 - 15x_2 + 8x_3 = \lambda x_2 \\ 8x_1 - 7x_2 + 6x_3 = \lambda x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (15-\lambda)x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 0 \\ 20x_1 - (15+\lambda)x_2 + 8x_3 = 0 \\ 8x_1 - 7x_2 + (6-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}.$$

Отримана однорідна система рівнянь для знаходження вектора $\vec{b}$ повинна мати нетривіальний розв'язок, оскільки власний вектор відмінний від нульового. Тому потрібно, щоб визначник цієї системи дорівнював нулю.

Прирівнюючи його до нуля, маємо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 15-\lambda & -11 & 5 \\ 20 & -15-\lambda & 8 \\ 8 & -7 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Знаходимо визначник і отримуємо: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$. Корені цього рівняння $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3.$ Знайдемо власний вектор для кожного з коренів.

1) $\lambda_1 = 1, \begin{cases} 14x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 0 \\ 20x_1 - 16x_2 + 8x_3 = 0, \\ 8x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

оскільки $\Delta = 0$, запишемо в системі перші два рівняння і переведемо x_3 у розряд вільних невідомих:

$$\begin{cases} 14x_1 - 11x_2 = -5x_3 \\ 5x_1 - 4x_2 = -2x_3 \end{cases},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & -11 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -5x_3 & -11 \\ -2x_3 & -4 \end{vmatrix} = -2x_3, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 14 & -5x_3 \\ 5 & -2x_3 \end{vmatrix} = -3x_3.$$

$$x_1 = 2x_3, x_2 = 3x_3.$$

Отже, перший власний вектор $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) $\lambda_2 = 2, \begin{cases} 13x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 0 \\ 20x_1 - 17x_2 + 8x_3 = 0 \\ 8x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$.

Аналогічно запишемо в системі два рівняння, наприклад, друге і третє:

$$\begin{cases} 20x_1 - 17x_2 = -8x_3 \\ 8x_1 - 7x_2 = -4x_3 \end{cases},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & -17 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -8x_3 & -17 \\ -4x_3 & -7 \end{vmatrix} = -12x_3, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 20 & -8x_3 \\ 8 & -4x_3 \end{vmatrix} = -16x_3.$$

$$x_1 = 3x_3, x_2 = 4x_3, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3) $\lambda_2 = 3, \begin{cases} 12x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 0 \\ 20x_1 - 18x_2 + 8x_3 = 0 \\ 8x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$.

Запишемо перші два рівняння:

$$\begin{cases} -11x_2 + 5x_3 = 12x_1 \\ -18x_2 + 8x_3 = 20x_1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -11 & 5 \\ -18 & 8 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -12x_1 & 5 \\ -20x_1 & 8 \end{vmatrix} = 4x_1, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} -11 & -12x_1 \\ -18 & -20x_1 \end{vmatrix} = 4x_1.$$

$$x_2 = 2x_1, x_3 = 2x_1, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо новий базис із векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$. Побудуємо матрицю переходу до цього базису T (стовпцями такої матриці є координати векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$):

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

За формулою $A' = T^{-1}AT$ знайдемо матрицю лінійного перетворення φ в новому базисі $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, складеному з власних векторів:

$$A' = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, у базисі з власних векторів матриця лінійного перетворення має діагональний вигляд, причому на головній діагоналі розміщені власні числа матриць.

✧✧✧

21. Задано матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ квадратичної форми $F(x_1, x_{2,}, x_3)$ у R_3 . Записати її у вигляді многочлена.

Розв'язання.

За умовою $a_{11} = 2, a_{12} = a_{21} = -1, a_{13} = a_{31} = 0, a_{22} = 3, a_{23} = a_{32} = 5, a_{33} = -2$.

Отже, $F(x_1, x_2, x_3) = 2{x_1}^2 + 3{x_2}^2 - 2{x_3}^2 - 2x_1x_2 + 10x_2x_3$.

✧✧✧

22. Знайти ортогональну матрицю T, що зводить квадратичну форму $F(x_1, x_2, x_3) = 6{x_1}^2 + 5{x_2}^2 + 7{x_3}^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ до канонічного вигляду, і записати її.

Розв'язання.

За умовою матриця квадратичної форми у просторі R_3 має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Його корені $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$.

Стовпчики шуканої ортогональної матриці T – *ортонормовані власні вектори матриці A.*

Власному числу $\lambda_1 = 3$ відповідає нормований власний вектор $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$,

власному числу $\lambda_2 = 6$ – *вектор* $\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, власному числу $\lambda_3 = 9$ – $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Отже, шукана матриця $T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, а її канонічний вигляд квадратичної форми: $F'(y_1, y_2, y_3) = 3{y_1}^2 + 6{y_2}^2 + 9{y_3}^2$.

3.8. Контрольні запитання

1. Які величини називаються скалярними, а які векторними?
2. Що таке вектор? Які його основні характеристики?
3. Які вектори називаються колінеарними, компланарними, рівними?
4. Які вектори називаються нульовими, одиничними?
5. Які ви знаєте лінійні операції над векторами?
6. Як повинні бути розміщені вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$?

7. Як знайти проекцію вектора на вісь?

8. Що таке декартова система координат? Які основні елементи декартової системи координат?

9. Що таке полярна система координат? Які основні елементи полярної системи координат?

10. Як перетворити декартові координати точки в полярні?

11. Як перетворити полярні координати точки в декартові?

12. Як змінюються координати точки при повороті системи координат?

13. Як змінюються координати точки при паралельному перенесенні системи координат?

14. Які вектори називаються лінійно залежними?

15. Що таке базис на площині і в просторі?

16. Як знайти модуль (довжину) вектора?

17. Як додавати та віднімати вектори, задані в координатній формі?

18. Що таке множення вектора на число? Як воно впливає на вектор?

19. Що називається напрямними косинусами вектора і як їх знайти?

20. Як визначити колінеарність двох векторів?

21. Як визначається скалярний добуток двох векторів?

22. Як виражається скалярний добуток через координати векторів?

23. Яка геометрична інтерпретація скалярного добутку?

24. Як за допомогою скалярного добутку знайти кут між двома векторами?

25. За яких умов два вектори перпендикулярні?

26. Як знайти проекцію одного вектора на інший, використовуючи координати?

27. Як обчислюється векторний добуток двох векторів?

28. Яка геометрична інтерпретація векторного добутку?

29. За яких умов векторний добуток дорівнює нулю?

30. Який напрямок має вектор, отриманий у результаті векторного добутку?

31. Як знайти площу паралелограма, утвореного двома векторами?

32. Що таке мішаний добуток трьох векторів?

33. Як обчислюється мішаний добуток?

34. Яка геометрична інтерпретація мішаного добутку?

35. За яких умов три вектори компланарні?

36. Що означає *n*-вимірний векторний простір?

37. Що таке базис векторного простору? Як визначити його розмірність?

38. Як перевірити, чи є вектори лінійно незалежним?

39. Сформулюйте означення власного числа та власного вектора лінійного перетворення.

40. Що таке характеристичне рівняння матриці, і як його використовують?

3.9. Завдання для самостійного виконання

1. У трикутній піраміді SABC відомі вектори $SA = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$. Знайти вектор $\overrightarrow{SO}$, якщо точка O є центром мас трикутника ABC.

2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут φ = 60◦, $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

3. Дано $|\vec{a}| = 11$, $\vec{b} = 23$ і $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$.

4. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $|\vec{a}| = 5$, $\vec{b} = 12$.

5. Користуючись паралелограмом, побудованим на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, перевірити не рисунку справедливість тотожностей:

1) $(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}$;

2) $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{b}$;

3) $\vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b}$;

4) $\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.

6. Початок координат перенесено (без зміни напряму осей) в точку $O'(3, -1)$. Координати точок A $(2;\ 3)$, B $(-3;\ 0)$ і C $(-1;\ 4)$ визначено в новій системі координат. Обчислити координати цих самих точок у старій системі.

7. У деякій прямокутній системі координат задано точки A $(9; -7)$, B $(6;\ 2)$ і C $(1;\ -4)$. Обчислити координати цих точок за умови, що початок координат перенесено в точку O_1 $(-2; 3$.

8. Знайти відстань між двома точками, які мають однакові координати ($x = 1$ і $y = 2$) відносно двох різних прямокутних систем координат, причому нова система утворюється зі старої перенесенням початку координат у точку O' $(1, -3)$ без зміни напряму осей.

9. Осі координат повернуто на кут $\alpha = 60°$. Координати точок A $(2\sqrt{3}, -4)$; B $\sqrt{3}, 0)$ і C $(0, -2\sqrt{3})$ визначено в новій системі. Обчислити координати цих самих точок у старій системі координат.

10. Початок координат перенесено в точку O' $(-1, 2)$, осі координат повернуто на кут $\alpha = arctg\frac{5}{12}$. Координати точок $M_1(3, 2), M_2$ $(2, -3)$ і M_3 $(13, -13)$ визначено в новій системі. Обчислити координати цих самих точок у старій системі.

11. Побудувати точки, задані полярними координатами $A_1\left(2, \frac{\pi}{2}\right), A_2\left(1, \frac{\pi}{4}\right), A_3\left(3, -\frac{\pi}{2}\right)$.

12. Знайти відстань між двома заданими в полярних координатах точками:

1) $A(2,\ \frac{\pi}{12})$ і B $(1,\ \frac{5\pi}{12})$; 2) $A(4,\ \frac{\pi}{5})$ і B $(6, \frac{6\pi}{5})$;

3) $A(3, \frac{11\pi}{18})$ і B $(4, \frac{\pi}{9})$. 4) $A(4, \frac{5\pi}{12})$ і B $(2, \frac{\pi}{9})$.

13. Полюс полярної системи координат збігається з початком декартових прямокутних координат, а полярна вісь збігається з додатною піввіссю абсцис. У полярній системі координат дано точки $M_1\left(6, \frac{\pi}{2}\right), M_2$ $(5, 0), M_3$ $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$, $M_4(8,$ $\frac{2\pi}{3}), M_5$ $(10, -\frac{\pi}{3}), M_6(12, -\frac{\pi}{6})$. Знайти декартові координати цих точок.

14. Полюс полярної системи координат збігається з початком декартових прямокутних координат, а полярна вісь збігається з додатною піввіссю абсцис. У декартовій прямокутній системі координат дано точки

$M_1(0,5), M_2\ (-3,0), M_3\ (\sqrt{3},\ 1), M_4(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2}), M_5(1,-\sqrt{3})$. Визначити полярні координати цих точок.

15. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ та їхню довжину, якщо:

1) A $(2,-1,\ 3)$, B $(-3,5,-2)$; 4) A $(3,-2,2)$, B $(-1,0,2)$;

2) A $(4,-5,\ 2)$, B $(2,-3,1)$; 5) A $(-1,0,\ 5)$, B $(1,2,0)$;

3) A $(7,3,-2)$, B $(4,3,-2)$; 6) A $(6,-3,\ 0)$, B $(0,0,5)$.

16. Знайти координати точки B, яка є кінцем вектора $\vec{a}(-3,5,-1)$, якщо початок збігається з точкою $A(1,4,-7)$.

17. Дано два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Знайти:

а) $3\vec{a}+2\vec{b}$; б) $5\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; в) $-\vec{a}-4\vec{b}$;

якщо:

1) $\vec{a}=\ (3,-1,-3)$, $\vec{b}\ (6,0,-2)$; 3) $\vec{a}=\ (12,-10,-8)$, $\vec{b}\ (34,2,-2)$;

2) $\vec{a}=\ (-2,3,-1)$, $\vec{b}\ (8,0,-4)$; 4) $\vec{a}=\ (-4,-6,-10)$, $\vec{b}\ (-4,0,2)$;

18. Дано вершини трикутника. Знайти: довжини сторін; довжини медіан; напрямляючі косинуси кутів трикутника.

1) $A(0,0,5), B(5,-2,1), C(2,6,1)$;

2) $A(1,-2,3), B(5,4,-1), C(1,-5,2)$;

3) $A(2,4,-6), B(-2,-3,-1), C(-2,5,0)$.

19. Чи може вектор утворювати з осями координат кути:

1) $\alpha=60°, \beta=60°, \gamma\ =\ 30$; 3) $\alpha=45°, \beta=60°, \gamma\ =\ 135$;

2) $\alpha=60°, \beta=120°, \gamma\ =\ 40$; 4) $\alpha=120°, \beta=60°, \gamma\ =150$.

20. Знайти вектор $\vec{a}(x,-1,z)$, колінеарний вектору $\vec{b}(1,-2,3)$.

21. Довести, що точки $A(-1,2,3), B(2,-1,1), C(1,-3,-1)$ і $D(-5,3,3)$ є вершинами трапеції.

22. Знайти орт вектора:

1) $\vec{a}(-3,5,-1)$; 3) $\vec{c}(2,-2,0)$;

2) $\vec{b}(-4,-5,2)$; 4) $\vec{d}(6,-2,-3)$.

23. Дано дві точки: $A\,(2,-1), B\,(1;\,1)$. Знайти координати точки N, що симетрична точці B відносно точки A.

24. Дано три вершини паралелограма: $A\,(4,—\,4), B(6,-2)$ і C $(0,4)$. Визначити четверту вершину D, яка протилежна до B.

25. Дано дві суміжні вершини паралелограма $A\,(-2,5), B\,(2;\,7)$ і точку перетину його діагоналей M $(2,1)$. Визначити дві інші його вершини.

26. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 120°, а довжини векторів $|\vec{a}| = 5$, $\vec{b} = 3$. Знайти:

1) $\vec{a}^2$;

2) $(\vec{a}\vec{b})$;

3) $(\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$;

4) $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

27. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ і $\vec{n} = 4\vec{a} + 5\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1; \left|\vec{b}\right| = 2; (\overset{\wedge}{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$.

28. Знайти довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1; \left|\vec{b}\right| = 4$, а кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $\frac{\pi}{3}$.

29. При якому значенні m вектори $\vec{a} = m\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 7\vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{\imath} + m\vec{\jmath} + 10\vec{k}$ перпендикулярні?

30. Дано точки $A(-3;0;-2), B(5;-2;1), C(2;6;-1), D(1;3;-3)$. Довести, що прямі AB та CD взаємно перпендикулярні.

31. Знайти скалярний добуток та косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a} = (1{,}2,-2), \vec{b} = (-6,4,12)$;

2) $\vec{a} = (4,-10,1), \vec{b} = (11,-5,-2)$;

3) $\vec{a} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 7\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}$;

4) $\vec{a} = 5\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}, \vec{b} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}$;

5) $\vec{a} = 7\vec{\imath} + \vec{k}, \vec{b} = -5\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

32. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (2, 3, -1)$ і $\vec{b} = (1, -2, 3)$ і задовольняє умову $\vec{x}(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}) = -6$.

33. Дано два вектори $\vec{a} = (3; -1; 5)$ і $\vec{b} = (1; 2; -3)$. Знайти вектор $\vec{x}$ за умови, що він перпендикулярний до осі *Oz* і задовольняє умову $\vec{x} \cdot \vec{a} = 9$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -4$.

34. Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь вектора $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a} = (-1, -2, 2), \vec{b} = (5, 4, -5)$; 2) $\vec{a} = (0, 3, -4), \vec{b} = (6, 4, 3)$;

3) $\vec{a} = (1, -2, 3), \vec{b} = (-3, 0, 4)$; 4) $\vec{a} = (-3, -2, 0), \vec{b} = (1, 2, 2)$.

35. Дано точки $A(-1, 3, -3), B(4, 3, 6), C(2, 0, 3), D(4, 3, -3)$. Обчислити $\text{пр}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.

36. Дано вершини $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ трикутника. Знайти:

а) довжини сторін AC, AB, BC;

б) напрамляючі косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$;

в) кути трикутника ABC;

г) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$;

1) A $(1, -1, 1), B(3, 2, -1), C(-2, 1, 0)$; 2) $A(2, 2, 5), B(3, 1, 2), C(1, -2, 1)$;

3) A $(2, 2, 5), B(3, 1, 2), C(1, -2, 1)$; 4) $A(4, 5, -2), B(-1, 3, 0), C(6, 1, 5)$.

37. Дано три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Обчислити:

а) $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$; б) $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$; в) $\text{пр}_{\vec{c}}(\overrightarrow{3a} - 2\vec{b})$; якщо:

1) $\vec{a} = (1, 3, -4), \vec{b} = (-2, 4, 5)$; 2) $\vec{a} = (-1, -2, 1), \vec{b} = (3, -5, 1)$;

3) $\vec{a} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}, \vec{b} = \vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 4\vec{k}$; 4) $\vec{a} = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath}, \vec{b} = 2\vec{\imath} - 2 + 3\vec{k}$.

38. Зайти модуль векторного добутку $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$, якщо:

1) $|\vec{a}| = \sqrt{3}, \left|\vec{b}\right| = 4, (\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$; 2) $|\vec{a}| = 3, \left|\vec{b}\right| = 10, (\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{6}$;

3) $|\vec{a}| = 2, \left|\vec{b}\right| = 3, (\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{2\pi}{3}$; 4) $|\vec{a}| = 3, \left|\vec{b}\right| = 6, (\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{5\pi}{6}$.

39. Зайти векторний добутку $\vec{a} \times \vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a} = (1,2,-2), \vec{b} = (-6,4,8)$; 2) $\vec{a} = (4,-5,1), \vec{b} = (0,-1,-2)$;

3) $\vec{a} = -2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}$;

4) $\vec{a} = 5\vec{\imath} + \vec{\jmath}, \vec{b} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

40. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

1) $\vec{a} = (-1,0,-2), \vec{b} = (-5,-4,3)$;

2) $\vec{a} = (2,-5,1),\ \vec{b} = (0,-1,2)$;

3) $\vec{a} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath}, \vec{b} = 2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - \vec{k}$;

4) $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}, \vec{b} = 3\vec{\imath} - \overrightarrow{3j} + 2\vec{k}$.

41. Дано вершини $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ трикутника. Знайти площу трикутника:

1) A $(1,-1,1), B(3,2,-1), C(-2,1,0)$; 2) A $(2,2,5),\ B(3,1,2), C(1,-2,1)$;

3) A $(2,2,5), B$ $(3,1,2), C(1,-2,1)$; 4) $A(4,5,-2), B(-1,3,0), C(6,1,5)$.

41. Обчислити мішаний добуток векторів $\vec{a}, \overrightarrow{b}, \vec{c}$:

1) $\vec{a} = (-2,1,-2), \vec{b} = (-5,-1,5), \vec{c} = (-1,0,0)$;

2) $\vec{a} = (2,-1,1),\ \vec{b} = (0,-1,4), \vec{c} = (-3,0,-2)$;

3) $\vec{a} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath}, \vec{b} = 2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - \overrightarrow{2k}, \vec{c} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$;

4) $\vec{a} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 5\vec{k}, \vec{b} = \vec{\imath} - 7\vec{\jmath} + 2\vec{k}, \vec{c} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$.

42. Встановити, чи компланарні вектори $\vec{a}, \overrightarrow{b}, \vec{c}$, якщо:

1) $\vec{a} = (3,2,-2), \vec{b} = (1,-1,3), \vec{c} = (-1,9,-11)$;

2) $\vec{a} = (3,1,-1), \vec{b} = (1,2,-3), \vec{c} = (3,-4,-7)$;

3) $\vec{a} = (5,-1,3), \vec{b} = (2,1,2), \vec{c} = (3,-1,-2)$;

4) $\vec{a} = (3,1,-1), \vec{b} = (6,2,-2), \vec{c} = (1,-1,0)$.

43. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на заданих векторах $\vec{a}, \overrightarrow{b}, \vec{c}$:

1) $\vec{a} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}, \vec{b} = -3\vec{\jmath} + \vec{k}, \vec{c} = 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}$;

2) $\vec{a} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}, \vec{b} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}, \vec{c} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}$;

3) $\vec{a} = 4\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + \vec{k}, \vec{b} = -2\vec{\jmath} + \vec{k}, \vec{c} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$;

4) $\vec{a} = 2\vec{\imath} + \overrightarrow{2\jmath} + 3\vec{k}, \vec{b} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}, \vec{c} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \overrightarrow{2k}$.

44. Дано вершини $A_1(x_1y_1z_1)$, $A_2(x_2y_2z_2)$, $A_3(x_3y_3z_3)$, $A_4(x_4y_4z_4)$ піраміди. Знайти об'єм піраміди, якщо:

1) $A_1(1,-1,1), A_2(3,2,-1), A_3(2,2,5), A_4(-2,1,0)$;

2) $A_1(-2,1,0), A_2(2,2,5), A_3(3,1,2), A_4(1,-2,1)$;

3) $A_1(2,2,5), A_2(-2,1,0), A_3\ (3,1,2), A_4(1,-2,1)$;

4) $A_1(1,-1,6), A_2(4,5,-2), A_3(-1,3,0), A_4(6,1,5)$.

45. Перевірити, чи вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ є лінійно незалежними, якщо:

1) $\overrightarrow{a_1} = (2,3,4), \overrightarrow{a_2} = (4,-3,3), \overrightarrow{a_3} = (1,1,1)$;

2) $\overrightarrow{a_1} = (2, -4, 6),\ \overrightarrow{a_2} = (1, -2, 3), \overrightarrow{a_3} = (4, -8, 12)$;

3) $\overrightarrow{a_1} = (1, 0, 2),\ \overrightarrow{a_2} = (0, 3 - 1), \overrightarrow{a_3} = (4, -2, 1)$;

4) $\overrightarrow{a_1} = (2, -1, 5),\ \overrightarrow{a_2} = (1, 3, -2), \overrightarrow{a_3} = (-3, 4, 0)$.

46. Довести, що вектори $\vec{a}, \overrightarrow{b}, \vec{c}$ утворюють базис, і розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом, якщо:

1) $\vec{a} = (0, -5, 7), \vec{b} = (3, -2, -1), \vec{c} = (1, 5,\ 3), \vec{d} = (20, -27, 35)$;

2) $\vec{a} = (2,1, -3), \vec{b} = (3, -2, 1), \vec{c} = (-1, 0, -2), \vec{d} = (-2, 2, 1)$;

3) $\vec{a} = (0,1, 2), \vec{b} = (-1, 0, 3), \vec{c} = (1, 2, -5), \vec{d} = (0, 3, 0)$;

4) $\vec{a} = (2,1, 1), \vec{b} = (1, 2, -2), \vec{c} = (1, 1,\ 2), \vec{d} = (4, 3, -2)$.

47. Знайти всі значення λ, за яких вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, якщо

1) $\overrightarrow{a_1} = (3, 4, 2),\ \overrightarrow{a_2} = (6 ,8,\ 7), \vec{b} = (9, 12, \lambda)$;

2) $\overrightarrow{a_1} = (4, 4, 3),\ \overrightarrow{a_2} = (7, 2, 1), \overrightarrow{a_3} = (4, 1,\ 6), \vec{b} = (5, 9, \lambda)$;

3) $\overrightarrow{a_1} = (3,2, 5),\ \overrightarrow{a_2} = (2, 4, 7), \overrightarrow{a_3} = (5, 6, \lambda), \vec{b} = (1, 3, 5)$;

48. Знайти:

1) $\vec{x} = (7, 14, -1, 2)$ у базисі $\overrightarrow{e_1} = (1, 2, -1, -2),\ \overrightarrow{e_2} = (2, 3, 0, -1),$
$\overrightarrow{e_3} = (1, \quad 2, 1, 4), \quad \overrightarrow{e_4} = (1, \quad 3, -1, 0)$;

2) $\vec{x} = (6, 2, -7)$ у базисі $\overrightarrow{e_1} = (2, 1, -3), \overrightarrow{e_2} = (3,2, -5),\ \overrightarrow{e_3} = (1, -1, 1,)$.

49. Лінійне перетворення φ у базисі $\boldsymbol{e}$:
$\overrightarrow{e_1} = (8, -6, 7), \overrightarrow{e_2} = (-16, 7, -13), \quad \overrightarrow{e_3} = (9, -3, 7)$ має матрицю
$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. Знайти його матрицю в базисі $\boldsymbol{e}'$: $\overrightarrow{e_1'} = (2, 3, 1)$,
$\overrightarrow{e_2'} = (3, 4, 1), \overrightarrow{e_3'} = (1, 2, 2)$.

50. Знайти власні числа і власні вектори матриці, якщо:

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

6) $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

51. Записати матриці квадратичних форм, $F(x_1, x_{2,}, \dots, x_n)$, якщо:

1) $F(x_1, x_2) = 2{x_1}^2 - {x_2}^2 + 4x_1x_2$;

2) $F(x_1, x_2) = {x_1}^2 + 3{x_2}^2 - x_1x_2$;

3) $F(x_1, x_2) = 6x_1x_2$;

4) $F(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 - 2{x_2}^2 + {x_3}^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;

5) $F(x_1, x_2, x_3) = 4{x_1}^2 - {x_2}^2 + 5{x_3}^2$;

6) $F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - 2x_1x_3$.

52. Записати квадратичну форму $F(x_1, x_{2,}, \dots, x_n)$ у вигляді $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j$ за заданою матрицею, якщо:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Розділ

4

ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА ПЛОЩИНІ І В ПРОСТОРІ

4.1. Пряма на площині

Розглянемо співвідношення вигляду *F(x, y) = 0*, яке деякими математичними операціями зв'язує змінні *x* та *y*. Ця рівність називається ***рівнянням*** з двома змінними *x*, *y*, якщо ця рівність справедлива не для всіх пар чисел *x* та *y*.

Рівняння $\boldsymbol{F(x, y) = 0}$ ***називається рівнянням лінії*** у заданій системі координат, якщо це рівняння задовольняють координати *x* та *y* будь-якої точки, що лежить на лінії, і не задовольняють координати точок, що не лежать на цій лінії.

Отже, лінія є множиною всіх тих точок площини, координати яких задовольняють рівняння *F (x, y) = 0*.

Пряма лінія є найпростішою і найуживанішою з усіх ліній.

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами: точкою і вектором, паралельним цій прямій; двома точками; точкою і вектором, перпендикулярним до даній прямій точкою. Відповідно, різним способам задання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні види її рівнянь. Розглянемо ці рівняння:

Рівняння прямої, що проходить через точку, паралельно вектору.

Нехай пряма проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$, паралельно

вектору $\vec{s} = (m, n)$, який називається ***напрямним вектором прямої***. Візьмемо довільну точка прямої $-M(x, y)$ (рис. 4.1.1).

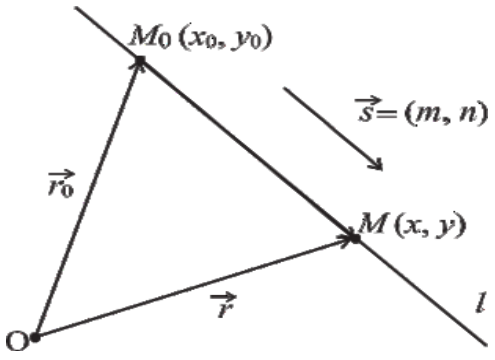


Рис. 4.1.1. Пряма, що проходить через точку, паралельно вектору

Розглянемо радіус вектори $\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OM_0}$ та $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ і вектор $\overrightarrow{M_0M}$, що лежить на цій прямій. Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{r_0} - \vec{r}$ та $\vec{s}$ колінеарні, то

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{s}\, t \qquad (4.1.1)$$

Змінна t у формулі може набувати довільних дійсних значень і називається ***параметром***, а рівняння називається ***векторним параметричним рівнянням прямої***.

Прирівнюючи відповідні координати векторів $\vec{r}$ та $\overrightarrow{r_0} + \vec{s}\, t$ за формулою (4.1.1), отримаємо

$$x = x_0 + mt, y = y_0 + nt,\ t \in (-\infty;\ \infty) \qquad (4.1.2)$$

Прирівнявши за параметром t, матимемо:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \qquad (4.1.3)$$

Рівняння (4.1.2) називається ***параметричним рівнянням прямої,*** **а рівняння** (4.1.3) – ***канонічним рівнянням прямої***.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Якщо пряма не перпендикулярна до осі *Ox*, то рівняння (4.1.3) можна записати у вигляді:

$$y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0) \text{ або } y = \frac{n}{m}x + (y_0 - \frac{n}{m}x_0).$$

Ввівши позначення $\frac{n}{m} = k$, $y_0 - \frac{n}{m}x_0 = b$, отримаємо:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{4.1.4}$$

$$y = kx + b. \tag{4.1.5}$$

Відношення $\frac{n}{m} = k = tg\alpha$, де α – кут, що утворює пряма з додатнім напрямом осі *Ox*, називається ***кутовим коефіцієнтом прямої***, а величина $b = y_0 - \frac{n}{m}x_0$– ордината точки перетину прямої з віссю *Oy*.

Рівняння (4.1.4) називається ***рівнянням прямої, яка проходить через задану точку*** $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ ***і має заданий кутовий коефіцієнт,*** а рівняння (4.1.5) – ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом***.

Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$ і рівняння прямої має вигляд:

$$y = kx.$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Нехай прямої, яка проходить через дві задані точки $\boldsymbol{M_1(x_1, y_1)}$, та $\boldsymbol{M_2(x_2, y_2)}$, складемо з рівняння прямої, як такої, що проходить через точку M_1 і має напрямний вектора $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{4.1.6}$$

Рівняння (4.1.6) називається рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки $\boldsymbol{M_1(x_1, y_1)}$, та $\boldsymbol{M_2(x_2, y_2)}$

Рівняння прямої у відрізках

Якщо пряма проходить через точки $A(a, 0)$ та $B(0, b)$, тобто відтинає на осях відрізки a та b (рис. 4.1.2), то, скориставшись рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки, маємо

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}, \text{ або}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{4.1.7}$$

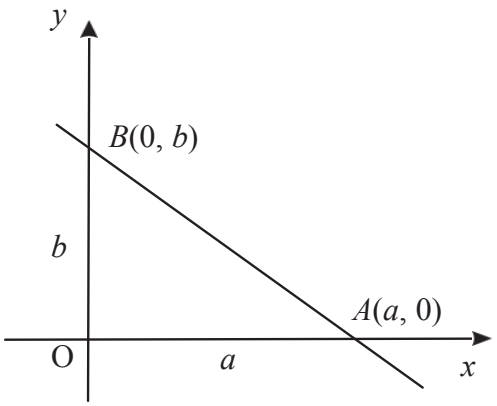


Рис. 4.1.2 Пряма у відрізках на координатній площині

Рівняння (4.1.7) називається ***рівнянням прямої у відрізках*** на осях, де a і b – відрізки, що їх відтинає пряма на координатних осях Ox і Oy, відповідно.

Рівняння прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до вектора

Нехай пряма проходить через задану точку $M_1(x_1, y_1)$, перпендикулярно до заданого ненульового вектора $\vec{n} = (A, B)$.

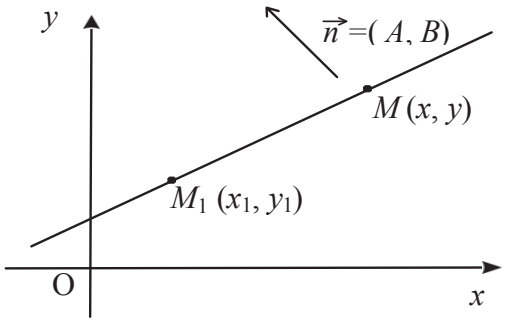


Рис. 4.1.3. Пряма, яка проходить через задану точку перпендикулярно до вектора

Візьмемо на прямій l довільну точку $M(x, y)$ і введемо вектор $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$ (рис. 4.1.3). Оскільки вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A\,(x - x_1) + B\,(y - y_{1)} = 0 \qquad (4.1.8)$$

Рівняння (4.1.8) називається ***рівнянням прямої, що проходить через точку M_1 (x_1; y_1) перпендикулярно до заданого вектора*** $\vec{n} = (A, B)$.

Вектор $\vec{n} = (A, B)$ називається ***нормальним вектором до прямої***. Пряма має безліч нормальних векторів. Усі вони паралельні між собою, а отже, що їхні відповідні координати пропорційні.

Загальне рівняння прямої

Рівняння

$$Ax + By + C = 0 \qquad (4.1.9)$$

з довільними коефіцієнтами *A, B,* і *C* такими, що *A* і *B* не дорівнюють нулю одночасно, називається ***загальним рівнянням прямої***.

Пряма, що визначається цим рівнянням, перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (A, B)$ (коефіцієнтами *A, B* при невідомих загального рівняння є координатами її нормального вектора).

Загальне рівняння прямої називається повним, якщо його коефіцієнти *A, B, C* відмінні від нуля. Якщо хоча б один із цих коефіцієнтів дорівнює нулю, то ***рівняння називається неповним***.

Від значень коефіцієнтів *A, B, C* залежить розміщення прямої на площині *Oxy*:

1*) C = 0*: рівняння має вигляд *Ax* + *By* = 0 і визначає пряму, що проходить через початок координат;

2) *B=0, A ≠ 0*: рівняння має вигляд *Ax + C = 0* і визначає пряму, яка паралельна до осі *Oy* ; якщо *C = 0*, то пряма збігається з віссю *Oy*;

3) *A=0, B ≠ 0* рівняння має вигляд *By + C = 0* і визначає пряму, яка паралельна до осі *Ox* ; якщо *C = 0*, то пряма збігається з віссю *Ox*.

Нормальне рівняння прямої

Нехай положення прямої на площині визначається двома величинами (параметрами прямої): довжиною і напрямком перпендикуляра OP, опущеного із початку координат на пряму і величиною кута α, який утворює цей перпендикуляр з віссю *Ox* (рис. 4.1.4).

На прямій l візьмемо довільну точку $M(x, y)$. Позначимо довжину перпендикуляра через p, а орт нормалі через $\overrightarrow{n^0}$. Проекція радіус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ на нормаль буде завжди рівною p.

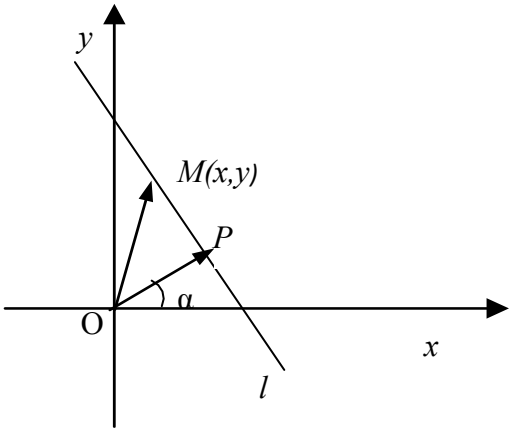


Рис. 4.1.4 Геометрична інтерпретація нормального рівняння прямої

Таким чином, пряма l визначається як геометричне місце точок площини, проекції радіус-векторів яких на нормаль дорівнює сталій величині p.

На основі скалярного добутку маємо $\text{Пр}_{\overrightarrow{n^0}}\ \vec{r} = \vec{r} \cdot \overrightarrow{n^0}$,

$$\vec{r} \cdot \overrightarrow{n^0} = p.$$

Таке рівняння є нормальним рівнянням прямої у векторній формі.

Оскільки $\left|\overrightarrow{n^0}\right| = 1$, координати $\overrightarrow{n^0} = (cos\alpha, sin\alpha)$, вектор $\overrightarrow{OM} = (x, y)$, то в координатній формі нормальне рівняння буде мати вигляд:

$$x\,cos\alpha + y\,sin\alpha - p = 0 \qquad (4.1.10)$$

Рівняння (4.1.10) називається ***нормальним рівнянням прямої***, де $p > 0$ – довжина перпендикуляра, проведеного з початку координат на пряму; α – кут нахилу цього перпендикуляра до осі O_x.

Якщо пряма задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, то його можна звести до нормального рівняння прямої, помноживши на деякий множник μ:

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0.$$

Одержане рівняння і загальне рівняння прямої рівносильні. Щоб рівняння було нормальним, тобто мало вигляд (4.1.10), потрібно, щоб виконувалися рівності:

$$\begin{cases} \mu A = cos\alpha; \\ \mu B = sin\alpha; \\ \mu C = -p\,. \end{cases}$$

Зі системи рівнянь отримуємо:

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (4.1.11)$$

μ називається нормувальним множником.

4.2. Взаємне розміщення прямих на площині

На площині дві прямі можуть розміщуватися одна відносно одної так:

перетинаються – якщо вони мають одну спільну точку (кут між ними відмінний від нуля);

паралельні – якщо вони не мають спільних точок і мають однаковий кутовий коефіцієнт;

збігаються – якщо вони мають однакове рівняння і всі їхні точки спільні;

перпендикулярні – якщо кут між ними дорівнює 90°.

Кутом між прямими l_1 і l_2 називається кут θ, на який треба повернути пряму l_1 (проти годинникової стрілки), щоб вона сумістилася з прямою l_2

1) Якщо прямі l_1 *і* l_2 задано канонічними рівняннями

$$l_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}; \qquad l_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2},$$

то кут між ними $\varphi = (\overset{\wedge}{l_1, l_2})$ вимірюється кутом між їхніми напрямними векторами $\overrightarrow{s_1} = (m_1, n_1)$ і $\overrightarrow{s_2} = (m_2, n_2)$ і знаходять за формулою

$$cos\,\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}| \cdot |\overrightarrow{s_2}|}$$

або

$$cos\,\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}} \qquad (4.2.1)$$

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то вектори $\overrightarrow{s_1}$ та $\overrightarrow{s_2}$ теж паралельні, тому їхні координати пропорційні, тобто

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (4.2.2)$$

Отже, *умовою паралельності двох прямих* є пропорційність координат напрямних векторів (4.2.2).

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то вектори $\overrightarrow{s_1}$ та $\overrightarrow{s_2}$ теж перпендикулярні і їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \qquad (4.2.3)$$

– умова перпендикулярності двох прямих.

2) Якщо прямі l_1 *і* l_2 задано загальними рівняннями

$$l_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0;$$
$$l_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

то кут між ними $\varphi = (\overset{\wedge}{l_1, l_2})$ вимірюється кутом між їхніми нормальними векторами $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2)$ і знаходять за формулою (аналогічно до випадку 1)).

$$cos\,\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (4.2.4)$$

Умовою паралельності двох прямих l_1 *і* l_2 є рівність

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (4.2.5)$$

а умовою перпендикулярності двох прямих l_1 *і* l_2

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \qquad (4.2.6)$$

3) Якщо прямі l_1 *і* l_2 задано рівняннями з кутовим коефіцієнтом

$$l_1: \mathrm{y} = k_1 x + b_1 1 \text{ і } l_2: \mathrm{y} = k_2 x + b_2,$$

де $k_1 = tg\alpha_1, k_2 = tg\alpha_2$ кутові коефіцієнти, то

$$tg\varphi = tg(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$$

або

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \tag{4.2.7}$$

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то $\varphi = 0$ відповідно і $tg\varphi = 0$, тому з формули (4.2.7) $k_2 - k_1 = 0$. Отже, *умовою паралельності цих прямих* буде рівність їх кутових коефіцієнтів

$$k_2 = k_1 \tag{4.2.8}$$

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то $\varphi = 90^\circ$, а $tg\varphi$ не існує, а отже знаменник дробу (4.2.7) дорівнює нулю. Отож, *умовою перпендикулярності прямих* є рівність

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \tag{4.2.9}$$

Відстань від точки $M_0 (x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ визначається як довжина перпендикуляра, проведеного з цієї точки до заданої прямої, і обчислюється за формулою, що враховує модуль підстановки координат точки в рівняння прямої, поділений на довжину її нормального вектора

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{4.2.10}$$

4.3. Площина в просторі

Загальне рівняння площини

Нехай у просторі задано довільну площину ***P***. Позначимо одну з її точок через M_0, а перпендикулярний до площини вектор – через $\vec{n}$. Точка M_0 і вектор $\vec{n}$ цілком визначають площину ***P***.

Через точку M_0 проходить тільки одна площина, що перпендикулярна до вектора $\vec{n}$.

Введемо у просторі прямокутну систему координат і позначимо через $(x_0;\ y_0; z_0)$ координати точки M_0, а через $(x;\ y;\ z)$ – координати довільної точки M площини, а координати вектора $\vec{n}$ – через (A, B, C).

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ для будь-якого положення точки M перпендикулярний до вектора $\vec{n}$. Отже, скалярний добуток цих векторів дорівнює нулеві:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0.$$

Виразимо його ліву частину через координати векторів і отримаємо

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (4.3.1)$$

Рівняння (4.3.1) називається ***рівнянням площини, що проходить через задану точку*** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A, B, C)$.

Вектор $\vec{n}$ *= (A; B; C)* називають ***нормальним вектором площини***.

Надаючи коефіцієнтам *A, B, C* рівняння (4.3.1) різні значення, можна отримати рівняння будь-якої площини, яка проходить через точку M_0. Сукупність площин, які проходять через цю точку, називається ***пучком площин, а рівняння*** (4.3.1) **– *рівнянням пучка площин***.

Рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (4.3.2)$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ називають ***загальним рівнянням площини***.

Дослідимо загальне рівняння площини, тобто розглянемо різні випадки неповного рівняння (4.3.2), які характеризують особливості розміщення площини відносно системи координат, а саме:

1) якщо у рівнянні (4.3.2) коефіцієнт *D* дорівнює нулю, то площина проходить через початок координат. Справді, якщо координати точки O(0;0;0) задовольняють рівняння, то

$$Ax + By + Cz = 0;$$

2) якщо в рівнянні $C = 0$, то площина паралельна вісі *Oz*.

Дійсно, вектор нормалі $\vec{n} = (\text{A};\ \text{B};\ 0)$ площини $Ax + By + D = 0$ перпендикулярний до осі *Oz*.

3) якщо в рівнянні $B = 0$, то площина паралельна осі *Oy*;

4) якщо в рівнянні $A = 0$, то площина паралельна осі *Ox*;

5) якщо в рівнянні $C = D = 0$, то площина проходить через вісь *Oz;*

Дійсно, для площини $Ax + By = 0$ поєднуються перша і друга умови.

Аналогічно площина $Ax + Cz = 0$ проходить через вісь *Oy*, а площина $By + Cz = 0$ проходить через вісь *Ox*.

6) якщо в рівнянні $B = C = 0$, то площина паралельна координатній площині *Oyz*.

Дійсно, оскільки площина $Ax + D = 0$ паралельна осям *Oy* і *Oz*, то вона паралельна площині *Oyz*.

Аналогічно площина $By + D = 0$ паралельна координатній площині *Oxz*, а площина $Cz + D = 0$ – координатній площині *Oxy*.

7) якщо в рівнянні $B = C = D = 0$, то площина $Ax = 0$ суміщається з координатною площиною $x = 0$, тобто з площиною *Oyz*.

Аналогічно, площина $By = 0$ суміщається з координатною площиною *Oxz*, а площина $Cz = 0$ — з площиною *Oxy*.

Рівняння площини у відрізках на осях координат

Найбільш загальним є випадок, коли рівняння повне, тобто кожний із коефіцієнтів *A, B,C, D* не дорівнює нулю. Тоді площина перетинає всі три координатні осі. Позначимо відрізки, які вона перетинає від осей, через a, b, c, і запишемо рівняння площини у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (4.3.3)$$

– ***рівняння площини у відрізках на осях***.

Точки перетину площини з осями координат *Ox*, *Oy, Oz* мають такі координати: $M_1\ (a\ ;\ 0;\ 0), M_2(0;\ b;\ 0), M_3(0;\ 0; c\ )$.

Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Запишемо рівняння площини, що проходить через три задані точки: $M_1(\ x_1;\ y_1;\ z_1),\ M_2(\ x_2;\ y_2;\ z_2), M_3(\ x_3;\ y_3;\ z_3)$.

Позначимо через $M\ (x;\ y; z)$ довільну точку площини $\boldsymbol{P}$.

Три вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_2M}$, $\overrightarrow{M_3M}$ лежать у заданій площині, отже вони компланарні. Запишемо умову компланарності цих векторів:

$$(\overrightarrow{M_1M}\ \cdot \overrightarrow{M_2M}) \times \overrightarrow{M_3M}\ = 0$$

Виразимо мішаний добуток трьох векторів, що стоїть у лівій частині рівняння, через координати цих векторів. Отримаємо

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.3.4)$$

– ***рівняння площини, що проходить через три задані точки.***

4.4. Взаємне розміщення двох площин

Нехай дві площини задано загальними рівняннями:

$$\alpha_1\colon\ A_1x\ +\ B_1\,y\ +\ C_1z\ + D_1\ =\ 0;$$

$$\alpha_2\colon A_2x\ +\ B_2\,y\ +\ C_2z\ + D_2\ =\ 0.$$

Двогранний кут між цими площинами вимірюється лінійним кутом. На підставі теореми елементарної геометрії про рівність кутів із взаємно перпендикулярними сторонами лінійний кут дорівнює куту між нормальними векторами $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$ двох заданих площин.

Кут між векторами $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$ знаходимо за формулою:

$$cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}.$$

Врахувавши, що $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$, визначимо косинус кута між двома площинами через коефіцієнти їх загальних рівнянь:

$$cos\varphi = \frac{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2 + C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (4.4.1)$$

Якщо площини α_1 та α_2 перпендикулярні, скалярний добуток їхніх нормальних векторів дорівнює нулю, тобто

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0 \qquad (4.4.2)$$

умова перпендикулярності двох площин у просторі.

Якщо площини α_1 та α_2 паралельні, то координати нормальних векторів пропорційні

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (4.4.3)$$

умова паралельності двох площин

Дві площини збігаються, якщо справджуються рівності

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \qquad (4.4.4)$$

4.5. Пряма лінія в просторі.
Різні види рівнянь прямої в просторі

Будь-яка лінія у просторі може розглядатися як лінія перетину двох площин (рис. 4.5.1).

Нехай різні площини α_1 і α_2 мають рівняння

$$\alpha_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

і

$$\alpha_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

а їх лінією перетину є деяка пряма l.

Ці площини не паралельні (інакше вони б або не мали спільних точок або збігалися) і тому для них не виконується співвідношення $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Координати точок прямої l, яка є спільною для обох площин, задовольняють систему рівнянь

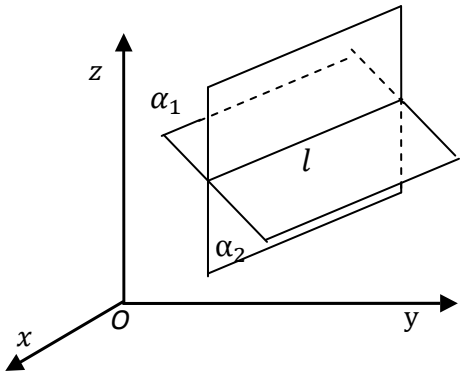


Рис. 4.5.1. Пряма в просторі

Загальне рівняння прямої записується як система рівнянь двох площин, які перетинаються у просторі:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Залежно від способу задання прямої в просторі можна розглядати різні її рівняння.

Нехай пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\vec{s} = (m, n, p)$. Візьмемо на прямій l довільну точку $M\,(x;\ y;\ z)$ і позначимо $\overrightarrow{OM}$ через $\vec{r}$, а вектора $\overrightarrow{OM_0}$ через $\overrightarrow{r_0}$ (рис. 4.5.2). То ***векторне параметричне рівняння прямої*** (як на площині, так і в просторі) матиме вигляд:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{s}\,t \qquad (4.5.1)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор заданої точки M_0; $\vec{s}$ – ненульовий напрямний вектор прямої; t – параметр.

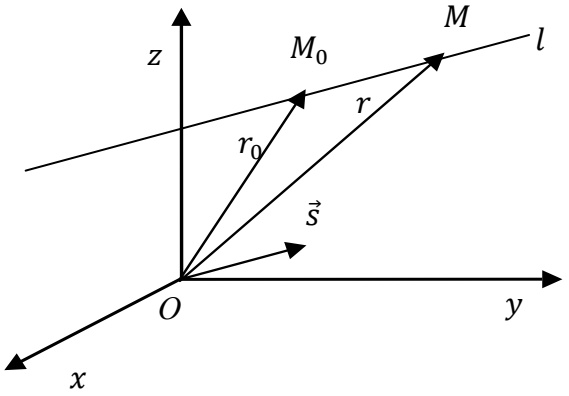


Рис. 4.5.2. Геометрична інтерпретація
векторно параметричного рівняння прямої

Розписавши рівняння (4.5.1) в координатній формі, отримаємо

$$x = x_0 + mt, y = y_0 + nt,\ z = z_0 + pt \qquad (4.5.2)$$

Рівняння (4.5.2) називаються ***параметричними рівняннями прямої в просторі***. Якщо параметр t змінюється, то точка $M(x;\ y;\ z)$ рухається по прямій l.

Використовуючи параметричні рівняння прямої, можна знайти точку перетину прямої і площини.

Нехай пряма ω і площина α не паралельні (мають точку перетину) і задані рівняннями ω: $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

$$\alpha\colon Ax + By + Cz + D = 0.$$

Щоб знайти точку перетину прямої l з площиною α, підставимо значення x, y, z з параметричного рівняння прямої в рівняння площини α.

Після простих перетворень одержимо

$$\mathrm{t} = \frac{\mathrm{A}\cdot\mathrm{x}_0+\mathrm{B}\cdot\mathrm{y}_0+\mathrm{C}\cdot\mathrm{z}_0}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}+\mathrm{B}\cdot\mathrm{n}+\mathrm{C}\cdot\mathrm{p}}.$$

Знайдене значення t підставимо в рівняння прямої ω, одержимо шукану точку перетину прямої l і площини α.

Виключивши параметр t із рівнянь (4.5.2)

$$\mathrm{t} = \frac{\mathrm{x}-\mathrm{x}_0}{\mathrm{m}};\ \mathrm{t} = \frac{\mathrm{y}-\mathrm{y}_0}{\mathrm{n}};\ \mathrm{t} = \frac{\mathrm{z}-\mathrm{z}_0}{\mathrm{p}}$$

Звідси

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \qquad (4.5.3)$$

Рівняння (4.5.3) називається ***канонічним рівнянням прямої в просторі***, а вектор $\vec{s} = (m, n, p)$ напрямним.

Нехай пряма проходить через дві задані точки $M_1(\ x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $M_2(\ x_2;\ y_2;\ z_2)$ В цьому випадку за напрямний вектор прямої $\vec{s}$ можна взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$. Тоді

$$m = x_2 - x_1;\ n = y_2 - y_1;\ \ p = z_2 - z_1.$$

Взявши за $x_0 = x_1$, $y_0 = y_1$, $z_0 = z_1$, одержимо

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (4.5.4)$$

Рівняння (4.5.4) називається ***рівнянням прямої в просторі, яка проходить через дві задані точки***.

У рівняннях (4.5.2), (4.5.3), (4.5.4) одна або дві координати напрямного вектора $\vec{s}$ можуть дорівнювати нулю (випадки $m = n = p = 0$ та $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 = z_2 - z_1 = 0$ неможливі, бо за означенням $\vec{s} \neq 0$).

Якщо $m = 0, n \neq 0, p \neq 0$, то напрямний вектор $\vec{s}$ перпендикулярний до осі Ox, тому рівняння

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

визначає пряму, перпендикулярну до осі Ox.

Аналогічно рівняння, в яких лише $n = 0$ або $p = 0$, визначають прямі, перпендикулярні до осі Oy або Oz.

Якщо $m = n = 0, p \neq 0$ або $m = p = 0$, $n \neq 0$ або $n = p = 0$, $m \neq 0$, то рівняння (4.5.3) визначає прямі паралельні осям Oz, Oy, Ox.

4.6. Взаємне розміщення прямих у просторі

Нехай задано дві прямі

$$l_1: \ \frac{x-x_0}{m_1} = \frac{y-y_0}{n_1} = \frac{z-z_0}{p_1};$$

$$l_2: \ \frac{x-x_0}{m_2} = \frac{y-y_0}{n_2} = \frac{z-z_0}{p_2}.$$

Кут φ між цими двома прями у просторі дорівнює куту між їх напрямними векторами $\overrightarrow{s_1} = (m_1, n_1, p_1)$ та $\overrightarrow{s_2} = (m_2, n_2, p_2)$ і обчислюється за допомогою формули:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}|\cdot|\overrightarrow{s_2}|} = \frac{m_1\cdot m_2 + n_1\cdot n_2 + p_1\cdot p_2}{\sqrt{m_1{}^2+n_1{}^2+p_1{}^2}\cdot\sqrt{m_2{}^2+n_2{}^2+p_2{}^2}} \qquad (4.6.1)$$

Якщо дві прямі в просторі ***паралельні***, то координати їх напрямних векторів $\overrightarrow{s_1} = (m_1, n_1, p_1)$ та $\overrightarrow{s_2} = (m_2, n_2, p_2)$ пропорційні:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad (4.6.2)$$

Дві прямі в просторі ***перпендикулярні***, якщо сума добутків відповідних координат їх напрямних векторів $\overrightarrow{s_1} = (m_1, n_1, p_1)$ та $\overrightarrow{s_2} = (m_2, n_2, p_2)$ дорівнює нулю:

$$m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0 \qquad (4.6.3)$$

Напрямними косинусами прямої в просторі називаються косинуси кутів, які пряма утворює з осями координат.

Якщо пряма має напрямний вектор $\vec{s} = (m, n, p)$, то напрямні косинуси визначаються як:

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}};$$
$$\cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}; \qquad (4.6.4)$$
$$\cos\gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

де α, β, γ – кути між прямою та осями *Ox, Oy і Oz*, відповідно.

4.7. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої та площини

Нехай задані пряма l: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ і площина α: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Вектор $\vec{s} = (m, n, p)$ напрямний вектор прямої, вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормаль до площини.

Кут φ між прямою l і площиною α – це гострий кут між прямою l і її проекцією на площину α.

Позначимо через θ кут між вектором $\vec{n} = (A, B, C)$ та $\vec{s} = (m, n, p)$. Тоді

$$cos\,\theta = \frac{A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \qquad (4.7.1)$$

Пряма l паралельна площині α тоді і тільки тоді, коли вектор $\vec{s} = (m, n, p)$ перпендикулярний до вектора $\vec{n} = (A, B, C)$, тому $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$, тобто

$$A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p = 0 \qquad (4.7.2)$$

– ***умова паралельності прямої l і площини α.***

Пряма l і площина α перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли вектор $\vec{s} = (m, n, p)$ паралельний вектору $\vec{n} = (A, B, C)$, тобто їхні координати пропорційні

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \qquad (4.7.3)$$

– ***умова перпендикулярності прямої l та площини α***.

4.8. Криві другого поряду

Лінією (кривою) другого порядку називають множину M точок площини, декартові координати x, y яких задовольняють алгебраїчне рівняння другої степені

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_0 = 0 \qquad (4.8.1)$$

де a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 − сталі дійсні числа, причому хоча б одне із чисел a_1, a_2, a_3 відмінне від нуля.

Рівняння (4.8.1) називають ***загальним рівнянням лінії другого порядку***.

4.8.1. Коло

Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу) (рис. 4.8.1).

Рівняння

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \text{ (4.5.1)} \qquad (4.8.1)$$

визначає коло з центром в точці $C_0(x_0, y_0)$ радіусом R.

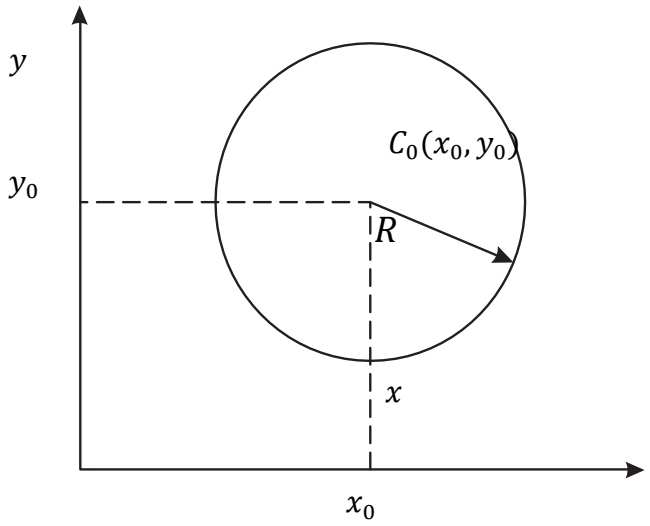


Рис. 4.8.1. Коло у декартовій системі координат

Якщо центр кола є початком координат, то його рівняння запишеться

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Якщо в рівнянні (4.8.1) розкрити дужки, то отримаємо

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \qquad (4.8.2)$$

де $m = -2x_0$, $n = -2y_0$, $p = x^2 + y^2 - R^2$ і називають ***загальним рівнянням кола***. Отже, коло – лінія другого порядку.

Щоб від рівняння (4.8.2) і знову перейти до рівняння (4.8.1), потрібно в лівій частині (4.8.2) виділити повні квадрати.

Рівняння кола має такі *властивості*:

1) коефіцієнти при x^2 і y^2 рівні між собою;

2) у рівнянні відсутній елемент із добутком xy.

4.8.2. Еліпс

Еліпсом називають геометричне місце точок, сума відстаней від кожної з яких до двох фіксованих даних точок $F_1, F_2,$ є величина стала, яка дорівнює $2a, a > b,$ та більша за F_1F_2 (рис 4.8.2).

Точки F_1 і F_2 називають ***фокусами*** еліпса.

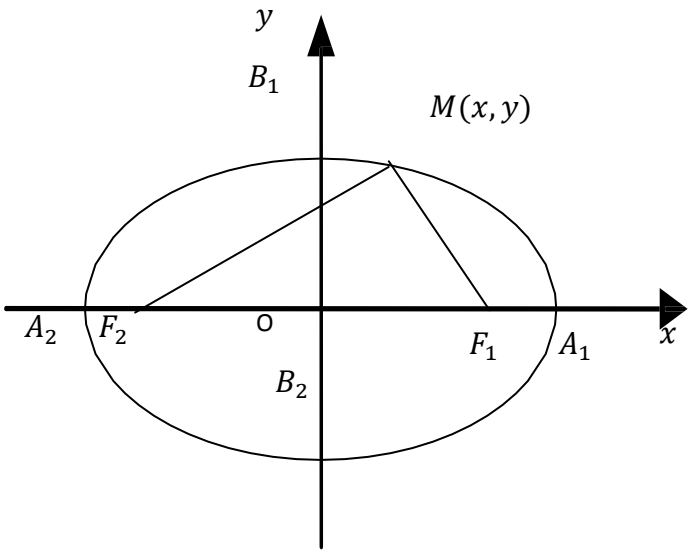


Рис. 4.8.2. Еліпс у декартовій системі координат

Канонічне рівняння еліпса з пів осями a, b з центром у початку координат і вершинами $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2$, розташованими на осях координат, має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4.8.2)$$

Еліпс перетинає осі координат у точках $A_1\ (a;0)$, $A_2\ (-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$. Ці точки називаються ***вершинами еліпса***.

Відстані між вершинами називаються ***осями еліпса***: $A_1A_2 = 2a$ – *велика (фокальна) вісь* і $B_1B_2 = 2b$ — *мала вісь* для еліпса, у котрого $a > b$ і навпаки $A_1A_2 = 2a$ – мала вісь, а $B_1B_2 = 2b$ – велика вісь для еліпса у котрого $b > a$ (рис. 4.8.3).

Точки F_1 і F_2 називаються ***фокусами***, а $F_1F_2 = 2c$ – відстань між фокусами.

Еліпс лежить всередині прямокутника, обмеженого $x = \pm a,\ y = \pm b$.

Еліпс має центр симетрії (початок координат) і дві осі симетрії (осі *Ox* і *Oy*). Центр симетрії еліпса називають ***центром еліпса***. Вісь симетрії еліпса, що проходить через фокуси (вісь *Ox*), називають ***великою*** (або фокальною) віссю симетрії, а другу вісь (вісь *Oy*) – ***малою*** віссю.

Якщо $a = b$, то рівняння (4.8.2) буде мати такий вигляд:

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

тобто одержимо рівняння кола. Отже, коло є окремим випадком еліпса.

Якщо вибрати систему координат так, щоб фокуси F_1 і F_2 були на осі Oy на однаковій відстані від початку координат, то рівняння еліпса буде мати вигляд:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Відповідно до означення будь-яка точка M еліпса (рис 4.8.2) задовольняє умови

$$F_1M + F_2M = 2a \text{ і } b^2 = a^2 - c^2 \text{ у випадку } a > b$$

або

$$F_1M + F_2M = 2b \text{ і } a^2 = b^2 - c^2 \text{ у випадку } b > a.$$

Величина ε, що дорівнює відношенню фокусної відстані еліпса до його більшої осі, називається ***ексцентриситетом*** еліпса, тобто

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Оскільки $c = \sqrt{a^2 - b^2} < a$, то $0 < \varepsilon < 1$.

Величина ε характеризує форму еліпса. Отже, якщо $\varepsilon = 0$, то $b = a$, тобто еліпс перетворюється в коло; $\varepsilon \to 1$, то відношення осей $\frac{b}{a}\left(\frac{a}{b}\right)$ зменшується, тобто еліпс все більше розтягується вздовж осі Ox (Oy).

Відстані $F_1M = r_1$ та $F_2M = r_2$точки $M = (x, y)$ еліпса до його фокусів називаються ***фокальними радіусами*** точки M і визначаються за формулами:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \qquad r_2 = a - \varepsilon x, \quad a > b,$$

або

$$r_1 = b + \varepsilon y, r_2 = b - \varepsilon y, \quad b > a.$$

Прямі паралельні до малої осі еліпса називаються ***директрисами еліпса***

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}, \text{ при } a > b, \text{ або } x = \pm\frac{b}{\varepsilon}, \text{ при } b > a.$$

Рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в у точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1.$$

Рівняння еліпс із центром у точці $C_0(x_0, y_0)$ має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

4.8.3. Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней від яких до двох фіксованих точок площини F_1, F_2 величина стала (рис. 4.8.3).

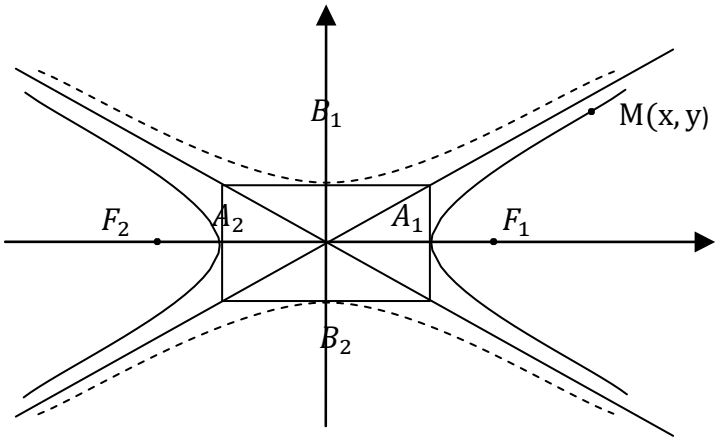


Рис. 4.8.3. Гіпербола у декартовій системі координат

Тобто для будь-якої точки *M* виконується умова $|F_1\,M\, -\, F_2M| \,=\, 2a.$ ***Канонічне рівняння гіперболи*** має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4.8.3)$$

де $b^2 \,=\, c^2 - a^2$.

Вісь *Ox* перетинає гіперболу в двох точках $A_1\,(a, 0), A_2(-a, 0)$, які називають ***вершинами гіперболи***. *Ця вісь називається* ***дійсною віссю гіперболи***, а вісь *Oy*, яка не має спільних точок з гіперболою, – ***уявною віссю***. Дійсною віссю також називають відрізок A_1A_2, який сполучає вершини гіперболи і його довжина $A_1A_2 = 2a$. Відрізок B_1B_2, який сполучає вершини точки $B_1(\,0, b), B_2(0, -b)$, а також його довжину $B_1B_2 = 2b$, називають уявною віссю. Величини *a*, *b,* відповідно, називають дійсною і уявною ***півосями гіперболи****;* точка *O*(0, 0) – ***центр гіперболи***.

Точки $F_1(c,0)$ і $F_2(-c,0)$ називають ***фокусами гіперболи***, відстань між фокусами *2c*, причому

$$\mathrm{c} = \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

Прямокутник зі сторонами $2a,\ 2b$ називається ***основним прямокутником гіперболи***.

Гіпербола складається з двох віток (лівої і правої) і має дві ***асимптоти***:

$$y = \frac{b}{a}x,\ y = -\frac{b}{a}x.$$

Гіпербола симетрична осям *Ox, Oy* і початку координат.

Величина ε дорівнює відношенню фокусної відстані гіперболи до її дійсної осі і називається ***ексцентриситетом гіперболи***, тобто

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Оскільки, $\mathrm{c} = \sqrt{a^2 + b^2}$, то $\varepsilon > 1$.

Величина ε характеризує форму гіперболи: чим більший ексцентриситет, тим більше відношення $\frac{b}{a}$, тобто тим більше основний прямокутник розтягується в напрямі осі *Oy*, а гіпербола відхиляється від осі *Ox*; чим ближче ексцентриситет до одиниці, тим більше основний прямокутник розтягується в напрямі осі *Ox*, а гіпербола наближається до цієї осі.

Якщо відомий ексцентриситет гіперболи, легко знайти ***фокальні радіуси точки $M(x,y)$***.

Якщо точка *M* лежить на правій гілці гіперболи (тобто $x > 0$), то

$$r_1 = |F_1M| = a + \varepsilon x, \qquad r_2 = |F_2M| = -a + \varepsilon x.$$

Якщо *M* лежить на лівій гілці гіперболи (тобто $x < 0$), то

$$r_1 = |F_1M| = -(a + \varepsilon x), \qquad r_2 = |F_2M| = -(-a + \varepsilon x)/$$

Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, де a – дійсна піввісь гіперболи, а ε – її ексцентриситет, називаються ***директрисами гіперболи***.

Гіпербола, для якої $a = b$, називається ***рівносторонньою***, її рівняння

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

а рівняння асимптот має вигляд $y = \pm x$.

Гіпербола, рівняння якої має вигляд

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

називається ***спряженою до гіперболи*** (4.8.3). Вершини цієї гіперболи лежать у точках $B_1(0, b), B_2(0, -b)$, а її асимптоти збігаються із асимптотами гіперболи (4.8.3).

Рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в у точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1.$$

Рівняння гіперболи з центром у точці $\boldsymbol{C_0(x_0, y_0)}$ має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

4.8.4 Парабола

Параболою називають геометричне місце точок площини, що знаходяться на однаковій відстані від цієї точки (фокуса) і цієї прямої (директриси) (рис. 4.8.4).

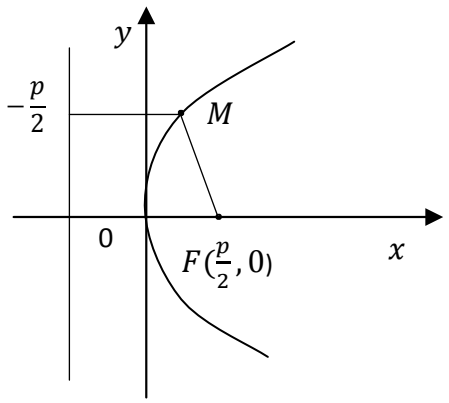


Рис. 4.8.4. Парабола у декартовій системі координат

Канонічне рівняння параболи має вигляд:

$$y^2 = 2px. \qquad (4.8.4)$$

Точку $F(\frac{p}{2}, 0)$ називають ***фокусом*** параболи, пряму $x = -\frac{p}{2}$ – ***директрисою.***

Точка, в якій парабола перетинає свою вісь, називається ***вершиною параболи***. Число *p,* яке дорівнює відстані фокуса від директриси, називається ***параметром параболи***.

Якщо M – довільна точка параболи, то відрізок MF і його довжина називаються ***фокальним радіусом точки*** M, і визначається рівнянням $r = x + \frac{p}{2}$.

Ексцентриситет параболи $\varepsilon = 1$.

Дотична до параболи $y^2 = 2px$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ визначається рівністю $yy_0 = p(x + x_0)$.

Рівняння параболи з вершиною в точці $C_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

Якщо рівняння параболи має вигляд

$$y^2 = -2px,$$

то вершина параболи знаходиться в початку координат, вісь симетрії є вісь абсцис, але парабола розміщена зліва від осі *Oy* (рис. 4.8.5), а директриса такої параболи буде розміщена праворуч від осі ординат, а фокус, $F(-\frac{p}{2}, 0)$ – буде ліворуч від початку координат.

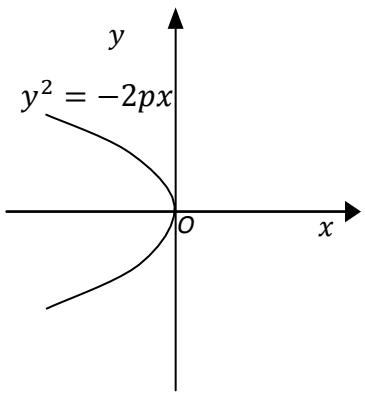


Рис. 4.8.5. Парабола

Якщо директриса параболи паралельна осі абсцис, а фокус знаходиться на осі ординат, то рівняння параболи має вигляд:

$$x^2 = 2py.$$

4.9. Розв'язування прикладів і задач

✧✧✧

1. Задано вершини *A(2;4), B(-1;3),C(5;-2*) трикутника *ABC*. Знайти:

1) довжину сторони *AB*;

2) площу трикутника *ABC*;

3) рівняння сторони *AB*;

4) рівняння і довжину висоти, проведеної із вершини *A*;

5) рівняння медіани, проведеної із вершини *A*;

6) рівняння бісектриси внутрішнього кута *B*;

7) кут *B*.

Розв'язання.

1) довжину сторони *AB* знаходимо за формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$|AB| = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{10} \text{ од.}$$

2) площу трикутника можна знайти різними способами:

а) знайти довжину висоти h_c, проведеної з вершини *C,* і використати формулу $S = \frac{1}{2}|AB| \cdot h_c$;

б) розглянути площу трикутника, як половину площі паралелограма, побудованого на векторах, наприклад, $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$, як на сторонах

в) за формулою:

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix},$$

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(18+3) = 10.5 \text{ кв. од.}$$

3) рівняння сторони *AB* знаходимо як рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки, скориставшись формулою (4.1.6) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

отримаємо:

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-4}{3-4};$$

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1}.$$

Це рівняння записано в канонічній формі, запишемо його в загальному вигляді $x - 3y + 10 = 0$ і у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$.

4) щоб знайти рівняння висоти h_a і її довжину необхідно спочатку знайти рівняння сторони *BC*, яке має вигляд

$$\frac{x+1}{5+1} = \frac{y-3}{-2-3}, \text{ або } y = -\frac{5}{6}x + \frac{13}{6}.$$

Враховуючи те, що кутовий коефіцієнт висоти k_2 і прямої *BC* пов'язані між собою співвідношенням (4.2.9) $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ і висота проходить через вершину *A*, за формулою $y - y_a = -\frac{1}{k_1}(x - x_a)$ одержимо таке рівняння висоти

$y - 4 = \frac{6}{5}(x - 2), 5y - 6x - 8 = 0.$

Довжину висоти h_a знаходимо за формулою (4.2.10) відстані точки *A* від прямої *BC*.

$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$;

$d = \left|\frac{5\cdot2+6\cdot4-13}{\sqrt{25+36}}\right| = \frac{21}{\sqrt{61}}$ од.

5) медіана m_a проходить через точку *D* – середину відрізка *BC*. Знайдемо координати точки *D* за формулами

$$x_d = \frac{x_b + x_c}{2};\ y_d = \frac{y_b + y_c}{2};$$

$$x_d = \frac{-1+5}{2} = 2;\ y_d = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Рівняння медіани знаходимо як рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки, скориставшись формулою (4.1.6)

$$\frac{x-2}{2-2} = \frac{y-4}{\frac{1}{2}-4};$$

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-4}{-3\frac{1}{2}}.$$

Це рівняння має зміст тоді, коли $x-2=0$, тобто $x=2$ є рівнянням медіани.

6) нехай точка *M (x,y)* – довільна точка бісектриси. Її віддаль від прямої *AB* дорівнює $d_1=\left|\frac{\bar{x}-3\bar{y}+10}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}\right|; d_1=\left|\frac{\bar{x}-3\bar{y}+10}{\sqrt{10}}\right|$.

А віддаль d_2 від прямої *BC* дорівнює

$$d_2=\left|\frac{5\bar{x}+6\bar{y}-13}{\sqrt{5^2+6^2}}\right|; d_2=\left|\frac{5\bar{x}+6\bar{y}-13}{\sqrt{61}}\right|.$$

За визначенням бісектриси ($d_1=d_2$)

$$\left|\frac{5\bar{x}+6\bar{y}-13}{\sqrt{61}}\right|=\left|\frac{\bar{x}-3\bar{y}+10}{\sqrt{10}}\right|.$$

Якщо модулі двох величин рівні, то ці величини або рівні між собою, або відрізняються лише знаком. Отже,

$$\frac{\bar{x}+3\bar{y}+10}{\sqrt{10}}=\frac{5\bar{x}+6\bar{y}-13}{\sqrt{61}}, \text{або } \frac{\bar{x}-3\bar{y}+10}{\sqrt{10}}=-\frac{5\bar{x}+6\bar{y}-13}{\sqrt{61}}.$$

Із цих рівнянь, переходячи від $\tilde{x}$ і $\tilde{y}$ до біжучих координат x і y, знаходимо:

$\left(\sqrt{61}-5\sqrt{10}\right)x-3\left(2\sqrt{10}-\sqrt{61}\right)y+10\sqrt{61}-13\sqrt{10}=0$ – для внутрішнього кута *B*.

$\left(\sqrt{61}+5\sqrt{10}\right)x+3\left(2\sqrt{10}+\sqrt{61}\right)y+10\sqrt{61}+13\sqrt{10}=0$ – для зовнішнього кута *B*;

7) кут *B* знаходимо за формулою (4.2.7):

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2};$$

$$tgB=\frac{\frac{1}{3}-\left(-\frac{5}{6}\right)}{1+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{18}}\approx 1.6154.$$

✧✧✧

2. Показати розміщення площин у просторі. Площини задані рівняннями:

1) $5x+10y+4z-20=0$;

2) $2x+3y-6=0$;

3) $z-3=0$;

Розв'язання:

Перетворюємо задані рівняння до виду рівнянь площини у відрізках на осях.

1) $5x + 10y + 4z = 20$ ділимо на 20 і одержуємо $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{5} = 1$.

Площина відтинає на осях Ox, Oy і Oz відрізки довжиною 4, 2 і 5, відповідно (рис. 4.9.1).

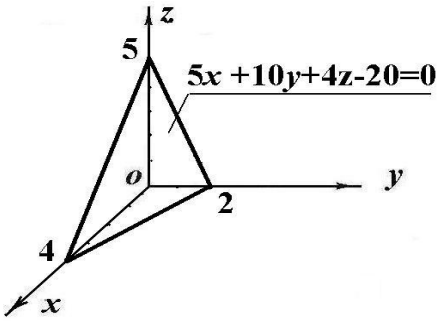


Рис. 4.9.1

2) $2x + 3y = 6$ ділимо на 6 і одержуємо $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

Площина відтинає на осях Ox і Oy відрізки довжиною 3 і 2, відповідно. На осі Oz площина відрізок не відтинає, тобто вона паралельна осі Oz (рис. 4.9.2).

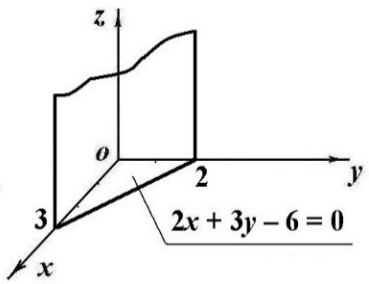


Рис. 4.9.2

3) $z - 3 = 0$, $z = 3$ ділимо на 3:

$\frac{z}{3} = 1$ – площина відтинає на осі Oz відрізок довжиною 3 одиниці та не перетинає ні осі Ox, ні осі Oy, тобто є паралельною до площини xOy (рис. 4.9.3).

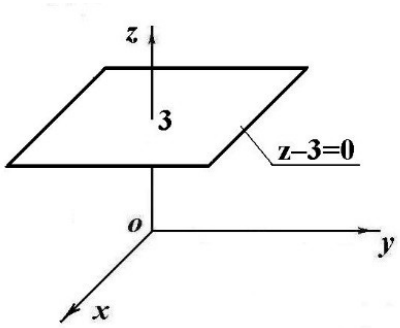


Рис. 4.9.3

✧✧✧

3. Скласти рівняння площини:

1) що проходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, якщо $M_1(3,-1,2)$ і $M_2(4,-2,-1)$;

2) яка паралельна площині Oxz і проходить через точку $M_0(7,3,5)$;

3) що проходить через вісь Oz і точку $M_0(3,1,2)$;

4) яка паралельна осі Ox і проходить через дві точки $M_1(4,0,-2)$ і $M_2(5,1,7)$;

5) що приходить через точку $C(3,4,-5)$ паралельно двом векторам $\vec{a}=(3,1,-1)$ і $\vec{b}=(1,-2,1)$;

6) що приходить через точку $M_0(7,5,1)$ і відтинає на осях координат рівні додатні відрізки.

Розв'язання.

1. Скориставшись рівнянням (4.3.1), тобто рівнянням площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до вектора, можемо записати рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}=(4-3,-2-(-1),-1-2)=(1,-1,-3)$

$$(x-3)-1(y+1)-3(z-2)=0;$$

або $x-y-3z+2=0$.

Це і є шукане рівняння площини.

2. Знову скористаємося рівнянням (4.3.1). Якщо ця площина паралельна площині Oxz, то вона має нормальний вектор $\vec{n} = (0, B, 0)$. Тоді рівняння площини, що проходить через точку $M_0(7, 3, 5)$, має вигляд:

$$0(x - 7) + B(y + 3) + 0(z - 5) = 0;$$

або $B(y + 3) = 0$.

Отже, отримуємо рівняння площини $y + 3 = 0$.

3. Розглянемо загальне рівняння площини (4.3.1). Якщо площина проходить через вісь Oz, то вона має нормальний вектор $\vec{n} = (A, B, 0)$ і коефіцієнт $D = 0$.

Враховуючи, що шукана площина проходить через точку $M_0(-3, 1, -2)$, то отримаємо систему рівняння, розв'язавши яку знайдемо її рівняння:

$$\begin{cases} Ax + By = 0; \\ -Ax_0 - By_0 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ax + By = 0; \\ 3A - B = 0; \end{cases} \Rightarrow Ax + 3A = 0, x + 3 = 0.$$

4. Оскільки площина паралельна до координатної осі Ox, то її нормальний вектор має координати: $\vec{n} = (0, B, C)$.

Знайдемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \big(5 - 4, 1 - 0, 7 - (-2)\big) = (1, 1, 9)$, який лежить на площині.

Вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ взаємно перпендикулярні, тому їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = (0 \cdot 1 + 1 \cdot B + 9 \cdot C) = 0,$$

звідки знаходимо $B = -9C$.

Запишемо рівняння, скориставшись рівнянням (4.3.1), тобто рівнянням площини, що проходить через задану точку $M_1(4, 0, -2)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (0, B, C)$,

$$0 \cdot 4 + B(y - 0) + C(z + 2) = 0 \text{ або } By + C(z + 2) = 0$$

і підставимо в нього знайдене значення $B = -9C$.

$$-9Cy + C(z + 2) = 0 \text{ або } 9y - z - 2 = 0.$$

Це і є шукане рівняння площини.

5. Нехай точка $M(x, y, z)$ – довільна точка шуканої площини. Тоді вектор $\overrightarrow{CM} = (x - 3, y - 4, z + 5)$ належить цій площині.

За умовою задачі вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\overrightarrow{CM}$ є компланарними. Через це їх мішаний добуток дорівнює нулю: $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \overrightarrow{CM}$=0,

або

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчисливши визначник, знайдемо шукане рівняння:

$-x + 3 - 4y + 16 - 7z - 35 = 0$ або $x + 4y + 7z + 16 = 0$.

6. Скористаємося знову рівнянням (4.3.1). Одержимо рівняння площини, що проходить через задану точку$M_0(7, 5, 1)$:

$$A(x - 7) + B(y + 5) + C(z - 1) = 0,$$

$$\text{або } Ax + By + Cz - 7A + 5B - C = 0.$$

Перепишемо його у вигляді

$$\frac{x}{\frac{1}{A}} + \frac{y}{\frac{1}{B}} + \frac{z}{\frac{1}{C}} = 7A - 5B + C.$$

Для того, щоб одержане рівняння перейшло в рівняння площини у відрізках на осях (4.3.3), необхідно позначити:

$$7A - 5B + C = 1, a = \frac{1}{A}, b = \frac{1}{B}, c = \frac{1}{c}.$$

За умовою задачі $a = b = c$, отже $A = B = C$.

Тоді з першого виразу знаходимо $A = B = C = 1/3$ і шукане рівняння площини набуває вигляду

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1,$$

або $x + y + z - 3 = 0$.

✧✧✧

4. Скласти рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(1, 2, 3), M_2(-1, 0, 2)$ і $M_3(-2, 1, 0)$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння скориставшись рівнянням (4.3.4), тобто рівнянням площини, що проходить через три задані точки

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1-1 & 0-2 & 2-3 \\ -2-1 & 1-2 & 0-3 \end{vmatrix} = 0 \text{ або } \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчисливши визначник третього порядку, знайдемо шукане рівняння:

$$(x-1)\cdot 5-(y-2)\cdot 3+(z-3)\cdot(-4)=0;$$

$$5x-3y-4z-12-0.$$

✧✧✧

5. Визначити взаємне положення двох прямих у просторі.

1) $\frac{x-4}{-1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{2}$ та $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-12}=\frac{z-1}{-6}$;

2) $\frac{x-4}{-2}=\frac{y+12}{3}=\frac{z+2}{-4}$ та $\frac{x+2}{5}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-5}{2}$.

Розв'язання.

1) напрямні вектори $\overrightarrow{s_1}=(m_1,n_1,p_1)$ та $\overrightarrow{s_2}=(m_2,n_2,p_2)$ заданих прямих мають координати $\overrightarrow{s_1}=(-1,4,2)$ та $\overrightarrow{s_2}=(3,-12,-6)$.

Ці прямі паралельні, оскільки для них виконується умова паралельності (4.6.2):

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2};$$

$$\frac{-1}{3}=\frac{4}{-12}=\frac{2}{-6};$$

2) Напрямні вектори $\overrightarrow{s_1}=(m_1,n_1,p_1)$ та $\overrightarrow{s_2}=(m_2,n_2,p_2)$ заданих прямих мають координати $\overrightarrow{s_1}=(-2,3,-4)$ та $\overrightarrow{s_2}=(5,6,2)$.

Ці прямі перпендикулярні, оскільки для них виконується умова перпендикулярності (4.6.3):

$$m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2=0;$$

$$-2\cdot 5+3\cdot 6+(-4)\cdot 2=0.$$

✧✧✧

6. Пряма задана загальними рівнянням

$$\begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0, \\ 3x + y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$$

Записати її канонічне рівняння.

Розв'язання.

Знайдемо довільну точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на цій прямій. Для цього у початковій системі візьмемо $z = 0$ і, додаючи ці рівняння, отримуємо $x = 1, y = 5$. Точка $M_0(1,5,0)$ лежить на цій прямій.

Пряма належить двом площинами, отже, вона буде перпендикулярною нормалям до цих площин $\overrightarrow{n_1} = (1, -1, 2)$ та $\overrightarrow{n_2} = (3, 1, -5)$. Напрямний вектор прямої можна обчислити як векторний добуток векторів $\overrightarrow{n_1}$ та $\overrightarrow{n_2}$.

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}.$$

Обчисливши, отримаємо $\vec{s} = (3, 11, 4)$.

Запишемо канонічне рівняння прямої, скориставшись формулою (4.5.3)

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{11} = \frac{z}{4}.$$

✧✧✧

7. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1, 3, -5)$ паралельно прямій $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2} = z + 1$.

Розв'язання.

Напрямним вектором шуканої прямої можна вважати напрямний вектор заданої прямої за формулою (4.6.2) $\vec{s} = (4, 2, 1)$.

Отже, канонічне рівняння (4.5.3) шуканої прямої буде мати вигляд:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = z + 5.$$

✧✧✧

8. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3, 2, -1)$ перпендикулярно до прямих $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-2}$ та $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{3}$.

Розв'язання.

Шукана пряма перпендикулярна прямим з напрямними векторами $\overrightarrow{s_1} = (3,5,-2)$ та $\overrightarrow{s_2} = (4,1,3)$. Тоді напрямний вектор прямої можна обчислити як векторний добуток векторів $\overrightarrow{s_1}$та $\overrightarrow{s_2}$.

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 17 \cdot \vec{i} - 17 \cdot \vec{j} - 17 \cdot \vec{k}.$$

Тоді канонічне рівняння (4.5.3) шуканої прямої буде мати вигляд:

$$\frac{x-3}{17} = \frac{y-2}{-17} = \frac{z+1}{-17} \text{ або } \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-1}.$$

✧✧✧

9. Записати рівняння перпендикуляра, поведеного з точки $M(7,5,-3)$ до прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}$.

Розв'язання.

Перпендикуляр, проведений з точки до прямої, – це пряма, яка проходить через точку M та її проекцію M_0 на задану пряму. Визначимо координати вказаної проекції.

Запишемо параметричне рівняння заданої прямої:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t \\ z = -t - 2 \end{cases}.$$

Будемо вважати, що шуканій точці відповідає значення параметра t_0. Тоді її координати $M_0(2t_0 + 1, 3t_0, -t_0 - 2)$. Напрямний вектор заданої прямої $\vec{s} = (2,3,-1)$ та вектор $\overrightarrow{MM_0} = ((2t_0 + 1) - 7, 3t_0 - 5, (-t_0 - 2) - (-3))$ перпендикулярні, отже $\overrightarrow{MM_0} \cdot \vec{s} = 0$

Запишемо рівність у координатній формі.

$$(2t_0 - 6) \cdot 2 + (3t_0 - 5) \cdot 3 + (-t_0 + 1) \cdot (-1) = 0;$$

$$4t_0 - 12 + 9t_0 - 15 + t_0 - 1 = 0;$$

$$14t_0 = 28;\ t_0 = 2.$$

Тоді $x_0 = 2 \cdot 2 + 1 = 5;\ y_0 = 3 \cdot 2;\ z_0 = -2 - 2 = -4.$

Отже, $M_0(5,6,-4)$.

Запишемо рівняння прямої MM_0 як прямої, що проходить через задані дві точки:

$$\frac{x-7}{5-7}=\frac{y-5}{6-5}=\frac{z+3}{-4+3}; \qquad \frac{x-7}{-2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+3}{-1}.$$

✧✧✧

10. Записати рівняння площини, яка містить пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{3}$ та точку $M(1,-1,2)$.

Розв'язання.

Пряма $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{3}$ проходить через точку $M_0(1,0,1)$, яка також належить і шуканій площині. Отже, нормаль площини $\vec{n}$ буде перпендикулярною векторам $\overrightarrow{M_0M}=(0,-1,3)$, та $\vec{s}=(2,-1,3)$, тобто

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=0\cdot\vec{i}-6\cdot\vec{j}-2\cdot\vec{k}.$$

Запишемо рівняння шуканої площини, скориставшись формулою (4.3.1):

$$0\cdot(x-1)-6(y-0)-2(z+1)=0;$$

$$3y+z+1=0.$$

✧✧✧

11. Задано координати чотирьох точок:

A $(1;0;4)$, B $(-1;1;-4)$, C $(0;5;7)$, D $(2;4;3)$. Знайти:

1) плоский кут між ребрами *AB* і *AC* грані *ABC*;

2) кут нахилу грані *ABC* до площини основи *BCD*;

3) висоту піраміди *ABCD*;

4) канонічне рівняння прямої, що проходить через точку *A* перпендикулярно площині, яка проходить через точки *B,C* і *D*.

Розв'язання.

1) Знайдемо рівняння ребер AB і AC як рівнянням прямої в просторі, яка проходить через дві задані точки, скористаємось формулою (4.5.4).

Для прямої AB одержимо:

$$\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y-0}{1-0}=\frac{z-4}{-4-4}, \text{ звідки} \frac{x-1}{-2}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-4}{-8}.$$

Для прямої AC одержимо:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-0}{5}=\frac{z-4}{3}.$$

Кут між ребрами AB і AC знаходимо за формулою (4.6.1).

У такому випадку одержимо:

$$cos\,\varphi=\frac{(-2)\cdot(-1)+1\cdot5+(-8)\cdot3}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(18)^2}\sqrt{(-1)^2+5^2+3^2}}=-\frac{17}{\sqrt{2415}}\approx-0{,}3459.$$

2) Рівняння площин BCD і ABC знаходимо як рівняння площини, що проходить через три задані точки, за формулою (4.3.3).

Для площини BCD одержимо

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+4 \\ 1 & 4 & 11 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix}=0, \text{ звідки}$$

$$5x-26\,y\,+9z+67=0.$$

Аналогічно знаходимо рівняння площини ABC:

$$43x+11y-9z\,-7=0.$$

Кут нахилу грані ABC до площини основи BCD, знайдений за формулою (4.4.1), як кут φ між двома площинами

$$cos\,\gamma=\frac{2*43-26*14+9(-9)}{\sqrt{5^2+(-26)^2+9^2}\sqrt{43^2+14^2+19^2}}\approx-0{,}1784.$$

3) Висоту піраміди знаходимо за формулою відстані точки від площини

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|;$$

$$h=\frac{5\cdot1-26\cdot0+9\cdot4+67}{\sqrt{5^2+(-26)^2+9^2}}\approx3{,}86.$$

4) Рівняння прямої, що проходить через точку A перпендикулярно площині BCD (рівняння висоти піраміди), знаходимо за формулою

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

Координати m, n, p напрямного вектора прямої знаходимо із умови (4.7.3) перпендикулярності прямої і площини

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p};$$

$$\frac{5}{m} = \frac{26}{n} = \frac{9}{p} = t;$$

$$5 = mt, -26 = nt, 9 = pt.$$

Знайшовши m, n, p, підставивши ці значення у рівняння $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$ і скоротивши параметр t, остаточно одержимо

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-0}{-26} = \frac{z-4}{9}.$$

✧✧✧

12. Записати рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$ і $\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{2}$.

Розв'язання.

Перша пряма проходить через точку $A(-2, 1, 0)$, друга через точку – $B(1, -2, 1)$, $\vec{s} = (3, -2, 1)$. Візьмемо довільну точку на площині $M\ (x, y, z)$.

Вектори $\overrightarrow{AM} = (x + 2, y - 1, z)$, $\overrightarrow{AB} = (3, -3, 1)$ та $\vec{s} = (3, -2, 1)$ компланарні, оскільки лежать в одній площині, а отже їх мішаний добуток рівний нулю:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчисливши визначник третього порядку, отримаємо

$$-3(x + 2) + 3(y - 1) - 6z + 9z - 3(y - 1) + 2(x + 2) = 0;$$

Рівняння площини: $x - 3z + 2 = 0$.

✧✧✧

13. Записати рівняння площини, яка проходить через дві прямі $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-8}{2}$ і $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z}{4}$.

Розв'язання.

Оскільки прямі не паралельні, то спочатку перевіримо, чи дійсно прямі лежать в одній площині.

Умовою цього є компланарності напрямних векторів прямих є $\overrightarrow{s_1} = (1, -3, 2)$, $\overrightarrow{s_2} = (-1, 1, 4)$ та вектора $\overrightarrow{M_1 M_2} = (2, -2, -8)$, який з'єднує точки $M_1\ (1, -3, 8)$ та $M_{21}\ (-3, 5, 0)$ цих прямих.

Обчислимо мішаний добуток цих векторів:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки другий і третій рядок отриманого визначника є пропорційними, то такий визначник дорівнює нулю.

Нормаль шуканої площини повинна бути перпендикулярною напрямним векторам $\overrightarrow{s_1} = (1, -3, 2)$, $\overrightarrow{s_2} = (-1, 1, 4)$, тому

$$\vec{n} = \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -14\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 2\vec{k}.$$

Запишемо рівняння площини, що має нормаль $\vec{n} = (-14, -6, -2)$ та проходить через точку $M_1\ (1, -3, 8)$, скориставшись формулою (4.3.1)

$$-14 \cdot (x - 1) - 6(y + 3) - 2(z - 8) = 0.$$

Розкривши дужки, отримаємо рівняння шуканої площини: $7x + 3y + z - 6 = 0$.

✧ ✧ ✧

14. Знайти відстань між прямими $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-5} = \frac{z-2}{1}$ і $\frac{x-5}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{-1}$.

Розв'язання.

Відстань мі прямими — це відстань від точки, яка належить одній прямій, до площини, що проходить через другу пряму паралельно до першої прямої.

Запишемо рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-5}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{-1}$ паралельно до прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-5} = \frac{z-2}{1}$. Цій площині належить точка $M\ (5, 0, 7)$,

а її нормальний вектор є перпендикулярним до напрямних векторів заданих прямих $\overrightarrow{s_1} = (2, -5, 1)$, $\overrightarrow{s_2} = (2, 1, -1)$, тобто можна вважати, що

$$\vec{n} = \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}.$$

Запишемо рівняння площини, що має нормаль $\vec{n} = (4, 4, 12)$ та проходить через точку $M\ (5, 0, 7)$:

$$4 \cdot (x - 5) + 4(y - 0) + 12(z - 7) = 0;$$

$$x + y + 3z - 26 = 0.$$

Обчислимо відстань від точки $M_1\ (1, -3, 2)$ до цієї площини:

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{|-22|}{\sqrt{11}} = 2\sqrt{11}\ од.$$

Ця величина і є відстанню між заданими прямими.

✧ ✧ ✧

15. Встановити, яка лінія визначається рівнянням

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0.$$

Розв'язання.

Згрупуємо доданки зі зміною x та змінною y і доповнимо одержані вирази до повних квадратів:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$$

або

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) - 9 - 23 = 0,$$

звідки

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 36.$$

Отже, лінія, задана рівнянням $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$, є колом, точка $(-2, 3)$ – центр кола, а $R\ = 6$ – радіус кола.

✧ ✧ ✧

16. Скласти рівняння кола, що проходить через точки $A(7, 7)$, $B(-2, 4)$, а його центр лежить на прямій $2x - y - 4\ =\ 0$.

Розв'язання.

Якщо коло проходить через точки $A(7,7)$ і $B(-2,4)$, то координати цих точок повинні задовольняти рівняння кола. Отож, отримуємо два рівняння:

$$(7 - x_0)^2 + (7 - y_0)^2 = R^2;$$
$$(-2 - x_0)^2 + (4 - y_0)^2 = R^2;$$

Якщо центр кола лежить на прямій $2x - y - 4 = 0$, то його координати повинні задовольняти рівняння цієї прямої. Одержуємо третє рівняння $2x_0 - y_0 - 4 = 0$.

Для знаходження x_0, y_0 та R розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} (7 - x_0)^2 + (7 - y_0)^2 = R^2; \\ (-2 - x_0)^2 + (4 - y_0)^2 = R^2; \Rightarrow \\ 2x_0 - y_0 - 4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 98 - 14x_0 - 14y_0 + {x_0}^2 + {y_0}^2 = R^2; \\ 20 + 4x_0 - 8y_0 + {x_0}^2 + {y_0}^2 = R^2; \\ 2x_0 - y_0 - 4 = 0; \end{cases}$$

Віднімемо від першого рівняння друге і одержимо систему

$$\begin{cases} 3x_0 + y_0 - 13 = 0; \\ 2x_0 - y_0 - 4 = 0; \end{cases}$$

Тепер до першого рівняння додамо друге і знайдемо x_0:

$$5x_0 = 17, x_0 = \frac{17}{5}.$$

Підставивши отримане значення $x_0 = \frac{17}{5}$ в рівняння $2x_0 - y_0 - 4 = 0$, одержимо значення $y_0 = \frac{14}{5}$. Отож, координати центра кола знайдено: $C(\frac{17}{5}, \frac{14}{5})$.

Із першого рівняння вихідної системи знаходимо R^2:

$$R^2 = (7 - x_0)^2 + (7 - y_0)^2 = (7 - \frac{17}{5})^2 + (7 - \frac{14}{5})^2 = \frac{153}{5}.$$

Отже, шукане рівняння кола має вигляд

$$\left(x - \frac{17}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{14}{5}\right)^2 = \frac{153}{5}.$$

✧✧✧

17. Задано рівняння еліпса $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Знайти довжину осей, координати його фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис і координати точок еліпса, відстань від яких до лівого фокуса дорівнює 14.

Розв'язання.

Приведемо задане рівняння еліпса до кононічного виду (4.8.3), розділивши обидві його частини на 4225.

$$\frac{x^2}{169} - \frac{y^2}{25} = 1 \text{ або } \frac{x^2}{13^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1.$$

Звідти отримуємо, що $a = 13$, $2a = 26$; $b = 5$, $2b = 10$. Знаючи a і b, із співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$, знаходимо c:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{169 - 25} = 12.$$

Тоді координати фокусів будуть: $F_1(-12, 0)$ і $F_2(12, 0)$.

Обчислюємо ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{12}{13}$, та записуємо рівняння директрис $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{169}{12}$.

Із рівняння $r_1 = a + \varepsilon x$ знаходимо абсцису точок еліпса, що знаходяться на відстані 14 від лівого фокуса F_1

$$x = \frac{r_1 - a}{\varepsilon} = \frac{14-13}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{12}.$$

Підставивши її значення в канонічне рівняння еліпса, знайдемо ординати цих точок $y = \pm\frac{5\sqrt{143}}{12}$.

Так отримуємо координати шуканих точок: $M_1 = \left(\frac{13}{12}, \frac{5\sqrt{143}}{12}\right)$, $M_2 = \left(\frac{13}{12}, -\frac{5\sqrt{143}}{12}\right)$.

✧✧✧

18. На еліпсі $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ знайти точку, віддалену на 5 одиниць від малої осі.

Розв'язання.

Абсциса шуканої точки дорівнює 5, отже, точка $M\,(5,\mathrm{y})$ задовільняє рівняння еліпса.

Отже, $\frac{25}{30}+\frac{y^2}{24}=1$, звідки $y^2=4$ і $y=\pm 2$.

Відтак маємо дві точки $M_1(5,2)$ і $M_2(5,-2)$, які віддалені на 5 одиниць від малої осі еліпса.

✧✧✧

19. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомо, що вона проходить через точку $M_1(10;2)$ і має асимптоти $y=\pm\frac{4}{5}x$.

Розв'язання.

З умови задачі одержуємо, що $\frac{4}{5}=\frac{b}{a}$ та координати точки M_1 задовольняють рівняння гіперболи (4.8.3), тобто $\frac{10^2}{a^2}-\frac{5^2}{b^2}=1$. Таким чином, отримали систему двох рівнянь із двома невідомими:

$$\begin{cases} 4a=5b; \\ \frac{100}{a^2}-\frac{25}{b^2}=1. \end{cases}$$

З першого рівняння знаходимо $b=\frac{4}{5}a$ і підставляємо в друге рівняння $\frac{100}{a^2}-\frac{25\cdot 25}{16\,a^2}=1$, або $a^2=\frac{975}{16}$.

Звідси $a=\frac{\sqrt{975}}{4}$. Далі знаходимо $b=\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{975}}{4}=\sqrt{39}$.

Отже, шукане рівняння гіперболи буде $\frac{x^2}{\frac{975}{16}}-\frac{y^2}{39}=1$.

✧✧✧

20. Ферми, які підтримують залізнодорожний міст довжиною 112 м, мають вигляд параболи, яка задається рівнянням $\boldsymbol{y=ax^2}$**.** Знайти рівняння відповідної параболи, якщо найбільша висота мостової арки становить 44 м.

Розв'язання.

Візьмемо за початок координат вершину ферми. Тоді симетричні точки в основі ферми будуть мати координати $(-56, -44)$ і $(56, -44)$.

Підставляючи будь-яку пару координат в рівняння $y = ax^2$, одержимо $-44 = a \cdot 3136$. Звідси $a = \frac{-44}{3136} = -\frac{11}{787}$.

Таким чином, мостова ферма має вигляд параболи $y = -\frac{11}{787}x^2$.

4.10. Контрольні запитання

1. Як записати рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора?

2. Який вигляд має загальне рівняння прямої на площині?

3. Як записати рівняння прямої, що проходить через початок координат?

4. Як записати рівняння прямої, що паралельна осі *Ox*? осі *Oy*?

5. Як записати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?

6. Як записати рівняння прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямі?

7. Як записати рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?

8. Який вигляд має канонічне рівняння прямої?

9. Як знайти кут між двома прямими?

10 Які умови перпендикулярності і паралельності двох прямих?

11. Який вигляд має нормальне рівняння прямої?

12. Як звести загальне рівняння прямої до нормального?

13. Як знайти відстань від точки до прямої?

14. Як записати загальне рівняння площини?

15. Що таке нормальний вектор площини?

16. Які особливості розташування площини у просторі, якщо:

а) коефіцієнт $D = 0$?

б) коефіцієнт $A = 0$? $B = 0$? $B = C$?

в) $A = B = 0?$ $A = C = 0?$ $B = C = 0?$

г) $A = D = 0?$ $B = D = 0?$ $C = D = 0?$

д) $B = C = D = 0?$ $A = C = D = 0?$ $A = B = D = 0$

17. Як записати рівняння площини у відрізках на осях?

18. Як записати рівняння площини, що проходить через три задані точки?

19. Як знайти кут між двома площинами?

20. Які умови паралельності і перпендикулярності двох площин?

21. Який вигляд має нормальне рівняння площини?

22. Як знайти віддаль від точки до площини?

23. Як записати рівняння прямої у просторі?

24. Як записати параметричне рівняння прямої? Канонічні рівняння.

25. Як знайти кут між прямими у просторі?

26. Які умови паралельності і перпендикулярності двох прямих у просторі?

27. Як записати рівняння прямої у просторі, що проходить через дві задані точки?

28. Як знайти кут між прямою і площиною у просторі?

29. Які умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини у просторі?

30. Як записати рівняння кола в просторі?

31. Що таке канонічне рівняння еліпса?

32. Яке рівняння гіперболи?

33. Що таке асимптоти гіперболи?

34. Яке рівняння параболи?

35. Як визначити фокуси та директрису параболи?

36. Що таке ексцентриситет і як він впливає на форму кривої?

37. Яке значення ексцентриситету для еліпса, гіперболи та параболи.

4.11. Завдання для самостійного виконання

1. Довести, що прямі $3x - 2y - 1 = 0$ і $2x + 5y - 12 = 0$ перетинаються, і знайти їх точку перетину.

2. Визначити кутовий коефіцієнт k та відрізок b і побудувати прямі:

1) $2x - 3y - 6 = 0$;

2) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

3. Записати параметричне рівняння цієї прямої $\frac{x+3}{-2} = \frac{y-1}{5}$.

4. Скласти загальне, канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M(-1;\ 2)$ паралельно вектору $\vec{n} = (3;\ -1)$.

5. Скласти рівняння прямої, що проходить через середину відрізка *AB*, перпендикулярно до нього, якщо $A(3; -2), B(5; -4)$.

6. Написати рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Перейти від одержаного рівняння до рівнянь з кутовим коефіцієнтом та у відрізках на осях. Побудувати цю пряму.

1) $A(3;\ -7)$ і $B(2;\ 5)$;

2) $A(-3;\ 0)$ і $B(-2;\ 7)$;

3) $A(-4;\ 6)$ і $B(4;\ -5)$;

4) $A(1;\ -9)$ і $B(0;\ -9)$.

7. Серед множини прямих $A(x + 3) + B(y - 4) = 0$ знайти ту, яка перпендикулярна вектору $\vec{n} = -5\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$.

8. Із пучка прямих, визначених рівнянням $y + 2 = k(x - 5)$, знайти ту, яка проходить через точку $A(1\,;6)$.

9. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(-3; 2)$ і утворює з додатнім напрямом осі *Ox* кут $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

10. Точка *A* належить прямій $x + y = 8$ і розміщена на однаковій відстані від точки $B(2;\ 8)$ і від прямої $x - 2y + 2 = 0$. Знайти координати точки *A*.

11. Дано координати вершин ΔABC: $A(2; 4), B(6; 3), C(4; -3)$. Скласти рівняння медіани *AD*.

12. Знайти пряму, паралельну прямій $3x - 7y + 11 = 0$, яка проходить через точку $A(0; 3)$.

13. Знайти кут між прямими: $7x - y - 2 = 0$ і $x - y + 3 = 0$.

14. При якому значенні *a* прямі паралельні; перпендикулярні.

1) $3x - 2y + 11 = 0$ і $ax - 4y + 3 = 0$;

2) $4x - ay + 24 = 0$ і $-16x - 2y - 3 = 0$;

3) $5x + 2y - 7 = 0$ і $15x - ay + 21 = 0$.

15. Дано вершини $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ трикутника. Знайти:

а) довжину сторони АС;

б) рівняння сторони АС;

в) рівняння висоти опущеної із вершини С;

г) рівняння медіани, проведеної з вершини В;

д) кут А;

е) площу трикутника;

є) зробити рисунок, якщо:

1) $\mathrm{A}(5,-4), \mathrm{B}(-1,3), \mathrm{C}(-3,-2)$;

2) $\mathrm{A}(3,-4), \mathrm{B}(-2,3), \mathrm{C}(1,4)$;

3) $\mathrm{A}(2,-3), \mathrm{B}(3,2), \mathrm{C}(-2,5)$;

4) $\mathrm{A}(3,6), \mathrm{B}(-1,3), \mathrm{C}(2,-1)$;

5) $\mathrm{A}(3,2), \mathrm{B}(5,-4), \mathrm{C}(1,3)$;

6) $\mathrm{A}(-14,10), \mathrm{B}(10,5), \mathrm{C}(-8,27)$.

16. Показати розміщення площин у просторі. Площини задані рівняннями:

1) $3x - y + 3z - 9 = 0$;

2) $x + 3z + 6 = 0$.

17. Записати рівняння площини, що проходить через точку $B(2, 1, -1)$ і має напрямний вектор $\vec{n} = (1, -2, 3)$.

18. Задано точки $M_1(1;2;-1)$ і $M_2(0;3;1)$. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_1, перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

19. Скласти рівняння площини, що перпендикулярна до осі *Oz* і проходить через точку $M_0(-2;-3;-1)$.

20. Скласти рівняння площини, що перпендикулярна осі Ox і проходить через точку $M_0(2;-1;3)$.

21. Скласти рівняння площини, яка проходить:

1) через точку $A_1(2,-3,3)$ паралельно площині Oxy;

2) через точку $A_2(1,-2,4)$ паралельно площині Oxz;

3) через точку $A_3(-5, 2, -1)$ паралельно площині Oyz;

4) через точку B_1 $(4, -1, 2)$ і вісь Ox;

5) через точку B_2 $(1, 4, -3)$ і вісь Oy;

6) через точкуB_3 $(2,-4,7)$ і вісь Oz.

22. Скласти рівняння площини, яка проходить через три задані точки (якщо ці три точки визначають площину однозначно):

1) A(2, 1, 3), B(−1, 2, 5), C(3, 0, 1);

2) A(1, −1, 3), B(2, 3, 4), C(−1, 1, 2);

3) A(3, 0, 0), B(0, −1, 0), C(0, 0, 4);

4) A(2, 1, 1), B(2, 0, −1), C(2, 4, 3).

23. Скласти рівняння площини, що проходить через точки M_1 та M_2 паралельно вектору $\vec{a}$, якщо:

1) $M_1(\ 1,2,0), M_2(2,1,1\ ), \vec{a}\ (3,0,1)$;

2) $M_1(\ 1,1,1), M_2(2,3,-1\ ), \vec{a}\ (0,-1,2)$;

3) $M_1(-1,0,-5), M_2(-2,-3,1\ ), \vec{a}\ (2,-2,0)$.

24. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2;-1;4)$ і:

1) паралельна площині $x-y+2z-3=0$;

2) паралельна площині $2x-y+3z=0$;

3) перпендикулярна до площин $x+2y+1=0$ і $3x-2y+z-4=0$;

4) перпендикулярна до площин $-2x+2y+z=0$ і $x-3y+5z-2=0$.

25. Знайти кут між площинами:

1) $2x-3y+4z=0$ і $3x-4y-z+3=0$;

2) $x-2y+2z-3=0$ і $3x-4y+5=0$;

3) $3x-3y+z-10=0$ і $x-6y-2z+5=0$.

26. Знайти відстань від точки до площини

1) $M(2, 0, -12),\ 4x - 4y + 2z + 17 = 0$;

2) $\mathrm{M}(3; 1; -2), 5x + 4y + 2z - 3 = 0$.

27. На осі *Oz* знайти точку, рівновіддалену від точки $\mathrm{M}(1; -2; 0)$ і від площини $3x - 2y + 6z - 9 = 0$.

28. На осі *Ox* знайти точку, рівновіддалену від двох площин: $x + 4y - 3z - 2 = 0$ і $5x + z + 8 = 0$.

29. Знайти точку, симетричну з початком координат відносно площини $6x + 2y - 9z + 121 = 0$.

30. Скласти рівняння площини, якщо відстань її від трьох точок *A (6, 1, -1)*, *B (0, 5, 4)* і *C (5, 2, 0)* дорівнює відповідно 1, 2, 0.

31. Знайти відстань між паралельними площинами

1) $2x + 3y + z - 1 = 0$ та $2x + 3y + z + 4 = 0$.

2) 3x+6y+2z−15 = 0 і 3x + 6y + 2z + 13 = 0;

3) $4x - y + 3z - 2 = 0$ та $8x - 2y + 6z + 5 = 0$.

31. Скласти рівняння прямої у просторі, якщо

1) пряма проходить через точку $M_0(2, -1, -4)$ паралельно вектору $\bar{s}(1, -2, -1)$. Перетворити це рівняння до загального вигляду;

2) пряма проходить через дві точки $M_1(1, 4, -1)$ і $M_2(1, 0, 2)$. У відповіді рівняння прямої записати в загальному вигляді;

3) пряма проходить точку $M_1(1, 4, -1)$ *і* перпендикулярна площині $x + 3y + z - 1 = 0$.

32. Визначити взаємне положення двох прямих у просторі

1) $\frac{x-1}{4} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+7}{2}$ і $\frac{x-2}{8} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4}$;

2) $\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{1}$ і $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{2}$;

3) $\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{1}$ і $\frac{x+4}{10} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{2}$.

33. Визначити напрямні косинуси прямої $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{4}$.

34. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки M_1 та M_2, якщо

1) $M_1(\,1,2,0), M_2(2,1,1\,)$;

2) $M_1(\,1,1,1), M_2(2,3,-1\,)$.

34. Пряма задана загальним рівнянням. Записати канонічні та параметричні рівняння цієї прямої, якщо:

1) $\begin{cases} 2x\ -\ y\ +\ 2z-\ 4\ =\ 0; \\ x\ +\ 2y\ -\ z\ -\ 1\ =\ 0. \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x+2\,y-3z-\ 5\ =\ 0; \\ \ 2x-y+\ z+2\ =\ 0. \end{cases}$.

35. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку паралельно прямій, якщо:

1) $M(-1,-2,0), \frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{4}$;

2) $M(1,2,-3), \frac{x+4}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{3}$.

36. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки на пряму, якщо:

1) $M(2,-1,0), \frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+1}{3}$;

2) $M(2,3,1), \frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$.

37. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку M перпендикулярно до прямих, якщо:

1) $M(1,2,0), \frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{2}$ та $\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}$;

2) $M(1,-2,3), \frac{x+2}{1}=\frac{y+3}{-5}=\frac{z-1}{-2}$ та $\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-2}{3}$.

37. Дано вершини $A_1(x_1y_1z_1).A_2(x_2y_2z_2).A_3(x_3y_3z_3).A_4(x_4y_4z_4)$ піраміди. Знайти:

а) довжину ребра A_1A_2

б) кут між ребром A_1A_2 і A_1A_4

в) кут між ребром A_1A_4 і граню $A_1A_2A_3$

г) рівняння висоти опущеної із вершини на грань $A_1A_2A_3$, якщо:

1) A_1(1,-1,1), A_2(3,2,-1), A_3(2,2,5), A_4(-2,1,0);

2) A_1(-2,1,0), A_2(2,2,5), A_3(3,1,2), A_4(1,-2,1);

3) $A_1(2,2,5)$, $A_2(-2,1,0)$, $A_3(3,1,2)$, $A_4(1,-2,1)$;

4) $A_1(1,-1,6)$, $A_2(4,5,-2)$, $A_3(-1,3,0)$, $A_4(6,1,5)$;

5) $A_1(6,1,5)$, $A_2(-2,3,1)$, $A_3(4,-1,7)$, $A_4(1,1,1)$;

6) $A_1(3,2,1)$, $A_2(2,-1,8)$, $A_3(2,-1,2)$, $A_4(6,-1,6)$;

7) $A_1(-1,3,2)$, $A_2(-8,5,0)$, $A_3(-3,7,-5)$, $A_4(-4,1,3)$

38. Знайти відстань між прямими, якщо:

1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{1}$ і $\frac{x-5}{4}=\frac{y}{-6}=\frac{z-4}{2}$;

2) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{3}$ і $\frac{x+1}{5}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$.

39. Записати рівняння площини, яка проходить через дві прямі, якщо:

1) $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-3}{2}$ і $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{4}=\frac{z}{3}$;

2) $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ і $\frac{x-3}{-7}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

3) $\frac{x-4}{3}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-2}{-1}$ і $\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+7}{2}$;

40. Встановити, яка лінія визначається рівнянням

1) $x^2+y^2-8x+2y+13=0$;

2) $2x^2+3y^2+8x-18y+29=0$;

3) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$.

41. Записати рівняння кола з центром у точці $A(2;-1)$, радіусом 7.

42. Знайти рівняння кола, що торкається осі *Ox* у початку координат і перетинає вісь *Oy* в точці $A(0;10)$.

43. Скласти рівняння кола в кожному з таких випадків:

1) центром кола є точка C(2,−3), радіус R = 7;

2) центром кола є точка C(6,−8) і коло проходить через початок координат;

3) точки A(3, 2) і B(−1, 6) є кінцями одного з діаметрів кола;

4) центром кола є точка C(1,−1), а пряма $5x-12y+9=0$ є дотичною до кола;

5) коло проходить через точки A(3, 1) і B(−1, 3), центр лежить на прямій $3x-y-2=0$;

6) коло проходить через три точки: $M_1(-1,5), M_2(-2,-2)\ i\ M_3(5,5)$;

7) коло проходить через точку $M(1,2)$ і дотикається до координатних осей.

44. Знайти рівняння кола, що проходить через точку $A(0;0)$ з центром на прямій $y = x$ (в I чверті) і радіусом 3.

45. Записати канонічне рівняння еліпса, якщо його велика піввісь дорівнює 6, а ексцентриситет дорівнює 0,5. Визначити координати фокусів.

46. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

1) його півосі, відповідно, дорівнюють 4 і 2;

2) відстань між фокусами рівна $2c = 6$, а велика вісь $2a = 10$;

3) велика вісь *2a = 20*, а ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{0{,}8}$;

4) мала вісь $2b = 6$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) сума осей дорівнює 16, а відстань між фокусами $2c = 8$;

6) відстань між фокусами $2c = 6$, а ексцентриситет $\varepsilon = 0,6$.

47. Задано рівняння еліпса $9x^2 + 5y^2 = 45$. Визначити координати його фокусів та ексцентриситет.

48. Скласти рівняння гіперболи, якщо її уявна піввісь дорівнює 4, а один із фокусів має координати $F(-11;0)$.

49. Скласти канонічне рівняння гіперболи, велика вісь якої дорівнює 8, а рівняння асимптот $y = \pm 0{,}75x$.

50. Знайти кут між асимптотами гіперболи, якщо її ексцентриситет дорівнює 2.

51. Скласти канонічне і параметричне рівняння параболи, якщо координати її фокуса $F(4;0)$.

52. Скласти рівняння параболи, якщо рівняння її директриси $x = 13$.

53. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо:

1) відстань фокуса, що лежить на осі *Ox*, до вершини дорівнює чотирьом;

2) відстань фокуса, розміщеного на осі *Oy,* до директриси дорівнює шести;

3) парабола симетрична щодо осі абсцис і проходить через точку $M(1,2)$;

4) парабола симетрична щодо осі ординат і проходить через точку $N\ (5, 11)$.

54. Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі Oy , з центром у точці $M\ (1;\ 2)$ і параметром 3.

55. Скласти рівняння параболи і побудувати її графік, якщо вершина має координати (-2, 2), параметр p – 5, а напрям її осі симетрії збігається:

1) з додатним напрямом осі Ox;

2) з від'ємним напрямом осі Ox;

3) з додатним напрямом осі Oy;

4) з від'ємним напрямом осі Oy.

Розділ

5

ФУНКЦІЯ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ

5.1. Означення функції однієї змінної. Найпростіші класифікації функцій

Функція – це одне з фундаментальних понять математики, яке дає змогу не лише аналізувати стани, а й моделювати різноманітні процеси. Використання функцій є ключовим методом дослідження в сучасній науці, оскільки багато природних і технічних явищ описуються саме через функціональні залежності.

Наприклад, площа квадрата змінюється залежно від довжини його сторони: кожному значенню сторони відповідає єдине значення площі. Так само й у багатьох інших випадках – кожному значенню змінної відповідає певний результат. Аналіз таких взаємозв'язків є важливим як у теоретичній науці, так і в практичному застосуванні.

Термін «функція» вперше ввів Г. Лейбніц. Поняття функції ґрунтується на поняттях множини і відповідності (відображення).

Нехай X і Y – непорожні множини довільних елементів. Кажуть, що на множині X задана ***функція***, якщо за певним правилом (законом) f кожному елементу $x \in X$ поставлено у відповідність один і тільки один елемент $y \in Y$. Водночас елементи $x \in X$ називають ***значеннями аргументу*** або ***незалежною змінною*** функції, а відповідні їм елементи $y \in Y$ – ***значеннями*** функції. Саму функцію називають також ***залежною змінною***. Множину X називають

областю визначення функції, а множину Y – ***множиною значень*** функції. Для позначення функції за таких умов використовують записи

$$y = f(x), \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad \text{або} \quad f: X \to Y.$$

На рис. 5.1.1 умовно зображено приклад функції, визначеної на множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ з множиною значень $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$.

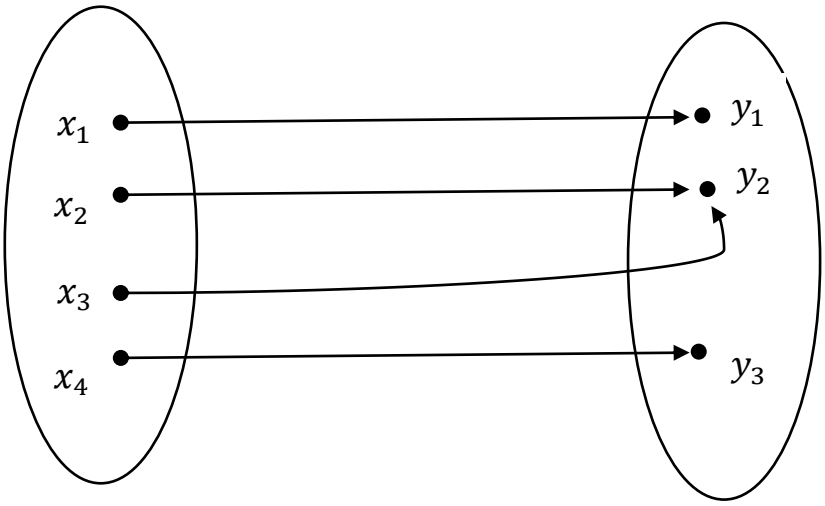


Рис. 5.1.1. Функція однієї змінної

У наведеному означенні ніяк не конкретизуються елементи множин X і Y та закон відповідності f. Залежно від природи елементів множин X та Y для функції f вживають різні назви. Наприклад, якщо X і Y – деякі непорожні множини дійсних чисел, то маємо дійсну функцію $y = f(x)$ дійсного аргументу; якщо X – множина комплексних чисел, а Y – множина дійсних чисел, то f – дійсна функція комплексного аргументу тощо.

Область визначення функції X часто позначають $D(f)$ або $D(y)$, а множину значень Y позначають $E(f)$ або $E(y)$.

Відповідно до означення функція вважається заданою, якщо вказані її область визначення та правило, за яким кожному значенню аргументу зіставляється певне значення функції. На характер такої відповідності не накладається жодних обмежень.

Розглядають аналітичний, графічний, табличний та словесний способи задання функції.

Аналітичний спосіб задання функції полягає в тому, що y виражають через x за допомогою формули або аналітичного виразу. Задання функції формулою зручне тим, що дає змогу знаходити значення функції для довільного значення аргументу.

Отже, кажуть, що функція f задана *аналітично,* якщо задано формулу, за допомогою якої для кожного значення аргументу з області визначення функції можна знайти відповідне значення функції. Наприклад, $y = \sqrt{4 - x^2}$. Аналітичний спосіб задання функції найбільш вживаний для числових функцій, зокрема і тому, що він дає можливість обчислювати значення функції з довільною наперед заданою точністю.

Означення функції вимагає задання множин X, Y і правила f. У випадку аналітичного задання функції часто задають лише правило f, розуміючи під X всі допустимі значення x, при яких аналітичний вираз для f має зміст, а під Y – множину всіх отриманих y.

Графічний спосіб задання функції передбачає представлення її у вигляді графіка.

Графік функції $y = f(x)$ – це множина точок на площині, де абсциси відповідають значенням аргументу x, а ординати – відповідним значенням функції $y = f(x)$.

Для побудови графіків функцій використовується прямокутна система координат xOy, яка складається з двох взаємно перпендикулярних числових осей із спільним початком. Горизонтальна вісь називається **віссю абсцис** або віссю Ox, або віссю іксів, а вертикальна – **віссю ординат** або віссю Оy, або віссю ігриків. Числа, що визначають положення точки на координатній площині xOy, називають її **координатами**.

Отже, графік функції – це фігура на координатній площині, що містить усі точки, в яких абсциса відповідає значенню аргументу, а ордината – відповідному значенню функції.

Графічний спосіб задання функції наочний, але недостатньо точний.

Так, графіком функції $y = \sqrt{4 - x^2}$ є верхнє півколо радіуса 2 з центром у початку координат (рис. 5.1.2).

З графіка видно, наприклад, що найбільше значення функції $y_{max} = y(0) = 2$, найменше – $y_{min} = y(-2) = y(2) = 0$; на проміжку $[-2; 0]$ функція зростає, а на проміжку $[0; 2]$ – спадає. Проте значення функції $y(1) = \sqrt{3}$ з графіка можна отримати з точністю хіба що до однієї десятої.

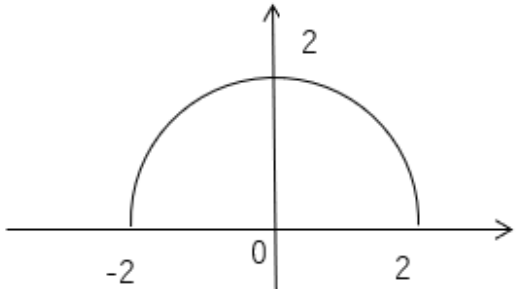


Рис.5.1.2. Графік функції $y = \sqrt{4 - x^2}$

Табличний спосіб задання функції особливо зручний для користування, оскільки при цьому не треба обчислювати значень функції, тому що вони задані безпосередньо в таблиці. Функцію задано таблично, коли в одному рядку (або стовпчику) записані всі значення аргументу, а в другому відповідні значення функції.

x	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_i	…	y_n

Приклади таких таблиць: таблиця квадратів чисел, таблиця кубів чисел, таблиця основних тригонометричних функцій.

На практиці цей спосіб може бути використаний лише у випадку, коли область визначення функції має скінченну (порівняно невелику) кількість елементів.

Словесний спосіб задання функції означає, що відповідність між змінними *x* та *y* описується словами. До цього способу також належить випадок, коли функція задається кількома формулами, кожна з яких застосовується для певних значень аргументу, що потрібно визначити словесно.

Наприклад,

$$y = \begin{cases} 4x - 3, \text{якщо } x < 0; \\ -2x, \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Аналіз поведінки функції є важливою частиною математичного дослідження, оскільки дозволяє зрозуміти її властивості та графік. Одними з ключових характеристик функції є її нулі та проміжки знакосталості.

Нулями функції називаються такі значення аргументу, при яких значення самої функції дорівнює нулю, тобто якщо $f(x) = 0$. Іншими словами, це точки на координатній площині, де графік функції перетинає вісь абсцис (вісь Ox).

Якщо функція задана аналітично формулою $f(x)$, то її нулі знаходяться розв'язанням рівняння $f(x) = 0$. Нулі можуть бути як одиничними (ізольованими), так і множинними (кратними коренями).

Проміжки знакосталості функції – це відрізки області визначення функції, на яких вона зберігає один і той самий знак (тобто є або додатною, або від'ємною).

Щоб знайти проміжки знакосталості функції $y = f(x)$, потрібно:

1. Визначити область визначення функції.
2. Знайти нулі функції – розв'язати рівняння $f(x) = 0$.
3. Розбити область визначення на проміжки за точками, в яких функція дорівнює нулю або не визначена.
4. Вибрати тестові точки з кожного проміжку та підставити їх у функцію, щоб визначити її знак.
5. Результат записується у вигляді об'єднання проміжків, на яких функція додатна або від'ємна.

Найпростіші класифікації функцій

Функції описують залежність між змінними. Серед великої кількості функцій виділяють основні елементарні функції, які мають прості й добре вивчені властивості. Вони є основою для побудови більш складних математичних виразів і моделей.

До основних *елементарних функцій* належать:

1. *Лінійна функція* виду $y = ax + b$, де $a, b \in R$.

2. *Степенева функція* – $y = x^{\alpha}$, де α – будь-яка дійсна стала.

3. *Показникова функція* – $y = a^{x}$, якщо $a > 0, a \neq 1$.

4. *Логарифмічна функція* – $y = \log_a x$, якщо $a > 0, a \neq 1$.

Логарифмічна та показникова функції взаємно обернені.

5. *Тригонометричні функції* – $y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$.

6. *Обернені тригонометричні функції* – $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctg\, x, y = arcctg\, x$.

Вони є оберненими до функцій $y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$.

7. Функція $y = P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in R$ називається *многочленом n-го степеня*.

Наприклад, $y = 3x^2 + 4x - 20$.

8. Функція $y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$ називається *дробово-раціональною.*

9. Функція, до складу дій над аргументом якої входить дія добування кореня, називається *ірраціональною*.

Із основних елементарних функцій решту елементарних функцій дістають:

1) за допомогою алгебраїчних дій;

2) побудовою складної (складеної) функції.

Функції, які дістають із основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа алгебраїчних дій і скінченного числа операцій, що полягають у побудові складної функції, називаються ***елементарними***.

Парні і непарні функції

Множина $E \subset R$ називається ***симетричною відносно нуля***, якщо разом із кожним числом $x \in E$ число $-x$ також належить E.

Прикладами симетричних відносно нуля множин є: множина R дійсних чисел; множина $E = \{-4, 4\}$, що складається з двох чисел -4 і 4.

Функція $f(x)$, $x \in E$ називається ***парною***, якщо множина E симетрична відносно нуля і $f(-x) = f(x)$ для будь-якого $x \in E$.

Приклади парних функцій: $f(x) = x^2,\ x \in R$, $f(x) = \cos x\,,\ x \in R$.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy, оскільки з кожною точкою $(x;\ f(x))$ графіка йому належить і точка $(-x;\ f(-x) = f(x))$, яка симетрична точці $(x;\ f(x))$ відносно осі Oy.

Функція $f(x)$, $x \in E$ називається ***непарною***, якщо множина E симетрична відносно нуля і $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого $x \in E$.

Приклади непарних функцій: $f(x) = x^3,\ x \in R$, $f(x) = \sin x\,, x \in (-\pi; \pi)$.

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат, оскільки з кожною точкою $(x;\ f(x))$ йому належить і точка $(-x;\ f(-x) = -f(x))$, яка симетрична точці$(x;\ f(x))$ відносно початку координат.

Періодичні функції

Функція $f(x)$, $x \in E$ називається ***періодичною***, якщо існує таке число $T \neq 0$ (воно називається ***періодом функції***), що для будь-якого числа $x \in E$ числа $x \pm T \in E$, і при цьому виконуються рівності $f(x \pm T) = f(x)$.

Періодичні функції описують періодичні процеси та явища в природі й техніці. Прикладами можуть бути: коливання маятника біля положення рівноваги; рух планет навколо Сонця тощо.

Існують функції, для яких кожне дійсне число $T \neq 0$ є періодом. Такою є, наприклад, стала функція $y = C = const,\ x \in E$.

Найменший з додатних періодів функції, якщо такий існує, називається ***основним періодом*** функції.

Наприклад, функції $y = sinx,\ y = cos\,x$, де $x \in R$, є періодичними з основним періодом $T = 2\pi$; функції $y = tg\,x, y = ctg\,x$, які розглядаються на всій області визначення, *є* періодичними з основним періодом $T = \pi$.

Обмежені і необмежені функції

Функція $f(x),\ x \in E$ називається ***обмеженою***, якщо існує таке число $M > 0$, що $|f(x)| \leq M,$ для всіх чисел $x \in E$.

Наприклад, функції $y = sinx$, $y = cosx$ обмежені, оскільки $|sin\,x| \leq 1$, $|cosx| \leq 1$ для будь-якого $x \in R$.

Функція $f(x),\ x \in E$, називається ***обмеженою зверху*** на множині E, якщо множина її значень обмежена зверху. Іншими словами, існує таке число $M \in R$, що $f(x) \leq M$, для всіх чисел $x \in E$.

Функція $f(x),\ x \in E$, називається ***обмеженою знизу*** на множині E, якщо множина її значень обмежена знизу. Іншими словами, існує таке число $M \in R$, що $f(x) \geq M,$ для всіх чисел $x \in E$.

Функція $f(x),\ x \in E$ називається ***необмеженою***, якщо для довільного числа $M > 0$ існує таке число $x_0 \in E$, що $|f(x_0)| > M$.

Наприклад, функції $y = tg\ x, y = ctg\ x.$

Графік обмеженої функції знаходиться в горизонтальній смузі $-M < y < M,$ а графік необмеженої функції або піднімається як завгодно високо вгору, або опускається як завгодно низько, або і те і інше.

Монотонні функції

Функція $f(x),\ x \in E$ називається ***зростаючою***, якщо для довільних $x_1 \in E, x_2 \in E$ з умови $x_1 < x_2$ випливає $f(x_1) < f(x_2)$.

Функція $f(x), x \in E$ називається ***спадною***, якщо для довільних $x_1 \in E, x_2 \in E$ з умови $x_1 < x_2$ випливає $f(x_1) > f(x_2)$.

Функція $f(x),\ x \in E$ називається ***неспадною***, якщо для довільних $x_1 \in E, x_2 \in E$ з умови $x_1 < x_2$ випливає $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Функція $f(x),\ x \in E$ називається ***незростаючою***, якщо для довільних $x_1 \in E, x_2 \in E$ з умови $x_1 < x_2$ випливає $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Зростаючі, спадні, незростаючі, неспадні функції називаються ***монотонними.***

Знання проміжків монотонності функції важливе при дослідженні її властивостей.

Функція $y = f(u)$, де $u = g(x)$, називається ***складною (складеною) функцією***, або суперпозицією функцій $f(u)$ та $g(x)$, і позначається $y = f(g(x))$.

Нехай функція $y = f(x)$ встановлює відповідність між множинами D та E. Якщо обернена відповідність між множинами E та D буде функцією, то вона називається ***оберненою*** до даної $y = f(x)$, її позначають $y = f^{-1}(x)$.

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

Функція називається ***неявною***, якщо її задано рівнянням $F(x; y) = 0$, яке не розв'язане відносно змінної y.

Система рівнянь $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ виражає змінну x та її функцію $y = f(x)$ як функції від параметру t.

5.2. Поняття числової послідовності. Границя числової послідовності

Нехай $X = N$, а Y – деяка множина дійсних (або комплексних) чисел. Тоді функція $y = f(n)$ є функцією натурального аргументу, яку називають ***послідовністю*** і позначають $x_n = f(n)$, $n \in N$ або $x_1,\ x_2,\ x_3, \dots, x_n, \dots$ або (x_n).

Загальний член послідовності – це формула, яка виражає n-й елемент послідовності через його порядковий номер n. За загальним членом послідовності можна знайти будь-який її елемент без необхідності обчислення попередніх.

Розглянемо числову послідовність, задану формулою загального члена $x_n = \frac{n+1}{n}$. Зобразимо її члени точками числової осі (рис. 5.2.1).

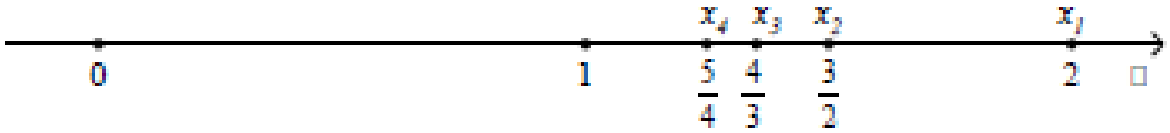


Рис. 5.2.1. Числова послідовність $x_n = \frac{n+1}{n}$

Легко зауважити, що зі збільшенням n члени послідовності як завгодно близько наближаються до одиниці. При цьому $|x_n - 1|$ з збільшенням n зменшується:

$$|x_1 - 1| = 1;\ \ |x_2 - 1| = \frac{1}{2};\ \ |x_3 - 1| = \frac{1}{3};\ \ |x_4 - 1| = \frac{1}{4}; \ldots;\ |x_n - 1| = \frac{1}{n}; \ldots$$

Крім того, для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ ми завжди можемо вказати такий номер елемента n послідовності, починаючи з якого $|x_n - 1| < \varepsilon$. Наприклад,

$$\varepsilon = 0{,}1:\ |x_n - 1| < 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad n > 10;$$

$$\varepsilon = 0{,}01:\ |x_n - 1| < 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad n > 100.$$

Ці міркування і лежать в основі означення границі послідовності.

Дійсне число a називається ***границею послідовності*** (x_n), якщо для довільного дійсного додатного числа ε існує такий номер n_0 (взагалі, залежний від ε, тобто $n_0(\varepsilon)$), що для всіх номерів n, більших $n_0(\varepsilon)$, виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

За допомогою логічної символіки це означення можна записати так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ \overset{def}{\Longleftrightarrow}\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in N \quad \forall n \in N \quad (n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon).$$

Тут запис $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ читається «тоді і тільки тоді за означенням».

Число $\varepsilon > 0$ характеризує «ступінь близькості» членів послідовності (x_n) до границі a, а число $n_0(\varepsilon)$ показує, що члени послідовності з номерами, більшими n_0, будуть від числа a на відстані, меншій ε.

Геометрично (рис. 5.2.2) це означає, що всі члени послідовності (x_n) з номерами $n > n_0(\varepsilon)$ потраплять в інтервал $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, який називається ε – *околом числа a.*

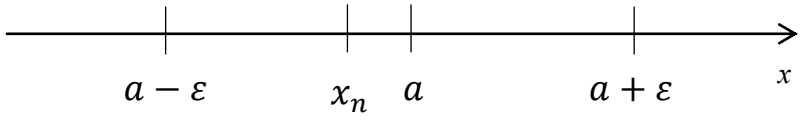


Рис. 5.2.2. ε – окіл числа a

Послідовність, яка має границю, називається ***збіжною***.

Послідовність, яка не має границі, називається ***розбіжною***.

Послідовність, границя якої дорівнює нулю, називається ***нескінченно малою*** або ***нульовою послідовністю***.

Теорема 1 (про єдиність границі). Якщо послідовність має границю, то лише одну.

Теорема 2. Кожна збіжна послідовність обмежена.

Теорема 3 (про арифметичні операції над збіжними послідовностями). Якщо послідовності (x_n) і (y_n) збіжні, то збіжними будуть послідовності $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$, а за додаткової умови $y_n \neq 0$ для $\forall n \in N$ і $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ збіжна і послідовність $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$, причому наявні формули

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n) \pm \lim_{n\to\infty}(y_n);$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(y_n);$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}(x_n)}{\lim_{n\to\infty}(y_n)}.$$

Теорема 3 активно використовується в обчисленні границь послідовностей і суттєво спрощує їх обчислення.

Теорема 4 (про границю проміжної послідовності). Якщо для послідовностей (x_n), (y_n) і (z_n) виконуються умови $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(z_n) = a$, то і $\lim_{n\to\infty}(y_n) = a$.

Послідовність (x_n) називається ***монотонно зростаючою***, якщо $\forall n \in N: x_n < x_{n+1}$.

Послідовність (x_n) називається ***неспадною***, якщо $\forall n \in N: x_n \leq x_{n+1}$.

Послідовність (x_n) називається ***монотонно спадною***, якщо $\forall n \in N: x_n > x_{n+1}$.

Послідовність (x_n) називається ***незростаючою***, якщо $\forall n \in N: x_n \geq x_{n+1}$.

Монотонно зростаючу, неспадну, монотонно спадну, незростаючу послідовності надалі будемо називати ***монотонними***.

Теорема 5 (про границю монотонної послідовності). Кожна монотонна обмежена послідовність має границю.

Теорема 6. Якщо (x_n) – нескінченно мала, а (y_n) – обмежена, то – $(x_n \cdot y_n)$ нескінченно мала.

Послідовність (x_n) називається ***нескінченно великою***, якщо $\forall\, C > 0\ \exists\, N = N(C)\, \epsilon\, N\colon\ \forall\, n \geq N(C)\ \rightarrow\ |(x_n)| \geq\ C$.

Записують: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Теорема 7. Якщо (x_n) – нескінченно велика, то $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ – нескінченно мала.

До основних формул, що використовуються при обчисленні границь послідовностей, належать такі:

1) $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0,\ |a| < 1, \\ +\infty, a > 1, \\ \text{не існує}, a \leq -1. \end{cases}$
2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \alpha > 0.$
3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, a = const.$
4) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0, |a| > 1.$
5) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
6) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\,,\ a = const.$
7) $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{\alpha_n} = \infty, c = const\,,$ якщо $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$
8) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0,$ якщо $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$

9) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,\ e \approx 2{,}718281828459$ *(важлива границя)*.

10) $\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = e$, де α_n – нескінченно мала послідовність.

Правила знаходження границь послідовностей

1. Нехай загальний член послідовності – це дріб, у чисельнику та знаменнику якого знаходяться многочлени або ірраціональні вирази, тобто утворює невизначеність типу $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Нехай m – старший степінь чисельника, k – старший степінь знаменника. Тоді при $m = k$ границя послідовності дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях чисельника та знаменника, при $m < k$ ця границя дорівнює нулю, при $m > k$ вона дорівнює нескінченності.

2. Нехай загальний член послідовності – це ірраціональні вирази, що утворюють невизначеність типу $\{\infty\text{-}\infty\}$. Тоді потрібно помножити та поділити вираз, що стоїть під знаком границі, на спряжений. Виконавши необхідні перетворення, обчислити цю границю.

3. Нехай загальний член послідовності задано так, що при $n \to \infty$ отримуємо так звану невизначеність виду $\{1^{\infty}\}$. Тоді обчислення границь послідовностей буде пов’язане з використанням формул 9 і 10.

5.3. Границя функції в точці

Границя функції є одним із ключових понять математичного аналізу. Вона описує поведінку функції поблизу заданої точки та широко використовується у вивченні неперервності, похідних та інтегралів.

Поняття границі функції в нескінченності тісно пов’язане з поняттям границі числової послідовності. Під час знаходження границі числової

послідовності змінна n, зростаючи, приймає лише натуральні значення, то в другому випадку змінна x, змінюючись, набуває довільних значень.

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Число $A \in R$ називається ***границею функції*** $f(x)$ в точці x_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in D(f)$, що задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Окіл $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ називають ***проколотим***, якщо точка x_0 йому не належить.

Те, що число A є границею функції $f(x)$ в точці x_0, записують так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ , або } f(x) \to A, \text{коли } x \to x_0.$$

З використанням логічної символіки означення границі функції можна записати так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\, \varepsilon \in R^+\ \exists\, \delta \in R^+\ \forall x \in R\ (0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon).$$

Суть означення границі функції $f(x)$ в точці x_0 полягає в тому, що для всіх значень x, достатньо близьких до x_0, значення функції $f(x)$ за абсолютною величиною як завгодно мало відрізняються від числа A.

Інакше кажучи, δ-близькість x до x_0 забезпечує ε-близькість $f(x)$ до числа A, або $f(x) \approx A$ (майже дорівнює), якщо $x \approx x_0$.

Геометричний зміст границі функції в точці. Число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для довільного $\forall \varepsilon > 0$ знайдеться такий проколотий δ-окіл точки x_0, що для всіх $x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)/\{x_0\}$ відповідні ординати точок графіка функції $y = f(x)$ будуть міститися в смузі $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$, якою би вузькою ця смуга не була (рис. 5.3.1).

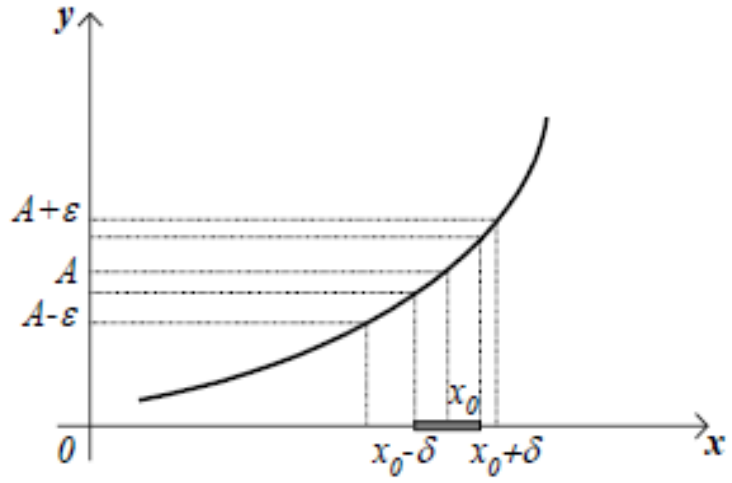


Рис. 5.3.1. Графічна інтерпретація означення границі функції в точці

Функція $y = f(x)$ не може мати двох різних границь в одній точці.

Теорема 1. Якщо границя функції в точці існує, то вона єдина.

Теорема 2. Якщо точка $x = x_0$ разом з деяким околом належить області визначення елементарної функції $f(x)$, то існує границя функції $f(x)$ при $x \to x_0$ і вона дорівнює $f(x_0)$, тобто $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Теорема 3. Якщо $f(x), g(x), h(x)$ визначені в деякому околі точки a, $f(x) \le g(x) \le h(x)$ і $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b$, то $\lim_{x\to a} g(x) = b$.

Теорема 4. Якщо $\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} g(x) = B$ (a – скінченне число або дорівнює $\infty, +\infty, -\infty$), то:

а) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$;

б) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$;

в) $\lim_{x\to a}\big(C \cdot f(x)\big) = C \cdot \lim_{x\to a} f(x) = C \cdot A$, де $C -$ const;

г) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}$, якщо $B \neq 0$;

д) $\lim_{x\to a}\big(f(x)\big)^{g(x)} = [\lim_{x\to a} f(x)]^{\lim_{x\to a} g(x)} = A^B$, якщо $A > 0$;

е) якщо існує $\lim_{y\to A} h(y)$, то $\lim_{x\to a} h(f(x)) = \lim_{y\to A} h(y)$.

Функція $\alpha(x)$ називається ***нескінченно малою*** при $x \to x_0$, якщо $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Теорема 5. $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$ тоді і лише тоді, коли існує така функція $\alpha(x)$, нескінченно мала при $x \to x_0$, що $f(x) = b + \alpha(x)$.

Теорема 6. Сума і добуток скінченної кількості нескінченно малих функцій при $x \to x_0$ є нескінченно мала функція при $x \to x_0$.

Функція $f(x)$ називається ***нескінченно великою*** при $x \to x_0$, якщо для довільного як завгодно великого числа $K > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх x, що задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > K$.

Те, що функція $f(x)$ нескінченно велика при $x \to x_0$, позначатимемо так: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ або $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.

Якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ і при цьому $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ в деякому проколотому околі точки x_0, то пишуть $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ $\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty\right)$.

Для нескінченно малих і нескінченно великих функцій справедливі такі твердження (властивості).

1. Якщо $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ і $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, то:

а) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$;

б) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = +\infty$.

2. Якщо $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ і $\lim_{x\to a} g(x) = A$ $(A \neq 0)$, то:

а) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \infty$;

б) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \infty$.

3. Якщо $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

4. Якщо $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ і $f(x) \neq 0$ в деякому проколотому околі точки $x = a$, то $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

5. Якщо $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ і $g(x)$ обмежена в деякому околі точки $x = a$, то $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Правостороння границя функції:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ \ (a < X < x + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Лівостороння границя функції:

$\lim_{x\to a-0} f(x) = b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ (a - \delta < X < x \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$.

Невизначені вирази

Часто при обчисленні границь функцій результат знаходження границі не очевидний. Кажуть, що $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (a – скінченне число або дорівнює $\infty, +\infty, -\infty$) є невизначеністю типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, якщо $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ і записують

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Аналогічно:

а) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, якщо $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$;

б) $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \{\infty - \infty\}$, якщо $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$;

в) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \{0 \cdot \infty\}$, якщо $\lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} g(x) = \infty$;

г) $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \{0^0\}$, якщо $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$;

д) $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \{\infty^0\}$, якщо $\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \lim_{x\to a} g(x) = 0$;

е) $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \{1^\infty\}$, якщо $\lim_{x\to a} f(x) = 1, \lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

Особливі границі

Перша особлива границя $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Границі – наслідки першої особливості границі:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{tg\, x}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{tg\, x} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{arctg\, x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2/_2} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x} = k; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{tg\, kx}{x} = k; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin kx}{x}=k; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{arctg\ kx}{x}=k;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{x^2}=\frac{k^2}{2}.$$

Першу важливу границю широко використовують в обчисленні границь виразів, які містять тригонометричні функції.

Друга особлива границя $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Число e – трансцендентне число, його наближене значення дорівнює 2,71828. Друга важлива границя використовується для розкриття невизначеностей типу $\{1^\infty\}$.

Узагальнена формула другої важливої границі: якщо $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$, то $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=e$.

Границю $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ також називають *другою важливою границею*. Якщо $\lim_{x\to 0}\alpha(x)=0$, то $\lim_{x\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$.

Границі – наслідки другої особливої границі:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e; \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=e^{\alpha\beta};$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=1; \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\log_a(1+x)}{x}\right)=\log_a e=\frac{1}{\ln a};$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}\right)=\ln a,\ a>1,\ a\neq 1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m,\ m\neq 1.$$

Методика обчислення границь

1. Безпосереднє обчислення границь шляхом підстановки граничного значення та використання основних теорем про границю.

Якщо у підстановці граничного значення одержуємо невизначеності одного із зазначених вище типів, то при обчисленні границь користуємося такими правилами. Метод знаходження тієї чи іншої границі вибираємо залежно від типу невизначеності у кожному конкретному випадку.

2. Розкриття невизначеностей типу $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, якщо під знаком границі стоїть дробово-раціональна функція $\left\{\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\right\}$, де

$$P_m(x) = p_m x^m + p_{m-1}x^{m-1} + \cdots + p_1 x + p_0,$$
$$Q_n(x) = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0, \qquad (x \to \infty).$$

а) якщо $m > n$, то $\lim_{x\to\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \infty$;

б) якщо $m < n$, то $\lim_{x\to\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = 0$;

в) якщо $m = n$, то $\lim_{x\to\infty} \frac{P_m(x)}{Q_m(x)} = \frac{p_m}{q_m}$.

3. Розкриття невизначеностей типу $\{\infty - \infty\}$, якщо під знаком границі стоїть функція $\left\{\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} - R_k(x), m > n\right\}$. Перейдемо до невизначеності $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, для цього зведемо до спільного знаменника вирази.

4. Розкриття невизначеностей типу $\{\infty - \infty\}$ з ірраціональними виразами під знаком границі $(x \to \infty)$.

Для розкриття таких невизначеностей потрібно домножити та поділити вираз, що стоїть під знаком границі, на спряжений. Виконавши необхідні перетворення обчислюємо дану границю.

5. Розкриття невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ при $x \to a$, коли під знаком границі стоїть відношення многочленів $\left\{\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\right\}$.

Для розкриття таких невизначеностей потрібно виділити в чисельнику та знаменнику дробу, що знаходиться під знаком границі, множник $(x - a)$. Виконавши необхідні скорочення, обчислюємо границю.

6. Розкриття невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ при $x \to a$, коли під знаком границі стоїть відношення ірраціональних виразів. Для розкриття таких невизначеностей звичайно позбавляються від ірраціональності у чисельнику або знаменнику.

Запам'ятайте! В тих випадках, коли потрібно розкрити невизначеність типу $\{0 \cdot \infty\}$, її зводять шляхом елементарних перетворень до невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, які розкривають, використовуючи наведені способи.

7. Невизначеності виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, задані виразами, що містять тригонометричні функції, часто розкриваються за допомогою першої особливої границі та її наслідків.

8. При розкритті невизначеності виду $\{1^{\infty}\}$ використовують другу особливу границю та її наслідки.

Границя функції на нескінченості

Досліджуючи функції, які визначені на нескінченних проміжках, доводиться вивчати поведінку цих функцій при як завгодно великих за модулем значеннях аргументу *x*, тобто при $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$.

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $(a; +\infty)$. Число $A \in R$ називається ***границею функції*** $f(x)$ при $x \to +\infty$, якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta(\varepsilon) > a$, що для всіх чисел $x > \delta(\varepsilon)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

За допомогою логічної символіки означення можна записати так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon \in R^{+} \; \exists \; \delta \epsilon R \;\; \forall x \;\in R \;\; (\delta > a \;\wedge\; x > \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Аналогічно для функції $y = f(x)$, *визначеної на проміжку* $(-\infty;\; a)$:

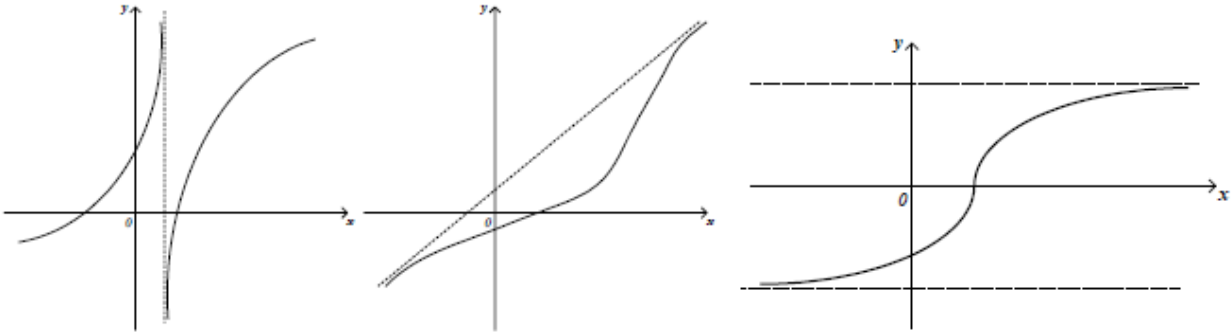
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = B \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon \in R^{+} \; \exists \; \delta \epsilon R \;\; \forall x \;\in R \;\; (\delta < a \;\wedge\; x < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - B| < \varepsilon).$$

Геометрично це означення фіксує те, що графік функції $y = f(x)$, для всіх достатньо великих x як завгодно близько підходить до прямої $y = A$ і знаходиться для чисел $x > \delta$ у смузі $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$.

Крім дотичних і нормалей до графіка функції в точках, розглянемо інші характерні лінії.

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називається пряма, яка володіє властивістю, що відстань від точки $(x, f\ (x))$ до цієї прямої стає як завгодно малою при необмеженому віддаленні точки графіка від початку координат.

Розрізняють вертикальні (рис. 5.3.2 а) та похилі (зокрема, горизонтальні) (рис. 5.3.2 б, в) асимптоти.



а) вертикальна асимптота; б) похила асимптота; в) горизонтальні асимптоти.

Рис. 5.3.2. Асимптоти графіка функції

Знаходження асимптот графіка функції ґрунтується на таких твердженнях.

Теорема. Пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$, якщо $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$ або $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$.

Зауваження. Якщо пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$, то точка x_0 є точкою розриву другого роду цієї функції.

Графік функції $y = f(x)$ може мати і похилі асимптоти $y = kx + b$, $k \neq 0$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $< a; +\infty >$. Пряма $y = kx + b$ називається ***асимптотою графіка функції*** $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, якщо

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx - b) = 0.$$

Аналогічно визначається асимптота графіка функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $< -\infty;\ a >$ при $x \to -\infty$.

Теорема (про похилі асимптоти кривої). Якщо існують скінченні границі $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ та $\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b$, то пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції $y = f\ (x)$.

Зауваження. Якщо $k = 0$, то пряма $y = b$ – горизонтальна асимптота графіка функції $y = f(x)$.

Якщо обидві границі скінченні лише при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), то пряма $y = kx + b$ є відповідно лише правосторонньою (лівосторонньою) похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому проколотому околі точки x_0. Кажуть, що $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх чисел $x \in (x_0; x_0 + \delta(\varepsilon))$ виконується нерівність $f(x) > \varepsilon$.

Геометрично це означає, що графік функції $y = f(x)$ при необмеженому наближенні x до x_0 справа необмежено піднімається вгору. Аналогічно визначаються

$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty$.

Пряма $x = x_0$ в цьому випадку називається ***вертикальною асимптотою.***

Порівняння нескінченно малих функцій

Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є нескінченно малі функції (н. м. ф.), коли $x \to x_0$, тоді існують такі *правила порівняння*.

1. Якщо $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ називають *н. м. ф. вищого порядку мализни*, ніж $\beta(x)$, коли $x \to x_0$ і позначають $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \to x_0$.

2. Якщо $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$, $A \in R$, $A \neq 0$, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають *н. м. ф. однакового порядку мализни,* коли $x \to x_0$ і позначають $\alpha(x) = O(\beta(x))$, $x \to x_0$.

3. Якщо $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають *еквівалентними н. м. ф.*, коли і позначають $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to x_0$.

4. Якщо $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають не порівняними н.м.ф.

Перелік еквівалентностей

Із важливих границь і наслідків з них випливають такі еквівалентності, коли $x \to 0$:

1. $\sin x \sim x$.
2. $tg\ x \sim x$.
3. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.
4. $\arcsin x \sim x$.
5. $arctg\ x \sim x$.
6. $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$.
7. $\ln(1+x) \sim x$.
8. $a^x - 1 \sim x \ln a$.
9. $e^x - 1 \sim x$.
10. $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$.

5.4. Неперервність функції

Неперервні функції становлять широкий і значущий клас функцій, який має важливе практичне застосування. Багато явищ і процесів намагаються змоделювати за допомогою таких функцій. Поняття неперервності, як і границі, є одним із фундаментальних у математичному аналізі.

Функція $f(x)$ називається ***неперервною*** в точці x_0, якщо $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Це означає, що:

1) функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і її значенням у цій точці є число $f(x_0)$;
2) існує границя A функції $f(x)$ в точці x_0;
3) границя A дорівнює числу $f(x_0)$.

Якщо хоча б одна з умов 1) – 3) не виконується, то функція $f(x)$ називається ***розривною*** в точці x_0, а сама точка x_0 називається ***точкою розриву*** функції $f(x)$.

Розрізняють три типи точок розриву функцій: першого роду усувного, першого роду неусувного, другого роду.

Точка x_0 називається ***точкою розриву першого роду усувного*** функції $f(x)$, якщо односторонні границі функції в цій точці існують, рівні між собою, але не дорівнюють значенню функції в цій точці або функція у цій точці не існує, тобто

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0).$$

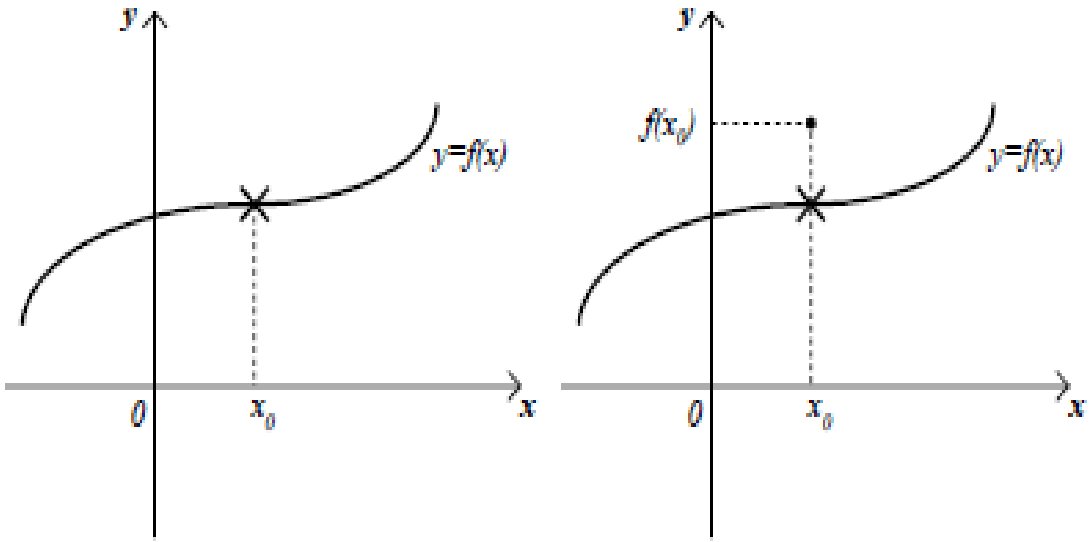


Рис. 5.4.1. Точки розриву першого роду усувного

Якщо функцію $f(x)$ довизначити в точці x_0 або змінити її значення в цій точці так, щоб $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$, то отримана функція буде неперервною в точці x_0.

Точка x_0 називається ***точкою розриву першого роду неусувного*** функції $f(x)$, якщо односторонні границі (зліва і справа) функції у цій точці існують, але не рівні між собою, тобто

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A, \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = B, \ A \neq B.$$

Різницю $B - A$ називають ***стрибком функції*** $f(x)$ у точці x_0.

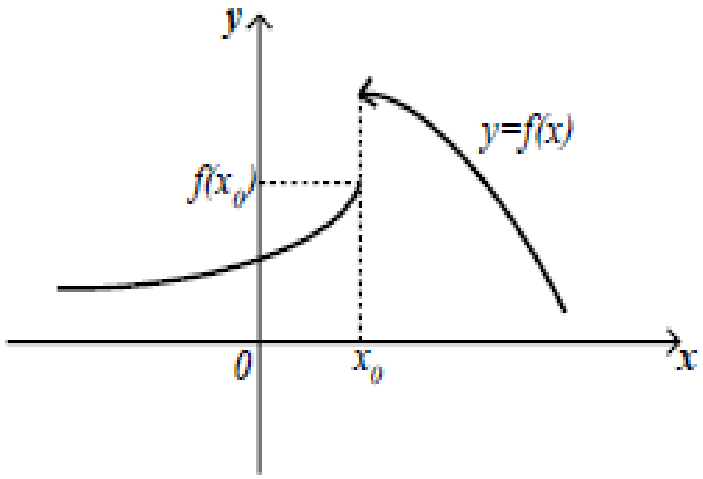


Рис. 5.4.2. Точки розриву першого роду неусувного

Точка x_0 називається ***точкою розриву другого роду*** функції $f(x)$, якщо в цій точці не існує хоча б одна з односторонніх границь (зліва чи справа) або дорівнює нескінченості.

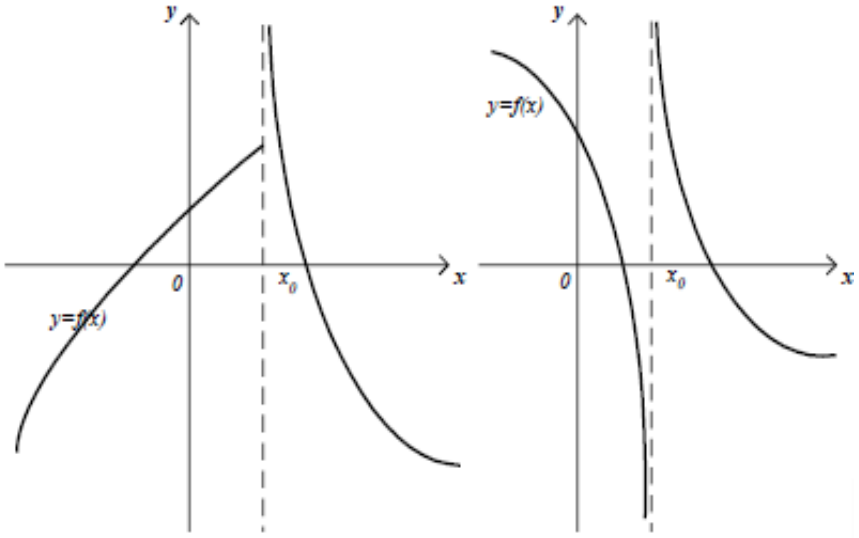


Рис. 5.4.3. Точки розриву другого роду

Теорема. Якщо функції $f\ (x)$ і $g\ (x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервні також функції

1) $Cf\ (x)$;
2) $f\ (x) \pm g(x),\ f(x) \cdot g(x)$;
3) $\frac{f(x)}{g(x)}$ за додаткової умови $g(x_0) \neq 0$.

Теорема (про неперервність складної функції). Якщо функція $u = g(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = g(x_0)$, то складна функція $y = f(g(x))$ неперервна в точці x_0, *тобто* $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u)$.

Функція $f(x)$ називається ***неперервною на проміжку <a; b>***, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку. Водночас, якщо проміжок ***<a; b>*** є відрізком або півінтервалом, то у дослідженні неперервності функції в кожній невнутрішній точці проміжку ***<a; b>*** будемо розглядати відповідні односторонні границі. Наприклад, функцію $y = f(x)$, задану на півінтервалі $(-\infty; a]$, вважатимемо неперервною в точці a, якщо $\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$.

Функції, неперервні на відрізку, мають низку властивостей, якими користуються в математиці.

Теорема Вейєрштрасса. Кожна неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ обмежена на цьому відрізку і приймає на ньому своє найменше та найбільше значення, тобто існують точки $x_1 \in [a, b]$ і $x_2 \in [a, b]$ такі, що $f(x_1) = \min_{[a,b]} f(x)$ і $f(x_2) = \max_{[a,b]} f(x)$.

Теорема Больцано-Коші. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і на кінцях відрізка має значення протилежних знаків, то існує принаймні одна така точка $c\epsilon(a, b)$, що $f(c) = 0$.

Теорема про існування та неперервність оберненої функції. Нехай

1) $f(x)$ – визначена на $[a, b]$;
2) $f(x)$ – монотонна на $[a, b]$;
3) $f(x)$ – неперервна на $[a, b]$.

Тоді існує обернена функція $f^{-1}(x)$, визначена і монотонна на $[f(a), f(b)]$.

5.5. Розв'язування прикладів і задач

✧✧✧

1. Знайти функціональну залежність довжини a прямокутника від його ширини b, якщо площа прямокутника $S = 4$ кв. од.

Розв'язання.

Формула площі прямокутника: $S = ab$.

За умовою $S = 4$, отже: $ab = 4$.

Виразимо a через b: $a = \frac{4}{b}$.

Отже, функціональна залежність довжини прямокутника від його ширини:

$$a(b) = \frac{4}{b}.$$

✧✧✧

2. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a = 3$ м/с^2. Початкова швидкість $v_0 = 2$ м/с. Знайти залежність швидкості v від часу t.

Розв'язання.

Використовуємо рівняння швидкості рівноприскореного руху:

$$v = v_0 + at.$$

Підставимо дані $v_0 = 2,\ a = 3$:

$$v = 2 + 3t.$$

Отже, функціональна залежність швидкості від часу: $v(t) = 2 + 3t$.

✧✧✧

3. Знайти нулі та визначити проміжки знакосталості для функцій:

$$1)\ f(x) = x^2 - 9; \qquad 2)\ f(x) = \log_2(x-1) - 2.$$

Розв'язання.

$$1)\ f(x) = x^2 - 9$$

Функція $f(x) = x^2 - 9$ визначена на R. Знаходимо нулі функції. Нулі функції – це точки, у яких $f(x) = 0$:

$$x^2 - 9 = 0; \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3; \quad x_2 = -3.$$

Отже, нулі функції: $x_1 = 3; \quad x_2 = -3$.

Знаходимо проміжки знакосталості. Розглянемо три проміжки, на які розбивають вісь x знайдені нулі:

$$(-\infty;\ -3);\quad (-3;3);\quad (3;\ +\infty).$$

Виберемо тестові точки з кожного проміжку та підставимо у $f(x)$:

Для $x=-4$ (проміжок $(-\infty;\ -3)$): $f(-4)=(-4)^2-9=16-9=7>0$.

Отже, $f(x)>0$ на $(-\infty;\ -3)$.

Для $x=0$ (проміжок $(-3;\ 3)$): $f(0)=0^2-9=-9<0$.

Отже, $f(x)<0$ на $(-3;\ 3)$.

Для $x=4$ (проміжок $(3;\ +\infty)$): $f(4)=4^2-9=16-9=7>0$.

Отже, $f(x)>0$ на $(3;\ +\infty)$.

Нулі функції: $x_1=3;\ \ x_2=-3$. Проміжки знакосталості: $f(x)>0$ на $(-\infty;\ -3)\cup(3;\ +\infty)$; $f(x)<0$ на $(-3;\ 3)$.

2) $f(x)=\log_2(x-1)-2$.

Функція $f(x)=\log_2(x-1)-2$ визначена, якщо вираз під логарифмом додатний: $x-1>0,\ x>1$.

Отже, область визначення: $D(f)$: $x\in(1;\ +\infty)$

Знаходимо нулі функції

$f(x)=0\ \Rightarrow\ \log_2(x-1)-2=0,\ \log_2(x-1)=2,\ x-1=4,\ x=5$.

Отже, нуль функції: $x=5$.

Знаходимо проміжки знакосталості. Розглянемо два проміжки, на які розбиває область визначення знайдений нуль:

$$(1;\ 5),\quad (5;\ +\infty).$$

Виберемо тестові точки з кожного проміжку та підставимо у $f(x)$:

Для $x=2$ (проміжок $(1;\ 5)$): $f(2)=\log_2(2-1)-2=\log_2 1-2=0-2=-2<0$.

Отже, $f(x)<0$ на $(1;\ 5)$.

Для $x=9$ (проміжок $(5;\ +\infty)$):

$$f(6)=\log_2(9-1)-2=\log_2 8-1=3-1=2>0.$$

Отже, $f(x)>0$ на $(5;\ +\infty)$.

Нуль функції: $x = 5$. Проміжки знакосталості: $f(x) < 0$ на $(1;\ 5)$, $f(x) > 0$ на $(5;\ +\infty)$.

✧✧✧

4. Знайти область визначення функцій:

1) $y = \log_2(\sqrt{x} - 5)$; 2) $y = \log_{11}(-x^2 + 5x) + \frac{1}{\arccos(x-1)}$;

3) $y = \frac{1}{\sqrt{x-5}} + \arcsin(5x - 1)$.

Розв'язання.

1. Скориставшись властивостями степеневої $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$ та логарифмічної функцій, маємо:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 25 \end{cases}.$$

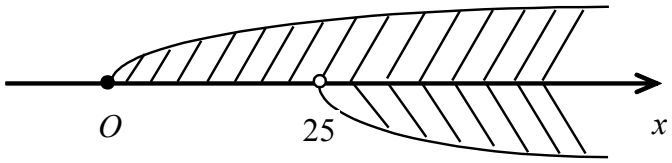


Рис. 5.5.1. Область визначення функції $y = \log_2(\sqrt{x} - 5)$

Отже, $x \in (25;\ +\infty)$.

2. Згідно з властивостями логарифмічної та оберненої тригонометричної функцій маємо:

$$\begin{cases} -x^2 + 5x > 0 \\ arccos(x-1) \neq 0 \\ -1 \leq x - 1 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-5) < 0 \\ x - 1 \neq 1 \\ -1 + 1 \leq x < 1 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-5) < 0 \\ x \neq 2 \\ 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

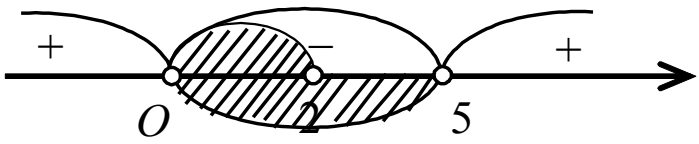


Рис. 5.5.2. Область визначення функції

Отже, $x \in (0;\ 2)$.

3. Із тих самих міркувань, що й у попередніх прикладах, записуємо:

$$\begin{cases} x-5>0 \\ -1\le 5x-1\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>5 \\ 0\le 5x\le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>5 \\ 0\le x\le \frac{2}{5}. \end{cases}$$

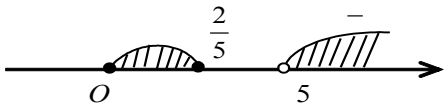


Рис. 5.5.3. Область визначення функції

Отже, $x\in\{\emptyset\}$.

✧✧✧

5. З'ясувати, чи така функція парна, непарна, загального виду:

1) $f(x)=3x^5-8x^3$; 2) $f(x)=4x^6-3x^4+5$;

3) $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x+x^2}$; 4) $f(x)=4x^6-\sin x$.

Розв'язання.

1) $f(-x)=3(-x)^5-8(-x)^3=-3x^5+8x^3=-(3x^5-8x^3)=-f(x)$, тобто $f(x)=3x^5-8x^3$ – непарна функція;

2) $f(-x)=4(-x)^6-3(-x)^4+5=4x^6-3x^4+5=f(x)$, тобто $f(x)=4x^6-3x^4+5$ – парна функція;

3) $f(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)+(-x)^2}=\frac{-\sin x}{\cos x+x^2}=-\frac{\sin x}{\cos x+x^2}=-f(x)$, тобто $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x+x^2}$ – непарна функція;

4) $f(-x)=4(-x)^6-\sin(-x)=4x^6+\sin x\neq f(x)\wedge\neq -f(x)$. Отже, $f(x)=4x^6-\sin x$ – ні парна, ні непарна, тобто функція загального виду.

✧✧✧

6. Дослідити на монотонність функцію:

1) $f(x)=4x+1$; 2) $f(x)=\frac{x+3}{x-2}$, $x\in(2;+\infty)$.

Розв'язання.

1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

Нехай $x_1<x_2$, тоді $f(x_2)-f(x_1)=4x_2+1-(4x_1+1)=4x_2-4x_1=4(x_2-x_1)>0$, тому $f(x_2)>f(x_1)$.

Отже, функція $f(x) = 4x + 1$ зростає на всій області визначення.

2) $D(f) = (2;\ +\infty)$.

Нехай $2 < x_1 < x_2$, тоді

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2+3}{x_2-2} - \frac{x_1+3}{x_1-2} = \frac{x_1x_2+3x_1-2x_2-6-x_1x_2+2x_1-3x_2+6}{(x_1-2)(x_2-2)} =$$

$$\frac{5x_1-5x_2}{(x_1-2)(x_2-2)} = \frac{5(x_1-x_2)}{(x_1-2)(x_2-2)} < 0, \text{ тому } f(x_2) < f(x_1).$$

Отже, функція $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ спадає для усіх $x \in (2;\ +\infty)$.

✧✧✧

7. Знайти обернену функцію до функцій:

$$1)\ y = -2x + 4; \qquad 2)\ y = \frac{x+3}{x-1}.$$

Розв'язання.

1) $y = -2x + 4$. Виразимо x через y:

$$2x = -y + 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4-y}{2}.$$

Замінивши x на y та y на x, маємо: $y = \frac{4-x}{2}$.

Отже, функція $y = \frac{4-x}{2}$ є оберненою до $y = -2x + 4$.

2) $y = \frac{x+3}{x-1}$. Виразимо x через y:

$$x + 3 = y(x-1) \ \Rightarrow \ x + 3 = yx - y \ \Rightarrow \ x - yx = -3 - y \ \Rightarrow$$

$$yx - x = y + 3 \quad \Rightarrow \quad x(y-1) = y + 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y+3}{y-1}.$$

Замінивши x на y та y на x, маємо:

$$y = \frac{x+3}{x-1}.$$

Отже, функція $y = \frac{x+3}{x-1}$ є оберненою до себе.

✧✧✧

8. Дослідити періодичність таких функцій та, якщо функція періодична, знайти її найменший період:

$$1)\ f(x) = \sin 2x; \qquad 2)\ f(x) = tg\ \frac{x}{3};$$

$$3)\ f(x) = x^2 + 1.$$

Розв'язання.

1) $f(x) = \sin 2x$.

Базова функція $y = \sin x$ є періодичною та має найменший період $T = 2\pi$. Якщо аргумент $2x$, то новий період: $T' = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Отже, функція періодична з найменшим періодом $T' = \pi$.

2) $f(x) = tg\ \frac{x}{3}$.

Базова функція $y = tg\ x$ є періодичною та має найменший період $T = \pi$. Якщо аргумент $\frac{x}{3}$, то новий період: $T' = \frac{\pi}{1/3} = 3\pi$.

Отже, функція періодична з найменшим періодом $T' = 3\pi$.

3) $f(x) = x^2 + 1$

Функція $x^2 + 1$ є квадратичною, а отже, необмежено зростаючою, тому вона не є періодичною.

✧ ✧ ✧

9. Записати три перші члени послідовності $x_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

Розв'язання.

Підставляємо у формулу загального члена послідовності замість n послідовно значення 1, 2, 3. Маємо:

$$x_1 = \frac{2 \cdot 1 - 1}{2^1} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$x_2 = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2^2} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4};$$

$$x_3 = \frac{2 \cdot 3 - 1}{2^3} = \frac{6-1}{8} = \frac{5}{8}.$$

✧ ✧ ✧

10. За заданими трьома першими членами послідовності $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{3}{5\sqrt{2}}, x_3 = \frac{5}{5^2\sqrt{3}}$ знайти формулу n-го члена.

Розв'язання.

Задача розв'язується методом добору з такою перевіркою:

$$x_n = \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{5^{n-1}\sqrt{n}}.$$

♢ ♢ ♢

11. Довести за означенням, що $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Розв'язання.

Зауважимо, що n-й член послідовності $x_n = \frac{1}{n}$; сама послідовність така: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Для доведення потрібно за заданим $\varepsilon > 0$ знайти номер послідовності N, такий, що при всіх номерах $n > N$ виконуватиметься нерівність $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Розв'яжемо останню нерівність відносно n:

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Виберемо $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Тоді при $n > N$ нерівність $n > \frac{1}{\varepsilon}$ виконується, а отже, виконується і нерівність $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, чим доведено, що $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Отже, для доведення за означенням певної границі послідовності досить побудувати функціональну залежність N від числа ε, тобто знайти функцію $N(\varepsilon)$. У розглянутому прикладі функція $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, і за заданим будь-яким $\varepsilon > 0$ завжди можна знайти відповідний номер N; наприклад, при $\varepsilon_1 = 0{,}001$, $N_1 = \left[\frac{1}{0{,}001}\right] = 1000$, при $n > N_1 = 1000$ нерівність $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon_1 = 0{,}001$ виконується.

♢ ♢ ♢

12. Використовуючи означення границі послідовності, довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Розв'язання.

Згідно з означенням границі послідовності для довільного $\varepsilon > 0$ треба знайти такий номер елемента послідовності N, що для всіх $n > N$ виконувалася б нерівність $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$.

Нехай вибрано $\varepsilon > 0$, за цим ε розглянемо $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, тоді $N > \frac{1}{\varepsilon}$ і для будь-якого $n > N$ маємо: $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$.

Проілюструємо одержаний результат табличкою:

ε	0,5	0,1	0,01	0,001	0,0001	…
N	3	11	101	1001	10001	…

Тоді при $\varepsilon = 0{,}5$, починаючи з $N = 3$, відповідні n можна брати з послідовності $4,\ 5,\ \ldots$ Для них $\frac{1}{n} < \frac{1}{3}$. Якщо $\varepsilon = 0{,}001$, а $N = 1001$, то тепер n можна брати з послідовності $1002,\ 1003,\ \ldots$ і знову нерівність $\frac{1}{n} < \frac{1}{1001}$ виконується. Отже, для будь-якого навіть нескінченно малого значення ε можна знайти N, що для всіх $n > N$ нерівність $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$ виконується. Це й означає, $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

✧ ✧ ✧

13. Використовуючи теорему про граничний перехід при арифметичних операціях, обчислити $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

На практиці такі докладні записи граничного переходу виконують рідко; здебільшого граничний перехід в арифметичних операціях виконується усно. Якщо умови теореми порушуються, то вираз під знаком границі спочатку перетворюють так, щоб арифметичні дії виконувалися зі збіжними послідовностями, а потім виконують граничний перехід.

✧ ✧ ✧

14. Знайти:

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2n-1}$;

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+7}{n^5+3n^2+2}$;

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n+3}{n^2+3n+1}$;

4) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3}{2n^2+2}-\frac{5n^2-1}{5n+1}\right)$;

5) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{5n^3+1}$.

Розв'язання.

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2n-1}$.

Маємо невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Поділимо чисельник і знаменник на n у найвищому степені (у цьому прикладі на n^2):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{3n^2}{n^2}+\frac{5n}{n^2}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{3+0+0}{1+0-0}=3;$$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+7}{n^5+3n^2+2}$.

Маємо невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Поділимо чисельник і знаменник на n у найвищому степені (у цьому прикладі на n^5):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+7}{n^5+3n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5\left(\frac{n^4}{n^5}+\frac{7}{n^5}\right)}{n^5\left(\frac{n^5}{n^5}+\frac{3n^2}{n^5}+\frac{2}{n^5}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{7}{n^5}}{1+\frac{3}{n^3}+\frac{2}{n^5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{0+0}{1+0+0}=0;$$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n+3}{n^2+3n+1}$.

Маємо невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Поділимо чисельник і знаменник на n у найвищому степені (у цьому прикладі на n^4):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n+3}{n^2+3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4\left(\frac{n^4}{n^4}+\frac{2n}{n^4}+\frac{3}{n^4}\right)}{n^4\left(\frac{n^2}{n^4}+\frac{3n}{n^4}+\frac{1}{n^4}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^3}+\frac{3}{n^4}}{\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}}=\frac{1+0+0}{0+0+0}=\infty.$$

4) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3}{2n^2+2}-\frac{5n^2-1}{5n+1}\right)$.

Спростимо загальний член послідовності:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3}{2n^2+2}-\frac{5n^2-1}{5n+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3(5n+1)-(5n^2-1)(2n^2+2)}{(2n^2+2)(5n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^4+2n^3-10n^4-10n^2+2n^2+2}{10n^3+2n^2+10n+2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-8n^2+2}{10n^3+2n^2+10n+2}.$$

Маємо невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Поділимо чисельник і знаменник на n у найвищому степені (у цьому прикладі на n^3):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-8n^2+2}{10n^3+2n^2+10n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{2n^3}{n^3}-\frac{8n^2}{n^3}+\frac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{10n^3}{n^3}+\frac{2n^2}{n^3}+\frac{10n}{n^3}+\frac{2}{n^3}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{8}{n}+\frac{2}{n^3}}{10+\frac{2}{n}+\frac{10}{n^2}+\frac{2}{n^3}}=\frac{2-0+0}{10+0+0+0}=0{,}2.$$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{5n^3+1}$.

Спростимо загальний член послідовності, у чисельнику якого є сума членів арифметичної прогресії. Знайдемо спочатку цю суму, де $a_1=1, d=1$:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1+n}{2}\cdot n=\frac{n^2+n}{2}.$$

Підставляємо в загальний член та обчислюємо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+n}{2}}{5n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{10n^3+2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(10+\frac{2}{n^3}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{10+\frac{2}{n^3}}=$$

$$=\frac{0+0}{10+0}=0.$$

✧✧✧

15. Знайти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9^n+1}{9^{n+2}+9^n+3}$.

Розв'язання.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$.

Зауважимо, що $3^n \le 2^n + 3^n \le 3^n + 3^n = 2 \cdot 3^n$, тоді

$\sqrt[n]{3^n} \le \sqrt[n]{2^n + 3^n} \le \sqrt[n]{2 \cdot 3^n}$, тобто $3 \le \sqrt[n]{2^n + 3^n} \le 3 \cdot \sqrt[n]{2}$. Перейдемо в останньому виразі до границі при $n \to \infty$. Отримаємо, що

$$\lim_{n\to\infty} 3 \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} \le \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \sqrt[n]{2}, \text{ тобто } 3 \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} \le 3.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{9^n+1}{9^{n+2}+9^n+3}$.

Маємо невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Поділимо чисельник і знаменник на 9^n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9^n+1}{9^{n+2}+9^n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{9^n\left(\frac{9^n}{9^n}+\frac{1}{9^n}\right)}{9^n\left(\frac{9^{n+2}}{9^n}+\frac{9^n}{9^n}+\frac{3}{9^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{9^n}}{81+1+\frac{3}{9^n}} = \frac{1}{82}.$$

✧ ✧ ✧

16. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt{n^2 - n - 1})$.

Розв'язання.

У такому випадку кажуть, що маємо справу з невизначеністю $\{\infty - \infty\}$. Розбіжність кожної з послідовносткй не є гарантією розбіжності цієї послідовності. Помножимо і поділимо на вираз, спряжений до заданого, маємо:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt{n^2 - n - 1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2-n-1})(\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2-n-1})}{(\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2-n-1})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+n-1)-(n^2-n-1)}{(\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2-n-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{(\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2-n-1})} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

✧ ✧ ✧

17. Обчислити границі:

1) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$; 2) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+4}\right)^{2n+3}$.

Розв'язання.

1) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$.

У такому випадку кажуть, що маємо справу з невизначеністю $\{1^{\infty}\}$. Для обчислення цієї границі використаємо важливу границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$. Для цього перетворимо трохи загальний член послідовності:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{3}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{3}=$$

$$=\left\{3\text{ важливої границі }\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}=e\right\}=e^{3}.$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+4}\right)^{2n+3}$.

У такому випадку кажуть, що маємо справу з невизначеністю $\{1^{\infty}\}$. Для обчислення цієї границі використаємо важливу границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$. Для цього перетворимо трохи загальний член послідовності:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+4}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4-5}{n+4}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+4}+\frac{-5}{n+4}\right)^{2n+3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+4}{-5}}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+4}{-5}}\right)^{\frac{n+4}{-5}}\right]^{(2n+3)\cdot\frac{-5}{n+4}}=$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+4}{-5}}\right)^{\frac{n+4}{-5}}\right]^{\frac{-10n-15}{n+4}}=\left\{\text{важлива границя }\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+4}{-5}}\right)^{\frac{n+4}{-5}}=e\right\}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-10n-15}{n+4}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\left(-10-\frac{15}{n}\right)}{n\left(1+\frac{4}{n}\right)}}=e^{-10}=\frac{1}{e^{10}}.$$

✧✧✧

18. Використовуючи означення границі функції, довести, що

$$\lim_{x\to 1}(3x-2)=1.$$

Розв'язання.

Згідно з означенням границі функції для будь-якого $\varepsilon > 0$ треба знайти таке $\delta > 0$, що для тих x, для яких виконується нерівність $|x-1| < \delta$, виконується й нерівність $|3x-2-1| < \varepsilon$.

Нехай вибрано деяке $\varepsilon > 0$, за ним знайдемо $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$. Тоді $|x-1| < \delta < \frac{\varepsilon}{3}$. Повернемося до нерівності: $|3x-3| = 3|x-1| < 3\delta < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Тобто доведено, що $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2) = 1$.

✧ ✧ ✧

19. Знайти:

1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x+3}{x+7}$; 2) $\lim_{x\to 2} 4^{\frac{2x}{x+6}}$; 3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x+\sin x}{1+tg^2 x}$.

Розв'язання.

Для знаходження границі функції треба у вираз функції підставити число, до якого прямує x. Якщо в результаті підстановки одержується число, то воно дорівнює границі функції.

1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x+3}{x+7} = \frac{2^3-2\cdot 2+3}{2+7} = \frac{8-4+3}{9} = \frac{7}{9}$;

2) $\lim_{x\to 2} 4^{\frac{2x}{x+6}} = 4^{\frac{2\cdot 2}{2+6}} = 4^{\frac{4}{8}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$;

3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x+\sin x}{1+tg^2 x} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}}{1+tg^2\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

✧ ✧ ✧

20. Знайти:

1) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$; 2) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$;

3) $\lim_{x\to 10} \frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$.

Розв'язання.

Для знаходження границі функції треба у вираз функції підставити число, до якого прямує x.

1) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{3^2-9}{3^2-3\cdot 3} = \frac{9-9}{9-9} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Тут чисельник і знаменник дробу прямують до нуля при $x \to 3$. Тобто у результаті підстановки отримали так звану невизначеність вигляду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу, одним із яких буде вираз $(x-3)$:

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x} \text{ при } x \neq 3.$$

Тоді $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x} = \frac{3+3}{3} = \frac{6}{3} = 2.$

Звідси $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = 2.$

2) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1} = \frac{1^3-1^2-1+1}{1^3+1^2-1-1} = \frac{1-1-1+1}{1+1-1-1} = \left\{\frac{0}{0}\right\}.$

Тут чисельник та знаменник дробу прямують до нуля при $x \to 1$. Тобто у результаті підстановки отримали так звану невизначеність вигляду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу, одним із яких буде вираз $(x-1)$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2-1)} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x+1)} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0;$$

Звідси $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1} = 0.$

3) $\lim_{x\to 10} \frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x} = \frac{10^3-1000}{10^3-20\cdot 10^2+100\cdot 10} = \frac{1000-1000}{1000-2000+1000} = \left\{\frac{0}{0}\right\}.$

Тут чисельник і знаменник дробу прямують до нуля при $x \to 10$. Тобто у результаті підстановки отримали так звану невизначеність вигляду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Розкладемо на множники чисельник і знаменник дробу, одним із яких буде вираз $(x-10)$:

$$\lim_{x\to 10} \frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x} = \lim_{x\to 10} \frac{x^3-10^3}{x(x^2-20x+100)} = \lim_{x\to 10} \frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x-10)^2} =$$

$$\lim_{x\to 10} \frac{(x^2+10x+100)}{x(x-10)}.$$

При $x \to 10$ чисельник дробу прямує до 300, а знаменник – до нуля, тобто є н.м.в. Таким чином, заданий дріб – н.в.в. (нескінченно велика величина):

Тобто, $\lim_{x\to 10} \frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x} = \infty$.

✧✧✧

21. Знайти:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$; 2) $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; 3) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Розв'язання.

Для розв'язування у цьому випадку рекомендується звільнитись від тих ірраціональних множників у чисельнику і знаменнику дробового виразу, які перетворюються на нуль при виконанні граничного переходу. Для звільнення від радикалів використовують формули скороченого множення, заміну змінної та інші штучні прийоми.

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{\sqrt{0+4}-2}{0} = \frac{2-2}{0} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Домножимо чисельник і знаменник дробу на суму $\sqrt{x+4}+2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+4})^2-2^2}{x(\sqrt{x+4}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{\sqrt{0+4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4};$$

2) $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{\sqrt{5-1}-2}{5-5} = \frac{2-2}{0} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Домножимо чисельник та знаменник дробу на суму $\sqrt{x-1}+2$:

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x\to 5} \frac{(\sqrt{x-1})^2-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{\sqrt{5-1}+2} = \frac{1}{4}.$$

3) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt[3]{1}-1}{\sqrt{1}-1} = \frac{1-1}{1-1} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$.

При виконанні граничного переходу перетворюються на нуль ірраціональні множники і у чисельнику, і у знаменнику. Тому домножимо чисельник та знаменник дробу на вираз $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right)$:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1^3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{\sqrt{1}+1}{\left(\sqrt[3]{1}\right)^2+\sqrt[3]{1}+1}=\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}.$$

✧ ✧ ✧

22. Знайти:

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$; 2) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x^2+2x+1}}$;

3) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$.

Розв'язання.

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$

При граничному переході буде невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. У цьому випадку і чисельник, і знаменник рекомендується поділити на найбільший степінь змінної, що входить як до знаменника, так і до чисельника.

Поділимо чисельник та знаменник на старший степінь x, тобто на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{{x^3}/{x^3}+{2x^2}/{x^3}+{3x}/{x^3}+{4}/{x^3}}{{4x^3}/{x^3}+{3x^2}/{x^3}+{2x}/{x^3}+{1}/{x^3}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+{2}/{x}+{3}/{x^2}+{4}/{x^3}}{4+{3}/{x}+{2}/{x^2}+{1}/{x^3}}= \quad =\frac{1+0+0+0}{4+0+0+0}=\frac{1}{4}.$$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x^2+2x+1}}$

При граничному переході буде невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Поділимо чисельник та знаменник на x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x^2+2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{{}^{3x^4}/_{x^4}-{}^{2}/_{x^4}}{\sqrt{{}^{x^8}/_{x^8}+{}^{3x^2}/_{x^8}+{}^{2x}/_{x^8}+{}^{1}/_{x^8}}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{{}^{3-2}/_{x^4}}{\sqrt{{}^{1+3}/_{x^6}+{}^{2}/_{x^7}+{}^{1}/_{x^8}}}==\frac{3-0}{\sqrt{1+0+0+0}}=\frac{3}{1}=3.$$

3) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$.

При граничному переході буде невизначеність $\{\infty-\infty\}$. Цей тип невизначеності зводиться до невизначеностей $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ або $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, наприклад, зведенням виразу до спільного знаменника, множенням на спряжений вираз.

Помножимо та поділимо заданий вираз на $\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}\right)}{\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}\right)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+8x+3}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+4x+3}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8x+3-x^2-4x-3}{\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}\right)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}\right)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{{}^{4x}/_{x}}{\left(\sqrt{{}^{x^2}/_{x^2}+{}^{8x}/_{x^2}+{}^{3}/_{x^2}}+\sqrt{{}^{x^2}/_{x^2}+{}^{4x}/_{x^2}+{}^{3}/_{x^2}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\left(\sqrt{1+{}^{8}/_{x}+{}^{3}/_{x^2}}+\sqrt{1+{}^{4}/_{x}+{}^{3}/_{x^2}}\right)}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0+0}}=\frac{4}{1+1}=\frac{4}{2}=2.$$

4) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$.

При граничному переході буде невизначеність $\{\infty-\infty\}$. Зведемо вираз до спільного знаменника:

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{(x-2)(x+2)}\right)=\lim_{x\to2}\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

✧✧✧

23. Знайти:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x};\qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2};\qquad 3)\ \lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}.$$

Розв'язання.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$$

Підставимо 0 в вираз під знаком границі:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\frac{\sin 0}{0}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Отже, маємо особливість типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Дріб під знаком границі містить тригонометричну функцію і схожий на першу важливу границю, але це не вона.

Для зведення під формулу першої границі необхідно в штучний спосіб у знаменнику отримати такий самий вираз, який міститься під синусом.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}.$$

Вираз $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}$ відповідає вимогам першої важливої границі, тому:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=4\cdot 1=4.$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\frac{1-\cos 0}{0^2}=\frac{1-1}{0}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Цю невизначеність розкриваємо шляхом виділення першої важливої границі, при цьому перетворимо трохи вираз під границею.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{25}{4}\cdot 2\sin^2\frac{5x}{2}}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2}=\frac{25}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\right)^2=\frac{25}{2}\cdot 1=\frac{25}{2}=\ =12{,}5.$$

$$3)\ \lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=(1-1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\{0\cdot\infty\}.$$

Маємо невизначеність $\{0\cdot\infty\}$. Перетворимо вираз в дріб з невизначенністю $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, щоб використати першу важливу границю. Для цього введемо змінну $t=1-x$, тоді при $x\to 1$, отримаємо $t\to 0$. Перепишемо тангенс через цей параметр:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\operatorname{tg}\frac{\pi(1-t)}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}t\ .$$

Тоді:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{t\to 0}\left(t\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Тут використали наслідок з першої важливої границі, а саме: $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=1$.



24. Знайти:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$.

При граничному переході буде невизначеність $\{1^{\infty}\}$. Обчислимо, скориставшись другою важливою границею. Для цього перетворимо вираз під границею:

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-(2x-3)}=\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)^{3-2x}=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{3-2x}{x}}.$$

Тоді:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\frac{3-2x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{\frac{3-2x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x}{x}}.$$

Враховуючи, що $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$, маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3/x-2}{1}}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}.$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}$.

При граничному переході буде невизначеність $\{1^{\infty}\}$. Перетворимо вираз під границею та обчислюємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-5}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x+2}{5}}\right)^{2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x+2}{5}}\right)^{-\frac{x+2}{5}\cdot\frac{-5(2x+1)}{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x+2}{5}}\right)^{-\frac{x+2}{5}}\right]^{\frac{-5(2x+1)}{x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x+2}{5}}\right)^{-\frac{x+2}{5}}\right]^{\lim_{x\to\infty}\frac{-5(2x+1)}{x+2}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-5(2x+1)}{x+2}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-10x-5}{x+2}}=$$

$$e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-10-5/x}{1+2/x}}=\ e^{-10}=\frac{1}{e^{10}}.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}$.

При граничному переході буде невизначеність $\{1^{\infty}\}$. Перетворимо вираз під границею та обчислюємо:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=\ e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}}=$$

$$=\ e^{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}=\ e^{\frac{1}{2}\cdot 1}=\sqrt{e}.$$

✧✧✧

25. Дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву і встановити їх тип.

1) $f(x)=\frac{x^2-25}{x-5}$; 2) $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$;

$$3)\ f(x)=\begin{cases}\cos x,\ x\le 0,\\ x+1,\ 0<x\le 2,\\ \frac{1}{x-2},\ x>2.\end{cases}$$

Розв'язання.

1. Область визначення даної функції $D(f)=R\setminus\{5\}$. Оскільки $f(x)$ є елементарною функцією, то вона неперервна для всіх $x\in R$, крім $x=5$, яка є точкою розриву функції. Знаходимо односторонні границі в точці $x=5$:

$$\lim_{x\to 5+0}\frac{x^2-25}{x-5}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 5+0}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim_{x\to 5+0}(x+5)=10,$$

$$\lim_{x\to 5-0}\frac{x^2-25}{x-5}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 5-0}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim_{x\to 5-0}(x+5)=10,$$

$f(x)$ у точці $x=5$ невизначена, тому при $x=5$ функція має усувний розрив. Його можна усунути, якщо домовитися, що при $x=\ 5\ \ y=10$. Отже, Отже, $x=\ 5$ є точкою розриву першого роду усувного.

2. Область визначення даної функції $D(f)=R\setminus\{1\}$. Оскільки $f(x)$ є елементарною функцією, то вона неперервна для всіх $x\in R$, крім $x=1$, яка є точкою розриву функції. Знаходимо односторонні границі в точці $x=1$:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}=0,\qquad \lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}=1,$$

Отже, односторонні границі існують, але не рівні між собою, тому $x=1$ є точкою розриву першого роду неусувного.

$\lim_{x\to 1+0}f(x)-\lim_{x\to 1}f(x)=\ 0-1=-1$ стрибок функції в точці $x=1$.

3. Ця функція не є елементарною, але кожна з елементарних функцій $\cos x$, $x+1$, $\frac{1}{x-2}-$ неперервна в кожній внутрішній точці області свого визначення, тобто на інтервалах $(-\infty;0),(0;2),(2;\ +\infty)$ відповідно. Тому $f(x)$ може мати розрив лише у тих точках, де змінюється її аналітичний вираз, тобто при $x\ =\ 0$ і $x\ =\ 2$.

Дослідимо $f(x)$ на неперервність у цих точках. Для цього обчислимо односторонні границі і значення функції $f(x)$ у точках $x\ =\ 0$ і $x\ =\ 2$.

$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0-0}\cos x=1,\qquad \lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x+1)=1,$$

$$f(0)=\cos 0=1.$$

Оскільки $\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} f(x) = f(0) = 1$, то $f(x)$ неперервна в точці $x = 0$.

$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}(x+1) = 3, \qquad \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty.$

Отже, в точці $x = 2$ функція $f(x)$ має розрив другого роду, бо одна з односторонніх границь дорівнює $+\infty$.

5.6. Контрольні запитання

1. Що таке функція однієї змінної?
2. Які способи задання функцій ви знаєте?
3. Що називають графіком функції?
4. Що таке область визначення та область значень функції?
5. Як класифікують функції за різними властивостями?
6. Назвіть основні елементарні функції.
7. Що таке парна і непарна функція? Як їх визначити?
8. Що таке монотонність функції?
9. Як визначити зростання та спадання функції?
10. Що таке обмеженість функції?
11. Які функції називаються періодичними? Наведіть приклади.
12. Яку функцію називають оберненою до заданої?
13. Що таке числова послідовність? Як її задають?
14. Які основні типи послідовностей ви знаєте?
15. Що означає зростаюча та спадна послідовність?
16. Що таке обмежена послідовність?
17. Що таке границя послідовності?
18. Як формально визначається границя послідовності за Коші?
19. Які основні властивості границі послідовності?
20. Що означає збіжність послідовності?
21. Сформуйте теорему про арифметичні операції над збіжними послідовностями.

22. Які методи використовують для знаходження границі послідовності?

23. Що таке розбіжна послідовність? Наведіть приклади.

24. Яка роль границі в аналізі нескінченних послідовностей?

25. Що таке еквівалентні нескінченно малі послідовності?

26. Що таке границя функції в точці?

27. Які основні властивості границі функції?

28. Геометричний зміст границі функції в точці.

29. Що таке односторонні границі функції?

30. Які існують методи знаходження границь?

31. Що таке невизначеність типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, і $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$? Як їх розв'язують?

32. Які ще типи невизначеностей існують? Як їх обчислювати?

33. Які основні теореми про границі функцій?

34. Що таке еквівалентні нескінченно малі функції?

35. Перша особлива границя та її наслідки.

36. Друга особлива границя та її наслідки.

37. Порівняння нескінченно малих функцій.

38. Що називають асимптотою графіка функції?

39. Як знайти похилі асимптоти кривої?

40. Що таке неперервність функції в точці?

41. Яка функція називається розривною?

42. Які існують типи точок розриву?

43. Що таке точка розриву першого роду усувного?

44. Що таке точка розриву першого роду неусувного?

45. Що таке точка розриву другого роду?

46. Які наслідки з теореми Вейєрштрасса про неперервні функції?

47. Що стверджує теорема про проміжне значення?

5.7. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти функціональну залежність об’єму V куба від довжини його ребра a, якщо площа його повної поверхні $S = 24$ кв. од.

2. Знайти функціональну залежність швидкості v тіла від часу t, якщо воно рівноприскорено рухається з прискоренням $a = 2\ \text{м/с}^2$ та початковою швидкістю $v_0 = 3\ \text{м/с}$.

3. Визначити залежність сили тяжіння F від маси тіла m, якщо прискорення вільного падіння $g = 9{,}8\ \text{м/с}^2$.

4. Знайти функціональну залежність потужності P від сили струму I, якщо електрична потужність визначається за законом Джоуля-Ленца при напрузі $U = 12$ В.

5. Задано функцію $f(x) = x^2 + 6x - 4$. Перевірити, що:

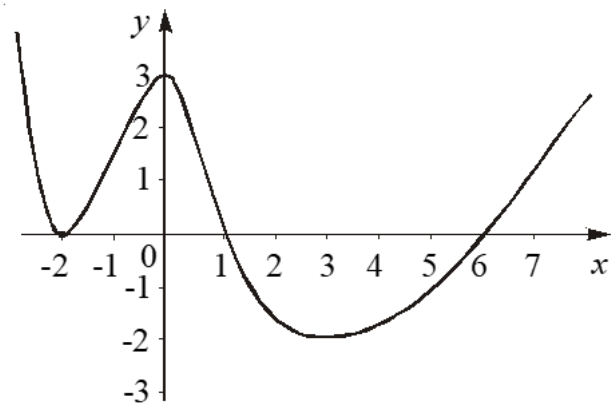
1) $f(1) = 3$, 2) $f(3) = 24$.

6. $f(x) = x^2 + 1$. Обчислити значення:

1) $f(4)$; 2) $f(\sqrt{2})$; 3) $f(a+1)$; 4) $f(a) + 1$;

5) $f(a^2)$; 6) $\big(f(a)\big)^2$; 7) $f(2a)$.

7. Функцію задано графіком, зображеним на рисунку:



Визначити:

а) при яких значеннях x функція дорівнює нулю;

б) при яких значеннях x функція додатна;

в) при яких значеннях x функція від'ємна;

г) кількість значень x, при яких $f(x)=1, f(x)=-4, f(x)=-1$.

8. Утворити складну функцію $y(x)$, якщо $y=z^2, \quad z=x+1$.

9. Утворіть складну функцію $u(x)$, якщо $y=\sin x, z=\ln y, u=\sqrt{1-z^2}$.

10. Записати у явному вигляді функцію $y(x)$, неявно задану рівняннями:

1) $x^2+y^2=1$;
2) $2^{xy}=5$;
3) $xy=a$;
4) $ln\, x+ln(y+1)=4$;
5) $2^{x+y}(x^2-2)=x^3+7$;
6) $(1+x)\, cos\, y-x^2=0$.

11. Знайти область визначення функцій:

1) $y=\sqrt{5-2x}$;
2) $y=\frac{1}{x^2-1}$;
3) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$;
4) $y=arcsin\frac{x}{4}$;
5) $y=arccos(1-2x)$;
6) $y=\sqrt{1-|x|}$;
7) $y=\lg(3x-1)+2\lg(x+1)$;
8) $y=4/\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)$;
9) $y=\log_x 2$;
10) $y=(x^2+x+1)^{-\frac{3}{2}}$.

12. Визначити інтервали знакосталості та нулі функцій:

1) $y=x^2-5x+6$;
2) $y=2^{x-1}$;
3) $y=|x-1|-2$.

13. Дослідити на парність функції

1) $y=x^8-4x^4+7$;
2) $y=x^7-tg\, x$;
3) $y=x^3+x^2+\sin x$;
4) $y=\cos x+x^2$;
5) $y=xe^x-xe^{-x}$;
6) $y=\frac{x^2+x+1}{x+2}$.

14. Дослідити на монотонність функцію:

1) $y=x^3-3x+1$;
2) $y=\frac{1}{x}+x$;
3) $y=e^x-x^2$;
4) $y=\ln(x^2+1)$;
5) $y=\cos x+x$;
6) $y=x^4-4x^2+2$.

15. Знайти обернену функцію до функцій:

1) $y = 3x + 5$; 2) $y = \frac{x-2}{x+3}$;

3) $y = e^x + 4$; 4) $y = \sqrt{x+1}$.

16. Дослідити періодичність наступних функцій та, якщо функція періодична, знайти її найменший період:

1) $y = \sin(2x) + \cos(3x)$; 2) $y = e^x + \sin x$;

3) $y = tg\ \frac{x}{2}$; 4) $y = \cos(5x) + \cos(7x)$.

17. Записати п’ять перших членів послідовності:

1) $x_n = \frac{n^2}{3^n}$; 2) $x_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{2^n}$;

3) $x_n = \frac{n!}{5^n}$; 4) $x_n = \frac{n+(-1)^n}{3^n}$;

5) $x_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; 6) $x_n = \frac{(2n-1)!}{3^n}$.

18. За заданими чотирма першими членами послідовності знайти формулу n-го члена.

1) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{5}, x_3 = \frac{6}{9}, x_4 = \frac{24}{17}, \ldots$

2) $x_1 = -1, x_2 = \frac{4}{2}, x_3 = -\frac{9}{6}, x_4 = \frac{16}{24}, \ldots$

3) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{4}, x_3 = \frac{6}{8}, x_4 = \frac{24}{16}, \ldots$

4) $x_1 = \frac{3}{1}, x_2 = -\frac{9}{4}, x_3 = \frac{27}{9}, x_4 = -\frac{81}{16}, \ldots$

19. Довести, використовуючи означення границі, що:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n^3+1} = 0$.

20. Знайти границі послідовностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{2n^6+3n^5-2n}-5n+1}{4n^2+2\sqrt{n}}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{5n^3+1}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{2n+3}-\frac{2+3n^2}{2n^2-7}\right)$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n+1}-\frac{1+4n^2}{8n+1}\right)$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$;

15 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$;

18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

20) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$;

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{4n+7}\right)^5$;

22) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+n}\right)^n$;

23) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}$;

24) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right)$;

25) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-1}{3n^2+2n}\right)^{4n^2}$;

26) $\lim\limits_{n\to\infty}[n\{ln(n+1)-ln\,n\}]$.

21. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$;

2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{1-x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;

5) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;

6) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$;

8) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^2}\right)$;

9) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right)$;

10) $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$;

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}$;

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$;

15 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$;

19) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

20) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

21) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$;

22) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$;

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$;

24) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$;

25) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$;

26) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$;

27) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$;

28) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$;

29) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\mathrm{tg}x}$;

30) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$;

31) $\lim\limits_{x\to 0}x\mathrm{ctg}x$;

32) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}$;

33) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$;

34) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$;

35) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$;

36) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$;

37) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$;

38) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$;

39) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$;

40) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$;

41) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$;

42) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$;

43) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$;

44) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$;

45) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$;

46) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$;

47) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$;

48) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$;

49) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x$;

50) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$;

51) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$;

52) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$;

53) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}x}$;

54) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}\ x)^{\mathrm{tg}\ 2x}$;

55) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$;

56) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$;

57) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$;

58) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x-1}{3x^2+x-1}\right)^{\frac{2x^2-1}{x^2+1}}$;

59) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$;

60) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

22. Обчислити односторонні границі:

1) $\lim\limits_{x\to 3+0}\frac{2}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to 3-0}\frac{2}{x-3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{|x-1|}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{|x-1|}{x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\frac{7x-1}{7x+5}\right)^{\frac{1}{x-1}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{2x}{1-x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to\pm 0}\left(\frac{3x^2+1}{x^2+4}\right)^{\frac{1-x}{x}}$;

6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-1}{4x+2}\right)^{x-3}$.

23. Знайти точки розриву функції $y=\frac{1}{(x-1)(x-5)}$.

24. Який характер розриву функції $y=\frac{1}{1-e^{1-x}}$ в точці $x=1$?

25. Знайти точки розриву функції

1) $y=(tgxarctg(1/(x-3))/(x(x-5))$;

2) $y=(x^3-6x^2+11x-6)/(x^2-3x+2)$;

3) $y=1/(x^2+x+1)$.

26. Дослідити на неперервність функцію $y=\frac{1}{(x-1)(x-6)}$ на сегменті:

1) [2, 5]; 2) [4, 10]; 3) [0, 7].

27. Дослідити на неперервність функцію $y=1/(x^4-26x^2+25)$ на сегменті:

1) [6, 10]; 2) [– 2, 2]; 3) [– 6, 6].

28. Дослідити на неперервність функції, схематично побудувати їх графіки:

1) $f(x)=\frac{|x-3|}{x-3}$;
2) $f(x)=lg(x^2+3x)$;
3) $f(x)=\frac{x^2-x^3}{|x-1|}$;
4) $f(x)=\frac{1}{x^3-3x^2-4x}$;
5) $f(x)=ln(2x+1)$;
6) $f(x)=x+\frac{x+2}{|x+2|}$;
7) $f(x)=\frac{4}{x^2-2x+1}$;
8) $f(x)=\frac{2|x-1|}{x^2-x^3}$.

29. Дослідити на неперервність, визначити характер точок розриву, побудувати графіки функцій:

1) $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2, & \text{якщо } x\le 2;\\ x, & \text{якщо } x>2.\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & \text{якщо } 0\le x\le 1;\\ 4-2x, & \text{якщо } 1<x<2{,}5;\\ 2x-7, & \text{якщо } 2{,}5\le x<\infty.\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}2x+5, & \text{якщо } x\le -1;\\ \frac{1}{x}, & \text{якщо } x>-1.\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & \text{якщо } x>1,\\ x+1, & \text{якщо } x<1,\\ 3, & \text{якщо } x=1.\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{якщо } 0\le x\le 1;\\ 2-x, & \text{якщо } 1<x\le 2.\end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & \text{якщо } x<0;\\ (x-1)^2, & \text{якщо } 0\le x\le 2;\\ 4-x, & \text{якщо } x>2\ .\end{cases}$

Розділ

6

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

6.1. Поняття похідної, її геометричний та механічний зміст

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку (a; b). Візьмемо значення $x \in$ (a; b) і надамо аргументу приросту Δx. Тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Розглянемо відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (6.1.1)$$

Якщо границя (6.1.1) існує і скінченна, вона називається похідною функції $y = f(x)$ за змінною x і позначається: y', y'_x, $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Похідною функції $y = f(x)$ за аргументом x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Операція знаходження похідної називається ***диференціюванням*** цієї функції.

Функція $y = f(x)$ називається ***диференційовною в точці*** x_0, якщо в цій точці вона має похідну.

Функція $y = f(x)$ називається ***диференційовною на проміжку***, якщо вона диференційовна в кожній точці цього проміжку.

Геометричний зміст похідної

Дотичною до кривої L у точці M називається граничне положення MN січної MM_1 при прямуванні точки M_1 по кривій L до точки M (рис. 6.1).

Нехай крива, задана рівнянням $y = f(x)$, має дотичну в точці $M(x, y)$. Позначимо (рис. 6.1) кутовий коефіцієнт дотичної MN: $k = tg\,\varphi$. Надамо в точці x приросту Δx, тоді ордината у набуде приросту Δy.

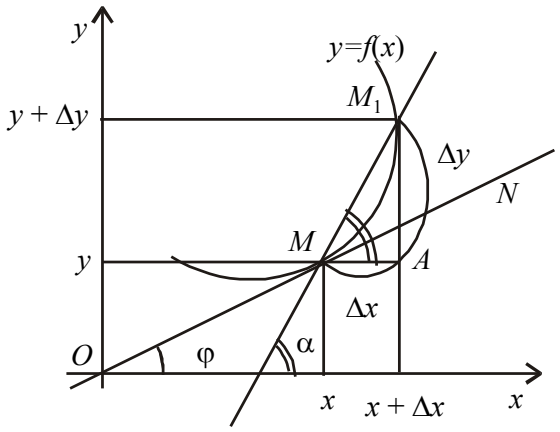


Рис. 6.1. Геометричний зміст похідної

З ΔMAM_1 випливає, що $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha$. Коли $\Delta x \to 0$, то $M_1 \to M$, $\alpha \to \varphi$ і січна прямує до положення дотичної MN.

Таким чином, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\,\alpha = tg\,\varphi = k$.

Оскільки $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, то $f'(x) = k$, тобто похідна $f'(x)$ чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції у точці з абсцисою x. У цьому полягає геометричний зміст похідної.

Нехай функція $y = f(x)$ означена і неперервна на деякому проміжку $[a;\ b]$. Визначимо рівняння дотичної й нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 \in [a; b]$.

Оскільки дотична й нормаль проходять через точку з абсцисою x_0, то рівняння кожної з них будемо шукати у вигляді рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0;\ y_0)$ у такому напрямі:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{6.1.2}$$

де k кутовий коефіцієнт дотичної. Використовуючи геометричний зміст похідної, маємо $k = f'(x_0)$.

Рівняння дотичної. Оскільки $y_0 = f(x_0)$, то з виразу (6.1.2) дістанемо рівняння дотичної у вигляді

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{6.1.3}$$

Рівняння нормалі. ***Нормаллю до графіка функції*** в точці M_0 називається перпендикуляр, проведений до дотичної в цій точці.

Використовуючи умову перпендикулярності дотичної та нормалі, знаходимо кутовий коефіцієнт нормалі $k = -\frac{1}{f'(x_0)}$ і записуємо її рівняння у вигляді

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{6.1.4}$$

Механічний зміст похідної

Припустимо, що точка M рухається прямолінійно нерівномірно по деякій прямій лінії, яку візьмемо за вісь Ox (рис. 6.1.2).

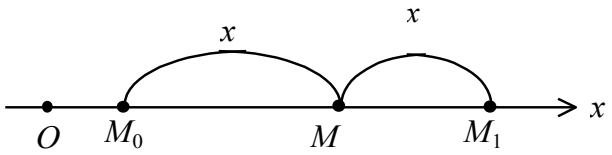


Рис. 6.1.2. Механічний зміст похідної

Рух точки відбувається за законом $x = f(t)$, де x – шлях; t – час. Знайдемо швидкість точки M у даний момент часу t (миттєва швидкість).

Нехай точка M у момент t перебувала на відстані x від початкової точки M_0, а в момент часу $t + \Delta t$ точка опинилася на відстані $x + \Delta x$ від початкової

точки й зайняла положення M_1. Отже, час t набув приросту Δt, а шлях x – приросту $\Delta x = f(\Delta t + t) - f(t)$. Середня швидкість руху точки M за час Δt описується формулою $V_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Якщо точка M рухається рівномірно, то V_{cp} є величина стала, і її беруть за швидкість точки. Для нерівномірного руху точки очевидно, що для достатньо близьких значень Δt до нуля середня швидкість точки M буде близька до її швидкості у момент часу t. Тому за точне значення швидкості точки M у момент часу t беруть величину

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

яка є швидкістю зміни функції $x = f(t)$ у точці. У цьому полягає механічний зміст похідної.

6.2. Правила диференціювання. Таблиця похідних елементарних функцій

Похідна функції – це важливе поняття математичного аналізу. Щоб спростити обчислення похідних, використовують спеціальні правила диференціювання, таблицю похідних елементарних функцій та основні теореми.

Теорема 1. Якщо $f(x)$ – диференційовна в точці x, то вона неперервна в цій точці.

Обернене твердження неправильне: для неперервної функції може не існувати похідної.

Наслідок. Якщо функція розривна в деякій точці, то вона не має похідної в цій точці.

Теорема 2. Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо $y = c$, де $c = const$, то $y' = 0$.

Теорема 3. (арифметичні операції над диференційовними функціями). Якщо функції $U(x)$ і $V(x)$ диференційовні в точці x, то в цій точці диференційовні також функції $U(x) \pm V(x)$, $U(x) \cdot V(x)$, а за додаткової умови $V(x) \neq 0$ диференційовна і функція $\frac{U(x)}{V(x)}$, причому наявні формули:

$$(U \pm V)' = U' \pm V'$$

$$(U \cdot V)' = U'V + UV'$$

$$(CU)' = CU', \qquad C - const$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

Нехай $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, тобто $y = f(\varphi(x))$. Функція $f(u)$ називається зовнішньою, а функція $\varphi(x)$ – внутрішньою, або проміжним аргументом.

Теорема 4. Якщо $\varphi(x)$ – диференційовна в точці x, а функція $f(u)$ диференційовна в точці $u = \varphi(x)$, то складена функція $f(\varphi(x))$ диференційовна в точці x, і при цьому справедлива формула:

$$\Big(f\big(\varphi(x)\big)\Big)' = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

Отож, похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною.

Теорема 5. Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x і $f'(x) \neq 0$, то обернена до неї функція $x = f^{-1}(y)$ (якщо вона існує) також диференційовна в точці y, причому похідна її обчислюється за формулою

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Звичайно, за означенням обчислюють похідні найбільш вживаних функцій і результати цих обчислень зводять у таблицю. Похідні складніших функцій обчислюють, користуючись таблицею і правилами диференціювання.

Використовуючи означення похідної та правила диференціювання, можна вивести формули похідних основних елементарних функцій (табл. 6.2.1).

Таблиця 6.2.1

Таблиця основних похідних

№ з/п	Функція y	Похідна y'	№ з/п	Функція y	Похідна y'
1.	x	1	2.	x^n	nx^{n-1}
3.	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	4.	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5.	e^x	e^x	6.	a^x	$a^x \ln a$
7.	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	8.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
9.	$\sin x$	$\cos x$	10.	$\cos x$	$-\sin x$
11.	$tg\ x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	12.	$ctg\ x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
13.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15.	$arctg\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$	16.	$arcctg\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Похідна степенево-показникової функції

Розглянемо функцію $y = (f(x))^{\varphi(x)}$. Прологарифмуємо цю функцію:

$$\ln y = \ln(f(x))^{\varphi(x)};$$

$$\ln y = \varphi(x) \ln f(x).$$

Диференціюючи ліву і праву частини цієї формули за змінною x, отримаємо

$$(\ln y)' = (\varphi(x) \ln f(x))';$$

$$\frac{1}{y} y' = \varphi'(x) \ln f(x) + \varphi(x) \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Враховуючи, що $y = (f(x))^{\varphi(x)}$, отримуємо формулу для похідної степенево-показникової функції:

$$y' = (f(x))^{\varphi(x)} \left(\varphi'(x) \ln f(x) + \varphi(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right).$$

Зауваження. Похідна степенево-показникової функції дорівнює сумі похідної цієї функції як від степеневої функції та похідної цієї функції як від показникової функції.

Похідна логарифмічної функції $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$ називається ***логарифмічною похідною***. Її зручно використовувати також для диференціювання функцій, вирази яких суттєво спрощуються при логарифмуванні.

Диференціювання функцій, заданих параметрично

Нехай функцію $y(x)$ задано параметрично, тобто рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in T.$$

Припустимо, що функції $x(t)$ та $y(t)$ диференційовні для будь-якого $t \in T$ й $x'(t) \neq 0$. Крім того, вважатимемо, що функція $x = x(t)$ має обернену функцію $t(x)$, яка також диференційовна. Тоді функцію $y = y(x)$, задану параметрично, можна розглядати як складену функцію:

$y = y(t), t = t(x)$, де t – проміжний аргумент.

Тоді

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Диференціювання неявно заданих функцій

Нехай диференційовну функцію $y = f(x)$ задано неявно рівнянням

$$F(x, y) = 0.$$

Якщо в рівнянні $F(x, y) = 0$ під y розуміти функцію $y = y(x)$, то це рівняння перетворюється на тотожність за аргументом x:

$$F(x, y(x)) = 0 \ \ \forall \ \ x \in X.$$

Диференціюючи цю тотожність за змінною x, вважаючи, що y є функцією x, дістаємо лінійне щодо y' рівняння, яке також містить змінні x та y.

Розв'язуючи його щодо y', знаходимо шукану похідну функції $y = f(x)$, заданої неявно

$$y' = g(x, y).$$

6.3. Поняття диференціала

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в точці x. Лінійна відносно Δx частина приросту функції $f(x)$ називається ***диференціалом функції*** $f(x)$ у точці x.

Диференціал функції $y = f(x)$ у точці x позначається одним із символів $df(x), dy(x), df, dy$.

За означенням

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \qquad (6.3.1)$$

Якщо x – незалежний аргумент функції, то за означенням вважають приріст Δx диференціалом аргументах і позначають його dx, тобто $dx = \Delta x$. Тоді означення диференціала функції записується однією з таких формул:

$$df(x) = f'(x) \cdot dx, \quad dy = y'dx.$$

Із формул видно, що $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$, тобто похідна $f'(x)$ є відношенням диференціала функції до диференціала аргументу.

6.4. Похідні та диференціали вищих порядків

Похідна $y' = f'(x)$ від функції $y = f(x)$ називається ***похідною першого порядку*** і становить деяку нову функцію. Можливі випадки, коли ця функція сама має похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку $(y')'$ називається ***похідною другого порядку*** від функції $y = f(x)$ і позначається $y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}$.

Похідна від похідної другого порядку $(y'')'$ називається ***похідною третього порядку*** і позначається y''', $f'''(x), \frac{d^3y}{dx^3}$.

Похідна від похідної $(n-1)$-го порядку $(y^{n-1})'$ називається ***похідною n-го порядку*** і позначається $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x), \frac{d^ny}{dx^n}$.

Таким чином, $y^{(n)} = (y^{n-1})', n = 1, 2, 3, \ldots$

Зауваження. Для $y = y(x)$, заданої параметрично $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ друга похідна має вигляд:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)}{x_t'} = \frac{y_{tt}''x_t' - y_t'x_{tt}''}{(x_t')^3}.$$

Зауваження. Для похідної k-го порядку від функції $y = uv$, де функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ мають похідні до k-го порядку включно, правильна формула

$$y^{(k)} = (uv)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \, u^{(k-i)} v^{(i)}, \text{ де } C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}.$$

Ця формула називається формулою Лейбніца.

Диференціали вищих порядків

Другим диференціалом або диференціалом другого порядку функції $y = f(x)$ називається диференціал від першого диференціала, тобто $d^2y = d(dy)$. За означенням

$d^2y = (f'(x)dx)'dx = [f''(x)dx + f'(x)(dx)']dx = f''(x)(dx)^2$.

Диференціалом n-ого порядку або n-им диференціалом функції $y = f(x)$ називається диференціал від $(n-1)$ − го диференціала, тобто $d^ny = d(d^{n-1}y)$.

Якщо x є незалежною змінною, то $d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n$. Нехай тепер $y = F(u), u = \varphi(x)$. За властивістю інваріантності форми першого диференціала маємо $dy = F'(u)du$, а тому

$d^2y = d(F'(u)du) = dF'(u)du + F'(u)\, d(du) = F''(u)\,(du)^2 + F'(u)\, d^2u.$

Отже, другий (а, очевидно, і вищого порядку) диференціал функції однієї змінної не володіє властивістю інваріантності форми.

6.5. Правило Лопіталя

Похідна функції може ефективно використовуватися під час обчислення границь для розкриття невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Припустимо, що $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$ і $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=0$, тобто $f(x)$ і $g(x)$ є нескінченно малі при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$. Можна також розглянути випадки $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$ і $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\infty$, тобто $f(x)$ і $g(x)$ є нескінченно великі при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$. У кожному випадку границя $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}$ приводить до невизначеностей $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Розкриття такого типу невизначеностей часто можна здійснити на підставі правила Лопіталя, яке сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема (правило Лопіталя). Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо остання границя скінченна або дорівнює нескінченності.

Тобто при обчисленні границі $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}$ та розкритті невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ можна застосувати формулу:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Зауважимо, що в правій частині останньої формули записана частка похідних, а не похідна частки.

Зауваження. Якщо частка $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$ залишається невизначеністю типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, то потрібно знову застосовувати правило Лопіталя, тобто перейти до відношення других похідних:

$$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f''(x)}{g''(x)}\ \text{ і т.д.}$$

У випадку невизначеностей типу $\{0\cdot\infty\}$ або $\{\infty-\infty\}$ потрібно алгебрично перетворити дану функцію так, щоб звести її до невизначеності типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ і далі застосовувати правило Лопіталя.

Якщо границя функції є невизначеністю типу $\{0^0\}$, $\{\infty^0\}$ або $\{1^\infty\}$, то потрібно прологарифмувати цю функцію і знайти границю її логарифму.

6.6. Формули Тейлора та Маклорена

Нехай многочлен

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

потрібно розвинути за степенями $x-x_0$, де x_0 – деяке число, тобто многочлен необхідно записати у вигляді

$$P(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\cdots+A_n(x-x_0)^n,$$

де $A_0,A_1,A_2,\dots,A_n$ – невідомі коефіцієнти. Покладаючи $x=x_0$ в останній рівності, отримаємо $P(x_0)=A_0$. Обчислюючи похідні $P'(x_0)$, $P''(x_0),\dots,P^{(n)}(x_0)$, знайдемо послідовно всі коефіцієнти A_i $(i=1,2,\dots,n)$:

$$A_1=P'(x_0),\ A_2=\frac{P''(x_0)}{2!},\dots,\ A_n=\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Підставляючи коефіцієнти A_i, отримаємо формулу Тейлора для многочлена:

$$P(x)=P(x_0)+P'(x_0)(x-x_0)+\frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Формулу Тейлора можна записати для довільної функції $f(x)$, яка диференційована $(n+1)$ разів включно в околі точки x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + R_n(x),$$

Як бачимо, у формулі Тейлора для довільної функції $f(x)$, крім ***тейлорівського многочлена*** $\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ – степеня n присутній доданок $R_n(x)$, який називають ***залишковим членом***.

Залишковий член у формі Лагранжа має вигляд

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)},$$

де точка c розміщена між точками x і x_0. Очевидно, що для многочленів $R_n(x) = 0$.

Формула Тейлора при $x_0 = 0$ називається формулою Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{(n+1)}.$$

Формули Тейлора та Маклорена часто використовуються в прикладних задачах. За допомогою цих формул складні функції з великою точністю апроксимуються многочленами. Крім того, вони часто використовуються у складанні таблиць наближених значень функцій. Залишковий член $R_n(x)$ у формі Лагранжа характеризує точність наближення, тобто показує різницю між значенням функції і значенням тейлорівського многочлена.

6.7. Основні теореми диференціального числення

До основних теорем диференціального числення належать теореми про зв’язок похідної з іншими поняттями, які лежать в основі різноманітних застосувань похідної.

Теорема Ферма. Якщо диференційовна на $[a;\ b]$ функція $y = f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення у внутрішній точці x_0 цього відрізку, то похідна функції в цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(x_0)$.

Геометричний зміст теореми Ферма: в точці найбільшого або найменшого значення, яке досягається всередині $[a;\ b]$, дотична до графіка функції паралельна до осі абсцис (рис. 6.7.1).

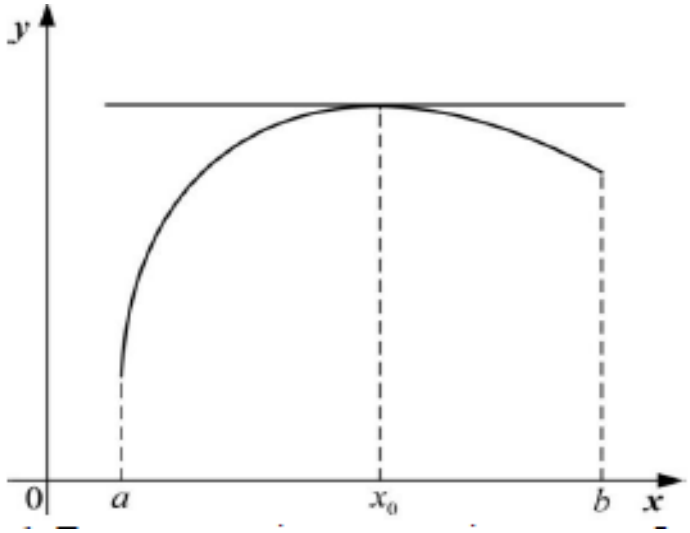


Рис. 6.7.1. Геометрична інтерпретація теореми Ферма

Теорема Ферма може бути використана для доведення так званих теорем про середнє – теорем Ролля і Лагранжа.

Теорема Ролля. Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умови:

1) $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$;
2) $f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a;\ b)$;
3) на кінцях відрізка $[a;\ b]$ має однакові значення, тобто$f(a)= f(b)$.

Тоді існує принаймні одна така точка $c \in (a;\ b)$, в якій похідна функції дорівнює нулю $f'(c) = 0$.

Зауважимо, що таких точок c на інтервалі $(a;\ b)$ може бути декілька (рис. 6.7.2).

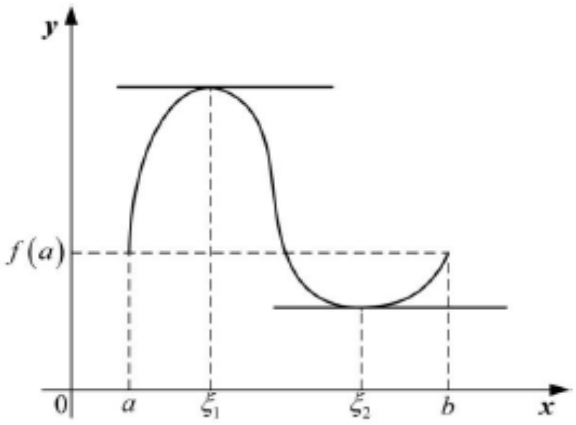


Рис. 6.7.2. Геометрична інтерпретація теореми Ролля

Теорема Лагранжа (теорема про скінченні прирости функції). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$ і диференційовна на інтервалі $(a;\ b)$, то існує принаймні одна точка с ϵ $(a;\ b)$ така, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Геометричний зміст теореми Лагранжа: на інтервалі $(a;b)$ існує така точка c, що дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці з координатами $(c\ , f(c))$ нахилена до осі Ox під таким же кутом $\varphi = arctg\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, що й січна, яка проходить через точки $(a, f\ (a))$, $(b, f\ (b))$ (рис. 6.7.3).

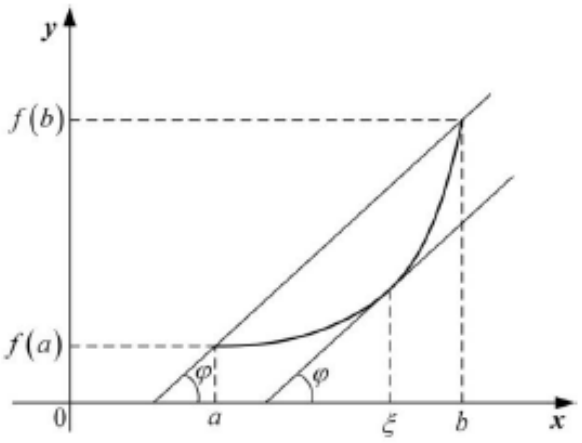


Рис. 6.7.3. Геометрична інтерпретація теореми Лагранжа

Теорема Коші. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють умови:

1) $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку $[a;\ b]$;
2) $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні на інтервалі $(a;\ b)$;

3) $g'(x) \neq 0$ для будь-якого $x \in (a;\ b)$.

Тоді існує принаймні одна така точка $c \in (a;\ b)$, для якої наявна рівність

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

6.8. Застосування похідної

Нагадаємо, що функція $y = f(x)$ називається ***зростаючою (спадною)*** на інтервалі $(a;\ b)$, якщо для довільних $x_1,\ x_2\ \epsilon\ (a;b),\ x_1 > x_2$, виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$ $(f(x_2) > f(x_1))$.

Теорема. Для того, щоб диференційовна на інтервалі $(a;b)$ функція $f(x)$ була сталою, необхідно й достатньо, щоб $f'(x) = 0$ для будь-якого $x\ \epsilon(a;b)$.

Теорема (достатні умови монотонності). Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на $(a;\ b)$. Тоді:

а) якщо $f'(x) > 0$ $(f'(x) \geq 0)$ для всіх $x\ \epsilon(a;b)$, то $f(x)$ зростає (не спадає) на $(a;\ b)$;

б) якщо $f'(x) < 0$ $(f'(x) \leq 0)$ для всіх $x\ \epsilon(a;b)$, то $f(x)$ спадає (не зростає) на $(a;\ b)$;

в) якщо $f'(x) \equiv 0$ для всіх $x\ \epsilon(a;b)$, то $f(x)$ стала на $(a;b)$.

Екстремум функції

Точка x_1 називається точкою ***максимуму (точкою локального максимуму)*** функції $y = f(x)$, якщо в деякому проколотому околі точки x_1 виконується нерівність $f(x) < f(x_1)$ (рис. 6.8.1).

Точка x_2 називається точкою ***мінімуму (точкою локального мінімуму)*** функції $y = f(x)$, якщо в деякому проколотому околі точки x_2 виконується нерівність $f(x) > f(x_2)$ (рис. 6.8.1).

Точки максимуму і мінімуму називаються ***точками екстремуму (точками локального екстремуму)*** функції. Значення функції в точках x_1 і x_2 називаються, відповідно, ***максимумом і мінімумом функції.***

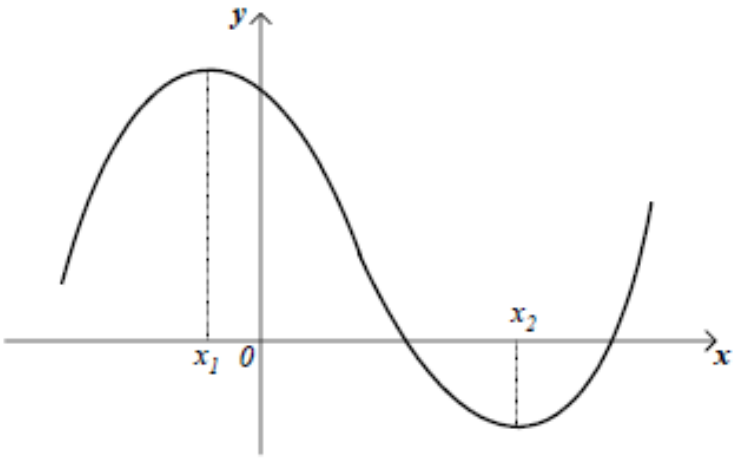


Рис. 6.8.1. Точки максимуму і мінімуму функції

Максимум і мінімум функції об'єднуються під загальною назвою екстремуму функції. ***Екстремум функції*** часто називають локальним екстремумом, підкреслюючи те, що поняття екстремуму пов'язане з достатньо малим околом точки екстремуму. На одному проміжку функція може мати декілька точок максимуму і мінімуму.

Теорема (необхідні умови локального екстремуму). Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x_0 екстремум, то її похідна в цій точці дорівнює нулю ($f'(x_0) = 0$) або не існує.

Іншими словами, функція $y = f(x)$ може мати екстремум тільки в тих точках, в яких похідна дорівнює нулю або не існує. Точки з області визначення функції, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує, називаються ***критичними (або стаціонарними) точками***. Однак легко переконатись, що критична точка зовсім не обов'язково є точкою екстремуму.

Для існування локального екстремуму функції $y = f(x)$ у точці x_0 необхідно, але недостатньо, щоб точка x_0 була критичною.

Таким чином, для знаходження екстремумів функції потрібно додатково досліджувати критичні точки. Іншими словами, потрібно знайти достатню умову екстремуму.

Теорема (перша достатня умова екстремуму). Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна в деякому δ – околі критичної точки x_0, а похідна $f'(x)$ існує в околі цієї точки, за винятком, можливо, самої точки x_0. Тоді:

а) якщо $f'(x) > 0$ для всіх $x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ і $f'(x) < 0$ для всіх $x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$, то функція $y = f(x)$ в точці x_0 досягає максимуму;

б) якщо $f'(x) < 0$ для всіх $x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ і $f'(x) > 0$ для всіх $\in (x_0;\ x_0 + \delta)$, то функція $y = f(x)$ в точці x_0 досягає мінімуму;

в) якщо $f'(x)$ не змінює знак для всіх $x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}$, то в точці x_0 екстремуму немає.

Коротко можна сказати: якщо при переході через критичну точку x_0 похідна диференційовної функції $y = f(x)$ змінює свій знак з плюса на мінус, то точка x_0 є точкою максимуму функції $y = f(x)$, а якщо з мінуса на плюс, то x_0 – точка мінімуму.

Схема дослідження функції $y = f(x)$ на екстремум.

1. Знайти область визначення функції $D(f)$.

2. Обчислити похідну $y' = f'(x)$.

3. Знайти критичні точки функції, тобто точки, в яких $f'(x) = 0$ або не існує.

4. Дослідити знак похідної зліва і справа від кожної критичної точки і зробити висновок про наявність екстремумів функції.

5. Знайти екстремуми функції, тобто значення функції в точках екстремуму.

Теорема (друга достатня умова екстремуму). Нехай функція $y = f(x)$, визначена в околі стаціонарної точки x_0, має в x_0 похідні до порядку n включно

$(n \geq 2)$. Якщо $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то:

а) при непарному n у точці x_0 екстремуму функції немає;

б) при парному n екстремум є, причому це локальний мінімум; якщо $f^{(n)}(x_0) > 0$ і локальний максимум, якщо $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a;\ b]$, то вона набуває на цьому проміжку свого найбільшого й найменшого значення. Найбільше значення функції на проміжку $[a;\ b]$ називається **абсолютним максимумом**, а найменше – **абсолютним мінімумом**.

Припустимо, що на цьому проміжку функція $f(x)$ має скінченне число критичних точок. Якщо найбільше значення досягається в середині проміжку $[a;\ b]$, то очевидно, що це значення буде одним із максимумів функції (якщо існує кілька максимумів), точніше – найбільшим максимумом. Однак можливо, що найбільше значення досягатиметься на одному з кінців проміжку.

Таким чином, функція на відрізку $[a, b]$ досягає свого найбільшого значення на одному з кінців цього проміжку або в такій точці його, яка є точкою максимуму.

Аналогічне твердження можна сформулювати й про найменше значення функції: воно досягається на одному з кінців цього проміжку або в такій внутрішній точці, яка є точкою мінімуму.

Схема відшукання найбільшого та найменшого значень функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$

Якщо треба знайти найбільше значення неперервної функції на проміжку $[a, b]$, то необхідно:

1. Знайти похідну $f'(x)$.
2. Знайти всі критичні точки на $[a, b]$, тобто точки, в яких $f'(x) = 0$ або не існує.

3. Обчислити значення функції в цих критичних точках та на кінцях відрізка і вибрати з них найбільше $\max_{[a,b]} f(x)$ та найменше $\min_{[a,b]} f(x)$ (рис. 6.8.2).

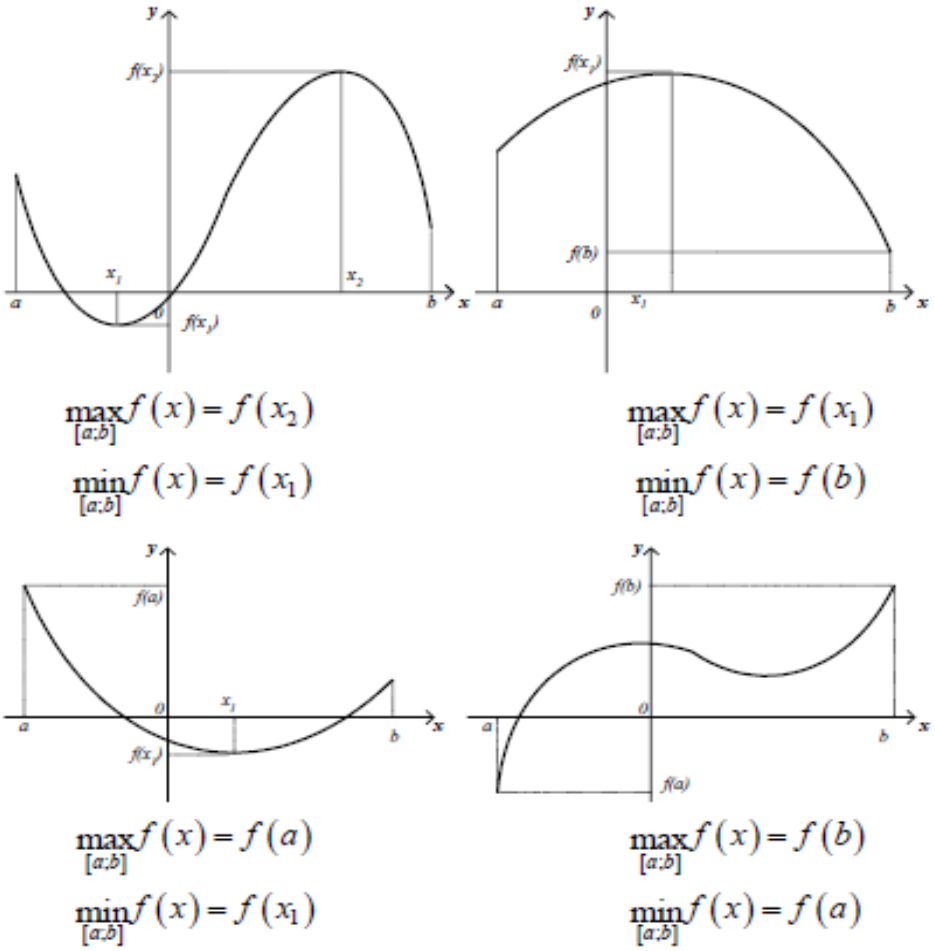


Рис. 6.8.2. Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Опуклість і вгнутість кривих

Функція $y = f(x)$ називається ***опуклою (опуклою вверх)*** на інтервалі $(a; b)$, якщо для довільних двох точок x_1, x_2 з цього проміжку відрізок, що з'єднує точки $A(x_1; f(x_1))$ і $B(x_2; f(x_2))$, розміщений під графіком цієї функції (рис. 6.8.3).

Функція $y = f(x)$ називається ***вгнутою (опуклою вниз)*** на інтервалі $(a; b)$, якщо для довільних двох точок x_1, x_2 з цього проміжку відрізок, що з'єднує точки $A(x_1; f(x_1))$ і $B(x_2; f(x_2))$, розміщений над графіком цієї функції (рис. 6.8.4).

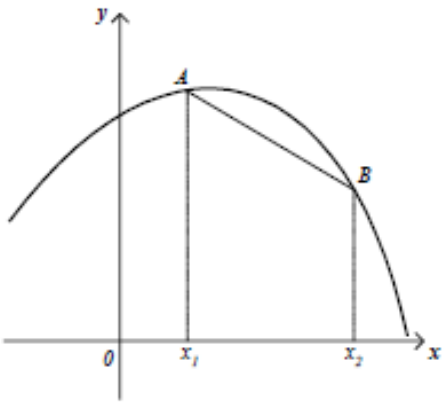


Рис. 6.8.3. Опукла функція

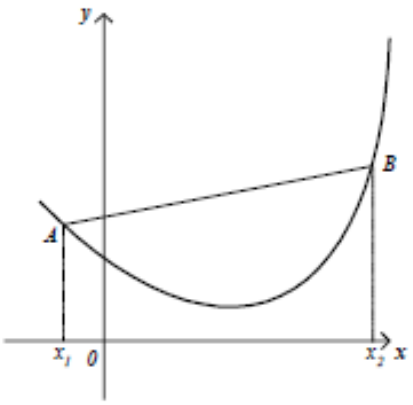


Рис. 6.8.4. Вгнута функція

Теорема (достатня умова опуклості та вгнутості функції). Нехай функція $y = f(x)$ двічі диференційовна на інтервалі $(a; b)$. Тоді:

1) якщо $f''(x) > 0$ на $(a; b)$, то функція вгнута на цьому інтервалі;

2) якщо $f''(x) < 0$ на $(a; b)$, то функція опукла на цьому інтервалі.

Точкою перегину графіка неперервної функції називається точка, яка відділяє один від одного інтервали, на яких функція опукла і вгнута.

Теорема (достатня ознака точки перегину). Якщо $f''(x_0) = 0$ або не існує і $f''(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак, то x_0 є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

Зауваження. Якщо у точці x_0 друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, але при переході через цю точку $f''(x)$ не змінює свого знака, то точка x_0 не є точкою перегину.

6.9. Загальна схема дослідження функцій і побудова їх графіків

Вивчення характерних точок і ліній графіка функції дає змогу всебічно її дослідити і досить точно побудувати ескіз графіка. Дослідження функції рекомендується проводити за такою схемою:

1. Знайти область визначення функції $y = f(x)$.
2. Дослідити функцію на парність-непарність, на періодичність.

3. Знайти точки перетину графіка з осями координат та інтервали знакосталості функції.

4. Дослідити функцію на неперервність. Знайти точки розриву функції і встановити їх тип.

5. Знайти екстремуми та інтервали монотонності функції.

6. Знайти інтервали опуклості і вгнутості функції, точки перегину.

7. Знайти вертикальні та похилі асимптоти графіка функції.

8. Дослідити поведінку функції в нескінченності.

9. За одержаними даними побудувати графік функції.

6.10. Розв'язування прикладів і задач

✧✧✧

1. Користуючись означенням похідної, знайти похідні функцій:

1) $y = x^2$; 2) $y = \sin x$; 3) $y = e^x$.

Розв'язання.

1) $y = x^2$.

Надамо аргументу x приросту Δx, тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$.

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, відшукаємо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$. Таким чином, $f'(x) = 2x$.

2) $y = \sin x$.

Надамо аргументу x приросту Δx, тоді функція набуде приросту $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$.

Користуючись відомою з тригонометрії формулою

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

знайдемо приріст функції у точці x і обчислимо границю:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x;$$

$(sin\,x)'=cos\,x.$

3) $y=e^x$.

Для цієї функції маємо

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x\cdot 1=e^x,$$

тобто $(e^x)'=e^x$.

✧✧✧

2. Нехай тіло рухається за законом: $x(t)=t^2+2t$. Знайти швидкість руху у момент час $t=3$.

Розв'язання.

Знайдемо швидкість руху:

$v(t)=x'(t)=(t^2+2t)'=2t+2.$

Це означає, що у будь-який момент часу t швидкість об'єкта визначається виразом $v(t)=2t+2$.

Знайдемо швидкість у момент часу $t=3$:

$v(3)=2\cdot 3+2=6+2=8.$

Отже, у момент $t=3$ швидкість тіла становить 8 одиниць (наприклад, м/с).

✧✧✧

3. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t)=t^3-6t^2+9t$. Запишіть формулу швидкості $v(t)$. Знайдіть моменти часу, коли тіло зупиниться ($v(t)=0$).

Розв'язання.

Шлях тіла задається рівнянням: $x(t)=t^3-6t^2+9t$

Знайдемо похідну, щоб отримати швидкість:

$$v(t)=x'(t)=(t^3-6t^2+9t)'=3t^2-12t+9\ .$$

Знайдемо моменти часу, коли тіло зупиняється, тобто $v(t)=0$:

$$3t^2-12t+9=0;$$

Поділимо рівняння на 3:

$$t^2 - 4t + 3 = 0.$$

Розв'яжемо квадратне рівняння:

$(t-3)(t-1) = 0.$

Звідси:

$$t = 3 \text{ або } t = 1.$$

Отже, тіло зупиняється в моменти $t = 1\text{с}$ та $t = 3\text{с}$.



4. Знайти похідну функції:

1) $y = x^3 + 7x^2 - 5x + 4;$

2) $y = 9x^5 - 13x^2 + \sqrt[4]{5};$

3) $y = 7\sqrt[3]{x^5} - \frac{3}{x^2};$

4) $y = (x^3 - 4x + 5)(9 - x^2);$

5) $y = \sin(2x + 3);$

6) $y = \ln(x^5 - 3x);$

7) $y = xtgx + ctgx;$

8) $y = \frac{x^2-4x}{x^2-1};$

9) $y = x^4 \log_5 x;$

10) $y = \frac{\arcsin x}{2^x}.$

Розв'язання.

1) $y = x^3 + 7x^2 - 5x + 4;$

$y' = (x^3 + 7x^2 - 5x + 4)' = (x^3)' + (7x^2)' - (5x)' + (4)' = 3x^2 + 14x - 5 + 0.$

2) $y = 9x^5 - 13x^2 + \sqrt[4]{5};$

$y' = (9x^5 - 13x^2 + \sqrt[4]{5})' = 9 \cdot 5x^4 - 13 \cdot 2x + 0 = 45x^4 - 26x;$

3) $y = 7\sqrt[3]{x^5} - \frac{3}{x^2} = 7x^{\frac{5}{3}} - 3x^{-2};$

$y' = (7x^{\frac{5}{3}} - 3x^{-2})' = 7 \cdot \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - 3 \cdot (-2)x^{-3} = \frac{35}{3}x^{\frac{2}{3}} + 6x^{-3} = \frac{35\sqrt[3]{x^2}}{3} + \frac{6}{x^3};$

4) $y = (x^3 - 4x + 5)(9 - x^2) = 9x^3 - 36x + 45 - x^5 + 4x^3 - 5x^2 = -x^5 + 13x^3 - 5x^2 - 36x + 45;$

$y' = (-x^5 + 13x^3 - 5x^2 - 36x + 45)' = -5x^4 + 39x^2 - 10x - 36;$

5) $y = sin(2x + 3)$;

$$y' = cos(2x + 3) \cdot (2x + 3)' = 2\,cos(2x + 3);$$

6) $y = \ln(x^5 - 3x)$;

$y' = (\ln(x^5 - 3x))' = \frac{1}{x^5-3x} \cdot (x^5 - 3x)' = \frac{1}{x^5-3x} \cdot (5x^4 - 3) = \frac{5x^4-3}{x^5-3x}$;

7) $y = xtgx + ctgx$;

$y' = (x)'tgx + x(tgx)' + (ctgx)' = tgx + \frac{x}{cos^2 x} - \frac{1}{sin^2 x}$;

8) $y = \frac{x^2-4x}{x^2-1}$;

$y' = \frac{(x^2-4x)'(x^2-1)-(x^2-4x)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{(2x-4)(x^2-1)-(x^2-4x)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{4x^2-2x+4}{(x^2-1)^2}$;

9) $y = x^4 \log_5 x$;

$y' = (x^4)' \log_5 x + x^4 (\log_5 x)' = 4x^3 \log_5 x + x^4 \frac{1}{x \ln 5} = 4x^3 \log_5 x + \frac{x^4}{x \ln 5}$;

10) $y = \frac{\arcsin x}{2^x}$;

$$y' = \frac{(\arcsin x)' \cdot 2^x - \arcsin x \cdot (2^x)'}{(2^x)^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 2^x - \arcsin x \cdot 2^x \ln 2}{2^{2x}} =$$

$$= \frac{2^x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x \cdot 2^x \ln 2}{2^{2x}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1 - \sqrt{1-x^2} \arcsin x \ln 2}{2^x \sqrt{1-x^2}};$$

✧ ✧ ✧

5. Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

1) $y = x\sqrt{x}(3 \ln x - 2)$; 2) $y = ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$;

3) $y = 9^{\sin x}$; 4) $y = \frac{1}{2}\text{tg}^2\sqrt{x} + \ln cos\sqrt{x}$.

Розв'язання.

1) $y = x\sqrt{x}(3 \ln x - 2) = x \cdot x^{\frac{1}{2}}(3 \ln x - 2) = x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 2)$.

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 2)\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)'(3 \ln x - 2) + x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 2)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3 \ln x - 2) +$$

$$x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{x} = 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x - 3x^{\frac{1}{2}} = \frac{9\sqrt{x} \ln x}{2};$$

2) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

$$y' = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' =$$

$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

3) $y = 9^{\sin x}$;

$$y' = \left(9^{\sin x}\right)' = 9^{\sin x} \ln 9 \cdot (\sin x)' = 9^{\sin x} \ln 9 \cos x;$$

4) $y = \frac{1}{2}\text{tg}^2\sqrt{x} + \ln cos\sqrt{x}$.

$$y' = \left(\frac{1}{2}\text{tg}^2\sqrt{x} + \ln cos\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2\text{tg}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos\sqrt{x}} \cdot \left(-\sin\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\text{tg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}} - \frac{\text{tg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{\text{tg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} - 1\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\text{tg}^3\sqrt{x}.$$

✧ ✧ ✧

6. Знайти похідні функцій, використовуючи логарифмічне диференціювання:

1) $y = \frac{(2x+3)^4 \cdot \sqrt[7]{5-4x}}{\sqrt[3]{(x-1)^8}}$;

2) $y = \sqrt{x \sin 4x \cdot \sqrt{1 + e^{3x}}}$;

3) $y = x^{x^2}$;

4) $y = (x^3 - 4)^{\sin 3x}$;

5) $y = (\sin x)^{tg\, x}$;

6) $y = x^{x^x}$.

Розв'язання.

1) $y = \frac{(2x+3)^4 \cdot \sqrt[7]{5-4x}}{\sqrt[3]{(x-1)^8}}$.

Прологарифмуємо обидві частини заданої рівності та скористаємось властивостями логарифмів:

$$\ln y = \ln \frac{(2x+3)^4 \cdot \sqrt[7]{5-4x}}{\sqrt[3]{(x-1)^8}};$$

$$\ln y = \ln(2x+3)^4 \cdot \sqrt[7]{5-4x} - \ln \sqrt[3]{(x-1)^8};$$

$$\ln y = \ln(2x+3)^4 + \ln \sqrt[7]{5-4x} - \ln \sqrt[3]{(x-1)^8};$$

$$\ln y = 4\ln(2x+3) + \frac{1}{7}\ln(5-4x) - \frac{8}{3}\ln(x-1).$$

Продиференціюємо обидві частини отриманого співвідношення, враховуючи, що y функція від x:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{4}{2x+3}\cdot 2 + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5-4x}\cdot(-4) - \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{x-1};$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{8}{2x+3} - \frac{4}{7(5-4x)} - \frac{8}{3(x-1)};$$

Із одержаного рівняння знаходимо y' та замінюємо y на його вираз через x:

$$y' = y\cdot\left(\frac{8}{2x+3} - \frac{4}{7(5-4x)} - \frac{8}{3(x-1)}\right);$$

$$y' = \frac{(2x+3)^4\cdot\sqrt[7]{5-4x}}{\sqrt[3]{(x-1)^8}}\cdot\left(\frac{8}{2x+3} - \frac{4}{7(5-4x)} - \frac{8}{3(x-1)}\right).$$

2) $y = \sqrt{x\sin 4x\cdot\sqrt{1+e^{3x}}}$.

Прологарифмуємо обидві частини заданої рівності та скористаємось властивостями логарифмів:

$$\ln y = \ln\sqrt{x\sin 4x\cdot\sqrt{1+e^{3x}}};$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln\left(x\sin 4x\cdot\sqrt{1+e^{3x}}\right);$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\left(\ln x + \ln\sin 4x + \ln\sqrt{1+e^{3x}}\right);$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\left(\ln x + \ln\sin 4x + \frac{1}{2}\ln(1+e^{3x})\right).$$

Продиференціюємо обидві частини отриманого співвідношення, враховуючи, що y функція від x:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sin 4x}\cdot\cos 4x\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^{3x}}\cdot e^{3x}\cdot 3\right);$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + 4ctg\ 4x + \frac{3e^{3x}}{2(1+e^{3x})}\right);$$

Із одержаного рівняння знаходимо y' та замінюємо y на його вираз через x:

$$y' = \frac{y}{2}\left(\frac{1}{x} + 4ctg\ 4x + \frac{3e^{3x}}{2(1+e^{3x})}\right);$$

$$y' = \frac{\sqrt{x\sin 4x\cdot\sqrt{1+e^{3x}}}}{2}\left(\frac{1}{x} + 4ctg\ 4x + \frac{3e^{3x}}{2(1+e^{3x})}\right).$$

3) $y = x^{x^2}$.

Задана функція є степенево-показниковою, бо і основа x, і показник степеню x^2 функції від x. Прологарифмуємо обидві частини заданої рівності та скористаємось властивостями логарифмів:

$$\ln y = \ln x^{x^2};$$

$$\ln y = x^2 \ln x.$$

Продиференціюємо обидві частини отриманого співвідношення, враховуючи, що y функція від x:

$$\frac{y'}{y} = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)';$$

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x};$$

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln x + x;$$

$$\frac{y'}{y} = x(2 \ln x + 1).$$

Із одержаного рівняння знаходимо y' та замінюємо y на його вираз через x:

$$y' = yx(2 \ln x + 1);$$

$$y' = x^{x^2} \cdot x(2 \ln x + 1);$$

$$y' = x^{x^2+1}(2 \ln x + 1);$$

4) $y = (x^3 - 4)^{\sin 3x}$.

Задана функція є степенево-показниковою, бо і основа $x^3 - 4$, і показник степеню $\sin 3x$ функції від x. Прологарифмуємо обидві частини заданої рівності та скористаємось властивостями логарифмів:

$$\ln y = \ln(x^3 - 4)^{\sin 3x};$$

$$\ln y = \sin 3x \ln(x^3 - 4).$$

Продиференціюємо обидві частини отриманого співвідношення, враховуючи, що y функція від x:

$$\frac{y'}{y} = 3 \cos 3x \ln(x^3 - 4) + \sin 3x \cdot \frac{1}{x^3 - 4} \cdot 3x^2;$$

$$\frac{y'}{y} = 3 \cos 3x \ln(x^3 - 4) + \frac{3x^2 \sin 3x}{x^3 - 4};$$

А, отже,

$$y' = y\left(3\cos 3x \ln(x^3 - 4) + \frac{3x^2 \sin 3x}{x^3 - 4}\right);$$

$$y' = (x^3 - 4)^{\sin 3x}\left(3\cos 3x \ln(x^3 - 4) + \frac{3x^2 \sin 3x}{x^3 - 4}\right).$$

5) $y = (\sin x)^{tg\, x}$.

Задана функція є степенево-показниковою, бо і основа $\sin x$, і показник степеню $tg\, x$ функції від x. Прологарифмуємо обидві частини заданої рівності та скористаємось властивостями логарифмів:

$$\ln y = \ln(\sin x)^{tg\, x};$$

$$\ln y = tg\, x \ln \sin x.$$

Продиференціюємо обидві частини отриманого співвідношення, враховуючи, що y функція від x:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x + tg\, x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x;$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} + tg\, x \cdot ctg\, x;$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} + 1;$$

А, отже,

$$y' = y\left(\frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} + 1\right);$$

$$y' = (\sin x)^{tg\, x}\left(\frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} + 1\right).$$

6) $y = x^{x^x}$.

Задана функція є степенево-показниковою, бо і основа x, і показник степеню x^x функції від x. Прологарифмуємо обидві частини заданої рівності та скористаємось властивостями логарифмів:

$$\ln y = \ln x^{x^x};$$

$$\ln y = x^x \ln x.$$

Продиференціюємо обидві частини отриманого співвідношення, враховуючи, що y функція від x:

$$\frac{y'}{y} = (x^x)' \ln x + x^x (\ln x)'.$$

Знайдемо похідну $(x^x)'$.

Позначимо $z = x^x$. Задана функція є степенево-показниковою, бо і основа x, і показник степеню x функції від x. Прологарифмуємо обидві частини заданої рівності:

$$\ln z = \ln x^x;$$

$$\ln z = x \ln x.$$

Продиференціюємо обидві частини отриманого співвідношення:

$$\frac{1}{z} z' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x};$$

$$\frac{1}{z} z' = \ln x + 1;$$

$$z' = z(\ln x + 1);$$

$$z' = x^x(\ln x + 1);$$

Остаточно одержимо:

$$\frac{y'}{y} = x^x(\ln x + 1) \cdot \ln x + x^x \frac{1}{x};$$

$$\frac{y'}{y} = x^x(\ln x + 1) \cdot \ln x + \frac{x^x}{x}.$$

Із одержаного рівняння знаходимо y' та замінюємо y на його вираз через x:

$$y' = y\left(x^x(\ln x + 1) \cdot \ln x + \frac{x^x}{x}\right);$$

$$y' = x^{x^x}\left(x^x(\ln x + 1) \cdot \ln x + \frac{x^x}{x}\right);$$

$$y' = x^{x^x} \cdot x^x\left((\ln x + 1) \cdot \ln x + \frac{1}{x}\right);$$

$$y' = x^{x^x + x}\left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x}\right).$$



7. Знайти похідні неявно заданих функцій:

1) $x^2 + y^2 = 4$;

2) $y^2 = 2x$;

3) $e^y + xy = e$;

4) $x^2 y + arctg\frac{y}{x} = 0$.

Розв'язання.

1) $x^2 + y^2 = 4$.

Знайдемо похідну від обох частин рівняння з урахуванням того, що y є функція від x:

$$2x + 2yy' = 0;$$

$$x + yy' = 0;$$

Отже, $y' = -\frac{x}{y}$.

2) $y^2 = 2x$.

Знайдемо похідну від обох частин рівняння з урахуванням того, що y є функція від x:

$$2yy' = 2;$$

$$yy' = 1;$$

Отже, $y' = \frac{1}{y}$.

3) $e^y + xy = e$.

Знайдемо похідну від обох частин рівняння з урахуванням того, що y є функція від x:

$$e^y \cdot y' + 1 \cdot y + xy' = 0;$$

$$y'(e^y + x) = -y;$$

Отже, $y' = -\frac{y}{e^y + x}$.

4) $x^2 y + arctg\frac{y}{x} = 0$.

Знайдемо похідну від обох частин рівняння з урахуванням того, що y є функція від x:

$$(x^2)'y + x^2(y)' + \left(arctg\frac{y}{x}\right)' = 0;$$

$$2xy + x^2 y' + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)' = 0;$$

$$2xy + x^2 y' + \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{xy'-y}{x^2} = 0;$$

$$2xy + x^2y' + \frac{xy'-y}{x^2+y^2} = 0;$$

$$2xy + x^2y' + \frac{xy'}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} = 0;$$

$$2xy + y'\left(x^2 + \frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{y}{x^2+y^2} = 0;$$

$$y'\left(x^2 + \frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y}{x^2+y^2} - 2xy;$$

$$y'\left(\frac{x^4+x^2y^2+x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y-2x^3y-2xy^3}{x^2+y^2};$$

Тоді:

$$y' = \frac{y-2x^3y-2xy^3}{x^2+y^2} \Big/ \frac{x^4+x^2y^2+x}{x^2+y^2};$$

$$y' = \frac{y-2x^3y-2xy^3}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^4+x^2y^2+x};$$

$$y' = \frac{y-2x^3y-2xy^3}{x^4+x^2y^2+x}.$$

✧ ✧ ✧

8. Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

1) $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 5 - t^3, \\ y = t - t^2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - arctg\ t. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = a(1 - \sin t), \\ y = a(t - \cos t). \end{cases}$

Розв'язання.

1) $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$

Маємо параметричні рівняння. Знайдемо похідну x за змінною t і похідну y за змінною t:

$$x'_t = 3t^2 + 3;$$

$$y'_t = 15t^4 + 15t^2.$$

Підставимо отримані вирази до формули $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, маємо:

$$y'_x = \frac{15t^4+15t^2}{3t^2+3} = \frac{15t^2(t^2+1)}{3(t^2+1)} = 5t^2.$$

2) $\begin{cases} x = 5 - t^3, \\ y = t - t^2. \end{cases}$

Маємо параметричні рівняння. Знайдемо похідну x за змінною t і похідну y за змінною t:

$$x'_t = -3t^2;$$
$$y'_t = 1 - 2t.$$

Підставимо отримані вирази до формули $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, маємо:

$$y'_x = \frac{1-2t}{-3t^2} = \frac{2t-1}{3t^2}.$$

3) $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - arctg\, t. \end{cases}$

Маємо параметричні рівняння. Знайдемо похідну x за змінною t і похідну y за змінною t:

$$x'_t = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t = \frac{2t}{1+t^2};$$
$$y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Підставимо отримані вирази до формули $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, маємо:

$$y'_x = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{2t} = \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2}.$$

4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

Маємо параметричні рівняння. Знайдемо похідну x за змінною t і похідну y за змінною t:

$$x'_t = a(1 - \cos t);$$
$$y'_t = a \sin t.$$

Підставимо отримані вирази до формули $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, маємо:

$$y'_x = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = ctg\ \frac{t}{2}.$$

✧✧✧

9. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -3$.

Розв'язання.

Знайдемо похідну від заданої функції $f'(x) = 2x$, звідси $f'(-3) = -6; f(-3) = (-3)^2 = 9$.

Використовуючи формулу, отримуємо рівняння дотичної:

$$y - 9 = -6(x + 3);$$

$$y - 9 = -6x - 18;$$

$$6x + y + 9 = 0.$$

Застосовуючи формулу, дістаємо рівняння нормалі:

$$y - 9 = \frac{1}{6}(x + 3);$$

$$y - 9 = \frac{x}{6} + \frac{1}{2};$$

$$6y - 54 = x + 3;$$

$$x - 6y + 57 = 0.$$

✧✧✧

10. Який кут утворює з віссю *Ox* дотична до кривої $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, проведена в точці з абсцисою $x = 1$?

Розв'язання.

Знаходимо похідну $y' = \frac{10}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2$; при $x = 1$, $y' = 3$, таким чином $\text{tg}\alpha = 3$, звідки $\alpha = \text{arctg}3 \approx 71°34'$.

✧✧✧

11. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2 - 2xy + 3y^2 - 2y - 16 = 0$ в точці $M_0(1; 3)$.

Розв'язання.

Підставляючи значення координатної точки у рівняння, переконаємось, що точка належить заданій кривій:

$$1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 16 = 0;$$

$$1 - 6 + 27 - 6 - 16 = 0;$$

$$0 = 0.$$

Продиференціюємо задане рівняння за змінною x:

$$2x - 2y - 2xy' + 6yy' - 2y' = 0;$$

$$x - y - xy' + 3yy' - y' = 0;$$

$$-y'(x - 3y + 1) = -(x - y);$$

звідки

$$y' = \frac{x-y}{x-3y+1}.$$

Похідна в точці M_0: $y'(M_0) = \frac{1-3}{1-3\cdot 3+1} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$.

Маємо рівняння дотичної:

$$y - 3 = \frac{2}{7}(x - 1);$$

$$7y - 21 = 2x - 2;$$

$$2x - 7y + 19 = 0.$$

Рівняння нормалі:

$$y - 3 = -\frac{1}{\frac{2}{7}}(x - 1);$$

$$y - 3 = -\frac{7}{2}(x - 1);$$

$$2y - 6 = -7x + 7;$$

$$7x + 2y - 13 = 0.$$

✧✧✧

12. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $\begin{cases} x = t^2 + 3t - 8, \\ y = 2t^2 - 2t - 5 \end{cases}$ у точці $M_0(2;\ -1)$.

Розв'язання.

Насамперед визначити значення параметра t, яке відповідає заданим значенням x та y. Це значення повинно одночасно задовольняти двом рівнянням

$$\begin{matrix} t^2+3t-8=2, \\ 2t^2-2t-5=-1 \end{matrix}.$$

$$t^2+3t-8=2;$$

$$2t^2-2t-5=-1;$$

$$t^2+3t-10=0;$$

$$t^2-t-2=0;$$

Корені першого рівняння $t_1=2,\ t_2=-5,$ корені другого рівняння $t_1=2,\ t_2=-1.$ Отож, даній точці $M_0(2;-1)$ відповідає значення $t=2.$ Визначимо похідну у заданій точці M_0:

$$x_t'=2t+3;$$

$$y_t'=4t-2.$$

Підставимо отримані вирази до формули $y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}$, маємо:

$$y_x'=\frac{4t-2}{2t+3}.$$

$$y'|_{t=2}=\frac{4\cdot2-2}{2\cdot2+3}=\frac{8-2}{4+3}=\frac{6}{7}.$$

Тобто кутовий коефіцієнт дотичної в точці M_0 дорівнює $\frac{6}{7}$.

Отже, рівняння дотичної буде

$$y+1=\frac{6}{7}(x-2);$$

$$7y+7=6x-12;$$

$$6x-7y-19=0,$$

рівняння нормалі:

$$y+1=-\frac{7}{6}(x-2);$$

$$6y+6=-7x+14;$$

$$7x+6y-8=0.$$

✧ ✧ ✧

13. На кривій $y = x^3 - 3x + 5$ знайти точки, в яких дотична:

1) паралельна прямій $y = -2x$;

2) перпендикулярна до прямої $y = -\frac{x}{9}$;

3) утворює з додатнім напрямом осі Ox кут 45°.

Розв'язання.

Для знаходження потрібних точок необхідно зважати на те, що в точці дотику кутовий коефіцієнт дорівнює значенню похідної, обчисленої у цій точці. Знайдемо похідну:

$$y' = 3x^2 - 3.$$

1) З умови паралельності (дві прямі задані на площині паралельні, якщо їх кутові коефіцієнти рівні) маємо:

$3x^2 - 3 = -2$ (– 2 є кутовий коефіцієнт прямої $y = -2x$), звідки

$3x^2 = 1$, тобто

$$x^2 = \frac{1}{3};$$

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Знайдемо відповідні значення координати y точок:

$$y_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 5 = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{3}} + 5 = \frac{1-9+15\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}-8}{3\sqrt{3}} = \frac{45-8\sqrt{3}}{9};$$

$$y_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 5 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + 5 = \frac{-1+9+15\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}+8}{3\sqrt{3}} = \frac{45+8\sqrt{3}}{9}.$$

Таким чином, шукані точки:

$$M_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{45-8\sqrt{3}}{9}\right), \quad M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{45+8\sqrt{3}}{9}\right).$$

2) З умови перпендикулярності прямих на площині $k_1 \cdot k_2 = -1$, маємо:

$y'(x_0) = 3(x_0)^2 - 3 = 9$ (кутовий коефіцієнт заданої прямої дорівнює $k_1 = -\frac{1}{9}$, а отже, кутовий коефіцієнт перпендикулярної прямої $k_2 = 9$), звідки

$$3x^2 = 12;$$

$$x^2 = 4;$$

$$x_{1,2} = \pm 2.$$

Знайдемо відповідні значення координати y точок:

$$y_1 = 2^3 - 3 \cdot 2 + 5 = 8 - 6 + 5 = 7;$$

$$y_2 = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 5 = -8 + 6 + 5 = 3;$$

Тобто шукані точки будуть:

$$M_1(2; 7), \quad M_2(-2; 3).$$

3) за умовою дотична утворює з додатнім напрямком осі Ox кут 45°. Пряма, що відповідає цій умові, має вигляд $y = x$ і, відповідно, її кутовий коефіцієнт дорівнює 1. Маємо:

$$3x^2 - 3 = 1;$$

$$3x^2 = 4;$$

$$x^2 = \frac{4}{3};$$

$$x_{1,2} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Знайдемо відповідні значення координати y точок:

$$y_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} + 5 = \frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{6}{\sqrt{3}} + 5 = \frac{8-18+15\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}-10}{3\sqrt{3}} = \frac{45-10\sqrt{3}}{9};$$

$$y_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + 5 = -\frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} + 5 = \frac{-8+18+15\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}+10}{3\sqrt{3}} = \frac{45+10\sqrt{3}}{9};$$

Відповідно, шукані точки будуть:

$$M_1\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{45-10\sqrt{3}}{9}\right), \quad M_2\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{45+10\sqrt{3}}{9}\right).$$

✧ ✧ ✧

14. Знайти диференціал dy функції $y = x^2$:

1) при довільних значеннях x та Δx; 2) при $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$.

Розв'язання.

1) $dy = (x^2)'\Delta x = 2x\Delta x$; $dy = 2xdx$

2) якщо $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$, то $dy = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 = 4$.

✧ ✧ ✧

15. Знайти диференціал даної функції: $y = ctg^3 x$.

Розв'язання.

$$dy = (ctg^3 x)' dx.$$

$$(ctg^3 x)' = 3ctg^2 x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{3ctg^2 x}{\sin^2 x}.$$

$$dy = -\frac{3ctg^2 x}{\sin^2 x} dx.$$

✧ ✧ ✧

16. Знайти диференціал dy функції $y = x^2 \text{tg}(3x + 1)$.

Розв'язання.

$$dy = \left(x^2 \text{tg}(3x + 1)\right)' dx.$$

$$\left(x^2 \text{tg}(3x + 1)\right)' = 2x\text{tg}(3x + 1) + x^2 \cdot \frac{3}{\cos^2(3x+1)} = 2x\text{tg}(3x + 1) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}.$$

Тому:

$$dy = \left(2x\text{tg}(3x + 1) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}\right) dx.$$

✧ ✧ ✧

17. Обчислити Δy та dy функції $y = x^3 + 2x$ в точці $x = 2$, при $\Delta x = 0{,}1$ та при $\Delta x = 0{,}01$. Знайти абсолютну та відносну похибку, які ми допускаємо при заміні приросту функції її диференціалом.

Розв'язання.

Маємо:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 + 2(x + \Delta x) - (x^3 + 2x) = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 +$$

$$(\Delta x)^3 + 2x + 2\Delta x - x^3 - 2x = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2\Delta x =$$

$$(3x^2 + 2)\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 ;$$

$$dy = y' \Delta x = (3x^2 + 2)\Delta x.$$

При $x = 2$ та $\Delta x = 0{,}1$ маємо:

$$\Delta y = (3 \cdot 2^2 + 2) \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 2 \cdot (0{,}1)^2 + (0{,}1)^3 = 1{,}4 + 0{,}06 + 0{,}001 = 1{,}461.$$

$$dy = (3 \cdot 2^2 + 2) \cdot 0{,}1 = 1{,}4.$$

Абсолютна похибка $|\Delta y - dy| = 0{,}061$; а відносна похибка при цьому

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0{,}061}{1{,}461} = 0{,}041,$$

тобто відносна похибка становить біля 4% від значення приросту функції при заміні приросту функції її диференціалом.

За умови, що $x = 2$ та $\Delta x = 0{,}01$, маємо:

$$\Delta y = (3 \cdot 2^2 + 2) \cdot 0{,}01 + 3 \cdot 2 \cdot (0{,}01)^2 + (0{,}01)^3 = 0{,}14 + 0{,}0006 +$$

$$0{,}000001 = 0{,}140601.$$

$$dy = (3 \cdot 2^2 + 2) \cdot 0{,}01 = 0{,}14.$$

При цьому абсолютна похибка $|\Delta y - dy| = 0{,}140601 - 0{,}14 = 0{,}000601$; а відносна похибка

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0{,}000601}{0{,}140601} = 0{,}0042.$$

Отже, відносна похибка становить біля $0{,}4\%$ від значення приросту функції при заміні приросту функції її диференціалом.

✧ ✧ ✧

18. Обчислити наближено $\sqrt{27}$.

Розв'язання.

Перетворимо вираз, що стоїть під знаком радикала:

$27 = 25 + 2 = 25\left(1 + \frac{2}{25}\right)$, звідки $\sqrt{27} = \sqrt{25\left(1 + \frac{2}{25}\right)} = 5\sqrt{1 + \frac{2}{25}}$.

При обчисленні $\sqrt{1 + \frac{2}{25}}$ введемо функцію $y = \sqrt{x}$, тоді $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Тоді:

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x, \text{ де } x = 1,\ \Delta x = \frac{2}{25}.$$

Інакше

$$\sqrt{1 + \frac{2}{25}} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot \frac{2}{25} = 1 + \frac{1}{25} = 1{,}04.$$

Тоді дістанемо:

$$\sqrt{27} \approx 5 \cdot 1{,}04 = 5{,}2.$$

✧✧✧

19. Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено обчислити $arctg\ 0{,}97$.

Розв'язання.

Нехай $arctg\ 0{,}97$ є частинне значення функції $y = arctgx$ при $x = 0{,}97$. Позначимо $x = 1$, $\Delta x = -0{,}03$.

Диференціюючи функцію $y = arctgx$, знайдемо $y' = \frac{1}{1+x^2}$;

Тоді:

$$arctg\ 0{,}97 \approx arctgx + \frac{1}{1+x^2}\Delta x, \text{ де } x = 1,\ \Delta x = -0{,}03.$$

$$arctgx = arctg\ 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785;$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}.$$

Користуючись відповідною формулою, маємо

$$arctg\ 0{,}97 \approx 0{,}785 + \frac{1}{2}(-0{,}03) = 0{,}785 - 0{,}015 = 0{,}77.$$

✧✧✧

20. Задано функцію $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 7$. Знайти y', y'', y''',….

Розв'язання.

Маємо:

$$y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - \frac{1}{2},$$

$$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2,$$

$$y''' = 60x^2 + 48x - 18,$$

$$y^{(4)} = 120x + 48,$$

$$y^{(5)} = 120,$$

$$y^{(6)} = y^{(7)} = \ldots = 0.$$

✧ ✧ ✧

21. $y = \ln x$. Знайти $y^{(n)}$.

Розв'язання.

Маємо:

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}, \qquad y'' = -1 \cdot x^{-2}, \; y''' = -1 \cdot (-2)x^{-3} = 1 \cdot 2x^{-3},$$

$$y^{(4)} = 1 \cdot 2 \cdot (-3)x^{-4} = -1 \cdot 2 \cdot 3x^{-4}, \ldots,$$

$$y^{(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)(-1)^{n-1} \cdot x^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}.$$

✧ ✧ ✧

22. Знайти y'' та d^2y, якщо $y = \ln\left(x + \sqrt{4 + x^2}\right)$.

Розв'язання.

Функція задана явно, а тому, послідовно диференціюючи її, одержимо:

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{4+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{4+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{4+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{4+x^2}+x}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}};$$

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\right)' = -\frac{1}{2}(4+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(4+x^2)^3}};$$

$$d^2y = -\frac{x d^2x}{\sqrt{(4+x^2)^3}}\,(dx)^2.$$

✧ ✧ ✧

23. Знайти y'', якщо $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Розв'язання.

У такому випадку функція задана неявно, а тому диференціюємо її, маючи на увазі, що y залежить від змінної x:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0.$$

Проведемо перетворення і знайдемо вираз для y':

$$\frac{x}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0;$$

$$\frac{yy'}{b^2} = -\frac{x}{a^2};$$

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Тоді продиференціюємо отриманий вираз за змінною x ще раз:

$$y'' = (y')' = \left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)' = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x}{y}\right)' = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-xy'}{y^2};$$

Підставимо замість y' раніше отриманий вираз та остаточно отримаємо:

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-x\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2y^3} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}{a^2y^3} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2b^2\cdot 1}{a^2y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

✧✧✧

24. $\begin{cases} x = t^3 + 2, \\ y = t^2 + t + 1. \end{cases}$ Знайти y''_x.

Розв'язання.

Маємо параметричні рівняння. Знайдемо похідну першого та другого порядків x за змінною t і похідну першого та другого порядків y за змінною t:

$$x'_t = 3t^2; \qquad x''_{tt} = 6t;$$

$$y'_t = 2t + 1; \qquad y''_{tt} = 2.$$

Підставимо отримані вирази до формули $y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}$, маємо:

$$y''_{xx} = \frac{2\cdot 3t^2-(2t+1)\cdot 6t}{(3t^2)^3} = \frac{6t^2-12t^2-6t}{27t^6} = \frac{-6t^2-6t}{27t^6} = \frac{-6t(t+1)}{27t^6} = \frac{-2(t+1)}{9t^5}.$$

✧✧✧

25. Користуючись правилом Лопіталя, знайти границі:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x}$; 2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\cos x-1}$; 3) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-6x+6\sin x}{x^5}$;

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^3+7x+5}$; 5) $\lim_{x\to 0} x^3 \ln x$; 6) $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x$;

7) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$; 8) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

Розв'язання.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x}$.

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 7x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cos 7x}{2}=\frac{7}{2}.$$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\cos x-1}$.

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\frac{e^0-1}{\sin 0}=\frac{1-1}{0}=\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=\frac{e^0}{\cos 0}=\frac{1}{1}=1.$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-6x+6\sin x}{x^5}$.

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-6x+6\sin x}{x^5}=\frac{0^3-6\cdot 0+6\sin 0}{0^5}=\frac{0-0+0}{0}=\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-6+6\cos x}{5x^4}=\frac{3\cdot 0^2-6+6\cos 0}{5\cdot 0^4}=\frac{0-6+6}{0}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Застосовуємо правило Лопіталя ще раз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-6x+6\sin x}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-6+6\cos x}{5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x^2-6+6\cos x)'}{(5x^4)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x-6\sin x}{20x^3}=\frac{6\cdot 0-6\sin 0}{20\cdot 0^3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Застосовуємо правило Лопіталя ще раз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x-6\sin x}{20x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(6x-6\sin x)'}{(20x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos x}{60x^2}=\frac{6-6\cos 0}{60\cdot 0^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Застосовуємо правило Лопіталя ще раз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos x}{60x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(6-6\cos x)'}{(60x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin x}{120x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{20x}=\frac{\sin 0}{20\cdot 0}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Застосовуємо правило Лопіталя ще раз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{20x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(20x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{20}=\frac{\cos 0}{20}=\frac{1}{20}.$$

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^3+7x+5}$.

Виконання граничного переходу призводить до невизначеності виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^3+7x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+3x+1)'}{(2x^3+7x+5)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{6x^2+7}=$ (виконання граничного переходу знову приводить до невизначеності виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, а тому застосовуємо правило Лопіталя повторно):

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)'}{(6x^2+7)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{12x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\cdot 0=0.$$

5) $\lim_{x\to 0} x^3\ln x$.

Тут маємо невизначеність вигляду $\{0\cdot\infty\}$. Зобразимо добуток функції у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0} x^3\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-3})'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0} x^3=$$

$$-\frac{1}{3}\cdot 0^3=0.$$

6) $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Це невизначеність виду $\{0^0\}$. Позначимо функцію, що стоїть під знаком границі, через y, тобто $y=(sin\,x)^x$, і прологарифмуємо її:

$$\ln y=\ln(sin\,x)^x;$$

$$\ln y=x\ln\sin x;$$

$$\ln y=\frac{\ln\sin x}{x^{-1}}.$$

Обчислимо границю логарифма даної функції. Тут маємо невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{x^{-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin x)'}{(x^{-1})'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{x^{-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x}{1}=\lim_{x\to 0}1\cdot\frac{x\cos x}{1}=\lim_{x\to 0} x\cos x=0.$$

Звідси $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x=e^0=1$.

7) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

При $x \to 1$ маємо невизначеність $\{1^{\infty}\}$. Позначимо функцію, що стоїть під знаком границі, через *y*, тобто $y = x^{\frac{1}{x-1}}$, і прологарифмуємо її:

$$\ln y = \ln x^{\frac{1}{x-1}};$$

$$\ln y = \frac{1}{x-1}\ln x;$$

$$\ln y = \frac{\ln x}{x-1}.$$

Обчислимо границю логарифма даної функції. Тут маємо невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 1}\ln y = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1.$$

Звідси $\lim_{x\to 1} y = \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^1 = e$.

8) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$.

Маємо невизначеність виду $\{\infty - \infty\}$. Алгебраїчним перетворенням приведемо цю невизначеність до невизначеності $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, а потім застосуємо правило Лопіталя:

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\sin x)'} =$

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x}$ =(виконання граничного переходу знову приводить до невизначеності виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, а тому застосовуємо правило Лопіталя повторно):

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{1+1-0} = \frac{0}{2} = 0.$$

♢ ♢ ♢

26. Знайти інтервали монотонності функції:

1) $y = x^3 e^{-x}$; 2) $y = 2x^2 - \ln x$.

Розв'язання.

1) $y = x^3 e^{-x}$.

Дана функція визначена на всій числовій осі, тобто $x \in (-\infty; +\infty)$, її похідна $y' = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}$.

Знайдемо критичні точки: $y' = 0$;

$$3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = 0;$$

$$x^2e^{-x}(3 - x) = 0;$$

$$e^{-x} \neq 0; \quad x^2 = 0; \quad 3 - x = 0;$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 3.$$

Точки $x = 0$ та $x = 3$ ділять область визначення функції (всю числову вісь) на три інтервали: $(-\infty; 0);\ (0; 3);\ (3; +\infty)$.

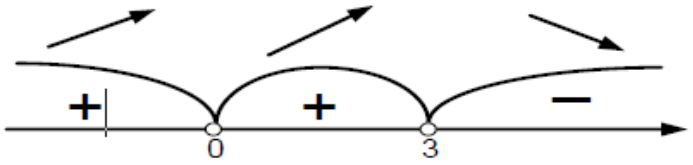
При визначенні знаку похідної слід врахувати, що $e^{-x} > 0$ для будь-яких x. Далі слід обрати довільне значення x з кожного інтервалу та визначитись із знаком похідної на цьому інтервалі:

$$y'(-2) = (-2)^2e^2(3 + 2) > 0;$$

$$y'(1) = (1)^2e^{-1}(3 - 1) > 0;$$

$$y'(4) = (4)^2e^{-4}(3 - 4) < 0.$$

Таким чином, можна схематично зобразити результати досліджень:



Отже, при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$ функція зростає; при $x \in (3; +\infty)$ функція спадає.

2) $y = 2x^2 - \ln x$.

Дана функція визначена для $x > 0$. Її похідна:

$$y' = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}.$$

Знайдемо точки, в яких похідна дорівнює нулю та не існує:

$$y'(x) = 0 \ \Rightarrow \ 4x^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = \frac{1}{2};$$

$$y'(x) \text{ не існує } \Rightarrow \ x = 0.$$

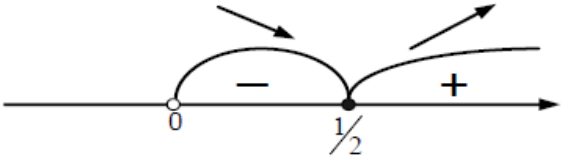
Оскільки задана функція визначна тільки для $x > 0$, то знак її похідної необхідно визначити лише в інтервалах $\left(0; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Розглянемо

$$y'\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1 - 4 < 0;$$

$$y'(2) = 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} = 8 - \frac{1}{2} > 0.$$

Маємо



Отже, при $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ функція спадає; при $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ функція зростає.

✧✧✧

27. Знайти екстремуми функції:

1) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$; 2) $y = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$;

3) $y = x - \ln(1 + x^2)$.

Розв'язання.

1) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

Задана функція визначена та диференційована в усіх точках інтервалу $(-\infty; +\infty)$.

Її похідна

$$y'(x) = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x^2 - 2x - 3) = 6(x + 1)(x - 3).$$

Знайдемо критичні точки:

$$y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6(x + 1)(x - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$$

Таким чином, область визначення функції ділиться на три інтервали: $(-\infty; -1);\ (-1; 3);\ (3; +\infty)$.

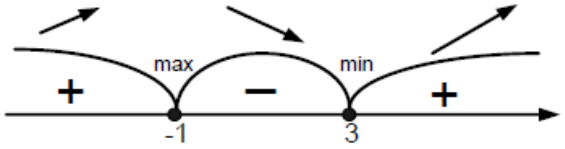
Визначимо знак похідної на кожному інтервалі:

$$y'(-2) = 6(-2 + 1)(-2 - 3) > 0;$$

$$y'(0) = 6(0 + 1)(0 - 3) < 0;$$

$$y'(4) = 6(4 + 1)(4 - 3) > 0.$$

В результаті маємо



Обчислимо значення функції в екстремальних точках, тобто знаходимо шукані екстремуми:

$y_{max} = y(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 - 18 \cdot (-1) + 7 = -2 - 6 + 18 + 7 = 17;$

$y_{min} = y(3) = 2 \cdot 3^3 - 6 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 7 = 54 - 54 + 54 + 7 = -47.$

2) $y = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2.$

Дана функція визначена для $x \in (-\infty; +\infty)$.

Її похідна

$$y = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2 = 3x^{\frac{2}{3}} - x^2.$$

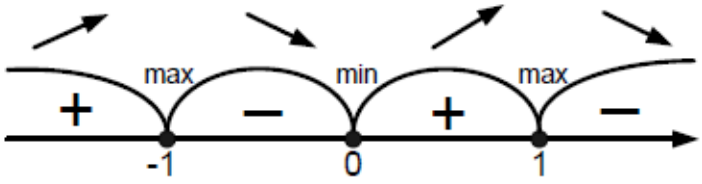
$$y'(x) = 3 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - 2x = 2x^{-\frac{1}{3}} - 2x = 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x\right).$$

Знайдемо точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує:

$$y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - x^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 1 - x^{\frac{4}{3}} = 0; \\ \sqrt[3]{x} \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -1; \quad x_2 = 1; \\ x \neq 0. \end{cases}$$

На визначених інтервалах з'ясуємо знак похідної. Маємо



Таким чином, задана функція має

$$y_{min} = y(0) = 3\sqrt[3]{0^2} - 0^2 = 0;$$

$y_{max} = y(-1) = y(1) = 3\sqrt[3]{1^2} - 1^2 = 3 - 1 = 2$ (це пояснюється тим, що функція парна).

3) $y = x - \ln(1 + x^2).$

Оскільки $1 + x^2 > 0$ для будь-яких x, то область визначення цієї функції є вся числова вісь.

Її похідна

$$y'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{x^2-2x+1}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2} \geq 0.$$

Отже, функція зростає на всій області визначення, екстремумів немає.



28. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^4 - 8x^2 + 3$ на відрізку $[-1, 3]$.

Розв'язання.

Знаходимо похідну та критичні точки першого роду:

$y' = 4x^3 - 16x.$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^3 - 16x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x(x^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow$$

$x_1 = 0; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -2.$

Так, не всі знайдені точки належать відрізку $[-1, 3]$. Обчислимо значення функції в тих критичних точках, які належать заданому відрізку, а саме: $x_1 = 0, x_2 = 2$ та в точках, які є кінцями заданого відрізка $x = -1$ та $x = 3$:

$$y(-1) = (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^2 + 3 = 1 - 8 + 3 = -4;$$

$$y(0) = (0)^4 - 8 \cdot (0)^2 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3;$$

$$y(2) = (2)^4 - 8 \cdot (2)^2 + 3 = 16 - 32 + 3 = -13;$$

$$y(3) = (3)^4 - 8 \cdot (3)^2 + 3 = 81 - 72 + 3 = 12.$$

Із отриманих значень функції в точках вибираємо найбільше та найменше:

$$y_{\text{найм}} = y(2) = -13;$$

$$y_{\text{найб}} = y(3) = 12.$$



29. Знайти інтервали опуклості та угнутості і точки перегину графіка функції $y = x^6 - 6x^5 + \frac{15}{2}x^4 + 3x$.

Розв'язання.

Дана функція визначена на всій числовій осі. Диференціюючи її двічі, одержимо:

$$y' = 6x^5 - 30x^4 + 30x^3 + 3;$$

$$y'' = 30x^4 - 120x^3 + 90x^2 = 30x^2(x^2 - 4x + 3).$$

Знайдемо критичні точки другого роду функції:

$$y'' = 0, \qquad 30x^2(x^2 - 4x + 3) = 0;$$

$$x^2 = 0; \quad x^2 - 4x + 3 = 0;$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3.$$

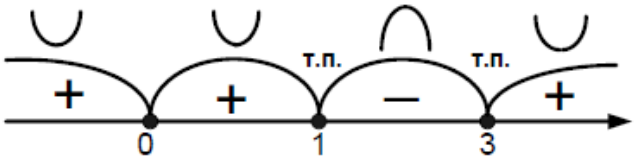
Область визначення розіб'ємо на інтервали критичними точками та визначимо знак y'' на кожному інтервалі.

$$y''(-1) = 30 \cdot (-1)^2((-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3) > 0;$$

$$y''(0{,}5) = 30 \cdot (0{,}5)^2((0{,}5)^2 - 4 \cdot (0{,}5) + 3) > 0;$$

$$y''(2) = 30 \cdot 2^2(2^2 - 4 \cdot 2 + 3) < 0;$$

$$y''(4) = 30 \cdot 4^2(4^2 - 4 \cdot 4 + 3) > 0.$$



Отже, при $x \in (1; 3)$ функція опукла, а при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (3; +\infty)$ функція угнута. В точках $x = 1$ та $x = 3$ друга похідна змінює знак, тому ці точки будуть точки перегину.

✧✧✧

30. Визначити асимптоти кривої $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$.

Розв'язання.

Область визначення даної функції $D(y)$: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, тобто $x = 0$ – точка розриву.

Оскільки

$$\lim_{x\to 0+0} y = \lim_{x\to 0+0} \frac{x^2+2x-1}{x} = \lim_{x\to 0+0} \left(x + 2 - \frac{1}{x}\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0-0} y = \lim_{x\to 0-0} \frac{x^2+2x-1}{x} = \lim_{x\to 0-0} \left(x + 2 - \frac{1}{x}\right) = +\infty,$$

то пряма $x = 0$ (вісь *Ox*) є вертикальною асимптотою.

Для того, щоб знайти похилу асимптоту $y = kx + b$, обчислимо

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+2x-1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-1-x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2.$$

Отже, пряма $y = x + 2$ – похила асимптота для графіка функції.



31. Дослідити функцію $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях x за винятком значення $x = 1$. Звідси її область визначення $D(y)$: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Дослідимо функцію на парність-непарність, періодичність.

$$y(-x) = \frac{2\cdot(-x)-1}{(-x-1)^2} = \frac{-2x-1}{(x+1)^2} = -\frac{2x+1}{(x+1)^2}.$$

Задана функція є загального вигляду (не є ні парною, ні непарною). Також наша функція не є періодичною.

3. Визначимо точки перетину графіка функції з осями координат:

при $x = 0$, $y = \frac{2\cdot 0-1}{(0-1)^2} = -1$;

при $y = 0$, $\frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$,

тобто графік функції перетинає вісь Ox в точці $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, а вісь Oy в точці $(0, -1)$.

4. Дослідимо функцію на неперервність.

Точка $x = 1$ є точкою розриву функції.

$$\lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 1-0} y = \lim_{x\to 1-0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Як ліворуч, так і праворуч точки $x = 1$ маємо нескінченний розрив. Отже, точка $x = 1$ – точка розриву другого роду. Пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції.

$$y' = \frac{2(x-1)^2-2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)\big(2(x-1)-2(2x-1)\big)}{(x-1)^4} = \frac{2x-2-4x+2}{(x-1)^3} = -\frac{2x}{(x-1)^3};$$

$$y' = 0;$$

$$-2x = 0;$$

$$x = 0.$$

$x = 0$ – критична точка.

При $x = 1$ y' не існує, але у цій точці сама функція теж не існує.

Дослідимо критичну точку $x = 0$ на екстремум:

x	$(-\infty, 0)$	0	(0, 1)	1	$(1, +\infty)$
y'	–	0	+	Не існує	–
y	↘	$y_{\min}$ (–1)	↗	Не існує	↘

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+», через це в точці $x = 0$ функція має мінімум:

$$y_{min} = y(0) = \frac{2\cdot 0-1}{(0-1)^2} = \frac{-1}{1} = -1.$$

У точці $x = 1$ функція не визначена.

На інтервалі $x\epsilon(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ функція спадає, а на інтервалі $x\epsilon(0; 1)$ функція зростає.

6. Точки перегину та інтервали опуклості й вгнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{(x-1)^2(-2x+2+6x)}{(x-1)^6} = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4};$$

$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(2x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}.$

При $x = 1$ y'' не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x = -\frac{1}{2}$:

при $x = -1$, $y'' = \frac{2(-2+1)}{(-2)^4} = -\frac{1}{8} < 0(-)$;

при $x = 0$, $y'' = \frac{2}{1} = 2 > 0(+)$.

Друга похідна, проходячи через $x = -\frac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату:

$$y = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2} = -\frac{8}{9} \approx -0{,}9.$$

Таким чином, точка $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9}\right)$ – точка перегину.

У точці $x = 1$ функція не визначена.

Результати дослідження:

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
y''	–	0	+	Не існує	+
y	$\cap$	Перегин (– 8/9)	$\cup$	Не існує	$\cup$

Отже, при $x \in (-\infty; -\frac{1}{2})$ функція опукла, а при $x \in (-\frac{1}{2}; 1) \cup (1; +\infty)$ функція угнута.

7. Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є $y = 0$ (вісь Ox).

8. Дослідимо поведінку функції в нескінченності.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{2(x-1)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1} = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2(x-1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1} = 0.$$

9. На підставі результатів дослідження будуємо графік функції.

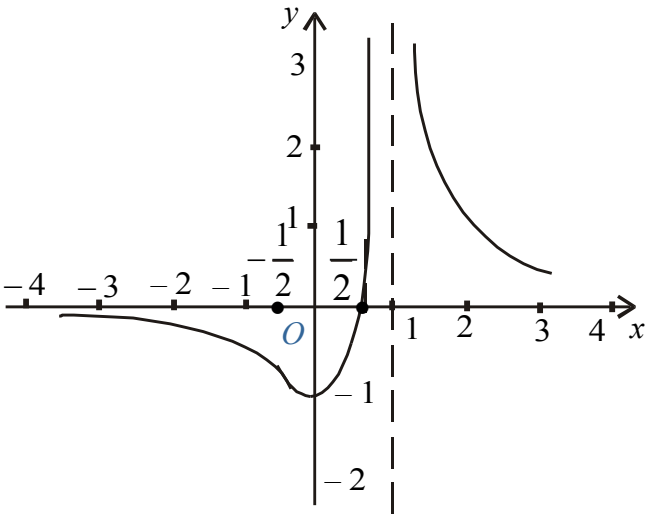


Рис. 6.10.1. Графік функції $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$

6.11. Контрольні запитання

1. Що називається приростом аргументу та приростом функції?
2. Що таке похідна функції?
3. Як визначається похідна функції в точці?
4. Який геометричний зміст похідної?
5. У чому полягає механічне тлумачення похідної?
6. Запишіть основну формулу для знаходження похідної за означенням.

7. Що таке диференційовність функції в точці?

8. Який зв’язок між неперервністю та диференційовністю функції?

9. Сформулюйте основні правила диференціювання.

10. Яка похідна добутку двох функцій?

11. Як знайти похідну частки двох функцій?

12. Яку функцію називають складною? Як знайти похідну складеної функції?

13. Яке правило диференціювання оберненої функції?

14. Правило логарифмічного диференціювання.

15. Формула для знаходження похідної степенево-показникової функції.

16. Яку функцію називають заданою неявно?

17. У чому полягає правило диференціювання функції, заданої неявно?

18. Яка функція називається заданою параметрично?

19. Формула для знаходження похідної від функції, заданої параметрично.

20. Рівняння дотичної та нормалі до кривої.

21. Що називають кутом між двома кривими?

22. Що таке диференціал функції?

23. Як визначається диференціал першого порядку?

24. Який зв’язок між диференціалом і похідною функції?

25. Формула, яку використовують для наближених обчислень за допомогою диференціала.

26. Що називають другою похідною або похідною другого порядку?

27. Що називають n-ою похідною або похідною n-ого порядку?

28. Що називають диференціалом другого, третього, n-ого порядку?

29. Запишіть формулу, для знаходження похідної другого порядку для функції, заданої параметрично.

30. Сформулюйте теорему Ферма.
31. Сформулюйте теорему Ролля.
32. Сформулюйте теорему Лагранжа (середнього значення).
33. Сформулюйте теорему Коші (узагальнену теорему Лагранжа).
34. Сформулюйте правило Лопіталя.
35. Що таке критичні точки функції?
36. Як знайти екстремуми функції за допомогою похідної?
37. В чому полягає необхідна умова існування екстремуму?
38. Сформулюйте достатню умову існування екстремуму.
39. Як визначити проміжки зростання та спадання функції?
40. Як знайти найменше і найбільше значення функції на відрізку?
41. Що таке опуклість функції?
42. Як знайти точки перегину функції?
43. Сформулюйте необхідну умову існування точки перегину кривої.
44. Яку пряму називають вертикальною асимптотою?
45. Який вигляд має рівняння похилої асимптоти?
46. Як знайти асимптоти графіка функції?
47. Як похідна допомагає в дослідженні функції?
48. Алгоритм повного дослідження функції.

6.12. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для функцій:

1) $y = 2x^3 - x^2 + 1$ при $x = 1;\quad \Delta x = 0{,}1;$

2) $y = \frac{1}{x}$ при $x = 2;\quad \Delta x = 0{,}01;$

3) $y = \sqrt{x}$ при $x = 4;\quad \Delta = 0{,}4.$

2. Використовуючи означення похідної як $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, знайти похідні функцій:

1) $y = 3x^2 - 4x;$ 2) $y = cos\, 3\, x;$

3) $y = e^{4x}$; 4) $y = \frac{1}{x^2}$;

5) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 6) $y = \sqrt{4x+1}$.

3. Знайти похідні функцій:

1) $y = 5x^4 + 3x^2 - 6$; 2) $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$;

3) $y = 3cx^2 - 8dx + 5e$; 4) $y = 4x^{\frac{1}{2}} + x^2$;

5) $y = 6x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}}$; 6) $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$;

7) $y = (2x^3 + x^2 - 5)^3$; 8) $y = (1 + 4x^3)(1 + 2x^2)$;

9) $y = e^{4x+5}$; 10) $y = \ln(x^2 + x)$;

11) $y = x \ln x$; 12) $y = \ln^3 x$;

13) $y = \text{arctg}(x^2 - 3x + 2)$; 14) $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x$;

15) $y = \sin\frac{x}{2}\sin 2x$; 16) $y = x^5\sqrt[3]{x^6 - 8}$;

17) $y = \frac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$; 18) $y = \frac{\sqrt[9]{4x^5+2}}{3x^4}$;

19) $y = \arccos\sqrt{1-3x}$; 20) $y = \frac{\arcsin 4x}{1-4x}$;

21) $y = \ln\frac{3x+1}{x+3}$; 22) $y = 2x \cdot \text{tg}2x + \ln\cos 2x - 2x^2$;

23) $y = e^x\sqrt{1-e^{2x}} - \arcsin e^x$; 24) $y = \text{arctg}\frac{3x-x^2}{1-3x^2}$;

25) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$; 26) $y = \sin^2 x \cdot \sin x^2$.

4. Знайти похідні функцій, використовуючи логарифмічне диференціювання:

1) $y = x^{x^2}$; 2) $y = (\sin x)^{\cos x}$;

3) $y = \sqrt[x]{(x+1)^2}$; 4) $y = x^3 e^{x^2}\sin 2x$;

5) $y = \frac{\sin 3x}{2\sin^2 x \cos x}$; 6) $y = (\text{tg}2x)^{\text{ctg}\frac{x}{2}}$;

7) $y = \frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$; 8) $y = \sqrt{\frac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$;

9) $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$; 10) $y = x^{\sin x}$;

11) $y = \sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$; 12) $y = 2x^{\sqrt{x}}$.

5. Знайти похідні функцій, заданих неявно:

1) $x \sin y + y \sin x = 0$;
2) $y^2 - 2xy + b = 0$;
3) $y = cos(x + y)$;
4) $y = 1 + xe^y$;
5) $y = x + \text{arctg}y$;
6) $\cos(xy) = x$;
7) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;
8) $y^2 - 2xy + b^2 = 0$;
9) $x^4 + y^4 = x^2y^2$;
10) $2y \ln y = x$;
11) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$;
12) $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$.

6. Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

1) $x = 1 - t^2; y = t - t^3$;
2) $x = \frac{t+1}{t}; \quad y = \frac{t-1}{t}$;
3) $x = \ln(1 + t^2); y = t - \text{arctg}t$;
4) $x = \frac{1+t^2}{t^2-1}; \quad y = \frac{t}{t^2-1}$;
5) $x = e^t \sin t\,; \; y = e^t \cos t$;
6) $x = \frac{3at}{1+t^2}; \; y = \frac{3at^2}{1+t^2}$;
7) $x = a(t - \sin t); y = a(1 - \cos t)$;
8) $x = 1 - t^2; y = t - t^3$;
9) $x = a \cos^3 t; \; y = b \sin^3 t$;
10) $x = t^2 - 2 \ln t; \; y = \sqrt{2t - 1}$.

7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ у точці (3, 2).

8. До параболи $y = x^2 - 3x + 1$ провести дотичні через точки: 1) (4, 1); 2) (4, 7).

9. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2 - 2xy + 3y^2 - 2y - 16 = 0$ у точці (1, 3).

10. Скласти рівняння дотичних до кривої $y = \frac{8}{4+x^2}$:

1) в точці $x = 2$;

2) в точці перетину з віссю Oy.

11. Задано криву $y = x^2 - 2x$. Скласти рівняння дотичних:

1) в точках перетину її з прямою $3x + y - 2 = 0$;

2) паралельної і перпендикулярної до цієї прямої;

3) що проходять через точку $(1; \; -5)$.

12. Скласти рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$, проведеної в точці гіперболи M (– 9, –8).

13. Скласти рівняння спільних дотичних до кривих $y = x^2$ і $y = -2x^2 + 4x - y$.

14. Показати, що нормаль до кривої $3y = 6x - 5x^3$, проведена в точці $\left(1, \frac{1}{3}\right)$, проходить через початок координат.

15. У яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = x^3 - 1$ дорівнює 3?

16. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої, заданої (параметрично) рівняннями $x = t^2$, $y = t^3$, у точці, для якої $t = 2$.

17. Дано криву $x = t^4 - 2t + 2$, $y = t^2 + 2t$. Скласти рівняння дотичної до неї в точці (1, 3).

18. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x = cos\, t,\ y = sin\, t$ в точці $x = -1/2,\ y = \sqrt{3}/2$. Зробити малюнок.

19. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x = a\, cos^3\, t, y = a\, sin^3\, t$ при $t = \pi/4$.

20. Знайти точки кривої, $x = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 1, y = t^2 + t + 1$, в яких дотична паралельна осі Oy.

21. Знайти точки кривої $x = t^2 + t + 1,\ y = t^3 - 3t + 1$, в якій дотична паралельна осі Ox.

22. Під якими кутами перетинаються парабола $y = x^2$ і пряма $y = 3x + 2$?

23. Під яким кутом перетинаються гіпербола $y = \frac{1}{x}$ і парабола $y = \sqrt{x}$?

24. Знайти кут між кривою $y = x - x^3$ та прямою $y = 5x$.

25. Знайти кут між кривими $y = x^3$ та $y = \frac{1}{x^2}$.

26. Знайти кут між кривими $x^2 + y^2 = 5, y^2 = 4x$.

27. Знайти кут між кривими $y = \sqrt{2}\, sin\, x\, , y = \sqrt{2}\, cos\, x$.

28. Знайти диференціали функцій:

1) $y = x^2$;
2) $y = 2x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}} + 6x^{-1} + 5$;
3) $y = \sqrt{1 + x^2}$;
4) $y = \ln cos^2 x$;
5) $y = \frac{x^3+1}{x^3-1}$;
6) $y = \frac{2x}{x^3-x}$;
7) $y = e^x \ln x$;
8) $y = \text{tg}^2 x$;
9) $y = \ln \sqrt{1 - x^2}$;
10) $y = 5^{\ln \text{tg} x}$.

29. Знайти наближено, використовуючи рівність $\Delta y \approx dy$:

1) 4,1;
2) $(1{,}02)^5$;
3) $\sqrt[3]{68}$;
4) lg12;
5) $\cos 63°$;
6) $\sin 48°$;
7) arctg 0,97;
8) arcsin 0,4836;
9) $(0{,}98)^{3{,}03}$;
10) $\frac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98} \cdot \sqrt[4]{1{,}05^3}}$;
11) $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right)$;
12) $e^{0{,}05}$.

30. Дано функцію. Знайти її похідну вищого порядку:

1) $y = x^2 - 3x + 2;\ y'' = ?$
2) $y = 1 - x^2 - x^4;\ y''' = ?$
3) $y = x^6 - 4x^3 + 4;\quad y^{(4)}(1) = ?$
4) $y = (x^2 + 1)^3;\quad y'' = ?$
5) $y = e^{2x-1};\ y''(0) = ?$
6) $y = \frac{1}{1-x};\quad y^{(5)}(x) = ?$
7) $y = \sqrt[5]{x^3};\ y''' = ?$
8) $y = a^{3x};\ y''' = ?$
9) $y = x^2 e^{2x};\ y^{(4)} = ?$
10) $y = e^x \sin x;\ y^{(4)} = ?$
11) $y = \sin x \cos^2 x;\ y^{(4)} = ?$
12) $y = \sin x \cos x;\ y^{(50)} = ?$

31. Знайти загальний вираз похідних n-го порядку для функцій:

1) $y = e^{ax}$;
2) $y = \sin x$;
3) $y = xe^x$;
4) $y = \ln x$.

32. Довести, що функція $y = e^{-x} \cos x$ задовольняє рівняння $y^{(4)} + 4y = 0$.

33. Довести, що коли $y = e^x \sin x$ і $z = e^x \cos x$, то $y'' = 2z$ і $z'' = -2y$.

34. Знайти другий диференціал функцій:

1) $y = x^3 + 2x^2 - 5x + 7;$ 2) $y = \sin x + \cos 2x;$

3) $y = e^x + xe^{-x};$ 4) $y = \ln(x^2 + 1);$

5) $y = \sqrt{x^2 + 4};$ 6) $y = x^5 e^x.$

35. Знайти y'', якщо

1) $x^2 - y^2 = a^2;$ 2) $x^2 = 4ay;$

3) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}};$ 4) $x^4 + y^4 = x^2y^2;$

5) $x^4 + y^4 = x^2y^2;$ 6) $y = cos(x + y).$

7) $x = t^2 + 1,\ \ y = t^3 - t;$ 8) $x = \sin t\,, y = \cos t;$

9) $x = e^t, y = e^{-t};$ 10) $x = \mathrm{t} + \ \sin t\,, y = t - \cos t;$

11) $x = \ln t\,;\ \ y = t^2;$ 12) $x = t^2e^t, y = te^{-t}.$

36. Користуючись правилом Лопіталя, знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{2x};$ 2) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2+3x+1}{2x^3+7x+5};$

3) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{9x^4-2x+5}{2x^3+7x+6};$ 4) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^4+6x^2+9}{4x^4-x^3+2x+1};$

5) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x+x}{e^x-x};$ 6) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}};$

7) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3};$ 8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{sin\, x};$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\mathrm{arctg}\ x}{x^3};$ 10) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{c^x-d^x};$

11) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x-tg\, x};$ 12) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-e^x}{x\sqrt{1-x^2}};$

13) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln\, x}{lnsin\, x};$ 14) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{ln(1-x)+\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}{\mathrm{ctg}\ \pi x};$

15) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\mathrm{ctg}x - \frac{1}{x}\right);$ 16) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{ln\, x}\right];$

17) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{sin\, x} - \frac{1}{x}\right);$ 18) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right);$

19) $\lim\limits_{x\to \infty} x \cdot \sin\frac{1}{x};$ 20) $\lim\limits_{x\to \infty} xe^{-x};$

21) $\lim\limits_{x\to 0}(x \cdot \mathrm{ctg}\pi x);$ 22) $\lim\limits_{x\to 0}(arcsin\, x \cdot \mathrm{ctg}x);$

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]$;

24) $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2 e^{\frac{1}{x^2}}\right]$;

25) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$;

26) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$;

27) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$;

28) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$;

29) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$;

30) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

37. Знайти інтервали монотонності функції:

1) $y=x^4-2x^2-5$;

2) $y=(x-2)^5(2x+1)^4$;

3) $y=2-3x+x^3$;

4) $y=xe^{-x}$;

5) $y=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$;

6) $y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$;

7) $y=x-e^x$;

8) $y=\frac{x}{\ln x}$;

9) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

10) $y=2\sin x+\cos 2x$;
$(0\le x\le 2\pi)$.

38. Показати, що функція $y=2x^3+3x^2-12x+1$ спадає на інтервалі $(-2,1)$.

39. Показати, що коли функція $y=\sqrt{2x-x^2}$ зростає на інтервалі $(0,1)$, то вона спадає на інтервалі $(1,2)$.

40. Показати, що функція $y=x^3+x$ скрізь зростає.

41. Показати, що функція $y=arctg\,x-x$ скрізь спадає.

42. Показати, що функція $y=\frac{x^2-1}{x}$ зростає на будь-якому інтервалі, в який не входить точка $x=0$.

43. Знайти екстремуми функції:

1) $y=2x^3-3x^2$;

2) $y=3x^3-9x^2-27x+30$;

3) $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$;

4) $y=x^3-9x^2+15x-3$;

5) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$;

6) $y=(x-1)^3(x-2)^2$;

7) $y = (x+1)^{\frac{2}{3}}(x-5)^2$;

8) $y = \frac{x^2-7x+6}{x-10}$;

9) $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$;

10) $y = \sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$;

11) $y = -x^2\sqrt{x^2+2}$;

12) $y = x - \ln(1+x^2)$;

13) $y = (x-5)^2\ \sqrt[3]{(x+1)^2}$;

14) $y = \frac{1}{\ln(x^4+4x^3+30)}$.

44. Знайти найбільше і найменше значення функцій у заданих проміжках:

1) $y = x^4 - 2x^2 + 5;\ \ [-2;\ 2]$;

2) $y = x + 2\sqrt{x};\ \ [0;\ 4]$;

3) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1; [-1;\ 2]$;

4) $y = \sqrt{100-x^2};\ \ [-6;\ 8]$;

5) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2};\ \ [0;\ 1]$;

6) $y = \frac{x-1}{x+1};\ [0;\ 4]$;

7) $y = \ln(x^2+1)\,;\ [-2;2]$;

8) $y = e^x - x^2;\ [-1;2]$;

9) $y = sin\,2\,x - x;\ \ \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$;

10) $y = \sin x + \cos x\ ;\ [0;\frac{\pi}{2}]$.

45. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості графіків функцій:

1) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$;

2) $y = (x+1)^4 + e^x$;

3) $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$;

4) $y = (x+2)^6 + 2x + 2$;

5) $y = \ln\,(1+x^2)$;

6) $y = e^{sin\,x};\ \ \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$;

7) $y = e^{-x^2}$;

8) $y = x^4(12\,ln\,x - 7)$.

9) $12x^3y - 12\,ln\,x + 5 = 0$;

10) $x = a(t - sin\,t)$;
$y = a(1 - cos\,t)$.

46. Знайти асимптоти таких ліній:

1) $y = \frac{1}{x^2-4x+5}$;

2) $y = \frac{x^2+3x+2}{x-1}$;

3) $y = \frac{\ln x}{x}$;

4) $y = e^x - \frac{1}{x}$;

5) $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$;

6) $y = \frac{ln^2\,x}{x} - 3x$.

47. Дослідити функції та побудувати їх графіки:

1) $y = \frac{1}{x+2}$;

2) $y = \frac{-2x+1}{x+1}$;

3) $y = \frac{x+1}{x}$;

4) $y = \frac{3-2x}{1-x}$;

5) $y = \frac{x}{1+x^2}$;

6) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$;

7) $y = \frac{1}{1+x^2}$;

8) $y = \frac{x}{x^2-1}$;

9) $y = (x^2-1)^3$;

10) $y = \frac{x^3}{x^2-4}$;

11) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$;

12) $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$;

13) $y = \sqrt{x^2-3x+2}$;

14) $y = \sqrt{9-x^2}$;

15) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$;

16) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

17) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$;

18) $y = \frac{1}{4x-x^2+5}$;

19) $y = 16x(x-1)^3$;

20) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$;

21) $y = \ln(x^2+1)$;

22) $y = \frac{x}{e^x}$;

23) $y = \frac{1}{\log_2 x}$;

24) $y = \log_3 \frac{1}{x}$;

25) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

26) $y = x^2 e^{-x^2}$;

27) $y = e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$;

28) $y = e^{\frac{1}{x}} - x$;

29) $y = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$;

30) $\log_{3-x}(x^2-1)$;

48. Розкласти многочлен $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ за степенями двочлена $x - 4$.

49. Розкласти многочлен $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ за степенями двочлена $x + 1$.

50. Розкласти многочлен $x^{10} - 3x^3 + 1$ за степенями двочлена $x - 1$.

51. Записати формулу Тейлора *n*-го порядку для функції $y = \frac{1}{x}$ при $x_0 = 1$.

52. Записати формулу Маклорена *n*-го порядку для функції $y = xe^x$.

53. Записати формулу Тейлора *n*-го порядку для функції $y = \sqrt{x}$ при $x_0 = 4$.

Розділ

7

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

7.1. Невизначений інтеграл. Властивості невизначеного інтеграла. Основні методи інтегрування

Інтегральне числення виникло як відповідь на потребу обчислення площ плоских фігур, об'ємів тіл, визначення центрів тяжіння та розв'язання інших задач. Його перші елементи використовував ще Архімед, однак систематичний розвиток цей метод отримав у XVII столітті завдяки працям Б. Кавальєрі, Е. Торічеллі, П. Ферма, Б. Паскаля та інших учених.

У 1659 році англійський математик І. Барроу встановив зв'язок між задачами знаходження площі та дотичної. Подальший розвиток ці ідеї отримали у 1670-х роках завдяки І. Ньютону і Г. Лейбніцу, які узагальнили цей зв'язок і заклали основи диференціального та інтегрального числення. Це значно прискорило розвиток методів інтегрування.

Сучасні методи інтегрування сформувалися завдяки роботам Л. Ейлера, а їх подальше вдосконалення стало можливим завдяки працям М. Остроградського та П. Чебишова.

7.1.1. Первісна та невизначений інтеграл

У диференціальному численні функції однієї змінної за заданою функцією $f(x)$ відшукувалась її похідна $f'(x)$. Можна поставити обернену задачу: відомо, що функція $f(x)$ є похідною деякої функції $F(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, якщо $f\ (x) = 2x$, то легко здогадатись, що $F\ (x) =\ x^2$.

Нехай функція $f(x)$ задана на деякому інтервалі. Тоді функція $F(x)$, називається ***первісною функції*** $f(x)$ на деякому інтервалі, якщо $F(x)$ диференційовна на цьому інтервалі, причому $F'(x) = f(x)$.

Очевидно, що якщо для функції існує первісна, то вона не є єдиною. Так, у наведеному прикладі первісними функції $f\ (x) = 2x$ є, наприклад, $F_1\ (x) = x^2 + 1$, $F_2\ (x) =\ x^2 - 3$, ..., чи, в загальному, сім'я функцій $F\ (x) =\ x^2 + \mathrm{C}$, де C – довільна стала.

Теорема (про множину всіх первісних). Якщо функція $F(x)$ є однією з первісних функції $f(x)$ на деякому інтервалі, то будь-яка інша первісна функції $f(x)$ на цьому інтервалі має вигляд $F(x) + C$, де C − довільне дійсне число.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ має дві первісні $F_1\ (x)$ і $F_2\ (x)$ на деякому інтервалі, то вони відрізняються між собою на стале число: $F_1\ (x) - F_2\ (x) = \mathrm{C}$.

Геометрична інтерпретація теореми. Якщо $y_1 = F_1\ (x)$ і $y_2 = F_2\ (x)$ – первісні однієї і тієї ж функції $f(x)$, то величина $F_1\ (x) - F_2\ (x) = y_1 - y_2$ залишається сталою: $F_1\ (x) - F_2\ (x) = \mathrm{C}$. Тобто $y = F(x)\ +\ \mathrm{C}$ є рівняння сім'ї кривих, які утворюються одна з одної паралельним перенесенням уздовж осі ординат, ці криві в певному розумінні «паралельні» між собою (рис. 7.1.1).

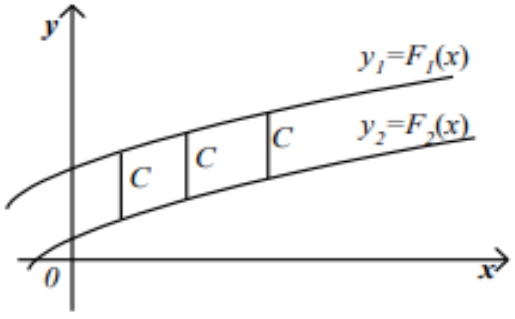


Рис. 7.1.1. Сім'я первісних $F(x)$

Множина всіх первісних функції $f(x)$ називається ***невизначеним інтегралом функції*** $\boldsymbol{f(x)}$ і позначається символом $\int f(x)\,dx$.

У цьому позначенні функція $f(x)$ називається ***підінтегральною функцією***, а вираз $f(x)dx$ − ***підінтегральним виразом***. Функція $f(x)$ називається ***інтегровною на деякому інтервалі***.

З теореми і означення випливає, що

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

де $F(x)$ − одна з первісних функції $f(x)$, а C − довільне дійсне число (довільна стала).

Знаходження невизначеного інтеграла від даної функції $f(x)$ називається ***інтегруванням*** цієї функції. Задача інтегрування функції на проміжку полягає у тому, щоб знайти всі первісні функції на цьому проміжку, або довести, що функція не має первісних на цьому проміжку. Для розв'язування задачі інтегрування функції достатньо знайти одну будь-яку первісну на розглядуваному проміжку, наприклад $F(x)$, тоді (за теоремою про множину первісних) $F(x) + \mathrm{C}$ – загальний вигляд всієї множини первісних на цьому проміжку.

Інтегрування є операцією, оберненою до диференціювання. Щоб перевірити, чи правильно виконано інтегрування, достатньо продиференціювати первісну і одержати при цьому підінтегральну функцію. Якщо ж похідна від первісної відмінна від підінтегральної функції, то при інтегруванні допущено помилки.

Теорема. Для кожної неперервної на проміжку функції існує невизначений інтеграл на цьому проміжку.

Властивості невизначеного інтеграла

Нехай функції $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ інтегровні на деякому інтервалі.

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, тобто

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

2. Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто

$$d\int f(x)\,dx = f(x)dx.$$

3. Невизначений інтеграл від диференціала функції дорівнює сумі функції та довільної сталої, тобто

$$\int dF(x)\,dx = F(x) + C.$$

4. Сталий множник, що не дорівнює нулю, можна виносити за знак інтеграла, тобто

$$\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx\,,\ C\epsilon R,\ C \neq 0.$$

5. Невизначений інтеграл від алгебричної суми (різниці) неперервних функцій дорівнює алгебричній сумі (різниці) невизначених інтегралів від кожної із функцій, тобто, якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ – неперервні на (a, b), то на цьому інтервалі справедливі рівності:

$$\int\big(f_1(x) \pm f_2(x)\big)\,dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)\,dx.$$

6. Якщо $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,\ \ a, b\,\epsilon R, a \neq 0.$$

Зауваження. Властивість 5 поширюється на довільну скінченну кількість функцій.

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int 0\,dx = C;$	2. $\int 1\,dx = \int dx = x + C;$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ для $n \neq -1;$	4. $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C;$
5. $\int e^x\,dx = e^x + C;$	6. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$
7. $\int \sin x\ dx = -\cos x + C;$	8. $\int \cos x\ dx = \sin x + C;$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C;$	10. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C;$
11. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C;$	12. $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C;$	14. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C;$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm b}}\,dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm b}\right\rvert + C;$	16. $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C;$
17. $\int \operatorname{tg} x\;dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C;$	18. $\int \operatorname{ctg} x\;dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C;$
19. $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left\lvert tg\,\frac{x}{2}\right\rvert + C;$	20. $\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln\left\lvert tg\,\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C.$

Інтеграли, що знаходяться безпосередньо з використанням формул 1) – 20), називаються ***табличними.***

7.1.2. Основні методи інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування

Безпосереднє інтегрування – це найпростіший спосіб знаходження невизначеного інтеграла, який ґрунтується на знанні таблиці основних інтегралів та властивостей інтегрування.

Суть методу полягає у тому, що для знаходження інтеграла достатньо підібрати таку функцію, похідна якої дорівнює підінтегральному виразу.

Інтегрування розкладанням.

Мета методу – розкласти підінтегральну функцію на такі доданки, інтеграли від яких відомі або їх простіше інтегрувати, ніж початкову підінтегральну функцію.

Цей спосіб використовують, коли підінтегральна функція є сумою кількох членів, або її можна розкласти на простіші дроби, степені, тригонометричні чи логарифмічні функції.

Інтегрування заміною змінної (підстановкою)

Нехай необхідно обчислити інтеграл $\int f(x)dx$, причому безпосередньо підібрати первісну для функції $f(x)$ не вдається, хоча відомо, що вона існує.

Мета методу підстановки – перетворити даний інтеграл до такого вигляду, який простіше інтегрувати.

Теорема (про інтегрування підстановкою). Якщо функція $f(x)$ неперервна на деякому проміжку $< a; b >$, а функція $x = \varphi(t)$ неперервна разом з похідною $\varphi'(t)$ на проміжку $< \alpha; \beta >$, причому значення функції $\varphi(t)$ належать проміжку $< a; b >$, то

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t) dt.$$

Зауваження.

1) Функцію $x = \varphi(t)$ треба вибирати так, щоб невизначений інтеграл можна було звести до табличного.

2) Після інтегрування необхідно повернутись до «старої» змінної x, виразивши t через x: $t = \varphi^{-1}(x)$.

Очевидно, що успіх інтегрування значною мірою залежить від того, чи вдасться підібрати вдалу заміну змінних, яка б спростила обчислення інтегралу. Корисну інформацію, що полегшує підбір, подано у табл.

№ з/п	**Вигляд інтеграла**	**Заміна змінної**	**Новий вигляд інтеграла**
1.	$\int x f(x^2)\, dx$	$x^2 = t$	$\frac{1}{2}\int f(t)\, dt$
2.	$\int x^2 f(x^3)\, dx$	$x^3 = t$	$\frac{1}{3}\int f(t)\, dt$
3.	$\int \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)\, dx$	$\frac{1}{x} = t$	$-\int f(t)\, dt$
4.	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x})\, dx$	$\sqrt{x} = t$	$2\int f(t)\, dt$
5.	$\int \frac{1}{x} f(\ln x)\, dx$	$\ln x = t$	$\int f(t)\, dt$
6.	$\int \cos x\, f(\sin x)\, dx$	$\sin x = t$	$\int f(t)\, dt$
7.	$\int \sin x\, f(\cos x)\, dx$	$\cos x = t$	$-\int f(t)\, dt$

8.	$\int \frac{1}{\cos^2 x} f(\operatorname{tg} x)\, dx$	$\operatorname{tg} x = t$	$\int f(t)\, dt$
9.	$\int \frac{1}{\sin^2 x} f(\operatorname{ctg} x)\, dx$	$\operatorname{ctg} x = t$	$-\int f(t)\, dt$
10.	$\int e^x f(e^x)\, dx$	$e^x = t$	$\int f(t)\, dt$
11.	$\int a^x f(a^x)\, dx$	$a^x = t$	$\frac{1}{\ln a}\int f(t)\, dt$
12.	$\int \frac{1}{1+x^2} f(arctg\ x)\, dx$	$arctg\ x = t$	$\int f(t)\, dt$
13.	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(arcsin\ x)\, dx$	$arcsin\ x = t$	$\int f(t)\, dt$
14.	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$	$f(x) = t$	$\int \frac{d\,(f(x))}{f(x)} = \ln\lvert f(x)\rvert + C$

Інтегрування частинами

Теорема (про інтегрування частинами). Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ неперервні разом із своїми похідними на проміжку $< a; b >$, то

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Щоб застосувати формулу інтегрування частинами, необхідно підінтегральний вираз розбити на два множники, один з яких позначити через u, а інший через dv. При цьому: 1) dx повинен бути віднесений до dv; 2) вираз dv слід вибирати так, щоб легко можна було знайти функцію v, оскільки $v = \int dv$ (сталу C не додавати – можна вважати, що $C = 0$); 3) за u вибираємо ту функцію з підінтегрального виразу, яка при диференціюванні спрощується.

Метод інтегрування частинами зручно використовувати у випадках, коли підінтегральна функція містить:

1) добутки функцій $x^n \sin ax$; $x^n \cos ax$; $x^n a^{ax}$;

2) деякі вирази, в які входять логарифмічні та обернені тригонометричні функції;

3) деякі інші функції, зокрема, вигляду $e^{ax} \sin bx$, $e^{ax} \cos bx$, $\sin(\ln x)$, $\cos(\ln x)$.

Детальніші рекомендації подано в табл.

№ з/п	Вид інтеграла	Множник u	Множник dv
1.	$\int P_n(x)\begin{Bmatrix} e^{kx} \\ a^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix} dx$	$u = P_n(x)$	$dv = \begin{Bmatrix} e^{kx} \\ a^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix} dx$
2.	$\int P_n(x)\begin{Bmatrix} \arcsin kx \\ \arccos kx \\ \operatorname{arctg} kx \\ \ln^m kx \end{Bmatrix} dx$	$u = \begin{Bmatrix} \arcsin kx \\ \arccos kx \\ \operatorname{arctg} kx \\ \ln^m kx \end{Bmatrix}$	$dv = P_n(x)dx$
3.	$\int \begin{Bmatrix} \sin(\ln x) \\ \cos(\ln x) \end{Bmatrix} dx$	$u = \begin{Bmatrix} \sin(\ln x) \\ \cos(\ln x) \end{Bmatrix}$	$dv = dx$
4.	$\int e^{ax}\begin{Bmatrix} \sin(bx) \\ \cos(bx) \end{Bmatrix} dx$	*Довільний вибір множника*	*Довільний вибір множника*
5.	$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$	$u = \sqrt{a^2 - x^2}$	$dv = dx$

7.1.3. Інтегрування раціональних функцій

Інтегрування деяких класів функцій, що містять квадратний тричлен.

Розглянемо методику обчислення деяких інтегралів, що містять у знаменнику квадратний тричлен:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}; \qquad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}};$$

$$I_3 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx; \qquad I_4 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx;$$

Для обчислення інтегралів I_1 та I_2 спочатку перетворимо квадратний тричлен, виділивши у ньому повний квадрат:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right).$$

Позначимо $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2, k>0$, причому знак «+» чи «–» вибирається залежно від того, додатним чи від'ємним є число $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$.

Зробивши заміну $x+\frac{b}{2a}=t;\ \ dx=dt$, отримаємо:

$$I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{ak}arctg\frac{t}{k}+C=\frac{1}{ak}arctg\frac{x+\frac{b}{2a}}{k}+C$$

або

$$I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2-k^2}=\frac{1}{2ak}\ln\left|\frac{x+\frac{b}{2a}-k}{x+\frac{b}{2a}+k}\right|+C.$$

$$I_2=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm k^2}\right|+C=\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2}\right|+C,$$

якщо $a>0$

або

$$I_2=\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{k}+C=\arcsin\frac{x+\frac{b}{2a}}{k}+C=\arcsin\frac{2ax+b}{2ak}+C,\ \text{якщо}\ a<0.$$

У випадку інтегралів I_3 та I_4 в чисельнику підінтегральної функції виділяємо похідну квадратного тричлена ax^2+bx+c і розкладаємо цей інтеграл на суму двох інтегралів. Зокрема, для інтеграла I_3 робимо такі перетворення:

$$I_3=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Другий інтеграл є інтегралом типу I_1, а у першому зробимо заміну змінних $t=ax^2+bx+c$:

$$I_3=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c|+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1.$$

Інтеграл $I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ за допомогою перетворень, аналогічних як і для I_3, зводиться до табличного інтеграла $\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C$ та інтеграла типу I_2.

Інтегрування раціональних дробів

Дріб називається ***раціональним***, якщо його чисельник та знаменник є многочленами, тобто дріб має вигляд

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

де a_i, b_j – дійсні числа, $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$.

Раціональний дріб називається *правильним*, якщо найвищий показник степеня чисельника $P_m(x)$ менше відповідного степеня знаменника $Q_n(x)$ $(m < n)$; в іншому випадку $(m \geq n)$ дріб називається ***неправильним***. Якщо дріб неправильний, тоді треба поділити чисельник на знаменник і одержати заданий дріб у правильному вигляді.

Найпростішими **(*елементарними*)** дробами називаються правильні дроби такого виду:

I. $\frac{A}{x-a}$;

II. $\frac{B}{(x-b)^k}$, де k – ціле число, більше одиниці;

III. $\frac{Dx+E}{x^2+px+q}$, де $\frac{p^2}{4} - q < 0$, тобто квадратний тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів;

IV. $\frac{Gx+F}{(x^2+rx+s)^l}$, де l – ціле число, більше одиниці, і квадратний тричлен $x^2 + rx + s$ не має дійсних коренів.

У всіх чотирьох випадках передбачається, що $A, B, D, E, G, F, p, q, r, s, a, b$ – дійсні числа. Перераховані дроби будемо, відповідно, називати найпростішими дробами I, II, III й IV типів.

Розглянемо інтеграли від найпростіших дробів перших трьох типів. Інтеграли від найпростіших раціональних дробів першого та другого типів знаходять методом безпосереднього інтегрування. Маємо

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{1}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C;$

II. $\int \frac{B}{(x-b)^k}dx = B\int (x-b)^{-k}\,dx = B\frac{(x-b)^{-k+1}}{-k+1} = \frac{B}{(1-k)(x-b)^{k-1}} + C.$

При інтегруванні найпростішого дробу третього типу треба спочатку в знаменнику виділити повний квадрат, а потім той вираз, що під квадратом, замінити через нову змінну.

III. $\int \frac{Dx+E}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Dx+E}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx$

Позначимо $t = x + \frac{p}{2},\ x = t - \frac{p}{2},\ dx = dt, a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, звідки

$$\int \frac{Dx+E}{x^2+px+q}dx = \int \frac{D\left(t-\frac{p}{2},\right)+E}{t^2+a^2}dt = \int \frac{Dt-\frac{Dp}{2}+E}{t^2+a^2}dt = D\int \frac{t}{t^2+a^2}dt -$$

$$-\left(\frac{Dp}{2}-E\right)\int \frac{1}{t^2+a^2}dt = \frac{D}{2}\ln|t^2+a^2| - \left(\frac{Dp}{2}-E\right)\cdot\frac{1}{a}arctg\ \frac{t}{a} + C.$$

Повертаючись до змінної x, та враховуючи, що $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$ або $a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$ одержимо:

$$\int \frac{Dx+E}{x^2+px+q}dx = \frac{D}{2}\ln\left|\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right| - \left(\frac{Dp}{2}-E\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\ \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C =$$

$$\frac{D}{2}\ln|x^2+px+q| - \left(\frac{Dp-2E}{2}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\ \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Інтеграл від дробу IV типу шляхом повторного інтегрування частинами зводять до інтеграла від дробу III типу.

Будь-який правильний раціональний дріб розкладається на суму найпростіших раціональних дробів, коефіцієнти яких можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.

Вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника $Q_n(x)$. Можливі такі випадки:

1. Корені знаменника дійсні та різні, тобто

$$Q_n(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$$

тоді

$$\frac{P_{m_1}(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}.$$

Невизначені коефіцієнти $A_1, A_2, \ldots, A_n$ знаходять з цієї тотожності.

2. Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні, тобто

$$Q(x) = (x - \alpha) \cdot (x - \beta)^k,$$

тоді

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{B_k}{(x-\beta)^k}.$$

3. Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні, крім того знаменник містить квадратний тричлен, який не розкладається на множники, тобто

$$Q(x) = (x - \alpha) \cdot (x - \beta)^k (x^2 + px + q),$$

тоді

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{B_k}{(x-\beta)^k} + \frac{Dx+E}{x^2+px+q}.$$

Необхідно обчислити невизначені коефіцієнти $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_k, D, E,$ для чого привести останню рівність до спільного знаменника, прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах отриманої тотожності та розв'язати систему лінійних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів. Можна визначити коефіцієнти і в інший спосіб, надаючи в отриманій тотожності змінній x довільних числових значень. Часто буває корисно комбінувати обидва способи обчислення коефіцієнтів.

7.1.4. Інтегрування деяких класів ірраціональних функцій

Інтегрування ірраціональних функцій є досить складною задачею. Розглянемо деякі класи ірраціональних функцій, інтеграли від яких за допомогою відповідних підстановок зводяться до інтегралів від раціональних функцій.

Інтеграли вигляду $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx$, $(n = 2,3\ldots.\ ,\ a, b \in R,\ a \neq 0)$.

Якщо підінтегральний вираз містить лише лінійну ірраціональність $\sqrt[n]{ax+b}$, то, використовуючи заміну $\sqrt[n]{ax+b} = t$ (звідки $x = \frac{t^n - b}{a}$, $dx = \frac{nt^{n-1}}{a}\,dt$), підінтегральну функцію вдається раціоналізувати:

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx = \int R(\frac{t^n - b}{a}, t)\,\frac{nt^{n-1}}{a}\,dt.$$

Інтеграли вигляду $\int R(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots., x^{\frac{p_k}{q_k}})\,dx$.

Якщо підінтегральний вираз є раціональною функцією своїх аргументів, $p_i \in Q, q_i \in N$, то заміною $x^{\frac{1}{n}} = t$, де n – спільний знаменник дробів $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}$, підінтегральна функція виразиться через раціональну функцію змінної t.

Інтеграли вигляду $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$.

Виділенням під знаком радикала повного квадрата та відповідною лінійною заміною змінних такі інтеграли зводяться до одного з трьох видів:

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx.$$

Ці інтеграли за допомогою «тригонометричних» підстановок зводяться до інтегралів від раціональних функцій. Зокрема:

1) для інтеграла $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$ застосовується підстановка $x = a\cos t$ або $x = a\sin t$;

2) для інтеграла $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ застосовується підстановка $x = a\,tgt$ або $x = a\,ctgt$;

3) для інтеграла $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, застосовується підстановка $x = \frac{a}{\sin t}$ або $x = \frac{a}{\cos t}$.

7.1.5. Інтегрування деяких класів тригонометричних функцій

Інтеграли вигляду $\int R(\cos x;\ \sin x)dx$, де R – раціональна функція, зводяться до інтегралів від раціональних функцій нової змінної t за допомогою так званої універсальної тригонометричної підстановки $t = tg\frac{x}{2}$. У такому випадку $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Отримаємо $\int R(\cos x;\ \sin x)dx = \int R(\frac{1-t^2}{1+t^2};\ \frac{2t}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)\,dt$, де $R_1(t) = R(\frac{1-t^2}{1+t^2};\ \frac{2t}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}$ – раціональна функція.

На практиці універсальна тригонометрична підстановка може призвести до громіздких раціональних функцій. Тому в окремих випадках зручно використовувати деякі інші підстановки, які випливають із властивостей підінтегральної функції $R(\cos x;\ \sin x)$.

Сформулюємо і покажемо приклади застосування таких правил:

1. Якщо $R(\cos x;\ \sin x)$ є непарною функцією відносно $\sin x$, тобто $R(\cos x;\ -\sin x) = -R(\cos x;\ \sin x)$, то інтеграл зводиться до інтегралу від раціональної функції підстановкою $\cos x = t$. Тоді: $\sin x = \sqrt{1-t^2}$, $-\sin x\,dx = dt$, $dx = -\frac{dt}{\sin x}$.

2. Якщо $R(\cos x;\ \sin x)$ є непарною функцією відносно $\cos x$, тобто $R(-\cos x;\ \sin x) = -R(\cos x;\ \sin x)$, то інтеграл зводиться до інтегралу від

раціональної функції підстановкою $\sin x = t$. Тоді: $\cos x = \sqrt{1-t^2}$, $\cos x\, dx = dt$, $dx = \frac{dt}{\cos x}$.

3. Якщо функція $R(\cos x;\ \sin x)$ задовольняє умову $R(-\cos x; -\sin x) = R(\cos x;\ \sin x)$, то інтеграл зводиться до інтеграла від раціональної функції підстановкою $tgx = t$. Тоді: $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Зауваження. Наведені вище підстановки можна застосовувати і у випадках, коли підінтегральна функція не є раціональною функцією.

Обчислення інтегралів вигляду $\int \sin \alpha x \cos \beta x\, dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x\, dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x\, dx$.

Такі інтеграли за допомогою тригонометричних формул

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

зводяться до суми інтегралів вигляду $\int \sin kx\, dx$, $\int \cos kx\, dx$.

Обчислення інтегралів вигляду $\int sin^k x\, cos^l x\, dx$.

Якщо степені k та l парні, то для обчислення інтегралу $\int \sin^{2n} x \cos^{2m} x\, dx$ $(m, n = 0,1,2 \ldots)$ використовують тригонометричні формули пониження степеня

$$cos^2 x = \frac{1+cos2x}{2},\ sin^2 x = \frac{1-cos2x}{2},\ cosx \cdot sin\, x = \frac{sin2x}{2}.$$

Якщо хоча б один з показників степеня є непарним, то підінтегральна функція є непарною відносно функції $\sin x$ (якщо непарним є показник степеня $\sin x$) або функції $\cos x$ (якщо непарним є показник степеня $\cos x$). А ці випадки вже розглядалися вище (потрібно провести заміну $\cos x = t$ або $\sin x = t$ відповідно).

7.2. Визначений інтеграл

Визначений інтеграл є одним із фундаментальних понять математичного аналізу, що широко використовується для обчислення площ, об'ємів, довжин дуг і багатьох інших величин. Історично поняття первісної функції тісно пов'язане зі задачею про знаходження площі фігури.

7.2.1. Означення визначеного інтеграла. Властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$, що набуває лише невід'ємних значень (рис. 7.2.1).

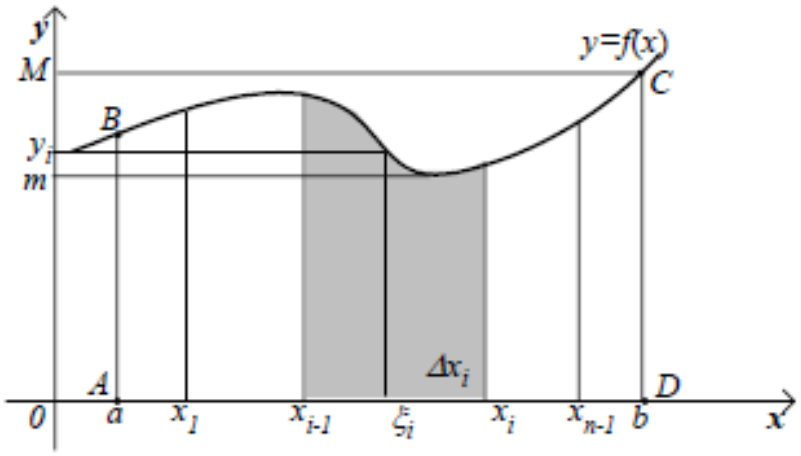


Рис. 7.2.1. Криволінійна трапеція

Якщо для довільних розбиттів відрізка $[a; b]$, діаметри δ яких прямують до нуля, і для довільного вибору точок ξ_i на відрізках $[x_{i-1};\ x_i]$ інтегральна сума $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_{x_i}$ прямує до одного і того ж числа S, то це число називається ***визначеним інтегралом (інтегралом Рімана)*** функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначається $\int_a^b f(x)dx$, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_{x_i}.$$

Число a називається ***нижньою межею інтеграла***, b – ***верхньою межею***, $[a; b]$ – ***відрізок інтегрування***, x – ***змінна інтегрування***.

Якщо для функції $f(x)$, визначеної на $[a; b]$, границя послідовності інтегральних сум існує, то функція $f(x)$ називається ***інтегровною (за Ріманом) на відрізку*** $[a; b]$.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то її визначений інтеграл існує.

Властивості, що визначаються рівностями

1. Величина визначеного інтеграла не залежить від змінної інтегрування: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

2. При зміні порядку інтегрування знак інтеграла змінюється на протилежний: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

З цієї властивості випливає, що $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

3. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)\,dx\,, C \neq 0 \text{ – довільне число;}$$

4. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ інтегровні на відрізку $[a; b]$, то їх сума (різниця) $f_1(x) + f_2(x)$ $\big(f_1(x) - f_2(x)\big)$ також інтегровна на $[a; b]$ функція, причому

$$\int_a^b \big(f_1(x) \pm f_2(x)\big)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx;$$

5. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, для довільного с ϵ $(a; b)$;

Властивості, що визначаються нерівностями

Вкажемо декілька властивостей визначених інтегралів, що виражаються нерівностями, причому вважаємо, що $a < b$.

1. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a;\ b]$ і $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

2. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a;\ b]$, то функція $|f(x)|$ також інтегровна на $[a;\ b]$, причому

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

3. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;\ b]$ і M та m – її найбільше і найменше значення на цьому відрізку, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

4. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ інтегровні на відрізку $[a;\ b]$ і $f_1(x) \le f_2(x)$ на цьому відрізку, то $\int_a^b f_1(x)\,dx \le \int_a^b f_2(x)\,dx$.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$, то існує точка $c \in [a;b]$ така, що $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Число $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ називається ***середнім значенням функції*** $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$.

Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ − одна з первісних функції $f(x)$.

Ця формула називається формулою Ньютона-Лейбніца.

Формула Ньютона-Лейбніца дає зручний спосіб обчислення визначеного інтеграла у тому випадку, коли відома первісна підінтегральної функції.

Зауваження. Якщо проміжок інтегрування є симетричним відносно початку координат, то для парної функції $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, а для непарної функції $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$, функція $\varphi(t)$ неперервна разом з похідною $\varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha;\beta]$, причому $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $a < \varphi(t) < b$, коли t є $[\alpha;\ \beta]$. Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt.$$

Зауваження. Зазначимо одну особливість цієї формули. В той час, як при обчисленні невизначеного інтеграла за допомогою заміни змінних, отримавши шукану функцію через змінну t, ми повинні були повертатись до «старої» змінної x, то у визначеному інтегралі повертатись до «старої» змінної не потрібно.

Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема. Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ неперервні на відрізку $[a;\ b]$ разом із своїми похідними $u'(x)$ і $v'(x)$, то справедлива формула

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu.$$

7.2.2. Геометричні застосування визначеного інтеграла

Основними геометричними застосуваннями визначеного інтеграла є: обчислення площі плоскої фігури, обчислення об’ємів тіл обертання навколо осей координат і обчислення довжини дуги плоскої кривої.

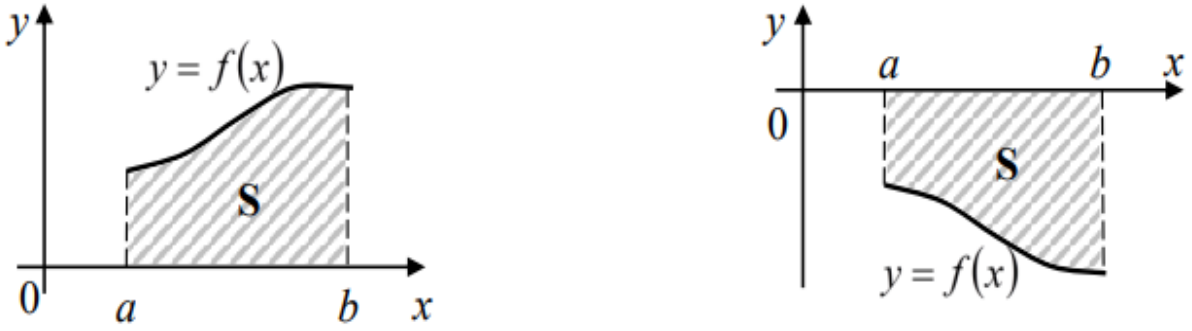
А. Площа плоскої фігури

I. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$. Функція $f(x)$ − неперервна та $f(x) \geq 0$. Площа S такої криволінійної трапеції (рис. 7.2.2 (а)) обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Якщо при виконанні всіх інших умов $f(x) \leq 0$ (рис. 7.2.2 (б)), то

$$S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$



а) б)

Рис. 7.2.2. Криволінійна трапеція обмежена кривою $f(x)$, віссю Ox, вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$

II. Фігура обмежена лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$. Функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ − неперервні та $f_2(x) \geq f_1(x)$ для $x \epsilon [a; b]$. Площа S такої фігури (рис. 7.2.3) визначається обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\, dx.$$

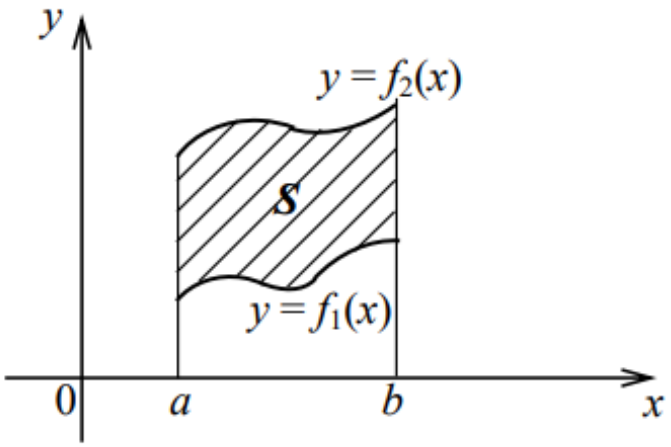


Рис. 7.2.3. Криволінійна трапеція обмежена лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a, x = b$.

Зауваження. Якщо плоска фігура має складну форму, то прямими, паралельними осі Oy, її варто розбити на частині таким чином, щоб можна було застосовувати вже відомі формули.

Б. Довжина дуги кривої

Нехай на відрізку $[a;\ b]$ плоска крива задана рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ – неперервна разом із похідною функція. Тоді довжина дуги обчислюється за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Довжина дуги кривої, заданої параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t)$, де $x(t)$ і $y(t)$ – неперервні на $[\alpha;\ \beta]$ функції, що мають неперервні похідні, виражається формулою

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

В. Обчислення об'єму тіла обертання

Тілом обертання навколо осі Ox називається фігура, отримана від обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної на відрізку $[a;\ b]$ кривої $y = f(x)$ і прямими $y = 0,\ x = a$ і $x = b$ (рис.7.2.5).

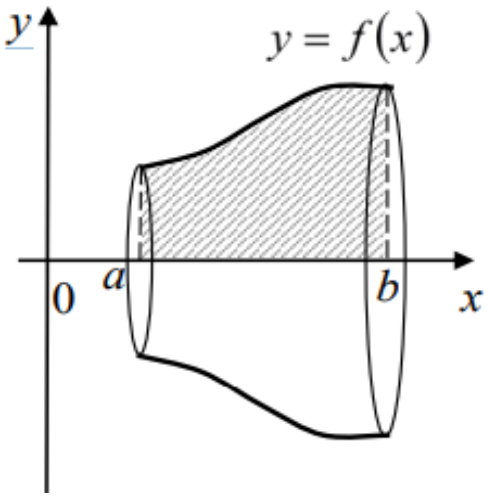


Рис. 7.2.5. Тілом обертання навколо осі Ox

Об'єм тіла обертання навколо осі Ox визначається за формулою:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Тілом обертання навколо осі Oy називається фігура, отримана від обертання навколо осі Oy криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної на відрізку $[a;\ b]$ кривої $y = f(x)$ і прямими $x = 0$, $y = c$ і $y = d$ (рис. 7.2.6).

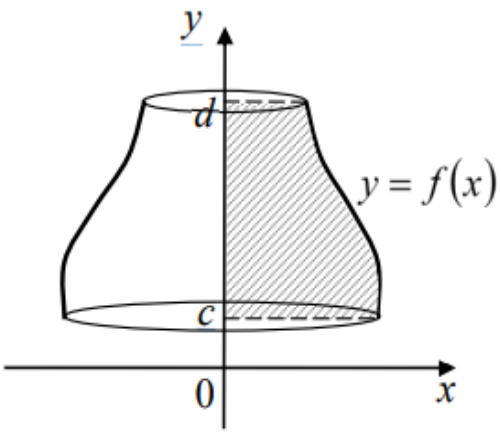


Рис. 7.2.6. Тілом обертання навколо осі Oy

Об'єм тіла обертання навколо осі Oy визначається за формулою:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y)dy.$$

7.3. Невластиві інтеграли

При означенні інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ вимагалось, щоб проміжок інтегрування $[a;\ b]$ був скінченним і підінтегральна функція $f(x)$ була визначена та обмежена на $[a;\ b]$. Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ називається ***невластивим (невласним) інтегралом.***

7.3.1. Інтеграли з необмеженими границями (невластиві інтеграли першого роду)

Означення інтеграла з необмеженими границями

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $[a;+\infty)$ та інтегровна на довільному відрізку $[a;\ b] \subset [a;+\infty)$.

Якщо існує скінченна границя $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$, то вона називається ***значенням невластивого інтегралу першого роду*** від функції $f(x)$ на інтервалі $[a;+\infty)$ і позначається $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, тобто

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

У цьому випадку кажуть, що ***невластивий інтеграл існує*** або ***збігається***. Якщо вказана границя дорівнює нескінченності або не існує, то говорять, що ***невластивий інтеграл не існує*** або ***розбігається.***

Геометричний зміст невластивого інтеграла першого роду: оскільки $\int_a^b f(x)\,dx$ для невід'ємної функції $f(x)$ дорівнює площі області, обмеженої лінією $y=f(x)$, віссю Ox і прямими $x=a$, $x=b$, то природно вважати, що невластивий інтеграл першого роду виражає площу необмеженої області, обмеженої лініями $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$. Наприклад, якщо $f(x)=\frac{1}{x^2}$, то $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ визначає площу криволінійної трапеції в межах $[1;+\infty)$ (рис. 7.3.1).

Аналогічно визначається невластивий інтеграл першого роду на інтервалі $(-\infty;b]$.

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(-\infty;b]$ та інтегровна на довільному відрізку $[a;b]\subset(-\infty;b]$. Якщо існує скінченна границя $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$, то вона називається ***значенням невластивого інтегралу першого роду*** від функції $f(x)$ на інтервалі $(-\infty;b]$ і позначається $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$, тобто

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

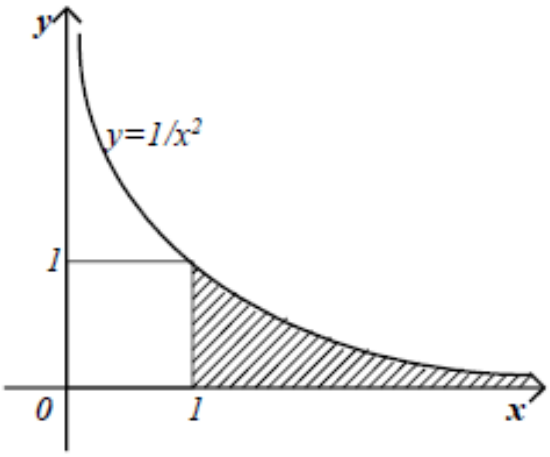


Рис.7.3.1. Геометричний зміст невластивого інтеграла першого роду

Нехай функція $f(x)$ визначена для всіх $x \in$ Ў та інтегровна на довільному відрізку $[a;\ b] \subset$ Ў. Візьмемо довільне число $c \in$ Ў.

Якщо збігаються невластиві інтеграли $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ і $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$, то невластивий інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ називається ***збіжним*** і $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$. Якщо хоча б один з невластивих інтегралів $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$, $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ розбігається, то $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ називається ***розбіжним***.

Застосування формули Ньютона-Лейбніца

В обчисленні невластивих інтегралів можна використовувати формулу Ньютона-Лейбніца. Дійсно,

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(x)|_{a}^{b} = F(b) - F(a) \text{ і}$$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}(F(b) - F(a)) = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a).$$

Очевидно, що невластивий інтеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ існує тоді і лише тоді, коли існує скінченна границя $\lim_{b\to+\infty} F(b) = F(+\infty)$, звідки $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)|_{a}^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$.

Аналогічно можна записати формули для обчислення інших невластивих інтегралів першого роду:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(x)|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty).$$

Ознаки збіжності невластивих інтегралів першого роду

У багатьох випадках потрібно лише встановити збіжність чи розбіжність невластивого інтеграла і оцінити його значення. Сформулюємо ***ознаки збіжності невластивого інтеграла першого роду.***

Теорема 1 (ознака порівняння). Нехай на проміжку $[a; +\infty)$ визначені дві невід'ємні функції $f(x)$ та $g(x)$, які інтегровні на кожному скінченному відрізку $[a;\ b]$ і задовольняють нерівність $f(x) \le g(x)$. Тоді:

а) якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ збігається, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ також збігається і $0 \le \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$;

б) якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ розбігається, то інтеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ також розбігається.

Теорема 2 (гранична ознака порівняння). Нехай на проміжку $[a; +\infty)$ визначені дві невід'ємні функції $f(x)$ та $g(x)$, які інтегровні на кожному скінченному відрізку $[a;\ b]$. Тоді, якщо існує скінченна границя $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c > 0$, то інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ та $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

На практиці для дослідження на збіжність невластивого інтеграла першого роду його порівнюють з іншим, збіжність чи розбіжність якого відома, наприклад, з інтегралом вигляду $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$.

Абсолютна збіжність невластивого інтеграла першого роду

Сформульовані вище ознаки збіжності не можуть бути застосовані до знакозмінної функції $f(x)$. У цьому випадку встановлюють збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Якщо цей інтеграл збіжний, то кажуть, що функція $f(x)$ ***абсолютно інтегровна на*** $[a;+\infty)$.

Теорема 3. Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ є збіжним, то збігається і $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

У цьому випадку інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ називається ***абсолютно збіжним***.

Зауваження. Твердження, аналогічні до теорем 1, 2, 3, правильні також для невластивих інтегралів першого роду вигляду $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

7.3.2. Інтеграли від розривних функцій (невластиві інтеграли другого роду)

Означення інтеграла від необмеженої функції

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $[a;b)$, обмежена на довільному відрізку $[a;b-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ і необмежена на проміжку $[a;b)$ (рис. 7.3.2).

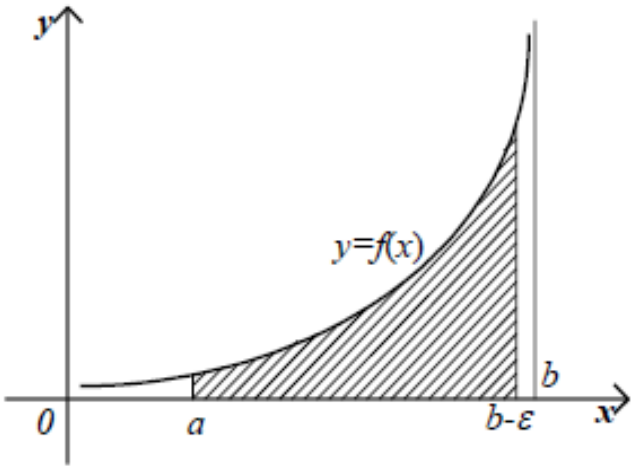


Рис. 7.3.2. Геометричний зміст невластивого інтеграла другого роду (особливість у точці b)

Точка b називається ***особливою точкою***, а інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ називається ***невластивим інтегралом другого роду***. Якщо існує скінченна границя $\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, то інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ називається ***збіжним невластивим інтегралом другого роду*** і $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$. Якщо $\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ не існує або дорівнює нескінченності, то невластивий інтеграл другого роду називається ***розбіжним***.

Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $(a;b]$, але необмежена на цьому проміжку, тобто $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$, то $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ (рис.7.3.3). Аналогічно, якщо $\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ не існує або дорівнює нескінченності, то невластивий інтеграл другого роду називається ***розбіжним***.

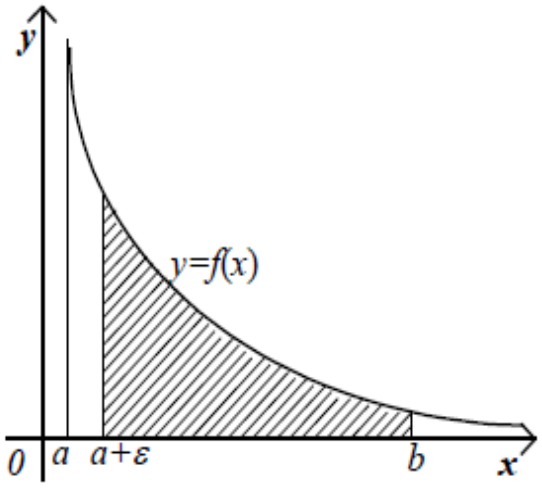


Рис. 7.3.3. Геометричний зміст невластивого інтеграла другого роду (особливість у точці a)

Якщо функція $f(x)$ має розрив у деякій точці $x = c$ всередині відрізка $[a;b]$ (рис.7.3.4), то $\int_a^b f(x)\,dx$ називається ***збіжним невластивим інтегралом другого роду***, якщо $\int_a^c f(x)\,dx$ та $\int_c^b f(x)\,dx$ збіжні. Тоді $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. Якщо хоча б один з інтегралів $\int_a^c f(x)\,dx$ або $\int_c^b f(x)\,dx$ розбіжний, то $\int_a^b f(x)\,dx$ вважається розбіжним.

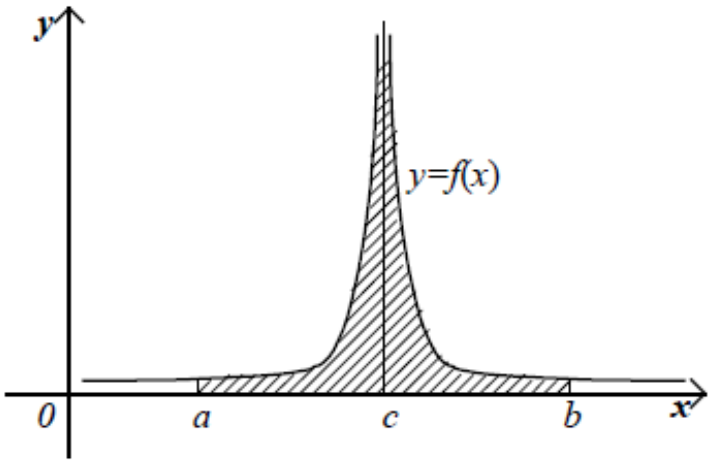


Рис. 7.3.4. Геометричний зміст невластивого інтеграла другого роду (особливість у точці c)

Зауваження. Якщо функція $f\ (x)$ визначена на відрізку $[a;b]$ за винятком n точок розриву другого роду (позначимо їх $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$), то невластивий інтеграл другого роду від функції $f\ (x)$ на відрізку $[a;b]$ визначається так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\alpha_1} f(x)\,dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{\alpha_n}^b f(x)\,dx$$

Якщо кожен з невластивих інтегралів у правій частині збігається, то $\int_a^b f(x)\,dx$ вважатимемо збіжним. Якщо хоча б один з цих інтегралів є розбіжним, то інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ теж розбіжний.

7.4. Розв'язування прикладів і задач

✧ ✧ ✧

1. Знайти інтеграли:

а) $\int \sqrt{x}\,dx$; б) $\int \sqrt[3]{x^2}dx$; в) $\int 2^x dx$; г) $\int \frac{dx}{9+x^2}$;

д) $\int\left(3x - \sqrt[7]{x^5} + 2\,sinx - 3\right)dx$; е) $\int \frac{4dx}{3x^2-15}$;

є) $\int(2x+5)(x-4)dx$; ж) $\int \cos(3x-5)\,dx$; з) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$.

Розв'язання.

а) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C;$

б) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C;$

в) $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C;$

г) $\int \frac{dx}{9+x^2} = \int \frac{dx}{x^2+3^2} = \frac{1}{3}arctg\,\frac{x}{3} + C.$

д) $\int\left(3x - \sqrt[7]{x^5} + 2\,sinx - 3\right)dx = \int 3xdx - \int \sqrt[7]{x^5}dx + \int 2\,sinx\,dx - \int 3\,dx =$

$= 3\int xdx - \int x^{5/7}dx + 2\int sinx\,dx - 3\int dx = 3\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^{\frac{12}{7}}}{\frac{12}{7}} - 2\cos x - 3x +$

$C = \frac{3x^2}{2} - \frac{7}{12}\sqrt[7]{x^{12}} - 2\cos x - 3x + C;$

е) $\int \frac{4dx}{3x^2-15} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x^2-5} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{4}{3}\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C = \frac{2}{3\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C;$

є) $\int(2x+5)(x-4)dx = \int(2x^2+5x-8x-20)dx = \int(2x^2-3x-$

$20)dx = 2\int x^2dx - 3\int xdx - 20\int dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 20x + C;$

ж) $\int \cos(3x-5)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x-5) + C;$

з) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5^2-(3x)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{5} + C;$

✧ ✧ ✧

2. Знайти інтеграли, спростивши підінтегральну функцію:

а) $\int \frac{1}{cos^2x\cdot sin^2x}dx;$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}dx;$ в) $\int \frac{x^4}{x^2+2}dx.$

Розв'язання.

а) $\int \frac{1}{cos^2x\cdot sin^2x}dx = \int \frac{cos^2x+sin^2x}{cos^2x\cdot sin^2x}dx = \int \frac{cos^2x}{cos^2x\cdot sin^2x}dx + \int \frac{sin^2x}{cos^2x\cdot sin^2x}dx =$

$\int \frac{1}{sin^2x}dx + \int \frac{1}{cos^2x}dx = -cgtx + tgx + C;$

б) $\int \frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}\right)}dx = \int \frac{\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+4}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}dx =$

$\int \frac{\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}\right)}{x+4-x+1}dx = \int \frac{\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}\right)}{5}dx = \frac{1}{5}\int \sqrt{x+4}dx - \frac{1}{5}\int \sqrt{x-1}dx =$

$\frac{1}{5}\int(x+4)^{\frac{1}{2}}dx-\frac{1}{5}\int(x-1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{5}\frac{(x+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{15}\sqrt{(x+4)^3}-$

$\frac{2}{15}\sqrt{(x-1)^3}+C.$

в) $\int\frac{x^4}{x^2+2}dx=\int\frac{x^4-4+4}{x^2+2}dx=\int\frac{(x^2-2)(x^2+2)+4}{x^2+2}dx=\int\frac{(x^2-2)(x^2+2)}{x^2+2}dx+$

$\int\frac{4}{x^2+2}dx=\int(x^2-2)\,dx+4\int\frac{1}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}dx=\frac{x^3}{3}-2x+4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C=\frac{x^3}{3}-$

$2x+2\sqrt{2}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

✧✧✧

3. Методом заміни змінної знайти інтеграли:

а) $\int\frac{dx}{x\ln x}$; б) $\int\frac{dx}{x\ln^3 x}$; в) $\int x^2(5x^3+7)^8dx$;

г) $\int\frac{arctg\,x}{1+x^2}dx$; д) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}$.

Розв'язання.

а) $\int\frac{dx}{x\ln x}=\begin{vmatrix}t=\ln x\\dt=\frac{dx}{x}\\dx=xdt\end{vmatrix}=\int\frac{xdt}{xt}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\ln x|+C;$

б) $\int\frac{dx}{x\ln^3 x}=\begin{vmatrix}t=\ln x\\dt=\frac{dx}{x}\\dx=xdt\end{vmatrix}=\int\frac{xdt}{xt^3}=\int\frac{dt}{t^3}=\int t^{-3}dt=\frac{t^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2\ln^2 x}+C;$

в) $\int x^2(5x^3+7)^8dx=\begin{vmatrix}t=5x^3+7\\dt=15x^2dx\\dx=\frac{dt}{15x^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{15}\int t^8dt=\frac{t^9}{15\cdot9}+C=\frac{(5x^3+7)^9}{135}+C;$

г) $\int\frac{arctg\,x}{1+x^2}dx=\begin{vmatrix}t=arctg\,x\\dt=\frac{1}{1+x^2}dx\\dx=(1+x^2)dt\end{vmatrix}=\int\frac{t}{1+x^2}(1+x^2)dt=\int tdt=\frac{t^2}{2}+C=$

$\frac{arctg^2x}{2}+C;$

д) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}} = \left| \begin{matrix} t = \sqrt{x+3} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}dx \\ dx = 2\sqrt{x+3}dt \end{matrix} \right| = \int \frac{2\sqrt{x+3}dt}{1+t} = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{(t+1-1)dt}{1+t} =$

$2\int \frac{(t+1)dt}{1+t} - 2\int \frac{dt}{1+t} = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t} = 2t - 2\ln(t+1) + C = 2\sqrt{x+3} -$

$2\ln\left(\sqrt{x+3}+1\right) + C.$

✧✧✧

4. Методом інтегрування частинами знайти інтеграли:

а) $\int xe^x dx$; б) $\int (x-3)\sin x\, dx$; в) $\int x^3 \ln x\, dx$.

Розв'язання.

а) $\int xe^x dx = \left| \begin{matrix} u = x \\ dv = e^x dx \\ du = dx \\ v = e^x \end{matrix} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C;$

б) $\int (x-3)\sin x\, dx = \left| \begin{matrix} u = x-3 \\ dv = \sin x\, dx \\ du = dx \\ v = -\cos x \end{matrix} \right| = -(x-3)\cos x + \int \cos x\, dx =$

$-(x-3)\cos x + \sin x + C = (3-x)\cos x + \sin x + C;$

в) $\int x^3 \ln x\, dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \\ dv = x^3 dx \\ du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{matrix} \right| = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\, dx =$

$\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C.$

✧✧✧

5. Обчислити інтеграли, виділенням повного квадрата в квадратному тричлені:

а) $\int \frac{dx}{x^2-8x+23}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-4x^2}}$; в) $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$;

г) $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$; д) $\int \frac{4x-3}{x^2-5x-7}dx$; е) $\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{x^2+4x-1}}$.

Розв'язання.

а) $\int \frac{dx}{x^2-8x+23} = \int \frac{dx}{(x-4)^2+7} = \left|\begin{matrix} t = x-4 \\ dt = dx \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} arctg\ \frac{t}{\sqrt{7}} + C =$

$\frac{1}{\sqrt{7}} arctg\ \frac{x-4}{\sqrt{7}} + C.$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(\frac{5}{4}+x-x^2\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}+x-x^2\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{6}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)}} =$

$\left|\begin{matrix} t = x-\frac{1}{2} \\ dt = dx \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{6}{4}-t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-t^2}} = \frac{1}{2}\cdot \arcsin\frac{t}{\frac{\sqrt{6}}{2}} + C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} + C =$

$\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{6}} + C.$

в) $\int \frac{dx}{x^2+6x+25} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+16} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4^2} = \frac{1}{4} arctg\frac{x+3}{4} + C;$

г) $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+5dx}{x^2-4x+8} = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)dx}{x^2-4x+8} + 5\int \frac{dx}{x^2-4x+8} = \frac{3}{2}\ln|x^2-4x+$

$8| + 5\int \frac{dx}{(x-2)^2+2^2} = \frac{3}{2}\ln|x^2-4x+8| + \frac{5}{2} arctg\frac{x-2}{2} + C;$

д) $\int \frac{4x-3}{x^2-5x-7}dx = \int \frac{2(2x-5)+7}{x^2-5x-7}dx = \int \frac{2(2x-5)}{x^2-5x-7}dx + \int \frac{7}{x^2-5x-7}dx =$

$2\int \frac{2x-5}{x^2-5x-7}dx + 7\int \frac{1}{x^2-5x-7}dx = 2\int \frac{2x-5}{x^2-5x-7}dx + 7\int \frac{1}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{53}{4}}dx =$

$2\ln|x^2-5x-7| + \frac{7}{\sqrt{53}}\ln\left|\frac{2x-5-\sqrt{53}}{2x-5+\sqrt{53}}\right| + C;$

$2\int \frac{2x-5}{x^2-5x-7}dx = \left|\begin{matrix} t = x^2-5x-7 \\ dt = (2x-5)dx \\ dx = \frac{dt}{(2x-5)} \end{matrix}\right| = 2\int \frac{2x-5}{t}\cdot\frac{dt}{(2x-5)} = 2\int \frac{dt}{t} = 2\ln|t| =$

$2\ln|x^2-5x-7|;$

$7\int \frac{1}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{53}{4}}dx = \left|\begin{matrix} t = x-\frac{5}{2} \\ dt = dx \end{matrix}\right| = 7\int \frac{1}{t^2-\left(\frac{\sqrt{53}}{2}\right)^2}dx = \frac{7}{2\cdot\frac{\sqrt{53}}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{\sqrt{53}}{2}}{t+\frac{\sqrt{53}}{2}}\right| =$

$\frac{7}{\sqrt{53}}\ln\left|\frac{x-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{53}}{2}}{x-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{53}}{2}}\right| = \frac{7}{\sqrt{53}}\ln\left|\frac{2x-5-\sqrt{53}}{2x-5+\sqrt{53}}\right|;$

е) $\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{x^2+4x-1}} = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4)-8}{\sqrt{x^2+4x-1}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+4)}{\sqrt{x^2+4x-1}}dx - 8\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x-1}}dx =$

$3\sqrt{x^2+4x-1} - 8\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-1}\right| + C;$

$\frac{3}{2}\int \frac{(2x+4)}{\sqrt{x^2+4x-1}}dx = \left|\begin{matrix} t = x^2+4x-1 \\ dt = (2x+4)dx \\ dx = \frac{dt}{2x+4}\end{matrix}\right| = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+4)}{\sqrt{t}}\cdot\frac{dt}{2x+4} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{t} = 3\sqrt{t} =$

$3\sqrt{x^2+4x-1};$

$8\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x-1}}dx = 8\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+4-5}}dx = 8\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-5}}dx = \left|\begin{matrix} t = x+2 \\ dt = dx\end{matrix}\right| =$

$8\int \frac{1}{\sqrt{t^2-5}}dx = 8\ln\left|t+\sqrt{t^2-5}\right| = 8\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-5}\right| = 8\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-1}\right|.$

♢ ♢ ♢

6. Знайти інтеграли від раціональних функцій:

а) $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx,$ б) $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx,$

в) $\int \frac{1}{x^5-x^2}dx,$ г) $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx.$

Розв'язання.

а) $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$

Оскільки кожний з двочленів $x-1,\ x-2,\ x-4$ входить до знаменника у першому ступені, тоді даний правильний раціональний дріб може бути представлений у вигляді суми найпростіших дробів I типу:

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx = \int \frac{A}{x-1}dx + \int \frac{B}{x-2}dx + \int \frac{C}{x-4}dx.$$

Звільняючись від знаменників, одержимо

$x^2+2x+6 = A(x-2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x-2).$

Отже,

$x^2+2x+6 = A(x^2-6x+8) + B(x^2-5x+4) + C(x^2-3x+2).$

Згрупуємо члени з однаковими ступенями:

$x^2+2x+6 = (A+B+C)x^2 + (-6A-5B-3C)x + (8A+4B+2C).$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях x, одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A+B+C=1, \\ -6A-5B-3C=2, \\ 8A+4B+2C=6, \end{cases}$$

з якої знайдемо $A=3,\ B=-7,\ C=5$.

Отже, розкладання раціонального дробу на найпростіші має вигляд

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{5}{x-4}.$$

Невідомі A, B, C у розкладанні можна було визначити й інакше. Після звільнення від знаменника можна надати x стільки часткових значень, скільки є в системі невідомих, у даному випадку – три часткових значення.

Особливо зручно надати x значення, що є дійсними коренями знаменника. Застосуємо цей прийом до розв'язання даної задачі. Після звільнення від знаменника ми одержали рівність (*). Дійсними коренями знаменника є числа 1, 2, і 4. Покладемо в цій рівності $x=1$, тоді

$$1^2+2\cdot 1+6=A(1-2)(1-4)+B(1-1)(1-4)+C(1-1)(1-2),$$

звідки $9=3A$, тобто $A=3$. Вважаючи $x=2$, одержуємо $14=-2B$, тобто $B=-7$; вважаючи $x=4$, маємо $30=6C$, тобто $C=5$. У результаті вийшли ті ж значення, що й при першому способі визначення невідомих.

Таким чином,

$$\int\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx=\int\frac{3}{x-1}dx+\int\frac{-7}{x-2}dx+\int\frac{5}{x-4}dx=3\int\frac{1}{x-1}dx-7\int\frac{1}{x-2}dx+$$

$$5\int\frac{1}{x-4}dx=3\ln|x-1|-7\ln|x-2|+5\ln|x-4|+C.$$

б) $\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$

Множнику $(x-1)^3$ відповідає сума трьох найпростіших дробів $\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$, а множнику $x+3$ – найпростіший дріб $\frac{D}{x+3}$. Отже,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+3}.$$

Звільнимося від знаменника:

$x^2+1=A(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)^2(x+3)+D(x-1)^3$.

Дійсними коренями знаменника є числа 1 та -3. Вважаючи $x=1$, одержуємо $2=4A$, тобто $A=1/2$. При $x=-3$ маємо $10=-64D$, тобто $D=-5/32$.

Порівняємо коефіцієнти при старшому ступені x, тобто при x^3. У лівій частині немає члена з x^3, тобто коефіцієнт при x^3 дорівнює 0. У правій частині коефіцієнт при x^3 дорівнює $C+D$. Отже, $C+D=0$, звідки $C=5/32$.

Залишається визначити коефіцієнт B. Для цього необхідно мати ще одне рівняння. Це рівняння можна одержати шляхом порівняння коефіцієнтів при однакових ступенях x (наприклад, при x^2) або надавши x яке-небудь числове значення. Зручніше взяти таке значення, при якому обчислень буде якомога менше. Покладемо, наприклад, $x=0$, одержуємо

$$1=3A-3B+3C-D, \text{ або } 1=\frac{2}{3}-3B+\frac{15}{32}+\frac{5}{32}, \text{ тобто } B=\frac{3}{8}.$$

Остаточне розкладання даного дробу на найпростіші має вигляд

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{3}{8(x-1)^2}+\frac{5}{32(x-1)}-\frac{5}{32(x+3)}.$$

Таким чином, одержимо

$$\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{5}{32}\int\frac{dx}{(x-1)}-\frac{5}{32}\int\frac{dx}{(x+3)}=-\frac{1}{4(x-1)^2}-$$

$$\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C.$$

в) $\int\frac{1}{x^5-x^2}dx$.

Розкладемо знаменник на множники:

$$x^5-x^2=x^2(x^3-1)=x^2(x-1)(x^2+x+1).$$

Тоді

$$\frac{1}{x^5-x^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Звільняємося від знаменника:

$1=A(x-1)(x^2+x+1)+Bx(x-1)(x^2+x+1)+Cx^2(x^2+x+1)+$
$(Dx+E)x^2(x-1)$.

Дійсними коренями знаменника є числа 0 та 1. При $x = 0$ маємо $1 = -A$. тобто $A = -1$; при $x = 1$ маємо $1 = 3C$, тобто $C = 1/3$.

Перепишемо попередню рівність у вигляді

$$1 = A(x^3 - 1) + B(x^4 - x) + C(x^4 + x^3 + x^2) + Dx^4 + Ex^3 - Dx^3 - Ex^2.$$

Порівнюючи коефіцієнти при x^4, x^3, x^2, одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} B + C + D = 0, \\ A + C + E - D = 0, \\ C - E = 0, \end{cases}$$

з якої знайдемо $B = 0,\ D = -\frac{1}{3},\ E = 1/3.$

Отже,

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2+x+1)}.$$

Таким чином,

$$\int \frac{1}{x^5 - x^2}\,dx = -\int \frac{1}{x^2}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| -$$

$$\frac{1}{6}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| -$$

$$\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| +$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

г) $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}\,dx$

Виділимо цілу частину даного неправильного раціонального дробу:

$$\begin{array}{ll} x^3+3x^2+5x+7 & \big|\underline{x^2+2} \\ \underline{x^3+2x} & x+3 \\ 3x^2+3x+7 & \\ \underline{3x^2+6} & \\ 3x+1 & \end{array}$$

Отже,

$$\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} = x + 3 + \frac{3x+1}{x^2+2}.$$

Звідси знаходимо

$$\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx = \int \left(x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}\right)dx$$

$$= \int xdx + 3\int dx + \int \frac{3x+1}{x^2+2}dx =$$

$\frac{x^2}{2}+3x+3\int \frac{x}{x^2+2}dx + \int \frac{1}{x^2+2}dx = \frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{2}\ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

✧ ✧ ✧

7. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$; б) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}+3\sqrt[4]{x^5}}dx.$

Розв'язання.

а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$

Раціоналізуємо інтеграл заміною $\sqrt[3]{2x+1} = t$:

$\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{2x+1}} = \begin{vmatrix} \sqrt[3]{2x+1} = t \\ x = \frac{t^3-1}{2} \\ dx = \frac{3t^2}{2}dt \end{vmatrix} = \int \frac{\left(\frac{t^3-1}{2}\right)^2 \frac{3t^2}{2}}{t}dt = \frac{3}{8}\int (t^3-1)^2 tdt = \frac{3}{8}\int (t^6-2t^3+$

$1)^2 tdt = \frac{3}{8}\int (t^7-2t^4+t)dt = \frac{3}{8}\left(\frac{t^8}{8}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^2}{2}\right)+C = \frac{3}{8}\left(\frac{\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^8}{8}-\right.$

$\left.\frac{2\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^5}{5} + \frac{\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^2}{2}\right) + C.$

б) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}+3\sqrt[4]{x^5}}dx.$

Підінтегральна функція є раціональною функцією відносно $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{4}{3}}, x^{\frac{5}{4}}$. Спільним знаменником дробів $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$ є 12. Тому проведемо заміну змінних $x^{\frac{1}{12}} = t$, звідки $x = t^{12}$, $\sqrt{x} = t^6$, $\sqrt[3]{x^4} = t^{16}$, $\sqrt[4]{x^5} = t^{15}$ і $dx = 12t^{11}dt$.

$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}+3\sqrt[4]{x^5}}dx = \int \frac{t^6}{t^{16}+3t^{15}}\cdot 12t^{11}dt = 12\int \frac{t^{17}}{t^{16}+3t^{15}}dt = 12\int \frac{t^{17}}{t^{15}(t+3)}dt =$

$12\int \frac{t^2}{(t+3)}dt = 12\int \frac{t^2-9+9}{(t+3)}dt = 12\left(\int \frac{t^2-9}{(t+3)}dt + \int \frac{9}{(t+3)}dt\right) = 12\left(\int \frac{(t+3)(t-3)}{(t+3)}dt +\right.$

$$9\int\frac{1}{(t+3)}dt\Big)=12\left(\int(t-3)dt+9\int\frac{1}{(t+3)}dt\right)=12\left(\frac{t^2}{2}-3t+9\ln|t+3|\right)+C=$$

$$12\left(\frac{\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^2}{2}-3x^{\frac{1}{12}}+9\ln\left|x^{\frac{1}{12}}+3\right|\right)+C=12\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{2}-3\sqrt[12]{x}+9\ln\left|\sqrt[12]{x}+3\right|\right)+C.$$

✧ ✧ ✧

8. Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$.

Розв'язання.

Цей інтеграл належить до інтегралів вигляду $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, тому зробимо підстановку $x=\frac{2}{\sin t}$, звідки $dx=-\frac{2\cos t}{\sin^2 t}dt$ і $\sqrt{\frac{4}{\sin^2 t}-4}=\sqrt{\frac{4-4\sin^2 t}{\sin^2 t}}=$ $\sqrt{\frac{4(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t}}=\sqrt{\frac{4\cos^2 t}{\sin^2 t}}=\frac{2\cos t}{\sin t}$. Отже,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}=\int\frac{-\frac{2\cos t}{\sin^2 t}dt}{\frac{2}{\sin t}\cdot\frac{2\cos t}{\sin t}}=-\int\frac{\frac{2\cos t}{\sin^2 t}dt}{\frac{4\cos t}{\sin^2 t}}=-\int\frac{1}{2}dt=-\frac{1}{2}t+C=\left|x=\frac{2}{\sin t}\Rightarrow\sin t=\right.$$

$$\left.\frac{2}{x}\Rightarrow t=\arcsin\frac{2}{x}\right|=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{x}+C.$$

✧ ✧ ✧

9. Обчислити інтеграли:

а) $\int\frac{dx}{3+5\sin x}$; б) $\int\frac{\cos x}{\sqrt{3\sin^2 x-\cos^2 x}}dx$; в) $\int\frac{dx}{4\sin^2 x+\sin x\cos x-3\cos^2 x}$;

г) $\int\sin 6x\cdot sin4xdx$; д) $\int cos^4x\,dx$; е) $\int sin^{10}x\cdot cos^3x\,dx$.

Розв'язання.

а) $\int\frac{dx}{3+5\sin x}$

Для обчислення інтегралу зробимо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\int \frac{dx}{3+5\sin x} = \left| \begin{matrix} tg\frac{x}{2} = t \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\cdot\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2+10t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3t^2+10t+3} = \int \frac{2dt}{3(t^2+\frac{10}{3}t+1)} =$$

$$\frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{10}{3}t+1} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+2\cdot\frac{5}{3}t+\frac{25}{9}-\frac{16}{9}} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{5}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{4}{3}}\ln\left|\frac{t+\frac{5}{3}-\frac{4}{3}}{t+\frac{5}{3}+\frac{4}{3}}\right| + C = \frac{2}{3}\cdot$$

$$\frac{3}{8}\ln\left|\frac{t+\frac{1}{3}}{t+\frac{9}{3}}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{3t+1}{3t+9}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{3tg\frac{x}{2}+9}\right| + C.$$

б) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{3\sin^2 x-\cos^2 x}}dx$

Підінтегральна функція є непарною функцією відносно $\cos x$, тому робимо заміну $sin\ x = t$.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{3\sin^2 x-\cos^2 x}}dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t, \cos x\, dx = dt \\ \cos x = \sqrt{1-t^2}, dx = \frac{dt}{\cos x} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{3t^2-(1-t^2)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}} =$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{4\left(t^2-\frac{1}{4}\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\sin x+\sqrt{\sin^2 x-\frac{1}{4}}\right| + C.$$

в) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+\sin x\cos x-3\cos^2 x}$

Підінтегральна функція задовольняє умову $R(-cos\ x; -sin\ x) = R(cos\ x;\ sin\ x)$, тому заміна $tgx = t$:

$$\int \frac{dx}{4\sin^2 x+\sin x\cos x-3\cos^2 x} = \left| \begin{matrix} tgx = t,\ x = arctg\ t, \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{4t^2}{1+t^2}+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{3}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{4t^2+t-3} = \int \frac{dt}{4(t^2+\frac{t}{4}-\frac{3}{4})} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+2\cdot\frac{t}{8}+\frac{1}{64}-\frac{49}{64}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{8}\right)^2-\left(\frac{7}{8}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{7}{8}}\ln\left|\frac{t+\frac{1}{8}-\frac{7}{8}}{t+\frac{1}{8}+\frac{7}{8}}\right| + C = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{4}}{t+1}\right| + C = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{4t-3}{4t+4}\right| + C = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{4tgx-3}{4tgx+4}\right| + C.$$

г) $\int \sin 6x \cdot \sin 4x dx = \int \frac{1}{2}(\cos(6x-4x) - \cos(6x+4x))dx =$

$\frac{1}{2}\int (\cos(2x) - \cos(10x))dx = \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx - \frac{1}{2}\int \cos(10x)\,dx =$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}sin2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}sin10x + C = \frac{1}{4}sin2x - \frac{1}{20}sin10x + C.$

д) $\int cos^4 x\,dx = \int (cos^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1+cos2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2cos2x +$

$cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2cos2x + \frac{1+cos4x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int 2\,cos2xdx +$

$\frac{1}{4}\int \frac{1}{2}dx + \frac{1}{4}\int \frac{cos4x}{2}dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\cdot 2\int cos2xdx + \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int cos4xdx = \frac{3}{8}x +$

$\frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{32}sin\,4x + C.$

е) $\int sin^{10}x \cdot cos^3 x\,dx = \int sin^{10}x \cdot cos^2 x \cdot cosx\,dx = \int sin^{10}x \cdot (1 - sin^2 x) \cdot$

$cosxdx = \left|\begin{matrix} sinx=t \\ cosxdx=dt \end{matrix}\right| = \int t^{10}\cdot(1-t^2)\cdot dt = \int t^{10}dt - \int t^{12}dt =$

$= \frac{t^{11}}{11} - \frac{t^{13}}{13} + C = \frac{sin^{11}x}{11} - \frac{sin^{13}x}{13} + C.$

✧ ✧ ✧

10. За формулою Ньютона-Лейбніца обчислити інтеграли:

а) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$; б) $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$; в) $\int_0^\pi \sin\frac{x}{2}dx$;

Розв'язання.

а) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^4 = \left.\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right|_1^4 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}\right) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3};$

б) $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}} = \int_{-1}^7 (3x+4)^{-\frac{1}{2}}dx = \left.\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_{-1}^7 = \left.\frac{2}{3}\sqrt{3x+4}\right|_{-1}^7 =$

$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{3\cdot 7+4} - \sqrt{3\cdot(-1)+4}\right) = \frac{2}{3}(5-1) = \frac{8}{3}.$

в) $\int_0^\pi \sin\frac{x}{2}dx = \left. -2\cos\frac{x}{2}\right|_0^\pi = -2\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{0}{2}\right) = -2(0-1) = 2.$

✧ ✧ ✧

11. Обчислити інтеграли:

а) $\int_1^e \frac{\sqrt{3\ln x+1}}{x}dx$; б) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx.$

Розв'язання.

а) $\int_1^e \frac{\sqrt{3\ln x+1}}{x}dx = \left|\begin{matrix} t=\ln x \\ dt=\frac{1}{x}dx, dx=xdt \\ t_1=\ln 1=0, t_2=\ln e=1 \end{matrix}\right| = \int_0^1 \frac{\sqrt{3t+1}}{x}\cdot xdt =$

$= \int_0^1 \sqrt{3t+1}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3t+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{9}\sqrt{(3t+1)^3}\Big|_0^1 = \frac{2}{9}\sqrt{(3\cdot 1+1)^3} -$

$\frac{2}{9}\sqrt{(3\cdot 0+1)^3} = \frac{16-2}{9} = \frac{14}{9}$.

б) Зробимо тригонометричну заміну змінних $x = 2sint$, $dx = 2costdt$ і встановимо нові межі інтегрування: якщо $x = 0$, то $t = arcsin0 = 0$; якщо $x = 2$, то $t = arcsin1 = \frac{\pi}{2}$. Тоді:

$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-(2sint)^2}\,2costdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4sin^2t}\,2costdt =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2cost\cdot 2costdt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt =$

$= 2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 2\left(0+\frac{1}{2}\sin 2\cdot 0\right) = \pi.$

✧ ✧ ✧

12. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$.

Розв'язання.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx = \left|\begin{matrix} u=x,\ dv=\cos 2x\,dx \\ du=dx,\ v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}x\sin 2x\,|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx =$

$\frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\sin 2\cdot\frac{\pi}{4} - 0\cdot\sin 0\right) + \frac{1}{4}\left(\cos 2\cdot\frac{\pi}{4} - \cos 0\right) =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) + \frac{1}{4}(0-1) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$.

в) $\int_0^1 xe^{3x}dx = \left|\begin{matrix} u=x,\ dv=e^{3x}dx \\ du=dx,\ v=\frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix}\right| = \frac{1}{3}xe^{3x}\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x}\Big|_0^1 -$

$\frac{1}{9}e^{3x}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1\cdot e^3 - 0\cdot e^0) - \frac{1}{9}(e^3-e^0) = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$.

✧✧✧

13. Обчислити площу фігур, обмежених лініями:

а) $y = x^2 - 4;\ \ 2x + y + 1 = 0;$ б) $y = x^2 - 2x;\ \ y = 0;\ \ x = 0;\ \ x = 3.$

Розв'язання.

а) $y = x^2 - 4;\ \ 2x + y + 1 = 0$

Фігура обмежена параболою $y = x^2 - 4$ і прямою $2x + y + 1 = 0$.

Побудуємо дані параболу і пряму (рис. 7.3.1).

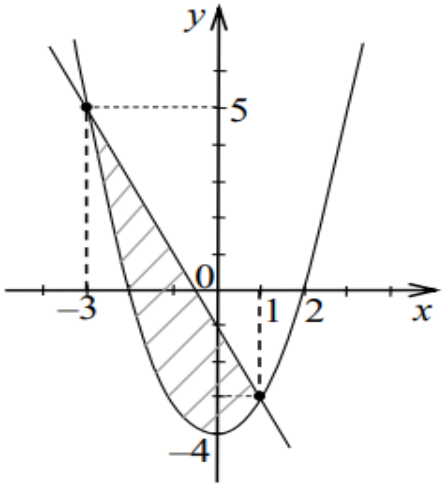


Рис. 7.3.1.

Знайдемо межі інтегрування, тобто точки перетину прямої і параболи. Для цього розв'яжемо систему, складену з рівнянь цих ліній:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 4 = -2x - 1;$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0;$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0;$$

$$x_1 = -3;\quad x_2 = 1.$$

Парабола і пряма перетинаються в точках з абсцисами $x_1 = -3$ і $x_2 = 1$.

Площу фігури визначаємо за формулою:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\, dx,$$

де лінією $y = f_2(x)$ є пряма $y = -2x - 1$ (обмежує фігуру зверху), а лінією $y = f_1(x)$ є парабола $y = x^2 - 4$ (обмежує фігуру знизу).

$$S = \int_{-3}^{1} \left(-2x - 1 - (x^2 - 4)\right) dx = \int_{-3}^{1} (-x^2 - 2x + 3)\, dx =$$

$$\left(-\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x\right)\Big|_{-3}^{1} = -\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3 \cdot 1 - \left(-\frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3 \cdot (-3)\right) =$$

$$-\frac{1}{3} - 1 + 3 - \frac{27}{3} + 9 + 9 = 10\frac{2}{3} \text{ (од.}^2\text{)}.$$

б) $y = x^2 - 2x;\ \ y = 0;\ \ x = 0;\ \ x = 3.$

Фігура обмежена віссю Ox $(y = 0)$ і параболою $y = x^2 - 2x$ на відрізку $[0;\ 3]$.

Побудуємо параболу. Знайдемо точки перетину параболи з віссю Ox. Для цього прирівнюємо $y = 0$:

$$y = x^2 - 2x;\ x^2 - 2x = 0;\ x(x - 2) = 0;\ x_1 = 0,\ \ x_2 = 2.$$

Знайдемо координати вершини параболи:

$$x_{\text{вер}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$y_{\text{вер}} = y\left(x_{\text{вер}}\right) = y(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1.$$

Парабола $y = x^2 - 2x$ має вершину в точці з координатами $(1;\ -1)$ і гілки її спрямовано вгору.

Фігура, обмежена заданими лініями, зображена на рис. 7.3.2.

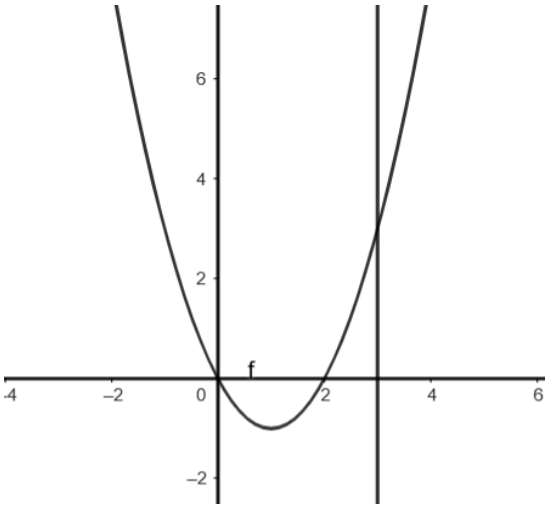


Рис. 7.3.2.

Площа шуканої фігури дорівнює сумі площ двох криволінійних трапецій:

$$S = S_1 + S_2.$$

Знайдемо площу:

$$S_1 = -\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = -\left(\frac{2^3}{3} - 2^2 - \left(\frac{0^3}{3} - 0^2\right)\right) =$$

$$-\left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{4}{3}\ (\text{од.}^2);$$

$$S_2 = \int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right)\Big|_2^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 3^2 - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right)\right) = 9 - 9 - \frac{8}{3} + 4 =$$

$$\frac{4}{3}\ (\text{од.}^2);$$

Тоді площа заданої плоскої фігури дорівнює:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}\ (\text{од.}^2).$$

✧✧✧

14. Обчислити довжину дуги кривої $y = e^x + 1$ від $x = \ln\sqrt{8}$ до $x = \ln\sqrt{15}$.

Розв'язання.

Знайдемо похідну заданої функції: $y' = (e^x + 1)' = e^x$. Підставимо похідну у формулу для обчислення дуги кривої. Межі проміжку інтегрування дорівнюють: $a = \ln\sqrt{8};\ b = \ln\sqrt{15}$.

$$l = \int_{\ln\sqrt{8}}^{\ln\sqrt{15}} \sqrt{1 + e^{2x}}\,dx =$$

$$\left|\begin{array}{c} t = \sqrt{1 + e^{2x}};\ e^{2x} = t^2 - 1;\ x = \frac{\ln(t^2-1)}{2};\ dx = \frac{t\,dt}{t^2-1} \\ x_1 = \ln\sqrt{8} \Rightarrow t_1 = \sqrt{1 + e^{2\ln\sqrt{8}}} = \sqrt{1+8} = 3 \\ x_1 = \ln\sqrt{15} \Rightarrow t_1 = \sqrt{1 + e^{2\ln\sqrt{15}}} = \sqrt{1+15} = 4 \end{array}\right| = \int_3^4 t \cdot \frac{t\,dt}{t^2-1} =$$

$$\int_3^4 \frac{(t^2-1+1)\,dt}{t^2-1} = \int_3^4 \frac{(t^2-1)\,dt}{t^2-1} + \int_3^4 \frac{dt}{t^2-1} = \int_3^4 dt + \int_3^4 \frac{dt}{t^2-1} = t\Big|_3^4 + \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_3^4 = 4 -$$

$$3 + \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{4-1}{4+1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3-1}{3+1}\right|\right)\Big|_3^4 = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\ln\frac{2}{4} = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}\ (\text{од.}).$$

✧✧✧

15. Обчислити об'єм тіла обертання.

а) Обчислити об'єм тіла утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x;\ x = 1; x = 3$.

Розв'язання.

Побудуємо плоску фігуру, обмежену параболою $y^2 = 4x$ (гілки спрямовані вправо) і вертикальними прямими $x = 1; x = 3$, а також тіло, утворене обертанням навколо осі Ox цієї плоскої фігури (рис. 7.3.3).

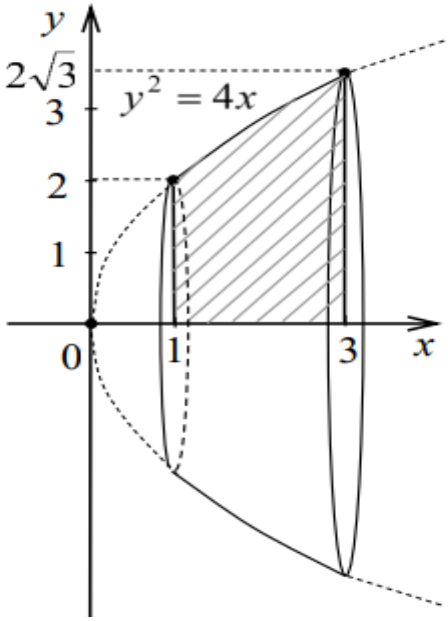


Рис. 7.3.3.

Визначимо об'єм тіла обертання, підставивши функцію $y^2 = 4x$ у формулу для знаходження об'єму тіла обертання навколо осі Ox:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_1^3 4xdx = 4\pi \int_1^3 xdx = 4\pi \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^3 = 4\pi \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) =$$

$$16\pi \text{ (од.}^3\text{);}$$

б) Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = \frac{4}{x}$; $y = 1$; $y = 4$.

Розв'язання.

Побудуємо плоску фігуру, обмежену гіперболою $y = \frac{4}{x}$ і горизонтальними прямими $y = 1$; $y = 4$, а також тіло, утворене обертанням навколо осі Oy цієї плоскої фігури (рис. 7.3.4).

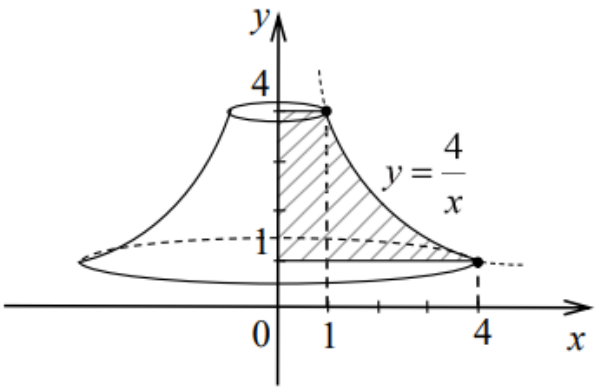


Рис. 7.3.4.

Визначимо об'єм тіла обертання, підставивши функцію $x = \frac{4}{y}$ у формулу для знаходження об'єму тіла обертання навколо осі Oy:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y)dy = \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{y}\right)^2 dy = \pi \int_1^4 \frac{16}{y^2} dy = 16\pi \int_1^4 y^{-2} dy = 16\pi \frac{y^{-1}}{-1}\Big|_1^4 =$$

$$-16\pi \frac{1}{y}\Big|_1^4 = -16\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1}\right) = -16\pi \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 12\pi \text{ (од.}^3\text{)}.$$

✧✧✧

16. Обчислити невластивий інтеграл першого роду або довести його розбіжність:

а) $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+13}$; б) $\int_{-\infty}^{\pi} sin^2 x dx$.

Розв'язання.

а) Для обчислення первісної виділимо в знаменнику повний квадрат:

$$\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int_4^{+\infty} \frac{dx}{(x-3)^2+4} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2} arctg\ \frac{x-3}{2}\Big|_4^b =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(arctg\ \frac{b-3}{2} - arctg\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\ \frac{1}{2}\right).$$

б) Для обчислення первісної застосуємо формулу пониження степеня

$$sin^2 = \frac{1-\cos 2x}{2}:$$

$$\int_{-\infty}^{\pi} sin^2 x dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_a^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} \left(\pi - a + \frac{1}{2}\sin 2a\right).$$

Оскільки $\lim_{a\to-\infty} \sin 2a$ не існує, то інтеграл розбіжний.

✧ ✧ ✧

17. Встановити збіжність чи розбіжність інтеграла $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$, де $\alpha \in$ Ў.

Розв'язання.

а) Нехай $\alpha \neq 1$. Тоді $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} x^{1-\alpha}\big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right)$.

Якщо $\alpha - 1 > 0$, то $\frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right) = \frac{1}{1-\alpha}(0-1) = \frac{1}{\alpha-1}$, тобто інтеграл збіжний і $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha-1}$.

Якщо $\alpha - 1 < 0$, то $\frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right) = \frac{1}{1-\alpha}(\infty - 1) = +\infty$, тобто інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ розбіжний.

б) При $\alpha = 1$ матимемо $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to+\infty} \ln x\big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty$, тобто інтеграл розбіжний.

Отже, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha-1}$ для $\alpha > 1$ і розбіжний для $\alpha \leq 1$.

✧ ✧ ✧

18. Дослідити на збіжність $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+\ln^2 x)}\, dx$ і оцінити його значення.

Розв'язання.

Для всіх $x \geq 1$ виконується нерівність $1 + \ln^2 x \geq 1$, а, отже, нерівність $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+\ln^2 x)}\, dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$.

Оскільки $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1$, тому інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+\ln^2 x)}\, dx$ також збіжний і $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+\ln^2 x)}\, dx \leq 1$.

✧ ✧ ✧

19. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція $\frac{\cos x}{x^3}$ є знакозмінною. Оскільки $|\cos x| \le 1$, то $\left|\frac{\cos x}{x^3}\right| \le \frac{1}{x^3}$ для $x \ge 1$. Очевидно, що $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}$. Отже, збігається і інтеграл $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^3}\right| dx$, тому $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3}\,dx$ є абсолютно збіжним.

✧ ✧ ✧

20. Обчислити невластиві інтеграли другого роду або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-5)^2}}$; б) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x}}$; в) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Розв'язання.

а) Підінтегральна функція має розрив другого роду в точці $x = 5$, яка є правим кінцем відрізка інтегрування. Тому

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-5)^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{5-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-5)^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0} 3\sqrt[3]{x-5}\Big|_0^{5-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(3\sqrt[3]{5-\varepsilon-5} - 3\sqrt[3]{0-5}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(3\sqrt[3]{-\varepsilon} - 3\sqrt[3]{-5}\right) = 3\sqrt[3]{5}.$$

б) Підінтегральна функція має розрив другого роду в точці $x = 0$, яка є лівим кінцем відрізка інтегрування. Тому

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^3 \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-9}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln\left(x+3+\sqrt{(x+3)^2-9}\right)\Big|_\varepsilon^3 = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln\left(x+3+\sqrt{x^2+6x}\right)\Big|_\varepsilon^3 = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln\left(3+3+\sqrt{3^2+18}\right) - \ln\left(\varepsilon+3+\sqrt{\varepsilon^2+6\varepsilon}\right)\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln\left(6+3\sqrt{3}\right) - \ln\left(\varepsilon+3+\sqrt{\varepsilon^2+6\varepsilon}\right)\right) = \ln\left(6+3\sqrt{3}\right) - \ln 3 = \ln\frac{6+3\sqrt{3}}{3} = \ln\left|2+\sqrt{3}\right|.$$

в) Точки $x = 0$ і $x = 1$ є точками розриву другого роду підінтегральної функції $f(x) = \frac{dx}{x\ln^2 x}$. Але точка $x = 0$ не належить відрізку інтегрування, а точка $x = 1$ є всередині відрізка $\left[\frac{1}{e}; e\right]$. Тому шуканий інтеграл розбиваємо

на суму двох інтегралів: $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{dx}{x\ln^2 x} + \int_{1}^{e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$. Дослідимо на збіжність перший з двох інтегралів:

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\frac{1}{e}}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \left\{ \int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \left| \begin{matrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\ln x} \right\} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \left(-\frac{1}{\ln x}\right)_{\frac{1}{e}}^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(-\frac{1}{\ln(1-\varepsilon)} + \frac{1}{\ln\frac{1}{e}}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(-\frac{1}{\ln(1-\varepsilon)} - 1\right) = \infty.$$

Оскільки перший інтеграл розбіжний, то немає змісту досліджувати на збіжність другий інтеграл, бо, згідно з означенням, $\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ розбіжний.

7.5. Контрольні запитання

1. Яка дія називається інтегруванням?
2. Яка функція називається первісною для даної функції?
3. Чим відрізняються між собою різні первісні функції для даної функції $f(x)$?
4. Дайте означення невизначеного інтеграла.
5. Сформулюйте основні властивості невизначеного інтеграла.
6. Як перевіряється результат інтегрування?
7. Назвіть основні методи інтегрування.
8. У чому полягає метод підстановки (заміни змінної) в невизначеному інтегралі?
9. Запишіть формулу інтегрування частинами в невизначеному інтегралі.
10. В яких випадках і для яких інтегралів вона застосовується?
11. Який дріб називають раціональним?
12. Який раціональний дріб називають правильним? Неправильним?
13. Який вигляд мають елементарні (найпростіші) дроби?
14. Для знаходження яких інтегралів застосовують тригонометричні підстановки і які?

15. Дайте означення визначеного інтеграла.

16. Сформулюйте теорему існування визначеного інтеграла.

17. Сформулюйте і доведіть властивості визначеного інтеграла.

18. Що називають середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$?

19. Сформулювати і вивести формулу Ньютона-Лейбніца.

20. У чому суть методів заміни змінної (підстановки) й інтегрування частинами у визначеному інтегралі?

21. Криволінійною трапецією називається …

22. Геометричний зміст визначеного інтеграла полягає в тому, що …

23. Площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою …

24. Що таке невластивий інтеграл? У чому його відмінність від визначеного інтеграла?

25. Які типи невластивих інтегралів існують? Наведіть приклади.

26. За яких умов невластивий інтеграл збігається?

27. Як перевірити збіжність невластивого інтеграла на нескінченному інтервалі?

28. У чому полягає метод порівняння для дослідження збіжності невластивих інтегралів?

29. У чому різниця між невластивими інтегралами першого і другого роду?

30. Як досліджують збіжність невластивого інтеграла другого роду?

7.5. Завдання для самостійного виконання

1. Які з наведених функцій будуть первісними для функції $f(x) = \cos x$?

1) $F_1(x) = \sin x + 2$; 2) $F_2(x) = 3\sin\frac{x}{3} + 3$;

3) $F_3(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Які з функцій не будуть первісними для функції $f(x) = \text{tg } x$?

а) $F_1(x) = -ln|cos\, x|$; б) $F_2(x) = \frac{1}{2} ln(1 + \text{tg}^2 x)$;

в) $F_3(x) = \frac{1}{2} ln\left|sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right|$; г) $F_4(x) = \frac{1}{2} ln(1 + \text{ctg}^2 x) + ln|\text{tg } x|$.

3. Користуючись методом безпосереднього інтегрування, знайти невизначені інтеграли:

1) $\int (3x^2 + 6x + 8)dx$;
2) $\int (\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{5} + 8x)dx$;
3) $\int (\sin x + tg\, x)dx$;
4) $\int (5x - 3)^3 dx$;
5) $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$;
6) $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$;
7) $\int \frac{\sqrt{x} + x^2 e^x - 1}{x^2} dx$;
8) $\int \frac{dx}{sin^2 x\, cos^2 x}$;
9) $\int (2^x + 3^x)^2 dx$;
10) $\int 2\, sin^2 \frac{x}{2} dx$;
11) $\int (tgx + ctgx)^2 dx$;
12) $\int \frac{dx}{cos^2 x - cos\, 2x}$.

4. Користуючись властивостями інтегралів, знайти інтеграли:

1) $\int (x + 9)^{13}\, dx$;
2) $\int \sqrt[5]{(7 - 3x)^4}\, dx$;
3) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$;
4) $\int \frac{dx}{1 + 25x^2}$;
5) $\int cos(2x - 3)dx$.
6) $\int \frac{dx}{10x + 3}$;
7) $\int cos \frac{x+3}{3} dx$;
8) $\int 2^{5x+4}\, dx$.

5. Застосовуючи заміну змінної, знайти інтеграли:

1) $\int (3 + 7x^2)^5 x dx$;
2) $\int \frac{x^2 dx}{(4x^3 + 9)^4}$;
3) $\int sin^2 x\, cos\, x\, dx$;
4) $\int e^{sin\, x}\, cos\, x\, dx$;
5) $\int \frac{dx}{x\, ln^4 x}$;
6) $\int x^2 3^{x^3} dx$;
7) $\int \frac{sin(ln\, x)}{x} dx$;
8) $\int \frac{\text{arcctg}^2 x}{1 + x^2} dx$;
9) $\int \frac{cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$;
10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}$;
11) $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}} dx$;
12) $\int \frac{x + arcsin\, x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$.

6. Інтегруванням частинами знайти інтеграли:

1) $\int x \sin x \, dx;$
2) $\int xe^{-x}dx;$
3) $\int x5^{x}dx;$
4) $\int x^{2} \sin x \, dx;$
5) $\int x^{2}e^{3x}dx;$
6) $\int arccos \, x \, dx;$
7) $\int xe^{x}dx;$
8) $\int x^{3}e^{-\frac{x}{3}}dx;$
9) $\int arcctg \, x \, dx;$
10) $\int x \, arcsin \, x \, dx;$
11) $\int sin(ln \, x) \, dx;$
12) $\int e^{ax} \sin b \, xdx.$

7. Виділивши повні квадрати у квадратних тричленах, знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{x^{2}+2x+5};$
2) $\int \frac{dx}{x^{2}+2x};$
3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^{2}}};$
4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2}+2x+3}};$
5) $\int \frac{2-4x}{2x^{2}-3x+1} \, dx;$
6) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^{2}+6x+2}} \, dx.$

8. Знайти інтеграли від раціональних функцій:

1) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)};$
2) $\int \frac{2x^{2}+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx;$
3) $\int \frac{x^{3}-3x+2}{x(x^{2}+2x+1)}dx;$
4) $\int \frac{x^{5}+x^{4}-8}{x^{3}-4x}dx;$
5) $\int \frac{x^{2}dx}{(x+2)^{2}(x+1)};$
6) $\int \frac{x^{4}dx}{(x+2)(x^{2}-1)};$
7) $\int \frac{x^{2}dx}{(x+2)^{2}(x+4)^{2}};$
8) $\int \frac{2x^{2}-5x+1}{x^{3}-2x^{2}+x}dx.$

9. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

1) $\int sin^{2} \, x \, cos^{3} \, x \, dx;$
2) $\int sin^{3} \, x \, cos^{3} \, x \, dx;$
3) $\int cos^{7} \, x \, dx;$
4) $\int cos^{4} \, x \, dx;$
5) $\int \frac{dx}{3+5 \, cos \, x};$
6) $\int \frac{dx}{cos \, x+2 \, sin \, x+3};$
7) $\int cos^{4} \, x \, dx;$
8) $\int \frac{\sqrt{tg \, x}}{sin \, x \, cos \, x}dx.$

10. Позбавляючись від ірраціональності, знайти такі інтеграли:

1) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx;$
2) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx;$

3) $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}$;

4) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$;

5) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$;

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$;

7) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$;

8) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$.

11. За допомогою тригонометричних підстановок знайти такі інтеграли:

1) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

2) $\int \sqrt{1-x^2}dx$;

3) $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$;

4) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$;

5) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$;

6) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

12. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_{-1}^{2} x^3dx$;

2) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$;

3) $\int_1^2 (3x^2-2x+1)\,dx$;

4) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2}$;

5) $\int_1^8 \frac{2+5\sqrt{x}}{x^3}dx$;

6) $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx$;

7) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^2}$;

8) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{1+x^2}$;

9) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2x\,dx$;

10) $\int_0^3 2^x\,dx$;

11) $\int_0^3 e^{\frac{x}{4}}dx$;

12) $\int_{-13}^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$.

13. Обчислити визначені інтеграли методом заміни змінної:

1) $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \sin\frac{1}{x}\,\frac{dx}{x^2}$;

2) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$;

3) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$;

4) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$;

5) $\int_1^8 \frac{2+5\sqrt{x}}{x^3}dx$;

6) $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx$;

7) $\int_{-2}^{-1} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$;

8) $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 x\,dx$;

9) $\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$;

10) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$;

11) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$;

12) $\int_{1/4}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}$.

14. Інтегруванням частинами обчислити визначені інтегралі:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$;
2) $\int_1^{e-1} ln(x+1)\, dx$;
3) $\int_1^e x^2 \ln x\, dx$;
4) $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx$;
5) $\int_0^1 arctg\, x\, dx$;
6) $\int_0^1 x arctg\, x dx$;
7) $\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$;
8) $\int_1^{e-1} \ln(x+1)\, dx$.

15. Обчислити невластиві інтеграли або встановити їх розбіжність:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+13}$;
2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$;
3) $\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{2}} dx$;
4) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$;
5) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$;
6) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$;
7) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$;
8) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$;
9) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$;
10) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
11) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$;
12) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

16. Дослідити збіжність інтегралів:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;
2) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$;
3) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{x}$;
4) $\int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^4+1}}$;
5) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$;
6) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$.

17. Знайти довжини дуг ліній, що задані рівняннями:

1) $y^2 = 2x$; від $x = 0$ до $x = 1$;
2) $y = ln\, x$; від $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$;
3) $y = 2\sqrt{x}$; від $x = 0$ до $x = 1$;
4) $y = e^x$; від $x = 0$ до $x = 1$;
5) $y = \sqrt[3]{x^2}$; від $x = 0$ до $x = 4$;
6) $x = 6at^5$, $y = 5at(1 + t^8)$; між точками (0, 0), (6a, 0).

18. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = \frac{1}{2}x^2,\ \ y = 0,$ $x = 2,\ \ x = 3;$

2) $y = \sqrt[3]{x},\ \ y = 0,$ $x = 1,\ \ x = 8;$

3) $y = 6 - x - x^2,\ \ y = x + 2;$

4) $y = \frac{1}{4}x^2,\ \ y = 2\sqrt{x};$

5) $y = \frac{2}{x},\ \ y = 0,\ \ x = 2,\ \ x = 3;$

6) $y = 1 - x^2; y = x^2 - 7;$

7) $4y = x^2; y^2 = 4x;$

8) $y^2 = x; x - y - 6 = 0;$

9) $xy = 4; x = 1; x = 4; y = 0;$

10) $x^2 + y^2 = 8; y = \frac{x^2}{2}.$

19. За допомогою визначених інтегралів обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, що обмежені лініями:

1) $xy = 4;\ x = 1;\ x = 4;\ y = 0,$ навколо осі Ox;

2) $y^2 = 1 - x;\ \ x = 0,$ навколо осі Oy;

3) $y = x^3;\ \ y = 0;\ \ x = 2,$ навколо осі Oy;

4) $y = x^2;\ \ y = x + 6,$ навколо осі Ox;

5) $y^2 = 2x + 1;\ x = 0,$ навколо осі Ox.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика : навч. посіб. : у 2-х ч. Ч. 1. Київ : КНЕУ, 2001. 546 с.
2. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика : навч. посіб. : у 2-х ч. Ч. 2. Київ : КНЕУ, 2002. 451 с.
3. Валєєв К. Г., Джалладова І. А., Лютий О. І. та ін. Вища математика : навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. Вид. 2-ге, перероб. і доп. Київ : КНЕУ, 2002. 606 с.
4. Вища математика : навч. посіб. / за ред. В. П. Лісовської. Київ : КНЕУ, 2024. 485 с. URL: https://drive.google.com/file/d/1bwf5XhO91W4zAecoy50XRMjvOs8tiLCe/view
5. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посібник : у 2 т. Т. 1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної / Л. В. Курпа та ін. ; Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». Харків : НТУ «ХПІ», 2009. 528 с.
6. Вища математика : підручник / В. А. Домбровський, І. М. Крижанівський, Р. С. Мацьків, Ф. М. Мигович, В. М. Неміш, Б. С. Окрепкий, Г. П. Хома, М. Я. Шелестовська ; за редакцією М. І. Шинкарика. Тернопіль : Видавництво Карп'юка, 2003. 480 с.
7. Вища математика. Практикум : навчальний посібник / О. Ю. Дюженкова, М. Є. Дудкін, І. В. Степахно ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 409 с.
8. Вища математика: елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії, диференціальне числення функції однієї змінної : навчальний посібник / О. В. Веселовська, М. І. Вовк, Л. В. Гошко. Третє видання, виправлене і доповнене. Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2016. 256 с.
9. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. 4-те вид. Київ : Ігнатекс-Україна, 2013. 648 с.

10. Дудкін М. Є., Дюженкова О. Ю., Степахно І. В. Вища математика : підручник для здобувачів ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 449 с. URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/51064
11. Елементи лінійної алгебри та математичного аналізу : навчальний посібник / О. В. Веселовська, М. І. Вовк, З. М. Нитребич, Т. М. Сало. Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2019. 356 с.
12. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика : практикум. 2-ге видання. Київ : Центр учбової літератури, 2023. 536 с.
13. Лиман Ф. М., Власенко В. Ф., Петренко С. В. та ін. Вища математика : навчальний посібник : у 2 ч. / за заг. ред. Ф. М. Лимана. Суми : ВТД «Університетська книга», 2005. 614 с.
14. Лютий О. І., Макаренко О. І. Збірник задач з вищої математики : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2003. 305 с.
15. Математичний аналіз функцій дійсної змінної : навчальний посібник / Х. Т. Дрогомирецька, П. І. Каленюк, М. І. Клапчук, Г. В. Понеділок. Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2016. 592 с.
16. Математичний аналіз : навчальний посібник. Ч. 1 / під ред. Ю. К. Рудавського. Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2003. 404 с.
17. Першина Ю.І., Черемська Н. В., Черногор Т. Т. Похідна та її застосування : навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання. Харків : НТУ «ХПІ», 2023. 110 с.
18. Пирч Н. М. Практикум з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Львів : Видавництво УАД, 2011. 252 с.
19. Рубіш В. В. Конспект лекцій з курсу «Вища математика»: Частина І. Ужгород : ДВНЗ УжНУ, 2015. 96 с.
20. Скуратовський Р. Р. Вища математика з прикладами і задачами : підручник. Київ : Національна академія управління, 2021. 232 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Абсолютна збіжність невластивого інтеграла *336*

Абсолютний максимум *264*

– мінімум *264*

Алгебраїчна форма комплексного числа *14*

Алгебраїчне доповнення *39*

Аналітичний спосіб задання функції *193*

Аргумент комплексного числа *18*

Арифметичні операції над диференційовними функціями *251*

Асимптота гіперболи *160*

– графіка функції *211, 212*

Базис *89*

– ортонормований *92*

Безпосереднє інтегрування *315*

Важлива границя *201, 208*

Вектор *85*

– *n*-вимірний *102*

Вертикальна асимптота *211, 212*

Вершина гіперболи *159*

– еліпса *157*

– параболи *162*

Верхня межа інтеграла *327*

Визначник *35, 36, 37*

Визначений інтеграл *326*

Відрізок інтегрування *327*

Відстань від точки до прямої *146*

– від точки до площини *155*

Вісь абсцис *93, 193*

– дійсна *15*

– полярна *94*

– ординат *93, 193*

– уявна *15*

Власне число матриці *110, 111*

Власний вектор матриці *110*

Властивості невизначеного інтеграла *313, 314*

– добутку векторного *100*

– – мішаного *102*

– – скалярного *98, 99*

Геометричний зміст границі функції в точці *204*

– – похідної *248*

Гіпербола *159*

Головна діагональ матриці *41*

Горизонтальні асимптоти *211*

Границя послідовності *200*

– функції *204*

– – на нескінченості *210*

Графік *193*
– необмеженої функції *198*
– непарної функції *197*
– обмеженої функції *198*
– парної функції *197*
Графічний спосіб задання функції *193*
Директриса гіперболи *160*
– параболи *161*
Диференціал функції *254*
– – n-ого порядку *255*
Диференціювання
– неявно заданих функцій *253*
– функцій, заданих параметрично *253*
Детермінант *35*
Дійсна функція дійсного аргументу *192*
– – комплексного аргументу *192*
Довжина дуги кривої *331*
Достатні умови локального екстремуму *263*
– – монотонності *261*
Достатня ознака точки перегину *266*
– умова опуклості та вгнутості функції *266*
Дотична до кривої *249*
Дробово-раціональна функція *196*
Друга особлива границя *208*
Еквівалентними н. м. ф. *221*
Екстремум функції *262*
Елемент
– визначника *35*
– матриці *41, 42*
Ексцентриситет
– гіперболи *160*
– еліпса *158*
– параболи *162*
Елементарні функції *196*
Еліпс *156*
Загальне рівняння прямої *142, 151*
– – площини *147*
Загальний член послідовності *199*
Залежна змінна *191*
Залишковий член *258*
Змінна інтегрування *327*
Значення аргументу *191*
– функції *191*
Інтеграл Рімана *326*
Інтегрування
– заміною змінної (підстановкою) *315, 316, 329*
– іраціональних функцій *323*
– раціональних дробів *320*
– раціональних функцій *318*
– розкладанням *315*

– тригонометричних функцій *324*
– частинами *317, 329*
Ірраціональна функція *196*
Канонічне рівняння гіперболи *159*
– – еліпса *157*
– – параболи *161*
Квадратична форма *111*
Квадратна матриця *41*
Коло *155*
Колінеарні вектори *97*
Комплексне число *14*
Комплексно спряжені числа *15*
Координата вектора *96*
Координата точки *193*
Критична точка *262*
Кут між векторами *99*
– – двома прямими *144, 153*
– – площинами *149*
– – прямою та площиною *154, 155*
Кутовий коефіцієнт
– – дотичної *249*
– – нормалі *249*
Лівостороння границя функції *207*
Лінійна комбінація векторів
– залежність векторів *104*
– незалежність векторів *104*
Лінійна функція *196*
Логарифмічна похідна *253*
– функція 196
Максимум функції *262*
Матриця
– вироджена *42*
– діагональна *41*
– квадратна *41*
– невироджена *42*
– нульова *41*
– обернена *45*
– одинична *41*
Метод Крамера розв'язування систем *49*
– Гаусса розв'язування систем *52*
– оберненої матриці *51*
Методика обчислення границь функції *208*
Механічний зміст похідної *249*
Миттєва швидкість *250*
Мінімум функції *262*
Мінор *46*
Многочлен *n*-го степеня *196*
Множина *12*
– значень *192*
– числова *13*
Модуль
– вектора *97*
– комплексного числа *18*

Найбільше значення функції на відрізку *264*
Найменше значення функції на відрізку *264*
Напрямний вектор прямої *139*
Натуральні числа *13*
Невизначений інтеграл *313*
Невизначені вирази *207*
– коефіцієнти *321*
Невластивий інтеграл *332*
– – абсолютно збіжний *336*
– – другого роду *337*
– – збіжний *333, 334*
– – першого роду *333*
– – розбіжний *333, 334*
Незалежна змінна *191*
Необхідні умови локального екстремуму *262*
Нижня межа інтеграла *327*
Нормаль до графіка функції *249*
Нормальне рівняння прямої *142, 143*
– рівняння площини *150*
Нормальний вектор площини *147*
Нулі функції *195*
Об’єм паралелепіпеда *101*
– тіла обертання *331, 332*
Обернена матриця *45*
Обернені тригонометричні функції *196*
Область визначення *192*
Об’єднання множин *13*
Однорідна система рівнянь *48*
Односторонні границі функції *216*
Ортогональні вектори *92*
Основний період функції *197*
Особлива границя *203*
– точка *337*
Парабола *161*
Параметричне рівняння прямої *152*
Первісна функції *312*
Період функції *197*
Перша особлива границя *207*
Піввісь гіперболи *159*
– еліпса *157*
Підінтегральна функція *313*
Підінтегральний вираз *313*
Підмножина *12*
Площа плоскої фігури *329*
– трикутника *117*
Поворот осей координат *95*
Показникова форма комплексного числа *19*
– функція *196*
Полярні координати *94*
Порівняння нескінченно малих функцій *212*

Послідовність *199*
– збіжна *201*
– монотонна *202*
– монотонно зростаюча *201*
– – спадна *202*
– не зростаюча *202*
– нескінченно велика *202*
– – мала *201*
– неспадна *202*
– нульова *201*
– обмежена *201*
– розбіжна *201*
Похила асимптота *211, 212*
Похідна другого порядку *254*
– першого порядку *254*
– складної функції *251*
– степенево-показникової функції *254*
– функції *250*
– n-го порядку *255*
Правило Лопіталя *256*
Правостороння границя функції *206*
Приріст аргументу *247*
– функції *247*
Проколотий окіл *204*
Проміжки знакосталості функції *195*
Простір R^n *102, 104*
– лінійний векторний *105*
Ранг матриці *46*
Раціональний дріб *320*
– – елементарний *320*
– – неправильний *320*
– – правильний *320*
Раціональне число *13*
Рівність векторів *86*
– матриць *42*
Рівняння дотичної
– гіперболи *161*
– еліпса *158*
– кола *156*
– нормалі *249*
Рівняння прямої у відрізках
– – на площині *140, 141*
– – у просторі *152*
Розв’язок системи рівнянь *48*
Розклад вектора за базисом *89*
Розмір матриці *40*
Середнє значення функції *328*
Симетрична відносно нуля множина *196*
Система рівнянь лінійних алгебраїчних *47*
– однорідна *55*
Скалярний добуток векторів *98*

Словесний спосіб задання функції *194*
Стаціонарна точка *262*
Степенева функція *196*
Стрибок функції *214*
Ступінь близькості *200*
Сума векторів *97*
– множин *13*
– матриць *43*
Сумісна система рівнянь *48*
Таблиця основних невизначених інтегралів *314*
– основних похідних *252*
Табличний спосіб задання функції *194*
Тейлорівський многочлен *258*
Теорема про множину всіх первісних *312*
– Больцано-Коші *216*
– Вейєрштрасса *216*
– Коші *260*
– Кронекера–Капеллі *57*
– Лагранжа *260*
– Ролля *259*
– Ферма *259*
Тіло обертання *331*
Точка локального екстремуму *262*
– локального максимуму *262*
– локального мінімуму *262*
– перегину графіка функції *265*
– розриву *213*
– – другого роду *215*
– – першого роду неусувного *214*
– – першого роду усувного *214*
Транспонування матриці *42*
Тригонометрична форма комплексного числа *19*
Тригонометричні функції *196*
Умова паралельності
– – двох площин *150*
– – двох прямих *154, 145, 146*
– прямої і площини *155*
– перпендикулярності
– – двох площин *150*
– – двох прямих *154, 145, 146*
– – прямої і площини *155*
Фокус
– гіперболи *160*
– еліпса *156*
– параболи *161*
Формули Крамера *50*
Формула Маклорена *258*
– Ньютона–Лейбніца *328*
– Тейлора *257*
Функція
– абсолютно інтегрована *336*
– вгнута *295*
– диференційовна в точці *247*

– диференційовна
на проміжку *248*
– зростаюча *198*
– інтегрована *327*
– монотонна *198*
– натурального аргументу *199*
– не зростаюча *198*
– необмежена *198*
– непарна *197*
– неперервна *213*
– – на проміжку *216*
– неперіодична *197*
– нескінченно велика *206*
– нескінченно мала *205*
– неспадна *198*
– неявна *199*
– обернена *199*
– обмежена *198*
– – зверху *198*
– – знизу *198*
– опукла *295*
– опукла вверх *295*
– опукла вниз *295*
– парна *197*
– періодична *197*
– розривна *213*
– складна *199*
– спадна *198*
Центр кола *155*

Авторський колектив

Огірко Ольга Ігорівна –
кандидат технічних наук, доцент,
професор кафедри інформаційних технологій
(розділи 1, 2, 3,4)

Галайко Наталія Володимирівна –
старший викладач кафедри інформаційних систем та технологій
(розділи 5, 6, 7)

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Ольга ОГІРКО

Наталія ГАЛАЙКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 1

Навчальний посібник

Редагування *Андріана Кузьмич-Походенко*

Макетування *Галина Шушняк*

Друк *Іван Хоминець*

Підписано до друку 02.06.2025

Формат $60\times84/_{8}$.

Папір офсетний. Умовн.-друк. арк. 43,71.

Тираж 70. Зам. 24-25.

Львівський державний університет внутрішніх справ

вул. Городоцька, 26, Львів, 79007, Україна

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції

ДК № 2541 від 26 червня 2006 р.