Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

# ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

**Навчальний посібник**

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за спеціальністю G9 Прикладна механіка

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2026

УДК 514.74 (075.8)
Л59

Укладачі: *Журавська Ганна Вікторівна*, канд. фіз.-мат наук, доц.
*Карпалюк Тамара Олексіївна*, канд. фіз.-мат наук
*Копась Інна Миколаївна*, канд. фіз.-мат наук, доц.
*Рева Надія Віталіївна*, канд. фіз.-мат наук, доц.

Рецензент *Сєров М. І.*, д-р фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу та інформатики Полтавського національного педагогічного університету імені В. Г. Короленка

Відповідальний редактор *Поліщук О. Б.*, канд. фіз.-мат наук, доцент

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського*
*(протокол № 8 від 04.06.2026 р.)*
*за поданням вченої ради Фізико-математичного факультету*
*(протокол № 4 від 13.05.2026 р.)*

Л89 **Лінійна алгебра та аналітична геометрія** [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю G9 Прикладна механіка / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Журавська Г.В. та ін. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026. – 135 с.

У посібнику розглянуто матеріал з лінійної алгебри, векторної алгебри та аналітичної геометрії. Кожен розділ містить теоретичний матеріал, що супроводжується великою кількість прикладів, задач і рисунків. Основна змістовна частина доповнена індивідуальними завданнями для самостійної роботи студентів.

Посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавр за спеціальністю G9 Прикладна механіка, а також буде корисним для студентів інших технічних спеціальностей.

УДК 514.74 (075.8)

Реєстр. № НП 25/26-474. Обсяг 8 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026

# Зміст


Вступ..... 4
**Розділ 1. Елементи лінійної алгебри**..... 5
1.1. Визначники. Їх властивості та обчислення..... 5
1.1.1. Визначники 2-го та 3-го порядків..... 5
1.1.2. Основні властивості визначників..... 7
1.1.3. Обчислення визначників..... 9
1.2 Матриці та дії над ними..... 15
1.2.1. Класифікація матриць..... 15
1.2.2. Дії над матрицями..... 17
1.2.3. Обернена матриця та матричні рівняння..... 23
1.3. Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь..... 35
1.3.1. Основні поняття та означення..... 35
1.3.2. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера..... 36
1.3.3. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом..... 43
1.3.4. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса..... 46
1.3.5. Критерій сумісності систем лінійних алгебраїчних рівнянь..... 48
1.3.6. Розв'язування однорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь..... 51
**Розділ 2. Елементи векторної алгебри**..... 55
2.1. Вектори та дії над ними..... 55
2.1.1. Вектор. Основні поняття..... 55
2.1.2. Лінійні операції над векторами..... 56
2.1.3. Вектори та дії над ними в координатній формі..... 59
2.1.4. Лінійна залежність та незалежність векторів. Базис..... 64
2.2. Скалярний, векторний та мішаний добутки..... 70
2.2.1. Скалярний добуток векторів..... 70
2.2.2. Векторний добуток векторів..... 73
2.2.3. Мішаний добуток векторів..... 76
**Розділ 3. Елементи аналітичної геометрії**..... 78
3.1. Лінія на площині..... 78
3.1.1. Рівняння лінії у прямокутній декартовій системі координат (ПДСК)..... 78
3.1.2. Рівняння лінії в полярній системі координат..... 80
3.2. Пряма на площині..... 82
3.2.1. Рівняння прямої на площині..... 82
3.2.2. Взаємне розташування прямих на площині..... 91
3.3. Пряма та площина в просторі..... 101
3.3.1. Площина в просторі..... 101
3.3.2. Взаємне розташування площин..... 111
3.3.3. Пряма у просторі..... 115
3.3.4. Взаємне розташування прямих та площин у просторі..... 119
Індивідуальні завдання для самостійної роботи..... 127
Список використаної літератури..... 135

# Вступ

Навчальний посібник «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» написано на основі лекцій та практичних занять, що викладалися авторами протягом багатьох років студентам різних спеціальностей КПІ ім. Ігоря Сікорського. Він складається з трьох розділів відповідно до освітніх програм «Автоматизовані та роботизовані механічні системи», «Динаміка і міцність машин», «Конструювання машин», «Технології виробництва літальних апаратів», «Технології машинобудування» спеціальності G9 Прикладна механіка

У посібнику ґрунтовно й у доступній формі викладено матеріал елементів лінійної алгебри, векторної алгебри та аналітичної геометрії. Наведено велику кількість рисунків і прикладів розв’язування типових задач, що допомагає студентам набути досвіду практичного застосування теоретичного матеріалу.

У першому розділ розглянуто елементи лінійної алгебри, введено поняття визначника та матриці, детально описано основні методи розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Другий розділ присвячено розгляду питань векторної алгебри, які використовуються в багатьох інженерних дисциплінах (теоретичній механіці, гідродинаміці, теорії механізмів та машин).

Третій розділ охоплює основні елементи аналітичної геометрії, де всебічно розглянуто поняття лінії і прямої на площині, площини і прямої у просторі та їхні рівняння.

У кінці основної змістовної частини наведено індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів, що дає можливість використовувати посібник для проведення контрольних заходів.

# РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

# 1.1. ВИЗНАЧНИКИ. ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ОБЧИСЛЕННЯ

## 1.1.1. Визначники 2-го та 3-го порядків

### Визначники 2-го порядку

Розглянемо квадратну таблицю чотирьох дійсних чисел $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ розмірності $2 \times 2$ вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Перший індекс $i$ кожного числа (елемента) $a_{ij}$ в таблиці (1.1) позначає номер рядка, в якому він знаходиться, другий індекс $j$ – номер стовпчика.

***Означення 1.*** *Визначником (детермінантом) 2-го порядку* для квадратної таблиці (1.1) називається число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ і позначається

$$\Delta \overset{або}{=} \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.2}$$

(знак $\Delta$ читається як *"дельта"*).

Числа $a_{11}, a_{22}$ утворюють *головну* діагональ визначника і відповідно таблиці (1.1), а $a_{12}, a_{21}$ – *бічну* діагональ.

Таким чином, для обчислення визначника 2-го порядку потрібно від добутку елементів головної діагоналі, відняти добуток елементів бічної діагоналі.

***Приклад 1.*** Обчислити визначник другого порядку

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 12 - (-15) = 12 + 15 = 27.$$

### Визначники 3-го порядку

Розглянемо квадратну таблицю дев'яти дійсних чисел розмірності $3 \times 3$ вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

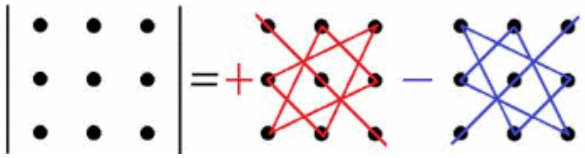
***Означення 2.*** *Визначником (детермінантом) 3-го порядку* для квадратної таблиці (1.3) називається число

$$\Delta \overset{або}{=} \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \tag{1.4}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

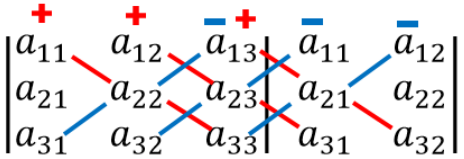
Для спрощення обчислення визначників 3-го порядку варто скористатися одним з наведених нижче правил.

***"Правило трикутника"***



*Три доданки зі знаком плюс у формулі (1.4) є добутком елементів, що стоять на головній діагоналі та у вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно утворюються доданки зі знаком мінус, де за основу береться бічна діагональ.*

***"Правило Саррюса"***



*Допишемо перші два стовпці матриці справа, після чого додаємо добутки елементів трьох діагоналей, що йдуть направо-вниз (позначено червоним), і віднімаємо добутки елементів трьох діагоналей, що йдуть зліва-вниз (позначено синім).*

***Приклад 2.*** Обчислимо визначник третього порядку за правилом трикутника

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2)(-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot 1 \cdot 6 - 0 \cdot (-4) \cdot 5 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) =$$

$$= -15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9.$$

***Приклад 3.*** Обчислимо визначник третього порядку за правилом Саррюса

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \cdot 4 -$$

$$-4 \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 2 = -10.$$

### 1.1.2. Основні властивості визначників

Розглянемо на прикладі визначників 2-го порядку основні властивості визначників, які допомагають їх ефективно обчислювати та застосовувати до прикладних задач. Ці властивості будуть справедливими і для визначників вищих порядків.

***1. Рівноправність рядків та стовпців.*** Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями і навпаки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

***2. Антисиметричність.*** Якщо переставити будь-які два рядки (стовпці) визначника місцями, то його знак зміниться на протилежний:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

***3. Однорідність.*** Спільний множник рядка (стовпця) можна виносити за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

***4. Лінійність.*** Якщо стовпець (рядок) визначника є сумою двох стовпців (рядків), то він дорівнює сумі двох відповідних визначників:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

***5. Умови рівності нулеві визначника.*** Визначник дорівнює нулю, якщо:

***а)*** один із рядків (стовпців) визначника складається лише з нулів;

***б)*** визначник має два однакові рядки (стовпці);

***в)*** у визначнику відповідні елементи двох рядків (стовпців) пропорційні.

Наприклад,

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0\,; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

***6.*** Визначник не зміниться, якщо до елементів рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й теж саме число $k$.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{\text{за властивістю 4}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} ka_{12} & a_{12} \\ ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix}}_{=0} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

за властивістю ***5 в)***

***Приклад 4.*** Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 400 & 300 \\ 48 & 32 \end{vmatrix}$ за допомогою властивостей.

Використаємо властивість ***3*** (*однорідність*), а саме винесемо спочатку спільний множник першого рядка, а потім – другого:

$$\begin{vmatrix} 400 & 300 \\ 48 & 32 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 48 & 32 \end{vmatrix} = 100 \cdot 16 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 1600 \cdot (4 \cdot 2 - 3 \cdot 3) = -1600.$$

***Зауваження 1.*** Властивості **1–6** залишаються справедливими і для визначників вищих порядків.

***Приклад 5.*** Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

*Перший спосіб:* . Оскільки властивості 1–6 залишаються справедливими і для визначників вищих порядків, то застосовуючи до заданого визначника властивість ***4*** (лінійності) і умову рівності нулеві ***5 б*** , знаходимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1+3 \\ 2 & -1 & 2+(-1) \\ -1 & 2 & -1+2 \end{vmatrix} \underset{\text{використаємо властивість } 4}{=}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}_{=0} = 0.$$

за властивістю ***5 б***)

*Другий спосіб:* за допомогою властивості ***6*** перетворимо заданий визначник таким чином, щоб у першому стовпчику всі елементи, окрім першого, дорівнювали нулю. Для цього до елементів 2-го рядка додамо відповідні елементи 1-го рядка помножені на (-2), а до елементів 3-го рядка додамо відповідні елементи 1-го рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \leftarrow + \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \cdot 1 \\ \downarrow \\ \leftarrow + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} \underset{\text{за властивість } 3 \text{ і } 5\,б}{=} 0.$$

## 1.1.3. Обчислення визначників

**Поняття мінора і алгебраїчного доповнення елемента визначника.**

***Означення 3.*** *Визначником (детермінантом) n-го порядку* називається визначник вигляду

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

***Означення 4.*** *Мінором* $M_{ij}$ деякого елемента $a_{ij}$ визначника $n$-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, який утворюється з даного визначника викреслюванням $i$-го рядка та $j$-го стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Наприклад, для визначника 3-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

мінорами елементів $a_{23}$ і $a_{31}$ будуть

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

***Означення 5.*** *Алгебраїчним доповненням* $A_{ij}$ елемента $a_{ij}$ називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$\boxed{\boldsymbol{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}}.$$

***Приклад 6.*** Знайти алгебраїчне доповнення $A_{13}$ у визначнику

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Згідно з означенням **5**, маємо

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

## Розклад визначника за елементами рядка або стовпця

***Теорема 1.*** ***(про розклад визначника за елементами будь-якого рядка або стовпця)***

*Визначник будь-якого порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.*

Доведемо теорему 1 на прикладі визначника 3-го порядку. Покажемо, що для визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

виконуються наступні рівності:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13};$$
$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23};$$
$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33};$$
$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31};$$
$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32};$$
$$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

Доведемо спочатку першу рівність, яка є розкладом визначника за елементами першого рядка.

Згідно з означенням визначник 3-го порядку дорівнює

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}.$$

Згрупуємо доданки, що містять елементи першого рядка $a_{11}, a_{12}, a_{13}$:

$$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Аналогічно доводяться й інші рівності.

***Приклад 7.*** Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

Розкладаючи заданий визначник, наприклад, за елементами 3-го рядка, знаходимо

$$\Delta = 3 \cdot A_{31} + (-1) \cdot A_{32} + 4 \cdot A_{33} =$$

$$= 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 9.$$

## Обчислення визначників вищих порядків

Теорема 1 дає можливість сформулювати правило обчислення визначника довільного порядку.

Визначник $n$-го порядку вигляду

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

обчислюється за таким правилом:

1) якщо $n = 1$, то

$$\Delta = |a_{11}| = a_{11};$$

2) якщо $n > 1$, то

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}\,, \qquad (1.5)$$

де $A_{1j}$ – алгебраїчне доповнення елемента $a_{1j}$.

Нагадаємо, що всі розглянуті вище в пункті **1.1.2.** властивості визначників 2-го порядку справедливі для визначників будь-якого порядку.

Якщо за допомогою теореми 1 або сформульованого вище правила обчислювати, наприклад, визначник 4-го порядку, то отримаємо чотири визначники 3-го порядку, які можемо обчислити за правилом трикутника.

Наприклад, застосуємо цей метод для обчислення визначника 4-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{розкладаємо за першим стовпцем}}{=}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (2 \cdot 0 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-2) \cdot 2 - 3 \cdot (-2) \cdot 3 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 0) -$$

$$-(0 \cdot 0 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 - 0 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 2) -$$

$$-(0 \cdot (-2) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \cdot 3 - 0 \cdot (-1) \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \cdot 2) -$$

$$-2 \cdot (0 \cdot (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 0 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot (-2) \cdot 2) =$$

$$= 18 - 1 - 6 - 2 \cdot 16 = -21.$$

Як бачимо, такий спосіб досить громіздкий і вимагає великої кількості обчислень. Тому на практиці спочатку за допомогою властивості 6 перетворюють визначник так, щоб у вибраному рядку або стовпці, за яким ми будемо розкладати, всі елементи крім одного дорівнювали нулю, а потім обчислюємо за теоремою 1.

***Зауваження 2.*** Властивість визначників ***6*** дозволяє мінімізувати кількість доданків у сумі (1.5) за рахунок накопичення нулів у рядку (стовпці), за яким ведеться розклад визначника.

***Приклад 8.*** Обчислити визначник 4-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Перетворимо заданий визначник таким чином, щоб у 1-му стовпці всі елементи окрім 1-го дорівнювали нулю. Для цього до елементів 3-го рядка додаємо відповідні елементи 1-го рядка, а до елементів 4-го рядка додаємо відповідні елементи 1-го рядка помножені на (-2):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \downarrow \\ \leftarrow + \\ \end{matrix} \begin{matrix} \cdot (-2) \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \leftarrow + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{розкладаємо за першим стовпцем}}{=}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -21.$$

***Приклад 9.*** Обчислити визначник 5-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

Винесемо спочатку за знак визначника спільні множники 2-го, 4-го та 5-го стовпців, а потім віднімемо від елементів 2-го стовпця елементи 1-го стовпця.

$$\Delta = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{розкладаємо за першим рядком}}{=}$$

$$= 20 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далі додаємо до елементів 2-го рядка елементи 1-го рядка

$$\Delta = 20 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{розкладаємо за першим стовпцем}}{=} -40 \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тепер віднімаємо від елементів 2-го рядка елементи 3-го рядка

$$\Delta = -40 \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{розкладаємо за третім стовпцем}}{=} -40 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 640.$$

***Зауваження 3.*** Визначник, всі елементи якого під головною діагоналлю дорівнюють нулю, дорівнює *добутку елементів головної діагоналі***.**

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 5 \cdot 1 = -10.$$

***Приклад 10.*** Обчислимо визначник *n*-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \end{vmatrix}.$$

Перетворимо заданий визначник таким чином, щоб під головною діагоналлю визначника всі елементи дорівнювали нулю. Для цього до елементів 2-го, 3-го, 4-го, …, *n*-го рядків додаємо відповідні елементи 1-го рядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n = n!\,.$$

# 1.2 МАТРИЦІ ТА ДІЇ НАД НИМИ

## 1.2.1. Класифікація матриць

***Означення 1.*** *Матрицею $A$ розмірності $m \times n$* називається таблиця чисел (елементів матриці) $a_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$, розташованих у $m$ рядках та $n$ стовпцях, і позначається

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Елемент $a_{ij}$ матриці $A$ розташований на перетині $i$-го рядка та $j$-го стовпця (тобто за двоіндексного позначення перший індекс завжди вказує на номер рядка, а другий індекс – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент).

***Приклад 1.*** Визначте розмірність матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ та вкажіть елементи $a_{13}, a_{22}$.

Матриця $A$ має два рядки і три стовпці, отже, вона має розмірність $2 \times 3$.

Елемент $a_{13}$ матриці $A$ розташовано на перетині 1-го рядка і 3-го стовпця, тому $a_{13} = 3$ , а елемент $a_{22}$ – на перетині 2-го рядка і 2-го стовпця, тому відповідно $a_{22} = 0$.

***Основні типи матриць***

1. ***Прямокутна матриця***, якщо $m \neq n$.

   Наприклад,

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{4\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. ***Квадратна матриця***, якщо $m = n$

$$A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

При цьому число $n$ називають *порядком квадратної матриці* $A$, елементи $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ утворюють *головну діагональ*, а $a_{1n}, a_{2\,n-1}, a_{3\,n-2}, \ldots, a_{n1}$ – *бічну діагональ*.

Наприклад,

$$A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. ***Трикутна матриця*** – квадратна матриця, у якої всі елементи нижче (вище) головної діагоналі дорівнюють нулю

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ або } \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. ***Діагональна матриця*** – квадратна матриця, у якої всі елементи крім елементів головної діагоналі дорівнюють нулю

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. ***Східчаста матриця*** – прямокутна матриця, у якої перший ненульовий елемент кожного рядка знаходиться правіше першого ненульового елемента попереднього рядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ddots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Наприклад,

$$A_{4\times 6}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 4 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6\end{pmatrix}.$$

6. ***Матриця-рядок*** – містить тільки один рядок ($m=1$)

$$A=(a_1\ \ a_2\ \ \dots\ \ a_n).$$

7. ***Матриця-стовпець*** – містить тільки один стовпець ($n=1$)

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}.$$

8. ***Одинична матриця*** – діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці

$$E_1=1,\ E_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ E_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \dots,$$

$$E_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

9. ***Нульова матриця*** – всі елементи матриці дорівнюють нулю

$$O_{m\times n}=\begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

### 1.2.2. Дії над матрицями

***1. Додавання матриць однакової розмірності.***

Якщо задано дві прямокутні матриці однакової розмірності $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ і $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$, то їхньою ***сумою*** буде матриця $C=(c_{ij})_{m\times n}$ тієї ж самої розмірності, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів матриць $A$ і $B$:

$$A+B=C=(c_{ij})_{m\times n}=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}.$$

Тобто для додавання двох матриць $A$ і $B$ однакової розмірності, треба додати їхні відповідні елементи.

Наприклад,

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+5 & 2+6\\ 3+7 & 4+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{pmatrix}.$$

Операція обчислення суми даних матриць називається ***додаванням матриць***. Зауважимо, що операція додавання матриць природним чином поширюється на випадок довільної кількості доданків.

### 2. *Множення матриці на число.*

Якщо задано матрицю $A=(a_{ij})_{m\times n}$ і $k$ – дійсне число, то добутком матриці на число (або числа на матрицю) називається матриця

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}ka_{11} & \dots & ka_{1j} & \cdots & ka_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ ka_{i1} & \cdots & ka_{ij} & \cdots & ka_{in}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mj} & \cdots & ka_{mn}\end{pmatrix}.$$

Тобто для того, щоб помножити матрицю на число, потрібно кожен елемент заданої матриці помножити на це число.

Наприклад,

$$3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot 2\\ 3\cdot 3 & 3\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{pmatrix}.$$

***Означення 2.*** Матриця $-A=(-1)\cdot A$ називається *протилежною* до матриці $A$.

### 3. *Різниця матриць однакової розмірності.*

Визначається як сума матриці $A$ і матриці протилежної до матриці $B$:

$$A-B=A+(-1)\cdot B.$$

Наприклад,

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5 & -6\\ -7 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -4\\ -4 & -4\end{pmatrix}.$$

## ***Властивості додавання матриць та множення матриці на число***

**1.** $A + B = B + A$ (*комутативність додавання матриць або переставна властивість*).

**2.** $A + (B + C) = (A + B) + C$ (*асоціативність додавання матриць*);

**3.** $A + O = A,\ A - A = O$ (*роль нульової матриці* в діях над матрицями така сама, як і числа нуль в діях над числами).

**4.** $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, де $\alpha$– дійсне число (*дистрибутивність множення на число відносно додавання матриць*).

**5.** $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (*дистрибутивність множення на матрицю відносно додавання чисел*).

**6.** $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, де $\alpha, \beta$– дійсні числа (*дистрибутивність відносно множення на число*).

### 4. *Добуток двох матриць.*

Множення матриць вводиться лише для узгоджених матриць!

Матриця $A = (a_{ij})_{m\times n}$ називається *узгодженою* з матрицею $B = (b_{jk})_{n\times p}$, якщо кількість стовпців матриці $A$ дорівнює кількості рядків матриці $B$.

*Добутком матриці* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *на матрицю* $B = (b_{jk})_{n\times p}$ називається така матриця $C = (c_{ik})_{m\times p}$, кожен елемент якої дорівнює сумі елементів $i$-того рядка матриці $A$ на відповідні елементи $j$ -того стовпця матриці $B$, тобто

$$A \cdot B = C = (c_{ik})_{m\times p},$$

де

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk},\ i = \overline{1,m},\ k = \overline{1,p}.$$

Таке правило множення називають ще правилом *множення "рядка на стовпець"*.

***Приклад 2.*** Знайти можливі добутки двох матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матриця $A$ розмірності $2 \times 2$ узгоджена з матрицею $B$ розмірності $2 \times 3$, оскільки кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці. Тоді добуток матриці $A$ на матрицю $B$ обчислюється наступним способом за правилом множення *"рядка на стовпчик"*:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) & 0 \cdot 2 - 1 \cdot 0 & 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для цих матриць добуток $BA$ не існує, бо матриця $B$ неузгоджена з матрицею $A$ (кількість стовпців матриці $B_{2\times3}$ не дорівнює кількості рядків матриці $A_{2\times2}$).

***Зауваження 1.*** Дві квадратні матриці однієї розмірності

$$A = (a_{ij})_{m\times m} \text{ та } B = (b_{jk})_{m\times m}$$

завжди узгоджені між собою.

***Зауваження 2.*** З правила множення матриць випливає, що завжди можна перемножити дві квадратні матриці одного порядку; в результаті одержимо матрицю того самого порядку.

## *Властивості множення матриць*

**1.** $AB \neq BA$ (множення матриць НЕ комутативне!, *антиперестановна властивість*).

Наприклад, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то добутки

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

звідки випливає, що $AB \neq BA$. До того ж, приклад показує, що добуток ненульових матриць може бути нульовою матрицею!

В частинному випадку, коли $AB = BA$, матриці $A$ і $B$ називаються *переставними*.

**2.** $(AB)C = A(BC)$ (*асоціативність множення матриць*).

**3.** $(A+B)C = AC + BC$ (*дистрибутивність множення матриць відносно додавання матриць*).

**4.** $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, де $\alpha$– дійсне число (*дистрибутивність множення на число відносно множення матриць*).

**5.** $A \cdot O = O \cdot A = O$ (*властивість нульової матриці*).

**6.** $A \cdot E = E \cdot A = A$ (*властивість одиничної матриці*).

## 5. Натуральний степінь квадратної матриці.

З правила множення матриць випливає, що завжди можна перемножити дві квадратні матриці однакової розмірності. В результаті отримаємо матрицю тієї ж самої розмірності. Зокрема, квадратну матрицю $A$ можна помножити саму на себе, тобто піднести до квадрату.

Таким чином, *натуральний степінь k квадратної матриці* $A$ розуміють як

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ разів}}.$$

***Зауваження 3.*** Прямокутну (неквадратну) матрицю піднести до степеня неможливо.

Якщо $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, то многочленом $f(A)$ від квадратної матриці $A$ або *матричним многочленом* називають вираз

$$f(A) = a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 E,$$

де $E$ – одинична матриця такої ж розмірності як і матриця $A$.

***Приклад 3.*** Обчислити значення многочлена $f(x) = x^2 + 2x + 3$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Згідно з означенням многочлена від матриці запишемо

$$f(A) = A^2 + 2A + 3E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обчислимо

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1+(-2)\cdot 3 & 1\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1) \\ 3\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 3\cdot(-2)+(-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$f(A) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

### 6. *Транспонування матриць*

Заміну рядків матриці на її стовпці, а стовпців на рядки зі збереженням відповідних номерів рядків і стовпців, називають *транспонуванням*.

Матрицю розмірністю $n \times m$, яку одержують з матриці $A$ розмірності $m \times n$ транспонуванням стовпців (рядків), називають *транспонованою матрицею* до матриці $A$ і позначають $A^T$.

Наприклад, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

#### ***Властивості транспонування матриць***

**1.** $(A^T)^T = A$.

**2.** $(A + B)^T = A^T + B^T$.

**3.** $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, де $\alpha$– дійсне число.

**4.** $(AB)^T = B^T A^T$.

Матрицю $A$ називають *симетричною*, якщо $A^T = A$, і *кососиметричною*, якщо $A^T = -A$.

#### ***Визначник матриці***

Кожній квадратній $n \times n$ матриці $A = (a_{ij})_{n\times n}$ можна поставити у відповідність певну числову характеристику, що називається її ***визначником (детермінантом) n-го порядку*** і позначається

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Використовують також інші позначення визначника матриці: $|A|$, $\Delta A$ або $\Delta$ (знак $\Delta$ читається як *"дельта"*).

Враховуючи властивості визначників та властивості дій над матрицями, мають місце такі твердження:

1. *Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добуткові визначників цих матриць:*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

2. *Визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів на головній діагоналі:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

З останнього твердження випливає, що *визначник одиничної матриці будь-якої розмірності дорівнює одиниці:*

$$\det E_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

3. *Визначник транспонованої матриці дорівнює визначнику самої матриці:*

$$\det A^T = \det A.$$

## 1.2.3. Обернена матриця та матричні рівняння

### Обернена матриця

Розглянемо довільну ненульову квадратну матрицю $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

***Означення 3.*** Матриця $A^{-1}$ називається *оберненою* до квадратної матриці $A$, якщо виконується умова

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

де $E$ - одинична матриця такої ж самої розмірності як і матриця $A$.

З означення 3 випливає, що оберненою до одиничної матриці є одинична матриця:

$$E^{-1} = E.$$

## ***Властивості оберненої матриці.***

**1.** $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$;

**2.** $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

**3.** $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

***Означення 4.*** Матриця $A$ називається *невиродженою*, якщо її визначник (детермінант) $\det A \neq 0$, і *виродженою*, якщо $\det A = 0$.

***Теорема 1.*** ***(Про існування оберненої матриці)***

*Обернена матриця* $A^{-1}$ *існує тоді і тільки тоді, коли матриця* $A$ *є невиродженою, причому*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*}, \qquad (1.6)$$

*де* $A^* = (A^V)^T$, $A^V$ *– матриця складена з відповідних алгебраїчних доповнень елементів* $a_{ij}$ *матриці* $A$:

$$A^V = (A_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

***Доведення теореми.*** Доведемо спочатку, що коли існує обернена матриця для матриці $A$, то вона є не виродженою, тобто її визначник не дорівнює нулю.

З означення 3 випливає, що

$$A \cdot A^{-1} = E_n \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = det\, E_n.$$

Оскільки $\det E_n = 1$, то з останньої рівності випливає,що $\det A \neq 0$, тобто $A$– невироджена матриця.

Тепер доведемо, що якщо квадратна матриця $A$ невироджена, то для неї існує єдина обернена $A^{-1}$.

Дійсно, якщо $\det A \neq 0$, то для $A$ існує обернена матриця, яка визначається формулою (1).

Покажемо, що $A^{-1}$ єдина для $A$. Припустимо,що існує ще одна обернена матриця $A''$, тоді згідно з означенням 3 буде виконана рівність

$$A''A = AA'' = E_n.$$

З іншого боку

$$A^{-1} = A^{-1}E_n = A^{-1}(AA'') = (A^{-1}A)A'' = E_nA''.$$

Отже, обернена матриця єдина. Таким чином, теорему про існування оберненої матриці доведено.

***Зауваження 4.*** Якщо $A$ – квадратна і невироджена матриця, то для неї завжди існує обернена матриця $A^{-1}$. Якщо ж $A$ – не квадратна, а прямокутна $m \times n$ – матриця $(m \neq n)$ або квадратна, але вироджена $(\det A = 0)$, то матриця $A$ не має оберненої і символ $A^{-1}$ не має сенсу.

## *Алгоритм обчислення оберненої матриці*

Нехай маємо квадратну матрицю $A$ розмірності $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для обчислення оберненої матриці $A^{-1}$ необхідно зробити такі кроки:

**1)** Знаходимо визначник матриці $A$:

$$\Delta = \det A \neq 0.$$

**2)** Будуємо матрицю $A^V$, елементами якої є алгебраїчні доповнення до відповідних елементів матриці $A$:

$$A^V = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

Тобто $A^V = (A_{ij})$, де $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

**3)** Транспонуємо матрицю $A^V$ і отримаємо матрицю $A^*$, яка називається *союзною* або *приєднаною* до невиродженої матриці $A$:

$$A^* = (A^V)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

**4)** Поділивши кожен елемент матриці $A^*$ на $\Delta = \det A$, одержимо матрицю $A^{-1}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^*.$$

***Приклад 4.*** Знайти обернену матрицю, до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

**1)** Знаходимо $\Delta = \det A$:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \neq 0.$$

**2)** Знаходимо $A^V = (A_{ij})$, де $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21, \quad A_{23} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Тоді

$$A^V = \begin{pmatrix} -48 & 42 & -3 \\ 24 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

**3)** Транспонуємо $A^V$ і знаходимо $A^*$:

$$A^* = (A^V)^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

**4)** Знаходимо $A^{-1}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & \frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Робимо перевірку:

$$A^{-1}A = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -48\cdot 1 + 24\cdot 4 - 3\cdot 7 & -48\cdot 2 + 24\cdot 5 - 3\cdot 8 & -48\cdot 3 + 24\cdot 6 - 3\cdot 0 \\ 42\cdot 1 - 21\cdot 4 + 6\cdot 7 & 42\cdot 2 - 21\cdot 5 + 6\cdot 8 & 42\cdot 3 - 21\cdot 6 + 6\cdot 0 \\ -3\cdot 1 + 6\cdot 4 - 3\cdot 7 & -3\cdot 2 + 6\cdot 5 - 3\cdot 8 & -3\cdot 3 + 6\cdot 6 - 3\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -48 + 96 - 21 & -96 + 120 - 24 & -144 + 144 - 0 \\ 42 - 84 + 42 & 84 - 105 + 48 & 126 - 126 + 0 \\ -3 + 24 - 21 & -6 + 30 - 24 & -9 + 36 - 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

***Приклад 5.*** Знайти обернену матрицю, до матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

1) Знаходимо $\Delta = \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

2) Знаходимо $A^V = (A_{ij})$, де $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot a_{22} = a_{22},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot a_{21} = -a_{21},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot a_{12} = -a_{12},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot a_{11} = a_{11}.$$

Тоді

$$A^V = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

3) Транспонуємо $A^V$ і знаходимо

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

4) Знаходимо $A^{-1}$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}. \qquad (1.7)$$

## Матричні рівняння

Розглянемо деякі типи матричних рівнянь, які трапляються у різноманітних прикладних задачах.

### *1. Рівняння $AX = B$*

Нехай задано матричне рівняння вигляду

$$\boxed{\boldsymbol{A \cdot X = B}}, \qquad (1.8)$$

де $X$– невідома матриця розмірності $n \times m$, $A$ і $B$ – задані матриці розмірності $n \times n$ і $n \times m$ відповідно.

Якщо квадратна матриця $A$ є не виродженою ($\det A \neq 0$), тобто матриця $A$ має обернену $A^{-1}$, то помноживши обидві частини рівняння (1.8) на $A^{-1}$ ***зліва***, отримаємо

$$A^{-1}A \cdot X = A^{-1}B.$$

Враховуючи, що $A^{-1}A = E$ , а добуток $EX = X$, знаходимо розв'язок $X$ рівняння (1.8) у вигляді

$$\boxed{\boldsymbol{X = A^{-1}B}}.$$

***Приклад 6.*** Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Позначимо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $X$ – шукана матриця. Тоді задане матричне рівняння перепишеться у вигляді

$$AX = B$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{A^{-1}A}_{E} X = A^{-1}B$$
$$\Downarrow$$
$$X = A^{-1}B.$$

Знайдемо обернену матрицю $A^{-1}$:

1) Знаходимо $\Delta = \det A$:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0.$$

2) Знаходимо $A^V = (A_{ij})$, де $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1,$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3,$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2.$$

Тоді

$$A^V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Транспонуємо $A^V$ і знаходимо $A^*$:

$$A^* = (A^V)^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) Знаходимо $A^{-1}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Робимо перевірку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

***Зауваження 5.*** У випадку матриць розмірності $2 \times 2$, для знаходження оберненої матриці, можна користуватися формулою (1.7).

5) Знаходимо невідому матрицю $X$:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 & 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 5 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & -15 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

***Приклад 7.*** Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Позначимо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X$ – шукана матриця.

Тоді задане матричне рівняння перепишеться у вигляді

$$AX = B$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{A^{-1}A}_{E} X = A^{-1}B$$
$$\Downarrow$$
$$X = A^{-1}B.$$

Знайдемо обернену матрицю $A^{-1}$:

1) Знаходимо $\Delta = \det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

2) Знаходимо $A^V = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Маємо

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Отже,

$$A^V = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

3) Транспонуємо $A^V$ і знаходимо $A^*$:

$$A^* = (A^V)^T = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -7 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

4) Знаходимо $A^{-1}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^V)^T = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -7 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність обчислень:

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -7 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3.$$

6) Знаходимо розв’язок заданого рівняння:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -7 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -9 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

### *2. Рівняння $XA = B$*

У випадку матричного рівняння вигляду

$$\boxed{\boldsymbol{X \cdot A = B}}, \tag{1.9}$$

де $X$ – невідома матриця розмірності $n \times m$, $A$ і $B$ – задані матриці розмірності $m \times m$ і $n \times m$ відповідно. Аналогічно множимо задану рівність (1.9) ***справа*** на обернену матрицю $A^{-1}$:

$$X \cdot \underbrace{AA^{-1}}_{E} = BA^{-1},$$

звідки знаходимо

$$\boxed{\boldsymbol{X = BA^{-1}}}.$$

***Приклад 8.*** Розв'язати матричне рівняння

$$X\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Позначимо $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $X$ – шукана матриця. Тоді задане матричне рівняння перепишеться у вигляді

$$XA = B$$

$$\Downarrow$$

$$X = BA^{-1}.$$

Знайдемо обернену матрицю $A^{-1}$, використовуючи формулу (1.7):

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1 \neq 0.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Робимо перевірку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Знаходимо невідому матрицю $X$:

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 14 \\ 26 & -19 \end{pmatrix}.$$

### *3. Рівняння $AXB = C$*

Для розв'язування матричного рівняння

$$\boxed{\boldsymbol{A \cdot X \cdot B = C}}, \qquad (1.10)$$

де $X$– невідома матриця, $A, B, C$ – задані матриці, причому матриці $A$ і $B$ квадратні і мають обернені, потрібно помножити обидві частини рівності (1.10) ***зліва*** на $A^{-1}$, а ***справа*** – на $B^{-1}$:

$$\underbrace{A^{-1}A}_{E} \cdot X \cdot \underbrace{BB^{-1}}_{E} = A^{-1}CB^{-1}.$$

Таким чином, розв'язок матричного рівняння (1.10) знаходимо у вигляді

$$\boxed{\boldsymbol{X = A^{-1}CB^{-1}}}.$$

***Приклад 9.*** Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Позначимо $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $X$ – шукана матриця. Тоді задане матричне рівняння перепишеться у вигляді

$$AXB = C$$

$$\Downarrow$$

$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Знайдемо обернені матриці $A^{-1}$ та $B^{-1}$ використовуючи формулу (1.7):

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \neq 0,$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Робимо перевірку для обох матриць:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

$$B^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Знаходимо невідому матрицю $X$:

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -7 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \end{pmatrix}.$$

# 1.3. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

## 1.3.1. Основні поняття та означення

***Означення 1.*** *Системою $m$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$* називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.11}$$

Числа $a_{ij}$ $(i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,n)$ біля невідомих називаються *коефіцієнтами*, а числа $b_i$ – *вільними членами* системи (1.11).

***Означення 2.*** Система (1.11) називається *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і *неоднорідною*, якщо хоча б один з них не дорівнює нулю.

***Означення 3.*** *Розв'язком* системи (1.11) називається упорядкований набір $n$ чисел $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ (значення невідомих), який перетворює всі рівняння системи (1.11) в тотожності.

***Означення 4.*** Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

***Означення 5.*** Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок і *невизначеною*, якщо вона має більше одного розв'язку.

В цьому випадку вони називаються *частинними розв'язками*. Сукупність всіх частинних розв'язків називається *загальним розв'язком*.

Таким чином, *розв'язати систему* – означає з'ясувати сумісна вона чи несумісна і у випадку сумісності знайти її загальний розв'язок.

***Зауваження 1.*** Однорідна система завжди сумісна, оскільки $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ є розв'язком такої системи. Цей розв'язок називається *нульовим* або *тривіальним*.

***Означення 6.*** Дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь називаються *еквівалентними (рівносильними)*, якщо вони мають одну й ту ж саму множину розв'язків.

Еквівалентні системи лінійних алгебраїчних рівнянь дістають, зокрема, внаслідок, так званих елементарних перетворень рівнянь даної системи. *Елементарні перетворення* рівнянь системи відповідають *елементарним перетворенням рядків матриці* системи:

1) *переставляння рядків;*
2) *множення рядка на число відмінне від нуля;*
3) *додавання до рядка іншого рядка, помноженого на число.*

### 1.3.2. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера

Розглянемо спочатку систему **двох** лінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими $x, y$:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \tag{1.12}$$

де коефіцієнти $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ і вільні члени $b_1$, $b_2$ – задані дійсні числа.

Для розв'язування даної системи помножимо перше рівняння на $a_{22}$, друге на $(-a_{12})$, а потім складемо їх; після цього перше рівняння помножимо на $a_{21}$, а друге на $(-a_{11})$ і знову складемо їх. Одержимо систему вигляду

$$\begin{cases} x(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ y(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases}$$

Якщо вираз $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, то існує розв'язок систем (1.12), який можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ y = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

Знаменник в обох рівностях цього розв'язку є визначником 2-го порядку, елементи якого відповідають розташуванню коефіцієнтів біля невідомих системи (1.12):

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Позначимо його

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Чисельники також можемо записати у вигляді визначників 2-го порядку:

$$b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b_2 a_{11} - b_1 a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Позначимо їх

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

***Зауваження 2.*** Визначник $\Delta_x$ можна утворити з визначника $\Delta$, замінивши перший стовпець з елементами $a_{11}, a_{21}$, які є коефіцієнтами біля змінної $x$ в системі (1.12) на стовпець вільних членів $b_1$, $b_2$. Аналогічно визначник $\Delta_y$ можна утворити з визначника $\Delta$, замінивши другий стовпець з елементами $a_{12}$, $a_{22}$, які є коефіцієнтами біля змінної $y$ в системі (1.12) на стовпець вільних членів $b_1$, $b_2$.

Отже, якщо визначник $\Delta \neq 0$, то *існує єдиний* розв'язок системи (1.12), який знаходиться за ***формулами Крамера*** :

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \;\; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}\,.} \qquad (1.13)$$

Якщо $\Delta = 0$ і при цьому $\Delta_x \neq 0$ або $\Delta_y \neq 0$, то система (1.12) ***не має жодного розв'язку***.

Якщо $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ одночасно, то система (1.12) ***має безліч розв'язків***.

Розглянемо тепер цей метод на прикладі системи **трьох** лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими $x$, $y$, $z$:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \qquad (1.14)$$

Визначник $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, складений з коефіцієнтів біля невідомих називається *головним визначником системи* (1.14).

Визначники

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

називаються *допоміжними визначниками системи* (1.14).

Якщо визначник $\Delta \neq 0$, то *існує єдиний* розв'язок системи (1.14), який знаходиться за ***формулами Крамера***:

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.} \qquad (1.15)$$

***Зауваження 3.*** Під час знаходженні невідомих, $x, y, z$ із системи (1.14) можливі такі випадки:

1) Якщо головний визначник $\Delta \neq 0$, то система (1.14) ***має єдиний розв'язок***, тобто *сумісна і визначена*.
2) Якщо $\Delta = 0$ і при цьому $\Delta_x \neq 0$, або $\Delta_y \neq 0$, або $\Delta_z \neq 0$, то система (1.14) ***не має жодного розв'язку***, тобто *несумісна*.
3) Якщо $\Delta = 0, \Delta_x = 0, \Delta_y = 0, \Delta_z = 0$ одночасно, то система (1.14) ***має безліч розв'язків***, тобто *сумісна і невизначена*.

***Приклад 1.*** Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 3x + y = 7. \end{cases}$$

Складаємо та обчислюємо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Складаємо та обчислюємо допоміжні визначники системи:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -15, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -4.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то за формулами Крамера існує єдиний розвязок системи, який має вигляд

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{15}{7},\ \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4}{7}.$$

Для перевірки правильності обчислень, достатньо підставити отримані значення в задану систему рівнянь, в результаті чого в кожному рівнянні системи повинні отримати тотожність:

$$\begin{cases} 2 \cdot \frac{15}{7} + 3 \cdot \frac{4}{7} = 6, \\ 3 \cdot \frac{15}{7} + \frac{4}{7} = 7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 \equiv 6, \\ 7 \equiv 7. \end{cases}$$

Отже, розв'язком заданої системи є

$$\left\{x = \frac{15}{7},\ y = \frac{4}{7}\right\}.$$

***Приклад 2.*** Розв'язати систему рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 4x - y = 9, \\ 7x + 2y = 12. \end{cases}$$

Знайдемо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 7 = 15 \neq 0.$$

Також обчислимо допоміжні визначники системи:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 12 = 30, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & 12 \end{vmatrix} = 48 - 63 = -15.$$

Враховуючи що $\Delta \neq 0$, то за формулами Крамера існує єдиний розвязок системи, який має вигляд

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{30}{15} = 2,\ \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-15}{15} = -1.$$

Перевірка.

Для перевірки правильності обчислень підставимо отримані розв'язки в нашу систему рівнянь. Маємо такі тотожності:

$$\begin{cases} 4 \cdot 2 - (-1) = 9, \\ 7 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 12. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 \equiv 9, \\ 12 \equiv 12. \end{cases}$$

Отже, розв'язком заданої системи є

$$\{x = 2,\ y = -1\}.$$

***Приклад 3.*** Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1, \\ x - y - z = 1, \\ 3x + y - z = 0. \end{cases}$$

Складаємо та обчислюємо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

отже, система сумісна.

Складаємо та обчислюємо допоміжні визначники системи:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

Підставляємо отримані результати у формули Крамера (1.13):

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{3}{2}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{3}{2}.$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -1, \\ 1 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 1, \\ 3 \cdot 1 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \equiv -1, \\ 1 \equiv 1, \\ 0 \equiv 0. \end{cases}$$

Отже, єдиним розв'язком системи є

$$\left\{x = 1,\ y = -\frac{3}{2},\ z = \frac{3}{2}\right\}.$$

***Приклад 4.*** Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} x - y - z = 3, \\ x - 3y - 2z = 4, \\ 2x + y + 2z = 2. \end{cases}$$

Шукаємо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 4 - 1 - 6 + 2 + 2 = -5 \neq 0,$$

отже, система сумісна.

Обчислимо допоміжні визначники системи:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18 + 4 - 4 - 6 + 6 + 8 = -10,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 12 - 2 + 8 + 4 - 6 = 0,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 8 + 3 + 18 - 4 + 2 = 5.$$

Тоді за формулами Крамера (1.13):

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{-5} = 0, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{5}{-5} = -1\,.$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 2 - 0 - (-1) = 3, \\ 1 \cdot 2 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 4, \\ 2 \cdot 2 + 0 + 2 \cdot (-1) = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \equiv 3, \\ 4 \equiv 4, \\ 2 \equiv 2. \end{cases}$$

Отже, набір

$$\left\{x = 1,\ y = -\frac{3}{2},\ z = \frac{3}{2}\right\}$$

дійсно є розв’язком заданої системи рівнянь.

***Приклад 5.*** Розв’язати систему рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ -x + y - 2z = -1, \\ 3x - 4y + 3z = 3. \end{cases}$$

Обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 18 + 4 - 3 - 16 - 9 = 0,$$

Обчислимо допоміжні визначники системи:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 18 + 4 - 3 - 0 - 9 = 10 \neq 0.$$

Отже, задана система рівнянь несумісна, тобто не має розв'язків.

Метод розв'язання систем лінійних рівнянь за допомогою формул Крамера можна узагальнити і на для систем довільного порядку.

Для системи $n$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $n$ невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

за умови $\Delta \neq 0$ ***формули Крамера*** мають вигляд

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad \dots \quad , x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta},$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_2 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & b_2 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_2 & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\cdots, \quad \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_n \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_n \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

### 1.3.3. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом

Розглянемо систему $n$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $n$ невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.16}$$

Позначимо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \textit{основна матриця коефіцієнтів системи},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \textit{матриця невідомих системи},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - \textit{матриця вільних членів}.$$

Тоді, згідно з правилом множення матриць, систему (1.16) можна записати у вигляді одного *матричного рівняння*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

або

$$A \cdot X = B. \tag{1.17}$$

Якщо матриця $A$ має обернену $A^{-1}$, то помноживши обидві частини рівності (1.17) на $A^{-1}$ ***зліва***, отримаємо

$$\underbrace{A^{-1}A}_{E} X = A^{-1}B$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{X = A^{-1}B}. \tag{1.18}$$

Формулу (1.18) називають *матричним записом розв'язку системи* (1.16), або *розв'язком матричного рівняння* (1.17).

***Зауваження 4.*** Знаходження розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі можливе лише тоді, коли основна матриця коефіцієнтів системи невироджена, тобто $\det A \neq 0$.

***Приклад 6***. Розв'язати матричним методом систему

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$$

Запишемо задану систему у матричній формі матричного рівняння

$$A \cdot X = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Тоді розв'язок системи знаходимо у вигляді

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

де

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^{*}.$$

Знайдемо $A^{-1}$, притримуючись відомого алгоритму.

1) Знаходимо $\Delta = \det A$:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 48 - 3 + 18 + 20 + 8 = -25 \neq 0.$$

2) Складемо матрицю алгебраїчних доповнень $A^{V} = (A_{ij})$, де $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 17, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{33} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином,

$$A^V = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 5 \\ 17 & 1 & -10 \\ -10 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Транспонуємо $A^V$ і знаходимо $A^*$:

$$A^* = (A^V)^T = \begin{pmatrix} -6 & 17 & -10 \\ 7 & 1 & -5 \\ 5 & -10 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Знаходимо $A^{-1}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = -\frac{1}{25}\begin{pmatrix} -6 & 17 & -10 \\ 7 & 1 & -5 \\ 5 & -10 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) Помноживши $A^{-1}$ на вектор-стовпчик вільних членів $B$, знайдемо розв'язок системи

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{25}\begin{pmatrix} -6 & 17 & -10 \\ 7 & 1 & -5 \\ 5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{25}\begin{pmatrix} -6 \cdot 1 + 17 \cdot 3 + (-10) \cdot 2 \\ 7 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-5) \cdot 2 \\ 5 \cdot 1 + (-10) \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$x = -1, \;\; y = 0, \;\; z = 1.$$

6) Перевірка:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 1, \\ -1 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 3, \\ 3 \cdot (-1) - 0 + 5 \cdot 1 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \equiv 1, \\ 3 \equiv 3, \\ 2 \equiv 2. \end{cases}$$

Отже,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ – розв'язок заданої системи.

### 1.3.4. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса

Одним з найпростіших методів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь є метод послідовного виключення невідомих, або метод Гауса, який ґрунтується на елементарних перетвореннях системи рівнянь. Суть методу полягає в послідовному виключенню змінних.

Метод є найбільш універсальним, оскільки дозволяє розв'язувати системи, у яких кількість невідомих не дорівнює кількості рівнянь системи.

Під час розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса зручніше використовувати елементарні перетворення не над рівняннями самої системи, а над рядками, так званої, *розширеної матриці* даної системи (утвореної приєднанням до *основної матриці* її коефіцієнтів стовпця вільних членів), а саме будемо намагатися зводити її до *трикутного* (або *східчастого*) вигляду.

Розглянемо цей метод на прикладах.

***Приклад 7***. Розв'язати систему методом Гауса

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + y + 2z = 1, \\ x + y + 3z = 2. \end{cases}$$

1) Випишемо розширену матрицю системи і виконаємо *елементарні перетворення над її* ***рядками*** так, щоб під головною діагоналлю матриці стояли нулі. Для цього потрібно помножити 1-й рядок матриці на (–2) і додати до 2-го, потім помножити на (–1) і додати до 3-го:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \leftarrow + \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \\ \downarrow \\ \leftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Відновимо систему рівнянь відповідно до отриманої матриці:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ -y = -1, \\ 2z = 1. \end{cases}$$

Отримана система лінійних рівнянь еквівалентна початковій, оскільки була отримана в результаті еквівалентних перетворень, а тому і розв'язки цих систем однакові.

Тоді, маємо

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = 1, \\ z = \frac{1}{2}. \end{cases}$$ – *єдиний розв'язок* системи.

***Приклад 8***. Розв'язати систему методом Гауса

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1, \\ -x + 2y - 3z = 3, \\ 2x - y + 3z = 2. \end{cases}$$

Записуємо розширену матрицю системи

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot 1 \\ \leftarrow + \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \downarrow \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \leftarrow + \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Відновлена система рівнянь

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1, \\ y - z = 2, \\ 0 = 2 \end{cases}$$

*не має жодного розв'язку*, оскільки рівняння $0 = 2$ неможливе.

***Приклад 9***. Розв'язати систему методом Гауса

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 1, \\ x + 2y - z = 2, \\ 2x + y - 3z = 1, \\ x + 5y = 5. \end{cases}$$

Перетворимо розширену матрицю системи, спочатку помінявши 1-й і 2-й рядки місцями, а потім виконавши елементарні перетворення над рядками:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot 1 \\ \leftarrow + \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \downarrow \\ \leftarrow + \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot 1 \\ \leftarrow + \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \downarrow \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Відновлена система

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 3y + z = 3. \end{cases}$$

має безліч розв'язків, оскільки невідомих більше ніж рівнянь у системі.

Випишемо всі частинні розв'язки системи. Для цього покладемо одну зі змінних, наприклад $z = C, C \in \mathbb{R}$, і виразимо всі інші невідомі через $C$. Отримаємо

$$\begin{cases} x = \dfrac{5C}{3}, \\ y = \dfrac{3 - C}{3}, \\ z = C, \ \ C \in \mathbb{R} \end{cases}$$ – *загальний розв'язок* системи.

***Зауваження 5.*** Якщо в отриманій системі кількість рівнянь менша ніж кількість невідомих, то система має безліч розв'язків. При цьому, невідомі які виражаються через інші називаються *базовими невідомими*, а невідомі через які виражаються інші невідомі називаються *вільними невідомими*.

У прикладі 9 змінні $x$ та $y$ – *базові невідомі*, а змінна $z$ – *вільна невідома*.

## 1.3.5. Критерій сумісності систем лінійних алгебраїчних рівнянь

### Ранг матриці

***Означення 7.*** *Мінором k-го порядку* $M_k$ матриці $A$ називається визначник $k$-го порядку, складений з елементів матриці $A$, які розташовані на перетині вибраних $k$ рядків і $k$ стовпців цієї матриці.

***Приклад 10.*** Виписати мінори всіх порядків матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задана матриця має 6 мінорів 1-го порядку і 3 мінори 2-го порядку:

$$M_1 = 1, \ \ M_1 = 2, \ \ M_1 = 3, \ \ M_1 = 4, M_1 = 5, \ \ M_1 = 6;$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \ \ M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \ M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

***Означення 8.*** *Рангом* $r(A)$ ненульової матриці $A$ називається *найбільший порядок* відмінного від нуля мінора цієї матриці.

Очевидно, що $0 \le r \le \min(m; n)$.

***Означення 9.*** Мінор, порядок якого визначає ранг матриці називається *базовим*.

Матриця може мати декілька базових мінорів.

***Приклад 11.*** Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Всі мінори третього порядку $M_3 = 0 \Rightarrow r(A) \neq 3$. Але існує один мінор другого порядку

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{ранг } \underline{r(A) = 2}.$$

## *Властивості рангу матриці*

**1.** Ранг матриці не зміниться, якщо над матрицею виконати *елементарні перетворення*:

***а)*** *перестановка місцями двох рядків (стовпців) матриці;*

***б)*** *множення всіх елементів рядка (стовпця) матриці на число відмінне від нуля;*

***в)*** *додавання до всіх елементів рядка (стовпця) матриці відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те саме число;*

***г)*** *відкидання рядка (стовпця) матриці, всі елементи якого дорівнюють нулю.*

**2.** Ранг східчастої матриці дорівнює кількості її ненульових рядків.

**3.** При транспонуванні матриці її ранг не зміниться.

***Приклад 12.*** Знайти ранг матриці $Q = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 1 & 9 & 6 & -7 \\ 2 & 8 & -8 & 1 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

Зведемо матрицю $Q$ до східчастого вигляду виконуючи елементарні перетворення над рядками матриці:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 1 & 9 & 6 & -7 \\ 2 & 8 & -8 & 1 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \begin{matrix} \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -6 & -12 & 9 \\ 0 & -4 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \downarrow \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки в отриманій східчастій матриці два ненульових рядка, то, за властивістю 2., ранг матриці $r(Q) = 2$.

## Критерій сумісності систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо систему $m$ рівнянь з $n$ невідомими :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Позначимо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \textit{основна матриця системи,}$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) - \textit{розширена матриця системи.}$$

Вичерпну відповідь на запитання про існування розв'язку даної системи дає наступна теорема.

***Теорема 1.*** ***(теорема Кронекера-Капеллі)***

*Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг її основної матриці дорівнює рангу її розширеної матриці, тобто*

$$r(A) = r(\tilde{A}).$$

*При цьому, якщо*

*1)* $r(A) = r(\tilde{A}) = k = n \Rightarrow$ *система має єдиний розв'язок;*

*2)* $r(A) = r(\tilde{A}) = k < n \;\Rightarrow\;$ *система має безліч розв'язків;*

*3)* $r(A) \neq r(\tilde{A}) \;\Rightarrow\;$ *система не має розв'язків.*

*де* $n$ *- кількість невідомих.*

***Приклад 13.*** Дослідити на сумісність систему

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 2x - y + 2z = 3, \\ 3x + y + z = 5. \end{cases}$$

Розглянемо лише розширену матрицю системи, оскільки основна вже міститься в ній і виконаємо елементарні перетворення над рядками матриці:

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1 & 5\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot(-2)\\ \cdot(-3)\end{array}\begin{array}{l}\\ \leftarrow +\\ \downarrow\\ \leftarrow +\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -5 & 4 & 1\\ 0 & -5 & 4 & 2\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \cdot(-1)\\ \leftarrow +\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -5 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Знайдемо ранги основної та розширеної матриць.

Розширена матриця системи має $r(\bar{A})=3$, оскільки, у перетвореному вигляді залишилося три ненульових рядка.

Основна матриця системи перетворюється в матрицю

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -5 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

яка має два ненульових рядка. Отже, $r(A)=2$.

Отже, $r(A)\neq r(\bar{A})$ і за теоремою Кронекера-Капеллі задана система рівнянь несумісна, тобто не має жодного розв'язку.

## 1.3.6. Розв'язування однорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо однорідну систему $m$ рівнянь з $n$ невідомими :

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0.\end{cases}$$

Ця система завжди сумісна, оскільки завжди має нульовий (тривіальний) розв'язок

$$x_1=0, x_2=0, \ldots, x_n=0,$$

тому що підстановка нулів замість невідомих в кожне з рівнянь системи перетворює їх в тотожності. Ненульові розв'язки, якщо вони існують можна знайти методом Гауса.

***Приклад 14.*** Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 2x + y + z = 0, \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

Розглянемо розширену матрицю і виконаємо елементарні перетворення над рядками матриці

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \leftarrow + \\ \end{matrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \downarrow \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \sim \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, останній нульовий стовпчик розширеної матриці не може вплинути на її ранг. Тому ранги основної та розширеної матриць для однорідної системи завжди рівні, й однорідна система завжди сумісна. Маємо $r(A) = r(\tilde{A}) = 3$, тоді за теоремою Кронекера-Капеллі задана однорідна система рівнянь сумісна і має єдиний (а отже, тривіальний) розв'язок

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Слід зазначити, що оскільки останній нульовий стовпчик розширеної матриці не може вплинути на її ранг, то під час дослідження рангу можна виконувати елементарні перетворення над рядками основної, а не розширеної матриці.

***Приклад 15.*** Знайти розв'язок однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} -x + y - 2z = 0, \\ x - y + 2z = 0, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

Розглянемо розширену матрицю і виконаємо елементарні перетворення над рядками матриці

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \sim\leftarrow + \\ \end{matrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \downarrow \sim \\ \leftarrow + \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $r(A) = r(\tilde{A}) = 2 < 3$ і за теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна і має безліч розв'язків. З відновленої системи рівнянь знаходимо

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 3y - 5z = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 2z = -\frac{1}{3}z, \\ y = \frac{5}{3}z. \end{cases}$$

Нехай $z = C, C \in \mathbb{R}$, тоді отримаємо

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3}C, \\ y = \frac{5}{3}C, \\ z = C, \ \ C \in \mathbb{R}. \end{cases}$$ – *загальний розв'язок* системи.

***Приклад 16.*** Знайти розв'язок однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} x + 5y + 4z + 3t = 0, \\ 2x - y + 2z - t = 0, \\ 5x + 3y + 8z + t = 0, \\ 3x + 4y + 6z + 2t = 0. \end{cases}$$

Розглянемо розширену матрицю і виконаємо елементарні перетворення над рядками матриці

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \leftarrow + \end{matrix} \begin{matrix} \cdot(-5) \\ \downarrow \\ \leftarrow + \end{matrix} \begin{matrix} \cdot(-3) \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & 0 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & 0 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} \text{останні три рядки} \\ \text{пропорційні} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Оскільки $r(A) = r(\tilde{A}) = 2 < 4$, то за теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна і має безліч розв'язків.

Запишемо відновлену систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 5y + 4z + 3t = 0, \\ -11y - 6z - 7t = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{11}(-14z + 2t), \\ y = -\dfrac{1}{11}(6z + 7t). \end{cases}$$

Нехай $z = C_1,\ t = C_2,$ де $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, тоді отримаємо

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{11}(-14C_1 + 2C_2), \\ y = -\dfrac{1}{11}(6C_1 + 7C_2), \\ z = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\ t = C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$ – *загальний розв'язок* системи.

# РОЗДІЛ 2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

# 2.1. ВЕКТОРИ ТА ДІЇ НАД НИМИ

## 2.1.1. Вектор. Основні поняття

***Означення 1.*** *Вектор* – це напрямлений відрізок площини або простору, який має певну довжину і напрям. Вектори позначаються символами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ або $\overrightarrow{AB}$, де $A$ – початок, $B$ – кінець вектора.

*Довжиною* або *модулем вектора* називають довжину відрізка $AB$ і позначають $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $|\vec{a}|$.

Вектор, початок якого співпадає з його кінцем, називається *нульовим вектором* і позначається $\vec{0}$ ($\left|\vec{0}\right| = 0$, напрям невизначений).

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним* і позначається $\vec{e}$.

***Означення 2.*** Одиничний вектор, напрям якого співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$ називається *ортом вектора* $\vec{a}$ і позначається $\vec{a}^0$.

Вектор $\vec{a}$ та його орт пов'язані співвідношеннями: $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}^0$.

***Означення 3.*** Вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними* ($\vec{a} \parallel \vec{b}$).

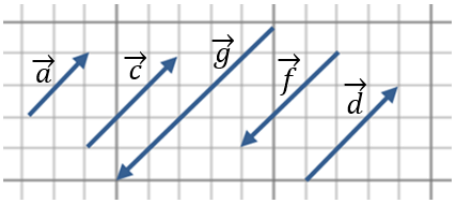
Колінеарні вектори, що мають один і той самий напрям, називаються *співнапрямленими* ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), а якщо вони мають протилежні напрями, – *протилежно напрямленими* ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$).

Якщо протилежно напрямлені вектори мають однакові довжини, то вони – *протилежні* (зокрема вектор $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$ – протилежний до вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$).

***Означення 4.*** Два вектори називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, співнапрямлені і мають однакові довжини.

***Означення 5.*** Вектори, які лежать в одній площині або в паралельних площинах називаються *компланарними*.

Наприклад, розглянемо



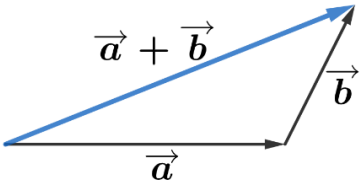

Серед побудованих колінеарних векторів маємо: $\vec{a}$, $\vec{c}$ та $\vec{d}$ співнапрямлені, причому $\vec{c}$ рівний $\vec{d}$; вектори $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ протилежно напрямлені до векторів $\vec{g}$ та $\vec{f}$, причому $\vec{c}$ та $\vec{d}$ протилежні до $\vec{f}$.

***Означення 6.*** Вектор $\overrightarrow{OM}$, початок якого знаходиться в початку координат $O$, а кінець – в точці $M(x, y, z)$, називається радіус-вектором точки $M$ і позначається $r(M)$ або $r$.

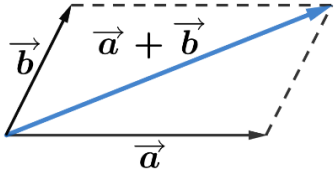
## 2.1.2. Лінійні операції над векторами

### *Сума векторів*

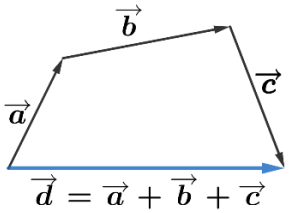
*правило трикутника*




*правило паралелограма*

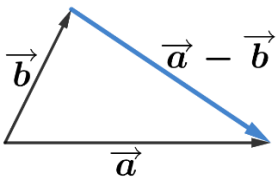



*правилом многокутника*

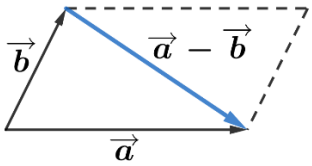



### *Різниця векторів*

*правило трикутника*



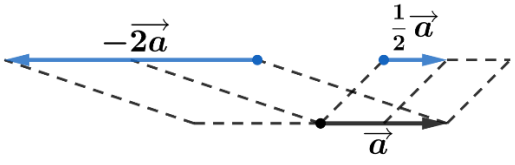

*правило паралелограма*




### *Множення вектора на число*

*Добутком вектора* $\vec{a} \neq 0$ *на число* $\lambda \in \mathbb{R}$ є вектор $\vec{b} = \lambda \vec{a}$:

1) $\vec{b} \parallel \vec{a}$;
2) $\left|\vec{b}\right| = |\lambda| \cdot \left|\vec{a}\right|$;
3) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, якщо $\lambda > 0$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, якщо $\lambda < 0$.



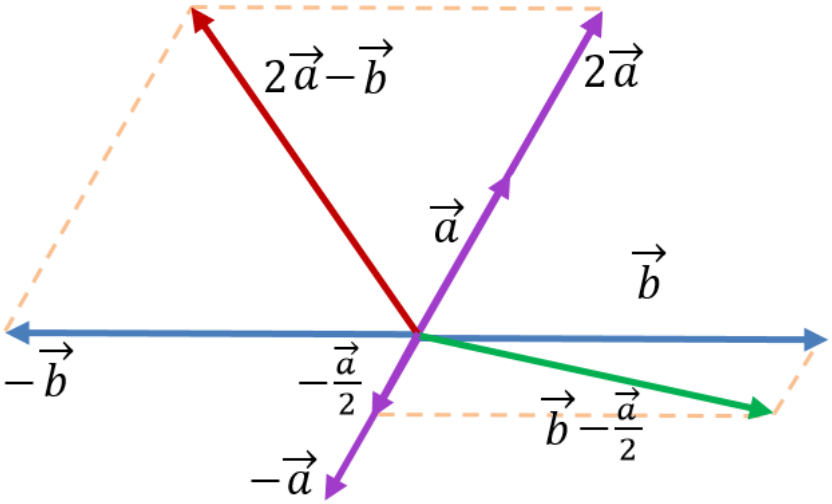
***Зауваження 1.*** $0 \cdot \vec{a} = \lambda \vec{0} = \vec{0}$.

4) *Критерій колінеарності векторів*

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \vec{b} = \lambda \vec{a},\ \vec{a} \neq \vec{0},\ \lambda \in R.$$

***Приклад 1.*** Нехай задано вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

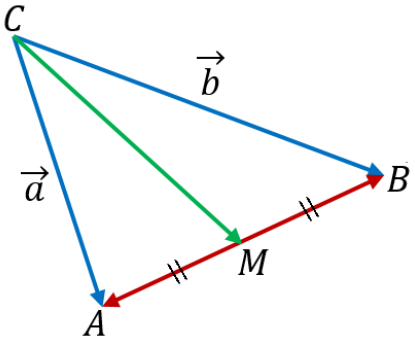
Побудувати вектори $2\vec{a} - \vec{b}$ та $\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}$.




***Приклад 2.*** В трикутнику $ABC$ задано вектори $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ та $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$. Знайти вектори $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ та $\overrightarrow{CM}$, де $M$ – середина сторони $AB$.

За правилом трикутника маємо

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \vec{b} - \vec{a}.$$




Вектор $\overrightarrow{MB}$ співнапрямлений з вектором $\overrightarrow{AB}$, але вдвічі менший, отже,

$$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right).$$

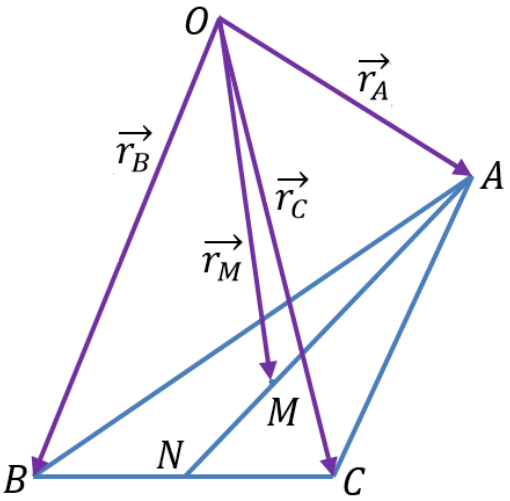
Вектор $\overrightarrow{MA}$ протилежний до вектора $\overrightarrow{MA}$, тоді

$$\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right).$$

З трикутника $CMB$ за правилом трикутника маємо

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{MB} = \vec{b} - \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{a}\right).$$

***Приклад 3.*** В трикутнику $ABC$ вершини задано своїми радіус-векторами $\vec{r_A}$, $\vec{r_B}$ та $\vec{r_C}$. Знайти радіус-вектор $\vec{r_M}$ центру тяжіння $M$ цього трикутника.




Як відомо, центр тяжіння $M$ трикутника знаходиться в точці перетину його медіан, і, за властивістю медіан, точка $M$ ділить медіану $AN$ у відношення 2: 1. Отже,

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}.$$

За правилом трикутника маємо

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A},$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{r_C} - \vec{r_B}.$$

З трикутника $ABN$ маємо

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{r_C} - \vec{r_B}) + (\vec{r_B} - \vec{r_A}) = \frac{1}{2}(\vec{r_C} + \vec{r_B} - 2\vec{r_A}).$$

Тоді,

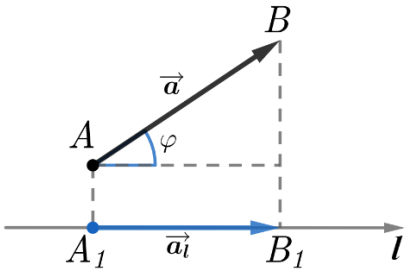
$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}(\vec{r_C} + \vec{r_B} - 2\vec{r_A}).$$

А з трикутника $AOM$

$$\vec{r_M} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\vec{r_C} + \vec{r_B} - 2\vec{r_A}) + \vec{r_A} = \frac{1}{3}(\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C}).$$

## Проекція вектора на вісь

***Означення 7.*** *Проекцією вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на вісь* $l$ називають довжину відрізка $A_1B_1$, де точки $A_1, B_1$ – проекції точок $A$ і $B$ на вісь $l$, взяту зі знаком «+», якщо напрями вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ та осі $l$ співпадають і зі знаком «–», якщо напрями протилежні.




*Проекція вектора* $\vec{a}$ на вісь $l$ (проекція вектора на напрямок іншого вектора) обчислюється за формулою:

$$\boxed{\text{пр}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi}, \text{ де } \varphi = \angle(\vec{a}, l). \qquad (2.1)$$

***Властивості проекцій***

**1)** $\text{пр}_l\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\text{пр}_l\,\vec{a}+\text{пр}_l\,\vec{b}$;

**2)** $\text{пр}_l(\lambda\cdot\vec{a})=\lambda\cdot\text{пр}_l\,\vec{a}$.

## 2.1.3. Вектори та дії над ними в координатній формі

### Координати і напрямні косинуси вектора

***Означення 8.*** *Координатами вектора* $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ називаються його проекції на координатні осі $Ox$, $Oy$, $Oz$: $a_x=\text{пр}_{Ox}\,\vec{a}$, $a_y=\text{пр}_{Oy}\,\vec{a}$, $a_z=\text{пр}_{Oz}\,\vec{a}$.

Вектор може також бути представлений у вигляді

$$\vec{a}=a_x\,\vec{i}+a_y\,\vec{j}+a_z\,\vec{k}, \qquad (2.2)$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, – орти координатних осей $Ox$, $Oy$, $Oz$ відповідно (одиничні вектори, напрям кожного з яких співпадає з додатним напрямом відповідної осі).

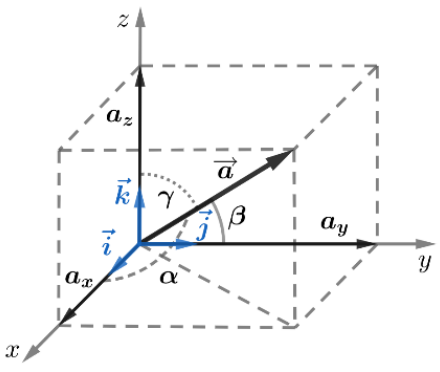
Якщо відомі координати початку вектора $A(x_1;y_1;z_1)$ і координати його кінця $B(x_2;y_2;z_2)$, то координати вектора

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}=(x_2-x_1)\,\vec{i}+(y_2-y_1)\,\vec{j}+(z_2-z_1)\,\vec{k}. \qquad (2.3)$$

***Означення 9.*** *Довжина вектора* $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2+{a_z}^2}. \qquad (2.4)$$

***Означення 10.*** Якщо $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ - кути, які утворює вектор $\vec{a}$ з додатними напрямами координатних осей $Ox$, $Oy$, $Oz$, то косинуси цих кутів називаються *напрямними косинусами*:




$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}. \qquad (2.5)$$

Напрямні косинуси будь-якого вектора пов’язані співвідношенням:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Координати вектора виражаються через його напрямні косинуси:

$$a_x=\left|\vec{a}\right|\cos\alpha,\quad a_y=\left|\vec{a}\right|\cos\beta,\quad a_z=\left|\vec{a}\right|\cos\gamma.$$

Для одиничного вектора $\vec{a}^0$ маємо:

$$a_x^0 = \cos\alpha, \quad a_y^0 = \cos\beta, \quad a_z^0 = \cos\gamma,$$

тобто координати орта вектора

$$\vec{a}^0 = \{\cos\alpha\,;\cos\beta\,;\cos\gamma\} = \cos\alpha\ \vec{i} + \cos\beta\ \vec{j} + \cos\gamma\ \vec{k} \qquad (2.6)$$

це напрямні косинуси вектора $\vec{a}$.

Операція відшукання одиничного вектора $\vec{a}^0$ називається *нормуванням*.

***Приклад 4.*** Задано дві точки $A(1;-3;\ 2)$ та $B(2;2;\ -1)$. Знайти координати, довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$.

Оскільки точка $A$ початок, а $B$ кінець вектора, маємо

$$\overrightarrow{AB} = \{2-1;2-(-3);-1-2\} = \{1;5;-3\} = 1\ \vec{i} + 5\ \vec{j} - 3\ \vec{k}.$$

Довжина вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2+5^2+(-3)^2} = \sqrt{35},$$

а напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{35}}, \quad \cos\beta = \frac{5}{\sqrt{35}}, \quad \cos\gamma = -\frac{3}{\sqrt{35}}.$$

***Приклад 5.*** Нормувати вектор $\vec{a} = -2\ \vec{i} + 3\ \vec{j} + 6\ \vec{k}$.

Знайдемо довжину заданого вектора (за формулою (2.4))

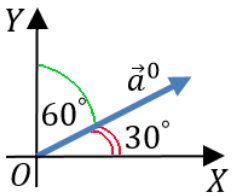
$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(-2)^2+3^2+6^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Тоді відповідний вектор-орт (за формулами (2.6) та (2.5))

$$\vec{a}^0 = -\frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}.$$

***Приклад 6.*** Знайти вектор $\vec{a}$ на площині довжиною 6 одиничних відрізка, що утворює кут $30°$ з віссю $OX$.

Відомо, що напрям вектора визначається кутами, що утворює вектор з осями координат. Оскільки кут з віссю $OX$ дорівнює $\alpha = 30°$, то з віссю $OY$ кут буде $\beta = 90° - 30° = 60°$.




Тоді, за формулою (2.5), напрямні косинуси вектора $\vec{a}$:

$$\cos\alpha = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\beta = \cos 60° = \frac{1}{2}.$$

Координати вектора $\vec{a}$ виражаються через його напрямні косинуси

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha = 6\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}, \quad a_y = |\vec{a}|\cos\beta = 6\frac{1}{2} = 3,$$

а, отже,

$$\vec{a} = 3\sqrt{3}\,\vec{i} + 3\,\vec{j}.$$

***Приклад 7.*** Вектор $\vec{a}$ утворює з осями координат гострі кути $\alpha, \beta, \gamma$, причому $\alpha = 45°, \gamma = 60°$. Знайти його координати, якщо $|\vec{a}| = 2$.

З властивості напрямних косинусів маємо

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \cos^2 45° + \cos^2\beta + \cos^2 60° = 1.$$

Тоді

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cos^2\beta + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Оскільки за умовою кут $\beta$ гострий, то $\cos\beta = \frac{1}{2}$ і $\beta = 60°$.

Отже

$$\vec{a}^0 = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}.$$

В результаті, враховуючи, що $|\vec{a}| = 2$, отримаємо

$$\vec{a} = \sqrt{2}\,\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \{\sqrt{2}; 1; 1\}.$$

## Лінійні операції над векторами в координатній формі. Умова рівності та колінеарності векторів

Нехай вектори задані координатами: $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ і $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$. Тоді:

**1)** $\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\} = (a_x \pm b_x)\,\vec{i} + (a_y \pm b_y)\,\vec{j} + (a_z \pm b_z)\,\vec{k}$;

**2)** $\lambda\,\vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\} = \lambda a_x\,\vec{i} + \lambda a_y\,\vec{j} + \lambda a_z\,\vec{k}, \lambda \in \mathbb{R}$;

**3)** $\vec{a} = \vec{b} \;\Leftrightarrow\; a_x = b_x,\; a_y = b_y,\; a_z = b_z$;

**4)** $\vec{a} \parallel \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda,\; |\vec{a}| = \lambda|\vec{b}|$.

***Приклад 8.*** Задано вектори $\vec{a} = \{2; -1; 5\}$, $\vec{b} = \{-1; 3; -2\}$, $\vec{c} = \{1; 2; -1\}$. Знайти проекції вектора $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$ на координатні осі.

Використовуючи правила 1) та 2), отримаємо

$$\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = \{2; -1; 5\} + 2\{-1; 3; -2\} - 3\{1; 2; -1\} =$$
$$= \{2; -1; 5\} + \{-2; 6; -4\} + \{-3; -6; 3\} = \{-3; -1; 4\}.$$

Тоді

$$\text{пр}_{OX}\vec{a} = -3, \ \text{пр}_{OY}\vec{a} = -1, \ \text{пр}_{OZ}\vec{a} = 4.$$

***Приклад 9.*** Довести, що чотирикутник з вершинами $A(2,1,-4)$, $B(1,3,5)$, $C(7,2,3)$, $D(8,0,-6)$ є паралелограмом.

Для доведення, достатньо показати, що вектори, які визначають протилежні сторони чотирикутника, рівні.

Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{AB} = (1-2)\vec{i} + (3-1)\vec{j} + (5-(-4))\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 9\vec{k},$$
$$\overrightarrow{DC} = (7-8)\vec{i} + (2-0)\vec{j} + (3-(-6))\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 9\vec{k}.$$

Вектори рівні (за правилом 3)), отже, $ABCD$ – паралелограм.

***Приклад 10.*** Визначити, за яких значень $\alpha$ та $\beta$ вектори $\vec{a} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + 5\vec{k}$ та $\vec{b} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + \beta\vec{k}$ колінеарні.

За правилом 4), координати векторів мають бути пропорційні

$$\frac{3}{2} = \frac{-6}{\alpha} = \frac{\beta}{5}$$

Звідси знайдемо, що $\alpha = -4$, $\beta = \frac{15}{2}$.

***Приклад 11.*** На матеріальну точку у просторі діють три сили $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ та $\overrightarrow{F_3}$, проекції яких на осі прямокутної системи координат задано:

$$\text{пр}_{OX}\overrightarrow{F_1} = 2, \ \text{пр}_{OY}\overrightarrow{F_1} = 1, \ \text{пр}_{OZ}\overrightarrow{F_1} = 5;$$
$$\text{пр}_{OX}\overrightarrow{F_2} = 4, \ \text{пр}_{OY}\overrightarrow{F_2} = -3, \ \text{пр}_{OZ}\overrightarrow{F_2} = 1;$$
$$\text{пр}_{OX}\overrightarrow{F_3} = -5, \ \text{пр}_{OY}\overrightarrow{F_3} = 4, \ \text{пр}_{OZ}\overrightarrow{F_3} = 2.$$

Знайти величину та напрям рівнодіючої.

Знайдемо рівнодіючу

$$\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \{2; 1; 5\} + \{4; -3; 1\} + \{-5; 4; 2\} = \{1; 2; 8\}$$

Величина рівнодіючої дорівнює довжині вектора $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{69}.$$

Напрям рівнодіючої задається напрямними косинусами вектора $\vec{R}$:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{69}}, \quad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{69}}, \quad \cos\gamma = \frac{8}{\sqrt{69}}.$$

## Ділення відрізка у даному відношенні

Координати точки $M(x; y; z)$, яка ділить відрізок $AB$, обмежений точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ у відношенні $\lambda = \frac{|AM|}{|MB|}$ визначаються за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{2.7}$$

Якщо $\lambda = 1$ (тобто точка $M(x; y; z)$ лежить посередині відрізка $AB$), то отримуємо формули для знаходження координат середини відрізка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{2.8}$$

***Приклад 12.*** Задано вершини трикутника $ABC$: $A(1; -2)$, $B(3; 0)$, $C(-7; 5)$. Визначити координати точки перетину медіан трикутника.

Знайдемо координати точки $K$ - середини сторони $AB$ (за формулою (2.8)):

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2,$$

$$y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2 + 0}{2} = -1.$$

Точка $M$ в якій перетинаються медіани ділить відрізок $CK$ у відношенні 2:1 відраховуючи від точки $C$.

Отже, оскільки $\lambda = \frac{|CM|}{|KM|} = \frac{2}{1} = 2$, маємо (за формулою (2.7)):

$$x_M = \frac{x_C + \lambda x_K}{1+\lambda} = \frac{-7 + 2 \cdot 2}{1+2} = -1,$$

$$y_M = \frac{y_C + \lambda y_K}{1+\lambda} = \frac{5 + 2 \cdot (-1)}{1+2} = 1\,.$$

В результаті $M(-1;1)$ – точка перетину медіан трикутника.

## 2.1.4. Лінійна залежність та незалежність векторів. Базис

### Поняття про *n*-вимірний векторний простір

Упорядковану трійку дійсних чисел називають *тривимірним вектором*, а множину всіх тривимірних векторів називають *тривимірним простором* $\mathbb{R}^3$.

Упорядковані пари чисел називають *двовимірним вектором*, а числа – *одновимірним вектором*. Множини двовимірних і одновимірних векторів називають відповідно *двовимірним* $\mathbb{R}^2$ і *одновимірним просторами* $\mathbb{R}^1$.

Упорядкована множина $n$ дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається *n-вимірним вектором* $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Множина всіх $n$-вимірних векторів називається *n-вимірним векторним простором* $\mathbb{R}^n$.

### Лінійна залежність та незалежність векторів

***Означення 11.*** Вираз вигляду

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \lambda_3 \overrightarrow{a_3} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{a_n},\ n \in \mathbb{N}$$

називається *лінійною комбінацією векторів* $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ з коефіцєнтами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$.

Вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ називають *лінійно залежними*, якщо їх лінійна комбінація дорівнює нулю за умови, що хоча б одне з чисел $\lambda_i \neq 0$, $i = 1,2,3, \ldots, n$.

Якщо ж рівність

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \lambda_3 \overrightarrow{a_3} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{a_n} = 0 \qquad (*)$$

виконується лише за умови, що всі числа $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$, то вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ називають *лінійно незалежними*.

Якщо кожен з векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ є $m$-вимірним, тобто

$$\overrightarrow{a_i} = (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, \ldots, a_{mi}),\ i = 1,2,3,\ldots,m,$$

то векторну рівність $(*)$ можна записати у матричній формі:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \ldots \\ a_{m3} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},$$

або у вигляді однорідної системи рівнянь відносно невідомих $\lambda_i$:

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1n}\lambda_n = 0, \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2n}\lambda_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \cdots + a_{mn}\lambda_n = 0. \end{cases}$$

Якщо ця система має лише нульовий (тривіальний) розв'язок, то вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ будуть *лінійно незалежними*. Якщо ж крім нульового система має ще й ненульові розв'язки, то вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ *лінійно залежні*.

***Приклад 13.*** Довести, що вектори $\overrightarrow{a} = \{1; -1; 2\}$, $\overrightarrow{b} = \{10; 1; 1\}$, $\overrightarrow{c} = \{2; -1; 6\}$ лінійно незалежні.

Задані вектори будуть лінійно незалежними, якщо рівність

$$\lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b} + \lambda_3 \overrightarrow{c} = 0$$

виконується лише за умови, що всі числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Отже, потрібно розв'язати рівняння

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

яке рівносильне однорідній системі рівнянь

$$\begin{cases} \lambda_1 + 10\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 41 \neq 0$$

відмінний від нуля, то система має єдиний тривіальний розв'язок $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$.

Отже, задані вектори лінійно незалежні.

***Твердження 1.*** Якщо вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ лінійно залежні, то один з них є лінійною комбінацією інших, тобто лінійно виражається через всі інші.

***Теорема 1.*** *Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності* ***двох*** *векторів* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *є їх* ***колінеарність.***

***Теорема 2.*** *Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності* ***трьох*** *векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *є їх* ***компланарність***.

***Зауваження 2.*** На практиці лінійну незалежність векторів легко перевіряти за допомогою рангу матриці, складеної з координат векторів. Якщо ранг такої матриці дорівнює кількості векторів, то вектори лінійно незалежні.

## Базис

***Означення 12.*** *Базисом* називається сукупність лінійно незалежних векторів, через які можна виразити у вигляді лінійної комбінації будь-який інший вектор.

***Базисом в n-вимірному векторному просторі*** $\mathbb{R}^n$ є будь-яка лінійно незалежна система (сукупність) з *n* векторів.

***Базисом на прямій*** $\mathbb{R}^1$ є довільний ненульовий вектор на цій прямій.

***Базисом на площині*** $\mathbb{R}^2$є довільна упорядкована пара неколінеарних векторів.

***Базисом у просторі*** $\mathbb{R}^3$є будь-яка упорядкована трійка некомпланарних векторів.

Вектори, що утворюють базис називаються *базисними*.

Кількість базисних векторів (максимальне число лінійно незалежних векторів) у просторі називається *вимірністю векторного простору*.

## ***Розклад вектора за базисом***

Якщо вектори $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ в $n$-вимірному векторному просторі *утворюють базис*, то будь-який вектор $\vec{b}$ в цьому просторі можна ***розкласти за базисними векторами*** у вигляді лінійної комбінації

$$\vec{b} = x_1 \vec{a_1} + x_2 \vec{a_2} + \ldots + x_n \vec{a_n},$$

де числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координати вектора $\vec{b}$ в базисі $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$.

***Приклад 14.*** Задано вектори $\vec{a} = \{1; 2\}$, $\vec{b} = \{3; 4\}$, $\vec{c} = \{8; 10\}$.

Покажемо, що система векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ утворює базис у двовимірному просторі і знайдемо координати вектора $\vec{c}$ в базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ – неколінеарні, оскільки їх координати не пропорційні

$$\frac{1}{3} \neq \frac{2}{4}.$$

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ утворюють базис у просторі всіх двовимірних векторів.

Щоб знайти координати вектора $\vec{c}$ в базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, треба розв'язати векторне рівняння

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b},$$

де числа $\alpha, \beta$ – координати вектора $\vec{c}$ в базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$. Для цього кожен із заданих векторів запишемо як матрицю-стовпець, тоді останню векторну рівність можна записати у матричній формі

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 8, \\ 2\alpha + 4\beta = 10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = -1, \beta = 3.$$

Отже, вектор $\vec{c} = \{-1; 3\}$ в базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$.

***Зауваження 3.*** Три некомпланарних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ простору – лінійно незалежні і відповідно утворюють базис простору, при цьому будь-який четвертий вектор $\vec{d}$ у цьому ж просторі можна подати у вигляді лінійної комбінації цих базисних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{d} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c},$$

де числа $\alpha, \beta, \gamma$ – координати вектора $\vec{d}$ в базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

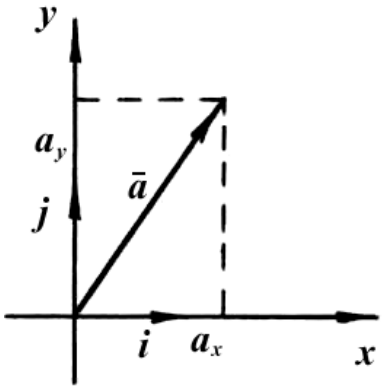
## Базис на площині

У прямокутній системі координат $Oxy$ *базисними* векторами називають вектори

$\vec{i}$ , $\vec{j}$ – *одиничні орти координатних осей* $Ox$ *і* $Oy$

$$(\vec{i} \perp \vec{j},\ \ \left|\vec{i}\right| = 1,\ \ \left|\vec{j}\right| = 1).$$

Тоді на площині $Oxy$ будь-який двовимірний вектор $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$




можна зобразити у вигляді лінійної комбінації базисних векторів:

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$$

## Базис у просторі

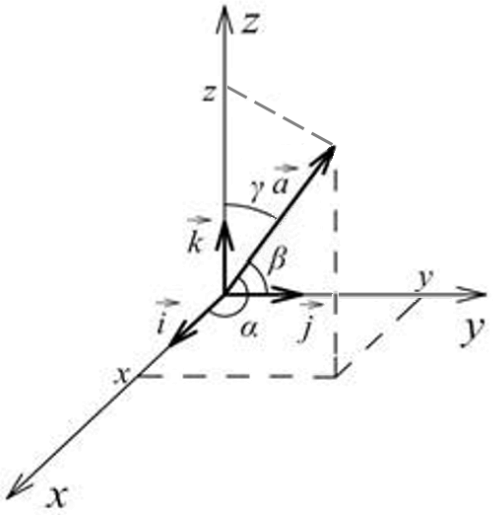
У прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ *базисними* векторами називають вектори

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – *одиничні орти координатних осей*

$$(\vec{i} \perp \vec{j},\ \vec{i} \perp \vec{k},\ \vec{j} \perp \vec{k},\ \left|\vec{i}\right| = 1, \left|\vec{j}\right| = 1, \left|\vec{k}\right| = 1).$$

Тому, будь-який вектор $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ простору $Oxyz$ можна подати у вигляді лінійної комбінації базисних векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$



## 2.2. СКАЛЯРНИЙ, ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ

### 2.2.1.Скалярний добуток векторів

***Означення 1.*** *Скалярним добутком* $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $(\vec{a}\,\vec{b})$ двох ненульових векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними і позначається $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Отже, за означенням

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi\,,} \qquad (2.9)$$

де $\varphi=\angle(\vec{a},\vec{b})$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

*Скалярний добуток в координатній формі*

Якщо $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ і $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$, то

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\ a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.} \qquad (2.10)$$

***Властивості скалярного добутку***

**1)** $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (*переставна*);

**2)** $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (*сполучна відносно числового множника*);

**3)** $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (*розподільна*);

**4)** *Скалярний квадрат вектора*: $\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=\ |\vec{a}|^2$.

***Зауваження 1.*** $\sqrt{\vec{a}^2}=|\vec{a}|$ $(\neq\vec{a})$.

**5)** *Необхідна та достатня умова перпендикулярності векторів*:

$$\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0}\quad\text{або}\quad x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

***Зауваження 2.*** Якщо: $\vec{a}\cdot\vec{b}>0\Leftrightarrow\varphi$ – гострий;

$$\vec{a}\cdot\vec{b}<0\Leftrightarrow\varphi\text{ – тупий.}$$

**6)** *Умова колінеарності векторів*:

$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

**7)** *Кут* $\varphi$ *між векторами* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначається з формули

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\,.} \qquad (2.11)$$

***Геометричний зміст скалярного добутку.***

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}}.$$

Звідси,

$$\boxed{\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}\cdot\vec{b}^0}, \qquad (2.12)$$

$$\boxed{\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \vec{b}\cdot\vec{a}^0}.$$

***Фізичний зміст скалярного добутку.***

*Робота змінної сили* $\vec{F}$ щодо переміщення матеріальної точки з положення $A$ у положення $B$ дорівнює скалярному добутку вектора сили $\vec{F}$ на вектор переміщення $\overrightarrow{AB}$:

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}}. \qquad (2.13)$$

***Приклад 1.*** Знайти довжину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = \angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

За властивістю 4) маємо:

$$|\vec{c}| = \sqrt{|\vec{c}|^2} = \sqrt{\vec{c}^2} = \sqrt{\left(3\vec{a}-4\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\left(3\vec{a}-4\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a}-4\vec{b}\right)} = \left|\begin{matrix}\text{розкриємо}\\ \text{дужки}\end{matrix}\right| =$$

$$= \sqrt{9\vec{a}\cdot\vec{a} - 12\vec{a}\cdot\vec{b} - 12\vec{b}\cdot\vec{a} + 16\vec{b}\cdot\vec{b}} = \left|\begin{matrix}\text{врахуємо, що}\\ \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}\end{matrix}\right| =$$

$$= \sqrt{9\vec{a}^2 - 24\vec{a}\cdot\vec{b} + 16\vec{b}^2} = \sqrt{9|\vec{a}|^2 - 24|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi + 16|\vec{b}|^2} =$$

$$= \sqrt{9\cdot 2^2 - 24\cdot 2\cdot 3\cdot\cos\frac{\pi}{3} + 16\cdot 3^2} = 6\sqrt{3}.$$

***Приклад 2.*** Довести, що діагоналі чотирикутника з вершинами $A(-4;-4;\ 4)$, $B(-3;2;\ 2)$, $C(2;5;\ 1)$, $D(3;-2;2)$ взаємно перпендикулярні.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$, які лежать на діагоналях даного чотирикутника.

$$\overrightarrow{AC} = \{2-(-4);\ 5-(-4);\ 1-4\} = \{6;\ 9;\ -3\};$$

$$\overrightarrow{BD} = \{3-(-3);\ -2-2;\ 2-2\} = \{6;\ -4;\ 0\}.$$

З умови перпендикулярності двох векторів (5), маємо

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \ \Rightarrow\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 6 \cdot 6 + 9 \cdot (-4) + (-3) \cdot 0 = 0.$$

Що і треба було довести.

***Приклад 3.*** Трикутник задано координатами вершин $A(-1;3)$, $B(2;\ 1)$, $C(-2;\ -1)$. Знайти внутрішній кут при вершині $A$.

Скористаємось формулою (2.11):

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}.$$

Знайдемо координати та довжини векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AC} = \{-2-(-1);\ -1-3\} = \{-1;-4\} \ \Rightarrow\ \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17};$$

$$\overrightarrow{AB} = \{2-(-1);\ 1-3\} = \{3;\ -2\} \ \Rightarrow\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}\,.$$

Тоді

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot 3 + (-4) \cdot (-2) = 5$$

і

$$\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{13}} \approx 0{,}3363.$$

Отже, внутрішній кут при вершині $A$

$$\varphi = \arccos\frac{5}{\sqrt{221}} \approx 70°22'.$$

***Приклад 4.*** Знайти проекцію вектора $\vec{c} = 2\,\vec{a} - 3\,\vec{b}$ на напрям вектора, якщо $\vec{a} = \{-3;1;-1\}$ і $\vec{b} = \{2;-2;1\}$.

Знайдемо координати вектора $\vec{c}$

$$\vec{c} = 2\,\vec{a} - 3\,\vec{b} = 2\{-3;1;-1\} - 3\{2;-2;1\} = \{-12;8;-4\}.$$

Тоді, за формулою (2.12), отримаємо

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{c} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{-12 \cdot 2 + 8 \cdot (-2) + (-4) \cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = -\frac{44}{3}.$$

***Приклад 5.*** На матеріальну точку діють три сили

$$\vec{f}_1 = 2\,\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{f}_2 = -\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}, \quad \vec{f}_3 = \vec{i} + \vec{j} - 2\,\vec{k}.$$

Знайти роботу рівнодіючої цих сил $\vec{R}$ при переміщенні точки з положення $A(2;-1;\ 0)$ в положення $B(4;1;\ -1)$.

Знайдемо спочатку рівнодіючу силу

$$\vec{R} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}.$$

Тепер визначимо вектор зміщення

$$\overrightarrow{AB} = (4-2)\,\vec{i} + (1-(-1))\,\vec{j} + (-1-0)\,\vec{k} = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - \vec{k}.$$

Тоді, за формулою (2.13), маємо

$$\boldsymbol{A} = \vec{R} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 7.$$

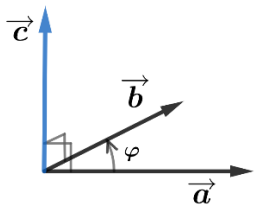
## 2.2.2. Векторний добуток векторів

***Означення 2.*** *Векторним добутком* $\vec{a} \times \vec{b}$ або $[\vec{a}\vec{b}]$ вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умови:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, де $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$;

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – права трійка.




*Векторний добуток в координатній формі*:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}, \qquad (2.14)$$

якщо $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ і $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$.

***Властивості векторного добутку***

**1)** $\vec{a} \times \vec{b} = -\,\vec{b} \times \vec{a}$ ; (*антиперестановна*)

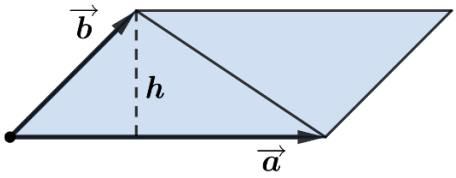
**2)** $\lambda\,\vec{a} \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \lambda\,\vec{b}$, (*сполучна відносно числового множника*);

**3)** $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (*розподільна*);

**4)** *Необхідна і достатня умова колінеарності векторів*:

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}}, \quad (\textit{зокрема } \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}\ ).$$

***Геометричний зміст векторного добутку.***




Модуль вектора векторного добутку дорівнює *площі паралелограма*, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

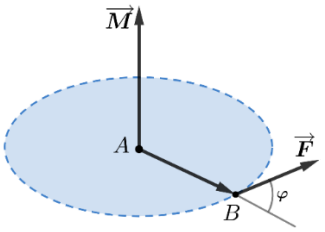
$$\boxed{S_{пар} = |\vec{a} \times \vec{b}|}. \qquad (2.15)$$

*Площа трикутника*:

$$\boxed{S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|}. \qquad (2.16)$$

*Висота паралелограма* (*трикутника*): $\boxed{h_a = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|}}$.

***Механічний зміст векторного добутку.***




Обертальний момент сили $\vec{F}$, яка прикладена до точки $B$ відносно точки $A$ визначається за формулою:

$$\boxed{\overrightarrow{M_A(F)} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}}. \qquad (2.17)$$

***Приклад 6.*** Знайти площу трикутника $ABC$, якщо

$$A(1; 2; 0), \quad B(3; 0; -3), \quad C(5; 2; 6).$$

Скористаємось формулою (2.16)

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

Спочатку знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{3 - 1;\ 0 - 2; -3 - 0\} = \{2;\ -2; -3\};$$

$$\overrightarrow{AC} = \{5 - 1; 2 - 2; 6 - 0\} = \{4;\ 0; 6\}.$$

Далі, за формулою (2.14), обчислимо векторний добуток цих векторів

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -12\vec{\imath} - 24\vec{\jmath} + 8\vec{k}.$$

Тоді

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = \frac{1}{2}\sqrt{784} = 14 \text{ (од}^2\text{)}.$$

***Приклад 7.*** Обчислити площу паралелограма побудованого на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$ та $3\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 1,\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

За формулою (2.15) маємо

$$S_{пар} = \left|\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) \times \left(3\vec{a} + \vec{b}\right)\right|.$$

Обчислимо спочатку векторний добуток

$$\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) \times \left(3\vec{a} + \vec{b}\right) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{оскільки} \\ \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \\ \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \ \text{ і } \ \vec{b} \times \vec{b} = \vec{0} \end{array} \right| = \vec{a} \times \vec{b} - 9\vec{a} \times \vec{b} = -8\vec{a} \times \vec{b}.$$

Отже

$$S_{пар} = \left|\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) \times \left(3\vec{a} + \vec{b}\right)\right| = \left|-8\vec{a} \times \vec{b}\right| = 8 \cdot |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) =$$

$$= 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 4 \text{ (од}^2\text{)}.$$

***Приклад 8.*** Силу $\vec{F} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$. прикладено до точки $M(1; 2;\ 3)$. Знайти обертальний момент цієї сили відносно точки $A(3; 2;\ -1)$.

Знайдемо вектор $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM} = (1 - 3)\vec{\imath} + (2 - 2)\vec{\jmath} + \big(3 - (-1)\big)\vec{k} = -2\vec{\imath} + 4\vec{k}.$$

Тоді, за формулою (2.17), отримаємо

$$\overrightarrow{M_A(F)} = \overrightarrow{AM} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 8\vec{\imath} + 12\vec{\jmath} + 4\vec{k}.$$

## 2.2.3. Мішаний добуток векторів

***Означення 3.*** *Мішаним добутком трьох векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називають число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Позначається: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Тобто, за означенням мішаний добуток

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\vec{c}\,. \tag{2.18}$$

*Мішаний добуток в координатній формі*:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \tag{2.19}$$

де $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$.

***Властивості мішаного добутку***

**1)** $(\vec{a} \times \vec{b})\,\vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$;

**2)** $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{b}$;

**3)** $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$;

**4)** *Необхідна і достатня умова компланарності векторів*:

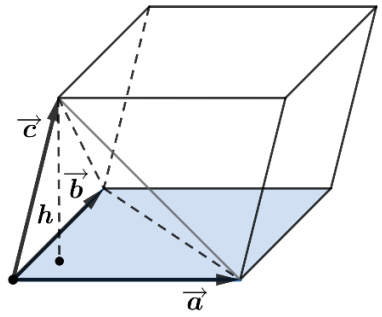
$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ – компланарні} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0.$$

***Зауваження.*** Якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \neq 0 \;\Rightarrow\; \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – не компланарні.

**5)** *Орієнтація векторів*: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} > 0 \;\Rightarrow\; \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - права трійка;

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} < 0 \;\Rightarrow\; \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - ліва трійка.

***Геометричний зміст мішаного добутку*** – модуль мішаного добутку дорівнює *об'єму паралелепіпеда* побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, як на сторонах:




$$V_{пар} = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|. \tag{2.20}$$

*Об'єм трикутної піраміди (тетраедра)*:

$$V_{пірам} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|. \tag{2.21}$$

*Висота паралелепіпеда (піраміди)*: $h = \dfrac{\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$.

***Приклад 9.*** Довести, що вектори $\vec{a} = \{2; 1; 0\}$, $\vec{b} = \{1; -1; 2\}$, $\vec{c} = \{2; 2; -1\}$ утворюють базис.

Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – утворюють базис $\Leftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некомпланарні $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \neq 0$.

Отже, знайдемо мішаний добуток заданих векторів

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Що і треба було довести.

***Приклад 10.*** Довести, що точки $A(-1; -1; 2)$, $B(2; -2; 2)$, $C(1; 0; 7)$ та $D(0; 1; 9)$ лежать в одній площині.

Для цього достатньо довести, що вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$ компланарні, тобто

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = 0.$$

Знайдемо координати векторів

$$\overrightarrow{AB} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}\,; \quad \overrightarrow{AC} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 5\vec{k}\,; \quad \overrightarrow{AD} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 7\vec{k}\,.$$

та їхній мішаний добуток

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0.$$

Що і треба було довести.

***Приклад 11.*** Знайти об’єм піраміди з вершинами в точках

$$A(5; 1; -4),\ B(1; 2; -1),\ C(3; 3; -4) \text{ та } D(2; 2; 2).$$

Розглянемо піраміду як таку, що побудована на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$. Тоді, за формулою (2.21), об’єм такої піраміди

$$V_{пірам} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|.$$

Знайдемо координати векторів

$$\overrightarrow{AB} = -4\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}; \quad \overrightarrow{AC} = -2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\,; \quad \overrightarrow{AD} = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 6\vec{k}\,.$$

та їхній мішаний добуток

$$V_{пірам} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-24| = 4 \text{ (од}^3\text{)}.$$

# РОЗДІЛ 3. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

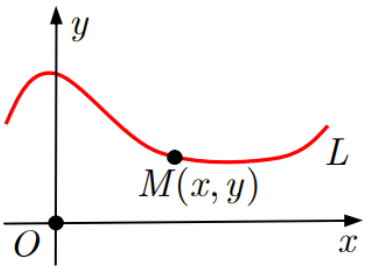
## 3.1. ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

### 3.1.1. Рівняння лінії у прямокутній декартовій системі координат (ПДСК)

*Рівнянням лінії* $L$ у заданій ПДСК називають рівняння

$$F(x, y) = 0,$$

яке задовольняють координати $x$ та $y$, усіх точок цієї лінії й лише вони. Зокрема, рівняння лінії може мати вигляд




$$y = f(x).$$

В аналітичній геометрії, на відміну від елементарної геометрії, під лінією розуміють множину точок (ще кажуть — геометричне місце точок), координати яких задовольняють рівняння $F(x, y) = 0$.

Щоб скласти ***рівняння лінії***, потрібно встановити геометричну властивість, яку задовольняють лише точки даної лінії, і записати цю властивість у вигляді рівняння.

Наприклад, ***коло*** з центром у точці $O$ і радіусом $R$ можна розглядати як множину точок площини, віддалених від точки $O$ на віддаль $R$. Це означає, що для будь-якої точки $M$, що лежить на колі, виконується рівність

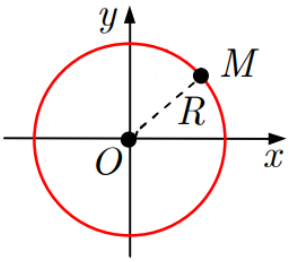
$$|\overline{OM}| = R$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}.$$




Отримали ***рівняння кола*** з центром у точці $O$ і радіусом $R$.

## Параметричне рівняння лінії у прямокутній декартовій системі координат

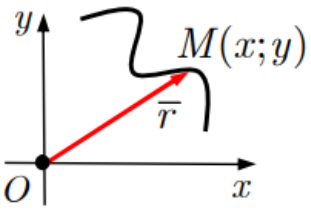
*Параметричним рівнянням лінії* $L$ в ПДСК називають рівняння

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

яке виражає змінні $x$ та $y$ через параметр $t$.

Якщо параметр $t$ змінюється, то точка $M(x;y)$ на площині переміщується, описуючи лінію $L$.

Параметричні рівняння лінії можна записати у ***векторному вигляді***:



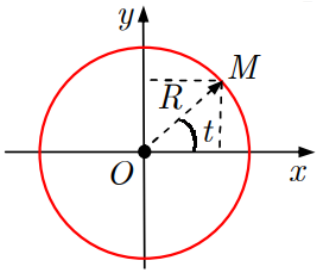

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \; t \in T,$$

де $T$ – область означення функцій $x(t)$ та $y(t)$.

Векторне параметричне рівняння використовують у механіці як рівняння руху точки $M$, яка в момент часу $t$ має певні координати $x$, $y$.

Запишемо різні типи рівняння кола радіусом R із центром у початку координат.

В ПДКС рівняння кола радіусом $R$ із центром у початку координат має вигляд




$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Перейдемо до полярної системи координат:

$$x = \rho \cos\varphi, \; y = \rho \sin\varphi.$$

Маємо

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow \rho^2 = R^2 \Rightarrow$$

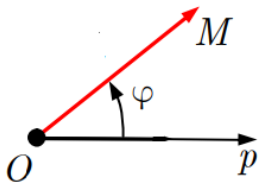
$$\boxed{\rho = R}$$

– ***рівняння кола в полярній системі координат***.

Якщо за параметр $t$ вибрати кут між радіус-вектором точки $M$ і віссю $Ox$, то дістанемо ***параметричне рівняння кола***:

$$\begin{cases} x = R\cos t\,, \\ y = R\sin t\,, \; t \in [0; 2\pi). \end{cases}$$

### 3.1.2. Рівняння лінії в полярній системі координат




*Полярна система координат* задається точкою $O$, яка називається ***полюсом*** і променем $Op$, який виходить з полюса і називається ***полярною віссю***.

Положення точки $M$ на площині задається довжиною вектора $|\overline{OM}| = \rho$ і кутом $\varphi$, на який треба повернути полярну вісь $Op$ проти годинникової стрілки, щоб сумістити її з вектором $\overrightarrow{OM}$.

*Полярними координатами* точки $M$ називають упорядковану пару чисел $(\rho, \varphi)$ і записують $M(\rho, \varphi)$.

Координату $\rho > 0$ називають *полярним радіусом*, а координату $\varphi$ – *полярним кутом*.

*Рівнянням лінії* $L$ *в полярній системі* координат (або *полярним рівнянням*) називають рівняння

$$\Phi(\rho, \varphi) = 0,$$

яке задовольняють координати $\rho$ та $\varphi$, усіх точок цієї лінії й лише вони.

Зокрема, рівняння лінії в полярних координатах може мати вигляд

$$\rho = \rho(\varphi).$$

В якості прикладу побудови лінії в полярній системі координат, побудуємо ***кардіоїду*** , яка задається полярним рівнянням вигляду

$$\rho = a(1 + \cos\varphi),\ a > 0.$$

Із умови

$$\rho > 0$$

випливає, що

$$a(1 + \cos\varphi) > 0,$$

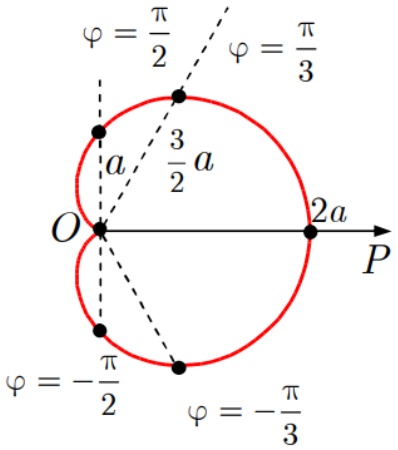
а оскільки остання нерівність виконується завжди, то обмежень на полярний кут немає.

Завдяки парності функції $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ крива симетрична щодо полярної осі. Якщо полярний кут $\varphi$ змінювати від $0$ до $\pi$, то полярний радіус $\rho$ буде змінюватися від $2a$ до $0$.

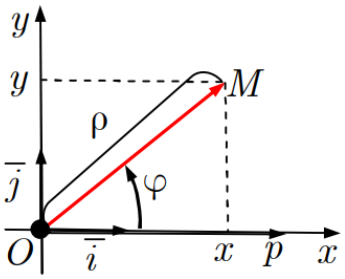
Знайдемо кілька точок на кардіоїді:

| $\varphi$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | $2a$ | $\frac{3a}{2}$ | $a$ | 0 |

За знайденими точками будуємо кардіоїду:




Щоб виразити декартові координати $(x, y)$ точки $M$ через полярні $(\rho, \varphi)$, потрібно полюс $O$ сумістити з початком ПДСК, а полярну вісь $Op$ з віссю $Ox$:




Тоді ***формули переходу від декартових координат до полярних*** мають вигляд

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

звідки

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

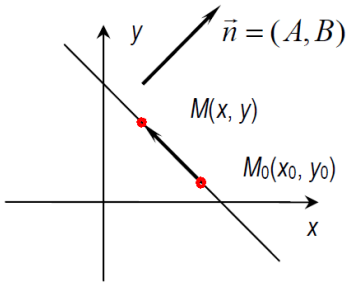
# 3.2. ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

В залежності від способу задання прямої лінії на площині існують різні вигляди її рівняння.

## 3.2.1. Рівняння прямої на площині

### Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

Нехай на площині задано пряму $L$, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \{A; B\}$, тобто




$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in L, \\ \vec{n} = \{A; B\} \perp L. \end{cases}$$

***Означення 1.*** Вектор $\vec{n} \perp L$ називають *нормальним вектором* (*вектором нормалі*) прямої $L$ або *нормаллю*.

Для довільної точки $M(x, y)$ на прямій $L$ побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M}$:

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0;\ y - y_0\}.$$

Оскільки $\vec{n} \perp L \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$, тоді скалярний добуток $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$.

Звідси

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0} \qquad (3.1)$$

– *рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.*

### Загальне рівняння прямої

Розкриємо дужки в рівнянні (3.1):

$$Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0.$$

У цьому рівнянні $x, y$ - це невідомі, а всі інші доданки – сталі.

Позначивши $C = -Ax_0 - By_0$, матимемо

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \qquad (3.2)$$

– *загальне рівняння прямої на площині*.

## ***Дослідження загального рівняння прямої***

**1)** Якщо $C = 0 \Rightarrow Ax + By = 0$, то пряма проходить через початок координат.

**2)** Якщо $A = 0, B \neq 0 \Rightarrow By + C = 0 \Rightarrow y = -\frac{C}{B}$ – рівняння прямої паралельної осі $Ox$.

**3)** Якщо $B = 0, A \neq 0 \Rightarrow Ax + C = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{A}$ – рівняння прямої паралельної осі $Oy$.

**4)** Якщо $A = C = 0, B \neq 0 \Rightarrow By = 0 \Rightarrow y = 0$ – пряма, яка визначає вісь $Ox$.

**5)** Якщо $B = C = 0, A \neq 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ – пряма, що визначає вісь $Oy$.

***Приклад 1.*** Побудувати на координатній площині пряму, задану своїм загальним рівнянням $2x - 3y + 6 = 0$.

Для побудови достатньо знайти точки перетину з осями координат.

Для відшукання точки перетину з віссю $Ox$ покладемо в рівнянні $y = 0$ і знайдемо відповідне значення $x$:

$$2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3.$$

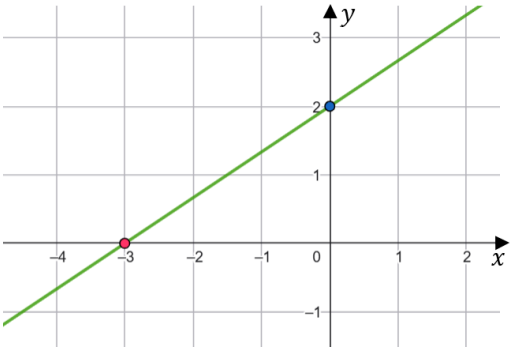
Отже, точка перетину з віссю абсцис $(-3; 0)$.

Аналогічно, для відшукання точки перетину з віссю $Oy$ покладемо в рівнянні $x = 0$ і знайдемо відповідний $y$:

$$-3y + 6 = 0 \Rightarrow y = 2.$$

Отже, точка перетину з віссю ординат $(0; 2)$.

Побудуємо ці точки та з'єднаємо прямою.




***Приклад 2.*** Задано точки $K(2; -1)$ та $M(1; 2)$. Знайти загальне рівняння прямої, що проходить через точку $K$ перпендикулярно до відрізку $KM$.

Знайдемо координати вектора

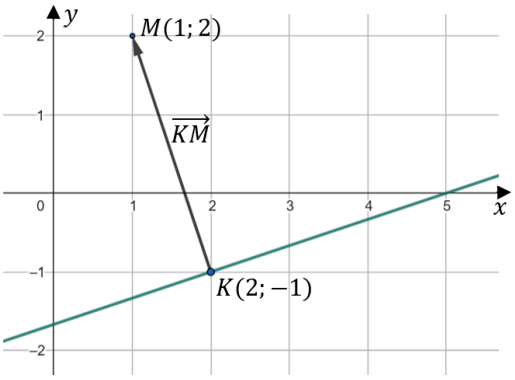
$$\overrightarrow{KM} = \{1 - 2;\ 2 - (-1)\} = \{-1;\ 3\}$$

та застосуємо формулу (3.1)

$$-1(x - 2) + 3(y - (-1)) = 0$$

Розкриємо дужки та отримаємо шукане загальне рівняння прямої

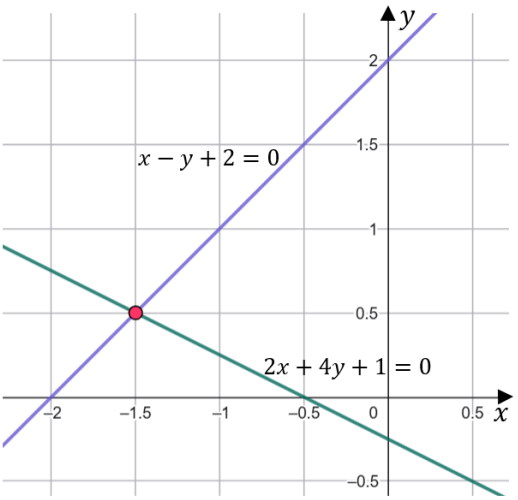
$$-x + 3y + 5 = 0.$$



***Приклад 3.*** Знайти точку перетину прямих $2x + 4y + 1 = 0$ та $x - y + 2 = 0$.

Точка перетину цих прямих має координати $x$ та $y$, які задовольняють обом рівнянням, а отже, достатньо розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x + 4y + 1 = 0, \\ x - y + 2 = 0. \end{cases}$$




Розв'яжемо методом Крамера

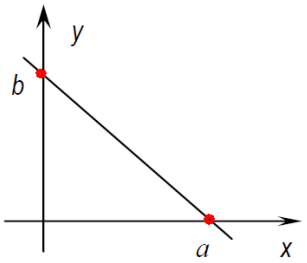
$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3.$$

Отже, точка перетину має координати

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{3}{2}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{2}.$$

## Рівняння прямої у відрізках на осях




Із загального рівняння прямої (3.2), маємо

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow Ax + By = -C \Rightarrow \frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1.$$

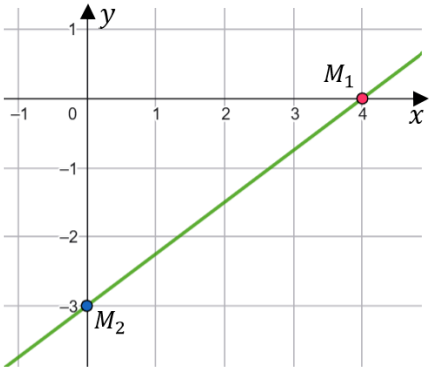
Позначивши $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, отримаємо

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \qquad (3.3)$$

– *рівняння прямої у відрізках на осях*.

Числа $a$ і $b$ вказують, які відрізки відтинає пряма на осях координат.

***Приклад 4.*** Відомо, що пряма проходить через точки $M_1(4;0)$ та $M_2(0;-3)$. Знайти загальне рівняння цієї прямої.




Очевидно, що точка $M_1(4;0)$ лежить на осі абсцис, а отже пряма відсікає на осі $Ox$ відрізок $a = 4$. Аналогічно, точка $M_2(0;-3)$ лежить на осі ординат і $b = -3$.

Скористаємось рівнянням (3.2) і отримаємо рівняння прямої

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1 \Rightarrow \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1.$$

Щоб отримати загальне рівняння прямої домножимо рівняння на спільний знаменник дробів в лівій частині

$$3x - 4y = 12.$$

Зібравши всі доданки в лівій частині рівняння, отримаємо шукане загальне рівняння цієї прямої

$$3x - 4y - 12 = 0.$$

### Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Якщо пряма проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, тобто

$$\begin{cases} M_1(x_1, y_1) \in L, \\ M_2(x_2, y_2) \in L. \end{cases}$$

Тоді, для довільної точки $M(x, y)$ на прямій, вектори $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1\}$ і $\overrightarrow{M_1M}_2 = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ будуть колінеарні, тобто координати цих векторів будуть пропорційні.

Таким чином, з того, що $\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M}_2$, отримуємо

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}} \qquad (3.4)$$

– *рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки*.

У цьому рівнянні вважають, що $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$.

Якщо $x_1 = x_2$, то пряма, яка проходить через точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_1, y_2)$, паралельна осі ординат і задається рівнянням: $x = x_1$.

Якщо $y_1 = y_2$, то пряма, яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_1)$, паралельна осі абцис і задається рівні: $y = y_1$.

***Приклад 5.*** Знайти загальне рівняння прямої, що проходить через точки $A(2; -1)$ та $B(4; 2)$.

Застосуємо рівняння (3.4)

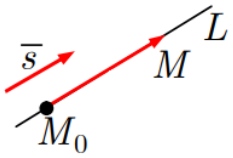
$$\frac{x - 2}{4 - 2} = \frac{y - (-1)}{2 - (-1)} \Rightarrow \frac{x - 2}{2} = \frac{y + 1}{3}.$$

Тоді

$$3(x - 2) = 2(y + 1) \Rightarrow 3x - 6 = 2y + 2 \Rightarrow 3x - 2y - 8 = 0.$$

### Рівняння прямої, що проходить через задану точку паралельно до заданого вектора або канонічне рівняння прямої

Нехай пряма $L$ проходить через фіксовану точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\vec{s} = \{l; m\}$, тобто




$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in L, \\ \vec{s} = \{l; m\} \parallel L. \end{cases}$$

Тоді, пряму $L$ можна розглядати як множину точок $M(x, y)$ площини, таких, що вектори $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ і $\vec{s}$ колінеарні.

***Означення 2.*** Вектор $\vec{s} = \{l; m\}$ паралельний до прямої $L$ називається *напрямним вектором* прямої $L$.

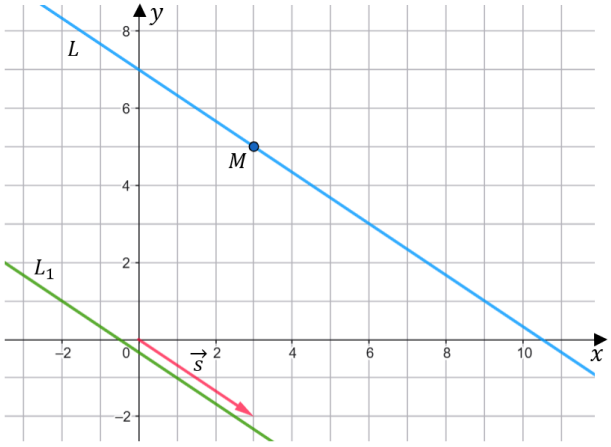
Отже, вектори $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \Rightarrow$ їх координати пропорційні, маємо

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}} \qquad (3.5)$$

– *канонічне рівняння прямої* або *рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку*.

***Приклад 6.*** Знайти канонічне рівняння прямої $L$, що проходить через точку $M(3; 5)$ паралельно прямій $L_1$, що задана рівнянням $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2}$.

Очевидно, що пряму $L_1$ задано своїм канонічним рівнянням, звідки ми можемо зробити висновок, що пряма $L_1$ проходить через точку $(-2; 1)$ паралельно напрямному вектору $\vec{s} = \{3; -2\}$.




Оскільки пряма $L$ паралельна $L_1$, то вона паралельна і вектору $\vec{s}$.

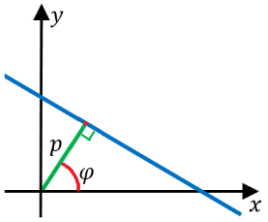
Отже, $\vec{s}$ – напрямний вектор і для прямої $L$.

Тоді, за формулою (3.5), канонічне рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 5}{-2}.$$

### Нормальне рівняння прямої

Якщо відомо $p$ - довжину перпендикуляра, що опущено з початку координат на пряму, та кут $\varphi$, який утворює цей перпендикуляр з додатним напрямом вісі $Ox$ (проти годинникової стрілки), то




$$\cos\varphi\, x + \sin\varphi\, y - p = 0 \qquad (3.6)$$

– *нормальне рівняння прямої*.

Це рівняння отримуємо з загального рівняння $Ax + By + C = 0$ шляхом домноження на *нормуючий множник*

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},\ \ \mu C < 0.$$

***Зауваження 1.*** У нормальному рівняння прямої сума квадратів коефіцієнтів біля $x$ та $y$ має бути рівною одиниці, а вільний член має бути від'ємним.

***Приклад 7.*** Знайти довжину перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму $3x - 6y + 5 = 0$, а також координати основи цього перпендикуляра.

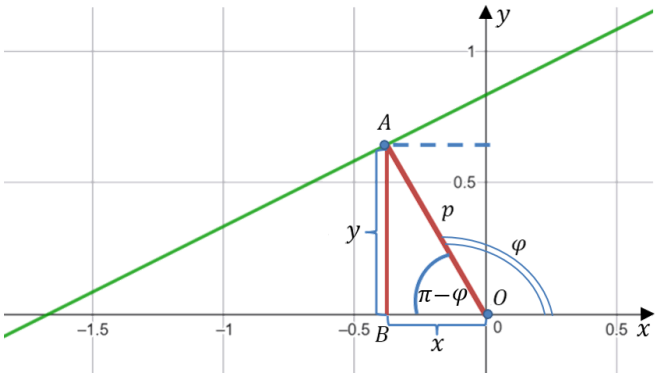
Знайдемо нормуючий множник ($A = 3,\ B = -6$)

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{3^2 + (-6)^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{45}} = \pm\frac{1}{3\sqrt{5}}\ .$$

Оскільки $\mu C = 5\mu$ має бути від'ємним, то виберемо знак мінус для нормуючого множника.

Помножимо загальне рівняння $3x - 6y + 5 = 0$ на $\mu = -\frac{1}{3\sqrt{5}}$ та отримаємо нормальний вигляд $-\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{\sqrt{5}}{3} = 0.$

Тоді, з формули (3.6), маємо, що довжина перпендикуляра $p = \frac{\sqrt{5}}{3}$.




Для відшукання основи перпендикуляра розглянемо прямокутний трикутник $AOB$ з гіпотенузою $p$ і кутом $(\pi - \varphi)$.

Довжини катетів цього трикутника, взяті з відповідним знаком, і дадуть нам шукані координати.

Отже, координати основи перпендикуляра

$$x = -p\cos(\pi - \varphi) = p\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{3},$$

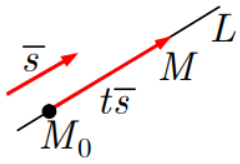
$$y = p\sin\varphi\sin(\pi - \varphi) = p\sin\varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{3}.$$

## Параметричне рівняння прямої

Умова колінеарності векторів

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\} \text{ та } \vec{s} = \{l; m\}$$

рівносильна тому, що $\overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{s},\ t \in \mathbb{R}$.




Звідки отримуємо

$$\begin{cases} x - x_0 = lt, \\ y - y_0 = mt, \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases} t \in \mathbb{R}} \qquad (3.7)$$

– *параметричне рівняння прямої*.

***Приклад 8.*** Побудувати пряму $\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = 3 + t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$ на координатній площині. Записати її загальне рівняння.

Для побудови прямої достатньо знайти дві точки, що лежать на цій прямій. Найпростіше знайти точки перетину прямої з осями координат.

Для відшукання точки перетину з віссю $Ox$ покладемо в другому рівнянні $y = 0$ і знайдемо відповідне $t$:

$$0 = 3 + t \ \Rightarrow\ t = -3.$$

Підставимо отримане в перше рівняння:

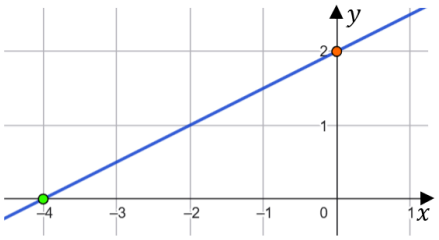
$$x = 2 + 2(-3) = -4.$$

Аналогічно, для відшукання точки перетину з віссю $Oy$ покладемо в другому рівнянні $x = 0$, знайдемо відповідне $t$ і підставимо в друге рівняння:

$$0 = 2 + 2t \ \Rightarrow\ t = -1 \ \Rightarrow\ y = 3 + (-1) = 2.$$

Отже точка перетину з віссю $Ox$: $(-4;0)$.

Отже точка перетину з віссю $Oy$: $(0;2)$.




Для того, щоб з параметричного рівняння отримати загальне рівняння, виразимо з кожного з рівнянь $\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = 3 + t \end{cases}$ параметр $t$ і прирівняємо отримані вирази:

$$x = 2 + 2t \;\Rightarrow\; t = \frac{x-2}{2} \;\Rightarrow\; \frac{x-2}{2} = y - 3.$$
$$y = 3 + t \;\Rightarrow\; t = y - 3$$

У результаті отримали канонічне рівняння заданої прямої, звідки легко отримати відповідне загальне рівняння:

$$\frac{x-2}{2} = y - 3 \;\Rightarrow\; x - 2 = 2y - 6 \;\Rightarrow\; x - 2y + 4 = 0.$$

### Рівняння прямої із заданим кутовим коефіцієнтом

Нехай точка $M_0(x_0, y_0) \in L$ і вектор-орт $\overrightarrow{s^0} = \{\cos\alpha, \cos\beta\} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ – напрямний вектор прямої $L$.

Для довільної точки $M(x, y)$ прямої вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ і $\overrightarrow{s^0}$ колінеарні.

Отже, $\overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{s^0} \Rightarrow$ їх координати пропорційні, тобто

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha} \;\Big|\cdot \sin\alpha \Rightarrow \frac{x - x_0}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = \frac{y - y_0}{\cancel{\sin\alpha}} \cdot \cancel{\sin\alpha} \Rightarrow y - y_0 = \operatorname{tg}\alpha(x - x_0).$$

Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = k$ – *кутовий коефіцієнт прямої*, отримаємо

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)} \qquad (3.8)$$

*– рівняння прямої, яка проходить через задану точку із заданим кутовим коефіцієнтом*.

Якщо в рівнянні (3.8) розкрити дужки і виразити $y$, отримаємо

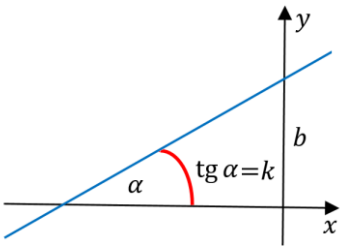
$$\boxed{y = kx + b} \qquad (3.9)$$

*– рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.*

Тут

$b = y_0 - kx_0$ – відрізок, що пряма відтинає на осі $Oy$,

$\alpha$ $(\operatorname{tg}\alpha = k)$ – кут нахилу прямої до вісі $Ox$.



Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$ і рівняння прямої має вигляд $y = kx$.

Якщо пряма паралельна осі $Ox$, то $\alpha = 0° \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0$ і рівняння такої прямої має вигляд $y = b$.

***Приклад 9.*** Знайти рівняння з кутовим коефіцієнтом прямої, що проходить через точки $A(5;2)$ та $B(-3;1)$.

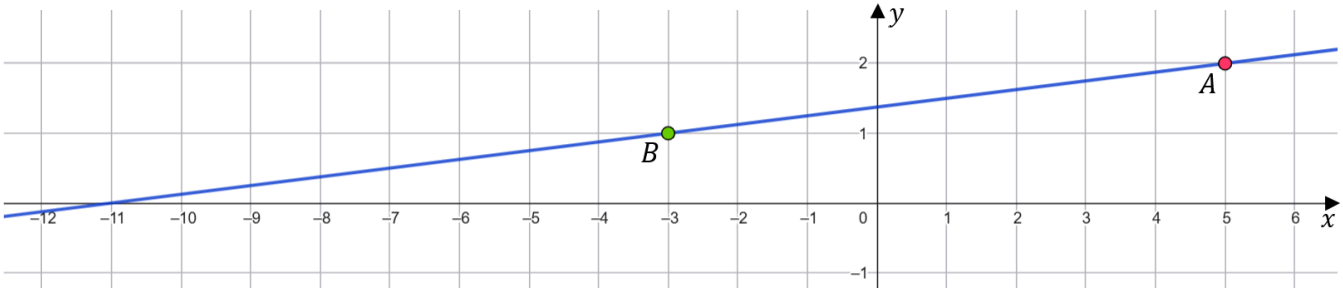
Спочатку скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві точки (3.4):

$$\frac{x-5}{-3-5} = \frac{y-2}{1-2} \Rightarrow \frac{x-5}{-8} = \frac{y-2}{-1}.$$

Далі виразимо з рівності $y$ і отримаємо рівняння з кутовим коефіцієнтом

$$y - 2 = \frac{x-5}{8} \Rightarrow y = \frac{1}{8}x - \frac{11}{8},$$

де $k = \frac{1}{8}$ – кутовий коефіцієнт шуканої прямої.




***Приклад 10.*** Знайти кут, під яким пряма $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{3}t, \\ y = -1 + 3t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$ перетинає вісь $Ox$.

Знайдемо відповідне рівняння з кутовим коефіцієнтом

$$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{3}t, \Rightarrow t = \dfrac{x-2}{\sqrt{3}} \\ y = -1 + 3t, \Rightarrow t = \dfrac{y+1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{\sqrt{3}} = \frac{y+1}{3} \Rightarrow$$

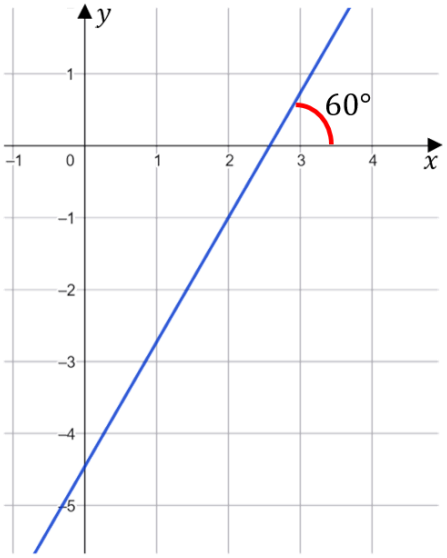
$$y = \sqrt{3}(x-2) - 1$$

Отже,

$$y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} - 1.$$

Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = k$, де $\alpha$ – кут нахилу прямою до осі $Ox$, маємо

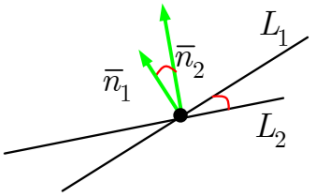
$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°.$$



## 3.2.2. Взаємне розташування прямих на площині

### Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих

**I.** Якщо прямі $L_1$ та $L_2$ задані *загальними рівняннями*




$$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то

**1)** *кут* $\varphi$ *між прямими* $L_1$ та $L_2$ дорівнює куту між їхніми нормальними векторами $\overrightarrow{n_1} = \{A_1; B_1\}$ і $\overrightarrow{n_2} = \{A_2; B_2\}$:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2}\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2}}}; \qquad (3.10)$$

**2)** прямі $L_1$ , $L_2$ – *паралельні*, якщо $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$– *колінеарні* $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}}$;

**3)** прямі $L_1$ , $L_2$ – *перпендикулярні*, якщо $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Rightarrow \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2 = 0}.$$

***Приклад 11.*** Визначити взаємне розташування прямих

$$L_1: -2x + 3y + 1 = 0, \quad L_2: 3x + 2y - 2 = 0, \quad L_3: 4x - 6y + 5 = 0.$$

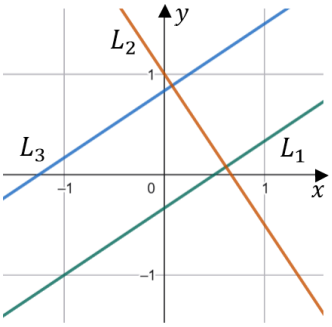
Випишемо нормальні вектори заданих прямих:

$$\overrightarrow{n_1} = \{-2; 3\}, \quad \overrightarrow{n_2} = \{3; 2\}, \quad \overrightarrow{n_3} = \{4; -6\}.$$

Легко побачити, що $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_3}$ – колінеарні, оскільки $\frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$.

Отже прямі $L_1$ та $L_3$ – паралельні.

Знайдемо тепер кут між прямими $L_1$ та $L_2$.

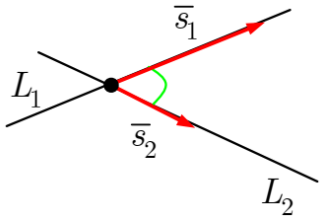



Оскільки

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = -2\cdot 3 + 3\cdot 2 = 0,$$

то прямі $L_1$ та $L_2$ перпендикулярні. В силу паралельності $L_1$ та $L_3$, маємо, що прямі $L_2$ та $L_3$ також перпендикулярні.

**II.** Якщо прямі $L_1$ та $L_2$ задані *канонічними рівняннями*




$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1},$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2},$$

то

**1)** *кут* $\varphi$ *між прямими* $L_1$ та $L_2$ дорівнює куту між їхніми напрямними векторами $\vec{s_1}=\{l_1;m_1\}$ і $\vec{s_2}=\{l_2;m_2\}$:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}}{|\vec{s_1}|\cdot|\vec{s_2}|}=\frac{l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2}{\sqrt{{l_1}^2+{m_1}^2}\sqrt{{l_2}^2+{m_2}^2}}};\qquad (3.11)$$

**2)** прямі $L_1$ , $L_2$ *паралельні*, якщо $\vec{s_1}$, $\vec{s_2}$ *– колінеарні* $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}}$;

**3)** прямі $L_1$ , $L_2$ *– перпендикулярні*, якщо $\vec{s_1}\perp\vec{s_2}$ $\Rightarrow$ $\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}=0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2=0}$.

***Приклад 12.*** Трикутник задано координатами вершин: $A(-2;4)$, $B(1;1)$ та $C(3;2)$. Знайти внутрішній кут $B$ трикутника $ABC$.

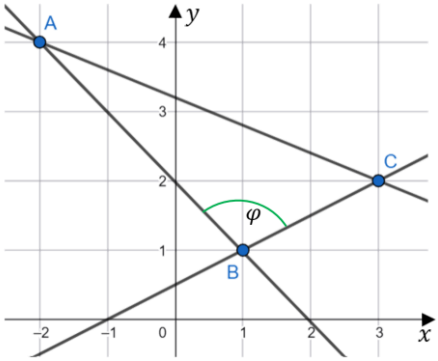
Складемо канонічні рівняння прямих використовуючи формулу рівняння прямої через дві точки:

$$BA: \frac{x-1}{-2-1}=\frac{y-1}{4-1}\Rightarrow\frac{x-1}{-3}=\frac{y-1}{3}\Rightarrow\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1};$$

$$BC: \frac{x-1}{3-1}=\frac{y-1}{2-1}\Rightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}.$$

Тоді напрямні вектори цих прямих

$$\vec{s_1}=\{-1;1\}\ \text{ та }\ \vec{s_2}=\{2;1\}.$$




За формулою (3.11), отримаємо

$$\cos\varphi=\frac{-1\cdot 2+1\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2+1^2}\sqrt{2^2+1^2}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}\approx -0{,}3162,$$

$$\varphi\approx 108^\circ 22'.$$

**III.** Якщо прямі $L_1$ та $L_2$ задані *рівняннями з кутовими коефіцієнтами*

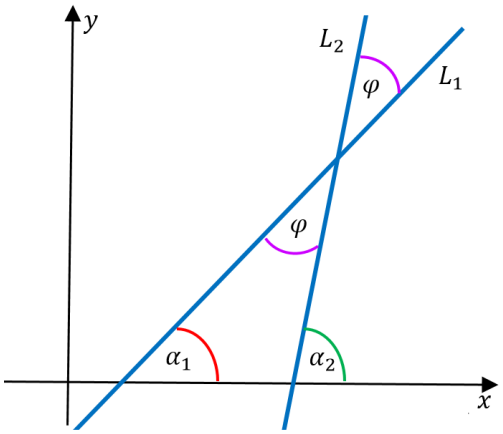
$$L_1:\ y = k_1 x + b_1,$$

$$L_2:\ y = k_2 x + b_2,$$

де кутові коефіцієнти

$$k_1 = \mathrm{tg}\alpha_1, \quad k_2 = \mathrm{tg}\alpha_2,$$

то з рисунка видно, що




$$\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_2 \mathrm{tg}\alpha_1}.$$

Тоді

**1)** *кут* $\varphi$ *між прямими* $L_1$ та $L_2$:

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}}; \qquad (3.12)$$

**2)** $L_1$ , $L_2$ – *паралельні*, якщо $\mathrm{tg}\,\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{k_1 = k_2}$;

**3)** $L_1$ , $L_2$ – *перпендикулярні* , якщо $\varphi = 90°$ і $\mathrm{tg}\,\varphi$ не існує $\Rightarrow\ 1 + k_1 \cdot k_2 = 0\ \Rightarrow$

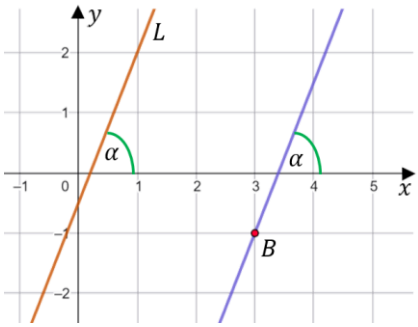
$$\Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ або } \boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}}.$$

***Приклад 13.*** Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $B(3;-1)$ паралельно прямій $L$: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{5}$.

Знайдемо рівняння з кутовим коефіцієнтом прямої $L$, виразивши $y$:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{5} \Rightarrow 5x - 5 = 2y - 4\ \Rightarrow y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2},\ \text{де}\ k_L = \frac{5}{2}.$$

Оскільки шукана пряма паралельна $L$, то за 2) їхні кутові коефіцієнти співпадають.



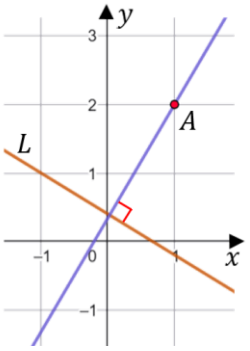

Застосуємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку $B(3;-1)$ із заданим кутовим коефіцієнтом $k = \frac{5}{2}$, маємо

$$y - y_B = k(x - x_B)\ \Rightarrow\ y + 1 = \frac{5}{2}(x - 3)\ \Rightarrow y = \frac{5}{2}x - \frac{17}{2}.$$

***Приклад 14.*** Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $A(1;2)$ перпендикулярно до прямої $L$: $3x+5y-2=0$.

Знайдемо рівняння з кутовим коефіцієнтом прямої $L$, виразивши $y$:

$$3x+5y-2=0 \Rightarrow y=-\frac{3}{5}x+\frac{2}{5},\ \text{де}\ k_L=-\frac{3}{5}.$$




Оскільки шукана пряма перпендикулярна $L$, то за 3) можемо знайти її кутовий коефіцієнт

$$k=-\frac{1}{k_L}=\frac{5}{3}.$$

Тоді застосуємо рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1;2)$ із кутовим коефіцієнтом $k=\frac{5}{3}$:

$$y-y_A=k(x-x_A)\ \Rightarrow\ y-2=\frac{5}{3}(x-1)\ \Rightarrow y=\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}.$$

***Приклад 15.*** Трикутник задано координатами вершин: $A(4;-1)$, $B(-2;1)$ та $C(2;4)$. Знайти рівняння висоти $CH$, медіани $CM$ та кут між ними.

**1.** Знайдемо рівняння висоти $CH$.

Оскільки $CH$ висота трикутника $ABC$, то $CH\perp AB$, а з 3) маємо, що

$$k_{CH}=-\frac{1}{k_{AB}}.$$

Знайдемо рівняння сторони $AB$, за формулою (3.4):

$$\frac{x-4}{-2-4}=\frac{y+1}{1+1}\ \Rightarrow\ \frac{x-4}{-6}=\frac{y+1}{2}.$$

Виразимо $y$ і отримаємо відповідне рівняння з кутовим коефіцієнтом

$$y=-\frac{1}{3}\,x+\frac{1}{3}\ ,\ \text{де}\ k_{AB}=-\frac{1}{3}.$$

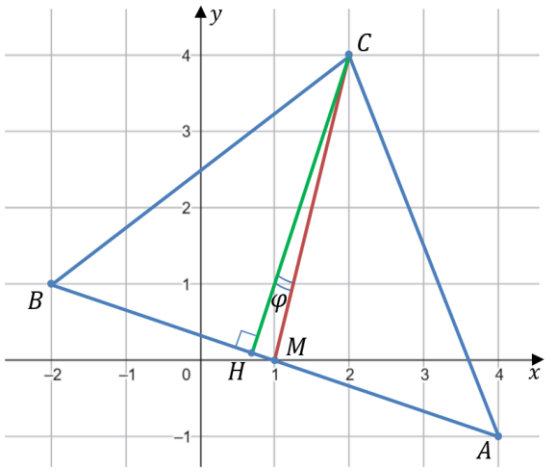
Тоді

$$k_{CH}=-\frac{1}{k_{AB}}=3.$$

За формулою (3.8) рівняння прямої, яка проходить через задану точку із заданим кутовим коефіцієнтом, маємо

$$CH\colon\ y-y_C=k_{CH}(x-x_C)\ \Rightarrow\ y-4=3(x-2)\ \Rightarrow y=3x-2.$$

**2.** Знайдемо рівняння медіани $CM$.




Точка $M$ середина сторони $AB$, тоді її координати

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4-2}{2} = 1,$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0.$$

Застосуємо рівняння прямої через дві точки $C(2;4)$ та $M(1;0)$

$$\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-4}{0-4} \Rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4}.$$

Тоді рівняння з кутовим коефіцієнтом медіани $CM$:

$$y = 4x - 4, \text{ де } k_{CM} = 4\,.$$

**3.** Знайдемо кут $\varphi$ між висотою $CH$ та медіаною $CM$ застосувавши формулу (3.12):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_{CM} - k_{CH}}{1 + k_{CM}k_{CH}} = \frac{4-3}{1+4\cdot 3} = \frac{1}{13} \approx 0{,}0769,$$

$$\varphi \approx 4^\circ\, 24'.$$

***Приклад 16.*** Задано пряму $L$: $y = 2x - 1$ та точку $A(-1;2)$. Знайти:

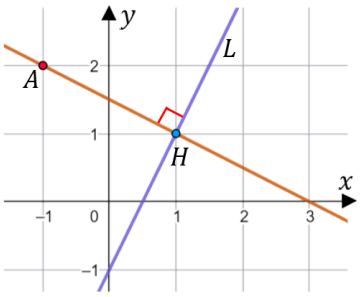
**1.** Координати основи $H$ перпендикуляра, опущеного з точки $A$ на пряму $L$.

**2.** Відстань від точки $A$ до прямої $L$.

**3.** Координати точки $B$ симетричної точці $A$ відносно прямої $L$.

**1.** Точка $H$ є точкою перетину прямої $L$ та прямої $AH$, перпендикулярної $L$.

Знайдемо рівняння прямої $AH$.




Оскільки $AH \perp L$, а з 3) маємо, що

$$k_{AH} = -\frac{1}{k_L} = -\frac{1}{2}.$$

Тоді, за формулою (3.8):

$$AH\colon\ y - y_A = k_{AH}(x - x_A) \ \Rightarrow\ y - 2 = -\frac{1}{2}(x+1) \ \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Знайдемо точку перетину прямих $L$ та $AH$:

$$\begin{cases} y = 2x - 1, \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases} \Rightarrow H(1;1).$$

**2.** Відстань від точки $A$ до прямої $L$ дорівнює довжині перпендикуляру $AH$:

$$|AH| = \sqrt{(1-(-1))^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5} \text{ од.}$$

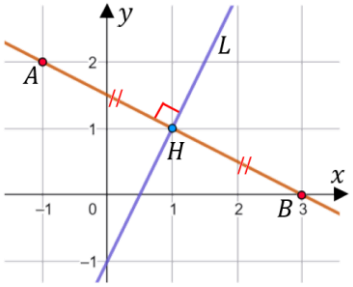
**3.** Точка $B$, симетрична точці $A$ відносно прямої $L$, лежить на прямій, перпендикулярній до $L$. Отже точка $B$ лежить на $AH$, причому точка $H$ є серединою відрізка $AB$.

Тоді

$$x_H = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_B = 2x_H - x_A \Rightarrow x_B = 2 \cdot 1 - (-1) = 3,$$

$$y_H = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 2y_H - y_A \Rightarrow y_B = 2 \cdot 1 - 2 = 0.$$

Отже $B(3;0)$.

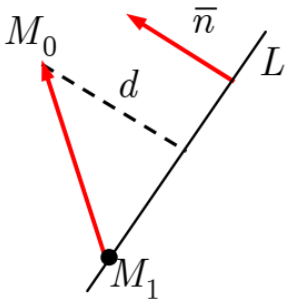



## Відстань та відхилення точки від прямої

Нехай задано пряму $L$ рівнянням

$$Ax + By + C = 0$$

і точка $M_0(x_0, y_0) \notin L$.




*Відстань* $d$ від точки $M_0$ до прямої $L$ дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1\}$, де $M_1(x_1, y_1)$ – довільна точка прямої $L$, на напрям нормального вектора $\vec{n} = \{A; B\}$. Отже,

$$d = \left|\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M_0}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Оскільки, $Ax_1 + By_1 + C = 0$, то $C = -Ax_1 - By_1$, то

$$\boxed{d(M_0, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}} \qquad (3.13)$$

– *відстань від прямої* $L$ *до точки* $M_0(x_0, y_0)$.

***Означення 3.*** *Відхиленням* точки $M_0(x_0, y_0)$ від прямої називають число

$$\boxed{\delta(M_0, L) = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}}. \qquad (3.14)$$

Знак плюс чи мінус у знаменнику вибираємо завжди протилежним знаку вільного члена $C$ в рівнянні прямої $Ax + By + C = 0$.

Можна помітити, що

$$\boxed{\delta(M_0, L) = \pm d(M_0, L)},$$

при цьому

$$\delta = \begin{cases} +d, & \text{якщо точка і початок координат знаходяться по різні боки від прямої;} \\ -d, & \text{якщо точка і початок координат знаходяться по один бік від прямої.} \end{cases}$$

***Приклад 17.*** Знайти відстань між двома паралельними прямими $3x - 4y - 6 = 0$ та $3x - 4y + 4 = 0$.

Оскільки прямі паралельні, то достатньо вибрати довільну точку однієї прямої і за формулою (3.13) знайти відстань до іншої прямої.

Розглянемо пряму $3x - 4y - 6 = 0$. Покладемо $y = 0$ та визначимо відповідний $x$:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 6 = 0, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Знайдемо відстань від точки $(2; 0)$ до прямої $3x - 4y + 4 = 0$:

$$d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2 \text{ од.}$$

***Приклад 17.*** Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $A(-1; 2)$, таким чином, щоб відстань від точки $B(2; 1)$ до цієї прямої $d = 2$ од.

Запишемо рівняння шуканої прямої у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом

$$y - 2 = k(x + 1).$$

Тоді загальне рівняння набуде вигляду

$$kx - y + (k + 2) = 0.$$

Для відшукання кутового коефіцієнта $k$ скористаємось формулою (3.13) для відстані між точкою $B(2; 1)$ та шуканою прямою

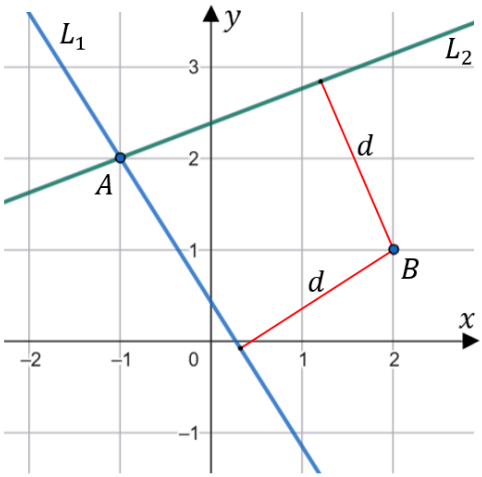
$$d = \frac{|k \cdot 2 - 1 \cdot 1 + (k+2)|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{|3k+1|}{\sqrt{1+k^2}} = 2.$$

Розв'яжемо отримане рівняння

$$\frac{|3k+1|}{\sqrt{1+k^2}} = 2 \Rightarrow |3k+1| = 2\sqrt{1+k^2} \Rightarrow$$

$$(3k+1)^2 = 4(1+k^2) \Rightarrow \ 5k^2 + 6k - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$k_1 = -\frac{3-2\sqrt{6}}{5}; \quad k_2 = -\frac{3+2\sqrt{6}}{5}.$$




Отже, отримаємо дві прямі, які відповідають умові задачі

$$L_1: \ y = -\frac{3-2\sqrt{6}}{5}(x+1) + 2;$$

$$L_2: \ y = -\frac{3+2\sqrt{6}}{5}(x+1) + 2.$$

***Приклад 18.*** Знайти рівняння прямої такої, що вона паралельна прямій $L: \ 4x + 3y + 1 = 0$ і знаходиться на відстані $d = 3$ од від цієї прямої.

Зрозуміло, що таких прямих буде дві. Відхилення точок $\delta$ точок однієї з них буде $-3$, а для іншої 3.

Оскільки прямі паралельні, то рівняння таких прямих буде мати вигляд

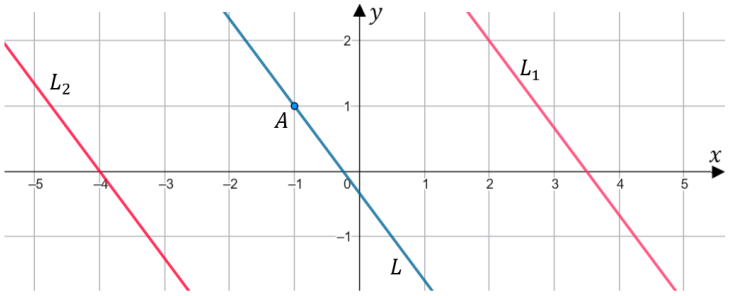
$$4x + 3y + C = 0.$$

Для відшукання відповідних значень $C$ виберемо точку на прямій $L$, наприклад $A(-1;1)$ і формулою (3.14):

$$\delta = \frac{4 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + C}{\pm\sqrt{4^2 + 3^2}} = \pm 3.$$

Тоді

$$\frac{C-1}{\pm 5} = \pm 3 \Rightarrow \begin{matrix} C = 16, \\ C = -14. \end{matrix}$$




Отже, шукані прямі:

$$L_1: \ 4x + 3y - 14 = 0;$$

$$L_2: \ 4x + 3y + 16 = 0.$$

## В’язка прямих

***Означення 4.*** *В’язкою прямих* називається множина всіх прямих, що проходять через одну і ту саму точку, яка називається *центром в’язки*.

*Рівняння в’язки* можна задати двома способами:

**1)** рівнянням $\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}$, в якому точка $C(x_0, y_0)$ – є центром в’язки.

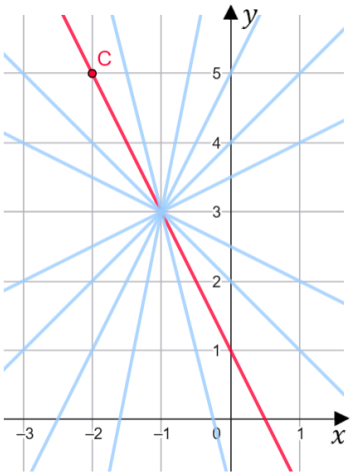
Надаючи $k$ різних значень будемо отримувати прямі, які всі будуть проходити через точку $C$, але мати різні кутові коефіцієнти. Виключенням буде лише пряма, яка задається рівнянням $x = x_0$. Ця пряма паралельна осі $Oy$, тому кут $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не існує;

**2)** системою двох рівнянь непаралельних прямих, оскільки такі прямі перетинаються в одній точці: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 & \to \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 & \cdot\lambda \end{cases} \downarrow +$ або

$$\boxed{A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0}. \qquad (3.15)$$

При різних значеннях $\lambda$ дане рівняння задає будь-яку пряму з в’язки, за виключенням прямої $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, оскільки $\lambda = -\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}$ не існує, коли знаменник обертається в нуль.

***Приклад 19.*** Знайти рівняння прямої такої, що вона належить в’язці прямих $y - 3 = k(x + 1)$ і проходить через точку $C(-2; 5)$.




Підставимо точку $C$ в рівняння в’язки і визначимо відповідний кутовий коефіцієнт:

$$\begin{cases} y - 3 = k(x + 1), \\ x = -2, \\ y = 5, \end{cases} \Rightarrow 5 - 3 = k(-2 + 1) \Rightarrow k = -2.$$

Отже, рівняння шуканої прямої

$$y - 3 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x + 1.$$

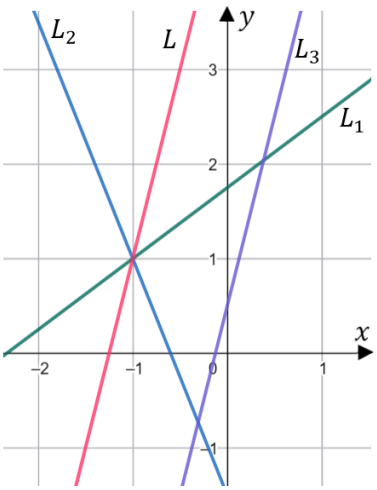
***Приклад 20.*** Знайти рівняння прямої $L$ такої, що вона проходить через точку перетину прямих $L_1$: $3x-4y+7=0$ та $L_2$: $5x+2y+3=0$ і паралельну до прямої $L_3$: $8x-2y+1=0$.

Шукана пряма належить в'язці прямих

$$3x-4y+7+\lambda(5x+2y+3)=0.$$

Тоді

$$(3+5\lambda)x+(-4+2\lambda)y+(7+3\lambda)=0.$$




Оскільки шукана пряма паралельна прямій $8x-2y+1=0$, то коефіцієнти при $y$ та $x$ мають задовольняти рівнянням:

$$\begin{cases} 3+5\lambda=8 \\ -4+2\lambda=-2 \end{cases} \Rightarrow \lambda=1.$$

Отже, рівняння шуканої прямої

$$8x-2y+10=0.$$

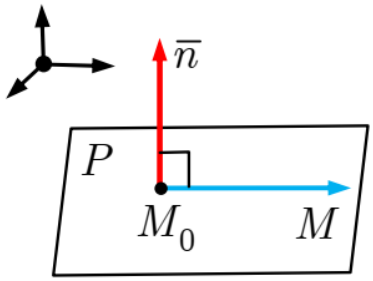
# 3.3. ПРЯМА ТА ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ

## 3.3.1. Площина у просторі

Площина у просторі $Oxyz$ може задаватися різними способами. Кожному з них відповідає певний вигляд її рівняння. Але всі вони будуть рівняннями першого степеня відносно змінних координат $x, y, z$.

### Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

Нехай в прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ задано площину $P$, що проходить через фіксовану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \{A; B; C\}$,




$$\text{тобто } \begin{cases} M_0(x_0, y_0, z_0) \in P, \\ \vec{n} = \{A; B; C\} \perp P. \end{cases}$$

***Означення 1.*** Вектор $\vec{n} \perp P$ називають *нормальним вектором* (*вектором нормалі*) цієї площини або *нормаллю*.

Візьмемо на площині довільну точку $M(x, y, z)$ і побудуємо вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}.$$

При будь-якому положенні точки $M$ на площині $P$ вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ взаємно перпендикулярні. А це означає, що скалярний добуток $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$. Звідси

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0} \qquad (3.16)$$

– *рівняння площини, що проходить через задану точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *перпендикулярно до заданого вектора* $\vec{n} = \{A; B; C\}$.

### Загальне рівняння площини

Розкриємо дужки в рівнянні (3.16):

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0.$$

Позначивши $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, матимемо

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \qquad (3.17)$$

– *загальне рівняння площини у просторі*.

***Приклад 1.*** Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(3;-1;2)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=\{4;2;-1\}$.

Застосуємо формулу (3.16) при $A=4,\ B=2,\ C=-1$

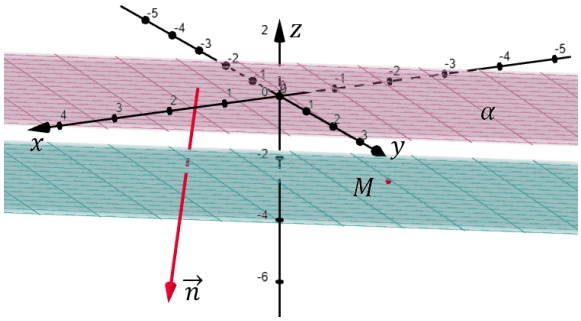
$$4\cdot(x-3)+2\cdot\big(y-(-1)\big)+(-1)\cdot(z-2)=0.$$

Розкриємо дужки і спростимо вираз

$$4x+2y-z-8=0.$$

***Приклад 2.*** Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M(-1;2;-2)$ паралельно площині $\alpha$: $2x+3y-5z+1=0$.

Нормальний вектор шуканої площини співпадає з нормальним вектором заданої – $\vec{n}=\{2;3;-5\}$.




Отже, $A=2,\ B=3,\ C=-5$.

Застосуємо формулу (3.16)

$$2\cdot\big(x-(-1)\big)+3\cdot(y-2)+(-5)\cdot(z-(-2))=0.$$

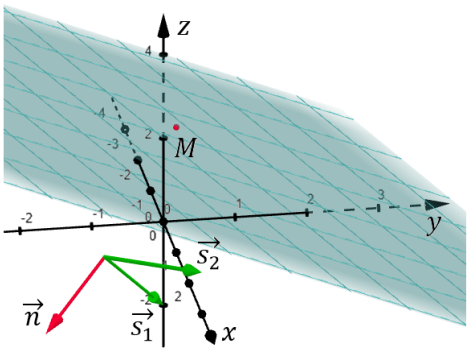
Розкриємо дужки, спростимо вираз і отримаємо шукане загальне рівняння

$$2x+3y-5z-14=0.$$

***Приклад 3.*** Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M(1;0;3)$ паралельно до векторів $\vec{s_1}=\{-1;1;-2\}$ та $\vec{s_2}=\{2;1;1\}$.

Нормальний вектор $\vec{n}$ є перпендикулярним до площини, а отже буде перпендикулярним і до кожного з векторів $\vec{s_1}$ та $\vec{s_2}$. Для того щоб його знайти достатньо знайти векторний добуток векторів $\vec{s_1}$ та $\vec{s_2}$:

$$\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&1&-2\\2&1&1\end{vmatrix}=3\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}.$$




Тоді за формулою (3.16)

$$3(x-1)-3(y-0)-3(z-3)=0.$$

Отже, маємо рівняння шуканої площини

$$x-y-z+2=0.$$

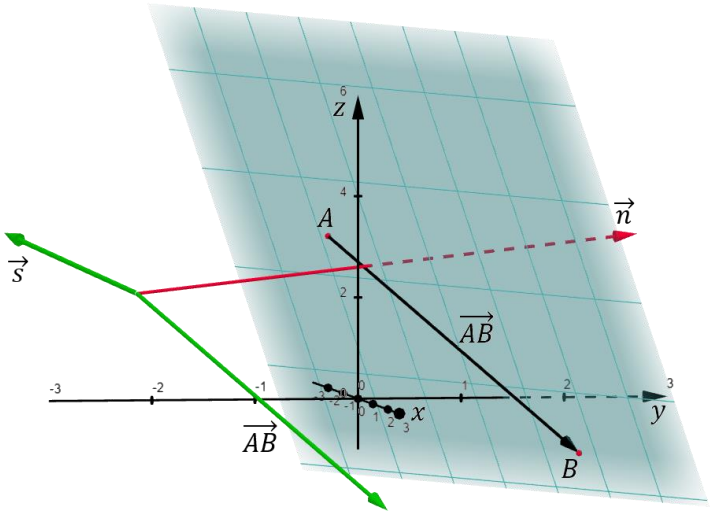
***Зауваження 1.*** Приклад 3 можна розв’язати іншим способом (див. приклад 15).

***Приклад 4.*** Знайти рівняння площини, що проходить через дві точки $A(-2;0;3)$ та $B(1;2;-1)$ паралельно до вектора $\vec{s}=\{-2;-1;1\}$.

Розглянемо вектор

$$\overrightarrow{AB}=\{3;2;-4\}.$$

В якості нормального вектора будемо шукати вектор перпендикулярний до $\overrightarrow{AB}$ та $\vec{s}$. Тому розглянемо векторний добуток цих векторів




$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -4\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}.$$

Тоді, за формулою (3.16), використовуючи точку $A$, отримаємо

$$-2\big(x-(-2)\big)+5(y-0)+(z-3)=0\ \Rightarrow\ -2x+5y+z-7=0.$$

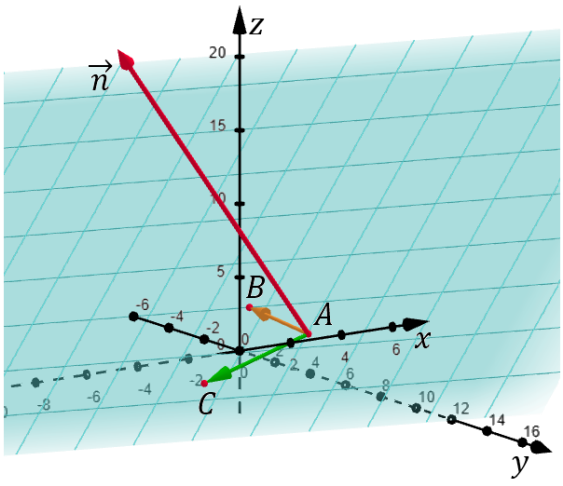
***Зауваження 2.*** Приклад 4 можна розв'язати іншим способом (див. приклад 14).

***Приклад 5.*** Знайти рівняння площини, що проходить через три точки $A(2;1;1)$, $B(-1;2;4)$ та $C(0;-2;-3)$.

Розглянемо два вектори

$$\overrightarrow{AB}=\{-3;1;3\}\text{ та }\overrightarrow{AC}=\{-2;-3;-4\}.$$

Вони не колінеарні і лежать в шуканій площині. Отже, в результаті їх векторного добутку ми отримаємо вектор що буде перпендикулярний цим обом векторам і площині в якій вони лежать, тобто отримаємо нормальний вектор шуканої площини



$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 5\vec{\imath} - 18\vec{\jmath} + 11\vec{k}.$$

За формулою (3.16), використовуючи точку $A$, маємо рівняння шуканої площини

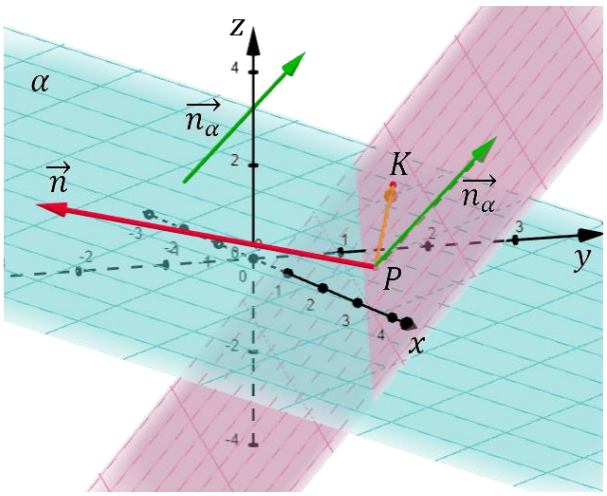
$$5(x-2) - 18(y-1) + 11(z-1) = 0 \;\Rightarrow\; 5x - 18y + 11z - 3 = 0.$$

***Зауваження 3.*** Приклад 5 можна розв'язати іншим способом (див. приклад 13).

***Приклад 6.*** Знайти рівняння площини, що проходить через точки $P(1;1;0)$ та $K(-1,2,1)$ перпендикулярно до площини

$$\alpha:\; x + y + 3z - 1 = 0.$$

Нормальний вектор площини $\alpha$: $\overrightarrow{n_\alpha} = \{1;1;3\}$ буде паралельним до шуканої площини. Задача розв'язується аналогічно до прикладу 4.




Знайдемо $\overrightarrow{PK} = \{-2;1;1\}$.

Тоді

$$\vec{n} = \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{PK} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} + 3\vec{k}.$$

За формулою (3.16), рівняння шуканої площини:

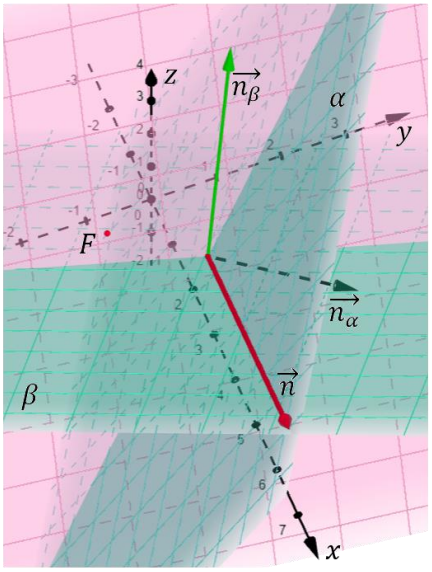
$$-2(x-1) - 7(y-1) + 3(z-0) = 0 \;\Rightarrow\; 2x + 7y - 3z - 9 = 0.$$

***Приклад 7.*** Знайти рівняння площини, що проходить через точку $F(1;-1;1)$ перпендикулярно площинам $\alpha: x+2y-z-2=0$ та $\beta: -2x+y+3z+2=0$.

Розглянемо нормальні вектори площин $\alpha$ та $\beta$:

$$\overrightarrow{n_\alpha}=\{1;2;-1\} \text{ та } \overrightarrow{n_\beta}=\{-2;1;3\}$$

Ці два вектори будуть паралельні шуканій площині, а отже задача розв'язується аналогічно до прикладу 3.

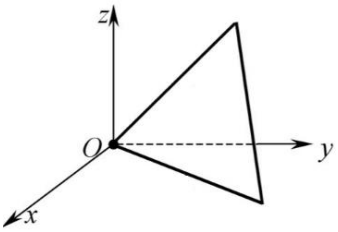
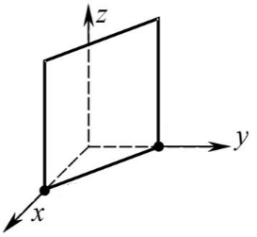
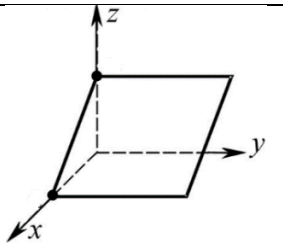


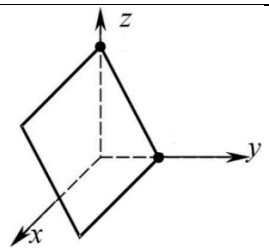
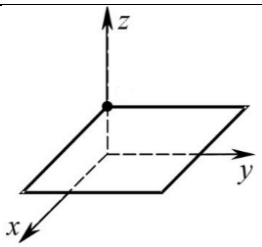
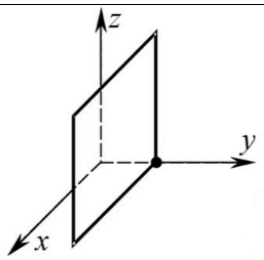
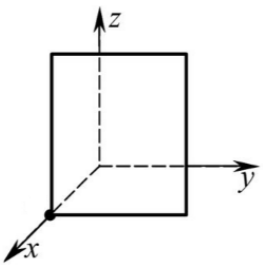
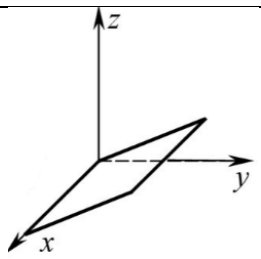
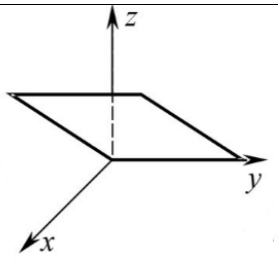

$$\vec{n}=\overrightarrow{n_\alpha}\times\overrightarrow{n_\beta}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{vmatrix}=7\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}.$$

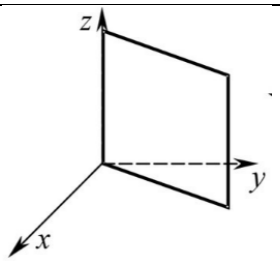
Тоді рівняння шуканої площини

$$7(x-1)-(y+1)+5(z-1)=0 \Rightarrow \ 7x-y+5z-13=0.$$

## ***Дослідження загального рівняння площини***

| | |
|---|---|
| 1) Якщо в загальному рівнянні площини $D=0$, то $Ax+By+Cz=0$ є рівнянням площини, що *проходить через початок координат*. |   |
| 2) Якщо в загальному рівнянні площини $C=0$, то $Ax+By+D=0$ є рівнянням площини, *паралельної до осі $Oz$*. |   |
| 3) Якщо в загальному рівнянні площини $B=0$, то $Ax+Cz+D=0$ є рівнянням площини, *паралельної до осі $Oy$*. |   |

| | |
|---|---|
| 4) Якщо в загальному рівнянні площини $A = 0$, то $$By + Cz + D = 0$$ є рівнянням площини, *паралельної до осі* $Ox$. |   |
| 5) Якщо $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, то рівняння площини набуде вигляду $Cz + D = 0$ або $$z = -\frac{D}{C}$$ – це рівняння площини, яка *паралельна до площини* $Oxy$. |   |
| 6) Аналогічно $By + D = 0$ або $y = -\frac{D}{B}$ – це рівняння площини, яка *паралельна до площини* $Oxz$. |   |
| 7) Аналогічно $Ax + D = 0$ або $x = -\frac{D}{A}$ – це рівняння площини, яка *паралельна до площини* $Oyz$. |   |
| 8) Якщо в загальному рівнянні площини $A = D = 0$, то $$By + Cz = 0$$ – рівняння площини, що *проходить через вісь* $Ox$. |   |
| 9) Аналогічно $$Ax + Cz = 0$$ – рівняння площини, що *проходить через вісь* $Oy$. |   |

| | |
|---|---|
| 10) Аналогічно $$Ax + By = 0$$ – рівняння площини, що *проходить через вісь* $Oz$. |   |
| 11) Якщо в рівнянні площини $A = 0$, B $= 0$, $C \neq 0$, $D = 0$, то площина $Cz = 0$ або $z = 0$ збігається з площиною $Oxy$. Аналогічно, площина $Ax = 0$ або $x = 0$ збігається з площиною $Oyz$, а площина $By = 0$ або $y = 0$ збігається з площиною $Oxz$. | |

***Приклад 8.*** Записати рівняння площини, що проходить через вісь $Oz$ і точку $P(1; -2; 1)$.

Відповідно до пункту 10) рівняння такої площини має вигляд

$$Ax + By = 0$$

Оскільки точка $P$ лежить в цій площині, то її координати мають задовольняти це рівняння

$$A \cdot 1 + B \cdot (-2) = 0.$$

Звідси маємо, що $A = 2B$.

Підставимо в рівняння

$$2Bx + By = 0.$$

Звідки отримаємо рівняння шуканої площини

$$2x + y = 0.$$

***Приклад 9.*** Записати рівняння площини, що проходить через точку $K(2; 3; -4)$ паралельно координатній площині $Oyz$.

Відповідно до пункту 7) рівняння такої площини має вигляд

$$Ax + D = 0.$$

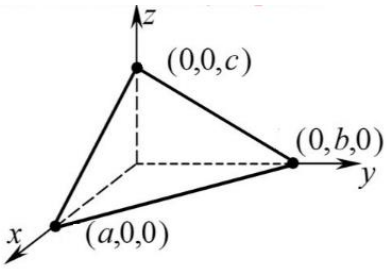
Підставимо координати точки $K$ в це рівняння

$$A \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = -2A.$$

Тоді

$$Ax + (-2A) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0.$$

### Рівняння площини у відрізках на осях




З загального рівняння площини (2), маємо

$$Ax + By + Cz = -D \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1.$$

Позначивши

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C},$$

отримаємо

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1} \qquad (3.18)$$

– *рівнянням площини у відрізках на осях*.

Числа $a$, $b$, $c$ – відрізки, які відтинає площина на осях координат.

***Приклад 10***. Який відрізок на осі $Oz$ відтинає площина

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{c} = 1,$$

якщо відомо, що вона проходить через точку $M(-6; -6; 12)$.

Маємо рівняння площини у відрізках на осях. Відрізок на осі $Oz$ невідомий. Оскільки площина проходить через точку $M$, то координати цієї точки задовольняють рівняння прямої:

$$\frac{-6}{3} + \frac{-6}{2} + \frac{12}{c} = 1,$$

$$\frac{12}{c} = 6,$$

звідки відрізок, який площина відтинає на осі $Oz$,

$$c = 2,$$

а рівняння площини

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1,$$

або в загальному вигляді

$$2x + 3y + 3z - 6 = 0.$$

***Приклад 11.*** Площина відсікає на осі абсцис $a = -2$, на осі ординат $b = 3$ і проходить через точку $K(-4; 6; 3)$. Скласти рівняння цієї площини.

Скористаємось рівнянням (3.18)

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{c} = 1.$$

Оскільки точка $K$ лежить в цій площині, то її координати мають задовольняти це рівняння

$$\frac{-4}{-2} + \frac{6}{3} + \frac{3}{c} = 1 \Rightarrow \ c = -1.$$

Отже, шукане рівняння

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-1} = 1 \ \Rightarrow -3x + 2y - 6z - 6 = 0.$$

***Приклад 12.*** Які відрізки на координатних площинах відтинає площина

$$x - 3y + 4z - 12 = 0?$$

Маємо загальне рівняння площини. Запишемо його у вигляді рівняння площини у відрізках на осях:

$$x - 3y + 4z = 12,$$

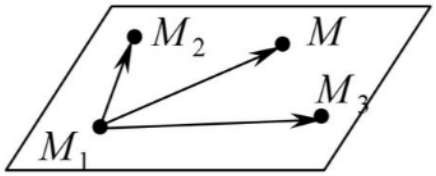
$$\frac{x}{12} - \frac{3y}{12} + \frac{4z}{12} = \frac{12}{12},$$

$$\frac{x}{12} - \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1,$$

Отже, площина відтинає на осі $Ox$ відрізок $a = 12$, на осі $Oy - b = -4$, на осі $Oz - c = 3$.

### Рівняння площини, що проходить через три точки; через дві точки паралельно вектору; через точку паралельно двом векторам

Нехай площину в просторі задано трьома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій.




Візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$, яка не збігається ні з однією з заданих точок і побудуємо вектори

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}, \qquad \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}.$$

Ці вектори лежать в одній площині, тобто вони компланарні. Оскільки мішаний добуток компланарних векторів дорівнює нулю, то маємо

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.19)$$

– *рівняння площини, що проходить через три точки.*

Аналогічно, використовуючи поняття компланарності векторів, можна отримати ще два рівняння площини, а саме

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.20)$$

– *рівняння площини, що проходить через дві точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *паралельно до вектора* $\vec{s} = \{l; m; n\}$.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.21)$$

– *рівняння площини, що проходить через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, *паралельно до двох векторів* $\vec{s_1} = \{l_1; m_1; n_1\}$, $\vec{s_2} = \{l_2; m_2; n_2\}$.

***Приклад 13***. Знайти рівняння площини, що проходить через три точки $A(2; 1; 1)$, $B(-1; 2; 4)$ та $C(0; -2; -3)$.

Скористаємось рівнянням площини, що проходить через три точки (3.19):

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z - 1 \\ -1 - 2 & 2 - 1 & 4 - 1 \\ 0 - 2 & -2 - 1 & -3 - 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z - 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Запишемо розклад визначника за елементами 1-го рядка

$$(x - 2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} - (y - 1)\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + (z - 1)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$5(x - 2) - 18(y - 1) + 11(z - 1) = 0.$$

Отже, шукане рівняння площини має вигляд

$$5x - 18y + 11z - 3 = 0.$$

***Приклад 14***. Знайти рівняння площини, що проходить через дві точки $A(-2;0;3)$ та $B(1;2;-1)$ паралельно до вектора $\vec{s}=\{-2;-1;1\}$.

Скористаємось рівнянням (3.20):

$$\begin{vmatrix} x-(-2) & y-0 & z-3 \\ 1-(-2) & 2-0 & -1-3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+2 & y & z-3 \\ 3 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Запишемо розклад визначника за елементами 1-го рядка

$$(x+2)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$-2(x+2)+5y+(z-3)=0$$

Тоді, шукане рівняння площини

$$-2x+5y+z-7=0.$$

***Приклад 15***. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M(1;0;3)$ паралельно до векторів $\vec{s_1}=\{-1;1;-2\}$ та $\vec{s_2}=\{2;1;1\}$.

Скористаємось рівнянням площини, *що проходить через точку, паралельно до двох векторів* (3.21):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Запишемо розклад визначника за елементами 1-го рядка

$$(x-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$\Rightarrow\ 3(x-1)-3(y-0)-3(z-3)=0,$$

$$x-y-z+2=0.$$

## 3.3.2. Взаємне розташування площин

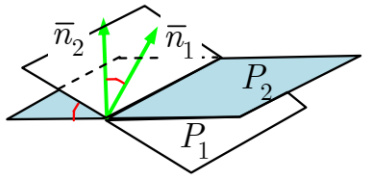
### Кут між двома площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Нехай задано дві площини *загальними рівняннями*

$$P_1\colon A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

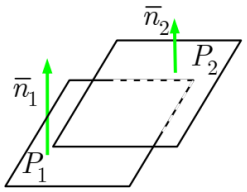
$$P_2\colon A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

**1.** *Двогранний кут* $\varphi$ *між площинами* $P_1$ і $P_2$ дорівнює куту між нормальними векторами $\overrightarrow{n_1} = \{A_1; B_1; C_1\}$ і $\overrightarrow{n_2} = \{A_2; B_2; C_2\}$ цих площин. Отже,




$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2 + C_1\cdot C_2}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2 + {C_1}^2}\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2 + {C_2}^2}}}. \qquad (3.22)$$

**2.** Якщо площини $P_1$, $P_2$ – *паралельні*, то їх нормальні вектори $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ – *колінеарні* ⇒ *координати пропорційні*




$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}.$$

**3.** Якщо площини $P_1$, $P_2$ – *перпендикулярні*, то $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$ ⇒ скалярний добуток

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2 + C_1\cdot C_2 = 0}.$$

***Приклад 16.*** Знайти кут між гранями $M_1M_2M_3$ та $M_4M_2M_3$ піраміди, заданої своїми вершинами $M_1(3;-2;3)$, $M_2(0;-3;0)$, $M_3(1;4;0)$ та $M_4(-1;-2;4)$.

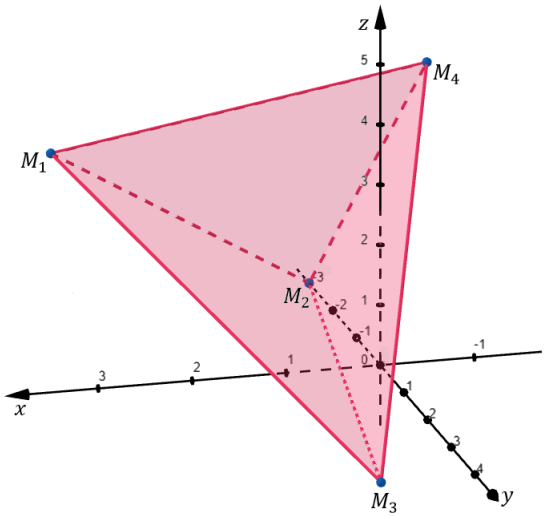
Знайдемо рівняння площин, що утворюють грані, за формулою (3.19):

$$M_1M_2M_3: \begin{vmatrix} x-0 & y+3 & z-0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21x - 3y - 20z - 9 = 0;$$

$$M_4M_2M_3: \begin{vmatrix} x-0 & y+3 & z-0 \\ 1 & 7 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x - y + 2z - 3 = 0.$$




Знайдемо тепер двогранний кут $\varphi$ між площинами $M_1M_2M_3$ та $M_4M_2M_3$, якщо відповідні нормальні вектори: $\overrightarrow{n_1} = \{21; -3; -20\}$ і $\overrightarrow{n_2} = \{7; -1; 2\}$

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{21\cdot 7 + (-3)\cdot(-1) + (-20)\cdot 2}{\sqrt{21^2 + (-3)^2 + (-20)^2}\sqrt{7^2 + (-1)^2 + 2^2}} \approx 0{,}5134.$$

Тоді,

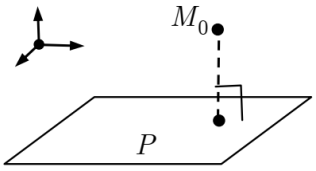
$$\varphi \approx 59°6'.$$

### Відстань та відхилення точки від площини

Нехай задано площину $P$ рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

і точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що не лежить на цій площині.




Тоді, *відстань $d$ від точки $M_0$ до площини $P$* знаходимо за формулою

$$d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (3.23)$$

(виведення цієї формули аналогічне виведенню формули відстані від точки до прямої на площині).

***Означення 2.*** *Відхиленням точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ від площини $P$* називають величину

$$\delta(M_0, P) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm d(M_0, P). \qquad (3.24)$$

Знак плюс чи мінус у знаменнику вибираємо завжди протилежним знаку вільного члена $D$ в рівнянні площини $Ax + By + Cz + D = 0$.

При цьому,

$$\delta = \begin{cases} +d, & \text{якщо точка і початок координат знаходяться по різні боки від площини;} \\ -d, & \text{якщо точка і початок координат знаходяться по один бік від площини.} \end{cases}$$

***Приклад 17.*** Знайти відстань між паралельними площинами

$$5x + 3y - 4z + 15 = 0 \quad \text{та} \quad 15x + 9y - 12z - 5 = 0.$$

Виберемо в першій площині довільну точку. Наприклад, покладемо $y = 0$ та $z = 0$, підставимо в рівняння площини та знайдемо відповідний $x$:

$$5x + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 15 = 0 \;\Rightarrow\; 5x + 15 = 0 \;\Rightarrow\; x = -3.$$

Тепер, за формулою (3.23), знайдемо відстань від цієї точки до другої площини

$$d = \frac{|15 \cdot (-3) + 9 \cdot 0 - 12 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{15^2 + 9^2 + (-12)^2}} = \frac{5}{3}\sqrt{2}.$$

Ця відстань і буде шуканою відстанню між заданими площинами.

### В'язка площин

***Означення 3.*** *В'язкою площин* називається множина всіх площин, що проходять через одну і ту саму точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка називається *центром в'язки*.

*Рівняння в'язки* в цьому випадку задається рівнянням

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (3.25)$$

Надаючи коефіцієнтам $A, B, C$ різних значень можна отримувати рівняння будь-якої площини цієї в'язки, яка проходить через точку $M_0$.

Можна дати ще одне визначення в'язки площин.

***Означення 4.*** *В'язкою площин* називається множина всіх площин, які проходять через одну і ту саму пряму.

Рівняння цієї в'язки можна отримати з системи двох рівнянь, що задають непаралельні площини:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & \to \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & \cdot\lambda \end{cases} \text{↲ +} \quad \text{або}$$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \qquad (3.26)$$

При різних значеннях $\lambda$ будемо отримувати різні площини з в'язки, але всі вони будуть перетинатися по одній прямій. Виключенням буде лише площина $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, оскільки $\lambda = -\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}$ не існує, коли знаменник обертається в нуль.

***Приклад 18.*** Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(3; 2; 1)$ та пряму перетину площин $x + y + 5z - 1 = 0$ та $2x + 3y - z + 2 = 0$.

Скористаємось рівнянням в'язки площин (3.26):

$$x + y + 5z - 1 + \lambda(2x + 3y - z + 2) = 0\,.$$

Значення $\lambda$ визначимо підставляючи координати точки $M_0$ в рівняння в'язки:

$$3 + 2 + 5 \cdot 1 - 1 + \lambda(2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 1 + 2) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{9}{13}.$$

Тоді,

$$x + y + 5z - 1 - \frac{9}{13}(2x + 3y - z + 2) = 0 \;\Rightarrow\; 5x + 14y - 74z + 31 = 0.$$

## 3.3.3. Пряма у просторі

### Різні види рівняння прямої у просторі

Якщо пряму у просторі в прямокутній системі координат задано двома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ або фіксованою точко $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним вектором $\vec{s} = \{l; m; n\}$, то для довільної точки $M(x, y, z)$ цієї прямої, дістанемо рівняння аналогічні рівнянням прямої на площині:

**1.** *Рівняння прямої у просторі, що проходить через дві задані точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}. \qquad (3.27)$$

**2.** *Канонічне рівняння прямої у просторі* або *рівнянням прямої, що проходить через задану точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *в заданому напрямку* $\vec{s} = \{l; m; n\}$:

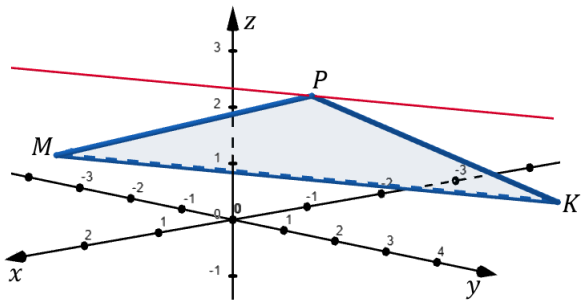
$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}}. \qquad (3.28)$$

***Приклад 19.*** Трикутник задано своїми вершинами $P(1; 3; 3)$, $K(-3; 2; 0)$ та $M(1; -2; 1)$. Знайти рівняння сторони $KM$ та прямої $L$, що проходить через вершину $P$ паралельно стороні $KM$.

Знайдемо рівняння сторони $KM$, скориставшись формулою (3.27):

$$\frac{x - (-3)}{1 - (-3)} = \frac{y - 2}{-2 - 2} = \frac{z - 0}{1 - 0} \Rightarrow$$

$$\frac{x + 3}{4} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z}{1}.$$




Оскільки прямі $KM$ та $L$ паралельні, то їх напрямні вектори співпадають. Отже,

$$\vec{s} = \{4; -4; 1\}.$$

Тоді, за рівнянням (3.28), отримаємо рівняння прямої $L$:

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 3}{-4} = \frac{z - 3}{1}.$$

**3.** *Параметричне рівняння прямої у просторі*:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.29}$$

***Приклад 20.*** Виписати параметричне рівняння прямої, що утворює з координатними осями кути $\alpha = 60°,\ \beta = 120°,\ \gamma = 45°$ та проходить через точку $P(4; -2; 0)$.

Знайдемо, спочатку, напрямний вектор $\vec{s}$ , як одиничний вектор, що лежить на прямій. Оскільки нам відомі кути, що утворює пряма з осями координат, то координатами напрямного вектора можна вибрати напрямні косинуси

$$\vec{s_0} = \{\cos\alpha\,; \cos\beta\,; \cos\gamma\} = \{\cos 60°\,; \cos 120°\,; \cos 45°\} = \left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Домножимо вектор $\vec{s_0}$ на 2, тоді

$$\vec{s} = \{1; -1; \sqrt{2}\}.$$

За формулою (3.29), маємо

$$\begin{cases} x = 4 + 1t, \\ y = -2 + (-1)t, \\ z = 0 + \sqrt{2}t, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 + t, \\ y = -2 - t, \\ z = \sqrt{2}t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

***Приклад 21.*** Знайти точку перетину прямих

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+4}{2} \quad \text{та} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-1}{3}.$$

Запишемо першу пряму в параметричному вигляді:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+4}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 + 5t, \\ z = -4 + 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

та підставимо в рівняння другої прямої вирази для $x, y$ та $z$:

$$\frac{(1-t)-2}{2} = \frac{(2+5t)-5}{-2} = \frac{(-4+2t)-1}{3} \Rightarrow$$

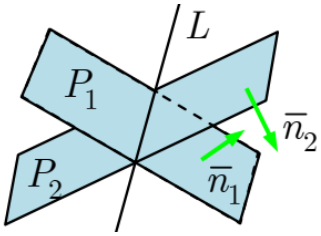
$$\Rightarrow \quad \frac{-t-1}{2} = \frac{5t-3}{-2} = \frac{2t-5}{3}.$$

Легко побачити, що ця рівність справджується при $t = 1$.

Тоді, точка перетину прямих

$$\begin{cases} x = 1 - 1, \\ y = 2 + 5 \cdot 1, \\ z = -4 + 2 \cdot 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 7, \\ z = -2. \end{cases}$$

### 4. *Загальне рівняння прямої у просторі*

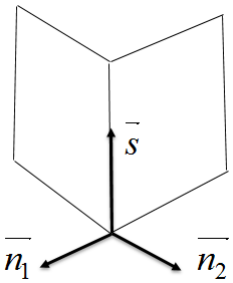



Розглянемо тепер випадок, коли пряма у просторі задається перетином двох площин. Відомо, що дві непаралельні площини перетинаються по прямій лінії. Отже, якщо пряму лінію в просторі задано як лінію перетину двох площин, то її рівняння має вигляд системи рівнянь двох площин

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Щоб від загального рівняння прямої у просторі перейти до канонічного або параметричного рівняння у просторі, потрібно знайти точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямій та її напрямний вектор $\vec{s} = \{l; m; n\}$.

Для знаходження координат точки $M_0 \in L$ потрібно надати одній з її координат, довільного значення, наприклад, $z = z_0$ (на практиці краще брати 0 або 1), а дві інші координати визначити з заданої системи, в якій замість $z$ підставлено $z_0$.




Для знаходження напрямного вектора $\vec{s}$ враховуємо, що нормальні вектори $\vec{n_1} = \{A_1; B_1; C_1\}$ і $\vec{n_2} = \{A_2; B_2; C_2\}$ площин одночасно перпендикулярні до лінії перетину цих площин, тобто до прямої $L$. Тому, за напрямний вектора $\vec{s}$ прямої можна взяти векторний добуток цих нормальних векторів:

$$\vec{s} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

***Приклад 22.*** Звести рівняння прямої $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 2x-y+3z+5=0 \end{cases}$ до канонічного вигляду.

Спочатку знайдемо яку-небудь точку на даній прямій. Для цього в обох рівняннях системи покладемо, наприклад, $x=0$. Тоді, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y-z-1=0, \\ -y+3z+5=0, \end{cases}$$

знаходимо $y=-1$, $z=-2$. Отже, $M_0(0,-1,-2)$ шукана точка на прямій.

Оскільки, $\overrightarrow{n_1}=\{1;1;-1\}$ і $\overrightarrow{n_2}=\{2;-1;3\}$, то напрямний вектор прямої

$$\overrightarrow{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=\overrightarrow{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}-\overrightarrow{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+\overrightarrow{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=2\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k}\quad\Rightarrow\overrightarrow{s}=\{2;-5;-3\}.$$

Тоді, канонічне рівняння заданої прямої має вигляд

$$\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z+2}{-3}.$$

***Приклад 23.*** Знайти канонічне рівняння прямої, що проходить через початок координат паралельно прямій

$$\begin{cases} x-4y-z+2=0, \\ x-y-1=0. \end{cases}$$

Знайдемо напрямний вектор прямої, використовуючи нормалі до площин

$\overrightarrow{n_1}=\{1;-4;-1\}$ і $\overrightarrow{n_2}=\{1;-1;0\}$:

$$\overrightarrow{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}.$$

Тоді, за формулою (3.28), отримаємо

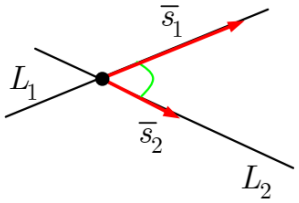
$$\frac{x}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{3}.$$

## 3.3.4. Взаємне розташування прямих та площин у просторі
## Кут між двома прямими
## Умови паралельності та перпендикулярності

Нехай дві прямі у просторі задані канонічними рівняннями

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},\quad L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

**1)** *кут $\varphi$ між прямими* $L_1$ та $L_2$ дорівнює куту між їхніми напрямними векторами $\vec{s_1}=\{l_1;m_1;n_1\}$, $\vec{s_2}=\{l_2;m_2;n_2\}$:




$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}}{|\vec{s_1}|\cdot|\vec{s_2}|}=\frac{l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2}{\sqrt{{l_1}^2+{m_1}^2+{n_1}^2}\sqrt{{l_2}^2+{m_2}^2+{n_2}^2}}};$$

**2)** *умова паралельності прямих*:

прямі $L_1, L_2$ – *паралельні*, якщо $\vec{s_1}, \vec{s_2}$ – *колінеарні* $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}}$;

**3)** *умова перпендикулярності прямих*:

прямі $L_1$ , $L_2$ – *перпендикулярні*, якщо $\vec{s_1}\perp\vec{s_2}$ $\Rightarrow$ $\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}=0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2=0}.$$

***Приклад 24.*** Знайти кут між прямими

$$\begin{cases}3x-y+z+1=0,\\ x+2y-z=0.\end{cases} \text{ та } \begin{cases}x+y-z+2=0,\\ 2x+3y-z-1=0.\end{cases}$$

Знайдемо напрямні вектори цих двох прямих

$$\vec{s_1}=\overrightarrow{n_{11}}\times\overrightarrow{n_{21}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-\vec{i}+4\vec{j}+7\vec{k},$$

$$\vec{s_2}=\overrightarrow{n_{12}}\times\overrightarrow{n_{22}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}.$$

Тоді

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}}{|\vec{s_1}|\cdot|\vec{s_2}|}=\frac{-2-4+7}{\sqrt{1+16+49}\sqrt{4+1+1}}=\frac{1}{6\sqrt{11}}\approx 0{,}0503.$$

Отже, кут між прямими $\varphi\approx 87°7'$ .

***Приклад 25.*** Скласти рівняння прямої, яка лежить в площині $xOz$, проходить через початок координат та перпендикулярна до прямої

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}.$$

Нехай $\vec{s}=\{l;m;n\}$ напрямний вектор шуканої прямої.

Оскільки пряма розташована в площині $xOz$, то проекція вектора $\vec{s}$ на вісь $Oy$ дорівнює нулю, а отже, $m=0$ і $\vec{s}=\{l;0;n\}$.

З умови перпендикулярності шуканої прямої і прямої $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}$ (з напрямним вектором {3;-2;1}) отримаємо

(з напрямним вектором $\{3;-2;1\}$) отримаємо

$$l\cdot 3+0\cdot(-2)+n\cdot 1=3l+n=0 \;\Rightarrow\; n=-3l.$$

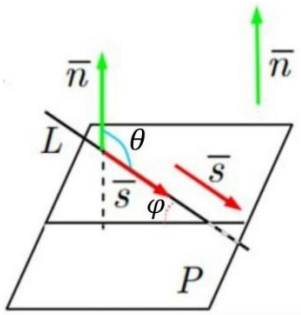
Вибравши $l=1$, маємо $n=-3$.

Отже, $\vec{s}=\{1;0;-3\}$.

Враховуючи, що пряма проходить через початок координат $O(0;0;0)$, отримаємо канонічне рівняння шуканої прямої

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-3}.$$

## Кут між прямою і площиною




Нехай пряму у просторі задано канонічним рівнянням

$$L:\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

а площину загальним рівнянням

$$P:\ Ax+By+Cz+D=0.$$

***Означення 1.*** *Кутом $\varphi$ між прямою $L$ і площиною $P$* називають будь-який з двох суміжних кутів, утворених прямою $L$ та її проекцією на площину $P$.

Позначимо через $\varphi=\widehat{(L,P)}$ – кут між прямою $L$ та її проекцією на площину $P$, а через $\theta=\widehat{(\vec{n},\vec{s})}$ – кут між нормальним вектором $\vec{n}=\{A;B;C\}$ площини $P$ і напрямним вектором $\vec{s}=\{l;m;n\}$ прямої $L$.

Якщо $\theta \le 90°$, то $\varphi = 90° - \theta$ і $\sin\varphi = \cos\theta$.

Якщо $\theta > 90°$, то $\varphi = \theta - 90°$ і $\sin\varphi = -\cos\theta$.

Отже, в будь-якому випадку $\sin\varphi = |\cos\theta|$. Тоді,

$$\sin\varphi = |\cos\theta| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|} \Rightarrow$$

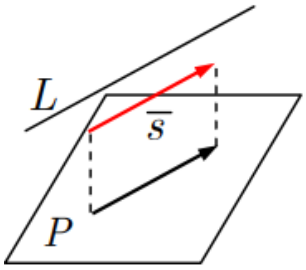
$$\boxed{\sin\varphi = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}}$$

– *формула для знаходження кута між прямою* $L$ *і площиною* $P$.

## Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини

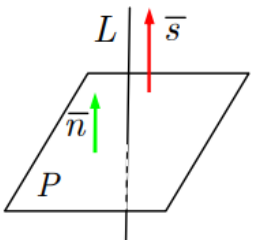
Якщо пряма $L$ *паралельна* до площини $P$, то напрямний вектор $\vec{s}$ прямої і нормальний вектор $\vec{n}$ площини перпендикулярні, тобто їх скалярний добуток $\vec{s}\cdot\vec{n} = 0$:

$$\boxed{Al+Bm+Cn=0}.$$




Якщо пряма $L$ *перпендикулярна* до площини $P$, то напрямний вектор $\vec{s}$ прямої і нормальний вектор $\vec{n}$ площини колінеарні, тобто координати цих векторів пропорційні:

$$\boxed{\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}}.$$




***Приклад 26.*** Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3}$ та площини $2x+3y-z+1=0$. Знайти кут між ними.

Для відшукання точки перетину запишемо рівняння прямої у параметричному вигляді

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+2t, \\ y = 2-t, \\ z = -1+3t, \end{cases} \quad t\in\mathbb{R},$$

та підставимо в рівняння площини вирази для $x, y$ та $z$:

$$2(1+2t)+3(2-t)-(-1+3t)+1=0 \Rightarrow -2t+10=0 \Rightarrow t=5.$$

Тоді, точка перетину прямої та площини має координати:

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot 5, \\ y = 2 - 1 \cdot 5, \\ z = -1 + 3 \cdot 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11, \\ y = -3, \\ z = 14. \end{cases}$$

Обчислимо тепер кут між прямою та площиною використовуючи напрямний вектор $\vec{s} = \{2; -1; 3\}$ прямої і нормальний вектор $\vec{n} = \{2; 3; -1\}$ площини:

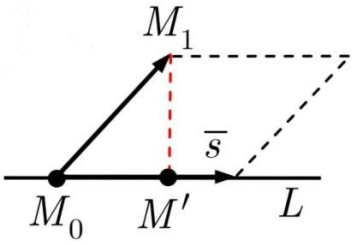
$$\sin\varphi = \frac{|2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{1}{7} \approx 0{,}1429.$$

Тоді $\varphi \approx 8°13'$.

## Відстань від точки до прямої у просторі

*Відстань* $d$ *від точки* $M_1$ *до прямої* $L$:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$




дорівнює довжині перпендикуляра $M_1M'$ опущеного з цієї точки на пряму. З іншого боку, ця відстань дорівнює висоті паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ та $\vec{s} = \{l; m; n\}$, відкладеного від точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$.

Тоді,

$$\boxed{d(M_1, L) = \frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}\right|}{\left|\vec{s}\right|}}.$$

Цю задачу можна розв'язати і лише засобами аналітичної геометрії.

Відстань $d$ від точки $M_1$ до прямої $L$ дорівнює відстані між точкою $M_1$ та її проекцією $M'$ на пряму:

$$d = \left|M_1M'\right|.$$

Щоб знайти точку $M'$, достатньо через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ провести площину $P$, перпендикулярну до прямої $L$:

$$P: l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0,$$

і потім знайти точку її перетину з прямою $L$:

$$M'\colon \begin{cases} L\colon \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}, \\ P\colon l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L\colon \begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \quad t\in\mathbb{R}, \\ z=z_0+nt, \end{cases} \\ P\colon l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0. \end{cases}$$

***Приклад 27.*** Знайти відстань між паралельними прямими

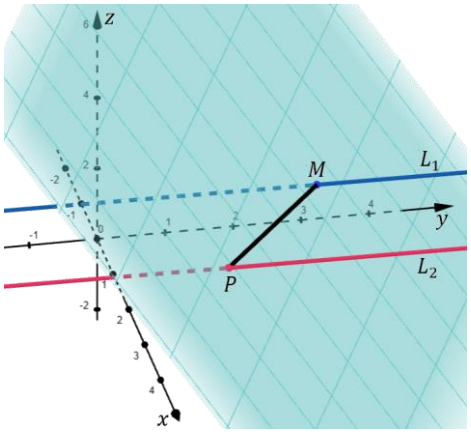
$$L_1\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{1} \text{ та } L_2\colon \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}.$$

Випишемо з рівняння прямої $L_1$ напрямний вектор $\vec{s}=\{1;2;1\}$ та точку $M(1;3;2)$, що лежить на цій прямій. Проведемо площину перпендикулярно до прямої $L_1$, що проходить через точку $M$:

$$(x-1)+2(y-3)+(z-2)=0 \;\Rightarrow\; x+2y+z-9=0.$$

Ця площина перпендикулярна і до прямої $L_2$.

Знайдемо точку $P$ перетину прямої $L_2$ та площини




$$\begin{cases} x+2y+z-9=0, \\ \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z-9=0, \\ \begin{cases} x=3+t, \\ y=2t-1, \\ z=2+t \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3+t)+2(2t-1)+(2+t)-9=0$$

$$\Rightarrow 6t-6=0 \;\Rightarrow\; t=1 \Rightarrow P(4;1;3).$$

Відстань між заданими паралельними прямими дорівнює довжині відрізка $PM$:

$$d(L_1,L_2)=|PM|=\sqrt{(4-1)^2+(1-3)^2+(3-2)^2}=\sqrt{14} \text{ од.}$$

***Приклад 28.*** Довести, що пряма $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{1}$ паралельна до площини $2x+3y+6z+11=0$ та знайти відстань між ними.

Для перевірки паралельності прямої та площини знайдемо скалярний добуток напрямного вектора $\vec{s}=\{3;-4;1\}$ та нормального вектора $\vec{n}=\{2;3;6\}$:

$$\vec{s}\cdot\vec{n}=3\cdot 2+(-4)\cdot 3+1\cdot 6=0,$$

а отже пряма паралельна до площини.

Для обчислення відстані від прямої до площини достатньо вибрати будь-яку точку прямої, наприклад $(-1; 2; 1)$, та знайти відстань від неї до заданої площини, застосувавши формулу (3.23)

$$d = \frac{|2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 11|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{21}{\sqrt{49}} = 3 \text{ од.}$$

***Приклад 29.*** Знайти рівняння перпендикуляра до площини

$$x + 3y - 4z - 13 = 0,$$

що проходить через точку $M(2; -1; 3)$, знайти проекцію цієї точки на площину та довжину перпендикуляра.

Для відшукання рівняння перпендикуляру достатньо скласти рівняння прямої через точку $M$ з напрямним вектором, що співпадає з нормальним вектором площини $\vec{s} = \vec{n} = \{1; 3; -4\}$:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-4}.$$

Проекція точки на площину співпадає з точкою перетину отриманого перпендикуляру та заданої площини

$$\begin{cases} x + 3y - 4z - 13 = 0, \\ \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 4z - 13 = 0, \\ \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 3t - 1, \\ z = 3 - 4t \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2 + t) + 3(3t - 1) - 4(3 - 4t) - 13 = 0$$

$$\Rightarrow 26t - 26 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow P(3; 2; -1).$$

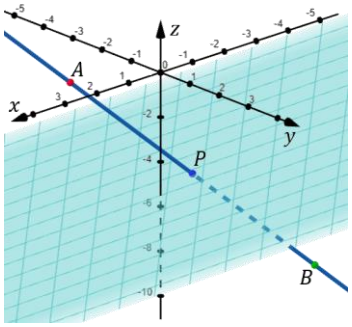
Тоді довжина перпендикуляра

$$d = |PM| = \sqrt{(3-2)^2 + (2-(-1))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{26} \text{ од.}$$

***Приклад 30.*** Знайти координати точки $B$ симетричної до точки $A(1; -2; -1)$ відносно площини $x - y + 2z + 11 = 0$.

Точки $A$ та $B$ лежать на перпендикулярі до цієї площини, а точка $P$ перетину перпендикуляра та площини буде серединою відрізка $AB$.

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точку $A$ перпендикулярно до заданої площини.




$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{2}.$$

Тоді координати точки $P$ знайдемо із системи:

$$\begin{cases} x-y+2z+11=0, \\ \begin{cases} x=1+t, \\ y=-2-t, \\ z=-1+2t \end{cases} \end{cases} \Rightarrow (1+t)-(-2-t)+2(-1+2t)+11=0$$

$$\Rightarrow 6t+12=0 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow P(-1;0;-5).$$

Оскільки $P$ середина відрізка $AB$, то її координати задовольняють рівняння:

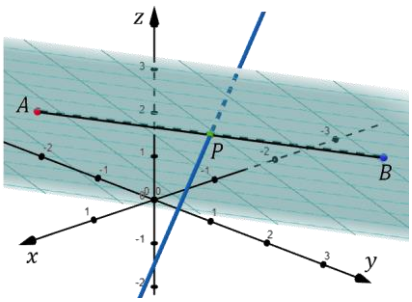
$$x_P=\frac{x_A+x_B}{2},\quad y_P=\frac{y_A+y_B}{2},\quad z_P=\frac{z_A+z_B}{2}.$$

Тоді

$$\begin{array}{l} x_B=2x_P-x_A=-2-1=-3, \\ y_B=2y_P-y_A=0+2=2, \\ z_B=2z_P-z_A=-10+1=-9 \end{array} \Rightarrow \quad B(-3;2;-9).$$

***Приклад 31.*** Знайти координати точки $B$ симетричної точці $A(1;-1;2)$ відносно прямої $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-2}$.

Знайдемо рівняння площини, що проходить через точку $A$ перпендикулярно до заданої прямої, тобто до напрямного вектора прямої $\vec{s}=\{2;1;-2\}$:




$$2(x-1)+(y+1)-2(z-2)=0$$

$$2x+y-2z+3=0.$$

Точка $P$ перетину прямої та площини буде основою перпендикуляра опущеного з точки $A$ на задану пряму.

$$\begin{cases} 2x+y-2z+3=0, \\ \begin{cases} x=2+2t, \\ y=2+t, \\ z=-2t \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 2(2+2t)+(2+t)-2(-2t)+3=0=0$$

$$\Rightarrow 9t+9=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow P(0;1;2).$$

Оскільки $P$ середина відрізка $AB$, то координати точки $B$, симетричної точці $A$ відносно прямої, будуть

$$\begin{array}{l} x_B = 2x_P - x_A = -1, \\ y_B = 2y_P - y_A = 3, \\ z_B = 2z_P - z_A = 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad B(-1;3;2).$$

# Індивідуальні завдання для самостійної роботи

**Завдання 1. Знайти $A \cdot B + 2B - 3E$, виконати можливий варіант множення матриць $C$ і $D$:**

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = (3 \quad 1 \quad -2).$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$
5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -8 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$
6. $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, C = (1 \quad 2 \quad 3), D = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -8 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$
7. $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$
8. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$
9. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 8 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$
10. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -1 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, D = (4 \quad -1 \quad 2).$
11. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -8 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$
12. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 9 & 8 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

13. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & 7\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & 8 & 0\\ -3 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 4\\ -3 & 2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 3 & -1 & 6\end{pmatrix}.$

14. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 4 & 5 & 8\\ -3 & 0 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 5\\ -3 & 0 & 2\\ 0 & 4 & -4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-9 & 3 & 8\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 9\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$

15. $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & -1\\ 2 & 7 & 1\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & 7 & -5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -7 & 2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}9 & 2 & -4\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$

16. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 8\\ -3 & 4 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 0\\ 1 & -3 & 1\\ -2 & 0 & -3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}6 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 3\\ 1 & -4 & -2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-5\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$

17. $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ -3 & 0 & -5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ -1 & 3 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 6 & -2 & 9\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -6 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$

18. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -3\\ 1 & 0 & 2\\ -7 & 0 & -3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 0\\ 1 & -2 & 3\\ 9 & 0 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 8 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}3 & -4 & 6\end{pmatrix}.$

19. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 5 & 0\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}6 & 1 & 3\\ -4 & 2 & 7\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}0 & -7\\ -5 & 9\end{pmatrix}.$

20. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & 0 & 5\\ 0 & 7 & 8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & 3 & 1\\ -1 & -4 & -2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}9 & -7 & 8\\ -5 & 4 & -6\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$

21. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -4\\ 0 & 1 & 5\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 0\\ 2 & 5 & 7\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -4\\ 1 & 6\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}.$

22. $A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 5\\ -3 & 0 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 0 & -7 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 3 & 0\\ 1 & -5\end{pmatrix}.$

23. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & 4\\ -2 & 1 & 8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 3 & -4 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}9 & 1\\ 8 & -6\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}5 & 6 & 2\\ -2 & 0 & 7\end{pmatrix}.$

24. $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\ 5 & -3 & 4\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & -7 & 5\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}3\\ 9\\ 7\end{pmatrix}.$

25. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 0 & 4 & 0\\ -3 & 5 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 2\\ 0 & -5 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}9 & -2 & -5\\ 1 & 8 & 6\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 7 & 5\\ 0 & -3\end{pmatrix}.$

26. $A=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 1\\ 0 & -2 & 5\\ 4 & 0 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & -4 & 0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-9 & 4\\ 5 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\end{pmatrix}.$

27. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 5\\ 7 & -4 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 5\\ -3 & 7 & 8\\ 0 & 4 & -2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 8 & -5\\ -3 & 2 & 6\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 8\\ -4 & 3\end{pmatrix}.$

28. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 2\\ 7 & 4 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ 4 & -2 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 9\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 4\\ 7 & -6 & 0\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix}.$

29. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ -1 & -2 & 3\\ 0 & 7 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}, C=(1 \quad 7 \quad -9), D=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}.$

30. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 3\\ 7 & 4 & -2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 4 & -8 & 1\end{pmatrix}.$

**Завдання 2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:**

**а) за допомогою формул Крамера;**

**б) матричним методом;**

**в) методом Гаусса.**

1. $\begin{cases}2x-y+5z=12,\\ -3x+2y+4z=-8,\\ x-3y+2z=13.\end{cases}$

2. $\begin{cases}2x-6y+3z=-6,\\ 3x+y-2z=14,\\ -x+5z+2z=-2.\end{cases}$

3. $\begin{cases}3x-y-2z=11,\\ 5x-2y+4z=3,\\ 2x+y-3z=14.\end{cases}$

4. $\begin{cases}-3x+2y+z=-7,\\ 2x+5y-z=12,\\ 4x-y+3z=-2.\end{cases}$

5. $\begin{cases}3x-2y+z=-2,\\ 2x+y-3z=13,\\ x-2y-z=-2.\end{cases}$

6. $\begin{cases}2x+3y-z=-8,\\ x-2y+4z=20,\\ 3x+y-2z=-3.\end{cases}$

7. $\begin{cases}2x-5y-z=9,\\ 3x+2y+3z=13,\\ -x+y-z=-6.\end{cases}$

8. $\begin{cases}x+2y-z=-3,\\ 2x-3y+2z=-1,\\ 3x+5y+z=2.\end{cases}$

9. $\begin{cases}2x-y+3z=-1,\\ x+3y-2z=10,\\ -3x+y-5z=-6.\end{cases}$

10. $\begin{cases}2x-3y+z=11,\\ x+4y-2z=-13,\\ 3x-3y+z=0.\end{cases}$

11. $\begin{cases}3x-2y+z=8,\\ 2x+5y-4z=-12,\\ x+y+3z=2.\end{cases}$

12. $\begin{cases}2x-3y+3z=16,\\ x+4y-z=-5,\\ -x+y-5z=-18.\end{cases}$

13. $\begin{cases}x+4y-z=8,\\ 2x-3y+5z=-13,\\ 3x-2y+4z=-11.\end{cases}$

14. $\begin{cases}2x+4y-5z=24,\\ x-2y+3z=-11,\\ 4x-y-2z=5.\end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x+y+z=0, \\ 3x-4y+2z=-8, \\ x+2y-3z=19. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 4x-y+2z=-9, \\ -3x+2y-3z=5, \\ 5x+7y+z=-6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x-4y+z=-8, \\ 2x+y-8z=23, \\ 5x-3y-2z=5. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x-3y+z=-18, \\ 3x+4y-3z=11, \\ -x+3y+2z=19. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x-3y+4z=4, \\ x+2y-5z=-12, \\ 3x-y+2z=-5. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x-4y+5z=0, \\ -2x+y-3z=-3, \\ 4x-3y+3z=1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x-5y-3z=0, \\ -x+4y-z=-9, \\ 3x-y+5z=22. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x-3y+4z=-8, \\ x+5y-2z=17, \\ 3x-2y+3z=-1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x-4y+2z=-4, \\ x+2y-3z=13, \\ -2x+3y+4z=-13. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x-y+3z=6, \\ 5x+2y-4z=-24, \\ -2x+3y-2z=9. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 4x-y+2z=13, \\ 3x+5y-z=-15, \\ x-2y-3z=-2. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x-3y+z=10, \\ 4x+y-2z=-4, \\ x-3y+4z=19. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x-2y+z=-3, \\ 3x-5y+z=-4, \\ -2x+3y-2z=3. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 3x-4y+2z=-8, \\ 2x+y-3z=-11, \\ x-2y+5z=9. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x-3y+z=0, \\ 5x+2y+3z=9, \\ -x+4y-z=3. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x-y-z=8, \\ 5x+3y+4z=8, \\ -x+2y-3z=-2. \end{cases}$

**Завдання 3. Дослідити на сумісність і знайти, у разі сумісності, розв'язок системи:**

1. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1-x_2-3x_4=2, \\ 2x_1-x_3-x_4=-3, \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-6, \\ x_1+x_2-x_3+4x_4=-5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x_1-5x_2-2x_3-4x_4=8, \\ -8x_1+2x_2+x_3+2x_4=-3, \\ 2x_1-x_2-x_3-2x_4=1, \\ -x_1+x_3+2x_4=1, \\ x_2+x_3+2x_4=3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4=1, \\ 4x_1-6x_2+2x_3+3x_4=2, \\ 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4=1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5, \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2-x_3=2, \\ 5x_1+x_2-x_3=7, \\ 7x_1+x_2-x_3=10. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 8, \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 5, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_4 = -1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 = -1, \\ 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -4. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 4x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 = 1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 5, \\ 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 4. \end{cases}$

**Завдання 4. Нехай задано три точки $A, B, C$ в двовимірному просторі.**

**а) Знайти площу трикутника $ABC$;**

**б) Знайти довжину сторони $AB$;**

**в) Знайти загальне рівняння прямої $AB$;**

**г) Знайти нормальне рівняння прямої $AC$;**

**д) Знайти рівняння у відрізках на осях прямої $BC$;**

**е) Знайти рівняння з кутовим коефіцієнтом висоти $BH$ трикутника $ABC$;**

**є) Знайти координати точки $H$. Знайти довжину висоти $BH$;**

**ж) Знайти точку симетричну точці $B$ відносно прямої $AC$;**

**з) Знайти канонічне рівняння медіани $BM$ трикутника $ABC$;**

**и) Знайти кут між медіаною $BM$ та висотою $BH$ трикутника $ABC$;**

**і) Знайти параметричне рівняння прямої, що проходить через точку $B$ паралельно стороні $AC$.**

**До задачі виконати креслення.**

1. $A(-1,2),\ B(2,-5),\ C(3,1)$;
2. $A(-2,-1),\ B(1,4),\ C(-2,5)$;
3. $A(1,1),\ B(-5,-1),\ C(2,-5)$;
4. $A(3,1),\ B(-2,3),\ C(4,4)$;
5. $A(-2,1),\ B(-1,-3),\ C(4,1)$;
6. $A(1,-2),\ B(-3,2),\ C(4,3)$;
7. $A(-2,2),\ B(4,1),\ C(3,-2)$;
8. $A(2,-1),\ B(-1,-2),\ C(1,3)$;
9. $A(-2,-3),\ B(-1,1),\ C(-4,3)$;
10. $A(3,-1),\ B(1,-3),\ C(2,3)$;
11. $A(4,2),\ B(-4,3),\ C(-2,-2)$;
12. $A(-3,-2),\ B(1,1),\ C(4,-1)$;

13. $A(1,2),\ B(2,-2),\ C(-3,-1)$;
14. $A(-4,-1),\ B(2,-3),\ C(3,3)$;
15. $A(2,3),\ B(-4,1),\ C(-2,2)$;
16. $A(4,-3),\ B(-3,-2),\ C(2,1)$;
17. $A(-1,3),\ B(-3,-3),\ C(3,2)$;
18. $A(4,-2),\ B(-1,3),\ C(-4,-3)$;
19. $A(-1,-2),\ B(-2,5),\ C(-3,1)$;
20. $A(-2,1),\ B(1,-4),\ C(2,5)$;
21. $A(1,-1),\ B(5,-1),\ C(-2,-5)$;
22. $A(3,-1),\ B(-2,-3),\ C(-4,4)$;
23. $A(2,1),\ B(-1,3),\ C(4,-1)$;
24. $A(1,2),\ B(-3,-2),\ C(-4,3)$;
25. $A(-2,-2),\ B(4,-1),\ C(3,2)$;
26. $A(2,1),\ B(1,-2),\ C(-1,-3)$;
27. $A(2,-3),\ B(-1,1),\ C(-4,-3)$;
28. $A(3,1),\ B(-1,-3),\ C(2,-3)$;
29. $A(-4,2),\ B(4,-3),\ C(-2,2)$;
30. $A(-3,2),\ B(1,-1),\ C(-4,-1)$.

**Завдання 5. Нехай задано чотири точки $A$, $B$, $C$, $D$ в тривимірному просторі.**

**а) Довести, що точки $A$, $B$, $C$, $D$ не лежать в одній площині і утворюють тетраедр. Знайти об'єм тетраедра;**

**б) Знайти площу трикутника $ABC$. Знайти $\sin\angle ABC$ та $\cos\angle ACB$;**

**в) Знайти рівняння площини $ABC$;**

**г) Знайти рівняння площини, що проходить через точку $D$ паралельно площині $ABC$;**

**д) Знайти канонічне рівняння і довжину висоти $DH$ тетраедра;**

**е) Знайти точку симетричну точці $D$ відносно площини $ABC$;**

**є) Знайти кут між гранями $ABC$ та $ABD$;**

**ж) Знайти кут, що утворює грань $ABD$ і висота $DH$;**

**з) Знайти параметричне рівняння медіани $DM$ грані $ABD$;**

**и) Знайти рівняння прямої $L$, що проходить через точку $D$ паралельно ребру $AC$;**

**і) Знайти кут між прямими $DM$ та $L$;**

**ї) Знайти канонічне рівняння і довжину висоти $DK$ грані $ABD$;**

**й) Знайти точку симетричну точці $D$ відносно прямої $AB$.**

**До задачі виконати схематичні креслення.**

1. $A(5;2;0),\ B(2;5;0),\ C(1;2;4),\ D(-3;-6;-8)$;
2. $A(2;-1;-2),\ B(1;2;1),\ C(5;0;-6),\ D(14;-3;7)$;

3. $A(-2;0;-4)$, $B(-1;7;1)$, $C(4;-8;-4)$, $D(-6;5;5)$;

4. $A(14;4;5)$, $B(-5;-3;2)$, $C(-2;-6;-2)$, $D(-1;-8;7)$;

5. $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$, $D(-13;-8;16)$;

6. $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;2;1)$, $D(-5;3;7)$;

7. $A(1;1;2)$, $B(-1;1;3)$, $C(2;-2;4)$, $D(2;3;8)$;

8. $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$;

9. $A(1;1;-1)$, $B(2;3;1)$, $C(3;2;1)$, $D(-3;-7;6)$;

10. $A(1;5;-7)$, $B(-3;6;3)$, $C(-2;7;3)$, $D(1;-1;2)$;

11. $A(-3;4;-7)$, $B(1;5;-4)$, $C(-5;-2;0)$, $D(-12;7;-1)$;

12. $A(3;10;-1)$, $B(-2;3;-5)$, $C(-6;0;-3)$, $D(-6;7;-10)$;

13. $A(1;-1;2)$, $B(2;1;2)$, $C(1;1;4)$, $D(-3;2;7)$;

14. $A(-1;2;-3)$, $B(4;-1;0)$, $C(2;1;-2)$, $D(1;-6;-5)$;

15. $A(-1;2;4)$, $B(-1;-2;-4)$, $C(3;0;-1)$, $D(-2;3;5)$;

16. $A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$, $C(-1;0;1)$, $D(5;-4;5)$;

17. $A(-3;-1;1)$, $B(-9;1;-2)$, $C(3;-5;4)$, $D(-7;0;-1)$;

18. $A(0;-3;1)$, $B(-4;1;2)$, $C(2;-1;5)$, $D(-3;4;-5)$.

19. $A(-4;2;6)$, $B(2;-3;0)$, $C(-10;5;8)$, $D(-12;1;8)$;

20. $A(1;-1;1)$, $B(-2;0;3)$, $C(2;1;-1)$, $D(-2;4;2)$;

21. $A(1;3;0)$, $B(4;-1;2)$, $C(3;0;1)$, $D(4;3;0)$;

22. $A(7;2;4)$, $B(7;-1;-2)$, $C(-5;-2;-1)$, $D(10;1;8)$;

23. $A(1;2;0)$, $B(1;-1;2)$, $C(0;1;-1)$, $D(2;-1;4)$;

24. $A(-2;-1;-1)$, $B(0;3;2)$, $C(3;1;-4)$, $D(-21;20;-16)$;

25. $A(2;1;4)$, $B(3;5;-2)$, $C(-7;-3;2)$, $D(-3;1;8)$;

26. $A(1;0;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(2;-2;1)$, $D(-5;-9;1)$;

27. $A(-1;-5;2)$, $B(-6;0;-3)$, $C(3;6;-3)$, $D(10;-8;-7)$;

28. $A(1;2;-3)$, $B(1;0;1)$, $C(-2;-1;6)$, $D(3;-2;-9)$;

29. $A(2;-4;-3)$, $B(5;-6;0)$, $C(-1;3;-3)$, $D(2;-10;8)$;

30. $A(0;-1;-1)$, $B(-2;3;5)$, $C(1;-5;-9)$, $D(-4;-13;6)$.

# Список використаної літератури

**1.** Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних. Прикладні задачі: навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – Київ : Книги України ЛТД, 2014. – 578 с. – ISBN 978-966-2331-03-5.

**2.** Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закладів / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – 4-те вид. – К. : Ігнатекс–Україна, 2013. – 648 с. – 500 пр. – ISBN 978- 966-97049-3-1.

**3.** Вища математика. Частина 1. Збірник задач [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 131(G9) Прикладна механіка / уклад.: Г. В. Журавська, Т. О. Карпалюк, І. М. Копась, Н. В. Рева, Т. А. Самойленко, Н. В. Степаненко. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 182 с.

Режим доступу: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/72820

**4.** Дудкін М. Є. Вища математика: підручник для здобувачів ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями / М. Є. Дудкін, О. Ю. Дюженкова, І. В. Степахно. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 449 с.

Режим доступу: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/51064

**5.** Єрьоміна Т. О. Вища математика: Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: Навчальний посібник / Т. О. Єрьоміна, О. А. Поварова. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 114 с.

Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/41267/1/NP_VM.pdf

**6.** Зайцев Є. П. Вища математика: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу: навч. посіб. / Є. П. Зайцев. – 2-ге видання, стереотипне. – К.: Алерта, 2017. – 574 с.

**7.** Кушлик-Дивульська О. І. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу: навч. посіб. Уклад.: О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 141 с.