МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”

Л. І. Кублій

КОМП’ЮТЕРНА ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА
(ЧАСТИНА 1):
РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за
освітньою програмою “Інженерія програмного забезпечення розподілених
систем” спеціальності 121 “Інженерія програмного забезпечення”*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Рецензент: *Баранюк О.В.,* к. т. н., доц. каф. АЕС і ІТФ

Відповідальний
редактор *Варава І.А.,* к. т. н., доц. каф. АПЕПС

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 27.02.2020 р.)
за поданням Вченої ради Теплоенергетичного факультету (протокол № 8 від 24.02.2020 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Кублій Лариса Іванівна, канд. техн. наук, доц.

КОМП'ЮТЕРНА ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА
(ЧАСТИНА 1): РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

Комп'ютерна дискретна математика (Частина 1): Розрахункова робота [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою "Інженерія програмного забезпечення розподілених систем" спеціальності 121 "Інженерія програмного забезпечення" / Л. І. Кублій; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 10,041 Мбайт). — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. — 165 с.

Кредитний модуль "Комп'ютерна дискретна математика-1" ("Теорія множин і відношень", "Нечіткі множини і відношення", "Елементи теорії чисел. Системи числення", "Основи комбінаторики. Потужність множини", "Алгебри") студенти вивчають на першому курсі і він є необхідним практичним і теоретичним фундаментом для фахівців з інформаційних технологій. Посібник містить конспективний теоретичний матеріал, приклади розв'язування типових задач, питання для самоконтролю, завдання до розрахункової роботи за варіантами, список літератури.

Посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою "Інженерія програмного забезпечення розподілених систем" спеціальності 121 "Інженерія програмного забезпечення", а також для тих, хто вивчає дискретну математику самостійно.

© Л. І. Кублій, 2020
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

Зміст

Вступ 4

Тема 1. Теорія множин і відношень 5

1.1. Операції над множинами. Доведення тотожностей з множинами . . 5

1.2. Розв'язування рівнянь і систем рівнянь з множинами 13

1.3. Відношення 17

1.4. Відношення еквівалентності й порядку 23

Питання для самоконтролю 28

Тема 2. Нечіткі множини і відношення 30

2.1. Нечіткі множин 30

2.2. Нечіткі відношення 39

Питання для самоконтролю 48

Тема 3. Елементи теорії чисел. Системи числення 50

3.1. Лишки і порівняння 50

3.2. Ланцюгові дроби 66

3.3. Системи числення 72

Питання для самоконтролю 79

Тема 4. Основи комбінаторики. Потужність множини 81

4.1. Основи комбінаторики 81

4.2. Потужність множини 88

Питання для самоконтролю 92

Тема 5. Алгебри 93

5.1. Алгебри і алгебричні структури 93

Питання для самоконтролю 102

Варіанти завдань до розрахункової роботи з модуля "Комп'ютерна дискретна математика-1" 103

Список літератури 164

Вступ

Розрахункова робота з кредитного модуля “Комп’ютерна дискретна математика-1” виконується студентами самостійно на основі знань, отриманих під час лекцій, практичних занять і самостійної роботи і сприяє поглибленому засвоєнню і узагальненню теоретичного матеріалу і закріпленню практичних навичок.

У кредитному модулі “Комп’ютерна дискретна математика-1” студенти вивчають теми: “Теорія множин і відношень”, “Нечіткі множини і відношення”, “Елементи теорії чисел. Системи числення”, “Основи комбінаторики. Потужність множини”, “Алгебри”.

Розрахункова робота містить 12 завдань за темами кредитного модуля. Завдання передбачають знання і розуміння теоретичного матеріалу і вміння його застосовувати при розв’язуванні задач.

У посібнику конспективно подано теоретичний матеріал (більш повний виклад відповідного матеріалу студенти одержують на лекціях), приклади розв’язування типових задач за темами, питання для самоконтролю, список використаної літератури. У посібнику наведено 30 різних варіантів завдань до розрахункової роботи.

Посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра денної форми навчання за освітньою програмою “Інженерія програмного забезпечення розподілених систем” спеціальності 121 “Інженерія програмного забезпечення”,. Його також можна використати при підготовці до практичних занять, заліків, екзаменів студентам усіх форм навчання, які вивчають подібний матеріал, а також для самостійного вивчення дискретної математики.

Тема 1. Теорія множин і відношень

1.1. Операції над множинами. Доведення тотожностей з множинами

Об'єднанням (сумою) множин A і B є множина $A \cup B$, яка містить усі ті елементи множини Ω, які належать хоч би одній із множин A і B (тобто або A, або B, або одночасно A і B):

$$A \cup B = \{a \in \Omega : a \in A \vee a \in B\}.$$

Перетином (добутком) множин A і B є множина $A \cap B$, яка містить усі ті елементи множини Ω, які одночасно належать множинам A і B:

$$A \cap B = \{a \in \Omega : a \in A \wedge a \in B\}.$$

Різницею множин A і B є множина $A \setminus B$, яка містить усі елементи множини A, які не належать множині B:

$$A \setminus B = \{a \in \Omega : a \in A \wedge a \notin B\}.$$

Симетричною різницею множин A і B є множина $A \Delta B$, яка містить усі елементи множин A і B без спільних для A і B елементів:

$$A \Delta B = \{a \in \Omega : (a \in A \wedge a \notin B) \vee (a \in B \wedge a \notin A)\}.$$

Із поданого означення видно, що $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Доповненням множини A є множина всіх елементів універсальної множини Ω, які не належать множині A:

$$\overline{A} = \{a \in \Omega : a \notin A\}.$$

Із означення видно, що $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Нехай A, B і C будь-які множини із Ω. Справедливі такі *основні властивості операцій над множинами*.

1. Закон тотожності (ідемпотентності):

$A \cup A = A, \quad A \cap A = A,$

але $A \setminus A = \varnothing, \quad A \Delta A = \varnothing$.

2. Закон комутативності (переміщуваності):

$A \cup B = B \cup A$, $\quad A \cap B = B \cap A$, $\quad A \Delta B = B \Delta A$,

але $A \setminus B \neq B \setminus A$ (оскільки $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, $B \setminus A = \overline{A} \cap B$).

3. Закон асоціативності (сполучуваності):

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \stackrel{def}{=} A \cup B \cup C$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \stackrel{def}{=} A \cap B \cap C$,

$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$,

але $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$

(оскільки $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$,

$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$).

4. Закон дистрибутивності (розподільності):

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,

$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap (B \setminus C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$,

але $(A \cup B) \Delta C \neq (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$,

$(A \cap B) \Delta C \neq (A \Delta C) \cap (B \Delta C)$,

$A \cup (B \Delta C) \neq (A \cup B) \Delta (A \cup C)$,

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

5. Закони нуля й одиниці:

$A \cup \emptyset = A$, $\quad A \cap \emptyset = \emptyset$,

$A \setminus \varnothing = A$, $\quad A \Delta \varnothing = A$,

$A \cup \Omega = \Omega$, $\quad A \cap \Omega = A$,

$A \setminus \Omega = \varnothing$, $\quad A \Delta \Omega = \overline{A}$.

6. Властивості доповнення:

$\overline{(\overline{A})} = A$ (закон інволютивності, подвійного заперечення),

$\overline{\Omega} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = \Omega$, $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$, $A \setminus \overline{A} = A$, $A \Delta \overline{A} = \Omega$.

7. Закони де Моргана (принцип двоїстості, подвійності):

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

8. Закони поглинання:

$(A \cup B) \cap A = A$, $(A \cap B) \cup A = A$,

$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$, $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

9. Якщо $A \subseteq B$, то

$A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A \cup (\overline{A} \cap B) = B$.

10. Властивості різниць:

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$,

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Для формального доведення теоретико-множинних тотожностей існує

Наведені вище властивості називають *теоретико-множинними тотожностями*. Зрозуміти їхню суть можна за допомогою діаграм Венна.

Для формального доведення теоретико-множинних тотожностей існує кілька способів: метод двох включень, метод тотожних перетворень, метод характеристичних функцій, метод, у якому використовується розбиття універсальної множини, метод, який базується на принципі двоїстоті.

Метод двох включень є універсальним і найчастіше вживаним при доведенні теоретико-множинних тотожностей. Метод базується на твердженні: якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то $A = B$.

Суть методу двох включень полягає в тому, що треба взяти довільний елемент лівої частини рівності й довести, що він також належить правій частині і навпаки.

Доведення складних теоретико-множинних тотожностей методом двох включень часто буває досить громіздким і при побудові доведень хід міркувань не завжди наперед очевидний.

При застосуванні *методу тотожних перетворень* раніше доведені тотожності використовують для перетворення лівої частини до правої або навпаки. Ту саму тотожність можна довести різними шляхами. Тут треба добре знати властивості теоретико-множинних операцій і побачити, яку з них можна застосувати: вибір певних властивостей може спростити шлях перетворень, а вибір інших — може зробити його досить складним. Найчастіше при перетвореннях застосовують закони дистрибутивності у прямому й зворотному напрямках, закони де Моргана, закони поглинання.

Застосування *методу характеристичних функцій* на відміну від двох попередніх методів не потребує пошуку шляху доведення. У ньому застосовують лише звичайні алгебричні перетворення. За визначенням характеристичною функцією множини A є функція, яка кожному елементу $\omega \in \Omega$ ставить у відповідність 1 або 0 за правилом:

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \omega \in A, \\ 0, & \text{якщо } \omega \notin A. \end{cases}$$

З її визначення видно, що:

$$\chi_A^2(\omega) = \chi_A(\omega);$$

крім того:

$$\chi_\Omega(\omega) = 1,$$

$$\chi_\varnothing(\omega) = 0.$$

Для теоретико-множинних операцій справедливі такі формули:

$$\chi_{A \cap B}(\omega) = \chi_A(\omega) \cdot \chi_B(\omega);$$

$$\chi_{A \cup B}(\omega) = \chi_A(\omega) + \chi_B(\omega) - \chi_A(\omega) \cdot \chi_B(\omega);$$

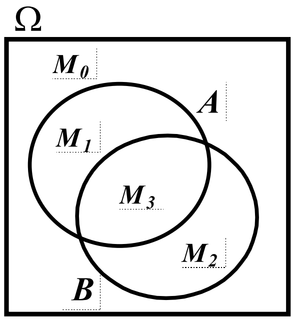
$$\chi_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \chi_A(\omega);$$

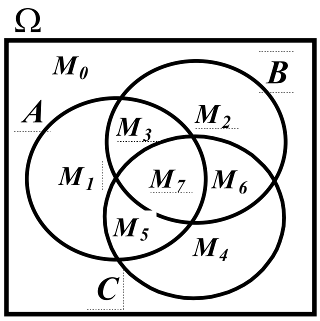
$$\chi_{A \setminus B}(\omega) = \chi_A(\omega) - \chi_A(\omega) \cdot \chi_B(\omega);$$

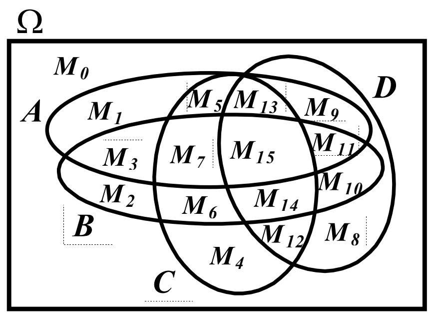
$$\chi_{A \Delta B}(\omega) = \chi_A(\omega) + \chi_B(\omega) - 2\chi_A(\omega) \cdot \chi_B(\omega).$$

При доведенні теоретико-множинних тотожностей методом характеристичних функцій треба характеристичні функції обох частин тотожності виразити через характеристичні функції множин, які входять в обидва вирази. Тотожність справедлива тоді і тільки тоді, коли характеристичні функції лівої й правої частин рівні.

Метод, в якому *використовується розбиття універсальної множини на підмножини* (ще кажуть: метод розбиття універсуму), також є досить простим і базується на поданні сукупності множин із універсальної множини Ω максимально можливою кількістю неперетинних підмножин. Розглянемо такі розбиття для двох, трьох і чотирьох множин із Ω, подавши їх за допомогою діаграм Венна:







При цьому, якщо розглядати *n* множин із Ω, то в розбитті буде 2^n підмножин M_0, M_1, M_2, … M_{n-1}, серед яких одна не має перетинів з жодною із даних множин, одна є перетином усіх множин, *n* належать лише одній множині і C_n^m належать перетинові *m* ($m = \overline{2, n-1}$) множин.

Відповідно до методу треба початкові множини, які є у співвідношенні, подати через об'єднання елементів розбиття. Якщо задано певні умови, то треба визначити, які із підмножин розбиття відповідно до цих умов є порожніми, і після цього уточнити вирази для початкових множин. Уточнені вирази початкових множин підставити у співвідношення і спростити його. Якщо одержане в кінці співвідношення є правильним завжди, то початкове співвідношення правильне; якщо одержане співвідношення не правильне або виконується не завжди, то початкове співвідношення не правильне.

Недоліком цього методу є те, що із збільшенням кількості множин він стає досить громіздким, оскільки швидко зростає кількість підмножин розбиття. Так, при $n = 5$ в розбитті буде $2^5 = 32$ підмножини, а при $n = 6$ — $2^6 = 64$. Тому цей метод не може бути універсальним.

Для будь-якої (скінченної чи нескінченної) кількості множин A_i (при $i \in I$), B_j (при $j \in J$) і множини C, можна записати такі найважливіші *узагальнені закони* дистрибутивності:

$$C \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (C \cap A_i), \quad C \cup \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (C \cup A_i),$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i \cap \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{(i,j): i \in I, j \in J} (A_i \cap B_j), \quad \bigcap_{i \in I} A_i \cup \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{(i,j): i \in I, j \in J} (A_i \cup B_j),$$

$$C \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (C \setminus A_i), \quad C \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (C \setminus A_i),$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i \setminus C = \bigcup_{i \in I} (A_i \setminus C), \quad \bigcap_{i \in I} A_i \setminus C = \bigcap_{i \in I} (A_i \setminus C);$$

узагальнені закони де Моргана мають вигляд:

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup \overline{A_i}.$$

Декартовим добутком множин A і B є множина $A \times B$ усіх можливих впорядкованих пар елементів (a,b), у яких $a \in A$, $b \in B$:

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

Декартовим добутком n множин A_1, A_2, …, A_n є множина $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n} A_i$ скінченних впорядкованих послідовностей $(a_1, a_2, ..., a_n)$, де $a_i \in A_i$ ($i = \overline{1,n}$):

$$\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i, i = \overline{1,n}\}.$$

Розглядають також декартів степінь множини: $A^2 = A \times A$, $A^n = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n \text{ разів}}$

Результат декартового добутку числових множин A і B — точки (a,b) можна зобразити у прямокутній декартовій системі координат. При цьому елементи множини A (першого множника) є координатами по осі Ox, а елементи множини B (другого множника) — координатами по осі Oy.

Нехай A, B, C і D будь-які множини з однієї чи з різних універсальних множин. Справедливі такі *основні властивості* декартового добутку множин.

1. $A\times A=A^2$ — другий декартів степінь множини *A*.

2. Закон комутативності (переміщуваності) не виконується:

$A\times B\neq B\times A$.

3. Закон асоціативності (сполучності)[1]:

$$(A\times B)\times C=A\times(B\times C)\overset{def}{=}A\times B\times C$$

4. Закон дистрибутивності (розподільності):

$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$,

$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$,

$(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$,

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$,

$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$.

$\overline{A\times B}=(\overline{A}\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times B)\cup(A\times\overline{B})$

5. $(A\times B)\cup(C\times D)\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D)$,

$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$.

6. $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$.

Для формального доведення тотожностей з декартовим добутком використовують метод двох включень, метод тотожних перетворень. При доведені тотожностей для декартового добутку характеристичні функції не застосовують.

Приклад 1. Застосовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A\setminus B)\setminus C\neq A\setminus(B\setminus C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність: $(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)\times(A\cap B)$.

Розв'язання. а) Застосуємо метод характеристичних функцій (для спрощення викладок аргумент ω характеристичних функцій записувати не бу-

[1] Щодо цієї властивості в літературі існують розбіжності. Ряд авторів вважає, що операція декартового добутку не асоціативна: $(A\times B)\times C=\{((a,b),c)\}$, $A\times(B\times C)=\{(a,(b,c))\}$, $A\times B\times C=\{(a,b,c)\}$

демо). Знайдемо характеристичну функцію лівої частини співвідношення $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$:

$$\chi_{(A\setminus B)\setminus C} = \chi_{A\setminus B} - \chi_{A\setminus B}\chi_C = \chi_{A\setminus B}(1-\chi_C) = (\chi_A - \chi_A\chi_B)(1-\chi_C) =$$

$$= \chi_A - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C$$

і характеристичну функцію правої частини:

$$\chi_{A\setminus(B\setminus C)} = \chi_A - \chi_A\chi_{B\setminus C} = \chi_A - \chi_A(\chi_B - \chi_B\chi_C) =$$

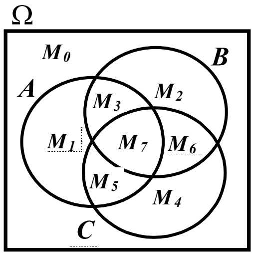
$$= \chi_A - \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C.$$

Оскільки характеристичні функції множин не рівні

$$\chi_A - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C \neq \chi_A - \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C,$$

то не рівні й самі множини.

б) Застосуємо метод розбиття множини на неперетинні підмножини. У даному співвідношенні $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$ є три множини *A*, *B*, *C*. Подамо їх через підмножини розбиття:



$$A = M_1 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_7,$$

$$B = M_2 \cup M_3 \cup M_6 \cup M_7,$$

$$C = M_4 \cup M_5 \cup M_6 \cup M_7.$$

Одержані вирази підставимо в ліву частину співвідношення:

$$(A \setminus B) \setminus C =$$

$$= ((M_1 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_7) \setminus (M_2 \cup M_3 \cup M_6 \cup M_7)) \setminus$$

$$\setminus (M_4 \cup M_5 \cup M_6 \cup M_7) = (M_1 \cup M_5) \setminus$$

$$\setminus (M_4 \cup M_5 \cup M_6 \cup M_7) = M_1$$

і в праву:

$$A \setminus (B \setminus C) =$$

$$= (M_1 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_7) \setminus ((M_2 \cup M_3 \cup M_6 \cup M_7) \setminus$$

$$\backslash(M_4 \cup M_5 \cup M_6 \cup M_7)) =$$

$$= (M_1 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_7) \backslash (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_5 \cup M_7 .$$

Одержали:

$$M_1 \neq M_1 \cup M_5 \cup M_7 ,$$

що підтверджує початкове співвідношення. Крім того, видно, що:

$$(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C).$$

б) Розглянемо співвідношення $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$. Нехай

$$(a,b) \in (A \times B) \cap (B \times A) \overset{def \cap}{\Leftrightarrow} (a,b) \in (A \times B) \wedge (a,b) \in (B \times A) \overset{def \times}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (a \in A) \wedge (b \in B) \wedge (a \in B) \wedge (b \in A) \Leftrightarrow (a \in A) \wedge (a \in B) \wedge (b \in B) \wedge (b \in A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \big((a \in A) \wedge (a \in B)\big) \wedge \big((b \in A) \wedge (b \in B)\big) \overset{def \cap}{\Leftrightarrow} (a \in A \cap B) \wedge (b \in A \cap B) \overset{def \times}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (a,b) \in (A \cap B) \times (A \cap B) .$$

Тотожність доведено.

Використана література: [4, с. 29-40, 102-106], [5, с. 9-26], [10, с. 21-38], [17, с. 23-29, 34-37], [20, с. 5-23].

1.2. Розв’язування рівнянь і систем рівнянь з множинами

Щоб *розв’язати рівняння* з множинами, треба визначити умови, за яких воно має розв’язок, і знайти сам розв’язок. При розв’язуванні рівнянь і систем рівнянь можна застосувати метод тотожних перетворень і розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини. Для нескладних рівнянь чи систем можна застосувати діаграми Венна.

При застосуванні тотожних перетворень враховують те, що дві множини рівні тоді і тільки тоді, коли їхня симетрична різниця порожня, і що будь-яке рівняння, права частина якого є порожньою множиною, використовуючи подання його за допомогою операцій об’єднання, перетину і доповнення і тотожні перетворення, можна перетворити в рівняння виду:

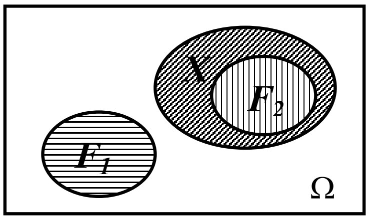
$$(F_1 \cap X) \cup (F_2 \cap \overline{X}) = \varnothing ,$$

де F_1 і F_2 — формули, які не містять *X*.

Об'єднання буде порожнім тоді і тільки тоді, коли об'єднувані множини теж порожні. Тому наведене рівняння можна подати системою рівнянь:

$$\begin{cases} F_1 \cap X = \varnothing, \\ F_2 \cap \overline{X} = \varnothing. \end{cases}$$

Щоб зрозуміти суть цієї системи, зобразимо множини F_1 і F_2 і множину X за допомогою діаграм Венна:



Ця система, а отже, й початкове рівняння мають розв'язок тоді і тільки тоді, коли $F_2 \subseteq \overline{F_1}$. Розв'язком системи є будь-яка множина X така, що $F_2 \subseteq X \subseteq \overline{F_1}$. Тому треба знайти F_1 і F_2, що й дасть розв'язок початкового рівняння.

При розв'язуванні систем рівнянь застосовують аналогічний підхід. Спочатку треба замінити кожне рівняння системи рівнянням, у правій частині якого стоїть порожня множина $\varnothing$. Одержану систему, використовуючи операцію об'єднання, замінити одним рівнянням, а потім провести тотожні перетворення.

Метод неперетинних підмножин можна дещо формалізувати, використовуючи таблицю.

Приклад 2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення і **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблично), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок рівняння з множинами $X \cup A = B$.

Розв'язання. а) Розв'яжемо рівняння $X \cup A = B$, використовуючи тотожні перетворення. Подамо це рівняння в еквівалентному вигляді (враховуємо, що $A = B$ тоді і тільки тоді, коли $A \Delta B = \varnothing$):

$$(X \cup A) \Delta B = \varnothing .$$

(при розв’язуванні систем рівнянь спочатку треба замінити кожне рівняння системи рівнянням, у правій частині якого стоїть порожня множина $\varnothing$, а потім взяти їхнє об’єднання).

Скориставшись тотожністю (в якій використовуються операції об’єднання, перетину й доповнення) для симетричної різниці $A\Delta B=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$ (пункт 10 властивостей) й іншими тотожностями, перетворимо одержане рівняння до вигляду $(F_1\cap X)\cup(F_2\cap\overline{X})=\varnothing$:

$$(X\cup A)\Delta B\overset{(10)}{=}((X\cup A)\cap\overline{B})\cup(\overline{(X\cup A)}\cap B)\overset{(7)}{=}$$

$$=((X\cup A)\cap\overline{B})\cup((\overline{X}\cap\overline{A})\cap B)\overset{(4)}{=}$$

$$=((X\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{B}))\cup((\overline{X}\cap\overline{A})\cap B)\overset{(3)}{=}$$

$=(X\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{X}\cap\overline{A}\cap B)\overset{(5)}{=}$ |друга дужка $A\cap\overline{B}$ одержаного виразу не містить X чи $\overline{X}$. Їх можна ввести, використовуючи перетин з універсальною множиною, поданою у вигляді $X\cup\overline{X}$ | =

$$=(X\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{B}\cap(X\cup\overline{X}))\cup(\overline{X}\cap\overline{A}\cap B)\overset{(4)}{=}$$

$=(X\cap\overline{B})\cup((A\cap\overline{B}\cap X)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{X}))\cup(\overline{X}\cap\overline{A}\cap B)\overset{(2,3,8)}{=}$ |до перших двох дужок застосуємо закон поглинання $A\cup(A\cap B)=A$ | =

$$=(X\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{X})\cup(\overline{X}\cap\overline{A}\cap B)\overset{(4)}{=}$$

$$=(X\cap\overline{B})\cup(\overline{X}\cap((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)))\overset{(10)}{=}$$

$$=(X\cap\overline{B})\cup(\overline{X}\cap(A\Delta B))=\varnothing.$$

Рівняння приведено до вигляду $(F_1\cap X)\cup(F_2\cap\overline{X})=\varnothing$. Отже:

$$F_1=\overline{B},$$

$$F_2=A\Delta B.$$

Розв’язок системи існує за умови $F_2\subseteq\overline{F_1}$, тобто $A\Delta B\subseteq B$ (або $A\subseteq B$). Отже, умова існування розв’язку:

$$A\subseteq B.$$

Розв'язком системи є будь-яка множина X така, що:

$$A \Delta B \subseteq X \subseteq B,$$

Але, враховуючи, що $A \subseteq B$, одержимо розв'язок:

$$B \setminus A \subseteq X \subseteq B.$$

б) Знайдемо розв'язок рівняння $X \cup A = B$ за допомогою методу розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (множин є 3, тому неперетинних підмножин буде $2^3 = 8$), скориставшись його табличною реалізацією (неперетинні підмножини позначатимемо числами від 0 до 7):

підмножина	A	B	X
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

У таблиці значення 1 вказує, що відповідна підмножина входить у множину, а 0 — не входить. Тоді:

$$A = \{4, 5, 6, 7\},$$

$$B = \{2, 3, 6, 7\},$$

$$X = \{1, 3, 5, 7\}.$$

1) З умови $X \cup A = B$, маємо: $X \cup A = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{2, 3, 6, 7\} = B$. Отже, підмножини з номерами 1, 2, 4, 5 — порожні. Тоді перепишемо вміст множин:

$$A = \{6, 7\},$$

$$B = \{3, 6, 7\},$$

$$X = \{3, 7\}.$$

(при розв'язуванні систем рівнянь у наступному пункті 2 треба врахувати умови другого рівняння і визначити, які ще підмножини є порожніми, і переписати вміст множин; такі дії також треба виконати для кожного наступного рівняння системи).

Звідси видно, що умовою існування розв’язку є:

$$A \subseteq B.$$

Щодо множини X маємо $X \subseteq B$, $B \setminus A \subseteq X$, тобто одержали розв’язок:

$$B \setminus A \subseteq X \subseteq B.$$

Використана література: [20, с. 23-29].

1.3. Відношення

Нехай A — непорожня множина і A^n — її *n-ний* декартів степінь.

n-арним відношенням (ще кажуть: *n-місним* відношенням, відношенням з *n* аргументами) *на множині A* називають будь-яку підмножину Q множини A^n (при цьому не виключається, що $Q = A^n$ чи $Q = \varnothing$):

$$Q = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A \ \forall i = \overline{1,n}\} \subseteq A^n.$$

Елементи a_i називають компонентами (ще кажуть: координатами) відношення Q.

Одномісне (ще кажуть: унарне) відношення на A є підмножиною множини A і його називають *властивістю* на A.

Двомісне відношення називають *бінарним відношенням на множині A*.

Будь-яке *n*-арне відношення можна зобразити у вигляді ланцюжка бінарних відношень, які послідовно конструюються.

При *заданні бінарного відношення* можна описати його в загальному вигляді за допомогою характеристичного предиката. Якщо множини A скінченна, то можна вказати його елементи у вигляді *списку* впорядкованих пар; подати *графом*, зобразивши елементи множини точками — *вершинами графа*, і пари точок, які належать відношенню, з’єднати орієнтованими лініями — *дугами графа*, у графі можуть бути петлі (вершина з’єднана дугою сама з собою); подати *графіком* в декартовій системі координат (якщо множина A не числова, то на осях можна відмітити в будь-якому порядку через довільні відстані елементи цієї множини); скористатися *характеристичною матрицею*, структура якої відповідає другому декартовому степеню множини A, а елементи рівні 1, якщо відповідна пара належить відношенню, або 0, якщо відповідна пара не належить відношенню.

Перерізом відношення $Q \subseteq A^2$ *за множиною* $C \subseteq A$ називається множина елементів множини *C*, поставлених у відповідність елементам множини *C*:

$$Q(C) = \{b \in C : (a,b) \in Q, a \in C\}.$$

Нехай $Q \subseteq A^2$ і $P \subseteq A^2$ деякі відношення. *Суперпозицією* цих відношень називають відношення $PQ \subseteq A^2$, яке визначається так:

$$PQ = P(Q) = \{(a,c) : (\exists b)((a,b) \in Q \wedge (b,c) \in P\}.$$

Степінь відношення *Q* визначають так:

$$Q^1 = Q,\ \ Q^2 = QQ = Q(Q),\ \ Q^3 = Q\left(Q^2\right),\ \ldots,\ Q^n = Q(Q^{n-1}),\ \ldots$$

Операції над відношеннями можна подати через відповідні характеристичні матриці. Для операцій об’єднання і перетину:

$$M_{Q \cup P} = M_Q \vee M_P, \quad M_{Q \cap P} = M_Q \wedge M_P,$$

де операції диз’юнкції і кон’юнкції застосовують до відповідних елементів матриць і визначаються так:

$$0 \vee 0 = 0, \quad 0 \vee 1 = 1, \quad 1 \vee 0 = 1, \quad 1 \vee 1 = 1;$$

$$0 \wedge 0 = 0, \quad 0 \wedge 1 = 0, \quad 1 \wedge 0 = 0, \quad 1 \wedge 1 = 1.$$

Для операції доповнення

$$M_{\overline{Q}} = \overline{M_Q}$$

доповнення застосовують до кожного елемента матриці й визначають так:

$$\overline{0} = 1,\ \overline{1} = 0.$$

Для суперпозиції відношень і степеня відношення:

$$M_{QP} = M_P \otimes M_Q,$$

$$M_{Q^n} = (M_Q)^n = \underbrace{M_Q \otimes M_Q \otimes \ldots \otimes M_Q}_{n \text{ разів}}$$

тут операція $\otimes$ позначає *булів добуток матриць*: множення матриць виконують, як звичайне, але одержані елементи, відмінні від 0, замінюють на 1, а елементи 0 так і залишають.

Оберненим до Q називають відношення Q^{-1}, яке є множиною всіх впорядкованих пар (b,a) таких, що $(a,b)\in Q$:

$$Q^{-1}=\{(b,a):(a,b)\in Q\}.$$

Матриця оберненого відношення буде транспонованою: $M_{Q^{-1}}=(M_Q)^T$. Для побудови графа відношення Q^{-1} треба в графі відношення Q змінити напрямок дуг на протилежний.

Для будь-яких бінарних відношень Q і P, заданих на множині A, справедливі такі *властивості*:

1. $(Q^{-1})^{-1}=Q$.

2. $(PQ)^{-1}=Q^{-1}P^{-1}$.

3. Якщо $P\subseteq Q$, то $P^{-1}\subseteq Q^{-1}$.

4. $(P\cap Q)^{-1}=P^{-1}\cap Q^{-1}$.

Бінарне відношення Q на множині A називають *функціональним*, якщо

з того, що $(a,b)\in Q$ і $(a,c)\in Q$, випливає, що $b=c$.

У впорядкованих парах елементів, які задають функціональне відношення, перший елемент не повторюється. З кожної вершини графа виходить не більше одного ребра, включаючи й петлі.

Відношення Q на множині A називають *відношенням тотожності* (ще кажуть: діагоналлю множини A), якщо воно збігається з множиною всіх можливих пар (a,a) при $a\in A$:

$$E_A=\{(a,a):\forall\, a\in A\}.$$

Матрицею цього відношення є одинична матриця E. Граф містить лише вершини з петлями.

Відношення Q на множині A називають *рефлексивним*, якщо

$$(a,a)\in Q \text{ для всіх } a\in A.$$

Умова рефлексивності відношення: $E_A\subseteq Q$. Всі елементи головної діагоналі матриці — одиниці. Граф містить петлі всіх вершин.

Відношення Q на множині A називають *іррефлексивним* (ще кажуть: антирефлексивним), якщо

$$(a,a) \notin Q \text{ для всіх } a \in A.$$

Умова іррефлексивності відношення: $Q \cap E_A = \varnothing$ або $E_A \subseteq \overline{Q}$. Всі елементи головної діагоналі матриці — нулі. Граф не містить жодної петлі.

Відношення Q на множині A називають *симетричним*, якщо

$$\text{з } (a,b) \in Q \Rightarrow (b,a) \in Q.$$

Умова симетричності відношення: $Q = Q^{-1}$. Матриця симетрична (тобто $q_{ij} = q_{ji}$ — початкова і транспонована матриці рівні). Вершини графа пов'язані лише парами протилежно напрямлених дуг.

Відношення Q на множині A називають *кососиметричним* (ще кажуть: антисиметричним), якщо

$$\text{з } (a,b) \in Q \text{ і } (b,a) \in Q \Rightarrow a = b$$

або:

$$\text{з } (a,b) \in Q \text{ і } a \neq b \Rightarrow (b,a) \notin Q).$$

Умова кососиметричності відношення: $Q \cap Q^{-1} \subseteq E_A$. Матриця кососиметрична (тобто, якщо $q_{ij} = 1$ і $i \neq j$, то $q_{ji} = 0$, але може бути $q_{ij} = 0$ і $q_{ji} = 0$). У графі можуть бути петлі, але зв'язок між різними вершинами графа, якщо він є, то лише однонаправлений.

Відношення Q на множині A називають *асиметричним* (ще кажуть: несиметричним), якщо

з двох співвідношень з $(a,b) \in Q$ і $(b,a) \in Q$

хоч би одне не виконується;

іншими словами це можна сказати так: відношення асиметричне, якщо

для всіх a і b із A з того, що $(a,b) \in Q$,

випливає, що $(b,a) \notin Q$.

Якщо відношення асиметричне, то воно також іррефлексивне. Матриця кососиметрична з нульовими елементами на головній діагоналі. Граф петель не має, а дві вершини можуть бути зв'язані тільки однією напрямленою дугою.

Відношення Q на множині A називають *транзитивним*, якщо

$$з\ (a,b)\in Q \text{ і } (b,c)\in Q \Rightarrow (a,c)\in Q.$$

Умова транзитивності відношення: $Q^2 \subseteq Q$.

Відношення Q на множині A називають *антитранзитивним*, якщо

$$з\ (a,b)\in Q \text{ і } (b,c)\in Q \Rightarrow (a,c)\notin Q.$$

Якщо на одній множині відношення має певні властивості, то на іншій множині воно може їх не мати.

Якщо якесь відношення Q не має певної властивості, то можна до нього додати елементи, яких бракує, і одержати відношення Q^*, яке буде мати цю властивість. Якщо множина Q^* буде мінімальною серед усіх розширень з даною властивістю, то Q^* називають *замиканням відношення* Q відносно даної властивості.

Замикання відношення Q можна побудувати відносно рефлексивності:

$$Q_r^* = Q \cup E_A;$$

відносно симетричності:

$$Q_s^* = Q \cup Q^{-1};$$

відносно транзитивності:

$$Q_t^* = Q \cup Q^2 \cup \ldots \cup Q^n \cup \ldots.$$

Характеристичну матрицю транзитивного замикання можна знайти так:

$$M_{Q_t} = M_Q \vee (M_Q)^2 \vee (M_Q)^3 \vee \ldots \vee (M_Q)^n.$$

Існує ефективніший алгоритм знаходження матриці транзитивного замикання — *алгоритм Уоршалла*:

К1. $W := M_Q$; $k := 0$.

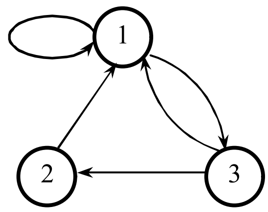
К2. У матриці W вибираємо рядок з номером $k := k+1$; цей рядок буде ключовим.

К3. Для кожного із решти рядків (з номерами i, відмінними від k) матриці W таких, що елемент стовпчика k — $w_{ik} = 1$, знаходимо поелементну диз'юнкцію з ключовим рядком k.

К4. Якщо $k = n$, то одержано матрицю транзитивного замикання $M_{Q_t} = W$; інакше переходимо на К2.

Приклад 3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,1),(1,3),(2,1),(3,1),(3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. **б)** Знайдіть відношення Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

Розв'язання. Граф відношення має вигляд:



Відношення $Q = \{(1,1),(1,3),(2,1),(3,1),(3,2)\}$ не функціональне, оскільки є пари $(1,1)$ і $(1,3)$, у яких перший елемент повторюється (тобто одному значенню $a = 1$ відповідає два значення $b = 1$ і $b = 3$).

Відношення не є відношенням тотожності, оскільки не збігається з множиною всіх діагональних пар (a,a), тобто множиною пар $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$.

Відношення не рефлексивне, оскільки не містить всіх діагональних пар — немає пар $(2,2)$ і $(3,3)$.

Відношення не симетричне, оскільки є пара $(2,1)$, але немає пари $(1,2)$.

Відношення не транзитивне, оскільки є пари $(1,3)$ і $(3,2)$, але немає $(1,2)$.

б) Знайдемо відношення Q^{-1}, $\overline{Q}$:

$$Q^{-1} = \{(1,1),(3,1),(1,2),(1,3),(2,3)\};$$

$$\overline{Q} = A^2 \setminus Q = \{(1,2),(2,2),(2,3),(3,3)\}.$$

Квадрат відношення Q^2 легко знайти за допомогою характеристичної матриці відношення:

$$M_{Q^2} = M_Q \cdot M_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тобто $Q^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3)\}$.

Знайдемо замикання відношення $Q = \{(1,1),(1,3),(2,1),(3,1),(3,2)\}$ відносно рефлексивності, симетричності і за алгоритмом Уоршалла відносно транзитивності.

Замикання відносно рефлексивності повинне містити всі пари виду (a,a). Тому:

$$Q_r^* = Q \cup \{(2,2),(3,3)\}.$$

Замикання відносно симетричності повинне містити всі пари, симетричні даним:

$$Q_s^* = Q \cup \{(1,2),(2,3)\}.$$

Для знаходження замикання відносно транзитивності застосуємо алгоритм Уоршалла:

$$M_Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \downarrow & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} \\ 1 & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & \mathbf{1} \\ \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M_{Q_t^*},$$

тобто $Q_t^* = A^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

Використана література: [3, с. 86-98], [4, с. 40-69], [5, с. 30-47], [10, с. 63-71], [17, с. 48-54], [20, с. 60-67].

1.4. Відношення еквівалентності й порядку

Рефлексивне, симетричне і транзитивне на множині A бінарне відношення Q називають *відношенням еквівалентності*.

Розбиттям множини А на класи є сукупність непорожніх підмножин A_i (при $i \in I$) множини A таких, що $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, і які попарно не перетинаються, тобто для довільних $i, j \in I$ при $i \neq j$ виконується $A_i \cap A_j = \varnothing$. Підмножини A_i називають *класами еквівалентності* (ще кажуть: блоками розбиття) множини A.

Множину $[a]$ називають *класом еквівалентності, який визначається елементом a*, якщо це множина таких $b \in A$, для яких $(a,b) \in Q$:

$$[a] = \{b \in A : (a,b) \in Q\}.$$

Рефлексивне, кососиметричне і транзитивне на множині *A* бінарне відношення *Q* називають *відношенням нестрогого порядку*.

Іррефлексивне, кососиметричне (відношення одночасно іррефлексивне й кососиметричне є асиметричним) й транзитивне на множині *A* бінарне відношення *Q* називають *відношенням строгого порядку*.

Бінарні відношення нестрогого і строгого порядку називають *відношеннями порядку*.

Якщо відношення *Q* є відношенням порядку на множині *A*, то при $a \neq b$ і $(a,b) \in Q$ елемент *a* називають *попереднім елементом* (ще кажуть: попередником), а *b* — *наступним*.

Якщо елемент *a* є попередником елемента *b* і не існує елемента *c*, для якого $(a,c) \in Q$ і $(c,b) \in Q$, то елемент *a* називають *безпосереднім попередником елемента b*; це позначають $a \prec b$.

Безпосередніх попередників можна умовно зобразити за допомогою графа — *діаграми Хассе*. Вершинами такого графа є елементи впорядкованої множини *A* і, якщо $a \prec b$, то вершина *a* розміщується нижче, ніж вершина *b* і ці вершини з’єднуються ребром (при цьому завжди вважається, що ребро направлене знизу вгору, тобто є дугою, але стрілку не зображають).

Лінійним (ще кажуть: повним) *порядком на множині A* називають відношення порядку, при якому з будь-якої пари елементів множини *A* можна виділити попередній і наступний. При цьому множину *A* називають *лінійно впорядкованою* (ще кажуть: ланцюгом). При лінійному порядку непорівнянних пар елементів не існує і діаграма Хассе має лінійний вигляд.

Якщо відношення порядку не має властивості лінійності, то його називають *відношенням часткового порядку*. Множину *A* називають *частково впорядкованою*, якщо на ній визначено відношення часткового порядку. Це означає, що в множині є *непорівнювані елементи*.

У скінченній частково чи лінійно впорядкованій множині відносно заданого на ній відношення Q можна виділити *мінімальний елемент*, який не має попередніх елементів, і *максимальний елемент*, який не має наступних елементів.

Елемент $b \in A$ називають *найменшим елементом* множини A відносно відношення Q, якщо b є попереднім для будь-якого елемента $a \in A$.

Елемент $b \in A$ називають *найбільшим елементом* множини A відносно відношення Q, якщо b є наступним для будь-якого елемента $a \in A$.

Приклад 4. Дослідіть, чи є відношення: **а)** $Q = \{(a,b) : (a^2 - b^2) - \text{парне число}\}$, задане на множині цілих чисел Z, відношенням еквівалентності і, якщо так, то побудуйте розбиття множини N на класи еквівалентності; **б)** $Q = \{(\vec{a},\vec{b}) : \vec{a} \leq \vec{b}\}$, задане на множині векторів $A = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$, відношенням нестрогого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим; **в)** лексикографічного порядку $Q = \{(a,b) : a < b\}$, задане на множині трибуквених слів $W = \{000, 011, 111, 100\}$ в алфавіті $S = \{0,1\}$, відношенням строгого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини W відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

Розв'язання. а) Щоб відношення було відношенням еквівалентності, треба, щоб воно було рефлексивним, симетричним і транзитивним:

1) $(a^2 - a^2) = 0$ — парне число при будь-якому $a \in Z$; отже, відношення рефлексивне;

2) якщо $(a^2 - b^2)$ — парне число, то і $(b^2 - a^2) = -(a^2 - b^2)$ — теж парне тільки з протилежним знаком; отже, відношення симетричне;

3) якщо $(a^2 - b^2)$ — парне число (тут a^2 і b^2 — однієї парності) і $(b^2 - c^2)$ — парне число (тут b^2 і c^2 — однієї парності), тоді a^2 і c^2 теж однієї парності, отже, $(a^2 - c^2)$ — парне число; отже, відношення транзитивне.

Таким чином, дане відношення є відношенням еквівалентності.

Побудуємо розбиття множини Z на класи еквівалентності за даним відношенням:

$$[0] = \{b : (0^2 - b^2) - \text{парне число}\} = \{b : (-b^2) - \text{парне число}\} =$$

$$= \{b : b - \text{парне число}\} = \{... - 4; - 2; 0; 2; 4; ...\}.$$

Знайдена множина [0], яка визначається елементом 0, не покриває всю множину Z. Тому будуємо множину:

$$[1] = \{b : (1^2 - b^2) - \text{парне число}\} = \{b : (1 - b^2) - \text{парне число}\} =$$

$$= \{b : b - \text{непарне число}\} = \{... - 3; - 1; 1; 3; 5; ...\}.$$

Оскільки $[0] \cup [1] = Z$, то розбиття множини Z на класи еквівалентності за даним відношенням $Q = \{(a, b) : (a^2 - b^2) - \text{парне число}\}$ побудовано:

$$[0] = \{... - 4; - 2; 0; 2; 4; ...\},$$

$$[1] = \{... - 3; - 1; 1; 3; 5; ...\}.$$

б) Для векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність $\vec{a} \le \vec{b}$, якщо $a_i \le b_i$, $i = \overline{1, n}$. Щоб відношення $Q = \{(\vec{a}, \vec{b}) : \vec{a} \le \vec{b}\}$ було відношенням нестрогого порядку, треба, щоб воно було рефлексивним, кососиметричним і транзитивним:

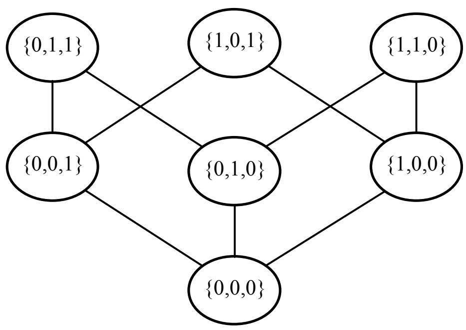
1) $\vec{a} \le \vec{a}$, отже, відношення рефлексивне;

2) якщо $\vec{a} \le \vec{b}$, то $\vec{b} \not\le \vec{a}$ при $\vec{a} \ne \vec{b}$, отже, відношення кососиметричне;

3) якщо $\vec{a} \le \vec{b}$ і $\vec{b} \le \vec{c}$, то $\vec{a} \le \vec{c}$, тому відношення транзитивне.

Отже, дане відношення є відношенням нестрогого порядку.

Для множини векторів $A = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1),\} (1,1,0)\}$ діаграма Хассе має вигляд:



Мінімальним елементом (який не має попередніх елементів) множини A відносно відношення Q є вектор $(0,0,0)$, максимальних елементів (які не мають наступних елементів) є 3 — це вектори $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ і $(1,1,0)$; найменшим елементом (який є попереднім для будь-якого елемента $a \in A$) є вектор $(0,0,0)$, найбільшого елемента (який є наступним для будь-якого елемента $a \in A$) множина не має. Порядок є частковим, оскільки в множині є непорівнювані вектори (наприклад, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ і $(1,0,0)$, а також $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ і $(1,1,0)$).

в) Якщо в скінченному алфавіті $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ зафіксовано строгий порядок символів $s_1 < s_2 < ... < s_n$, то при лексикографічному впорядкуванні m-буквених слів $a = a_1 a_2 ... a_m$ і $b = b_1 b_2 ... b_m$ нерівність $a < b$ виконується тоді і тільки тоді, коли $a_i = b_i$ для $i = \overline{1, k-1}$ і $a_k < b_k$ для певного $k = \overline{1, m}$.

Щоб на множині m-буквених слів при лексикографічному впорядкуванні слів відношення $Q = \{(a,b) : a < b\}$ було відношенням строгого порядку, треба, щоб воно було асиметричним і транзитивним:

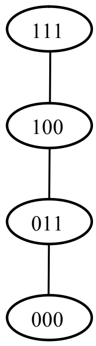
1) для будь-якого слова a із множини m-буквених слів $a \nless a$, отже, відношення іррефлексивне;

2) якщо для m-буквених слів $a = a_1 a_2 ... a_m$ і $b = b_1 b_2 ... b_m$ виконується нерівність $a < b$, то не може бути, що $b < a$, отже, відношення кососиметричне. Одночасно іррефлексивне і кососиметричне відношення є відношенням асиметричним;

3) якщо для m-буквених слів $a = a_1 a_2 ... a_m$, $b = b_1 b_2 ... b_m$ і $c = c_1 c_2 ... c_m$ виконуються нерівності $a < b$ і $b < c$, то буде виконуватися нерівність $a < c$, тому відношення транзитивне.

Отже, задане ідношення є відношенням строгого порядку.

При заданому відношенні лексикографічного порядку $Q = \{(a,b) : a < b\}$ для множини трибуквених слів $W = \{000, 011, 111, 100\}$ в алфавіті $S = \{0,1\}$ діаграма Хассе має вигляд:



Мінімальним елементом (який не має попередніх елементів) множини W відносно відношення Q є слово 000, максимальним елементом (який не має наступних елементів) є слово 111; найменшим елементом (який є попереднім для всіх решти слів множини W) є слово 000, найбільшим елементом (який є наступним для всіх решти слів множини W) є слово 111.

Порядок є повним (лінійним), оскільки непорівнюваних слів у множині W немає: $000 < 011 < 100 < 111$.

Використана література: [3, с. 98-111], [4, с. 70-84], [5, с. 47-54], [10, с. 71-80], [12, с. 19-23], [17, с. 64-69].

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення множини. Запишіть характеристичні предикати для операцій об’єднання, перетину, різниці, симетричної різниці, доповнення.

2. Вкажіть і схарактеризуйте методи формального доведення теоретико-множинних тотожностей. Які методи є універсальними?

3. Що таке декартів добуток множин? Які методи можна застосувати для доведення тотожностей з декартовим добутком?

4. Які методи можна застосувати при розв’язуванні рівнянь і систем рівнянь з множинами?

5. У чому полягає метод тотожних перетворень розв’язування рівнянь і систем рівнянь з множинами? Що є необхідною й достатньою умовою рівності двох множин? Як систему рівнянь подати одним рівнянням?

6. Як можна формалізувати використання методу розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини при розв’язуванні рівнянь і систем рівнянь з множинами?

7. Дайте означення бінарного відношення на множині. Як можна задати бінарне відношення? Що таке переріз відношення за множиною?

8. Які теоретико-множинні операції можна застосувати до відношень? Як операції над відношеннями подати через відповідні характеристичні матриці?

9. Що таке суперпозиція відношень? Як її подати за допомогою характеристичних матриць?

10. Яке відношення називають оберненим? Яке відношення є доповненням доданого відношення? Яке відношення називають функціональним? Яке відношення є тотожним?

11. Схарактеризуйте такі властивості відношень, як рефлексивність, іррефлексивність, симетричність, кососиметричність, асиметричність, транзитивність, антитранзитивність. Якими є їхні характеристичні матриці і графи?

12. Що таке замиканням відношення відносно даної властивості? Відносно яких властивостей можна будувати замикання? У чому полягає алгоритм Уоршалла?

13. Яке відношення називають відношенням еквівалентності?

14. Що таке розбиття множини на класи еквівалентності? Які підмножини називають класами еквівалентності? Як побудувати клас еквівалентності, який визначається певним елементом?

15. Яке відношення називають відношенням нестрогого порядку? Яке відношення називають відношенням строгого порядку?

16. Який елемент множини називають попереднім? Який елемент множини називають безпосереднім попередником? Який елемент множини називають наступним? Яку множину називають лінійно впорядкованою? Яку множину називають частково впорядкованою?

17. Що зображає діаграма Хассе? Як її будують? Який елемент множини називають мінімальним, а який максимальним? Скільки їх може бути? Який елемент множини називають найменшим, а який найбільшим? Скільки їх може бути?

Тема 2. Нечіткі множини і відношення

2.1. Нечіткі множини

В основі поняття нечіткої множини $\widetilde{A}$, заданої на універсальній множині Ω, лежить те, що елементи, які мають певну спільну властивість, можуть мати цю властивість з різною мірою (ще кажуть: ступенем, рівнем), а отже, належати множині теж з різною мірою.

Характеристична *функція належності* $\mu_{\widetilde{A}}(\omega)$ нечіткої множини $\widetilde{A}$ кожному елементу ω із універсальної множини Ω ставить у відповідність міру прояву властивості — число з відрізка $[0;1]$.

Графічно нечітку множину можна подати за допомогою *діаграми Заде* — графіка функції належності — ламаної лінії, яка в декартовій прямокутній системі координат послідовно сполучає точки $(\omega_i, \mu_{\widetilde{A}}(\omega_i))$:

Усі операції з нечіткими множинами і їхні властивості визначають, використовуючи характеристичні функції належності.

Дві нечіткі множини $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$ *рівні* $\widetilde{A} = \widetilde{B}$, якщо для будь-якого елемента $\omega \in \Omega$ виконується рівність $\mu_{\widetilde{A}}(\omega) = \mu_{\widetilde{B}}(\omega)$. Якщо хоч би для одного елемента $\mu_{\widetilde{A}}(\omega) \neq \mu_{\widetilde{B}}(\omega)$, то множини $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$ не рівні, тобто $\widetilde{A} \neq \widetilde{B}$.

Нечітка множина $\widetilde{A}$ є *підмножиною* нечіткої множини $\widetilde{B}$, якщо для будь-якого елемента $\omega \in \Omega$ виконується нерівність $\mu_{\widetilde{A}}(\omega) \leq \mu_{\widetilde{B}}(\omega)$; позначають це так: $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$. Якщо хоч би для одного елемента $\mu_{\widetilde{A}}(\omega) > \mu_{\widetilde{B}}(\omega)$, то множина $\widetilde{A}$ не є підмножиною множини $\widetilde{B}$; позначають це так: $\widetilde{A} \not\subseteq \widetilde{B}$.

Нечітка множина $\widetilde{\varnothing}$ є *порожньою*, якщо для будь-якого елемента $\omega \in \Omega$ виконується рівність $\mu_{\widetilde{\varnothing}}(\omega) = 0$.

Нечітка множина $\widetilde{\Omega}$ є *повною*, якщо для будь-якого елемента $\omega \in \Omega$ виконується рівність $\mu_{\widetilde{\Omega}}(\omega) = 1$.

Потужністю (кардинальним числом) нечіткої множини $\widetilde{A}$, заданої на універсальній множині $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, є величина:

$$\left|\widetilde{A}\right| = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\widetilde{A}}(\omega_i).$$

Носієм нечіткої множини $\widetilde{A}$ називають звичайну множину *A*, яка містить ті елементи $\omega \in \Omega$, для яких $\mu_{\widetilde{A}}(\omega) > 0$ (тобто $\mu_{\widetilde{A}}(\omega) \neq 0$).

Точками переходу нечіткої множини $\widetilde{A}$ є елементи $\omega \in \Omega$, для яких $\mu_{\widetilde{A}}(\omega) = 0{,}5$.

Висотою нечіткої дискретної множини $\widetilde{A}$ є величина $\max\limits_{\omega \in \Omega}(\mu_{\widetilde{A}}(\omega))$.

Функцію належності $\mu_{\widetilde{A}}(\omega)$ нечіткої множини $\widetilde{A}$ називають *унімодальною*, якщо вона набуває значення $\max\limits_{\omega \in \Omega}(\mu_{\widetilde{A}}(\omega))$ тільки в одній точці $\omega \in \Omega$. Нечітку множину $\widetilde{A}$ називають *унімодальною*, якщо її функція належності унімодальна.

Нечітку множину $\widetilde{A}$ називають *нормальною*, якщо її висота дорівнює 1, тобто існує елемент $\omega \in \Omega$ такий, що $\mu_{\widetilde{A}}(\omega) = 1$, і *субнормальною* в протилежному випадку.

Непорожню субнормальну множину можна *нормалізувати*, виконавши перетворення характеристичної функції належності для всіх $\omega \in \Omega$:

$$\mu'_{\widetilde{A}}(\omega) = \frac{\mu_{\widetilde{A}}(\omega)}{\max\limits_{\omega \in \Omega}(\mu_{\widetilde{A}}(\omega))}.$$

Ядром нечіткої множини $\widetilde{A}$ називають звичайну множину елементів $\omega \in \Omega$, для яких $\mu_{\widetilde{A}}(\omega) = 1$. Ядро субнормальної нечіткої множини порожнє.

Якщо число $\alpha > 0$ таке, що $\alpha \max\limits_{\omega \in \Omega}(\mu_{\widetilde{A}}(\omega)) \leq 1$, то *добутком нечіткої множини $\widetilde{A}$ на число α* є нечітка множина $\alpha\widetilde{A}$, функція належності якої $\mu_{\alpha\widetilde{A}}(\omega) = \alpha\mu_{\widetilde{A}}(\omega)$.

Множиною α*-рівня* (ще кажуть: α-розрізом) нечіткої множини $\widetilde{A}$ називають звичайну множину A_α елементів $\omega \in \Omega$, для яких $\mu_{\widetilde{A}}(\omega) \geq \alpha$. При цьому, якщо $\alpha_1 \leq \alpha_2$, то $A_{\alpha_2} \subseteq A_{\alpha_1}$

Розглянемо нечіткі теретико-множинні операції (їх ще називають логічними чи максимінними), визначені Лотфі Заде.

Об'єднанням нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$ на універсальній множині Ω є нечітка множина $\widetilde{C} = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ з функцією належності:

$$\mu_{\widetilde{C}}(\omega) = \mu_{\widetilde{A} \cup \widetilde{B}}(\omega) = \max(\mu_{\widetilde{A}}(\omega), \mu_{\widetilde{B}}(\omega)).$$

Нечітку множину $\widetilde{A}$ можна розкласти за її множинами α-рівня $\widetilde{A} = \bigcup\limits_{\alpha} \alpha A_\alpha$, де αA_α — добуток числа α на множину A_α.

Перетином нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$ на універсальній множині Ω є нечітка множина $\widetilde{C} = \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ з функцією належності:

$$\mu_{\widetilde{C}}(\omega) = \mu_{\widetilde{A} \cap \widetilde{B}}(\omega) = \min(\mu_{\widetilde{A}}(\omega), \mu_{\widetilde{B}}(\omega)).$$

Доповненням нечіткої множини $\widetilde{A}$ до універсальної множини Ω є нечітка множина $\overline{\widetilde{A}}$ з функцією належності:

$$\mu_{\overline{\widetilde{A}}}(\omega) = 1 - \mu_{\widetilde{A}}(\omega).$$

На відміну від звичайних чітких множин (для яких завжди виконуються рівності $A \cap \overline{A} = \varnothing$ і $A \cup \overline{A} = \Omega$), для нечітких множин $\widetilde{A} \cap \overline{\widetilde{A}} \neq \widetilde{\varnothing}$.

Різницею нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$ на універсальній множині Ω є нечітка множина $\widetilde{C} = \widetilde{A} \setminus \widetilde{B}$ з функцією належності:

$$\mu_{\widetilde{C}}(\omega) = \mu_{\widetilde{A} \setminus \widetilde{B}}(\omega) = \min(\mu_{\widetilde{A}}(\omega), 1 - \mu_{\widetilde{B}}(\omega)).$$

Для звичайних множин виконується рівність $A \setminus A = \varnothing$. Для нечітких множин $\widetilde{A} \cap \overline{\widetilde{A}} \neq \widetilde{\varnothing}$, тому й $\widetilde{A} \setminus \widetilde{A} = \widetilde{A} \cap \overline{\widetilde{A}} \neq \widetilde{\varnothing}$.

Симетричною різницею нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$ на універсальній множині Ω є нечітка множина $\widetilde{C} = \widetilde{A} \Delta \widetilde{B}$ з функцією належності:

$$\mu_{\widetilde{C}}(\omega) = \mu_{\widetilde{A} \Delta \widetilde{B}}(\omega) = \max(\min(\mu_{\widetilde{A}}(\omega), 1 - \mu_{\widetilde{B}}(\omega)), \min(1 - \mu_{\widetilde{A}}(\omega), \mu_{\widetilde{B}}(\omega))).$$

Для звичайних множин виконується рівність $A\Delta\overline{A} = \Omega$. Проте для нечітких множин $\tilde{A}\Delta\tilde{A} \neq \tilde{\varnothing}$, також $\tilde{A}\Delta\overline{\tilde{A}} \neq \tilde{\Omega}$.

Операції *концентрування* і *розтягування* відповідно визначають так:

$$CON(\tilde{A}) = \tilde{A}^{\alpha} \text{ з функцією належності } \mu_{\tilde{A}^{\alpha}}(\omega) = (\mu_{\tilde{A}}(\omega))^{\alpha},$$

$$DIL(\tilde{A}) = \tilde{A}^{1/\alpha} \text{ з функцією належності } \mu_{\tilde{A}^{1/\alpha}}(\omega) = (\mu_{\tilde{A}}(\omega))^{1/\alpha},$$

де $\alpha > 1$ — відповідно коефіцієнт концентрування чи розтягування (найчастіше беруть $\alpha = 2$).

Опуклою комбінацією нечітких множин $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$, …, $\tilde{A}_n$ на універсальній множині Ω є нечітка множина $\tilde{A}$, функція належності якої має такий вигляд:

$$\mu_{\tilde{A}}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{\tilde{A}_i}(\omega),$$

де $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Декартовим добутком $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \ldots \times \tilde{A}_n$ нечітких множин $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$, …, $\tilde{A}_n$ на універсальних множинах Ω_1, Ω_2, …, Ω_n називають нечітку множину $\tilde{A}$ на універсальній множині $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$, елементами якої є впорядковані набори $(x_1, x_2, ..., x_n)$ з функцією належності:

$$\mu_{\tilde{A}}(x_1, x_2, ..., x_n) = \min(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2), ..., \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)).$$

Декартів добуток $\tilde{A} \times \tilde{B}$ двох нечітких множин $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ визначають, як множину всіх можливих впорядкованих пар (a, b), де $a \in \tilde{A}$, $b \in \tilde{B}$, відповідно з мірами належності $\mu_{\tilde{A}\times\tilde{B}}(a, b) = \min(\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{B}}(b))$.

Нехай на універсальній множині Ω задано нечіткі множини $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ і $\tilde{C}$. Для операцій об'єднання, перетину і доповнення справедливі такі основні *властивості*:

1. Закони тотожності (ідемпотентності):

$\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}$, $\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}$.

2. Закони комутативності (переміщуваності):

$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$, $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$.

3. Закони асоціативності (сполучуваності):

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C}) \overset{def}{=} \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C},$$

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C}) \overset{def}{=} \tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C}.$$

4. Закони дистрибутивності (розподільності):

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap \tilde{C} = (\tilde{A} \cap \tilde{C}) \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}),$$

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup \tilde{C} = (\tilde{A} \cup \tilde{C}) \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}),$$

$$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C}),$$

$$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C}).$$

5. Закони нуля й одиниці:

$\tilde{A} \cup \tilde{\emptyset} = \tilde{A}$, $\tilde{A} \cap \tilde{\emptyset} = \tilde{\emptyset}$,

$\tilde{A} \cup \tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}$, $\tilde{A} \cap \tilde{\Omega} = \tilde{A}$.

6. Властивості доповнення:

$\overline{\tilde{\Omega}} = \tilde{\emptyset}$, $\overline{\tilde{\emptyset}} = \tilde{\Omega}$,

$\overline{\overline{\tilde{A}}} = \tilde{A}$ (закон інволютивності, подвійного заперечення),

але, на відміну від звичайних чітких множин:

$\tilde{A} \cap \overline{\tilde{A}} \neq \tilde{\emptyset}$, $\tilde{A} \cup \overline{\tilde{A}} \neq \tilde{\Omega}$, $\tilde{A} \Delta \overline{\tilde{A}} \neq \tilde{\Omega}$.

7. Закони де Моргана:

$\overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \cap \overline{\tilde{B}}$, $\overline{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \cup \overline{\tilde{B}}$.

8. Закони поглинання:

$(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap \tilde{A} = \tilde{A}$, $(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup \tilde{A} = \tilde{A}$,

але, на відміну від звичайних чітких множин:

$(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \overline{\tilde{B}}) \neq \tilde{A}$, $(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \overline{\tilde{B}}) \neq \tilde{A}$.

9. Якщо $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$, то

$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B}$, $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{A}$, але, на відміну від звичайних чітких множин при $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$:

$\widetilde{A} \cup (\overline{\widetilde{A}} \cap \widetilde{B}) \neq \widetilde{B}$.

10. Властивості порядку:

$\widetilde{A} \cap \widetilde{B} \subseteq \widetilde{A}$, $\quad \widetilde{A} \cap \widetilde{B} \subseteq \widetilde{B}$,

$\widetilde{A} \subseteq \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$, $\quad \widetilde{B} \subseteq \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$.

При доведенні поданих властивостей використовують означення операцій через функції належності.

Звичайною *множиною, найближчою до нечіткої множини* $\widetilde{A}$ з функцією належності $\mu_{\widetilde{A}}(\omega)$, є підмножина A універсальної множини Ω, характеристична функція якої має вигляд:

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \mu_{\widetilde{A}}(\omega) > 0{,}5, \\ 0, & \text{якщо } \mu_{\widetilde{A}}(\omega) < 0{,}5, \\ 1 \text{ чи } 0, & \text{якщо } \mu_{\widetilde{A}}(\omega) = 0{,}5. \end{cases}$$

Найчастіше *індекси нечіткості* множин обчислюють за формулами, побудованими на основі евклідової чи лінійної манхеттенської відстаней:

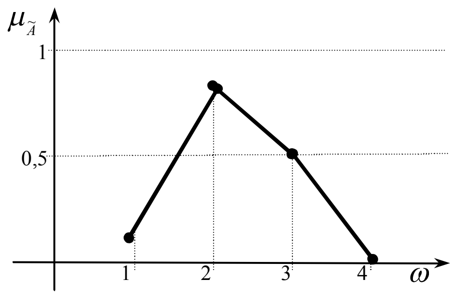
$$I^E_{\widetilde{A}} = \frac{2}{\sqrt{n}} d_E(\mu_{\widetilde{A}}, \chi_A) = \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\mu_{\widetilde{A}}(\omega_i) - \chi_A(\omega_i))^2} \quad (0 \le I^E_{\widetilde{A}} \le 1),$$

$$I^L_{\widetilde{A}} = \frac{2}{n} d_L(\mu_{\widetilde{A}}, \chi_A) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \mu_{\widetilde{A}}(\omega_i) - \chi_A(\omega_i) \right| \quad (0 \le I^L_{\widetilde{A}} \le 1),$$

де n — кількість елементів універсальної множини Ω, на якій визначена нечітка множина $\widetilde{A}$. Чим більше значення має індекс нечіткості, тим більш нечіткою є множина.

Приклад 5. На універсальній множині $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1\,|\,0{,}1), (2\,|\,0{,}8), (3\,|\,0{,}5), (4\,|\,0)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1\,|\,0{,}7), (2\,|\,0{,}2), (3\,|\,1), (4\,|\,0{,}7)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

Розв'язання. а) Для множини $\widetilde{A} = \{(1|0{,}1),(2|0{,}8),(3|0{,}5),(4|0)\}$, заданої на універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$, діаграма Заде має вигляд:



Потужність множини $\left|\widetilde{A}\right| = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\widetilde{A}}(\omega_i) = 0{,}1 + 0{,}8 + 0{,}5 + 0 = 1{,}4$.

Носієм нечіткої множини $\widetilde{A}$ є звичайна множина $A = \{1,2,3\}$ (містить елементи, для яких $\mu_{\widetilde{A}}(\omega) > 0$).

Нечітка множина $\widetilde{A}$ має одну точку переходу $\omega = 3$ (для якої $\mu_{\widetilde{A}}(\omega) = 0{,}5$).

Висота дорівнює 0,8 (висота — це $\max\limits_{\omega\in\Omega}(\mu_{\widetilde{A}}(\omega))$), отже, дана множина $\widetilde{A}$ є субнормальною (висота менша від 1). Нормалізуємо множину $\widetilde{A}$, виконавши перетворення характеристичної функції належності для всіх $\omega \in \Omega$:

$$\mu'_{\widetilde{A}}(1) = \frac{\mu_{\widetilde{A}}(1)}{\max\limits_{\omega\in\Omega}(\mu_{\widetilde{A}}(\omega))} = \frac{0{,}1}{0{,}8} = 0{,}125;$$

$$\mu'_{\widetilde{A}}(2) = \frac{\mu_{\widetilde{A}}(2)}{\max\limits_{\omega\in\Omega}(\mu_{\widetilde{A}}(\omega))} = \frac{0{,}8}{0{,}8} = 1;$$

$$\mu'_{\widetilde{A}}(3) = \frac{\mu_{\widetilde{A}}(3)}{\max\limits_{\omega\in\Omega}(\mu_{\widetilde{A}}(\omega))} = \frac{0{,}5}{0{,}8} = 0{,}625;$$

$$\mu'_{\widetilde{A}}(4) = \frac{\mu_{\widetilde{A}}(4)}{\max\limits_{\omega\in\Omega}(\mu_{\widetilde{A}}(\omega))} = \frac{0}{0{,}8} = 0.$$

Ядро — порожнє (ядро — звичайна множина елементів $\omega \in \Omega$, для яких $\mu_{\tilde{A}}(\omega) = 1$).

Множина $\tilde{A}$ є унімодальною (функція належності набуває максимального значення 0,8 лише в одній точці $\omega = 2$).

Множинами α-рівня ($\alpha = 0{,}1; 0{,}2; \ldots; 1$) нечіткої множини $\tilde{A}$ є звичайні множини (множини елементів $\omega \in \Omega$, для яких $\mu_{\tilde{A}}(\omega) \geq \alpha$):

$$A_0 = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$A_{0,1} = \{1, 2, 3\},$$

$$A_{0,2} = A_{0,3} = A_{0,4} = A_{0,5} = \{2, 3\},$$

$$A_{0,6} = A_{0,7} = A_{0,8} = \{2\},$$

$$A_{0,9} = A_1 = \varnothing\}.$$

Оскільки функція належності набуває значень 0, 0,1, 0,5, 0,8, то досить знайти тільки множини (при $\alpha > 0$): $A_{0,1} = \{1, 2, 3\}$, $A_{0,5} = \{2, 3\}$, $A_{0,8} = \{2\}$.

б) Знайдемо об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю і декартів добуток нечітких множин $\tilde{A} = \{(1\,|\,0{,}1), (2\,|\,0{,}8), (3\,|\,0{,}5), (4\,|\,0)\}$ і $\tilde{B} = \{(1\,|\,0{,}7), (2\,|\,0{,}2), (3\,|\,1), (4\,|\,0{,}7)\}$:

Оскільки $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(\omega) = \max(\mu_{\tilde{A}}(\omega), \mu_{\tilde{B}}(\omega))$, то:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(1\,|\max(0{,}1; 0{,}7)), (2\,|\max(0{,}8; 0{,}2)), (3\,|\max(0{,}5; 1)), (4\,|\max(0; 0{,}7))\} =$$
$$= \{(1\,|\,0{,}7), (2\,|\,0{,}8), (3\,|\,1), (4\,|\,0{,}7)\}.$$

Оскільки $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(\omega) = \min(\mu_{\tilde{A}}(\omega), \mu_{\tilde{B}}(\omega))$, то:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(1\,|\min(0{,}1; 0{,}7)), (2\,|\min(0{,}8; 0{,}2)), (3\,|\min(0{,}5; 1)), (4\,|\min(0; 0{,}7))\} =$$

$$= \{(1\,|\,0{,}1), (2\,|\,0{,}2), (3\,|\,0{,}5), (4\,|\,0)\}.$$

Оскільки $\mu_{\overline{\tilde{A}}}(\omega) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(\omega)$, то:

$$\overline{\tilde{A}} = \{(1\,|\,1 - 0{,}1), (2\,|\,1 - 0{,}8), (3\,|\,1 - 0{,}5), (4\,|\,1 - 0))\} = \{(1\,|\,0{,}9), (2\,|\,0{,}2), (3\,|\,0{,}5), (4\,|\,1)\},$$

$$\overline{\tilde{B}} = \{(1\,|\,1 - 0{,}7), (2\,|\,1 - 0{,}2), (3\,|\,1 - 1), (4\,|\,1 - 0{,}7)\} = \{(1\,|\,0{,}3), (2\,|\,0{,}8), (3\,|\,0), (4\,|\,0{,}3)\}.$$

Оскільки $\mu_{\tilde{A} \setminus \tilde{B}}(\omega) = \min(\mu_{\tilde{A}}(\omega), 1 - \mu_{\tilde{B}}(\omega))$, то:

$$\widetilde{A} \setminus \widetilde{B} = \{(1 \mid \min(0{,}1; 1-0{,}7)), (2 \mid \min(0{,}8; 1-0{,}2)), (3 \mid \min(0{,}5; 1-1)), (4 \mid \min(0; 1-0{,}7))\} =$$

$$= \{(1 \mid 0{,}1), (2 \mid 0{,}8), (3 \mid 0), (4 \mid 0)\} = \{(1 \mid 0{,}1), (2 \mid 0{,}8)\},$$

$$\widetilde{B} \setminus \widetilde{A} = \{(1 \mid \min(0{,}7; 1-0{,}1)), (2 \mid \min(0{,}2; 1-0{,}8)), (3 \mid \min(1; 1-0{,}5)), (4 \mid \min(0{,}7; 1-0))\} =$$

$$= \{(1 \mid 0{,}7), (2 \mid 0{,}2), (3 \mid 0{,}5), (4 \mid 0{,}7)\}.$$

Оскільки $\mu_{\widetilde{A}\Delta\widetilde{B}}(\omega) = \max(\min(\mu_{\widetilde{A}}(\omega), 1-\mu_{\widetilde{B}}(\omega)), \min(1-\mu_{\widetilde{A}}(\omega), \mu_{\widetilde{B}}(\omega)))$, то:

$$\widetilde{A}\Delta\widetilde{B} = \{(1 \mid \max(\min(0{,}1; 1-0{,}7), \min(1-0{,}1; 0{,}7))),$$

$$(2 \mid \max(\min(0{,}8; 1-0{,}2), \min(1-0{,}8; 0{,}2))),$$

$$(3 \mid \max(\min(0{,}5; 1-1), \min(1-0{,}5; 1))),$$

$$(4 \mid \max(\min(0; 1-0{,}7), \min(1-0; 0{,}7)))\} =$$

$$= \{(1 \mid \max(0{,}1; 0{,}7), (2 \mid \max(0{,}8; 0{,}2), (3 \mid \max(0; 0{,}5), (4 \mid \max(0; 0{,}7)\} =$$

$$= \{(1 \mid 0{,}7), (2 \mid 0{,}8), (3 \mid 0{,}5), (4 \mid 0{,}7)\}.$$

Оскільки $\mu_{\widetilde{A}\times\widetilde{B}}(\omega_1, \omega_2) = \min(\mu_{\widetilde{A}}(\omega_1), \mu_{\widetilde{B}}(\omega_2))$, то:

$$\widetilde{A} \times \widetilde{B} =$$

$$= \{((1;1) \mid \min(0{,}1; 0{,}7)), ((1;2) \mid \min(0{,}1; 0{,}2)), ((1;3) \mid \min(0{,}1; 1)), ((1;4) \mid \min(0{,}1; 0{,}7)),$$

$$((2;1) \mid \min(0{,}8; 0{,}7)), ((2;2) \mid \min(0{,}8; 0{,}2)), ((2;3) \mid \min(0{,}8; 1)), ((2;4) \mid \min(0{,}8; 0{,}7)),$$

$$((3;1) \mid \min(0{,}5; 0{,}7)), ((3;2) \mid \min(0{,}5; 0{,}2)), ((3;3) \mid \min(0{,}5; 1)), ((3;4) \mid \min(0{,}5; 0{,}7)),$$

$$((4;1) \mid \min(0; 0{,}7)), ((4;2) \mid \min(0; 0{,}2)), ((4;3) \mid \min(0; 1)), ((4;4) \mid \min(0; 0{,}7))\} =$$

$$= \{((1;1) \mid 0{,}1), ((1;2) \mid 0{,}1), ((1;3) \mid 0{,}1), ((1;4) \mid 0{,}1),$$

$$((2;1) \mid 0{,}7), ((2;2) \mid 0{,}2), ((2;3) \mid 0{,}8), ((2;4) \mid 0{,}7),$$

$$((3;1) 0{,}5), ((3;2) \mid 0{,}2), ((3;3) \mid 0{,}5), ((3;4) \mid 0{,}5),$$

$$((4;1) \mid 0), ((4;2) \mid 0), ((4;3) \mid 0), ((4;4) \mid 0)\} =$$

$$= \{((1;1) \mid 0{,}1), ((1;2) \mid 0{,}1), ((1;3) \mid 0{,}1), ((1;4) \mid 0{,}1),$$

$$((2;1) \mid 0{,}7), ((2;2) \mid 0{,}2), ((2;3) \mid 0{,}8), ((2;4) \mid 0{,}7),$$

$$((3;1) 0{,}5), ((3;2) \mid 0{,}2), ((3;3) \mid 0{,}5), ((3;4) \mid 0{,}5)\}.$$

Визначимо, яка з множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$ є більш нечіткою. Наприклад, знайдемо індекси нечіткості за евклідовою відстанню:

$$I_{\tilde{A}}^{E} = \frac{2}{\sqrt{n}} d_E(\mu_{\tilde{A}}, \chi_A) = \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\mu_{\tilde{A}}(\omega_i) - \chi_A(\omega_i))^2} .$$

Для нечітких множин $\tilde{A} = \{(1|0{,}1),(2|0{,}8),(3|0{,}5),(4|0) = \{(1|0{,}1),(2|0{,}8),(3|0{,}5)\}$ і $\tilde{B} = \{(1|0{,}7),(2|0{,}2),(3|1),(4|0{,}7)\}$ побудуємо найближчі до них звичайні множини:

$$A = \{(1|0),(2|1),(3|0),(4|0)\},$$

$$B = \{(1|1),(2|0),(3|1),(4|1)\}.$$

Обидві множини $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ визначені на універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ і $n_\Omega = |\Omega| = 4$.

Обчислимо індекси нечіткості:

$$I_{\tilde{A}}^{E} = \frac{2}{\sqrt{4}} \sqrt{(0{,}1-0)^2 + (0{,}8-1)^2 + (0{,}5-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{0{,}01+0{,}04+0{,}25+0} = 0{,}548,$$

$$I_{\tilde{B}}^{E} = \frac{2}{\sqrt{4}} \sqrt{(0{,}7-1)^2 + (0{,}2-0)^2 + (1-1)^2 + (0{,}7-1)^2} = \sqrt{0{,}09+0{,}04+0+0{,}09} = 0{,}469.$$

Одержали, що $I_{\tilde{A}}^{E} > I_{\tilde{B}}^{E}$. Отже, множина $\tilde{A}$ більш нечітка, ніж $\tilde{B}$.

Використана література: [3, с. 25-30], [11, с. 9-53], [14, с. 15-26], [15, с. 13-24].

2.2. Нечіткі відношення

Нечітким бінарним відношенням $\tilde{Q}$ на непорожній чіткій множині A називають нечітку підмножину декартового степеня A^2, тобто:

$$\tilde{Q} = \{((a,b); \mu_{\tilde{Q}}(a,b)) : a \in A, b \in A\} \subseteq A^2,$$

де $\mu_{\tilde{Q}}(a,b) \in [0;1]$ — функція належності, яка вказує силу зв'язку між елементами a і b із множини A.

Як і звичайні, нечіткі бінарні й n-арні відношення можна задавати за допомогою списку чи характеристичного предиката, а бінарні — також за допомогою графіка, графа, характеристичної матриці.

У списку явно вказують набори значень (a_i, b_j) і відповідні їм значення функції належності $\mu_{\tilde{Q}}(a_i, b_j)$.

У характеристичному предикаті, якщо залежність можливо описати формально, то функція належності визначається певним математичним виразом, а характеристичними властивостями нечітких відношень можуть бути, наприклад, такі: “*a* подібний до *b*”, “*a* набагато більший від *b*”, “число *a* приблизно дорівнює числу *b*”, “число *a* трохи більше від числа *b*”, “число *a* значно більше від числа *b*”, “людина *a* трохи старша від людини *b*”, “об’єкт *a* подібний до об’єкта *b*”; “людина *a* найкраще відповідає посаді *b*”, “об’єкт *a* має відношення до об’єкта *b*” тощо.

У випадку дискретних множин графік бінарного відношення — це сукупність окремих точок у тривимірному просторі, дві координати яких відповідають елементам множини *A,* а третя координата є значенням функції належності; якщо множина неперервна, то графіком буде поверхня. При використанні нечіткого графа кожній дузі приписується число, рівне мірі належності; дуги з нульовими значеннями функції належності в нечіткому графі, як правило, не подають.

Матриця нечіткого бінарного відношення містить значення функції належності.

Над нечіткими відношеннями виконують операції *об’єднання* $\widetilde{Q} \cup \widetilde{P}$, *перетину* $\widetilde{Q} \cap \widetilde{P}$ *й доповнення* $\overline{\widetilde{Q}}$ відповідно з характеристичними функціями належності (за визначенням Лотфі Заде):

$$\mu_{\widetilde{Q} \cup \widetilde{P}}(a,b) = \max(\mu_{\widetilde{Q}}(a,b), \mu_{\widetilde{P}}(a,b)),$$

$$\mu_{\widetilde{Q} \cap \widetilde{P}}(a,b) = \min(\mu_{\widetilde{Q}}(a,b), \mu_{\widetilde{P}}(a,b)),$$

$$\mu_{\overline{\widetilde{Q}}}(a,b) = 1 - \mu_{\widetilde{Q}}(a,b).$$

Оберненим до $\widetilde{Q} \subseteq A^2$ називають нечітке відношення $\widetilde{Q}^{-1} \subseteq A^2$, яке є множиною всіх впорядкованих пар (b,a) таких, що $(a,b) \in \widetilde{Q}$ і $\mu_{\widetilde{Q}^{-1}}(b,a) = \mu_{\widetilde{Q}}(a,b)$:

$$Q^{-1} = \{((b,a); \mu_{\widetilde{Q}^{-1}}(b,a)) : ((a,b); \mu_{\widetilde{Q}}(a,b)) \in Q \wedge (\mu_{\widetilde{Q}^{-1}}(b,a) = \mu_{\widetilde{Q}}(a,b))\}.$$

Матриця оберненого відношення буде транспонованою: $M_{\tilde{Q}^{-1}} = M_{\tilde{Q}}^{T}$. Для побудови графа відношення $\tilde{Q}^{-1}$ треба в графі відношення $\tilde{Q}$ змінити напрямок дуг на протилежний, залишивши ті самі ваги.

Носієм нечіткого відношення $\tilde{Q}$ є звичайне відношення *Q*, яке містить впорядковані пари нечіткого відношення з мірами належності $\mu_{\tilde{Q}}(a,b) > 0$.

Звичайним відношенням*, найближчим до нечіткого* відношення $\tilde{Q}$ з функцією належності $\mu_{\tilde{Q}}(a,b)$, є відношення *Q* з функцією належності:

$$\mu_Q(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \mu_{\tilde{Q}}(a,b) > 0{,}5, \\ 0, & \text{якщо } \mu_{\tilde{Q}}(a,b) < 0{,}5, \\ 1 \text{ чи } 0, & \text{якщо } \mu_{\tilde{Q}}(a,b) = 0{,}5. \end{cases}$$

Відношенням α*-рівня* (ще кажуть: α-розрізом) Q_α нечіткого відношення $\tilde{Q}$ називають звичайне відношення елементів (a,b), для яких $\mu_{\tilde{Q}}(a,b) \geq \alpha$, $\alpha \in (0;1]$, тобто:

$$Q_\alpha = \{(a,b) : \mu_{\tilde{Q}}(a,b) \geq \alpha\}.$$

Нечітке відношення $\tilde{Q}$ можна розкласти за його відношеннями α-рівнів: $\tilde{Q} = \bigcup_\alpha \alpha Q_\alpha$, де αQ_α — нечітке відношення, функція належності якого:

$$\mu_{\alpha Q_\alpha}(a,b) = \alpha \mu_{Q_\alpha}(a,b) = \begin{cases} \alpha, & \text{якщо } \mu_{Q_\alpha}(a,b) = 1; \\ 0, & \text{якщо } \mu_{Q_\alpha}(a,b) = 0. \end{cases}.$$

Суперпозицією нечітких відношень $\tilde{Q} \subseteq A^2$ і $\tilde{P} \subseteq A^2$ є нечітке відношення $\tilde{P}\tilde{Q} \subseteq A^2$, елементи якого визначають так:

$$\tilde{P}\tilde{Q} = \tilde{P}(\tilde{Q}) = \{(a,c) : (\exists b)((a,b) \in \tilde{Q} \wedge (b,c) \in \tilde{P}\}.$$

На відміну від звичайних відношень для знаходження значення функції належності суперпозиції нечітких відношень можна застосувати різні підходи:

— *max-min-композицію*:

$$\mu_{\tilde{P} \circ \tilde{Q}}(a,c) = \mu_{\tilde{P} \otimes \tilde{Q}}(a,c) = \mu_{\tilde{P}(\tilde{Q})\,\text{max-min}}(a,c) = \max_b(\min(\mu_{\tilde{Q}}(a,b), \mu_{\tilde{P}}(b,c)));$$

— *max-prod-композицію*:

$$\mu_{\widetilde{P}*\widetilde{Q}}(a,c)=\mu_{\widetilde{P}(\widetilde{Q})\text{max-prod}}(a,c)=\max_{b\in B}(\mu_{\widetilde{Q}}(a,b)\cdot\mu_{\widetilde{P}}(b,c));$$

— *min-max-композицію*:

$$\mu_{\widetilde{P}\oplus\widetilde{Q}}(a,c)=\mu_{\widetilde{P}(\widetilde{Q})\text{min-max}}(a,c)=\min_{b\in B}(\max(\mu_{\widetilde{Q}}(a,b),\mu_{\widetilde{P}}(b,c))).$$

Нехай $\widetilde{Q}$, $\widetilde{P}$ і $\widetilde{T}$ — нечіткі відношення. Для max-min-композиції цих відношень справедливі такі основні співвідношення.

1. Закон асоціативності (сполучуваності):

$\widetilde{T}\circ(\widetilde{P}\circ\widetilde{Q})=(\widetilde{T}\circ\widetilde{P})\circ\widetilde{Q}$.

2. Закон дистрибутивності (розподільності):

$\widetilde{T}\circ(\widetilde{P}\cup\widetilde{Q})=(\widetilde{T}\cup\widetilde{P})\cup(\widetilde{T}\cup\widetilde{Q})$,

але $\widetilde{T}\circ(\widetilde{P}\cap\widetilde{Q})\neq(\widetilde{T}\circ\widetilde{P})\cap(\widetilde{T}\circ\widetilde{Q})$.

3. Закон включення:

якщо $\widetilde{P}\subseteq\widetilde{Q}$, то $\widetilde{T}\circ\widetilde{P}\subseteq\widetilde{T}\circ\widetilde{Q}$.

Нечітке відношення $\widetilde{Q}$ на множині A називають *рефлексивним*, якщо

$$\mu_{\widetilde{Q}}(a,a)=1 \text{ для всіх } a\in A.$$

Умова рефлексивності відношення: $E_A\subseteq\widetilde{Q}$, де E_A — звичайне тотожне відношення. Всі елементи головної діагоналі характеристичної матриці — одиниці. Граф містить петлі всіх вершин з одиничною вагою.

У теорії нечітких відношень також розрізняють *слабо рефлексивні* відношення, якщо:

$$\mu_{\widetilde{Q}}(a,b)\leq\mu_{\widetilde{Q}}(a,a) \text{ для всіх } a,b\in A,$$

і *сильно рефлексивні* відношення, якщо:

$$\mu_{\widetilde{Q}}(a,b)<\mu_{\widetilde{Q}}(a,a)=1 \text{ для всіх } a\neq b\in A.$$

Нечітке відношення $\widetilde{Q}$ на множині A називають *іррефлексивним* (ще кажуть: *антирефлексивним*), якщо

$$\mu_{\widetilde{Q}}(a,a)=0 \text{ для всіх } a\in A.$$

Умова антирефлексивності відношення: $E_A \cap \widetilde{Q} = \varnothing$. Доповнення рефлексивного відношення є антирефлексивним. Всі елементи головної діагоналі характеристичної матриці — нулі. Граф не містить жодної петлі.

Розрізняють *слабо антирефлексивні* нечіткі відношення, якщо:

$$\mu_{\widetilde{Q}}(a,b) \geq \mu_{\widetilde{Q}}(a,a) \text{ для всіх } a, b \in A,$$

і *сильно антирефлексивні* нечіткі відношення, якщо:

$$\mu_{\widetilde{Q}}(a,b) > \mu_{\widetilde{Q}}(a,a) = 0 \text{ для всіх } a \neq b \in A.$$

Нечітке відношення $\widetilde{Q}$ на множині *A* називають *симетричним*, якщо

$$\mu_{\widetilde{Q}}(a,b) = \mu_{\widetilde{Q}}(b,a) \text{ для всіх } a, b \in A.$$

Умовою симетричності є рівність $\widetilde{Q} = \widetilde{Q}^{-1}$. Характеристична матриця симетрична (тобто $q_{ij} = q_{ji}$ — початкова і транспонована матриці рівні). Вершини графа пов’язані парами протилежно напрямлених дуг з однаковими вагами, можуть бути петлі.

Нечітке відношення $\widetilde{Q}$ на множині *A* називають *кососиметричним* (ще кажуть: *антисиметричним*), якщо

$$\min(\mu_{\widetilde{Q}}(a,b), \mu_{\widetilde{Q}}(b,a)) = 0 \text{ для всіх } a \neq b \in A.$$

Умовою кососиметричності відношення є $\widetilde{Q} \cap \widetilde{Q}^{-1} \subseteq E_A$. Матриця кососиметрична (тобто, якщо $q_{ij} \neq 0$ і $i \neq j$, то $q_{ji} = 0$, але може бути $q_{ij} = 0$ і $q_{ji} = 0$). У графі можуть бути петлі, але зв’язок між різними вершинами графа, якщо він є, то лише однонаправлений, тобто, якщо є дуга з вершини *a* у відмінну від неї вершину *b*, то дуга з вершини *b* у вершину *a* обов’язково відсутня.

Нечітке відношення $\widetilde{Q}$ на множині *A* називають *асиметричним*, якщо

$$\min(\mu_{\widetilde{Q}}(a,b), \mu_{\widetilde{Q}}(b,a)) = 0 \text{ для всіх } a, b \in A.$$

Якщо відношення асиметричне, то воно також іррефлексивне, тобто $(a,a) \notin \widetilde{Q}$. Умовою асиметричності відношення є $\widetilde{Q} \cap \widetilde{Q}^{-1} = \varnothing$. Матриця кососиметрична з нульовими елементами на головній діагоналі. Граф петель не має, дві вершини можуть бути зв’язані тільки однією дугою.

Нечітке відношення $\widetilde{Q}$ на множині A називають *сильно лінійним* (ще кажуть: сильно повним, сильно зв'язним), якщо

$$\max(\mu_{\widetilde{Q}}(a,b), \mu_{\widetilde{Q}}(b,a)) = 1 \text{ для всіх } a, b \in A.$$

Умовою сильної лінійності відношення є $\widetilde{Q} \cup \widetilde{Q}^{-1} = A^2$. Матриця з одиничними елементами на головній діагоналі і із двох симетричних елементів один обов'язково є одиницею. У графі кожна вершина має петлю з одиничною вагою, кожні дві вершини повинні бути зв'язані хоч би однією дугою з одиничною вагою.

Нечітке відношення $\widetilde{Q}$ на множині A називають *слабо лінійним* (ще кажуть: слабо повним, слабо зв'язним), якщо

$$\max(\mu_{\widetilde{Q}}(a,b), \mu_{\widetilde{Q}}(b,a)) > 0 \text{ для всіх } a, b \in A.$$

Матриця з ненульовими елементами на головній діагоналі і із двох симетричних елементів один обов'язково є ненульовим. У графі кожна вершина має петлю з ненульовою вагою, кожні дві вершини повинні бути зв'язані хоч би однією дугою з ненульовою вагою.

Нечітке відношення $\widetilde{Q}$ на множині A називають *транзитивним*, якщо

$$\widetilde{Q}^2 \subseteq \widetilde{Q}.$$

Властивість транзитивності нечіткого відношення $\widetilde{Q}$ залежить від способу визначення суперпозиції відношень — відповідно можна вказати такі види транзитивності: *max-min*-транзитивність, *max-prod*-транзитивність і *min-max*-транзитивність. Виконується співвідношення $Q^2_{\text{max-prod}} \subseteq Q^2_{\text{max-min}}$. У випадку max-min-транзитивності умову транзитивності можна подати так:

$$\min(\mu_{\widetilde{Q}}(a,b), \mu_{\widetilde{Q}}(b,c)) \le \mu_{\widetilde{Q}}(a,c) \text{ для всіх } a, b, c \in A.$$

Нечіткі відношення можна подати за α-рівнями у вигляді сукупності звичайних відношень, які можна впорядкувати за включеннями.

Нечітке відношення має певну властивість: рефлексивність, слабку рефлексивність, антирефлексивність, слабку антирефлексивність, симетричність, кососиметричність, асиметричність, сильну лінійність і транзитивність (крім сильної рефлексивності, сильної антирефлексивності і слабкої лінійності) тоді і тільки тоді, коли цю певну властивість мають усі його α-рівні.

Транзитивним замиканням max-min, max-prod чи min-max нечіткого відношення $\widetilde{Q}$, визначеного на множині *A*, є нечітке відношення:

$$\widetilde{Q}_t^* = \widetilde{Q} \cup \widetilde{Q}^2 \cup \ldots \cup \widetilde{Q}^n, \text{ де } n \text{ — потужність множини } A.$$

При цьому, якщо існує таке число $k < n$, що $\widetilde{Q}^k = \widetilde{Q}^{k+1}$, то $\widetilde{Q}_t^* = \widetilde{Q} \cup \widetilde{Q}^2 \cup \ldots \cup \widetilde{Q}^k$.

α-рівень транзитивного замикання нечіткого відношення $\widetilde{Q}$ збігається з транзитивним замиканням відповідного α-рівня для будь-якого $\alpha \in (0;1]$, тобто:

$$(\widetilde{Q}_t^*)_\alpha = (Q_\alpha)_t^*.$$

Транзитивне замикання нечіткого відношення зберігає такі властивості, як рефлексивність, симетричність, лінійність і транзитивність.

Приклад 6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,9 & 0,5 & 0,3 \\ 1 & 0,9 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте транзитивні max-min-, max-prod- і min-max-замикання.

Розв'язання. Досліджувати властивості заданого нечіткого відношення будемо на основі його характеристичної матриці.

Відношення не рефлексивне і не антирефлексивне, оскільки головна діагональ матриці не є ні одиничною, ні нульовою. З цих самих причин відношення не є ні сильно рефлексивним, ні сильно антирефлексивним. Відношення не слабо рефлексивне, оскільки, наприклад, $\mu_{\widetilde{Q}}(2;1) = 0,9 \not\leq \mu_{\widetilde{Q}}(2;2) = 0,5$; не слабо антирефлексивне, оскільки, наприклад, $\mu_{\widetilde{Q}}(1;2) = 0,4 \not\geq \mu_{\widetilde{Q}}(1;1) = 0,6$.

Відношення не симетричне, бо, наприклад, $\mu_{\widetilde{Q}}(2;1)=0{,}9\neq\mu_{\widetilde{Q}}(1;2)=0{,}4$; не кососиметричне і не асиметричне, оскільки, наприклад, $\min(\mu_{\widetilde{Q}}(2;1),\mu_{\widetilde{Q}}(1;2))=\min(0{,}9;0{,}4)=0{,}4\neq 0$; не сильно лінійне, бо, наприклад, для симетричної пари елементів (1;2) і (2;1) $\max(\mu_{\widetilde{Q}}(1;2),\mu_{\widetilde{Q}}(2;1))=\max(0{,}4;0{,}9)\neq 1$; відношення є слабо лінійним, бо на головній діагоналі матриці немає жодного нуля і кожна пара симетричних елементів містить хоч би один ненульовий елемент.

Перевіримо, чи є відношення транзитивним, тобто, чи виконується умова $\widetilde{Q}^2\subseteq\widetilde{Q}$ ($\mu_{\widetilde{Q}^2}(a,b)\leq\mu_{\widetilde{Q}}(a,b)$ для всіх $a,b\in A$). Знайдемо $\widetilde{Q}^2$, як max-min-композицію:

$$M_{\widetilde{Q}^2\max\text{-}\min}=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}4\end{pmatrix}.$$

Поелементне порівняння матриці $M_{\widetilde{Q}^2\max\text{-}\min}$ і матриці початкового відношення $M_{\widetilde{Q}}$ показує, що умова транзитивності $\widetilde{Q}^2\subseteq\widetilde{Q}$ не виконується:

$$M_{\widetilde{Q}^2\max\text{-}\min}=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}4\end{pmatrix}\not\leq M_{\widetilde{Q}}=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4 & 0\\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4\end{pmatrix},$$

бо $\mu_{\widetilde{Q}^2\max\text{-}\min}(1;3)=0{,}3\not\leq\mu_{\widetilde{Q}^2}(1;3)=0$.

Отже, побудуємо транзитивне max-min-замикання (операцію знаходження максимуму виконаємо в матрицях поелементно):

$$M_{\widetilde{Q}_t^*\max\text{-}\min}=\max(M_{\widetilde{Q}};M_{\widetilde{Q}^2\max\text{-}\min};M_{\widetilde{Q}^3\max\text{-}\min})=$$

$$=\max(\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4 & 0\\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}4\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}4\end{pmatrix})=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4 & \mathbf{0{,}3}\\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4\end{pmatrix}.$$

В одержаному транзитивному замиканні порівняно з початковим відношенням змінилася міра належності елемента (1;3) — була $\mu_{\widetilde{Q}}(1;3)=0$, стала $\mu_{\widetilde{Q}_t^*}(1;3)=0{,}3$.

Перевіримо, чи одержане нечітке відношення є транзитивним — знайдемо $M_{\widetilde{Q}_t^{*2}}$ і порівняємо (поелементно) з $M_{\widetilde{Q}_t^*}$:

$$M_{\widetilde{Q}_t^{*2}}=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}4\end{pmatrix}\le M_{\widetilde{Q}_t^*}=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4\end{pmatrix},$$

що вказує на те, що $\widetilde{Q}_t^{*2}\subseteq\widetilde{Q}_t^*$, тобто одержане замикання є транзитивним.

Тепер знайдемо $\widetilde{Q}^2$, як max-prod-композицію:

$$M_{\widetilde{Q}^2\text{max-prod}}=\begin{pmatrix}0{,}36 & 0{,}24 & 0{,}12\\ 0{,}54 & 0{,}36 & 0{,}15\\ 0{,}81 & 0{,}45 & 0{,}27\end{pmatrix}.$$

Порівняння з матрицею початкового відношення показує, що умова транзитивності $\widetilde{Q}^2\subseteq\widetilde{Q}$ не виконується:

$$M_{\widetilde{Q}^2\text{max-prod}}=\begin{pmatrix}0{,}36 & 0{,}24 & 0{,}12\\ 0{,}54 & 0{,}36 & 0{,}15\\ 0{,}81 & 0{,}45 & 0{,}27\end{pmatrix}\not\le M_{\widetilde{Q}}=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4 & 0\\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4\end{pmatrix},$$

бо $\mu_{\widetilde{Q}^2\text{max-prod}}(1;3)=0{,}12\not\le\mu_{\widetilde{Q}^2}(1;3)=0$. Побудуємо транзитивне max-prod-замикання:

$$M_{\widetilde{Q}_t^*\text{max-prod}}=\max(M_{\widetilde{Q}};M_{\widetilde{Q}^2\text{max-prod}};M_{\widetilde{Q}^3\text{max-prod}})=$$

$$=\max(\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4 & 0\\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0{,}36 & 0{,}24 & 0{,}12\\ 0{,}54 & 0{,}36 & 0{,}15\\ 0{,}81 & 0{,}45 & 0{,}27\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0{,}216 & 0{,}144 & 0{,}072\\ 0{,}324 & 0{,}216 & 0{,}108\\ 0{,}486 & 0{,}324 & 0{,}135\end{pmatrix})=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4 & \mathbf{0{,}12}\\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4\end{pmatrix}.$$

В одержаному транзитивному max-prod-замиканні порівняно з початковим відношенням змінилася міра належності елемента (1;3) — була $\mu_{\widetilde{Q}}(1;3)=0$, стала $\mu_{\widetilde{Q}_t^*}(1;3)=0{,}12$.

Знайдемо ще $\widetilde{Q}^2$ як min-max-композицію:

$$M_{\widetilde{Q}^2 \min\text{-}\max} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 & 0,4 \\ 0,9 & 0,5 & 0,4 \\ 0,9 & 0,9 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Порівняння з матрицею початкового відношення показує, що умова транзитивності $\widetilde{Q}^2 \subseteq \widetilde{Q}$ не виконується:

$$M_{\widetilde{Q}^2 \min\text{-}\max} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 & 0,4 \\ 0,9 & 0,5 & 0,4 \\ 0,9 & 0,9 & 0,4 \end{pmatrix} \not\leq M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,9 & 0,5 & 0,3 \\ 1 & 0,9 & 0,4 \end{pmatrix},$$

бо $\mu_{\widetilde{Q}^2 \min\text{-}\max}(1;2) = 0,5 \not\leq \mu_{\widetilde{Q}^2}(1;2) = 0,4$. Побудуємо транзитивне min-max-замикання (під час обчислень одержано, що $M_{\widetilde{Q}^2 \min\text{-}\max} = M_{\widetilde{Q}^3 \min\text{-}\max}$):

$$M_{\widetilde{Q}_t^* \min\text{-}\max} = \max(M_{\widetilde{Q}}; M_{\widetilde{Q}^2 \min\text{-}\max}) =$$

$$= \max(\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,9 & 0,5 & 0,3 \\ 1 & 0,9 & 0,4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 & 0,4 \\ 0,9 & 0,5 & 0,4 \\ 0,9 & 0,9 & 0,4 \end{pmatrix}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,6 & \mathbf{0,5} & \mathbf{0,4} \\ 0,9 & 0,5 & \mathbf{0,4} \\ 1 & 0,9 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

В одержаному транзитивному min-max-замиканні порівняно з початковим відношенням змінилися міри належності елементів $(1;2)$, $(1;3)$ і $(2;3)$.

Використана література: [11, с. 83-116], [14, с. 26-41], [15, с. 37-64].

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення нечіткої множини. У чому полягає відмінність нечіткої множини від чіткої? Яких значень набуває функція належності нечіткої множини. Як побудувати діаграму Заде для нечіткої множини?

2. Схарактеризуйте рівність нечітких множин. Що називають підмножиною нечіткої множини?

3. Що таке потужність нечіткої множини? Що таке носій нечіткої множини? Чим характеризуються точки переходу нечіткої множини? Що називають висотою нечіткої множини? Яка нечітка множина є нормальною? У чому полягає нормалізація нечіткої множини?

4. Що таке ядро нечіткої множини? Яку множину називають множиною альфа-рівня?

5. Дайте означення операцій об'єднання, перетину, різниці, симетричної різниці, доповнення для нечітких множин. Вкажіть основні властивості теоретико-множинних операцій над нечіткими множинами. Які відмінності цих властивостей від властивостей операцій з чіткими множинами? Як доводять властивості операцій для нечітких множин? Як визначають декартів добуток нечітких множин?

6. Схарактеризуйте операції концентрування і розтягування. Як визначають опуклу комбінацію нечітких множин?

7. Яку множину називають звичайною множиною, найближчою до нечіткої множини? Вкажіть міри нечіткості нечітких множин. Яка множина серед двох множин є більш нечіткою?

8. Дайте визначення нечіткого відношення. Як його можна задати? Чим відрізняється графік нечіткого відношення від графіка звичайного чіткого відношення? Як задають граф нечіткого відношення? Як задають матрицю нечіткого відношення?

9. Які операції виконують над нечіткими відношеннями? Як визначають обернене нечітке відношення?

10. Що є носієм нечіткого відношення? Яке відношення називають найближчим до нечіткого відношення? Що таке відношення альфа-рівня?

11. Схарактеризуйте основні властивості нечітких бінарних відношень на множині. Схарактеризуйте властивості альфа-рівнів нечіткого відношення.

12. Як визначають суперпозицію нечітких відношень?

13. Вкажіть властивості нечітких відношень. Яке нечітке відношення називають транзитивним? Як побудувати транзитивне замикання нечіткого відношення? Вкажіть зв'язок між альфа-рівнями транзитивного замикання нечіткого відношення і транзитивними замиканнями альфа-рівнів.

Тема 3. Елементи теорії чисел. Системи числення

3.1. Лишки і порівняння

Ціле число *n* ділиться на ціле число $m \neq 0$ (ще кажуть: число *n* кратне числу $m \neq 0$), якщо існує таке ціле число *k*, що $n = k \cdot m$. Це позначають так: $n \vdots m$. При цьому число $m \neq 0$ є *дільником* числа *n*.

Для будь-яких цілих чисел *a*, *b* і *c* справедливі *властивості подільності*.

1. $a \vdots a$, $0 \vdots a$.

2. Якщо $a \vdots c$ і $b \vdots c$, то $(a \pm b) \vdots c$.

3. Якщо $a \vdots b$ і $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

4. Якщо $(a \pm b) \vdots c$ і $a \vdots c$ і навпаки то $b \vdots c$.

5. Якщо $ab \vdots ac$, то $b \vdots c$, і навпаки, якщо $b \vdots c$, то $ab \vdots ac$.

6. Якщо $a \vdots (bc)$, то $a \vdots b$ і $a \vdots c$.

7. З того, що $a \,\overline{\vdots}\, c$ і $b \,\overline{\vdots}\, c$, не випливає, що $(a \pm b) \,\overline{\vdots}\, c$ $ab \,\overline{\vdots}\, c$.

8. Якщо *a* — ціле число, *b* — натуральне число і $a \,\overline{\vdots}\, b$, то існують єдині ціле число *m* і ціле невід'ємне число $r < b$ такі, що $a = mb + r$. Число *m* називають *часткою*, число *r* — *остачею* від ділення.

Натуральне число $n > 1$ називають *простим*, якщо його дільниками є тільки числа 1 і *n*. Натуральне число, яке ділиться не тільки на 1 і само на себе, називають *складеним*.

Число 1 не належить ні до простих, ні до складених чисел. Цілі додатні (натуральні) числа $n \geq 2$ можуть бути простими чи складеними.

Приблизну *кількість простих чисел* в натуральному ряду, менших від *n*, можна обчислити за допомогою функції від натурального аргумента *n*:

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}.$$

Точне значення функції $\pi(n)$ знаходять безпосереднім підрахунком кількості простих чисел.

Теорема (*Евкліда*). Існує нескінченно багато простих чисел.

Теорема (*постулат Бертрана*). Якщо натуральне число $n>1$, то між n і $2n$ завжди є принаймні одне просте число.

На практиці часто виникає необхідність перевірити, чи є число простим, чи складеним. Це можна зробити за допомогою методу виділення множників (факторизації) Ферма. Застосування методу виділення множників Ферма дає можливість розкласти число на два множники, які в свою чергу можуть бути простими чи складеними числами.

Теорема (*метод виділення множників Ферма*). Непарне натуральне число n не є простим тоді і тільки тоді, коли існують невід'ємні цілі числа p і q такі, що $n=p^2-q^2$ і при цьому $p-q>1$.

Застосування цього методу полягає в знаходженні невід'ємних цілих чисел p і q таких, що $n=p^2-q^2$ або в еквівалентному вигляді: $p^2=n+q^2$ чи $q^2=p^2-n$.

При використанні запису $p^2=n+q^2$ треба перебирати значення $q=1,2,3,\dots,(n-1)/2$, поки величина $n+q^2$ не стане квадратом якогось цілого числа.

При використанні запису $q^2=p^2-n$ треба перебирати значення $p=[\sqrt{n}],[\sqrt{n}]+1,[\sqrt{n}]+2,\dots,[\sqrt{n}]+(n+1)/2$ ($[\sqrt{n}]$ заокруглюється до більшого, щоб $p^2-n\geq 0$), поки величина p^2-n не стане квадратом якогось цілого числа.

Нижче подано прості числа до 1000 (їх є 168):

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997								

Загальна ознака подільності. Для того, щоб число *a* ділилося на число *m*, необхідно й достатньо, щоб сума добутків чисел a_k, відповідних цифрам цього числа, на остачі r_k від ділення на *m* відповідних степенів $10^k = m \cdot q_k + r_k$ ($k = \overline{1,n}$), ділилася на *m*. Тобто на *m* має ділитися така сума:

$$a_n \cdot r_b + a_{n-1} \cdot r_{n-1} + \ldots + a_2 \cdot r_2 + a_1 \cdot r_1 + a_0 .$$

Якщо кожен з алгебричних доданків ділиться на якесь число, то і їхня сума ділиться на те саме число.

Якщо хоч би один із співмножників ділиться на якесь число, то і їхній добуток теж ділиться на це число

Якщо число ділиться на добуток, то воно ділиться на кожний із співмножників цього добутку. Але, якщо якесь число ділиться на кілька чисел, то на їхній добуток воно може й не ділитися. Якщо якесь число ділиться на кілька попарно взаємно простих чисел, то воно ділитися і на їхній добуток.

Цілі додатні (натуральні) числа $n \geq 2$ можуть бути простими чи складеними.

Теорема (*основна теорема арифметики*). Будь-яке ціле число $n \geq 2$ розкладається в добуток простих чисел і таке розкладання з точністю до порядку множників єдине.

Тобто будь-яке натуральне число *n* однозначно можна подати у вигляді, який називають *канонічним розкладанням числа на прості множники*:

$$n = m_1^{d_1} \cdot m_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot m_k^{d_k} ,$$

де $m_1 < m_2 < \ldots < m_k$ — прості числа, d_1, d_2, …, d_k — натуральні числа.

Звідси випливає, що число 1 не є простим — якби було простим, то розкладання на множники не було б однозначним (наприклад: $3 = 1 \cdot 3 = 1 \cdot 1 \cdot 3 = \ldots$).

Якщо $n = k \cdot m$, то числа *k* і *m* не можуть бути *одночасно* більшими від $\sqrt{n}$. Звідси випливає, що будь-яке складене число *n* має простий дільник *k*, не більший від $\sqrt{n}$.

Теорема (*узагальнена ознака подільності двох складених чисел*). Якщо $a = m_1^{d_1^a} \cdot m_2^{d_2^a} \cdot \ldots \cdot m_k^{d_k^a}$, $b = m_1^{d_1^b} \cdot m_2^{d_2^b} \cdot \ldots \cdot m_k^{d_k^b}$, де $d_i^a \ge 0$ і $d_i^b \ge 0$ при $i = \overline{1,k}$, — канонічні розкладання чисел на прості множники, то для того щоб a ділилося на b, необхідно й достатньо, щоб $d_i^a \ge d_i^b$ при $i = \overline{1,k}$.

Маючи розкладання натурального числа на прості множники $n = m_1^{d_1} \cdot m_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot m_k^{d_k}$, можна вказати всі його дільники (усі додатні цілі числа, на які ділиться число n), якими є добутки виду $m_1^{i} \cdot m_2^{j} \cdot \ldots \cdot m_k^{l}$, де $i = \overline{0,d_1}$, $j = \overline{0,d_2}$, …, $l = \overline{0,d_k}$. Кількість цих дільників дорівнює $\tau(n) = \prod_{i=1}^{k}(d_i + 1)$. Якщо число p — просте число, то $\tau(p) = 2$.

Суму всіх натуральних дільників натурального числа n можна обчислити за формулою:

$$\sigma(n) = \frac{m_1^{d_1+1} - 1}{m_1 - 1} \cdot \frac{m_2^{d_2+1} - 1}{m_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{m_k^{d_k+1} - 1}{m_k - 1} .$$

Якщо число p — просте число, то $\sigma(p) = p + 1$.

Найбільшим спільним дільником (НСД) двох цілих чисел a і b, не рівних одночасно нулю, є найбільше додатне число $d = \text{НСД}(a,b)$, яке одночасно є дільником числа a і числа b.

Якщо $a < b$, то $\text{НСД}(a,b) \le a$.

Якщо $\text{НСД}(a,b) = 1$, то числа a і b називають *взаємно простими*.

Якщо чисел більше двох і кожні два з них взаємно прості, то такі числа називають *попарно взаємно простими*.

Для трьох або більшої кількості чисел НСД дорівнює добуткові дільників, спільних для цих чисел. НСД кількох чисел можна обчислити на основі НСД пар чисел, наприклад:

$$\text{НСД}(a,b,c) =$$
$$= \text{НСД}(a, \text{НСД}(b,c)) = \text{НСД}(\text{НСД}(a,b),c) = \text{НСД}(\text{НСД}(a,c),b) .$$

Алгоритм знаходження НСД двох або кількох чисел:

К1: Розкласти задані числа на прості множники.

К2: Виписати всі спільні прості множники, взявши кожен з них з найменшим показником степеня, який є в цих розкладаннях.

К3: Обчислити добуток спільних множників.

Найменшим спільним кратним (НСК) двох цілих чисел *a* і *b* таких, що $a \cdot b \neq 0$, є найменше додатне число $c = \text{НСК}(a,b)$, яке одночасно ділиться на число *a* і на число *b*.

Якщо $a > b$, то $\text{НСК}(a,b) \geq a$.

Щоб для трьох або більшої кількості чисел знайти НСК, треба спочатку знайти НСК для будь-яких двох з них, потім НСК для знайденого значення і третього числа і т.д. Наприклад:

$$\text{НСК}(a,b,c) =$$

$$= \text{НСК}(a, \text{НСК}(b,c)) = \text{НСК}(\text{НСК}(a,b),c) = \text{НСК}(\text{НСК}(a,c),b).$$

Алгоритм знаходження НСК двох або кількох чисел:

К1: Розкласти задані числа на прості множники.

К2: Взяти розкладання одного з них і дописати прості множники, яких не вистачає, з розкладання інших чисел.

К3: Обчислити добуток вибраних множників.

Якщо число *a* є дільником числа *b*, то $\text{НСД}(a,b) = a$, $\text{НСК}(a,b) = a$.

Якщо m_i $(i = \overline{1,k})$ — всі різні прості числа з розкладань чисел *a* і *b* на прості множники, а степені, з якими вони входять у ці розкладання, рівні d_i^a і d_i^b (степені набувають натуральних або нульових значень), то

$$\text{НСД}(a,b) = \prod_{i=1}^{k} m_i^{\min(d_i^a, d_i^b)};$$

$$\text{НСК}(a,b) = \prod_{i=1}^{k} m_i^{\max(d_i^a, d_i^b)}.$$

Якщо $a \cdot b > 0$, то виконується рівність

$$a \cdot b = \text{НСД}(a,b) \cdot \text{НСК}(a,b) = \prod_{i=1}^{k} m_i^{d_i^a + d_i^b}.$$

Найменше спільне кратне двох взаємно простих чисел дорівнює їхньому добуткові, тобто, якщо $\text{НСД}(a,b)=1$, то $\text{НСК}(a,b)=a\cdot b$.

Для обчислення НСК, якщо НСД вже знайдено, з рівності $a\cdot b=\text{НСД}(a,b)\cdot\text{НСК}(a,b)$ можна одержати формулу:

$$\text{НСК}(a,b)=\frac{a\cdot b}{\text{НСД}(a,b)}\ .$$

Розкладання великих чисел на прості множники для знаходження НСД є досить трудомісткою задачею. Швидко обчислити НСД великих чисел без знаходження їхніх дільників можна за допомогою *алгоритму Евкліда*.

Алгоритм Евкліда базується на тому, що у випадку $a\geq b$, якщо число a подати, як $a=k\cdot b+r$, то $\text{НСД}(a,b)=\text{НСД}(b,r)$.

Оригінальний (описаний ще Евклідом) алгоритм для пошуку остачі r використовує (k разів) операцію віднімання. В іншій версії алгоритму для пошуку остачі r повторні віднімання замінено діленням. Дослідження алгоритму, який використовує ділення, показали, що для одержання НСД він виконує не більше кроків, ніж п'ятикратна кількість цифр h десяткового подання меншого числа. Обчислювальні витрати кожного кроку теж, як правило, мають порядок h, тому загальні обчислювальні витрати оцінюються порядком h^2. Якщо взяти до уваги те, що операція віднімання швидша за операцію ділення, особливо для великих чисел, то алгоритм на основі віднімання за ефективністю можна прирівняти до алгоритму на основі ділення.

Оригінальний варіант алгоритму Евкліда (на основі віднімання): від більшого числа віднімають менше, доки числа не стануть рівними — це і є НСД. Словесно алгоритм можна подати так:

K1: Ввести числа a, b.

K2: Якщо a=b, то перейти на К5.

K3: Якщо a>b, то a=a–b, інакше b=b–a.

K4: Перейти на К2.

K5: Вивести НСД=a.

Зауважимо, що якщо одне з чисел 0, а інше відмінне від 0, то алгоритм зациклиться. Якщо обидва числа рівні 0, то алгоритм видасть значення 0 (хоч НСД для такої пари не визначений).

Алгоритм Евкліда (на основі ділення): одне число ділиться на інше і одержується остача від ділення (a mod b → r1), друге число ділиться на одержану остачу і одержується нова остача (b mod r1 → r2), попередня остача ділиться на одержану остачу (r1 mod r2 → r3) і т.д., доки остача не стане рівною 0; останній знаменник — це НСД. Словесно алгоритм можна подати так:

К1: Ввести числа a, b.

К2: Якщо b=0, то перейти на К5.

К3: r=a mod b, a=b, b=r.

К4: Перейти на К2.

К5: Вивести НСД=a.

Даний алгоритм нормально працює (не зациклюється, не виконує ділення на 0) на парах будь-яких чисел, наприклад, на парах 0 і 3 (результат 3), 3 і 0 (результат 3), 0 і 0 (хоч НСД для такої пари не визначений, результат 0)

Маючи розкладання натурального числа на прості множники $n = m_1^{d_1} \cdot m_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot m_k^{d_k}$, можна обчислити кількість чисел в ряду $0, 1, 2, \ldots, n-1$, взаємно простих з числом *n* за допомогою цілочисельної *функції Ейлера*:

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{m_i} \right).$$

При цьому степені d_i $(i = \overline{1,k})$ множників не враховуються.

Основні властивості функції Ейлера.

1. $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$.

2. Якщо число p — просте, то $\varphi(p) = p - 1$.

3. Якщо число p — просте, то $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1) = p^k - p^{k-1}$.

4. $\varphi(n) = \sum\limits_{n \,\vdots\, \alpha_i,\, i=\overline{1,\tau(n)}} \varphi(\alpha_i)$, де α_i, $i = \overline{1,\tau(n)}$ — усі дільники числа *n*.

5. Мультиплікативність.

Якщо числа a і b — взаємно прості, то $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Якщо a і b — не взаємно прості, то $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \cdot \dfrac{НСД(a,b)}{\varphi(НСД(a,b))}$.

За означенням раціональне число — це число, яке можна подати звичайним нескоротним дробом $\dfrac{a}{b}$, де $a \in Z$, $b \in N$. Якщо раціональне число подати десятковим дробом, то дріб може бути скінченним або нескінченним періодичним. У періодичного дробу десяткові знаки періодично повторюються. Якщо десяткові знаки періодично повторюються, починаючи з першого, то такий десятковий дріб називають *чистим періодичним дробом*, інакше — *змішаним періодичним дробом*. Усі періодичні десяткові дроби, яким відповідають звичайні десяткові дроби з тим самим знаменником, мають однакову довжину періоду.

Звичайний десятковий нескоротний дріб $\dfrac{a}{b}$ перетворюється у скінченний десятковий дріб тоді і тільки тоді, коли знаменник у розкладанні на прості множники не містить чисел, відмінних від 2 і 5.

Звичайний десятковий нескоротний дріб $\dfrac{a}{b}$, у якого знаменник у розкладанні на прості множники містить хоч би одне із чисел 2 і 5, перетворюється у змішаний періодичний десятковий дріб.

Звичайний десятковий нескоротний дріб $\dfrac{a}{b}$, у якого знаменник у розкладанні на прості множники не містить жодного із чисел 2 і 5, перетворюється у чистий періодичний десятковий дріб.

Якщо a — ціле число, m — натуральне число, то існують єдині цілі числа t і r такі, що:

$$a = tm + r, \ 0 \le r < m.$$

Число a називають *діленим*, m — *дільником*, t — неповною *часткою* (якщо $r = 0$, то повною часткою), r — *остачею* від ділення a на m.

Усі цілі числа виду $tm+r$ називають *класом лишків за модулем* m. Кожен елемент класу називають *лишком за модулем* m.

Необхідною й достатньою умовою належності двох чисел одному класові лишків за модулем m є те, що різниця цих чисел ділиться на m. Якщо число a належить класові лишків за модулем m, то всі числа виду $tm+a$ теж належать цьому класові. Існує рівно m класів лишків за модулем m — це сукупності чисел, для яких $r=\overline{0,m-1}$.

Якщо з кожного класу лишків взяти по одному числу (лишку) a_0, a_1, a_2, …, a_{m-1}, то ці m чисел утворять *повну систему лишків за модулем* m.

Повну систему найменших невід'ємних лишків за модулем m утворять числа 0, 1, 2, …, $m-1$. Повну систему найменших додатних лишків за модулем m утворять числа 1, 2, …, m. Повну систему найменших за абсолютною величиною лишків за модулем m утворять числа від $-\left[\frac{m}{2}\right]$ до $+\left[\frac{m}{2}\right]$.

Якщо числа a_0, a_1, a_2, …, a_{m-1} утворюють *повну систему лишків за модулем* m, то числа ka_0, ka_1, ka_2, …, ka_{m-1} при $НСД(k,m)=1$ теж утворюють повну систему лишків за модулем m.

Якщо з повної системи додатних лишків (наприклад, із найменших додатних лишків 1, 2, …, m) взяти тільки лишки, взаємно прості з модулем m, то одержимо *зведену систему лишків за модулем* m. Кількість лишків зведеної системи дорівнює значенню функції Ейлера $\varphi(m)$.

Якщо a і b — цілі числа, m — натуральне число і $(a-b)\vdots m$, то числа a і b називають *порівнюваними* (ще кажуть: конгруентними, рівнозалишковими, рівними) *за модулем* m. Порівнюваність чисел a і b за модулем m позначають:

$$a \equiv b(\mathrm{mod}\, m).$$

Даний запис читається: "a порівнюване з b за модулем m" і означає, що числа a і b належать одному класові лишків за модулем m.

Порівнювані за модулем m числа мають однакові остачі при цілочисельному діленні на m.

Будь-яке порівняння (ще кажуть: конгруенцію) $a \equiv b(\bmod m)$ можна замінити еквівалентним записом $a = b + tm$, де ціле число $t = (a-b)/m \in Z$, або записом $(a-b)\vdots m$. У порівняннях кожне число розглядають не як окреме число, а як представника класу за даним модулем.

Нехай *a*, *b*, *c* і *d* — цілі числа. Справедливі *основні властивості порівнянь.*

1. Порівняння є відношенням еквівалентності:

а) рефлексивне — $a \equiv a(\bmod m)$;

б) симетричне — якщо $a \equiv b(\bmod m)$, то $b \equiv a(\bmod m)$;

в) транзитивне — якщо $a \equiv b(\bmod m)$ і $b \equiv c(\bmod m)$, то $a \equiv c(\bmod m)$.

Множина всіх цілих чисел *Z* за відношенням порівняння за модулем *m* розбивається на *m* класів еквівалентності, які є класами лишків за модулем *m*.

2. Якщо $a \equiv b(\bmod m)$ і $c \equiv d(\bmod m)$, то

$a \pm c \equiv b \pm d(\bmod m)$,

$ac \equiv bd(\bmod m)$.

3. Якщо $a \equiv b(\bmod m)$, то

$a^n \equiv b^n(\bmod m)$, де $n \in N$.

4. Якщо $a \equiv b(\bmod m)$ і *c* — будь-яке ціле число, то

$a \pm c \equiv b \pm c(\bmod m)$,

$a \pm cm \equiv b(\bmod m)$,

$a \equiv b \pm cm(\bmod m)$,

$ac \equiv bc(\bmod mc)$.

5. Якщо $НСД(c,m) = 1$ і $ac \equiv bc(\bmod m)$, то $a \equiv b(\bmod m)$;

якщо $ac \equiv bc(\bmod mc)$, то $a \equiv b(\bmod m)$.

6. Якщо $a \equiv b + c(\bmod m)$, то $a - c \equiv b(\bmod m)$.

Якщо $a \equiv b(\bmod m)$, то $a - b \equiv 0(\bmod m)$.

7. Якщо $a \equiv b(\bmod m)$ і $a \equiv b(\bmod n)$, то $a \equiv b(\bmod НСК(m,n))$.

8. Якщо $f(x)$ многочлен з цілими коефіцієнтами, то з $a \equiv b(\bmod m)$ випливає, що $f(a) \equiv f(b)(\bmod m)$.

Теорема Ейлера. Якщо *НСД*$(a,m)=1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1(\bmod m)$, де $\varphi(m)$ — функція Ейлера (кількість невід’ємних чисел, менших від m і взаємно простих з m).

Теорема (*мала теорема Ферма*). Якщо p — просте число і $a \,\overline{\vdots}\, p$, то $a^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$.

Порівняння

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0(\bmod m),$$

де a_i $(i=\overline{0,n})$ — цілі числа, називають *порівнянням степеня n з одним невідомим*.

Якщо якесь число $x = x_0$ задовольняє порівняння, то і будь-яке число $x = x_0 + tm$ (де $t \in Z$), яке належить тому самому класові лишків за модулем m, теж буде задовольняти це порівняння. Таким чином, число x_0 визначає весь клас лишків за модулем m, тому всі ці числа вважають одним розв’язком. Замість $x = x_0 + tm$ (де $t \in Z$) можна записати $x \equiv x_0(\bmod m)$

При розв’язуванні порівнянь за модулем m коефіцієнти a_i $(i=\overline{0,n})$ можна замінювати на їхні лишки за модулем m.

Для розв’язування порівнянь можна використовувати звичайний перебір, підставляючи в порівняння замість x числа, які утворюють повну систему лишків за модулем m, наприклад, числа 0, 1, 2, …, $m-1$. Для розв’язування певних класів порівнянь розроблено спеціальні методи.

Порівняння першого степеня, як правило, подають у вигляді:

$$ax \equiv b(\bmod m).$$

Теорема. Якщо НСД$(a,m)=d$ і $b \vdots d$, то порівняння першого степеня $ax \equiv b(\bmod m)$ має d розв’язків, якщо $b \,\overline{\vdots}\, d$, то порівняння розв’язків не має.

При цьому, якщо $d=1$, то порівняння має єдиний розв’язок x_0. Якщо $d>1$, то, поділивши початкове порівняння на d (властивість порівнянь 5), одержимо порівняння $a_1x \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m_1)$, яке має єдиний розв'язок x_0. Розв'язками початкового порівняння $ax \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ будуть числа:

$$x_0, x_0 + m_1,\ x_0 + 2m_1,\ \ldots,\ x_0 + (d-1)\cdot m_1,$$

які визначають класи лишків $x_0 + tm$, $x_0 + m_1 + tm$, $x_0 + 2m_1 + tm$, …, $x_0 + (d-1)\cdot m_1 + tm$ (це можна записати так: $x_0(\mathrm{mod}\, m)$, $x_0 + m_1(\mathrm{mod}\, m)$, $x_0 + 2m_1(\mathrm{mod}\, m)$, …, $x_0 + (d-1)\cdot m_1(\mathrm{mod}\, m)$).

Для знаходження розв'язків порівнянь першого степеня $ax \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ можна застосувати звичайний перебір, підставляючи в порівняння замість x числа, які утворюють повну систему лишків за модулем m, наприклад, числа 0, 1, 2, …, $m-1$. Але, якщо значення модуля m велике, то перебір буде неефективним.

Розв'язати порівняння $ax \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ при НСД$(a,m)=1$ можна за допомогою *методу Ейлера*. Відповідно до теореми Ейлера, якщо *НСД*$(a,m)=1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$. Оскільки $b \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ і $a^{\varphi(m)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$, то (за властивістю порівнянь 2) $b\cdot a^{\varphi(m)} \equiv b\cdot 1(\mathrm{mod}\, m)$, що еквівалентно $a\cdot(b\cdot a^{\varphi(m)-1}) \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$. Порівнюючи з $ax \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, одержуємо розв'язок:

$$x \equiv b\cdot a^{\varphi(m)-1}(\mathrm{mod}\, m),$$

де $\varphi(m)$ — функція Ейлера.

Слід зауважити, що розв'язування порівнянь за методом Ейлера може бути громіздким через необхідність знаходити великі степені чисел. У такому випадку порівняння можна звести до діофантового рівняння, яке легко розв'язати, використовуючи ланцюгові дроби (див. далі).

Ціле число b називають *мультиплікативним оберненим до числа а за модулем m*, якщо $ab \equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$. Позначають $b \equiv a^{-1}(\mathrm{mod}\, m)$. Число a, для якого існує число b, обернене за модулем m, називають *оборотним за модулем m*.

Теорема. Для числа a існує обернене за модулем m число b, тобто $ab \equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$, тоді і тільки тоді, коли НСД$(a,m)=1$.

Якщо число a взяти з повної системи лишків, то порівняння $ab \equiv 1(\bmod m)$ не завжди буде мати розв'язок (наприклад, $a = 4$, $m = 12$ і $\text{НСД}(4,12) = 3$). Тому треба розглянути тільки зведену систему лишків за модулем *m*, вилучивши з повної системи всі елементи, кратні модулеві; кількість елементів зведеної системи визначається функцією Ейлера $\varphi(m)$. Для будь-якого елемента зведеної системи за модулем *m* обернений елемент *b* буде розв'язком порівняння $ab \equiv 1(\bmod m)$:

$$b = a^{\varphi(m)-1}(\bmod m).$$

Одним з основних результатів теорії чисел є китайська теорема про лишки.

Теорема (*китайська теорема про лишки*). Нехай числа m_1, m_2, …, m_n попарно взаємно прості, тобто $\text{НСД}(m_i, m_j) = 1$ при $i \neq j = \overline{1,n}$. Тоді система порівнянь

$$\begin{cases} x = c_1(\bmod m_1), \\ x = c_2(\bmod m_2), \\ \quad \cdots \\ x = c_n(\bmod m_n) \end{cases} \qquad (*)$$

має єдиний розв'язок за модулем $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$.

Цю систему можна розв'язати шляхом послідовного знаходження для окремих порівнянь розв'язків, які визначають елементи $x + m_i t$ (де $t \in Z$) класу порівнянь, і підстановки їх в наступне порівняння.

Також для розв'язання системи порівнянь (*) можна скористатися *алгоритмом Гаусса*, відповідно до якого розв'язок системи порівнянь має вигляд:

$$x = x_0(\bmod m),$$

де $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$, $x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i M_i M_i^{-1}$, $M_i = \dfrac{m}{m_i}$, M_i^{-1} — число, обернене до числа M_i за модулем m_i.

Якщо в системі порівнянь окреме порівняння має вигляд :

$$a_i x = b_i(\bmod m_i)$$

і НСД$(a_i, m_i) = 1$, то розв'язком цього окремого порівняння буде $x = c_i (\mod m_i)$, тобто це порівняння буде мати такий самий вигляд, як у системі (*).

Якщо якесь окреме порівняння в системі має вигляд :

$$a_i x = b_i (\mod m_i)$$

і $НСД(a_i, m_i) = d_i > 1$, а також $b_i \vdots d_i$, то це порівняння має d_i різних розв'язків і відповідно треба розв'язати d_i різних систем порівнянь, при цьому модуль треба брати $m = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n$; якщо $b_i \overline{\vdots}\, d_i$, то система розв'язків не має.

Китайську теорему про лишки можна узагальнити на випадок, коли модулі m_1, m_2, …, m_n не є взаємно простими.

Теорема (*узагальнена китайська терема про лишки*). Якщо в системі порівнянь (*) не всі числа m_1, m_2, …, m_n попарно взаємно прості, то система має єдиний розв'язок за модулем $m = НСК(m_1, m_2, ..., m_n)$, тоді і тільки тоді, коли $c_i \equiv c_j (\mod НСД(m_i, m_j))$, або, що те саме $(c_i - c_j) \vdots НСД(m_i, m_j)$, при $i \neq j = \overline{1, n}$.

Приклад 7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 11x \equiv 5^{322} + 7^{486} (\mod 6), \\ 5x \equiv 6 (\mod 7), \\ x \equiv 3 (\mod 5). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mod m_i)$.

Розв'язання. Спочатку, враховуючи властивості порівнянь, розв'яжемо відносно *x* перше порівняння:

$$11x \equiv 5^{322} + 7^{486} (\mod 6);$$

$$11x \equiv (-1)^{322} + 1^{486} (\mod 6);$$

$$11x \equiv 2 (\mod 6);$$

$$-x \equiv -4 (\mod 6);$$

$$x \equiv 4 (\mod 6).$$

Порівняння виду $ax \equiv b(\bmod m)$ при НСД$(a,m)=1$ також можна розв'язати за допомогою методу Ейлера, відповідно до якого $x \equiv b \cdot a^{\varphi(m)-1}(\bmod m)$, де $\varphi(m)$ — функція Ейлера. Для порівняння $11x \equiv 2(\bmod 6)$ НСД$(11,6)=1$ маємо: оскільки $6 = 2 \cdot 3$, то $\varphi(6) = 6 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right) = 2$; отже, $x \equiv 2 \cdot 11^{2-1} = 2 \cdot 11 = 22 \equiv 4(\bmod 6)$.

Розв'яжемо друге порівняння, застосовуючи перетворення, які базуються на властивостях порівнянь:

$5x \equiv 6(\bmod 7)$;	або	$5x \equiv 6(\bmod 7)$;
$-2x \equiv 6(\bmod 7)$;		$-2x \equiv -1(\bmod 7)$;
$x \equiv -3(\bmod 7)$;		$2x \equiv 1(\bmod 7)$;
$x \equiv 4(\bmod 7)$.		$2x \equiv 8(\bmod 7)$;
		$x \equiv 4(\bmod 7)$.

Друге порівняння також можна розв'язати за допомогою методу Ейлера. Для порівняння $5x \equiv 6(\bmod 7)$ НСД$(5,7)=1$ і, оскільки число 7 просте, то $\varphi(7) = 7-1 = 6$; отже, $x \equiv 6 \cdot 5^{6-1} = 6 \cdot 5^5 = 6 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 5 \equiv (-1) \cdot 4 \cdot 4 \cdot (-2) = 32 \equiv 4(\bmod 7)$.

Маємо систему:

$$\begin{cases} x \equiv 4(\bmod 6), \\ x \equiv 4(\bmod 7), \\ x \equiv 3(\bmod 5). \end{cases}$$

Оскільки числа 6, 7, 5 попарно взаємно прості, то відповідно до китайської теореми про лишки ця система має єдиний розв'язок за модулем $m = 6 \cdot 7 \cdot 5 = 210$.

а) Знайдемо розв'язок системи порівнянь методом підстановок. Спочатку послідовно будемо знаходити загальний розв'язок кожного окремого порівняння системи і підставляти його в наступне порівняння.

Перше порівняння $x \equiv 4(\bmod 6)$ має розв'язок $x = 4$ і відповідно загальний розв'язок:

$$x = 4 + 6t\text{, де } t \in Z.$$

Підставимо його в друге порівняння $x \equiv 4(\bmod 7)$:

$$4 + 6t \equiv 4(\bmod 7),$$

$$6t \equiv 0(\bmod 7),$$

$$-t \equiv 0(\bmod 7),$$

$$t \equiv 0(\bmod 7),$$

звідки знайдемо $t = 0$ і відповідно загальний розв'язок :

$$t = 0 + 7u = 7u\text{, де } u \in Z.$$

Тоді:

$$x = 4 + 6t = 4 + 6 \cdot 7u = 4 + 42u.$$

У даному прикладі перші два порівняння мають однакові коефіцієнти при невідомому і однакові остачі від ділення, тому замість цих двох порівнянь $x \equiv 4(\bmod 6)$ і $x \equiv 4(\bmod 7)$ можна записати одне порівняння $x \equiv 4(\bmod 6 \cdot 7)$, тобто $x \equiv 4(\bmod 42)$, або $x = 4 + 42u$, де $u \in Z$.

Одержане значення x підставимо в третє порівняння $x \equiv 3(\bmod 5)$:

$$4 + 42u \equiv 3(\bmod 5),$$

$$42u \equiv -1(\bmod 5),$$

$$2u \equiv 4(\bmod 5),$$

$$u \equiv 2(\bmod 5),$$

звідки маємо $u = 2$ і відповідно загальний розв'язок:

$$u = 2 + 5v\text{, де } v \in Z.$$

Тоді:

$$x = 4 + 42 \cdot (2 + 5v) = 4 + 84 + 210v = 88 + 210v.$$

Отже:

$$x \equiv 88(\bmod 210).$$

Одержаний розв'язок $x = 88$ задовольняє всі три порівняння системи.

б) Для розв'язання системи скористаємося алгоритмом Гаусса. Обчислимо значення:

$$m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 6 \cdot 7 \cdot 5 = 210;$$

$$M_1 = \frac{m}{m_1} = \frac{210}{6} = 35,$$

$$M_2 = \frac{m}{m_2} = \frac{210}{7} = 30,$$

$$M_3 = \frac{m}{m_3} = \frac{210}{5} = 42.$$

Знайдемо обернені до чисел $M_1 = 35$, $M_2 = 30$, $M_3 = 42$ за відповідними модулями $m_1 = 6$, $m_2 = 7$, $m_3 = 5$ числа M_1^{-1}, M_2^{-1}, M_3^{-1}:

$35M_1^{-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\,6)$, $-M_1^{-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\,6)$, $M_1^{-1} \equiv -1(\mathrm{mod}\,6)$, отже, $M_1^{-1} \equiv 5(\mathrm{mod}6)$;

$30M_2^{-1} \equiv 1(\mathrm{mod}7)$, $2M_2^{-1} \equiv 8(\mathrm{mod}7)$, отже, $M_2^{-1} \equiv 4(\mathrm{mod}7)$;

$42M_3^{-1} \equiv 1(\mathrm{mod}5)$, $2M_3^{-1} \equiv 6(\mathrm{mod}5)$, отже, $M_3^{-1} \equiv 3(\mathrm{mod}5)$.

Тоді:

$$x = \sum_{i=1}^{3} c_i M_i M_i^{-1} = 4 \cdot 35 \cdot 5 + 4 \cdot 30 \cdot 4 + 3 \cdot 42 \cdot 3 = 1558 \equiv 88(\mathrm{mod}\,210).$$

Одержали той самий розв'язок $x = 88$, який визначає весь клас лишків $88 + 210t$, де $t \in Z$ (або $x \equiv 88(\mathrm{mod}\,210)$).

Використана література: [1, с. 298-305, 424-438], [2, с. 415-446, 450-453], [6, с. 55-70], [8, с. 7-16, 20-24, 28-42], [18, с. 69-85].

3.2. Ланцюгові дроби

Звичайним ланцюговим дробом (ще кажуть: звичайним неперервним дробом, арифметичним неперервним дробом) називають вираз виду:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \dots}}}}}$$

де a_0 — ціле число, a_1, a_2, a_3, …, a_n, … — натуральні числа, які називають *неповними частками* ланцюгового дробу.

Для скорочення запису ланцюговий дріб позначають так:

$$(a_0;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n,\ \dots).$$

Тут ціла частина числа відокремлюється крапкою з комою, а решта чисел — комами.

Кожному дійсному числу x у відповідність можна поставити єдиний ланцюговий дріб. Якщо число раціональне, то дріб буде скінченним $(a_0; a_1, a_2, a_3,..., a_n)$, а якщо ірраціональне, то нескінченним $(a_0; a_1, a_2, a_3,..., a_n,...)$, при цьому квадратичні ірраціональності, тобто ірраціональні корені квадратних рівнянь з цілими коефіцієнтами, розкладаються в періодичні ланцюгові дроби (наприклад, $\sqrt{2} = (1; 2, 2, 2,...)$, $\sqrt{3} = (1; 1, 2, 1, 2,...)$, $\sqrt{7} = (2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4,...)$). Розкладання трансцендентного числа $\pi = (3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14,...)$ не має ніяких закономірностей, а в розкладанні числа $e = (2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10,...)$ закономірності є.

Для подання будь-якого дійсного числа x ланцюговим дробом $(a_0; a_1, a_2, a_3,..., a_n,...)$ треба застосувати таку схему обчислень:

$$a_0 = \lfloor x \rfloor, \quad x_0 = x - a_0;$$

$$a_1 = \left\lfloor \frac{1}{x_0} \right\rfloor, \quad x_1 = \frac{1}{x_0} - a_1;$$

…

$$a_n = \left\lfloor \frac{1}{x_{n-1}} \right\rfloor, \quad x_n = \frac{1}{x_{n-1}} - a_n;$$

…

тут $\lfloor x \rfloor$ означає цілу частину числа x, тобто заокруглення до меншого ($\lfloor 2{,}6 \rfloor = 2$, $\lfloor -2{,}6 \rfloor = -3$).

Якщо x — раціональне число, то розкладання закінчиться після одержання при деякому n значення $x_n = 0$ і x буде подано скінченним ланцюговим дробом $x=(a_0;\, a_1,\, a_2,\, a_3,...,\, a_n)$. Якщо x — ірраціональне число, то розкладання буде нескінченним і x буде подано нескінченним ланцюговим дробом $x=(a_0;\, a_1,\, a_2,\, a_3,...,\, a_n,...)$.

Ланцюговий дріб $(a_0;\, a_1,\, a_2,\, a_3,...,\, a_k)$, де $0 \le k < n$, записаний у вигляді нескоротного дробу $\frac{P_k}{Q_k}$, називають *наближеним придатним дробом порядку k.*

Чисельники й знаменники нескоротних дробів можна обчислити за рекурентними співвідношеннями:

$$P_{k+1} = a_{k+1}P_k + P_{k-1},$$

$$Q_{k+1} = a_{k+1}Q_k + Q_{k-1}.$$

Для різниці сусідніх придатних дробів виконується рівність:

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{Q_k \cdot Q_{k-1}},$$

з якої випливає, що різниці $\frac{P_k}{Q_k} - x$ і $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} - x$ мають різні знаки.

Придатний дріб $\frac{P_k}{Q_k}$ апроксимує x з недостачею при парному k і з надлишком при непарному k.

Оцінку точності наближення дійсного числа x придатним дробом порядку $(k-1)$ можна знайти за формулою:

$$\left| x - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right| \le \frac{1}{Q_{k-1} \cdot Q_k}.$$

Для кожного нескінченного ланцюгового дробу існує єдина границя:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_k}{Q_k} = x,$$

яку називають значенням ланцюгового дробу.

Ланцюгові дроби використовують для наближення ірраціональних дробів придатними раціональними дробами. Часом на практиці, щоб спростити розв’язання задачі, наближення використовують і для раціональних дробів.

Наближення придатними дробами $\frac{P_k}{Q_k}$ є найкращими для дійсного числа x серед всіх його раціональних наближень, у яких знаменник не більший від Q_k.

Якщо число $x = \frac{a}{b}$ подано дробом, який можна ще скоротити, то нескоротний дріб $\frac{P_n}{Q_n}$ є скороченням цього дробу і $\text{НСД}(a,b) = \frac{a}{P_n} = \frac{b}{Q_n}$.

Діофантові рівняння — це поліноміальні рівняння з цілими коефіцієнтами (якщо коефіцієнти раціональні, то можна рівняння домножити на їхнє НСК і одержати цілі коефіцієнти), в яких невідомі змінні можуть набувати тільки цілих значень. Найпростішими є лінійні діофантові рівняння з двома невідомими $ax + by = c$, які називають *невизначеними рівняннями першого степеня*.

Діофантове рівняння з двома невідомими $ax + by = c$ можна розв'язати в цілих числах тоді і тільки тоді, коли число c ділиться на $\text{НСД}(a,b)$. При цьому, якщо $c = \text{НСД}(a,b)$, то існує єдиний розв'язок x, y; якщо $c \neq \text{НСД}(a,b)$, то існує нескінченна кількість розв'язків.

Ланцюговими дробами можна скористатися при розв'язуванні діофантових рівнянь

$$ax + by = c$$

(такі рівняння мають розв'язки в цілих числах тоді і тільки тоді, коли число c ділиться на $\text{НСД}(a,b)$).

У найпростішому випадку, коли $c = \text{НСД}(a,b)$, треба $\frac{a}{b}$ розкласти в ланцюговий дріб, взяти передостанній придатний дріб $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ і знайти значення невідомих за формулами:

$$x = (-1)^{n-1} Q_{n-1},$$

$$y = (-1)^n P_{n-1}.$$

Ці значення є єдиним розв'язком рівняння.

Якщо НСД$(a,b)=1$, то рівняння $ax+by=1$ має єдиний цілий розв'язок x, y; якщо НСД$(a,b)>1$, то рівняння $ax+by=1$ цілих розв'язків не має.

Теорема. Якщо рівняння $ax+by=1$ має розв'язок x_0, y_0, то рівняння $ax+by=c$ має розв'язок $x=x_0c+bt$, $y=y_0c-at$, де t — будь-яке ціле число.

Таким чином, у загальному випадку, коли c ділиться на НСД(a,b), але $c\neq$ НСД(a,b), значення невідомих можна знайти за формулами:

$$x=(-1)^{n-1}Q_{n-1}c+bt,$$

$$y=(-1)^{n}P_{n-1}c-at,\ t\in Z,$$

де $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ є передостаннім придатним дробом для $\frac{a}{b}$.

До діофантових рівнянь першого степеня можна зводити порівняння першого степеня. Нехай є порівняння $ax\equiv b(\operatorname{mod} m)$ і НСД$(a,m)=1$, тобто порівняння має єдиний розв'язок. Розв'язком порівняння $ax\equiv b(\operatorname{mod} m)$ є таке ціле число x, що $(ax-b)\vdots m$, тобто $ax-b=mz$ або $ax-mz=b$, де z — будь-яке ціле число. Зробимо заміну $y=-z$ і одержимо діофантове рівняння $ax+my=b$. Воно має розв'язок, коли $b\vdots$НСД(a,m). Цей розв'язок можна знайти за формулою (при розв'язуванні порівняння значення невідомого y не використовується):

$$x=(-1)^{n-1}Q_{n-1}b+mt,\ t\in Z,$$

де Q_{n-1} — знаменник передостаннього придатного дробу $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ для дробу $\frac{a}{m}$.
Оскільки m — це величина модуля, то доданок mt не впливає на розв'язок порівняння за модулем m і розв'язок можна шукати за формулою:

$$x=(-1)^{n-1}Q_{n-1}b.$$

Приклад 8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $52x+44y=28$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

Розв'язання. Щоб розв'язати діофантове рівняння першого степеня з двома невідомими $ax+by=c$ треба спочатку перевірити, чи виконується необхідна й достатня умова існування його розв'язку в цілих числах. У даному рівнянні $a=52$, $b=44$, $c=28$. Знайдемо $НСД(a,b)=НСД(52,44)$ за алгоритмом Евкліда (скористаємося алгоритмом на основі ділення):

$$a=52,\ b=44;$$

$$b\neq 0,\ r=52 \bmod 44=8;$$

$$\to\ a=44,\ b=8;$$

$$b\neq 0,\ r=44 \bmod 8=4;$$

$$\to\ a=8,\ b=4;$$

$$b\neq 0,\ r=8 \bmod 4=0;$$

$$\to\ a=4,\ b=0;$$

$$b=0,\ НСД(52,44)=4.$$

Отже, $c=28$ ділиться на $НСД(52,44)=4$, але йому не дорівнює, тому рівняння має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах.

Скоротимо на $НСД(52,44)=4$ всі коефіцієнти даного рівняння і одержимо еквівалентне рівняння:

$$13x+11y=7,$$

тобто $a'=13$, $b'=11$, $c'=7$.

Для розв'язання одержаного рівняння скористаємося апаратом ланцюгових дробів. Розкладемо дріб $\frac{a'}{b'}=\frac{13}{11}$ у ланцюговий:

$$\frac{13}{11}=\mathbf{1}+\frac{2}{11};$$

$$\frac{11}{2}=\mathbf{5}+\frac{1}{2};$$

$$\frac{2}{1}=\mathbf{2}+0.$$

Отже: $$\frac{13}{11} = (1; 5, 2) = 1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}, \quad n = 2.$$

Побудуємо придатний дріб порядку $(n-1) = 1$:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_1}{Q_1} = (1; 5) = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}.$$

Одержимо загальний розв'язок рівняння (нескінченну кількість розв'язків):

$$x = (-1)^{n-1} Q_{n-1} c' + b' t = (-1)^1 \cdot 5 \cdot 7 + 11t = -35 + 11t,$$

$$y = (-1)^n P_{n-1} c' - a' t = (-1)^2 \cdot 6 \cdot 7 - 13t = 42 - 13t,$$

де $t \in Z$ — будь-яке ціле число.

Знайдемо кілька часткових розв'язків, підставивши в одержаний загальний розв'язок $x = -35 + 11t$, $y = 42 - 13t$ конкретні значення *t*, наприклад:

$$t = 0:\ x = -35 + 11 \cdot 0 = -35,\ y = 42 - 13 \cdot 0 = 42;$$

$$t = -1:\ x = -35 + 11 \cdot (-1) = -46,\ y = 42 - 13 \cdot (-1) = 55;$$

$$t = 1:\ x = -35 + 11 \cdot 1 = -24,\ y = 42 - 13 \cdot 1 = 29;$$

$$t = 2:\ x = -35 + 11 \cdot 2 = -13,\ y = 42 - 13 \cdot 2 = 16;$$

$t = 3:\ x = -35 + 11 \cdot 3 = -2,\ y = 42 - 13 \cdot 3 = 3$ тощо.

Підстановка одержаних часткових значень у початкове рівняння $52x + 44y = 28$ підтверджує правильність знайденого загального розв'язку. Наприклад, при $x = -35$, $y = 42$ маємо: $52 \cdot (-35) + 44 \cdot 42 = -1820 + 1848 = 28$.

Використана література: [1, с. 306-315], [2, с. 397-413], [8, с. 72-94], [9, с. 41-46].

3.3. Системи числення

Система числення (ще кажуть: нумерація) — це сукупність правил і знаків, за допомогою яких можна подавати (кодувати) будь-яке невід'ємне число.

У *позиційних системах числення* та сама цифра в записі числа набуває різних значень залежно від своєї позиції. Як правило, вага кожної позиції кратна натуральному числу $b > 1$, яке є *основою системи числення*. Число a, яке записується як $a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0$, де $0 \le a_k < b$, $k = \overline{0, n}$, $b = 2, 3, ...$, можна подати так: $a = \sum_{k=0}^{n} a_k b^k$. Десяткова система числення має основу $b = 10$, двійкова — $b = 2$ При будь-якому $b > 1$, його значення у відповідній системі подається як 10_b.

Алгоритм переходу від двійкового подання числа до десяткового:

К1. Поставити у відповідність цифрам цілої частини двійкового числа, ідучи справа наліво, числа 0, 1, 2, 3…, а цифрам дробової частини, ідучи зліва направо, поставити у відповідність числа -1, -2, -3… Ці числа є показниками степенів основи 2.

К2. Знайти суму добутків цифр (0 чи 1) двійкового числа на відповідні їм степені основи 2. Одержане значення суми є десятковим поданням двійкового числа.

Аналогічним є алгоритм переходу від подання чисел в системі числення з основою b_1 до подання в системі з основою b_2.

Алгоритм переходу від десяткового подання числа до двійкового:

К1. Виділити в десятковому числі цілу і дробову частини.

К2. Якщо ціла частина дорівнює нулю, то перейти на К3. Якщо ціла частина відмінна від нуля, то поділити її на 2 — буде одержано цілу частину і остачу (0 чи 1); запам'ятати, що виконувалося ділення; перейти на К2.

К3. Якщо ділення виконувалося, то одержані остачі від ділення записати у зворотному порядку — буде одержано двійкове подання цілої частини числа; інакше ціла частина залишається нульовою.

К4. Якщо дробова частина дорівнює нулю, то перейти на К5. Якщо дробова частина відмінна від нуля, то помножити її на 2 — буде одержано цілу частину (0 чи 1) і дробову; запам'ятати, що виконувалося множення. Якщо дробова частина повторюється (двійковий дріб — періодичний), то перейти на К5 чи передбачити іншу дію; інакше перейти на К4.

К5. Якщо множення виконувалося, то одержані після множення цілі частини записати у прямому порядку — буде одержано двійкове подання дробової частини числа; інакше дробова частина залишається нульовою.

К6. Сформувати з двійкових подань цілої і дробової частин двійкове подання числа.

При переведенні десяткових дробів у двійкові, як правило, буде одержано періодичний двійковий дріб (наприклад, для чисел 0,1-0,4, 0,6-0,9). Періодичний дріб — нескінченний, а комп'ютер оперує лише зі скінченними числами, поданими скінченними послідовностями 0 і 1. Це призводить до помилок заокруглення.

Десяткові дроби, кратні степеневі числа $\frac{1}{2}$, переводяться в скінченні двійкові дроби. Тому робота з ними, як і з цілими числами, до помилок заокруглення не призводить.

Для переходу від двійкового до вісімкового подання числа треба в двійковому поданні цілої частини виділити, ідучи справа наліво, по три розряди (якщо зліва розрядів не вистачає, то дописати потрібну кількість нулів), у двійковому поданні дробової частини іти зліва направо і теж виділити по три розряди (якщо справа розрядів не вистачає, то дописати потрібну кількість нулів), а потім скористатися таблицею відповідностей:

Десяткове число	Двійкове число	Вісімкова цифра
0	000	0
1	001	1
2	010	2
3	011	3

Десякове число	Двійкове число	Вісімкова цифра
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7

Аналогічно здійснюється перехід від двійкового до шістнадцяткового подання, тільки замість трьох треба виділяти по чотири розряди і скористатися такою таблицею відповідностей:

Десяткове число	Двійкове число	Шістнадцят-кова цифра
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

У комп'ютері віднімання реалізується тією ж мікросхемою (суматором), що й додавання. Для подання від'ємних чисел у комп'ютері використовується *додатковий код*:

$$\text{додатковий код} = \text{зворотний код} + 1,$$

де зворотний код є логічним доповненням (1 треба замінити на 0, а 0 — на 1) коду додатного числа.

В арифметиці в додаткових кодах 1, яка виноситься за розрядну сітку, не враховується.

Цілі числа зі знаком (signed) у пам'яті комп'ютера зберігаються в спеціальному форматі. Перший зліва розряд коду вказує на знак числа: 0 — число додатне, 1 — число від'ємне; решта розрядів містять значення числа. Якщо ціле число без знака (unsigned), то всі розряди виділеної ділянки пам'яті містять значення цього числа. При виконанні арифметичних операцій може відбуватися вихід за межі розрядної сітки і за рахунок використання такого формату для подання цілих чисел можуть з'являтися непередбачувані результати.

Якщо працювати з числами, які займають 4 чи 8 байтів пам'яті, то користувачеві легше проводити обробку не двійкового коду, а шістнадцяткового. При цьому інверсії для шістнадцяткових цифр будуть такими:

$$\begin{array}{lcccccccccccccccc} \text{цифра} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & A & B & C & D & E & F \\ \text{інверсія} & F & E & D & C & B & A & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}.$$

Для виконання обчислень з дійсними числами (ще кажуть: числами з плаваючою точкою) у двійковому коді розроблено стандарт IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) 754-1985 (стандарт в 2008 і 2019 роках доповнено новими форматами), який використовується в більшості мікропроцесорів і логічних пристроїв, а також програмних засобів.

Відповідно до стандарту IEEE при роботі з дійсними числами одинарної і подвійної точності, для яких виділяється 4 і 8 байтів пам'яті (у мові C це дані типів float і double), 23 і 52 біти зберігають *мантису* — значущі двійкові цифри числа (відповідно це 7-8 і 15-16 десяткових розрядів), а також 8 і 11 бітів зберігають значення порядку — *експоненту*. Такі формати дають відповідно діапазони значень 1,4E-45…3,4E+38 і 4,9E-324…1,7E+308.

Якщо мантиса M десяткового числа набуває значення з діапазону $1 \le M < 10$, то число подано в *нормалізованому експоненційному вигляді*. Якщо мантиса M десяткового числа набуває значення з діапазону $0{,}1 \le M < 1$, то число подано в де*нормалізованому експоненційному вигляді*.

Дійсні числа можуть бути як додатними, так і від'ємними — в пам'яті в знаковому розряді, як і для цілих чисел, зберігається інформація про знак числа: $S(+) = 0$, $S(-) = 1$. Особливістю двійкового нормалізованого вигляду є те, що запис мантиси завжди починається з 1 (в інших системах числення мантиса такої властивості не має, бо $1 \le M < b$, де $b > 2$ — основа системи числення). Тому перша 1 мантиси в пам'яті не зберігається — вона є неявною (прихованою); зберігається *залишок мантиси*. Крім того, оскільки експонента може бути як додатною, так і від'ємною, то, щоб не зберігати інформацію про її знак, до значення експоненти у випадку зберігання значення числа в 4 байтах пам'яті додається число 127, а у випадку зберігання у 8 байтах — 1023.

Формат для зберігання значень дійсних чисел одинарної точності, які займають 4 байти пам'яті, має вигляд:

31	30 … 23	22 … 0
S	E	M
знак	зміщена експонента	залишок мантиси
1	8	23

Більшість дійсних чисел у комп'ютері подається в нормалізованому вигляді (з неявним бітом мантиси 1 і ненульовим порядком), а числа, близькі до 0, — у денормалізованому (з порядком 0 і неявним старшим бітом мантиси 0). Також є спеціальні формати для подання нуля, нескінченностей і NaN (Not a Number).

Хоч множина дійсних чисел (навіть лише з деякого проміжку) нескінченна, дійсні числа, які можна подати в форматах IEEE 754, утворюють скінченну множину. Тобто неперервна *множина дійсних чисел дискретизується* і подається в комп'ютері своєю дискретною підмножиною. За рахунок цього більшість дійсних чисел подаються з помилкою. При цьому абсолютна максимальна помилка дорівнює половині кроку чисел, який подвоюється зі збільшенням експоненти двійкового числа на одиницю — чим далі від нуля, тим крок чисел буде більшим.

Якщо значущі цифри числа не поміщаються у відведену форматом ділянку пам'яті, то числа заокруглюються. Стандартом IEEE 754 передбачено *п'ять правил заокруглення*:

— до ближчого числа з прив'язкою до парного (стосується чисел з дробовою частиною 0,5 при заокругленні до цілого: $12{,}5 \approx 12$, $13{,}5 \approx 14$, $-8{,}5 \approx -8$; аналогічно, якщо число, яке закінчується цифрою 5, заокруглювати до десятків, то: $125 \approx 120$, $135 \approx 140$, $-85 \approx -80$; при заокругленні до десятих, тобто до одного знака після коми: $1{,}25 \approx 1{,}2$, $1{,}35 \approx 1{,}4$, $-0{,}85 \approx -0{,}8$ тощо), яке використовується за замовчуванням відповідно до стандарту 2008 року;

— до ближчого з прив'язкою до нескінченності ($12{,}5 \approx 13$, $-7{,}5 \approx -8$);

— до нуля ($12{,}5 \approx 12$, $-7{,}5 \approx -7$);

— до плюс нескінченності ($12{,}5 \approx 13$, $-7{,}5 \approx -7$);

— до мінус нескінченності ($12{,}5 \approx 12$, $-7{,}5 \approx -8$).

Приклад 9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,3 і 1,3 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому перша дробова частина зберігається з надлишком, а друга з недостачею:

```
...
  float a, b;
  a=0.3f;
  b=1.3f;
  printf(" float a=%22.19f\n float b=%22.19f\n",a,b);
...
```

```
float a= 0.3000000119209289600
float b= 1.2999999523162842000
```

Розв'язання. Спочатку подамо числа 0,3 і 1,3 у двійковій системі числення. При цьому цілу і дробову частини треба перетворювати окремо. Десяткове число 0_{10} дорівнює двійковому числу 0_2; десяткове число 1_{10} дорівнює двійковому числу 1_2. Одержимо двійкові цифри дробової частини, виконавши множення на 2:

$$
\begin{array}{lll}
0{,}3 \cdot 2 = & 0{,}6 & \text{ціла частина } \mathbf{0}\text{, дробова } 0{,}6; \\
\mathbf{0{,}6} \cdot 2 = & 1{,}2 & \text{ціла частина } \mathbf{1}\text{, дробова } 0{,}2; \\
0{,}2 \cdot 2 = & 0{,}4 & \text{ціла частина } \mathbf{0}\text{, дробова } 0{,}4; \\
0{,}4 \cdot 2 = & 0{,}8 & \text{ціла частина } \mathbf{0}\text{, дробова } 0{,}8; \quad \downarrow \\
0{,}8 \cdot 2 = & 1{,}6 & \text{ціла частина } \mathbf{1}\text{, дробова } 0{,}6; \\
\mathbf{0{,}6} \cdot 2 = & 1{,}2 & \text{ціла частина } \mathbf{1}\text{, дробова } 0{,}2; \\
\ldots & &
\end{array}
$$

У даному випадку при перетворенні скінченного десяткового дробового числа $0{,}3_{10}$ у двійкове подання одержано періодичний (нескінченний) двійковий дріб $0{,}0(1001)_2$.

Розглянемо подання чисел 0,3 і 1,3 в пам'яті комп'ютера:

$0{,}3_{10} = 0{,}0(1001)_2$,

$1\underbrace{0011001100110011001100\mathbf{1}}_{\text{23 розряди}}\mathbf{100...}_2$ з експонентою -2_{10},

$1\underbrace{001100110011001100110\mathbf{10}}_{\text{23 розряди}}{}_2$ — при заокругленні одержано значення

з надлишком;

$1{,}3_{10} = 1{,}0(1001)_2$,

$1\underbrace{0100110011001100110011\mathbf{0}}_{\text{23 розряди}}\mathbf{011...}_2$ з експонентою -0_{10},

$1\underbrace{010011001100110011001\,1\mathbf{0}}_{\text{23 розряди}}{}_2$ — при заокругленні одержано значення з недостачею.

Таким чином, при збереженні в пам'яті комп'ютера значень типу float 0,3 і 1,3 двійкові подання їхніх дробових частин, які є двійковими періодичними дробами, відрізняються, оскільки ці числа мають різні мантиси, але для зберігання цих мантис виділяються однакові ділянки пам'яті і, крім того, мантиси заокруглюються.

Використана література: [18, с. 8-14], [21, с. 6-68].

Питання для самоконтролю

1. Вкажіть властивості подільності цілих чисел. Яке натуральне число називають простим, а яке складеним? Сформулюйте теорему Евкліда про прості числа. У чому полягає метод виділення множників Ферма?

2. Сформулюйте загальну ознаку подільності цілих чисел. Сформулюйте основну теорему арифметики. Сформулюйте узагальнену ознаку подільності двох складених чисел.

3. Що називають найбільшим спільним дільником і як його знайти?У чому полягає алгоритм Евкліда знаходження найбільшого спільного дільника? Що називають найменшим спільним кратним і як його знайти? Які числа називають взаємно простими, а які попарно взаємно простими?

4. Що можна обчислити за допомогою функції Ейлера? Вкажіть її основні властивості.

5. Що таке лишок за модулем? Що таке повна система лишків за модулем і що таке зведена система лишків за модулем? Чим вони відрізняються?

6. Які числа називають порівнюваними за модулем? Вкажіть основні властивості порівнянь.

7. Сформулюйте теорему Ейлера і малу теорему Ферма. Для чого їх використовують?

8. Яке порівняння називають порівнянням першого степеня? Вкажіть умови, за яких воно має розв’язки і коли не має розв’язків. Вкажіть методи розв’язання порівнянь першого степеня.

9. Яке число називають мультиплікативним оберненим до заданого числа за певним модулем. Яка умова його існування? Як знайти це число?

10. Коли система порівнянь має єдиний розв’язок (сформулюйте китайську теорему про лишки). У чому полягає метод підстановок при розв’язанні системи порівнянь? У чому полягає метод Гаусса розв’язання системи порівнянь? Коли застосовують узагальнену китайська терему про лишки?

11. Що називають звичайним ланцюговим дробом? Чи кожному дійсному числу у відповідність можна поставити єдиний ланцюговий дріб? Якими будуть ланцюгові дроби для раціональних чисел, для квадратичних ірраціональностей, для трансцендентних чисел?

12. Як подати дійсне число ланцюговим дробом? Що таке наближений придатний дріб, як його знайти і для чого його використовують?

13. Що таке діофантове рівняння? Яке діофантове рівняння називають невизначеним рівнянням першого степеня з двома невідомими? Коли це рівняння має розв’язки і як їх можна знайти?

14. Що таке система числення? Які позиційні системи числення використовують найчастіше? Як перейти від десяткового подання числа до двійкового і навпаки? Яка особливість переведення десяткових дробів у двійкові? Як перейти від двійкового подання числа до вісімкового чи шістнадцяткового і навпаки?

15. Що таке додатковий код цілого від’ємного числа? Як його знайти?

16. Як кодуються в комп’ютері числа з плаваючою комою? Що таке мантиса і що таке експонента числа? Які дійсні числа подаються в нормалізованому експоненційному вигляді, а які в денормалізованому експоненційному вигляді? Що таке залишок мантиси і що таке зміщена експонента?

17. Чому при зберіганні в комп’ютері дійсні чисела дискретизуються? Вкажіть правила заокруглення дійсних чисел відповідно до стандарту IEEE 754.

Тема 4. Основи комбінаторики. Потужність множини

4.1. Основи комбінаторики

Способи підрахунку кількості елементів у скінченних множинах вивчає *комбінаторика*.

Частина елементів множини утворює її *підмножину*. Кожна підмножина елементів теж є множиною. У множині елементи не повторюються і порядок елементів не має значення.

Правило обчислення кількості підмножин. Нехай множина містить n елементів. Кожен елемент має альтернативу з двох випадків: увійти в підмножину чи ні. Тоді загальна кількість підмножин, які можуть утворитися із цих елементів, дорівнює 2^n.

Правило суми. Нехай множина подій $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ містить k несумісних подій (тобто, кожна окрема подія має відмінні від інших подій варіанти результатів) і подія A_1 має n_1 різних варіантів результату, подія A_2 — n_2 інших різних варіантів результату, … , подія A_k — n_k відмінних від попередніх різних варіантів результату, тоді подія чи A_1, чи A_2, … , чи A_k має $n_1 + n_2 + ... + n_k$ варіантів результату.

Правило множення (ще кажуть: правило добутку, правило обчислення кількості всіх можливих варіантів, основний принцип комбінаторики). Якщо послідовно складна подія $(A_1, A_2, ..., A_k)$ містить k ізольованих подій і спочатку відбувається перша з них A_1 і вона має n_1 різних варіантів результату, потім відбувається друга подія A_2 і вона має n_2 різних варіантів результату, …, потім відбувається k-а подія A_k і вона має n_k різних варіантів результату, то загальна кількість різних варіантів результату послідовно складної події дорівнює добуткові $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$.

Для знаходження всіх можливих варіантів результату можна скористатися *граф-деревом логічних можливостей*.

Правило обчислення кількості підмножин є частковим випадком правила добутку. Якщо альтернатив буде більше, ніж дві, то для обчислення кількості можливих варіантів можна сформулювати аналогічне *правило*: нехай множина містить n елементів і кожен елемент має альтернативу з m ($m \geq 2$) випадків, тоді загальна кількість можливих варіантів дорівнює m^n.

Розміщеннями називають послідовності, утворені з n різних елементів по m ($m \leq n$) елементів, які відрізняються або складом елементів, або їхнім порядком.

Правило обчислення кількості розміщень. Кількість розміщень m різних елементів на n різних місцях (або: кількість усіх впорядкованих m-елементних послідовностей із n-елементної множини) при $m \leq n$ дорівнює:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ і за означенням $0! = 1$.

При великих n для наближеного обчислення значення $n!$ використовують *формулу Стірлінга*: $n! \approx (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$, де $e \approx 2{,}71828182845904...$ (значенням трансцендентного числа e є границя, яку в математиці називають другою стандартною границею), $\pi = 3{,}14159265358979....$

Правило обчислення кількості розміщень з повтореннями. Якщо із n різних елементів множини утворювати m-елементні послідовності, в кожну з яких кожен вибраний елемент може входити будь-яку кількість разів (тобто від 0 до m разів), то кількість таких послідовностей дорівнює:

$$\widetilde{A}_n^m = n^m,$$

при цьому можливо, що $m > n$.

Перестановками називають послідовності, утворені з тих самих різних елементів множини, які відрізняються тільки порядком розташування елементів.

Правило обчислення кількості перестановок. Кількість перестановок із n різних елементів (або: кількість усіх способів впорядкування елементів n-елементної множини) дорівнює:

$$P_n = n!.$$

Правило обчислення кількості перестановок з повтореннями. Якщо серед n елементів сукупності є n_1 елементів одного виду, n_2 елементів іншого виду, … , n_k елементів k-го виду, то кількість перестановок з повтореннями обчислюють за формулою:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} ,$$

де $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Сполуками (ще кажуть: комбінаціями) називають послідовності, утворені з n різних елементів по m ($m \le n$) елементів, які відрізняються хоча б одним елементом.

Правило обчислення кількості сполук. Кількість сполук із n різних елементів по m (або: кількість усіх m-елементних підмножин n-елементної множини) при $m \le n$ дорівнює:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} .$$

Величину C_n^m називають *біноміальним коефіцієнтом.*

Біном Ньютона має вигляд:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Властивості біноміальних коефіцієнтів:

1. $C_n^m = \dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!} = \dfrac{n!}{(n-m)! \cdot m!} = C_n^{n-m}$.

2. $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$.

3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

4. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0$.

Якщо n-елементна сукупність містить елементи лише двох видів і елементів першого виду є m, а елементів другого виду — $(n-m)$, то для цієї сукупності кількість перестановок з повтореннями дорівнює:

$$P_n^{m, n-m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} = C_n^m .$$

Правило обчислення кількості сполук з повтореннями. Якщо із n різних елементів множини утворювати m-елементні набори, в кожен з яких кожен вибраний елемент може входити *будь-яку кількість разів* (тобто від 0 до m разів) і порядок елементів у яких не враховується, то кількість таких наборів буде:

$$f_n^m = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1} ,$$

при цьому можливо, що $m > n$.

Правило обчислення кількості сполук з повтореннями, якщо кожен елемент входить у сполуку хоч би один раз. Якщо із n різних елементів множини утворювати m-елементні набори (причому $m \geq n$), в кожен з яких кожен вибраний елемент може входити *хоч би один раз* (тобто не менше одного разу) і порядок елементів у яких не враховується, то кількість таких наборів буде:

$$\tilde{f}_n^m = f_n^{m-n} = C_{m-1}^{m-n} = C_{m-1}^{n-1}.$$

Правило обчислення кількості способів розбиття множини на підмножини. Кількість способів, якими можна розбити n-елементну множину на k підмножин відповідно з n_1, n_2, ..., n_k елементами (де $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$), становить:

$$C_n^{n_1, n_2, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}.$$

Величину $C_n^{n_1, n_2, ..., n_k}$ називають *поліноміальним коефіцієнтом*.

Розбиття, в яких підмножини повторюються, але розміщені в різному порядку, наприклад, (A, B) і (B, A) — різні. Це можливо лише в тому випадку, коли утворювані підмножини містять однакову кількість елементів, тобто мають однакові обсяги. Послідовність утворення підмножин на загальну кількість розбиттів не впливає.

Правило обчислення кількості способів одночасного утворення різних підмножин (*без врахування їхнього порядку*). Нехай із n-елементної множини одночасно утворюється k підмножин (без врахування їхнього порядку) відповідно з n_1, n_2, ..., n_k елементами (де $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$), серед яких деякі підмножини мають однакову кількість елементів, причому з певною однією кількістю елементів є k_1 підмножин, з іншою — k_2, ..., ще з іншою — k_m, тоді кількість способів утворення таких підмножин становить:

$$\frac{C_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}\ .$$

Нехай дано дві скінченні множини *A* і *B*, перетин яких не порожній (або: події *A* і *B* сумісні), тобто $A\cap B\neq\varnothing$. Кількість елементів об'єднання двох множин можна обчислити за *формулою включень і виключень*:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|\ .$$

Для об'єднання трьох множин, які в загальному випадку можуть перетинатися одна з одною, *формула включень і виключень* має вигляд:

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

Для будь-яких *n* множин, які в загальному випадку можуть перетинатися одна з одною, *формула включень і виключень* має вигляд:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^{n+1}\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|$$

або формулу подають ще так:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right|=|\Omega|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^{n}\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|.$$

Приклад 10. Розглянемо типові задачі комбінаторики.

а) У ящику є 4 білі і 9 чорних куль. Скількома способами можна вибрати серед них 2 білі і 3 чорні кулі?

Розв'язання. Маємо послідовно складну подію: спочатку вибираємо білі кулі, а потім чорні (застосовуємо правило множення). Оскільки нас цікавлять лише вибрані кулі, то порядок їхнього вибирання значення не має (обчислюємо кількість сполук). Отже, кількість способів дорівнює:

$$C_4^2\cdot C_9^3=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{9!}{3!\cdot 6!}=\frac{4\cdot 3}{2}\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}=6\cdot 84=504\,.$$

б) У ящику є 5 білих і 8 чорних куль. Скількома способами можна вибрати серед них 3 білі або 6 чорних куль?

Розв'язання. Оскільки треба вибрати певну кількість білих куль або певну кількість чорних куль (застосовуємо правило додавання) і нас цікавлять лише вибрані кулі, то порядок їхнього вибирання значення не має (обчислюємо кількість сполук). Отже, кількість способів дорівнює:

$$C_5^3 + C_8^6 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} + \frac{8!}{6!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{2} + \frac{8\cdot 7}{2} = 10 + 28 = 38.$$

в) Скількома способами можна розділити 12 речей між 4 людьми порівну?

Розв'язання. Поділити речі між людьми — це утворити підмножини речей і розподілити їх між людьми. Оскільки речі діляться між людьми порівну (12:4=3, тобто буде по 3 речі кожній людині), то всі підмножини речей будуть мати однакову кількість елементів, а отже, в кількості розбиттів уже буде враховано різний порядок підмножин. Отже, кількість способів дорівнює:

$$C_{12}^{3,3,3,3} = \frac{12!}{3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!} = 369600.$$

г) Скільки різних 5-буквених послідовностей можна утворити із семи букв А, Б, В, Г, Ґ, Д, Е (наприклад, написаних на окремих картках), якщо кожна буква в послідовності використовується один раз?

Розв'язання. Щоб одержати 5-буквені послідовності із семи різних букв А, Б, В, Г, Ґ, Д, Е, якщо кожна буква використовується один раз, треба вибрати по 5 букв і розмістити їх у різному порядку, тобто утворити розміщення. Кількість розміщень дорівнює:

$$A_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 2520.$$

г) Скільки різних 5-буквених послідовностей можна утворити із семи букв А, Б, В, Г, Ґ, Д, Е (наприклад, позначених на клавіатурі комп'ютера), якщо кожна буква в послідовності може використовуватися будь-яку кількість разів?

Розв'язання. Щоб одержати 5-буквені послідовності із семи різних букв А, Б, В, Г, Ґ, Д, Е так, щоб кожна буква використовувалася будь-яку кількість разів (від 0 до 5 разів), треба утворити розміщення з повтореннями, кількість яких дорівнює:

$$\widetilde{A}_7^5 = 7^5 = 16807.$$

д) Скільки різних 10-буквених послідовностей можна утворити із букв слова МАТЕМАТИКА?

Розв'язання. У слові МАТЕМАТИКА є 10 букв, серед яких буква М повторюється двічі, буква А — тричі, буква Т — двічі, решта букв — по одному разу. Усі можливі 10-буквені послідовності будуть перестановками з повтореннями, кількість яких дорівнює:

$$P_{10}^{2,3,2} = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{2\cdot 2} = 151200.$$

е) У саду ростуть троянди трьох кольорів: червоні, білі й рожеві. Скільки можна утворити з них різних за кольоровим складом 5-квіткових букетів?

Розв'язання. Троянд є три види. У букеті порядок квіток значення не має, тому будуть утворюватися сполуки з повтореннями. Їхня кількість дорівнює:

$$f_3^5 = C_{3+5-1}^5 = C_7^5 = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21.$$

є) У саду ростуть троянди трьох кольорів: червоні, білі й рожеві. Скільки можна утворити з них різних 5-квіткових букетів, щоб у кожному букеті обов'язково були квіти різних кольорів?

Розв'язання. Троянд є три види. У букеті порядок квіток значення не має, тому будуть утворюватися сполуки з повтореннями, і крім того, оскільки в букеті обов'язково мають бути троянди різних кольорів, то кількість різних букетів дорівнює:

$$\widetilde{f}_3^5 = f_3^{5-3} = C_{5-1}^2 = C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6.$$

ж) Із 20 програмістів відділу 14 програмують мовою С, 8 — мовою Java, 5 — обома мовами. Решта програмістів програмують мовою Phyton. Скільки програмістів використовують мову Phyton?

Розв'язання. Позначимо множини програмістів, які програмують мовою C — C, мовою Java — J, мовою Phyton — P, множину всіх програмістів — Ω. За умовою задачі $|\Omega| = |C \cup J \cup P| = 20$, $|C| = 14$, $|J| = 8$, $|P| = x$, $|C \cap J| = 5$, $|C \cap P| = 0$, $|J \cap P| = 0$, $|C \cap J \cap P| = 0$. Застосуємо формулу включень і виключень:

$$|\Omega| = |C| + |J| + |P| - |C \cap J| - |C \cap P| - |J \cap P| + |C \cap J \cap P|;$$

одержимо рівняння відносно невідомого x:

$$20 = 14 + 8 + x - 5,$$

$$x = 3.$$

Отже, 3 програмісти програмують мовою Phyton.

Використана література: [1, с. 316-346], [3, с. 214-225], [5, с. 408-441], [7, с. 60-67], [16, с. 48-61], [17, с. 179-199], [20, с. 211-243].

4.2. Потужність множини

Якщо кожному елементу множини A ставиться у відповідність лише один елемент множини B, то між множинами A і B встановлено *однозначну відповідність*.

Якщо встановлюється однозначна відповідність в обидва боки, тобто різним елементам множини A однозначно ставляться у відповідність різні елементи множини B, то відповідність називають *взаємно однозначною*, а множини A і B називають *еквівалентними* або *рівнопотужними*. Позначають це так: $A \sim B$.

Для будь-яких рівнопотужних множин A, B і C справедливі такі *властивості*.

1. Рефлексивність: $A \sim A$.

2. Симетричність (взаємність): якщо $A \sim B$, то $B \sim A$.

3. Транзитивність (перехідність): якщо $A \sim B$ і $B \sim C$, то $A \sim C$.

Непорожні множини можуть містити скінченну чи нескінченну кількість елементів. Їх відповідно називають *скінченними* чи *нескінченними*. Нескінченні множини можуть бути злічуваними й незлічуваними.

Множину називають *злічуваною*, якщо між усіма її елементами і натуральним рядом чисел можна встановити взаємно однозначну відповідність, тобто елементи множини можна занумерувати в нескінченну послідовність a_1, a_2, a_3, …, a_n… Скінченні й нескінченні злічувані множини називають *не більш ніж злічуваними*. Нескінченну множину, елементи якої не можна занумерувати, називають *незлічуваною*.

Скінченні й злічувані нескінченні множини є *дискретними*, а незлічувані нескінченні множини — *неперервними*.

Потужність множини *A* (ще кажуть: кардинальне число) визначає "кількість" елементів множини; її позначають $|A|$ (також позначають: $Card\ A$).

Еквівалентні (рівнопотужні) множини мають однакові потужності, тобто, якщо $A \sim B$, то $|A| = |B|$.

Якщо множина *A* скінченна і містить *n* елементів, то її потужність $|A| = n$; потужність *булеана* (тобто, множини всіх підмножин) $B(A) = 2^A$ скінченної множини *A* дорівнює 2^n; потужність множини всіх *m*-елементних підмножин множини *A* дорівнює C_n^m.

Дві скінченні множини рівнопотужні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакову кількість елементів. Звідси випливає, що скінченна множина не рівнопотужна жодній власній підмножині. Нескінченна множина рівнопотужна певній власній підмножині.

Для злічуваних множин, які є рівнопотужними множині натуральних чисел *N*, *злічувану потужність* позначають $\aleph_0$ (читають "алеф-нуль"). Потужність незлічуваних множин, рівнопотужних відрізкові $[0,1]$, дорівнює *потужності континууму* $2^{\aleph_0} = c$. Множина всіх підмножин незлічуваної множини має *потужність більшу від континууму* $2^c > c$.

Кардинальне число *k* називають *сумою кардинальних чисел m* і *n* і позначають $k = m + n$, якщо кожна множина потужності *k* еквівалентна об'єднанню $A \cup B$, де множини *A* і *B* неперетинні й відповідно мають потужності *m* і *n*.

Властивості суми кардинальних чисел:

1. $n+m=k$, якщо *n*, *m*, *k* — скінченні.

2. $n+\aleph_0=\aleph_0$, якщо *n* — скінченне.

3. $n+\aleph_0=n$, якщо *n* — нескінченне ($\aleph_0$, або *c*, або більше).

4. $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$.

5. $\aleph_0+c=c$.

6. $c+c=c$.

Кардинальне число *k* називають *добутком кардинальних чисел m* і *n* і позначають $k=mn$, якщо кожна множина потужності *k* еквівалентна декартовому добуткові $A\times B$, де множини *A* і *B* відповідно мають потужності *m* і *n*.

Властивості добутку кардинальних чисел:

1. $n\cdot m=k$, якщо *n*, *m*, *k* — скінченні.

2. $n\cdot m=n$, якщо *m* — скінченне, *n* — нескінченне ($\aleph_0$, або *c*, або більше).

3. $n^2=n$, якщо *n* — нескінченне.

4. $n\cdot\aleph_0=\aleph_0$, якщо *n* — скінченне.

5. $n\cdot\aleph_0=n$, якщо *n* — нескінченне.

6. $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$.

7. $\aleph_0\cdot c=c$.

8. $c\cdot c=c$.

9. $n\cdot m=n+m=\max(n,m)$, якщо одне із чисел нескінченне і $n\neq 0$, $m\neq 0$.

Множину всіх функцій із *A* в *B* позначають B^A.

Кардинальне число *k* називають *степенем кардинальних чисел n* і *m* і позначають $k=n^m$, якщо кожна множина потужності *k* еквівалентна множині B^A функцій із *A* в *B*, де множини *A* і *B* відповідно мають потужності *m* і *n*.

Властивості степеня кардинальних чисел:

1. $n^m=k$, якщо *n*, *m*, *k* — скінченні.

2. $2^{\aleph_0}=c$.

3. $\aleph_0^{\aleph_0}=c$.

4. ${\aleph_0}^n = \aleph_0$, якщо n — скінченне.

5. ${\aleph_0}^n \ge c$, якщо n — нескінченне.

6. $c^{\aleph_0} = c$

7. $n^1 = n$.

8. $1^n = 1$.

9. $n < 2^n$ (теорема Георга Кантора).

Приклад 11. Знайдіть потужності множин: $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b,c,d\}$, $X \cup Y$, $X \cup \{2,3,4,5\}$, $X \cap Y$, $X \times Y$, X^Y, Y^X, $B(X)$, N, R, $N \cup [0;1]$, $N \cup \{\sqrt{2};\, 3{,}14...\}$, $N \cap [0;1]$, $N \times P$, $N \times [0;1]$, $N \times X$, $[-1;1] \times [0;1]$, $R \times P$, $B(N)$, X^N, N^X, N^P, R^N, N^R, де N — множина натуральних чисел, P — множина раціональних чисел, R — множина дійсних чисел.

Розв'язання. Задані множини X і Y — скінченні, тому потужності — це відповідні кількості елементів у множинах:

$$|X| = |\{1,2,3\}| = 3, \quad |Y| = |\{a,b,c,d\}| = 4,$$

$$|X \cup Y| = 3 + 4 = 7, \quad |X \cup \{2,3,4,5\}| = |\{1,2,3,4,5\}| = 5,$$

$$|X \cap Y| = |\varnothing| = 0, \quad |X \times Y| = 3 \cdot 4 = 12,$$

$$|X^Y| = |X|^{|Y|} = 3^4 = 81, \quad |Y^X| = |Y|^{|X|} = 4^3 = 64,$$

$$|B(X)| = |2^X| = 2^{|X|} = 2^3 = 8.$$

У виразах, які розглядаються нижче, є як скінченні, так і нескінченні злічувані й незлічувані множини:

$$|N| = \aleph_0, \quad |R| = c, \quad |N \cup [0;1]| = \aleph_0 + c = c, \quad |N \cup \{\sqrt{2};\, 3{,}14...\}| = \aleph_0 + 2 = \aleph_0,$$

$$|N \cap [0;1]| = |\{1\}| = 1, \quad |N \times P| = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0, \quad |N \times [0;1]| = \aleph_0 \cdot c = c,$$

$$|N \times X| = \aleph_0 \cdot 3 = \aleph_0, \quad |[-1;1] \times [0;1]| = c \cdot c = c, \quad |R \times P| = c \cdot \aleph_0 = c,$$

$$|B(N)| = 2^{\aleph_0} = c, \quad |X^N| = 3^{\aleph_0} = c, \quad |N^X| = {\aleph_0}^3 = \aleph_0,$$

$$|N^P| = {\aleph_0}^{\aleph_0} = c, \quad |R^N| = c^{\aleph_0} = c, \quad |N^R| = {\aleph_0}^c > c.$$

Використана література: [4, с. 89-100], [5, с. 26-29], [17, с. 29-34].

Питання для самоконтролю

1. Що вивчає комбінаторика? Які послідовності називають розміщеннями? Які послідовності називають перестановками? Які послідовності називають сполуками?

2. Сформулюйте правила: суми, добутку, обчислення кількості підмножин, обчислення кількості розміщень і розміщень з повтореннями, обчислення кількості перестановок і перестановок з повтореннями, обчислення кількості сполук і сполук з повтореннями, обчислення кількості способів розбиття множини на підмножини, обчислення кількості способів одночасного утворення різних підмножин. Яке з вказаних правил називають основним правилом комбінаторики і чому? За яких умов кожне з цих правил застосовують?

3. Поясніть суть формули включень і виключень.

4. Що таке потужність множини? Які множини називають рівнопотужними? Вкажіть властивості рівнопотужності множин.

5. Які множини називають скінченними, нескінченними, злічуваними, не більш ніж злічуваними, незлічуваними? Які з цих множин є дискретними, а які неперервними?

6. Яка потужність є найменшою? Чи можна вказати найбільшу потужність? Що таке булеан множини і яка його потужність? Як знайти потужність множини всіх m-елементних підмножин даної скінченної множини?

7. Наведіть приклади множин, які мають злічувану потужність. Наведіть приклади множин, які мають незлічувану потужність. Чи може бути множина рівнопотужною власній підмножині? Наведіть приклади множин, які мають потужність більшу ніж незлічувана.

8. Що називають сумою кардинальних чисел? Вкажіть властивості суми кардинальних чисел.

9. Що називають добутком кардинальних чисел? Вкажіть властивості добутку кардинальних чисел.

10. Що називають степенем кардинальних чисел? Вкажіть властивості степеня кардинальних чисел.

Тема 5. Алгебри

5.1. Алгебри і алгебричні структури

Нехай A — деяка непорожня множина. *n-арною* (*n-місною*) *алгебричною операцією на A* називають однозначне відображення $\varphi : A^n \to A$. *Нуль-арною операцією на A* є виділення елемента — константи — із множини A. Якщо множина A числова, то операція φ є функцією.

Щоб задати n-арну операцію на множині A, треба задати правило, відповідно до якого будь-якому впорядкованому наборові даних із n елементів множини A однозначно ставиться у відповідність елемент тієї ж множини A.

Якщо операція визначена не на всій множині A^n, то її називають *n-арною частковою операцією*.

Найчастіше використовують унарні (одномісні) й бінарні (двомісні) операції.

Бінарні операції, визначені на скінченних множинах з n елементами зручно задавати за допомогою *таблиць Келі* (ще кажуть: квадратів Келі). Таблицю Келі будують так: у рядку і стовпчику заголовків таблиці записують всі елементи множини A; у решті $n \times n$ клітинок таблиці на перетині рядка a_i і стовпчика a_j записують результат виконання операції над парою (a_i, a_j).

Нехай на множині A задано операції φ_1, φ_2, …, φ_k, які можуть мати різну арність n_1, n_2, …, n_k. Крім того, нехай множина A *замкнута відносно цих операцій*, тобто $\varphi_i(A^{n_i}) \subseteq A$, $i = \overline{1,k}$.

Множину A разом з заданими на ній операціями φ_1, φ_2, …, φ_k називають *алгеброю* (ще кажуть: універсальною алгеброю) і позначають $\langle A, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k \rangle$. Множину A називають *носієм* (ще кажуть: основною множиною) *алгебри*. Якщо серед операцій алгебри є часткові операції, то алгебру називають *частковою*.

Підмножину $M \subseteq A$ називають *системою твірних* (ще кажуть: базисом) алгебри, якщо будь-який елемент множини A можна одержати із елементів множини M за допомогою операцій алгебри.

Множину $A' \subset A$ називають *замкнутою* відносно n-арної операції φ на множині A, якщо $\varphi(A'^n) \subseteq A'$, тобто, якщо значення φ на аргументах із A' належать A'. Якщо множина A' замкнута відносно всіх операцій φ_1, φ_2, …, φ_k алгебри $\langle A, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k \rangle$, то $\langle A', \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k \rangle$ називають *підалгеброю*.

Алгебричні структури — це клас алгебр, операціями яких є одна чи дві бінарні операції і довільна кількість унарних операцій (унарних операцій може й не бути).

Якщо на якійсь множині визначено одну бінарну операцію φ, то цю операцію називають композицією, або множенням; якщо визначено дві бінарні операції, то, як правило, одну з них ψ вважають додаванням, а іншу φ — множенням.

Нехай на множині A визначено одну бінарну операцію φ.

Бінарну операцію φ називають *комутативною*, якщо вона задовольняє комутативному закону (ще кажуть: закону переміщуваності), тобто для будь-яких a і b із множини A виконується рівність:

$$a\varphi b = b\varphi a .$$

Бінарну операцію φ називають *асоціативною*, якщо вона задовольняє асоціативному закону (ще кажуть: закону сполучуваності): тобто для будь-яких a, b, c із множини A виконується рівність:

$$(a\varphi b)\varphi c = a\varphi(b\varphi c).$$

Нехай на множині A визначено дві бінарні операції φ і ψ.

Бінарну операцію φ називають *дистрибутивною* відносно бінарної операції ψ, якщо для будь-яких a, b, c із множини A справедливі лівий і правий закони дистрибутивності (ще кажуть: закони розподільності):

$$a\varphi(b\psi c) = (a\varphi b)\psi(a\varphi c),$$

$$(a\psi\, b)\varphi\, c = (a\varphi\, c)\psi\,(b\varphi\, c)\,.$$

Нейтральним елементом (ще кажуть: одиницею) відносно операції φ на множині A називають елемент $e \in A$ такий, що:

$$e\varphi\, a = a\varphi\, e = a\,.$$

Якщо нейтральний елемент існує, то він єдиний.

Нехай операція φ визначена на множині A з нейтральним елементом e і елементи a і b із множини A задовольняють рівності:

$$a\varphi b = b\varphi\, a = e\,.$$

Тоді b називають *Нейтральним елементом* (ще кажуть: одиницею) відносно операції φ, і, навпаки, a — оберненим елементом до b відносно операції φ. Якщо обернений елемент для даного елемента існує, то він єдиний. Обернені елементи можуть існувати не для всіх елементів множини A — тоді говорять про *часткову оборотність*.

Нульовим елементом (ще кажуть: нулем) відносно операції φ на множині A називають такий елемент $o \in A$, що для всіх $a \in A$ виконується рівність:

$$o\varphi\, a = a\varphi\, o = o\,.$$

Часом розрізняють лівий і правий нейтральні й нульові елементи.

Якщо для будь-яких a, b, c із множини A з рівностей $a\varphi b = a\varphi c$ і $b\varphi\, a = c\varphi\, a$ випливає рівність $b = c$, то на множині A відносно операції φ виконується *закон скорочення*.

Групоїдом (ще часом кажуть: мультиплікативною системою) називають алгебру $\langle A, \varphi \rangle$ з однією скрізь визначеною бінарною операцією φ, на яку не накладаються ніякі умови.

Півгрупою називають алгебру $\langle A, \varphi \rangle$ з однією бінарною асоціативною операцією φ.

Циклічною називають півгрупу, система твірних якої має всього один елемент. При цьому всі елементи множини A є степенями твірного елемента.

Моноїдом (ще кажуть: півгрупою з одиницею) називають півгрупу з нейтральним елементом.

Групою називають півгрупу $\langle A,\varphi\rangle$, для якої виконуються дві умови: існує однозначно визначений нейтральний елемент $e\in A$ і для кожного елемента $a\in A$ існує однозначно визначений обернений елемент $a^{-1}\in A$. Отже, для групи виконується закон асоціативності, обернений елемент до елемента групи визначається однозначно, група має рівно один нейтральний елемент.

У більш широкому розумінні можна вважати, що група має три операції: одну бінарну (φ), одну унарну (взяття оберненого елемента) і одну нульарну (константа — нейтральний елемент).

У групі елемент, обернений до композиції елементів, дорівнює композиції обернених до них елементів, взятих у зворотному порядку: $(a\varphi b)^{-1}=b^{-1}\varphi a^{-1}$.

У таблиці Келі для скінченної групи в кожному рядку і кожному стовпчику кожен елемент групи міститься рівно один раз.

Якщо в групі, носієм якої є числова множина, операцією φ є операція додавання, то групу називають *адитивною*, якщо операція множення, то *мультиплікативною*.

Групу $\langle A,\varphi\rangle$ називають *абелевою* (ще кажуть: комутативною), якщо операція φ комутативна.

Циклічною називають групу з одним твірним елементом. Циклічна група завжди є абелевою.

Кільцем називають алгебру $\langle A,\psi,\varphi\rangle$ з двома бінарними операціями ψ і φ, які задовольняють двом умовам: множина A і операція ψ утворюють абелеву групу, а операція φ дистрибутивна відносно операції ψ. Отже, якщо $\langle A,\psi\rangle$ — абелева група, $\langle A,\varphi\rangle$ — групоїд і операція φ дистрибутивна відносно ψ, то $\langle A,\psi,\varphi\rangle$ — кільце.

Майже кільцем називають алгебру $\langle A, \psi, \varphi \rangle$, у якій для операції φ виконується лише один закон дистрибутивності (наприклад, лівий чи правий) і операція ψ визначає звичайну (не абелеву) групу.

Асоціативним називають кільце, якщо операція φ асоціативна.

Асоціативно-комутативним називають кільце, якщо операція φ асоціативна і комутативна.

Кільцем з одиницею називають кільце, якщо в ньому існує нейтральний елемент відносно операції φ.

У більш широкому розумінні можна вважати, що якщо A числова множина дійсних чи раціональних чисел, то кільце $\langle A, +, \times \rangle$ має не дві, а три бінарні операції: додавання, віднімання і множення.

Тілом називають кільце, у якому всі елементи, крім нульового o (нульовий елемент в кільці єдиний), утворюють групу відносно операції φ (операція асоціативна, існує один нейтральний елемент, кожен елемент має обернений).

Полем (ще кажуть: арифметикою) називають тіло, якщо операція φ комутативна. Отже, поле є комутативним кільцем з одиницею, в якому кожен ненульовий елемент має обернений відносно операції φ.

У ширшому розумінні можна вважати, що якщо A числова множина дійсних чи раціональних чисел, то поле $\langle A, +, \times \rangle$ має не дві, а чотири бінарні операції: додавання, віднімання, множення і ділення.

Оскільки відносно операції додавання і в кільці, і в полі для кожного елемента a існує обернений елемент ($-a$), то можна визначити некомутативну бінарну операцію віднімання за правилом $b - a = b + (-a)$; відносно операції множення в полі для кожного елемента a, крім 0, існує обернений елемент a^{-1}, то як і операцію віднімання, можна визначити некомутативну бінарну операцію ділення за правилом: $b / a = b \cdot a^{-1}$.

В *алгебричній системі*, крім операцій на носії A, задано й деякий набір відношень. У *моделі* на носії A задано тільки відношення.

До алгебричних систем належать, наприклад, упорядковані групи, в яких, крім певної операції, визначено бінарне відношення порядку.

Серед алгебричних систем в теоретичній алгебрі і її застосуваннях найчастіше розглядають *решітки* (ще кажуть: ґратки).

Нехай на множині A визначено відношення порядку $\leq$ (тобто, множина A впорядкована за відношенням $\leq$). Для елементів $a, b \in A$ *верхньою гранню* є будь-який елемент $c \in A$ такий, що $a \leq c$ і $b \leq c$, а *нижньою гранню* — будь-який елемент $d \in A$ такий, що $d \leq a$ і $d \leq b$. У загальному випадку для деяких елементів a і b верхня чи нижня грань може не існувати чи бути не єдиною, причому різні верхні (чи нижні) грані можуть бути непорівнюваними. Найменшу серед всіх верхніх граней елементів $a, b \in A$ (якщо вона існує) називають *точною верхньою гранню* (ще кажуть: супремумом). Найбільшу серед всіх нижніх граней елементів $a, b \in A$ (якщо вона існує) називають *точною нижньою гранню* (ще кажуть: інфімумом).

Решіткою є алгебрична система $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ з одним бінарним відношенням $\leq$ і двома бінарними операціями $\vee$ і $\wedge$, в якій множина A впорядкована за відношенням $\leq$ і в цій множині для будь-яких двох елементів a і b існує точна верхня грань $c = a \vee b$ (ще позначають $c = \sup\{a, b\}$) і існує точна нижня грань $a \wedge b = d$ (ще позначають $d = \inf\{a, b\}$). При цьому також кажуть, що решіткою є множина A. Тут відношення порядку $\leq$ і операції $\vee$ і $\wedge$ — абстрактні. Операції $\vee$ і $\wedge$ мають бути асоціативними і тому їх можна застосовувати до будь-якої скінченної підмножини елементів решітки.

Повною решіткою називають частково впорядковану множину A, якщо для будь-якої непорожньої підмножини $B \subseteq A$ в множині A існують точна верхня грань $\sup B$ і точна нижня грань $\inf B$. При цьому точну верхню грань всієї множини A ($\sup A$) називають одиницею решітки і позначають 1, а точну нижню грань множини A ($\inf A$) — нулем і позначають 0.

Будь-яку повністю впорядковану числову множину, наприклад, множину цілих чисел Z (натуральних чисел N, раціональних чисел P, дійсних чисел

R) можна перетворити в решітку, визначивши для будь-яких її елементів a і b операції $a \vee b = \max(a,b)$ і $a \wedge b = \min(a,b)$.

Якщо на множині натуральних чисел N відношення часткового порядку визначено, як "a є дільником b", то $a \vee b = НСК(a,b)$, $a \wedge b = НСД(a,b)$.

Якщо множина всіх підмножин певної множини частково впорядкована за відношенням нестрогого включення $A \subseteq B$, то $A \vee B = A \cup B$, $A \wedge B = A \cap B$.

Булева алгебра — алгебрична структура $\langle A, \cap, \cup, ^{-}, 0, 1 \rangle$ з двома бінарними операціями $x \cap y$, $x \cup y$, однією унарною операцією $\bar{x}$ і двома виділеними елементами 0 і 1 (при цьому $0 < 1$), яка є дистрибутивною решіткою з доповненням і для якої справджуються *аксіоми*:

1. Закони комутативності (переміщуваності):

$x \cup y = y \cup x$, $x \cap y = y \cap x$.

2. Закони асоціативності (сполучуваності):

$x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$, $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$.

3. Закони дистрибутивності (розподільності):

$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$, $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

4. Закони для нуля, одиниці й заперечення:

$x \cup 0 = x$, $x \cap 1 = x$,

$x \cup \bar{x} = 1$, $x \cap \bar{x} = 0$.

Аксіоми булевої алгебри виконуються, наприклад, в алгебрі множин, алгебрі логіки.

Приклад 12. **а)** Задано множину цілих чисел $A = \{a : a \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 5)\}$, які при діленні на 5 дають остачу 3, і операцію звичайного додавання (+). Дослідіть, чи утворюють множина A і операція звичайного додавання алгебру. **б)** Задано множину парних цілих чисел $A = \{a \in Z : a \vdots 2\}$ і операцію звичайного додавання (+). Дослідіть, чи утворюють множина A і операція (+) алгебру. Якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру $\langle A, + \rangle$, дослідивши її основні властивості й існування одиничного та оберненого елементів.

в) Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{2{,}4\}, \{1{,}2{,}3\}, \{2{,}3{,}4\}, \{1{,}2{,}3{,}4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A, B) : A \subseteq B\}$.

Розв'язання. а) Відповідно до заданого визначення множини A її елементами є:

$$A = \{a : a \equiv 3(\mathrm{mod}\, 5)\} = \{a : a = 5t + 3,\ t \in Z\} = \{\ldots -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \ldots\}.$$

Взявши, наприклад, два елементи –2 і 3 із множини A, бачимо, що $-2 + 3 = 1 \notin A$, тобто множина A не замкнута відносно операції звичайного додавання. Отже, множина A і операція звичайного додавання (+) алгебру не утворюють.

б) Відповідно до заданого визначення множини A її елементами є:

$$A = \{a \in Z : a \vdots 2\} = \{\ldots -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

Сума будь-яких двох елементів (парних чисел) даної множини дає парне число, тобто множина A замкнута відносно операції звичайного додавання. Тому $\langle A, + \rangle$ є алгеброю.

Операція додавання комутативна; наприклад: $-4 + 6 = 2$ і $6 + (-4) = 2$.

Операція додавання асоціативна; наприклад: $(-4 + 2) + 6 = -2 + 6 = 4$ і $-4 + (2 + 6) = -4 + 8 = 4$.

Нейтральним елементом на множині A усіх парних цілих чисел відносно операції додавання є елемент $e = 0$; наприклад: $0 + 4 = 4 + 0 = 4$.

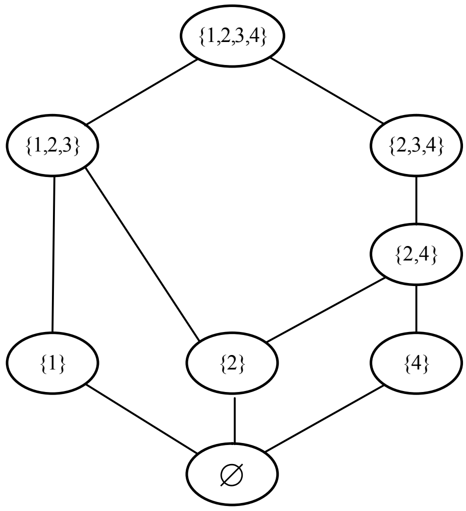
Для кожного елемента $a \in A$ існує обернений елемент $-a \in A$ такий, що $a + (-a) = -a + a = 0$; наприклад: $4 + (-4) = -4 + 4 = 0$. У зв'язку з цим систему твірних алгебри $\langle A, + \rangle$ утворює один елемент $\{2\}$, а не два елементи $\{-2; 2\}$, оскільки елемент –2 є оберненим до 2.

Нульового елемента на множині всіх парних чисел відносно операції додавання не існує.

Оскільки операція звичайного додавання асоціативна й комутативна на множині цілих парних чисел, існує однозначно визначений нейтральний елемент $0 \in A$ і для кожного елемента $a \in A$ існує однозначно визначений обернений елемент $a^{-1} \in A$ і систему твірних утворює один елемент, то алгебра $\langle A,+\rangle$ є циклічною абелевою групою.

в) Оскільки на множині A задано відношення порядку, то множина A — впорядкована. Впорядкована множина є решіткою тоді і тільки тоді, коли для будь-яких пар елементів $a,b \in A$ існують $\sup\{a,b\}$ і $\inf\{a,b\}$. Існування $\sup\{a,b\}$ і $\inf\{a,b\}$ досить перевірити тільки для непорівнюваних пар елементів $a,b \in A$.

Для наочності побудуємо діаграму Хассе:



Непорівнюваними парами елементів-множин (серед двох множин неможливо вказати підмножину) є такі:

$$\{\{1\},\{2\}\},\ \{\{1\},\{4\}\},\ \{\{2\},\{4\}\},$$

$$\{\{1\},\{2,4\}\},\ \{\{1\},\{2,3,4\}\},\ \{\{4\},\{1,2,3\}\},$$

$$\{\{2,4\},\{1,2,3\}\},\ \{\{1,2,3\},\{2,3,4\}\}.$$

Знайдемо точні верхні й точні нижні грані для цих пар множин:

$$\sup\{\{1\},\{2\}\} = \{1,2,3\},\ \sup\{\{2\},\{4\}\} = \{2,4\},$$

$$\sup\{\{1\},\{4\}\} = \sup\{\{1\},\{2,4\}\} = \sup\{\{1\},\{2,3,4\}\} = \sup\{\{4\},\{1,2,3\}\} =$$

$$= \sup\{\{2,4\},\{1,2,3\}\} = \sup\{\{1,2,3\},\{2,3,4\}\} = \{1,2,3,4\};$$

$$\inf\{\{1\},\{2\}\} = \inf\{\{1\},\{4\}\} = \inf\{\{2\},\{4\}\} = \inf\{\{1\},\{2,4\}\} =$$

$$= \inf\{\{1\},\{2,3,4\}\} = \varnothing,$$

$$\inf\{\{2,4\},\{1,2,3\}\} = \inf\{\{1,2,3\},\{2,3,4\}\} = \{2\}.$$

Оскільки для всіх пар непорівнюваних елементів існують точні верхні й точні нижні грані, то множина A є решіткою.

Використана література: [1, с. 397-421], [4, с. 112-141, 212-223], [5, с. 73-98], [13, с. 8-22], [10, с. 83-85], [17, с. 75-91, 96-99], [19, с. 21-31].

Питання для самоконтролю

1. Що називають n-арною алгебричною операцією на множині? Що називають n-арною частковою операцією на множині? Яку множину називають замкнутою відносно операції? Що називають алгеброю? Що є носієм алгебри? Що називають системою твірних алгебри?

2. Яку бінарну операцію називають комутативною? Яку бінарну операцію називають асоціативною? Які бінарні операції називають дистрибутивними одна відносно одної? Який елемент множини називають нейтральним елементом (одиницею) відносно операції? Які елементи множини називають оберненими один щодо одного відносно операції? Який елемент множини називають нульовим елементом відносно операції?

3. Що таке алгебрична структура? Схарактеризуйте алгебричні структури з однією бінарною операцією такі, як: групоїд, півгрупу, циклічну півгрупу, моноїд, групу, абелеву групу. Схарактеризуйте алгебричні структури з двома бінарними операціями такі, як: кільце, майже кільце, асоціативне кільце, асоціативно-комутативне кільце, кільце з одиницею, тіло, поле.

4. Що таке алгебрична система? Схарактеризуйте решітку. Що таке верхня грань елементів на множині? Що таке нижня грань елементів на множині? Що таке точна верхня грань елементів на множині? Що таке точною нижня грань елементів на множині?

5. Які аксіоми виконуються для булевої алгебри? Наведіть приклади булевих алгебр.

Варіанти завдань до розрахункової роботи з модуля "Комп'ютерна дискретна математика-1"

Завдання

У розрахунковій роботі з модуля "Комп'ютерна дискретна математика-1" треба виконати завдання варіанту відповідно до номера студента у списку групи.

Для кожного завдання подати коротко умову і розв'язання з короткими поясненнями. Завдання можна виконувати в будь-якому порядку.

Роботу подати в тонкому зошиті, або на окремих листках із зошита, скріплених, як зошит.

Варіант 1

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} B \cap X = A \\ B \cup X = C \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1, 2, 3\}$ задано відношення $Q = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,1), (3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині натуральних чисел N відношення $Q = \{(a,b) : a + b - \text{парне число}\}$ відношенням еквівалентності і, якщо так, то побудуйте розбиття множини N на класи еквівалентності.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1 \mid 0{,}4), (2 \mid 0{,}5), (3 \mid 0{,}2), (4 \mid 0{,}1)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1 \mid 0{,}3), (2 \mid 0{,}6), (3 \mid 1), (4 \mid 0{,}9)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 13x \equiv 4^{280} + 6^{931} (\text{mod} 5), \\ 3x \equiv 5 (\text{mod} 7), \\ x \equiv 4 (\text{mod} 9). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\text{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $12x + 28y = 32$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,1 і 2,1 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.100000001490116120
float b= 2.099999904632568400
```

10. а) Є 3 книжки в твердій і 5 у м'якій палітурках. Скількома способами можна вибрати серед них 3 в твердій і 2 у м'якій палітурках? **б)** Скільки різних 2-значних чисел можна утворити із цифр 1, 2, 3, 4, 5 (кожна цифра входить в число один раз)? **в)** У групі є 25 студентів, усі вивчають іноземні мови. При цьому англійську вивчають 17 студентів, німецьку — 8, французьку — 5, англійську й німецьку одночасно 3 студенти, англійську й французьку — 2, трьох мов одночасно не вивчає жоден студент. Скільки студентів вивчають німецьку й французьку мови одночасно?

11. Визначте потужності множин $A = \{1,2,3,4\}$, $A \times \{4,5,6\}$, $B(A)$, $(-\infty; -3) \cup Z$, $Z \cup \{-0{,}8; \sqrt{3}\}$, $B(Z)$, Z^A де Z — множина всіх цілих чисел.

12. а) Задано множину матриць розміру $m \times n$ і операцію додавання (+). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A,B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 2

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} B \setminus X = A \\ B \cup X = C \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині A — дільників числа 32 відношення $Q = \{(a,b)\text{: число } a \text{ є дільником числа } b\}$ відношенням нестрогого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1\,|\,0{,}1),(2\,|\,0{,}9),(3\,|\,0{,}6),(4\,|\,0{,}5)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1\,|\,0{,}8),(2\,|\,0{,}2),(3\,|\,1),(4\,|\,0{,}4)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 5x \equiv 6^{278} + 8^{951} (\mathrm{mod} 7), \\ 2x \equiv 5 (\mathrm{mod} 9), \\ x \equiv 4 (\mathrm{mod} 5). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $8x + 34y = 26$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,3 і 2,3 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.300000011920928960
float b= 2.299999952316284200
```
.

10. а) Скількома способами із 3 моніторів і 4 принтерів можна вибрати 2 монітори або 3 принтери? **б)** Скільки різних 2-значних чисел можна утворити із цифр 2, 3, 4, 7, 8, 9 (кожна цифра входить в число будь-яку кількість разів)? **в)** Скільки різних 6-значних чисел можна утворити із цифр числа 138858?

11. Визначте потужності множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cup \{4, 5, 6\}$, $B(A)$, $[0, 5) \cup N$, $N \times \{0; \pi\}$, $B(N)$, A^N, де N — множина всіх натуральних чисел.

12. а) Задано множину *n*-вимірних векторів з дійсними координатами і операція покоординатного віднімання векторів (–). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A, B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 3

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times D) \cap (B \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \Delta X = C \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,2),(3,3)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині підмножин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}\}$ відношення $Q = \{(X,Y) : X \subset Y\}$ відношенням строгого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1|0{,}5),(2|0{,}3),(3|0{,}8),(4|0{,}2)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1|0{,}4),(2|0{,}2),(3|1),(4|0{,}7)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\ 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix} /$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 4x \equiv 8^{164} + 10^{843} (\mathrm{mod} 9), \\ 3x \equiv 4 (\mathrm{mod} 5), \\ x \equiv 5 (\mathrm{mod} 7). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $14x + 32y = 4$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,45 і 2,45 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.449999988079071040
float b= 2.450000047683715800
```

10. а) У ящику є 3 білих і 7 чорних куль. Скількома способами можна вибрати серед них 2 білі або 5 чорних куль? **б)** Скільки різних 3-значних чисел можна утворити із цифр 1, 2, 3, 4, 5 (кожна цифра входить в число один раз)? **в)** Скількома способами можна розділити 16 речей між 4 людьми порівну?

11. Визначте потужності множин $A = \{1, 2, 3\}$, $A \times \{2, 3, 4, 5, 6\}$, множини всіх 2-елементних підмножин множини A, $(-3; 3) \cup P$, $P \cup \{\sqrt{2}; \pi\}$, $B(P)$, P^A, де P — множина всіх раціональних чисел.

12. а) Задано множину дійсних чисел без нуля $R \setminus \{0\}$ і операцію звичайного множення (·). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A, B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 4

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} X \setminus A = B \\ A \setminus X = C \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині цілих чисел, кратних 7, Z_7 відношення $Q = \{(a,b) : (a-b) - \text{парне число}\}$ відношенням еквівалентності і, якщо так, то побудуйте розбиття множини Z_7 на класи еквівалентності.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1\,|\,0{,}9),(2\,|\,0{,}3),(3\,|\,0{,}6),(4\,|\,0{,}5)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1\,|\,0{,}5),(2\,|\,1),(3\,|\,0{,}7),(4\,|\,0{,}4)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} -5x \equiv 2^{338} + 4^{763} (\mathrm{mod} 3), \\ 3x \equiv 2(\mathrm{mod} 5), \\ x \equiv 6(\mathrm{mod} 7). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $10x + 6y = 14$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,55 і 2,55 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.550000011920928960
float b= 2.549999952316284200
```

10. а) Скількома способами із 3 книжок і 6 зошитів можна вибрати 2 книжки і 4 зошити? **б)** Скільки різних 3-значних чисел можна утворити із цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7 (кожна цифра входить в число будь-яку кількість разів)? **в)** У магазині є 4 види тістечок. Скількома способами можна вибрати 7 тістечок?

11. Визначте потужності множин $A = \{1,2,3,4\}$, $A \cup \{4,5,6\}$, $B(A)$, $(-2;+\infty) \cup Z$, $Z \times \{1,5;e\}$, $B(Z)$, A^Z, де Z — множина всіх цілих чисел.

12. а) Задано множину квадратних матриць порядку n і операцію додавання (+). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A,B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 5

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} X \setminus B = C \setminus A \\ C \cap X = A \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,2),(1,3),(2,2),(3,1),(3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині $A = \{2,3,5,6,10,15,30\}$ відношення $Q = \{(a,b) : \text{число } a \text{ є дільником числа } b\}$ відношенням нестрогого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1|0{,}4),(2|0{,}9),(3|0{,}5),(4|0{,}9)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1|0{,}1),(2|0{,}2),(3|0{,}6),(4|0{,}4)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 8x \equiv 4^{262} + 6^{321} (\text{mod}5), \\ 5x \equiv 2(\text{mod}7), \\ x \equiv 1(\text{mod}3). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\text{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $16x + 6y = 10$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,6 і 2,6 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.600000023841857910
float b= 2.599999904632568400
```

10. а) Є 3 книжки в твердій і 6 у м'якій палітурках. Скількома способами можна вибрати серед них 2 в твердій і 4 у м'якій палітурках? **б)** Скільки різних 4-значних чисел можна утворити із цифр 1, 2, 3, 4, 5 (кожна цифра входить в число один раз)? **в)** При підготовці до занять усі 26 студентів групи опрацьовували статті із наукових журналів "Математичне моделювання", "Наукоємні технології", "Захист інформації". Із першого журналу інформацію взяли 18 студентів, із другого — 9, із третього — 15, одночасно із першого і другого — 6, із першого і третього — 7, із другого і третього — 5. Скільки студентів опрацьовували статті із усіх журналів?

11. Визначте потужності множин $A = \{1,2,3,4,5\}$, $A \times \{4,5,6\}$, $B(A)$, $[0,5) \cup N$, $N \cup \{0;\pi\}$, $B(N)$, A^N, де N — множина всіх натуральних чисел.

12. а) Задано множину комплексних чисел $K = \{a + ib : a,b \in R, i^2 = -1\}$ і операцію звичайного додавання (+). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A,B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 6

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} C \cup X = A \\ C \cap X = B \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,2),(3,3)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині підмножин $A = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ відношення $Q = \{(X,Y) : X \subset Y\}$ відношенням строгого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1\,|\,0{,}5),(2\,|\,0{,}9),(3\,|\,0{,}3),(4\,|\,0{,}9)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1\,|\,0{,}4),(2\,|\,0{,}2),(3\,|\,0{,}1),(4\,|\,0{,}8)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 5x \equiv 8^{145} + 6^{762} (\mathrm{mod} 7), \\ 7x \equiv -11 (\mathrm{mod} 3), \\ x \equiv 2 (\mathrm{mod} 5). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $12x + 22y = 14$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,65 і 2,65 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.649999976158142090
float b= 2.650000095367431600
```

10. а) Скількома способами із 7 моніторів і 4 принтерів можна вибрати 5 моніторів або 3 принтери? **б)** Скільки різних 4-значних чисел можна утворити із цифр 2, 3, 4, 5, 6 (кожна цифра входить в число будь-яку кількість разів)? **в)** Скільки різних 5-буквених послідовностей можна утворити із букв слова ГАРАЖ?

11. Визначте потужності множин $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A \cup \{4,5,6,7\}$, множини всіх 4-елементних підмножин множини A, $(-\infty; -3) \cup N$, $N \times \{-0{,}5; 0{,}5\}$, $B(N)$, N^A, де N — множина всіх натуральних чисел.

12. а) Задано множину дійсних чисел R і операцію звичайного додавання (+). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A,B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 7

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} C \cup X = A \\ C \setminus X = B \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,1),(1,3),(2,1),(3,1),(3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині цілих чисел Z відношення $Q = \{(a,b) : |a| + |b| - \text{парне число}\}$ відношенням еквівалентності і, якщо так, то побудуйте розбиття множини Z на класи еквівалентності.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1\,|\,0{,}8),(2\,|\,0{,}9),(3\,|\,0{,}2),(4\,|\,0{,}6)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1\,|\,1),(2\,|\,0{,}7),(3\,|\,0{,}1),(4\,|\,0{,}5)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 13x \equiv 5^{653} - 3^{941} (\mathrm{mod} 4), \\ 4x \equiv 5(\mathrm{mod} 7), \\ x \equiv 8(\mathrm{mod} 9). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $18x + 14y = 22$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,7 і 2,7 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.699999988079071040
float b= 2.700000047683715800
```

10. а) У ящику є 5 білих і 6 чорних куль. Скількома способами можна вибрати серед них 2 білі або 4 чорні кулі? **б)** Скільки різних 2-значних чисел можна утворити із цифр 2, 4, 6, 8, 9 (кожна цифра входить в число один раз)? **в)** Скільки різних 5-значних чисел можна утворити із цифр числа 21311?

11. Визначте потужності множин $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \times \{4, 5, 6\}$, $B(A)$, $(-\infty; -3) \cup Z$, $Z \cup \{-0{,}8; \sqrt{3}\}$, $B(Z)$, Z^A, де Z — множина всіх цілих чисел.

12. а) Задано множину квадратних матриць порядку n і операцію множення матриць ($\times$). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2{,}3\}, \{1{,}2{,}3\}, \{1{,}2{,}4\}, \{1{,}2{,}3{,}4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A, B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 8

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \setminus B) \cup (A \cap C) = A \setminus (B \setminus C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв’язку і знайдіть розв’язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} B \Delta X = A \\ B \cap X = C \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,2),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині A —дільників числа 34 відношення $Q = \{(a,b) : \text{число } a \text{ є дільником числа } b\}$ відношенням нестрогого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1\,|\,0{,}3),(2\,|\,0{,}8),(3\,|\,0{,}4),(4\,|\,0{,}1)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1\,|\,0{,}5),(2\,|\,0{,}2),(3\,|\,1),(4\,|\,0{,}4)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\ 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об’єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 5x \equiv 8^{139} - 10^{734} (\bmod 9), \\ 7x \equiv -9 (\bmod 4), \\ x \equiv 2 (\bmod 7). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\bmod m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $12x + 16y = 20$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,8 і 2,8 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.800000011920928960
float b= 2.799999952316284200
```

10. а) Скількома способами із 3 книжок і 7 зошитів можна вибрати 2 книжки і 5 зошитів? **б)** Скільки різних 3-значних чисел можна утворити із цифр 2, 3, 4, 5, 6 (кожна цифра входить в число будь-яку кількість разів)? **в)** Скількома способами можна розділити 9 речей між 3 людьми порівну?

11. Визначте потужності множин $A = \{1,2,3,4\}$, $A \times \{4,5,6\}$, $B(A)$, $(-2;+\infty) \cup Z$, $Z \cup \{1{,}5; e\}$, $B(Z)$, Z^A, де Z — множина всіх цілих чисел.

12. а) Задано множину комплексних чисел $K = \{a + ib : a, b \in R, i^2 = -1\}$ і операцію звичайного віднімання (–). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A, B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 9

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} X \setminus B = A \\ B \setminus X = C \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1),(3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині підмножин $A = \{\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{1,2,3\}\}$ відношення $Q = \{(X,Y) : X \subset Y\}$ відношенням строгого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1\,|\,0{,}7),(2\,|\,0{,}5),(3\,|\,0{,}4),(4\,|\,0{,}3)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1\,|\,0{,}1),(2\,|\,0{,}7),(3\,|\,0{,}9),(4\,|\,0{,}4)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 8x \equiv 8^{985} + 6^{744} (\mathrm{mod} 7), \\ 5x \equiv 2(\mathrm{mod} 9), \\ x \equiv 3(\mathrm{mod} 4). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $24x + 14y = 20$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,85 і 2,85 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.850000023841857910
float b= 2.849999904632568400
```

10. а) Є 3 книжки в твердій і 8 у м'якій палітурках. Скількома способами можна вибрати серед них 2 в твердій і 6 у м'якій палітурках? **б)** Скільки різних 3-значних чисел можна утворити із цифр 2, 4, 6, 8, 9 (кожна цифра входить в число один раз)? **в)** На трьох яблунях рясно вродили яблука. Скільки є способів вибрати 8 яблук?

11. Визначте потужності множин $A = \{1,2,3\}$, $A \times \{2,3,4,5,6\}$, множини всіх 2-елементних підмножин множини A, $(-3;3) \cup P$, $P \cup \{\sqrt{2};\pi\}$, P^A, $B(P)$, де P — множина всіх раціональних чисел.

12. а) Задано множину n-вимірних векторів з дійсними координатами і операція покоординатного додавання векторів (+). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A,B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 10

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \setminus C) \cap (B \setminus C)) = (A \cap B) \setminus C$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} B \cap X = C \\ X \setminus A = B \setminus C \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині натуральних чисел N_3, кратних 3, відношення $Q = \{(a,b) : a + b - \text{парне число}\}$ відношенням еквівалентності і, якщо так, то побудуйте розбиття множини N_3 на класи еквівалентності.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1|0{,}4),(2|0{,}5),(3|0{,}7),(4|0{,}1)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1|0{,}3),(2|0{,}9),(3|1),(4|0{,}4)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 11x \equiv 2^{567} - 4^{987} (\mathrm{mod} 3), \\ 3x \equiv 4(\mathrm{mod} 7), \\ x \equiv 5(\mathrm{mod} 8). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $26x + 16y = 18$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,9 і 2,9 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.899999976158142090
float b= 2.900000095367431600
```

10. а) Скількома способами із 8 моніторів і 5 принтерів можна вибрати 4 моніторів або 3 принтери? **б)** Скільки різних 3-значних чисел можна утворити із цифр 2, 3, 4, 7 (кожна цифра входить в число будь-яку кількість разів)? **в)** Скільки в діапазоні від 1 до 100 є чисел, які не діляться на жодне з чисел 2, 3, 7.

11. Визначте потужності множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cup \{4, 5, 6\}$, $B(A)$, $[0, 5) \cup N$, $N \times \{0; \pi\}$, A^N, $B(N)$, де N — множина всіх натуральних чисел.

12. а) Задано множину квадратних невироджених матриць порядку n і операцію множення матриць ($\times$). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A, B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 11

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} C \cap X = B \\ C \cup X = A \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,2),(3,3)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині $A = \{2,3,6,14,21,42\}$ відношення $Q = \{(a,b) : \text{число } a \text{ є дільником числа } b\}$ відношенням нестрогого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1|0,7),(2|0,5),(3|0,9),(4|0,8)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1|0,3),(2|0,6),(3|1),(4|0,9)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\ 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 12x \equiv 8^{325} + 6^{568} \pmod{7}, \\ 5x \equiv 1 \pmod{8}, \\ x \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $48x + 21y = 6$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,95 і 2,95 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.949999988079071040
float b= 2.950000047683715800
```

10. а) У ящику є 6 білих і 7 чорних куль. Скількома способами можна вибрати серед них 3 білі або 4 чорні кулі? **б)** Скільки різних 4-значних чисел можна утворити із цифр 2, 4, 6, 8, 9 (кожна цифра входить в число один раз)? **в)** Скільки різних 6-буквених послідовностей можна утворити із букв слова ЗАДАЧА?

11. Визначте потужності множин $A = \{1,2,3,4\}$, $A \times \{4,5,6\}$, $B(A)$, $(-\infty;-3) \cup Z$, $Z \cup \{-0{,}8; \sqrt{3}\}$, Z^A, $B(Z)$, де Z — множина всіх цілих чисел.

12. а) Задано множину натуральних чисел N і для будь-яких елементів $m \neq n \in N$ визначено бінарну операцію $\otimes$ як модуль різниці цих елементів $|m-n|$. Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A,B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 12

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times D) \cap (B \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} C \setminus X = B \\ C \cup X = A \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині підмножин $A = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ відношення $Q = \{(X,Y) : X \subset Y\}$ відношенням строгого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1\,|\,0{,}4),(2\,|\,0{,}9),(3\,|\,0{,}6),(4\,|\,0{,}5)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1\,|\,0{,}8),(2\,|\,0{,}2),(3\,|\,1),(4\,|\,0{,}4)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\ 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв’яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 13x \equiv 7^{571} - 9^{889} (\mathrm{mod} 8), \\ 7x \equiv 2(\mathrm{mod} 3), \\ x \equiv 5(\mathrm{mod} 7). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв’язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $24x + 18y = 30$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам’яті комп’ютера дійсних чисел 0,1 і 3,1 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.100000001490116120
float b= 3.099999904632568400
```

10. а) Скількома способами із 5 книжок і 7 зошитів можна вибрати 2 книжки і 4 зошити? **б)** Скільки різних 5-значних чисел можна утворити із цифр 2, 3, 4, 5 (кожна цифра входить в число будь-яку кількість разів)? **в)** Скільки різних 7-значних чисел можна утворити із цифр числа 2577355?

11. Визначте потужності множин $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A \cup \{4,5,6,7\}$, множини всіх 4-елементних підмножин множини A, $(-\infty;-3) \cup N$, $N \times \{-0{,}5; 0{,}5\}$, $B(N)$, A^Z, де N — множина всіх натуральних чисел.

12. а) Задано множину натуральних чисел N і операцію звичайного додавання (+). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A,B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 13

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} B \cap X = C \\ B \Delta X = A \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,2),(1,3),(2,2),(3,1),(3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині натуральних чисел N відношення $Q = \{(a,b) : |a-b| - \text{парне число}\}$ відношенням еквівалентності і, якщо так, то побудуйте розбиття множини N на класи еквівалентності.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1|0{,}5),(2|0{,}9),(3|0{,}8),(4|0{,}2)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1|0{,}4),(2|0{,}2),(3|1),(4|0{,}7)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв’яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 5x \equiv 6^{445} - 4^{269} (\mathrm{mod} 5), \\ 2x \equiv 5 (\mathrm{mod} 8), \\ x \equiv 4 (\mathrm{mod} 9). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв’язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $24x + 9y = 15$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам’яті комп’ютера дійсних чисел 0,3 і 3,3 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.300000011920928960
float b= 3.299999952316284200
```

10. а) Є 4 книжки в твердій і 5 у м’якій палітурках. Скількома способами можна вибрати серед них 2 в твердій і 3 у м’якій палітурках? **б)** Скільки різних 2-значних чисел можна утворити із цифр 2, 3, 4, 6, 8, 9 (кожна цифра входить в число один раз)? **в)** Скількома способами можна розділити 12 речей між 4 людьми порівну?

11. Визначте потужності множин $A = \{1,2,3,4\}$, $A \cup \{4,5,6\}$, $B(A)$, $(-2;+\infty) \cup Z$, $Z \times \{1,5;e\}$, A^Z, $B(Z)$, де Z — множина всіх цілих чисел.

12. а) Задано множину раціональних чисел $P = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in N \right\}$, де $\frac{m}{n}$ — нескоротний дріб, і операцію звичайного додавання (+). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A,B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 14

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} X \setminus B = C \\ B \setminus X = A \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,2),(3,3)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині $A = \{2,3,6,7,14,21,42\}$ відношення $Q = \{(a,b): \text{число } a \text{ є дільником числа } b\}$ відношенням нестрогого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1\,|\,0{,}9),(2\,|\,0{,}3),(3\,|\,0{,}1),(4\,|\,0{,}5)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1\,|\,0{,}5),(2\,|\,1),(3\,|\,0{,}7),(4\,|\,0{,}4)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв’яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 19x \equiv 7^{227} - 9^{785} (\mathrm{mod} 8), \\ 4x \equiv 5(\mathrm{mod} 9), \\ x \equiv 3(\mathrm{mod} 5). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв’язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $18x + 33y = 21$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам’яті комп’ютера дійсних чисел 0,45 і 3,45 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.449999988079071040
float b= 3.450000047683715800
```

10. а) Скількома способами із 7 моніторів і 3 принтерів можна вибрати 5 моніторів або 2 принтери? **б)** Скільки різних 4-значних чисел можна утворити із цифр 2, 3 (кожна цифра входить в число будь-яку кількість разів)? **в)** У трьох ящиках лежать жовті, голубі й рожеві ку́льки. Скількома способами можна вибрати 5 кульок?

11. Визначте потужності множин $A = \{1,2,3,4,5\}$, $A \times \{4,5,6\}$, $B(A)$, $[0,5) \cup N$, $N \cup \{0;\pi\}$, $B(N)$, N^A, де N — множина всіх натуральних чисел.

12. а) Задано множину цілих чисел, кратних 5, $A = \{a \in Z : a \vdots 5\}$ і операцію звичайного віднімання (–). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A,B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 15

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C))$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} X \setminus A = B \setminus C \\ B \cap X = C \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,1),(1,3),(2,1),(3,1),(3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині підмножин $A = \{\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,4\},\{2,3,4\}\}$ відношення $Q = \{(X,Y) : X \subset Y\}$ відношенням строгого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1\,|\,0{,}4),(2\,|\,0{,}9),(3\,|\,0{,}8),(4\,|\,0{,}7)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1\,|\,0{,}1),(2\,|\,0{,}2),(3\,|\,0{,}6),(4\,|\,0{,}4)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 11x \equiv 8^{991} - 10^{329} (\mathrm{mod} 9), \\ 3x \equiv 1(\mathrm{mod} 5), \\ x \equiv 3(\mathrm{mod} 8). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_{\mathrm{i}})$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $21x + 36y = 30$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,55 і 3,55 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.550000011920928960
float b= 3.549999952316284200
```

10. а) У ящику є 5 білих і 8 чорних куль. Скількома способами можна вибрати серед них 3 білі або 4 чорні кулі? **б)** Скільки різних 3-значних чисел можна утворити із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (кожна цифра входить в число один раз)? **в)** У місті є 15 майстерень, у яких ремонтують електронну техніку. При цьому в 9 майстернях ремонтують комп'ютери, у 12 — смартфони, у 5 — годинники, одночасно комп'ютери і смартфони — у 6, комп'ютери і годинники — у 3, смартфони і годинники — у 4. У скількох майстернях ремонтують усі три види техніки?

11. Визначте потужності множин $A = \{1, 2, 3\}$, $A \times \{2, 3, 4, 5, 6\}$, множини всіх 2-елементних підмножин множини *A*, $(-3;3) \cup P$, $P \cup \{\sqrt{2};\pi\}$, $B(P)$, P^A, де P — множина всіх раціональних чисел.

12. а) Задано множину натуральних чисел N і операцію звичайного множення ($\cdot$). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A, B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 16

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} A \cup X = B \\ A \cap X = C \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,2),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині цілих чисел, кратних 7, Z_7 відношення $Q = \{(a,b) : |a-b| - \text{парне число}\}$ відношенням еквівалентності і, якщо так, то побудуйте розбиття множини Z_7 на класи еквівалентності.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1|0{,}7),(2|0{,}9),(3|0{,}3),(4|0{,}1)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1|0{,}4),(2|0{,}2),(3|0{,}1),(4|0{,}8)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 7x \equiv 2^{486} + 4^{751} (\mathrm{mod} 3), \\ 11x \equiv 2 (\mathrm{mod} 4), \\ x \equiv 1 (\mathrm{mod} 5). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $18x + 30y = 42$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,6 і 3,6 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.600000023841857910
float b= 3.599999904632568400
```

10. а) Скількома способами із 4 книжок і 8 зошитів можна вибрати 2 книжки і 6 зошитів? **б)** Скільки різних 4-значних чисел можна утворити із цифр 2, 3, 4 (кожна цифра входить в число будь-яку кількість разів)? **в)** Скільки різних 6-буквених послідовностей можна утворити із букв слова РАКЕТА?

11. Визначте потужності множин $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \times \{4, 5, 6\}$, $B(A)$, $(-\infty; -3) \cup Z$, $Z \cup \{-0{,}8; \sqrt{3}\}$, $B(Z)$, Z^A, де Z — множина всіх цілих чисел.

12. а) Задано множину раціональних чисел $P = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in N \right\}$, де $\frac{m}{n}$ — нескоротний дріб, і операцію звичайного множення (·). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A, B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 17

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} A\cup X=B \\ A\setminus X=C \end{cases}.$$

3. На множині $A=\{1,2,3\}$ задано відношення $Q=\{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1),(3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині A — дільників числа 30 відношення $Q=\{(a,b): \text{число } a \text{ є дільником числа } b\}$ відношенням нестрогого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega=\{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A}=\{(1\,|\,0{,}8),(2\,|\,0{,}9),(3\,|\,0{,}9),(4\,|\,0{,}5)\}$ і $\widetilde{B}=\{(1\,|\,1),(2\,|\,0{,}7),(3\,|\,0{,}1),(4\,|\,0{,}5)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha=0{,}1,\,0{,}2,\ldots,1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A=\{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}}=\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 9x \equiv 6^{822} - 4^{439} \pmod{5}, \\ 8x \equiv 1 \pmod{3}, \\ x \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $24x + 39y = 27$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,65 і 3,65 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.649999976158142090
float b= 3.650000095367431600
```

10. а) Є 4 книжки в твердій і 6 у м'якій палітурках. Скількома способами можна вибрати серед них 3 в твердій і 5 у м'якій палітурках? **б)** Скільки різних 3-значних чисел можна утворити із цифр 1, 3, 5, 7, 9 (кожна цифра входить в число один раз)? **в)** Скількома способами можна розділити 12 речей між 3 людьми порівну?

11. Визначте потужності множин $A = \{1,2,3,4\}$, $A \times \{4,5,6\}$, $B(A)$, $(-2;+\infty) \cup Z$, $Z \cup \{1{,}5; e\}$, $B(Z)$, Z^A, де Z — множина всіх цілих чисел.

12. а) Задано множину дійсних чисел R і для будь-яких елементів $a, b \in R$ визначено бінарну операцію $\otimes$ як більший із цих елементів $\max(a,b)$. Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A,B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 18

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} C \Delta X = B \\ C \cap X = A \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині підмножин $A = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,3,4\}\}$ відношення $Q = \{(X,Y) : X \subset Y\}$ відношенням строгого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1|0{,}3),(2|0{,}6),(3|0{,}4),(4|0{,}9)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1|0{,}5),(2|0{,}2),(3|1),(4|0{,}4)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\ 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 7x \equiv 5^{653} - 3^{941} (\bmod 4), \\ 3x \equiv -1 (\bmod 5), \\ x \equiv 2 (\bmod 3). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\bmod m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $21x + 9y = 24$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,7 і 3,7 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.699999988079071040
float b= 3.700000047683715800
```

10. а) Скількома способами із 4 моніторів і 6 принтерів можна вибрати 2 монітори або 3 принтери? **б)** Скільки різних 4-значних чисел можна утворити із цифр 2, 3, 4, 5, 6 (кожна цифра входить в число будь-яку кількість разів)? **в)** У магазині є 3 види тістечок. Скількома способами можна вибрати 9 тістечок, щоб було хоч би по одному тістечку кожного виду?

11. Визначте потужності множин $A = \{1, 2, 3\}$, $A \cup \{2, 3, 4, 5, 6\}$, множини всіх 2-елементних підмножин множини A, $(-3; 3) \cup P$, $P \times \{\sqrt{2}; \pi\}$, $B(P)$, A^P, де P — множина всіх раціональних чисел.

12. а) Задано множину натуральних чисел N і для будь-яких елементів $m, n \in N$ визначено бінарну операцію $\otimes$ як менший із цих елементів $\min(m, n)$. Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A, B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 19

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} X \setminus C = B \\ C \setminus X = A \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,2),(3,3)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині натуральних чисел N_3, кратних 3, відношення $Q = \{(a,b) : |a| = |b|\}$ відношенням еквівалентності і, якщо так, то побудуйте розбиття множини N_3 на класи еквівалентності.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1\,|\,0{,}3),(2\,|\,0{,}5),(3\,|\,0{,}4),(4\,|\,0{,}1)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1\,|\,0{,}1),(2\,|\,0{,}7),(3\,|\,0{,}9),(4\,|\,0{,}4)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 17x \equiv 5^{445} - 3^{781} (\text{mod} 4), \\ 7x \equiv 2(\text{mod} 5), \\ x \equiv 2(\text{mod} 7). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\text{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $12x + 51y = 39$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,8 і 3,8 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.800000011920928960
float b= 3.799999952316284200
```

10. а) У ящику є 7 білих і 4 чорні кулі. Скількома способами можна вибрати серед них 3 білі або 2 чорні кулі? **б)** Скільки різних2-значних чисел можна утворити із цифр 1, 3, 5, 7, 9 (кожна цифра входить в число один раз)? **в)** У групі всі студенти вивчають іноземні мови. При цьому англійську вивчають 19 студентів, німецьку — 8, французьку — 5, англійську й німецьку одночасно 3 студенти, англійську й французьку — 2, німецьку й французьку — 4, трьох мов одночасно не вивчає жоден студент. Скільки всіх студентів у групі?

11. Визначте потужності множин $A = \{1,2,3,4,5\}$, $A \cup \{4,5,6\}$, $B(A)$, $[0,5) \cup N$, $N \times \{0;\pi\}$, $B(N)$, A^N, де N — множина всіх натуральних чисел.

12. а) Задано множину раціональних чисел без нуля $P = \left\{ \pm \frac{m}{n} : m, n \in N \right\}$, де $\frac{m}{n}$ — нескоротний дріб і операцію звичайного множення (·). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A,B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 20

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} A \cap X = B \\ X \setminus C = A \setminus B \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині $A = \{1,2,3,5,6,9,12,18\}$ відношення $Q = \{(a,b): \text{число } a \text{ є дільником числа } b\}$ відношенням нестрогого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини *A* відносно відношення *Q*, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1|0{,}7),(2|0{,}1),(3|0{,}7),(4|0{,}5)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1|0{,}3),(2|0{,}9),(3|1),(4|0{,}4)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 5x \equiv 8^{868} + 6^{457} (\mathrm{mod} 7), \\ 11x \equiv 1 (\mathrm{mod} 4), \\ x \equiv 3 (\mathrm{mod} 5). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $21x + 27y = 33$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,85 і 3,85 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.850000023841857910
float b= 3.849999904632568400
```

10. а) Скількома способами із 7 книжок і 4 зошитів можна вибрати 2 книжки і 3 зошити? **б)** Скільки різних 3-значних чисел можна утворити із цифр 2, 3, 4, 5, 6 (кожна цифра входить в число будь-яку кількість разів)? **в)** Скільки різних 6-буквених послідовностей можна утворити із букв слова ГАЗЕТА?

11. Визначте потужності множин $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \times \{4, 5, 6\}$, $B(A)$, $(-\infty; -3) \cup Z$, $Z \cup \{-0{,}8; \sqrt{3}\}$, $B(Z)$, Z^A, де Z — множина всіх цілих чисел.

12. а) Задано множину матриць розміру $m \times n$ і операцію віднімання матриць (–). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A, B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 21

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times D) \cap (B \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} A \cap X = C \\ A \cup X = B \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,2),(1,3),(2,2),(3,1),(3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині підмножин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}\}$ відношення $Q = \{(X,Y) : X \subset Y\}$ відношенням строгого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1\,|\,0{,}7),(2\,|\,0{,}5),(3\,|\,0{,}2),(4\,|\,0{,}1)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1\,|\,0{,}3),(2\,|\,0{,}6),(3\,|\,1),(4\,|\,0{,}9)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв’яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 19x \equiv 4^{111} - 6^{987} (\mathrm{mod} 5), \\ 5x \equiv 4(\mathrm{mod} 7), \\ x \equiv 3(\mathrm{mod} 4). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв’язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $51x + 12y = 39$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам’яті комп’ютера дійсних чисел 0,9 і 3,9 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.899999976158142090
float b= 3.900000095367431600
```

10. а) Є 4 книжки в твердій і 8 у м’якій палітурках. Скількома способами можна вибрати серед них 3 в твердій і 5 у м’якій палітурках? **б)** Скільки різних 4-значних чисел можна утворити із цифр 1, 3, 5, 7, 8, 9 (кожна цифра входить в число один раз)? **в)** Скільки різних 6-значних чисел можна утворити із цифр числа 227312?

11. Визначте потужності множин $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A \cup \{4,5,6,7\}$, множини всіх 4-елементних підмножин множини A, $(-\infty; -3) \cup N$, $N \times \{-0{,}5; 0{,}5\}$, $B(N)$, A^N, де N — множина всіх натуральних чисел.

12. а) Задано множину натуральних чисел N і для будь-яких елементів $m, n \in N$ визначено бінарну операцію $\otimes$ як більший із цих елементів $\max(m, n)$. Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A, B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 22

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} A \setminus X = C \\ A \cup X = B \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,2),(3,3)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині цілих чисел Z відношення $Q = \{(a,b) : a + b - \text{парне число}\}$ відношенням еквівалентності і, якщо так, то побудуйте розбиття множини Z на класи еквівалентності.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1|0{,}4),(2|0{,}9),(3|0{,}6),(4|0{,}1)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1|0{,}8),(2|0{,}2),(3|1),(4|0{,}4)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 11x \equiv 2^{334} + 4^{560} (\mathrm{mod} 3), \\ 9x \equiv 1 (\mathrm{mod} 5), \\ x \equiv 5 (\mathrm{mod} 8). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $32x + 14y = 4$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,95 і 3,95 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.949999988079071040
float b= 3.950000047683715800
```

10. а) Скількома способами із 7 моніторів і 5 принтерів можна вибрати 2 монітори або 3 принтери? **б)** Скільки різних 3-значних чисел можна утворити із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (кожна цифра входить в число будь-яку кількість разів)? **в)** Скількома способами можна розділити 15 речей між 3 людьми порівну?

11. Визначте потужності множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cup \{4, 5, 6, 7\}$, $B(A)$, $(-2; +\infty) \cup P$, $P \times \{1{,}5; e\}$, $B(P)$, A^P, де P — множина всіх раціональних чисел.

12. а) Задано множину ірраціональних чисел $R \setminus P$ і операцію звичайного множення (·). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A, B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 23

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cap B)\Delta(A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} B \cup X = C \\ B \cap X = A \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,1),(1,3),(2,1),(3,1),(3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині $A = \{2,3,5,6,9,12,18\}$ відношення $Q = \{(a,b):$ число a є дільником числа $b\}$ відношенням нестрогого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1\,|\,0{,}5),(2\,|\,0{,}9),(3\,|\,0{,}3),(4\,|\,0{,}2)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1\,|\,0{,}4),(2\,|\,0{,}2),(3\,|\,1),(4\,|\,0{,}7)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 5x \equiv 7^{133} - 9^{900} (\text{mod} 8), \\ 7x \equiv 4 (\text{mod} 3), \\ x \equiv 5 (\text{mod} 5). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\text{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $15x + 9y = 21$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,15 і 1,15 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.150000005960464480
float b= 1.149999976158142100
```

10. а) У ящику є 7 білих і 3 чорні кулі. Скількома способами можна вибрати серед них 4 білі або 2 чорні кулі? **б)** Скільки різних 3-значних чисел можна утворити із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (кожна цифра входить в число один раз)? **в)** У трьох ящиках лежать жовті, голубі й рожеві ку́льки. Скількома способами можна вибрати 7 кульок, щоб було хоч би по одній кульці кожного кольору?

11. Визначте потужності множин $A = \{1,2,3\}$, $A \cup \{3,4,5,6\}$, $B(A)$, $(-2;+\infty) \cup Z$, $Z \times \{1,5;e\}$, A^Z, $B(Z)$, де Z — множина всіх цілих чисел.

12. а) Задано множину квадратних матриць порядку n і операцію віднімання матриць (–). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A,B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 24

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} B \cup X = C \\ B \setminus X = A \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,2),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині підмножин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}\}$ відношення $Q = \{(X,Y) : X \subset Y\}$ відношенням строгого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1|0{,}9),(2|0{,}4),(3|0{,}1),(4|0{,}5)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1|0{,}5),(2|1),(3|0{,}7),(4|0{,}4)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 8x \equiv 6^{321} - 4^{543} (\mathrm{mod} 5), \\ 13x \equiv 3 (\mathrm{mod} 8), \\ x \equiv 2 (\mathrm{mod} 3). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $9x + 24y = 15$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,35 і 1,35 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.349999994039535520
float b= 1.350000023841857900
```

10. а) Скількома способами із 6 книжок і 7 зошитів можна вибрати 3 книжки і 4 зошити? **б)** Скільки різних 5-значних чисел можна утворити із цифр 2, 3, 4 (кожна цифра входить в число будь-яку кількість разів)? **в)** Студенти групи регулярно читають літературно-художні журнали: "Київ" — 17 студентів, "Дзвін" — 8, "Березіль" — 9, одночасно "Київ" і "Дзвін" — 6, "Київ" і "Березіль" — 3, "Дзвін" і "Березіль" — 4, усі три журнали — 2 студенти. У групі 27 студентів. Скільки студентів не читають ці журнали?

11. Визначте потужності множин $A = \{1, 2, 3\}$, $A \times \{2, 3, 4, 5\}$, множини всіх 2-елементних підмножин множини *A*, $(-3; 3) \cup P$, $P \cup \{\sqrt{2}; \pi\}$, $B(P)$, P^A, де P — множина всіх раціональних чисел.

12. а) Задано множину цілих чисел Z і для будь-яких елементів $m, n \in Z$ визначено бінарну операцію $\otimes$ як менший із цих елементів $\min(m, n)$. Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A, B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 25

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $\left(A \times B\right) \cap \left(C \times D\right) = \left(A \cap C\right) \times \left(B \cap D\right)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} X \setminus C = A \\ C \setminus X = B \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,1),(1,3),(2,1),(3,2),(3,3)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині цілих чисел, кратних 15, Z_{15} відношення $Q = \{(a,b) : (a-b) - \text{парне число}\}$ відношенням еквівалентності і, якщо так, то побудуйте розбиття множини Z_{15} на класи еквівалентності.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1\,|\,0{,}5),(2\,|\,0{,}9),(3\,|\,0{,}8),(4\,|\,0{,}7)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1\,|\,0{,}1),(2\,|\,0{,}2),(3\,|\,0{,}6),(4\,|\,0{,}4)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\ 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв’яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 19x \equiv 5^{653} - 3^{941} (\mathrm{mod} 4), \\ 8x \equiv -2 (\mathrm{mod} 5), \\ x \equiv 7 (\mathrm{mod} 9). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв’язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $22x + 12y = 14$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам’яті комп’ютера дійсних чисел 0,4 і 1,4 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.400000005960464480
float b= 1.399999976158142100
```

10. а) Є 6 книжок у твердій і 5 у м’якій палітурках. Скількома способами можна вибрати серед них 4 в твердій і 3 у м’якій палітурках? **б)** Скільки різних 5-значних чисел можна утворити із цифр 1, 2, 3, 5, 7, 9 (кожна цифра входить в число один раз)? **в)** Скільки різних 6-буквених послідовностей можна утворити із букв слова РОБОТА?

11. Визначте потужності множин $A = \{1,2,3,4\}$, $A \times \{4,5,6\}$, $B(A)$, $[0,5) \cup N$, $N \cup \{0;\pi\}$, $B(N)$, N^A, де N — множина всіх натуральних чисел.

12. а) Задано множину додатних раціональних чисел $P_+ = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in N \right\}$,

де $\frac{m}{n}$ — нескоротний дріб, і операцію звичайного множення ($\cdot$). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A,B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 26

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} A \Delta X = C \\ A \cap X = B \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині A — дільників числа 42 відношення $Q = \{(a,b): \text{число } a \text{ є дільником числа } b\}$ відношенням нестрогого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1\,|\,0{,}7),(2\,|\,0{,}6),(3\,|\,0{,}3),(4\,|\,0{,}1)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1\,|\,0{,}4),(2\,|\,0{,}2),(3\,|\,0{,}1),(4\,|\,0{,}8)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв’яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 7x \equiv 8^{343} - 10^{993} (\bmod 9), \\ 11x \equiv -3 (\bmod 4), \\ x \equiv 2 (\bmod 5). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\bmod m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв’язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $27x + 21y = 33$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам’яті комп’ютера дійсних чисел 0,45 і 1,45 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.449999988079071040
float b= 1.450000047683715800
```

10. а) Скількома способами із 3 флешок і 7 дисків можна вибрати 2 флешки і 5 дисків? **б)** Скільки різних 4-значних чисел можна утворити із цифр 2, 3, 4, 5 (кожна цифра входить в число будь-яку кількість разів)? **в)** На трьох яблунях рясно вродили яблука. Скільки є способів вибрати 8 яблук, щоб було хоч би по одному яблуку з кожного дерева?

11. Визначте потужності множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \times \{4, 5, 6\}$, $B(A)$, $(-\infty; -3) \cup Z$, $Z \cup \{-0{,}8; \sqrt{3}\}$, $B(Z)$, Z^A, де Z — множина всіх цілих чисел.

12. а) Задано множину n-вимірних векторів з цілими координатами і операція покоординатного додавання векторів (+). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A, B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 27

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} C \cap X = A \\ X \setminus B = C \setminus A \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,1),(3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині підмножин $A = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ відношення $Q = \{(X,Y): X \subset Y\}$ відношенням строгого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1|0{,}8),(2|0{,}9),(3|0{,}7),(4|0{,}5)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1|1),(2|0{,}7),(3|0{,}1),(4|0{,}5)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} -2x \equiv 6^{862} + 4^{540} (\mathrm{mod} 5), \\ 5x \equiv 4 (\mathrm{mod} 9), \\ x \equiv 1 (\mathrm{mod} 4). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $27x + 36y = 45$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,65 і 1,65 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.649999976158142090
float b= 1.649999976158142100
```

10. а) У ящику є 8 білих і 5 чорних куль. Скількома способами можна вибрати серед них 3 білі або 2 чорні кулі? **б)** Скільки різних 4-значних чисел можна утворити із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (кожна цифра входить в число один раз)? **в)** Скільки в діапазоні від 1 до 100 є чисел, які діляться хоч би на одне з чисел 2, 3, 11?

11. Визначте потужності множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cup \{4, 5, 6, 7\}$, множини всіх 4-елементних підмножин множини *A*, $(-\infty; -3) \cup N$, $N \times \{-0{,}5; 0{,}5\}$, $B(N)$, A^Z, де *N* — множина всіх натуральних чисел.

12. а) Задано множину цілих чисел *Z* і для будь-яких елементів $m, n \in Z$ визначено бінарну операцію $\otimes$ як більший із цих елементів $\max(m, n)$. Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A, B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 28

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} C \cap X = A \\ C \Delta X = B \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,2),(1,3),(2,2),(3,2),(3,3)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині цілих чисел, кратних 5, Z_5 відношення $Q = \{(a,b) : a + b - \text{парне число}\}$ відношенням еквівалентності і, якщо так, то побудуйте розбиття множини Z_5 на класи еквівалентності.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1\,|\,0{,}3),(2\,|\,0{,}6),(3\,|\,0{,}4),(4\,|\,0{,}8)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1\,|\,0{,}5),(2\,|\,0{,}2),(3\,|\,1),(4\,|\,0{,}4)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1, 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв’яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 9x \equiv 6^{144} - 4^{145} \pmod{5}, \\ 5x \equiv 1 \pmod{7}, \\ x \equiv 3 \pmod{8}. \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\bmod m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв’язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $36x + 21y = 30$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам’яті комп’ютера дійсних чисел 0,7 і 1,7 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.699999988079071040
float b= 1.700000047683715800
```

10. а) Скількома способами із 6 книжок і 7 зошитів можна вибрати 4 книжки і 3 зошити? **б)** Скільки різних 4-значних чисел можна утворити із цифр 2, 3, 4, 7, 8 (кожна цифра входить в число будь-яку кількість разів)? **в)** Скільки різних 6-значних чисел можна утворити із цифр числа 247443?

11. Визначте потужності множин $A = \{1,2,3,4\}$, $A \times \{4,5,6\}$, $B(A)$, $(-2;+\infty) \cup Z$, $Z \cup \{1{,}5; e\}$, $B(Z)$, Z^A, де Z — множина всіх цілих чисел.

12. а) Задано множину дійсних чисел R і операцію звичайного множення ($\cdot$). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A,B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 29

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times D) \cap (B \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} X \setminus A = C \\ A \setminus X = B \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,2)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21\}$ відношення $Q = \{(a,b)$: число a є дільником числа $b\}$ відношенням нестрогого порядку і, якщо так, то побудуйте діаграму Хассе, вкажіть мінімальні й максимальні, найбільші й найменші елементи множини A відносно відношення Q, чи є порядок повним чи частковим.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1\,|\,0,3),(2\,|\,0,5),(3\,|\,0,9),(4\,|\,0,1)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1\,|\,0,1),(2\,|\,0,7),(3\,|\,0,9),(4\,|\,0,4)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\ 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 5x \equiv 8^{133} + 6^{134} (\mathrm{mod} 7), \\ 3x \equiv -11 (\mathrm{mod} 8), \\ x \equiv 2 (\mathrm{mod} 5). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $39x + 24y = 27$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,8 і 1,8 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.800000011920928960
float b= 1.799999952316284200
```

10. а) Є 7 книжок у твердій і 3 у м'якій палітурках. Скількома способами можна вибрати серед них 5 в твердій і 2 у м'якій палітурках? **б)** Скільки різних 5-значних чисел можна утворити із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (кожна цифра входить в число один раз)? **в)** Скількома способами можна розділити 8 речей між 4 людьми порівну?

11. Визначте потужності множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cup \{4, 5, 6\}$, $B(A)$, $[0, 5) \cup N$, $N \times \{0; \pi\}$, $B(N)$, A^N, де N — множина всіх натуральних чисел.

12. а) Задано множину n-вимірних векторів з цілими координатами і операція покоординатного віднімання векторів (–). Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A, B) : A \subseteq B\}$.

Варіант 30

1. Використовуючи метод: **а)** характеристичних функцій; **б)** розбиття множини на неперетинні підмножини, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; **в)** двох включень, доведіть чи спростуйте тотожність $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

2. Використовуючи **а)** тотожні перетворення, **б)** метод розбиття універсальної множини на неперетинні підмножини (таблична реалізація), визначте умови існування розв'язку і знайдіть розв'язок системи рівнянь з множинами:

$$\begin{cases} X \setminus C = A \setminus B \\ A \cap X = B \end{cases}.$$

3. На множині $A = \{1,2,3\}$ задано відношення $Q = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,1),(3,3)\}$. **а)** Подайте граф відношення. Дослідіть, чи є дане відношення функціональним, відношенням тотожності, рефлексивним, симетричним, транзитивним. Знайдіть Q^{-1}, $\overline{Q}$. Знайдіть Q^2. **б)** Знайдіть замикання відношення Q відносно рефлексивності, симетричності, транзитивності (за алгоритмом Уоршалла).

4. Дослідіть, чи є задане на множині цілих чисел Z відношення $Q = \{(a,b) : |a| = |b|\}$ відношенням еквівалентності і, якщо так, то побудуйте розбиття множини Z на класи еквівалентності.

5. На універсальній множині $\Omega = \{1,2,3,4\}$ задано нечіткі множини $\widetilde{A} = \{(1|0{,}7),(2|0{,}3),(3|0{,}7),(4|0{,}5)\}$ і $\widetilde{B} = \{(1|0{,}3),(2|0{,}9),(3|1),(4|0{,}4)\}$. **а)** Для нечіткої множини $\widetilde{A}$ подайте діаграму Заде, знайдіть потужність і носій, точки переходу, висоту, ядро, множини α-рівня ($\alpha = 0{,}1,\ 0{,}2, \ldots, 1$), визначте, чи є дана множина нормальною (якщо ні, то нормалізуйте), унімодальною. **б)** Знайдіть об'єднання, перетин, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток нечітких множин $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, визначте, яка з множин є більш нечіткою.

6. На множині $A = \{1,2,3\}$ нечітке відношення задано характеристичною матрицею:

$$M_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть його властивості і, якщо треба, побудуйте одне з транзитивних max-min-, max-prod- чи min-max-замикань.

7. Розв'яжіть систему порівнянь

$$\begin{cases} 11x \equiv 7^{577} - 9^{578} (\mathrm{mod} 8), \\ 8x \equiv -1 (\mathrm{mod} 5), \\ x \equiv 4 (\mathrm{mod} 7). \end{cases}$$

а) методом підстановок; **б)** за алгоритмом Гаусса. *Вказівка*: спочатку в системі всі порівняння подайте у вигляді $x \equiv c_i (\mathrm{mod} m_i)$.

8. Знайдіть загальний цілочисельний розв'язок діофантового рівняння першого степеня з двома невідомими $9x + 21y = 24$, скориставшись апаратом ланцюгових дробів. Найбільший спільний дільник знайдіть за алгоритмом Евкліда.

9. Поясніть, чому при збереженні в пам'яті комп'ютера дійсних чисел 0,95 і 1,95 типу float їхні дробові частини відрізняються, причому одна дробова частина зберігається з надлишком, а інша з недостачею:

```
float a= 0.949999988079071040
float b= 1.950000047683715800
```

10. а) Скількома способами із 8 програмістів і 4 дизайнерів можна вибрати 5 програмістів або 3 дизайнерів? **б)** Скільки різних 5-значних чисел можна утворити із цифр 2, 3, 4 (кожна цифра входить в число будь-яку кількість разів)? **в)** Скільки різних 7-буквених послідовностей можна утворити із букв слова ПОЛОТНО?

11. Визначте потужності множин $A = \{1, 2, 3\}$, $A \cup \{2, 3, 4, 5, 6\}$, множини всіх 2-елементних підмножин множини *A*, $(-3; 3) \cup P$, $P \times \{\sqrt{2}; \pi\}$, $B(P)$, P^A, де *P* — множина всіх раціональних чисел.

12. а) Задано множину дійсних чисел *R* і для будь-яких елементів $a, b \in R$ визначено бінарну операцію $\otimes$ як менший із цих елементів $\min(a, b)$. Дослідіть, чи утворюють вказані множина і операція алгебру і, якщо так, то класифікуйте алгебричну структуру, дослідивши її основні властивості, а також існування одиничного та оберненого елементів. **б)** Дослідіть, чи є решіткою множина множин $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ з заданим на ній відношенням порядку $Q = \{(A, B) : A \subseteq B\}$.

Список літератури

1. Андерсон Д.А. Дискретная математика и комбинаторика. — М.: Вильямс, 2003. — 960 с.

2. Арнольд И.В. Теоретическая арифметика. — М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1938. — 481 с.

3. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.С. Дискретна математика. — К.: Вища школа, 2002. — 287 с.

4. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: Учебник. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. — 744 с.

5. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика: Підручник. — Харків: Компанія СМІТ, 2004. — 480 с.

6. Виноградов И.А. Основы теории чисел. — М.-Л.: Гостехиздат. — 1952. — 180 с.

7. Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н. Конспект лекций по дискретной математике. — М.: Айрис-пресс, 2007, 176 с.

8. Гребенча М.К. Теория чисел. — М.: Учпедгиз, 1949. — 128 с.

9. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. — М.: Мир, 1985. — 414 с.

10. Карнаух Т.О., Ставровський А.Б. Вступ до дискретної математики. — К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2006. — 113 с.

11. Конышева Л.К., Назаров Д.М. Основы теории нечетких множеств. — СПб: Питер, 2011. — 192 с.

12. Коцовський В.М. Дискретна математика та теорія алгоритмів. Ч. 1. — Ужгород: УНУ, 2016. — 96 с.

13. Кублій Л.І., Ногін М.В. Вибрані розділи дискретної математики. Алгебричні структури. Алгебра логіки. Математична логіка: Навч. посібник. — К.: НТУУ "КПІ", 2012. — 172 с.

14. Мещеряков В.І., Черепанова К.В. Невизначене програмування: Консп. лекцій. — Одеса: ОДЕУ, 2017. — 88с.

15. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. — М.: Наука, 1986. — 312 с.

16. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика: Підручник. Вид. 4-е. — Львів: Магнолія, 2016. — 432 с.

17. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов: Учебник. — СПб: Питер, 2000. — 304 с.

18. Оглобліна О.І., Сушко Т.С., Шрамко Ю.В. Елементи теорії чисел. — Суми: СДУ, 2015. — 186 с.

19. Спекторський І., Стусь О. Дискретна математика. Частково впорядковані множини, решітки, булеві алгебри. — К.: НТУУ "КПІ", 2009. — 136 с.

20. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 352 с.

21. IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic. IEEE Std 754-2008 (Revision of IEEE Std 754-1985). — NY: IEEE, 2008. — 70 p.

Лариса Іванівна Кублій
e-mail: kublii_l_i@ukr.net
тел.: (063)-71-91-231