# Дискретна математика в задачах і прикладах

**Олег Гутік**

13 грудня 2021 р.

**Олег Гутік**, *Дискретна математика в задачах і прикладах.*

# Зміст

# Передмова

# Розділ 1

# Алгебра висловлень і елементи теорії множин

## 1.1 Висловлення, дії над висловленнями. Логічні закони

Як арифметика вивчає числа, а геометрія — фігури, так математична логіка вивчає висловлення та навіть дії над ними. Очевидно, що ці дії особливі, не такі, як дії над числами, але є між ними й щось спільне.

Що ми розуміємо під висловленням?

*Висловленням* (або *судженням*, або *твердженням*) називається кожне речення, яке стверджує якусь закінчену думку, **істинну** або **хибну** залежно від певних умов.

Розглянемо такі речення:

1. $2 + 3 = 5$.
2. $2 - 3 = 7$.
3. Україна — незалежна держава.
4. Я мешкаю у Львові.
5. Сьогодні понеділок.
6. Тарас Шевченко народився 9 березня 1814 року.
7. "Як умру, то поховайте
   Мене на могилі ..."
8. Сонце обертається навколо Місяця.

Серед цих речень лише сьоме не є висловленням у нашому розумінні, оскільки воно не має стверджувального характеру, і не можна сказати, істинне воно чи хибне. Усі інші речення — висловлення, бо вони у стверджувальній формі висловлюють завершену думку, і можна сказати, істинні вони чи хибні. При цьому висловлення 1, 6 — абсолютно істинні (незалежно від будь-яких умов), а висловлення 2, 8 — абсолютно хибні. Істинність або хибність висловлень 3, 4, 5 залежить від конкретних додаткових умов. А саме, судження 5 істинне в понеділок і хибне в інші дні тижня, судження 4 істинне в устах того, хто мешкає у Львові.

Отже, істинність або хибність висловлення може мати як абсолютний, так і відносний характер. Проте жодне висловлення за жодних конкретних умов не може бути водночас і хибним, і істинним. Це зрозуміле твердження є одним із трьох основних законів класичної логіки — так званим *законом суперечності*. Другий основний закон класичної логіки називається *законом вилучення третього* і полягає в тому, що кожне висловлення за певних умов або істинне, або хибне — третього бути не може (лат. *tertium non datur*, тобто *третього не дано*).

Алгебра висловлень, як і звичайна алгебра, користується буквенною символікою для позначення загальних понять і тверджень. Висловлення надалі позначатимемо грецькими літерами: $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \chi \dots$ . Якщо висловлення $\alpha$ істинне, то вважатимемо, що його *значення істинності* дорівнює одиниці, писатимемо $\alpha \equiv 1$, а коли хибне, то вважатимемо, що його значення істинності дорівнює нулю, і писатимемо $\alpha \equiv 0$. Надалі, також, якщо значення істинності двох висловлень $\alpha$ і $\beta$ збігаються, то це записуватимемо так: $\alpha \equiv \beta$.

З простих висловлень за допомогою так званих логічних операцій утворюються складні висловлення.

Символи, які використовуються для позначення висловлень, називаються *атомарними формулами*, або *атомами*.

**Приклад 1.1.1.** Наведемо приклади висловлень.

1. $\alpha$: “вода мокра”;
2. $\beta$: “небо голубе”;
3. $\gamma$: “Єрусалим — столиця Ізраелю”.

У прикладі 1.1.1 $\alpha$, $\beta$ і $\gamma$ — атомарні формули.

Багато речень утворюють об’єднанням одного, або декількох висловлень, які є атомами. Якщо таке утворене речення є висловленням, то його називають *складним висловленням*. Побудову складних висловлень уперше розглянуто в книзі англійського математика Джоржа Буля (George Boole) “The Laws of Truth”. Складні висловлення утворюють з існуючих висловлень застосовуючи логічні операції, які ми визначимо далі: кон’юнкція, диз’юнкція, заперечення, імплікація та еквіваленція.

Визначити якусь логічну операцію над висловленнями — означає: *вказати, якого зі значень істинності набуває її результат*; тобто відповідне складне висловлення залежне від значень істинності простих висловлень, що входять до його складу.

Основними логічними операціями над висловленнями є *кон’юнкція*, *диз’юнкція* і *заперечення*.

*Логічним добутком*, або *кон’юнкцією*, двох висловлень $\alpha$ і $\beta$ називається складне висловлення $\alpha \wedge \beta$, яке істинне, якщо кожне з висловлень $\alpha$ і $\beta$ істинне, і хибне, якщо хоча б одне з них хибне. Операція знаходження логічного добутку називається *кон’юнкцією*. Кон’юнкція також називається *логічним “ і ”*.

Логічний добуток двох висловлень $\alpha$ і $\beta$ часто позначають так само, як звичайний добуток: $\alpha\beta$, читається “$\alpha$ і $\beta$”. Трапляються й інші позначення для кон’юнкції висловлень $\alpha \& \beta$, або просто $\alpha \cdot \beta$.

Означення логічних операцій зручно подавати *таблицями істинності*; в них наводяться значення істинності складного висловлення для всіх можливих комбінацій значень істинності його простих висловлень. Для кон’юнкції таблиця істинності має такий вигляд:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \wedge \beta$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Важливо зауважити, що кон'юнкція значень істинності збігається зі звичайним арифметичним добутком чисел 0 і 1: $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$ і $1 \cdot 1 = 1$.

Розглянемо приклади кон'юнкцій:

1) сніг білий і $2 + 2 = 4$;
2) сніг білий і $2 + 2 = 8$;
3) на городі бузина, а в Києві дядько.

Кон'юнкції 1, 3 — істинні, а 2 — хибна.

*Диз'юнкція* (*логічне додавання*). Сполучник "або" вживається у звичайному мовленні у двох різних значеннях: роздільному і нероздільному. Їх можна пояснити так: вираз "$\alpha$ або $\beta$" може мати

роздільне значення — "$\alpha$ або $\beta$, але не обидва";
нероздільне значення — "$\alpha$ або $\beta$, або обидва".

Якщо, наприклад, хтось каже: "я сьогодні складу іспит з топології на "добре" або на "відмінно", то тут "або" має роздільний зміст, бо не можна скласти один і той же іспит в один і той же час на "добре" і на "відмінно". Водночас у твердженні "якщо $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ або $b = 0$" сполучник "або" має нероздільний зміст, оскільки $a \cdot b = 0$ і при $a = b = 0$.

Операція логічного додавання (диз'юнкція) відповідає у звичайному мовленні об'єднанню висловлень сполучником "або" у нероздільному розумінні.

*Логічною сумою*, або *диз'юнкцією*, двох висловлень $\alpha$ і $\beta$ називається складне висловлення $\alpha \vee \beta$, яке істинне, якщо хоча б одне з висловлень $\alpha$ або $\beta$ істинне; і хибне, якщо вони обидва хибні. Операція знаходження логічної суми називається *логічним додаванням*, або *диз'юнкцією*. Знак "$\vee$" читається "або", і диз'юнкцію називають також логічним "*або*".

Таблиця істинності диз'юнкції:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \vee \beta$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Розглянемо приклади диз'юнкцій:

1) $2 \times 2 = 4$ або сніг білий;
2) $2 \times 2 = 4$ або сніг чорний;
3) $2 \times 2 = 5$ або сніг білий;
4) $2 \times 2 = 5$ або сніг чорний.

Усі ці висловлення є диз'юнкціями. Останнє з них хибне, а решта — істинні.

**Вправа 1.1.1.** Довести, що операції кон'юнкція та диз'юнкція є комутативними та асоціативними, тобто виконуються рівності:

1) $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$;
2) $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$;
3) $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$;
4) $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$.

**Вправа 1.1.2.** Довести, що для операцій кон'юнкція та диз'юнкція виконується дистрибутивний закон:

1) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$;
2) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

Третя основна логічна операція — заперечення. *Запереченням* висловлення $\alpha$ називається висловлення $\overline{\alpha}$, яке істинне, якщо $\alpha$ хибне, і хибне, якщо $\alpha$ істинне. Заперечення називається також *логічним "не"*.

Таблиця істинності заперечення:

| $\alpha$ | $\overline{\alpha}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Отже, $\overline{0} \equiv 1$, $\overline{1} \equiv 0$. Висловлення $\overline{\alpha}$ читається "не $\alpha$". Інколи операція заперечення позначається $\neg\alpha$ або $\alpha'$.

**Вправа 1.1.3.** Довести, що для довільного висловлення $\alpha$ виконується $\overline{\overline{\alpha}} \equiv \alpha$.

Застосовуючи логічні операції, можна утворити з висловлень нові висловлення, наприклад, якщо $\alpha$, $\beta$ і $\gamma$ — висловлення, то $(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma$, $(\alpha\vee\overline{\beta})\wedge\gamma$, $(\overline{\alpha}\wedge\beta)\vee(\overline{\gamma \wedge (\alpha \vee \beta))}$ тощо теж висловлення. Такі вирази називаються *формулами алгебри висловлень*. Дужки в логічних формулах відіграють таку ж роль, як у алгебрі: вони позначають порядок виконання дій.

Щоб мати повну картину значень істинності логічної формули, складають її таблицю істинності для всіх можливих наборів. Для цього виписують усі послідовні часткові формули, з яких складається формула, і знаходять їх значення істинності на всіх наборах, доки не дійдуть до розглядуваної повної формули.

Пояснимо це на прикладі. Складемо таблицю істинності для наступного висловлення: $\overline{(\overline{\alpha} \vee (\beta \wedge \alpha))} \wedge \gamma$.

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\overline{\alpha}$ | $\beta \wedge \alpha$ | $\overline{\alpha} \vee (\beta \wedge \alpha)$ | $\overline{\alpha \vee (\beta \wedge \alpha)}$ | $\overline{(\overline{\alpha} \vee (\beta \vee \alpha))} \wedge \gamma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Отже, це висловлення істинне лише в тому випадку, якщо $\alpha$, $\gamma$ — істинні, а $\beta$ — хибне.

**Вправа 1.1.4.** Дано два висловлення:

$\alpha$: Василь знає Петра;
$\beta$: Петро знає Василя.

Записати логічними формулами такі висловлення:

*a*) Василь і Петро знають один одного;
*b*) Василь і Петро не знають один одного;
*c*) Або Василь знає Петра, або Петро знає Василя;
*d*) Василь не знає Петра, а Петро знає Василя;
*e*) Неправильно, що Петро не знає Василя;
*f*) Неправильно, що Василь і Петро один одного не знають.

**Вправа 1.1.5.** Дано висловлення:

$\alpha$: я люблю математику;
$\beta$: я люблю спорт.

Який зміст мають висловлення:
*a*) $\alpha \wedge \beta$; *b*) $\overline{\alpha \wedge \beta}$; *c*) $\alpha \vee \beta$; *d*) $\alpha \wedge \overline{\beta}$; *e*) $\overline{\overline{\alpha} \wedge \overline{\beta}}$; *f*) $\overline{\overline{\alpha}}$; *g*) $\overline{\alpha} \vee \beta$?

**Вправа 1.1.6.** Скласти таблицю істинності для формул:
*a*) $\overline{(\alpha \wedge \beta) \vee \overline{\alpha \wedge \beta}}$; *b*) $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$; *c*) $\overline{\alpha} \vee \gamma$; *d*) $\overline{\alpha \wedge \beta}$; *e*) $\overline{\alpha \wedge (\overline{\alpha} \vee \beta) \vee \beta}$.

Усі математичні теореми можна записати так: “*якщо справджуються такі-то умови, то випливає такий-то висновок*”. Наприклад, теорему “*Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює* 180°” можна записати так: “*якщо дана фігура — трикутник, то сума її внутрішніх кутів дорівнює* 180°”. Для запису таких висловлень існує логічна операція, яка називається *імплікацією*. Вона відповідає умовному твердженню на зразок “*якщо ..., то ...*” і позначається стрілкою “$\Rightarrow$”. Отже, імплікація — складне висловлення

$$\alpha \Rightarrow \beta,$$

яке читається так: “*якщо* $\alpha$*, то* $\beta$”, або “*з* $\alpha$ *випливає* $\beta$”.

*Імплікацією* висловлень $\alpha$ і $\beta$ називається таке складне висловлення $\alpha \Rightarrow \beta$, яке хибне лише за умови, що висловлення $\alpha$ істинне, а висловлення $\beta$ хибне, а в усіх інших випадках воно істинне. Часто замість $\alpha \Rightarrow \beta$ писатимемо $\alpha \to \beta$.

Таблиця істинності для імплікації має такий вигляд:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \Rightarrow \beta$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Зауважимо, що з хибного висловлення випливає будь-яке твердження.

Наприклад, візьмімо хибне твердження: $1 = 2$. Віднімаючи від обох частин одиницю, отримаємо $0 = 1$. Нехай тепер $a$ і $b$ — довільні числа. Помножимо рівність $0 = 1$ спочатку на $a$, а потім на $b$: $0 \cdot a = 1 \cdot a = a$, $0 \cdot b = 1 \cdot b = b$. Отже, $0 = 0 \cdot a = 0 = 0 \cdot b = a = b$, і будь-які два числа рівні.

Розглянемо ще одну логічну операцію — *еквівалентність двох висловлень*. Вона відповідає сполучним словам "*тоді і лише тоді*" і приводить до істинного складного висловлення у випадку, якщо відповідні прості висловлення одночасно істинні або одночасно хибні.

*Еквівалентністю* висловлень $\alpha$ і $\beta$ називається складне висловлення $\alpha \Leftrightarrow \beta$ (читається: "$\alpha$ еквівалентне $\beta$"), яке істинне, якщо обидва висловлення $\alpha$ і $\beta$ істинні або обидва хибні, й хибне, якщо одне з них істинне, а друге хибне. Еквівалентність висловлень $\alpha$ і $\beta$ часто позначають через $\alpha \sim \beta$.

Таблиця істинності еквівалентності має такий вигляд:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \Leftrightarrow \beta$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

У логіці атом, чи складне висловлення називають *формулою*. Вивчаючи формули, розглядають два аспекти — синтаксис і семантику.

*Синтаксис* — це сукупність правил, які дають змогу будувати формули та розпізнавати правильні формули серед послідовностей символів. Формули в логіці висловлень визначають за такими правилами:

- атом — це формула;
- якщо $\alpha$ — формула, то $\overline{\alpha}$ — також формула;
- якщо $\alpha$ і $\beta$ — формули, то $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$, $\alpha \Leftrightarrow \beta$ — формули;
- формули утворюються лише скінченною кількістю застусувань вище наведених правил.

*Семантика* — це сукупність правил, за якими формулам надають значень істинності. Семантику логічних операцій зручно задавати у вигляді таблиць істинності, як це ми визначали раніше для логічних операцій.

*Логічним законом* називається тотожно-істинна логічна формула, тобто така формула, яка істинна завжди, тобто при будь-якому наборі значень істинності.

Логічні закони, і лише вони становлять загальні форми правильного мислення. Тому вони найбільш цікаві для логіки.

Як довести логічний закон? Для цього є принаймні три способи. Перший — *складання таблиці істинності*. Зрозуміло, що логічна формула буде тотожно-істинна тоді й лише тоді, коли останній стовпець її таблиці істинності складається лише з одиниць.

Інколи швидше приводить до мети другий спосіб доведення логічних законів, який полягає в тому, що безпосередньо на підставі означення логічних операцій упевнюються, що формула не може набувати значення нуль. Нарешті, третій спосіб ґрунтується на тотожних перетвореннях логічних формул.

## Основні логічні закони:

1. **Закон тотожності**: $X \to X$ (“*якщо* $X$, *то* $X$”).

   *Доведення:*

| $X$ | $X$ | $X \to X$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

2. **Закон суперечності**: $\overline{X \wedge \overline{X}}$ (“*не можуть бути одночасно істинними висловлення* $X$ *і* $\overline{X}$”).

   *Доведення:*

| $X$ | $\overline{X}$ | $X \wedge \overline{X}$ | $\overline{X \wedge \overline{X}}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |

3. **Закон вилучення третього**: $X \vee \overline{X}$ (“*з висловлень* $X$ *і* $\overline{X}$ *принаймні одне істинне*”).

   *Доведення:*

| $X$ | $\overline{X}$ | $X \vee \overline{X}$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

Особливо важливе значення мають *тотожно-істинні еквівалентності*, які позначаються звичайним знаком “=”.

Як можна довести логічну рівність $S = T$? Рівність $S = T$ буде істинна тоді й лише тоді, коли формули $S$ і $T$ на будь-яких наборах мають однакові значення істинності.

4. **Закон подвійного заперечення**: $\overline{\overline{X}} = X$.

   Доведення очевидне.

5. **Формули (закони) де Моргана**:

а) $\overline{X \vee Y} = \overline{X} \wedge \overline{Y}$,
б) $\overline{X \wedge Y} = \overline{X} \vee \overline{Y}$.

*Доведення:*

а)

| $X$ | $Y$ | $X \vee Y$ | $\overline{X \vee Y}$ | $\overline{X}$ | $\overline{Y}$ | $\overline{X} \wedge \overline{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

б)

| $X$ | $Y$ | $\overline{X}$ | $\overline{Y}$ | $\overline{X} \vee \overline{Y}$ | $\overline{X \wedge Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Як побачимо далі, логічні операції не незалежні, одні з них можна виразити через інші. Наприклад:

а) $X \vee Y = \overline{\overline{X} \wedge \overline{Y}}$;
б) $X \wedge Y = \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}}$;
в) $X \to Y = \overline{X} \vee Y$;
г) $X \to Y = \overline{X \wedge \overline{Y}}$;
ґ) $X \sim Y = (X \to Y) \wedge (Y \to X)$.

Отже, диз'юнкція виражається через кон'юнкцію і заперечення а); кон'юнкція — через диз'юнкцію та заперечення б); імплікація — через диз'юнкцію та заперечення в), або — через кон'юнкцію та заперечення г); еквівалентність — через імплікацію та кон'юнкцію. Ми пропонуємо читачеві самостійно довести вище перелічені логічні рівності.

Отож, всі логічні операції можна виразити через

а) диз'юнкцію та заперечення;

або

б) кон'юнкцію та заперечення.

Кажуть, що формула $\alpha$ записана

- в *кон'юнктній нормальній формі*, якщо воно має вигляд
$$\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \qquad (n \geqslant 2),$$
де кожна з формул $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ є атомом, або його запереченням, або їх диз'юнкцією, а всі формули $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ є різними;
- в *диз'юнктній нормальній формі*, якщо воно має вигляд
$$\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_n \qquad (n \geqslant 2),$$
де кожна з формул $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ є атомом, або його запереченням, або їх кон'юнкцією, а всі формули $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ є різними.

**Приклад 1.1.2.** Нехай $\alpha$, $\beta$ і $\gamma$ — атоми. Тоді:

- $\omega = (\alpha \vee \overline{\beta} \vee \overline{\gamma}) \wedge (\overline{\alpha} \vee \beta)$ — формула, записана в кон'юнктній нормальній формі;
- $\omega = (\alpha \wedge \overline{\beta} \wedge \overline{\gamma}) \vee (\overline{\alpha} \wedge \beta)$ — формула, записана в диз'юнктній нормальній формі.

**4. Закон контрапозиції**:

$$\boxed{X \to Y = \overline{Y} \to \overline{X}}$$

*Доведення:*

| $X$ | $Y$ | $X \to Y$ | $\overline{Y}$ | $\overline{X}$ | $\overline{Y} \to \overline{X}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

**Вправа 1.1.7.** Доведіть такі закони:

$(i)$ **закони ідемпотентності**:

$(i_1)$ $X \vee X = X$;

$(i_2)$ $X \wedge X = X$;

$(ii)$ **закони поглинання**:

$(ii_1)$ $(X \vee Y) \vee X = X$;

$(ii_2)$ $(X \wedge Y) \vee X = X$;

$(iii)$ **закони тотожності**:

$(iii_1)$ $X \vee 0 = X$;

$(iii_2)$ $X \wedge 1 = X$;

$(iii)$ **закони домінування**:

$(iii_1)$ $X \vee 1 = 1$;

$(iii_2)$ $X \wedge 0 = 0$.

Відповідно до варіантів імплікації в математиці розглядаються зв'язки між теоремами. Якщо $X \to Y$ — дана теорема, то її конверсія $Y \to X$ називається *оберненою теоремою*.

Конверсія контрапозиції $\overline{X} \to \overline{Y}$ називається *протилежною теоремою*. З нашого означення випливає, що формулювання оберненої теореми можна отримати, помінявши місцями умову та висновок.

**Теорема 1.1.3.** *Якщо є $X$, то є $Y$.*

**Теорема 1.1.4** (обернена до теореми 1.1.3)**.** *Якщо є $Y$, то є $X$.*

**Теорема 1.1.5** (протилежна до теореми 1.1.3)**.** *Якщо немає $X$, то немає $Y$.*

За законом контрапозиції, довівши яку-небудь теорему, ми довели для неї обернену до протилежної (контрапозицію). Отже, з теореми "*Якщо точка лежить на бісектрисі кута, то вона однаково віддалена від сторін кута*" автоматично випливає твердження: "*Якщо точка не однаково віддалена від сторін кута, то вона не лежить на його бісектрисі*".

З імплікацією тісно пов'язане питання про *необхідність і достатність* умов, дуже важливе для математики. Означення такі: якщо імплікація $X \to Y$ істинна, то істинність висловлення $Y$ називають *необхідною умовою* для істинності висловлення $X$. Коротше: якщо істинно $X \to Y$, то $Y$ — *необхідна умова* для $X$, а $X$ — *достатня умова* для $Y$.

Такі назви пояснюються тим, що коли імплікація $X \to Y$ істинна, то для вірності $X$ необхідно, щоб було вірним і $Y$, а вірність $X$ достатня для вірності $Y$.

Наприклад, твердження "*Якщо ціле число закінчується нулем, то воно ділиться на* 2" можна інакше висловити так: "*Для того, щоб ціле число закінчувалося нулем, необхідно, щоб воно ділилося на* 2", або "*Для того, щоб число ділилось на* 2*, достатньо, щоб воно закінчувалося нулем*".

**Доведення від супротивного**

Легко переконатися, що істинні такі формули:

C1) $X \to Y = X \wedge \overline{Y} \to \overline{X}$;
C2) $X \to Y = X \wedge \overline{Y} \to Y$;
C3) $X \to Y = X \wedge \overline{Y} \to 0$.

Ці рівності означають таке: щоб довести, що з $X$ випливає $Y$, досить довести, що коли $X$ правильне, а $Y$ неправильне, то C1) — неправильне; C2) $Y$ — правильне; C3) прийдемо до суперечності.

**Вправа 1.1.8.** Доведіть логічні рівності C1) — C3).

**Приклад 1.1.6.** Доведемо методом від супротивного такі теореми:

1. Якщо дві прямі, які лежать в одній площині, в перетині з третьою утворюють рівні відповідні кути, то ці прямі паралельні ($X \to Y$).
   *Доведення.* Припустимо, що вони не паралельні ($\overline{Y}$), хоч і утворюють рівні відповідні кути ($X$), тобто, що ($X \wedge \overline{Y}$). Тоді прямі перетинаються й утворюють трикутник, у якому один з відповідних кутів буде внутрішнім, а другий — зовнішнім, не суміжним з ним. Як відомо, такі кути не однакові ($\overline{X}$). Отже, ми довели, що $X \wedge \overline{Y} \to \overline{X}$, а значить $X \to Y$.
2. Доведемо класичну теорему Евкліда про нескінченність множини простих чисел. Сформулюємо її так: якщо $n$ — просте число ($X$), то існує більше за нього просте число $q$ ($Y$). Тобто $X \to Y$.
   *Доведення.* Нехай $p$ — найбільше просте число, тобто не існує більшого за нього ($X \wedge \overline{Y}$). Розглянемо число $Q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p + 1$. Число $Q$ або просте, або складене. Якщо воно просте, то, оскільки воно більше за $p$, твердження $Y$ вірне, тобто $X \wedge \overline{Y} \to Y$. Якщо ж $Q$ складене, то воно ділиться на якесь просте число $q$. Але на прості числа $2, 3, 5, \ldots, p$ число $Q$ не ділиться, бо при діленні на кожне з них отримується остача 1. Отже, число $q$ відмінне від усіх простих $2, 3, 5, \ldots, p$,

тобто $Q > p$. І в цьому випадку існує просте число, більше за $p$: $X \wedge \overline{Y} \to Y$. Отже, завжди вірна імплікація $X \to Y$. Це й означає, що множина простих чисел нескінченна.

Надалі ми часто користуватимемося методом доведення від супротивного. Проаналізувавши хід наших міркувань, завжди можна буде переконатися, що ми користувались одним із правил: C1), C2) або C3).

## 1.2 Формули логіки першого порядку

Існують речення, які не є висловленнями та містять змінні. Зокрема, таким є речення "$x^2 - 5 = 15$". Речення із змінними — це не висловлення, але вони стають висловленнями, якщо надати змінним певних значень. Речення із змінними дуже поширені. Зокрема вони містяться в математичних формулах і комп'ютерних програмах.

**Приклад 1.2.1.** Речення "$x \leqslant 5$", "$x + y = 5$", "$x - y = z$" містять змінні. Їм не можна надати значення істинності, доки змінним не буде надано якихось значень.

У прикладі 1.2.1 речення "$x \leqslant 5$", або "$x$ менше або рівне за 5", складається з двох частин: перша, змінна $x$, називається *предметом*, а друга — "менше або рівне за 5", яка вказує властивість предмета, називається *предикатом*. Зауважимо, що часто *предикатом* називають усе речення.

Розглянемо логіку *першого порядку*, або *логіку предикатів*, у якій до понять логіки висловлень додано нові поняття. Для формулювання складних речень у логіці висловлень використовують атоми як основні елементи формул. Атом розглядають як неподільне ціле — його структуру не аналізують.

Оскільки багато міркувань неможливо описати лише за допомогою висловлень, то введемо поняття атома в логіці першого порядку. Для запису атомів логіки використовують такі типи символів:

- *індивідні символи* або *сталі* — це імена об'єктів, які починаються з великої літери, і сталі, наприклад $T$, $F$, 12, 292;
- *предметні символи*, *предметні змінні*, або просто *змінні* — імена, якими позначаються змінні та їх записують малими латинськими літерами (можливо з індексами), наприклад, $x$, $z$, $z_1$, $a_i$;
- *предикатні символи* — імена, якими позначають предикати та які записують великими латинськими літерами, наприклад $A$, $G$, $P$.

**Приклад 1.2.2.** Позначимо речення "$x \leqslant 5$" через $P(x)$, де предикатний символ $P$ позначає предикат "менше або рівне за 5", а $x$ — предметна змінна. Вираз $P(x)$ загалом також називають предикатом.

У загальному випадку, предикат, який містить $n$ предметних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, записують $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і називають *$n$-місним*. *Предметною областю змінної $x_i$* називають множину $D_i$ її значень, а символ $P$ — *$n$-місним предикатним символом*.

*Атом логіки першого порядку* має вигляд $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, де $P$ — предикатний символ, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — предметні або індивідні символи.

Як тільки змінна $x$ набуває якогось значення з предметної області, то предикат $P(x)$ набуває значення 0 або 1, і перетворюється на висловлення. Аналогічно, якщо всі змінні багатомісного предиката набувають якихось значень з предметної області, то він набуває значення істинності та перетворюється на висловлення.

**Приклад 1.2.3.** Позначимо речення "$x \leqslant 5$" через $P(x)$. Тоді $P(2)$ — істинне висловлення, а $P(12)$ — хибне. Надалі це записуватимемо так: $P(2) = 1$ і $P(12) = 0$.

Є ще інший спосіб перетворення предикатів у висловлення — це *квантування*. Нехай $P(x)$ — предикат, $D$ — задана предметна область, $x \in D$. Використовують два спеціальні символи $\forall$ і $\exists$, які називаються, відповідно, *квантором загальності* та *квантором існування*. Якщо $x$ — предметна змінна, то вираз $(\forall x)$ читають "для всіх $x$", "для кожного $x$", або "для бідь-якого $x$". Вираз $(\forall x)P(x)$ означає, що "$P(x)$ істинний для всіх значень $x$ з предметної області", і його читають "$P(x)$ для всіх $x$". Вираз $(\exists x)$ читають "існує $x$", "для деяких $x$", або "принаймні для одного $x$". Вираз $(\exists x)P(x)$ означає, що "в предметній області існує таке $x$, що $P(x)$ — істинний", і його читають "існує таке $x$, що $P(x)$ істинний". В подальшому дужки біля квантора будемо опускати, тобто замість $(\forall x)$ і $(\exists x)$ писатимемо $\forall x$ і $\exists x$, відповідно.

Перехід від $P(x)$ до $\forall x P(x)$ або $\exists x P(x)$ називають *зв'язуванням* предметної змінної $x$, а саму змінну $x$ — *зв'язаною*. Незв'язана змінна називається *вільною*. Кажуть, що у виразах $\forall x P(x)$ та $\exists x P(x)$ предикат $P(x)$ є в *області дії* відповідного квантора.

**Приклад 1.2.4.** У виразі $\exists x P(x, y)$ змінна $x$ зв'язана, а змінна $y$ — вільна, оскільки предикат $P(x)$ не є в області дії квантора зі зміною $y$.

*Формули логіки першого порядку* визначають так:

- атом — це формула;
- якщо $X$ та $Y$ — формули, то $\overline{X}$, $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $X \Rightarrow Y$ та $X \Leftrightarrow Y$ — формули;
- якщо $X$ — формула, а $x$ — вільна змінна у формулі $X$, то $\forall x X$ або $\exists x X$ — формули;
- формули можна породити лише скінченною кількістю вище перелічених трьох правил.

Наведемо приклади висловлень логіки першого порядку.

**Приклад 1.2.5.** Позначимо речення "*$x$ — непарне число*" через $P(x)$, "$x$ — ціле число" — через $Q(x)$, "$x$ — раціональне число" — через $R(x)$ та "$x$ менше або рівне $y$" — через $S(x, y)$. Розглянемо такі істинні твердження.

1. Кожне ціле число раціональне.
2. Існує непарне число.
3. Для довільного числа $x$ існує таке число $y$, що $x \leqslant y$.

Вище наведені речення можна записати такими формулами.

1. $\forall x\,(Q(x) \Rightarrow R(x))$.
2. $\exists x\, P(x)$.

3. $\forall x\, \exists y\, S(x,y)$.

**Приклад 1.2.6.** У формулі $\forall x\, \exists y\, S(x,y)$ формула $S(x,y)$ належить області дії квантора існування, а формула $\exists y\, S(x,y)$ — області дії квантора загальності. Формула $(Q(x) \Rightarrow R(x))$ належить області дій квантора загальності у формулі $\forall x\, (Q(x) \Rightarrow R(x))$.

Зв'язування частини змінних багатомісного предиката перетворює його на предикат із меншою кількістю змінних. Зміст зв'язаних і вільних змінних у предикатах різний. Вільні змінні — це звичайні змінні, які можуть набувати різних значень з предметної області $D(x)$, сам вираз $P(x)$ змінний, та його значення залежить від значення змінної $x$. Формули $\exists\, x\, P(x)$ та $\forall\, x\, P(x)$ не залежать від змінної $x$ і для певних предиката $P$ та його предметної області $D$ мають конкретні значення. Це, зокрема означає, що перейменування зв'язаних змінних, а саме заміна $\forall\, x\, P(x)$ на $\forall\, y\, P(y)$, або заміна $\exists\, x\, P(x)$ на $\exists\, y\, P(y)$, не змінює значення істинності формули.

Розглянемо приклади перекладу речень, записаних українською мовою, на мову предикатів і кванторів. Основна проблема такого перекладу полягає в правильності використання кванторів. Зауважимо також, що кожне речення, записане українською мовою, можна представити декількома способами, і більше того, не існує загального алгоритму, який дає змогу будувати такий переклад крок за кроком.

**Приклад 1.2.7.** Запишемо речення "Кожний солдат частини $X$ стрибав з парашутом" за допомогою предикатів і кванторів. Спочатку перепишемо речення так, щоб було зрозуміло, як краще розставити квантори: "Про кожного солдата частини $X$ відомо, що цей солдат стрибав з парашутом". Тепер уведемо змінну $x$, і тоді речення набуде вигляду: "Про кожного солдата $x$ частини $X$ відомо, що $x$ стрибав з парашутом". Далі введемо предикат $A(x)$: "$x$ стрибав з парашутом". Якщо предметна область змінної $x$ — усі солдати $x$ частини $X$, то можна записати задане речення так:

$$\forall x\, A(x).$$

Є й інші коректні представлення з різними предметними областями та предикатами. Зокрема, можна вважати, що нас цікавлять інші солдати, окрім тих, які служать в частині $X$. Взявши за предметну область усіх солдатів, можна записати задане речення так: "Для кожного солдата $x$, якщо цей солдат $x$ — служить у частині $X$, то $x$ стрибав з парашутом". Якщо предикат $B(x)$ має вигляд "солдат $x$ служить у частині $X$", то наше речення можна записати так: $\forall\, x\, (B(x) \Rightarrow A(x))$. Зауважимо, що вище задане речення не можна записати так: $\forall\, x\, (B(x) \wedge A(x))$, оскільки це б означало, що *всі особи з предметної області служать у частині $X$ і стрибали з парашутом.*

Є ще один спосіб представити дане речення — це ввести двомісний предикат $Q(x,y)$: "Солдат $x$ виконує дію $y$". Тоді можна предикат $A(x)$ замінити на предикат $Q(x, \text{стрибати з парашутом})$, а це дає змогу записати вище наведені формули в одному з виглядів:

$$\forall\, x\, Q(x, \text{стрибати з парашутом})$$

або

$$\forall\, x\, (B(x) \Rightarrow Q(x, \text{стрибати з парашутом})).$$

**Приклад 1.2.8.** Запишемо речення "Деякі мешканці Львова відвідали Варшаву" за допомогою предикатів і кванторів. Це речення означає 'У Львові є такий мешканець, що цей мешканець відвідав Варшаву". Якщо ввести змінну $x$, то дане речення можна переписати так 'У Львові є такий мешканець $x$, що $x$ відвідав Варшаву". Уведемо предикат $W(x)$, який відповідає реченню '$x$ відвідав Варшаву". Якщо предметна область змінної $x$ складається лише з мешканців Львова, то це речення можна записати так:

$$\exists\, x\, W(x).$$

Якщо нас цікавлять інші особи, окрім мешканців Львова, то перше із запропонованих речень матиме інший вигляд, а саме: "Існує особа $x$, що $x$ є мешканцем міста Львова та $x$ відвідав Варшаву". У такому разі предметна область складається з усіх можливих людей. Нехай $L(x)$: "$x$ — мешканець Львова". Тоді речення матиме такий вигляд:

$$\exists\, x\, (L(x) \wedge W(x)),$$

оскільки воно містить повідомлення про те, що хтось — мешканець Львова та він відвідав Варшаву. Це речення не можна подати формулою $\exists\, x\, (L(x) \Rightarrow W(x))$, оскільки вона істинна навіть тоді, коли особа $x$ не є мешканцем Львова.

**Приклад 1.2.9.** Запишемо речення "Кожен мешканець Львова відвідав Варшаву або Краків" за допомогою предикатів і кванторів. Це речення можна переписати так: "Для кожного $x$ зі Львова відомо, що $x$ відвідав Варшаву або $x$ відвідав Краків". Позначимо через $W(x)$ речення "$x$ відвідав Варшаву", а через $K(x)$ — "$x$ відвідав Краків". Припустивши, що предметна область складається з мешканців Львова, дане речення можна записати у вигляді:

$$\forall\, x\, (W(x) \vee K(x)).$$

Якщо предметна область складається з усіх людей, то речення набуде такого вигляду: "Для кожної особи $x$ за умови, що $x$ — мешканець Львова, відомо, що особа $x$ відвідала Варшаву або особа $x$ відвідала Краків". Нехай $L(x)$: "$x$ — мешканець Львова". Тоді речення матиме такий вигляд:

$$\forall\, x\, (L(x) \Rightarrow (W(x) \vee K(x)).$$

Розглянемо приклади, які ілюструють формулювання речень української мови та містять вкладені квантори, тобто в області дії одних кванторів є інші квантори.

**Приклад 1.2.10.** Нехай предметна область змінних $x$ та $y$ — усі дійсні числа. Речення:

- $\forall\, x\, \forall\, y\, (x + y = y + x)$ означає, що правило комутативності операції додавання дійсних чисел виконується для всіх дійсних чисел $x$ та $y$;
- $\forall\, x\, \exists\, y\, (x + y = 0)$ означає, що для кожного дійсного числа $x$ існує протилежне дійсне число $y$: $x + y = 0$;
- $\forall\, x\, \forall\, y\, \forall\, z\, ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$ — це запис правила асоціативності операції множення дійсних чисел.

**Приклад 1.2.11.** Перекладемо українською мовою таку формулу:

$$\forall x \forall y \left(((x > 0) \wedge (y > 0)) \Rightarrow \left(\frac{x}{y} > 0\right)\right),$$

істинну для всіх дійсних чисел $x$ та $y$. Ця формула означає, що для дійсних чисел $x$ та $y$ таких, що $x$ — додатне число й $y$ — додатне число, їх частка $\frac{x}{y}$ — додатне число. Це можна записати таким реченням "Частка двох додатних чисел — додатне число".

Переклад формул із вкладеними кванторами українською мовою може бути досить складним. Він полягає у виписуванні змісту предикатів і кванторів, після чого потрібно переписати дану формулу україномовним реченням.

**Вправа 1.2.1.** Перекладіть формулу

$$\forall x (C(x) \vee \exists y (C(y) \wedge F(x, y)))$$

українською мовою, якщо $C(x)$ означає "$x$ має ноутбук", $F(x, y)$ — "$x$ та $y$ — друзі", а предметна область для $x$ і для $y$ — студенти першого курсу мех-мату.

**Вправа 1.2.2.** Перекладіть формулу

$$\exists x \forall y \forall z \left((F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (x \neq z)) \Rightarrow \overline{F(y, z)}\right)$$

українською мовою, якщо $F(x, y)$ означає "$x$ та $y$ — друзі", а предметна область змінної $x$, $y$ і $z$ — студенти мех-мату.

**Вправа 1.2.3.** Записати речення "Якщо певна жінка — одна з батьків, то вона – мати" у вигляді формули логіки предикатів.

**Вправа 1.2.4.** Запишіть речення "Кожна людина має одного найкращого товариша" формулою, яка містить предикатні символи, квантифіковані змінні, логічні операції, а предметна область складається з усіх людей.

**Вправа 1.2.5.** Запишіть формулою логіки предикатів речення "Добуток двох від'ємних чисел — додатне число".

**Вправа 1.2.6.** Запишіть речення "Кожне дійсне число, окрім нуля, має обернене" формулою логіки першого порядку.

## 1.3 Закони логіки першого порядку

Еквівалентні формули логіки висловлень залишаються еквівалентними й у логіці першого порядку. Однак в логіці першого порядку існують еквівалентності, які ми будемо називати законами, пов'язані зі специфікою означення об'єктів логіки першого порядку.

Дві формули логіки першого порядку називаються *еквівалентними*, якщо вони набувають однакових значень істинності для довільних значень вільних змінних.

Зокрема, якщо формули $P$ і $Q$ еквівалентні, то формула $P \sim Q$ — тавтологія, і навпаки. Еквівалентність формул $P$ і $Q$ записують так

$$P = Q.$$

Задача побудови законів логіки першого порядку полягає в доведенні еквівалентності формул $P$ і $Q$. У логіці висловлень еквівалентність двох висловлень можна перевірити, побудувавши відповідні таблиці істинності. У логіці першого порядку аналогічна процедура в загальному випадку неможлива, оскільки предметні змінні можуть мати нескінченні предметні області, а тому повний перебір усіх їх значень неможливий.

У теоремі 1.3.1 наведено основні *закони логіки першого порядку.* Зауважимо, що у формулах представлено лише зв'язані змінні.

**Теорема 1.3.1 (основні закони логіки першого порядку).**

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.
3. $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$.
4. $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.
5. $\forall x\, (P(x) \wedge Q) = \forall x\, P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\, (P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\, (P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\, (P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x\, \forall y\, P(x, y) = \forall y\, \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x\, \exists y\, P(x, y) = \exists y\, \exists x\, P(x, y)$.

*Доведення.* 1. Нехай для деякого предикатного символу $P$ та предметної області $D$ ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне. Отже, для довільного $a$ висловлення $P(a)$ хибне, а висловлення $\overline{P(a)}$ істинне, а тому права частина еквівалентності істинна. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого висловлення $P(a)$ істинне, тобто права частина еквівалентності хибна.

Твердження 2 доводиться аналогічно.

3. Припустимо, що ліва частина еквівалентності істинна для деяких $P$ і $Q$, тобто для довільного $a \in D$ істинне висловлення $P(a) \wedge Q(a)$. Тому висловлення $P(a)$ і $Q(a)$ одночасно істинні для довільного $a \in D$, тобто твердження $\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частина еквівалентності хибна, то для деякого $a \in D$ хибне хоча б одне з висловлень $P(a)$ або $Q(a)$. Це означає, що хибне хоча б одне з висловлень $\forall x\, P(x)$ або $\forall x\, Q(x)$, тобто хибна і права частина еквівалентності.

Твердження 4 доводиться аналогічно.

Твердження 5–10 пропонуємо читачеві довести самостійно. □

**Вправа 1.3.1.** Доведіть твердження 2, 4–10 теореми 1.3.1.

**Приклад 1.3.2.** Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$. Розглянемо заперечення речення “Кожний учень школи вивчає англійську мову”. Це речення можна записати за допомогою квантора загальності так: $\forall x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення “$x$ вивчає англійську мову”. Заперечення даного речення таке: “Це не так, що кожен учень школи вивчає англійську мову”, і воно еквівалентно реченню “Існує такий учень в школі, який не вивчає англійську мову”.

**Приклад 1.3.3.** Розглянемо речення "У школі існує учень, який вивчає англійську мову". Його можна записати так: $\exists\, x\, P(x)$, де $P(x)$ — речення "$x$ вивчає англійську мову". Заперечення даного речення таке: "Це не так, що в школі існує учень, який вивчає англійську мову", і воно еквівалентно реченню "Кожний учень у школі не вивчає англійську мову". Це ілюструє еквівалентність $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$.

**Вправа 1.3.2.** Наведіть приклад, що речення

$$\forall\, x\, \exists\, y\, P(x, y) = \exists\, y\, \forall\, x\, P(x, y)$$

хибне.

Якщо $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — скінченна предметна область змінної $x$ у предикаті $P(x)$, то можна скористатися логічними еквівалентностями

$$\forall\, x\, P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$$

і

$$\exists\, x\, P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n).$$

У цьому випадку заперечення квантифікованої формули дає той самий результат, що й застосування відповідного закону де Моргана. Це випливає з того, що

$$\overline{\forall\, x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \vee \overline{P(a_2)} \vee \cdots \vee \overline{P(a_n)}$$

і

$$\overline{\exists\, x\, P(x)} = \overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)} = \overline{P(a_1)} \wedge \overline{P(a_2)} \wedge \cdots \wedge \overline{P(a_n)},$$

а останні формули еквівалентні формулам $\exists\, x\, \overline{P(x)}$ і $\forall\, x\, \overline{P(x)}$, відповідно.

## 1.4 Нормальна форма формули логіки першого порядку

Будемо говорити, що формулу логіки першого порядку записано у *нормальній формі*, якщо вона має вигляд

$$Q_1\, x_1\, Q_2\, x_2\, \ldots, Q_n\, x_n\, M,$$

де кожне $Q_i\, x_i$ — це або квантор загальності $\forall\, x_i$, або квантор існування $\exists\, x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), а формула $M$ не містить кванторів. Вираз $Q_1\, x_1\, Q_2\, x_2\, \ldots, Q_n\, x_n$ називається *префіксом*, а $M$ — *матрицею* формули, записаної у нормальній формі.

**Приклад 1.4.1.** Наведемо приклади формул, записаних у нормальній формі.

1. $\forall\, x\, \forall\, y\, P(x, y)$.
2. $\forall\, x\, \exists\, y\, (P(x, y) \vee Q(x))$.
3. $\forall\, x\, \exists\, y\, \forall\, z\, \exists\, w\, \Big(\overline{P(x, y)} \vee Q(x) \vee \overline{Z(x, y, z)}) \wedge A(w, z)\Big)$.

Наведемо **алгоритм зведення довільної формули логіки першого порядку до нормальної форми**.

**Крок 1:** Усунути з формули логічні операції "$\sim$" і "$\Rightarrow$" застосування еквівалентності формул
$$P \sim Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \qquad \text{i} \qquad Q \Rightarrow P = \overline{P} \vee Q.$$

**Крок 2:** Внести знак заперечення всередину формули безпосередньо до атома за допомогою таких законів:

- подвійного заперечення $\overline{\overline{P}} = P$;
- де Моргана $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$ і $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$
- $\overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}$ і $\overline{\exists\, x\, P(x)} = \forall\, x \overline{P(x)}$.

**Крок 3:** Винести квантори в префікс за законами 3—8 теореми 1.3.1.

**Приклад 1.4.2.** Зведемо формулу $\forall\, x\, P(x) \Rightarrow \exists\, y\, Q(y)$ до нормальної форми за умови, що предикати $P(x)$ і $Q(y)$ не містять вільних змінних. Наведемо послідовність дій:

$$\begin{aligned}
\forall\, x\, P(x) \Rightarrow \exists\, y\, Q(y) &= \overline{\forall\, x\, P(x)} \vee \exists\, y\, Q(y) && \boxed{\text{виключено логічну операцію "}\Rightarrow\text{"}} \\
&= \exists\, x\, \overline{P(x)} \vee \exists\, y\, Q(y) && \boxed{\text{застосовано закон } \overline{\forall\, x\, P(x)} = \exists\, x \overline{P(x)}} \\
&= \exists\, x\, \exists\, y \left( \overline{P(x)} \vee Q(y) \right). && \boxed{\text{застосовано закон 8 теореми 1.3.1}}
\end{aligned}$$

**Вправа 1.4.1.** Запишіть нормальну форму для формули
$$\forall\, x \forall\, y\, (\exists\, z\, P(x,z) \wedge P(y,z)) \Rightarrow \exists\, u\, Q(x,y,u).$$

## 1.5 Логічне виведення в логіці висловлень

У логіці висловлень для знаходження значення істинності складного висловлення потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називається її *інтерпретацією*. Для обчислення значень істинності формули, яка зображає складне висловлення, потрібно знаходити значення логічних операцій, які визначені в підрозділі 1.1.

Формулу $f$ будемо називати *виконаною*, якщо існує принаймні одна інтерпретація, у якій $f$ набуває значення 1. У такому випадку кажуть, що формула $f$ *виконується* в цій інтерпретації.

Очевидно, якщо формула $f$ має $n$ атомів, то вона має $2^n$ інтерпретацій.

Формулу $f$ логіки висловлень називається *тавтологією* (або *загальнозначущою*), якщо вона виконується у всіх інтепретаціях, і в цьому випадку це записуватимемо так $\models f$. Формулу, хибну в усіх інтепретаціях будемо називати *суперечністю* (або *протиріччям*).

**Приклад 1.5.1.** Розглянемо формули
$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q \qquad \text{i} \qquad (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q}).$$

Їх атомами є $p$ і $q$. Кожна з цих формул має $2^2 = 4$ інтепретацій, оскільки має 2 атоми. Значення істинності цих формул наведено в такій таблиці:

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $(p \Rightarrow q) \wedge p$ | $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ | $\overline{q}$ | $p \wedge \overline{q}$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Отже, формула $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ є тавтологією, а формула $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \overline{q})$ є суперечністю.

**Вправа 1.5.1.** Побудувавши таблиці істинності, з'ясуйте, чи є наведені нижче висловлення тавтологіями:

1) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$;
2) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})$;
3) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})) \Leftrightarrow \overline{p}$;
4) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)) \Leftrightarrow q$;
5) $(((\overline{p} \Rightarrow \overline{q}) \Rightarrow r) \wedge ((\overline{p \Rightarrow q}) \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.

**Вправа 1.5.2.** За допомогою еквівалентних перетворень перевірте, чи є наведені нижче висловлення тавтологіями:

1) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)) \Leftrightarrow q$;
2) $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \overline{q})) \Leftrightarrow \overline{p}$;
3) $(p \Rightarrow q) \vee (\overline{p} \Rightarrow q)$;
4) $((p \Rightarrow q) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)) \vee \overline{q}$;
5) $(p \wedge q \wedge (p \Leftrightarrow q)) \Leftrightarrow (p \wedge q)$.

Будемо говорити, що формула $g$ — *логічний наслідок* формул $f_1, f_2, \dots, f_n$, або формула $g$ *логічно випливає* з формул $f_1, f_2, \dots, f_n$, якщо у кожній інтерпретації, у якій виконується формула $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n$ формула $g$ також виконується, і це записуватимемо так

$$f_1, f_2, \dots, f_n \vdash g.$$

У цьому випадку формули

$$f_1, f_2, \dots, f_n$$

називаються *гіпотезами* (*аксіомами*, чи *постулатами*) формули $g$.

**Теорема 1.5.2.** *Формула $g$ є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія.*

*Доведення.* **Необхідність.** Нехай $g$ — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ та $I$ — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, \dots, f_n$ істинні в інтерпретації $I$, то за означенням логічного наслідку формула $g$ також істинна в $I$. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації $I$. З іншого боку, якщо не всі формули $f_1, f_2, \dots, f_n$ істинні в інтерпретації $I$, тобто принаймні одна з них хибна в інтерпретації $I$, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в інтерпретації $I$. Отже формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ істинна в довільній інтерпретації, тобто маємо, що $\models ((f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n) \Rightarrow g)$.

**Достатність.** Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є тавтологією. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула $g$ має бути істинною в цій інтерпретації, тобто $g$ — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$. □

Якщо $g$ — логічний наслідок формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, то формула

$$((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$$

називається *логічною теоремою*, а формула $g$ — її *висновком*. У цьому випадку кажуть, що формулу $g$ можна *вивести* з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$, а $g$ — *вивідна формула*. Вираз

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \vdash g.$$

називається *правилом виводу*, або *правилом виведення*. У цьому записі гіпотези записано зліва від знака $\vdash$, висновок — справа, а сам знак $\vdash$ має зміст "***отже***".

**Теорема 1.5.3** (**принцип прямої дедукції**). *Формула $g$ є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g})$ — суперечність.*

*Доведення.* За теоремою 1.5.2 формула $g$ є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ тавтологія. Отже, $g$ є логічним наслідком формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді і тільки тоді, коли заперечення формули $((f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g)$ є суперечністю. Справді,

$$\begin{aligned}\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n) \Rightarrow g} &= \overline{\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)} \vee g} = \\ &= \overline{\overline{f_1} \vee \overline{f_2} \vee \cdots \vee \overline{f_n} \vee g} = \\ &= f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \overline{g}.\end{aligned}$$

□

**Приклад 1.5.4.** Розглянемо формули

$$f_1 = (p \Rightarrow q), \qquad f_2 = \overline{q}, \qquad g = \overline{p}.$$

Доведемо, що формула $g$ є логічним наслідком формул $f_1$ і $f_2$.

**Спосіб 1.** Скористаємося таблицями істинності для того, щоб довести, що формула $g$ виконується в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$. З таблиці істинності

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $\overline{q}$ | $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ | $\overline{p}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

маємо, що лише в одній інтерпретації, у якій формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ виконана, а саме $p = 0$ і $q = 0$, то формула $\overline{p}$ також виконана. Отже, за означення формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

**Спосіб 2.** Скористаємося теоремою 1.5.2. Доведемо, що формула $(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g$ є тавтологією. Для цього побудуємо таблицю істинності для формул:

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow g = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}:$$

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $\overline{q}$ | $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ | $\overline{p}$ | $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Оскільки формула $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ є тавтологією, то формула $\overline{p}$ є логічним наслідком формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

**Спосіб 3.** Скористаємося теоремою 1.5.3 і доведемо, що формула

$$(f_1 \wedge f_2) \Rightarrow \overline{g} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge \overline{\overline{p}} = ((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$$

суперечність. Побудуємо таблицю істинності для цих формул:

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $\overline{q}$ | $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$ | $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

З таблиці істинності видно, що формула $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \wedge p$ хибна в довільній інтерпретації. Далі, за теоремою 1.5.3 робимо висновок, що формула $\overline{p}$ логічно випливає з формул $p \Rightarrow q$ і $\overline{q}$.

**Вправа 1.5.3.** Доведіть логічні теореми трьома способами:

1) $\overline{p} \vee q,\ \overline{p} \vee r,\ \overline{q} \vee \overline{r} \vdash \overline{p}$;
2) $\overline{h},\ \overline{h} \Rightarrow (p \vee q),\ p \Rightarrow c,\ q \Rightarrow c \vdash c$.

## 1.6 Застосування правил виведення в логіці висловлень

Розглянемо правила виведення та їх застосування в логіці висловлень. Ці правила обґрунтовують кроки *доведення логічних теорем*, яке полягає в перевірці того, що висновок є логічним наслідком множини гіпотез.

Деякі важливі правила виведення та відповідні їм тавтології наведено в такій таблиці:

| Правило виведення | Тавтологія | Назва правила виведення |
|---|---|---|
| $p \vdash p \vee q$ | $p \Rightarrow (p \vee q)$ | введення диз'юнкції |
| $p \wedge q \vdash p$ | $(p \wedge q) \Rightarrow p$ | виключення кон'юнкції |
| $p, q \vdash p \wedge q$ | $((p) \wedge (q)) \Rightarrow (p \wedge q)$ | введення кон'юнкції |
| $p, p \Rightarrow q \vdash q$ | $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ | modus ponens |
| $\overline{q}, p \Rightarrow q \vdash \overline{p}$ | $(\overline{q} \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \overline{p}$ | modus tollens |
| $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$ | $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ | гіпотетичний силогізм |
| $p \vee q, \overline{p} \vdash q$ | $((p \vee q) \wedge \overline{p}) \Rightarrow q$ | диз'юнктивний силогізм |
| $p \vee q, \overline{p} \vee r \vdash q \vee r$ | $((p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee r) \Rightarrow (q \vee r)$ | резолюція |

## 1.7 Правила виведення в численні предикатів

Розглянемо деякі важливі правила виведення для формул із кванторами.

*Універсальна конкретизація* — це правило виведення того, що $P(c)$ істинне для довільного елемента $c$ з предметної області за умови, що формула $\forall x P(x)$ істинна. Наприклад універсальну конкретизацію можна використати у випадку, коли з твердження "Всі люди смертні" потрібно дійти висновку "Ленін — смертний". Тут Ленін — елемент предметної області, яка складається з усіх людей.

*Універсальне узагальнення* — це правило виведення, згідно яким $\forall x P(x)$ істинна, якщо істинне $P(c)$ для довільного $c$ з предметної області. Це правило використовується у випадку, коли на підставі істинності $P(c)$ для кожного елемента $c$ з предметної області стверджують, що $\forall x P(x)$ істинне. Вибраний елемент $c$ має бути довільним і не конкретизованим. Універсальне узагальнення неявно застосовують у багатьох математичних доведеннях, і рідко згадують явно.

*Екзистенційна конкретизація* — це правило, яке дає змогу дійти висновку про те, що на підставі $\exists x P(x)$ можна стверджувати, що в предметній області є елемент $c$, для якого $P(c)$ істинне. Зазвичай про елемент $c$ відомо лише те, що він існує. З цього випливає, що можна позначити його та продовжити міркування.

*Екзистенційне узагальнення* — це правило виведення, яке використовується для того, щоб на підставі істинності $P(c)$ на деякому елементі $c$ з предметної області дійти до висновку, що $\exists x P(x)$ істинне.

Правила виведення в численні предикатів зазначено в такій таблиці:

| | Правило виведення | Назва |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x P(x) \vdash P(c)$ | універсальна конкретизація |
| 2. | $P(c) \vdash \forall x P(x)$ | універсальне узагальнення |
| 3. | $\exists x P(x) \vdash P(c)$ | екзистенційна конкретизація |
| 4. | $P(c) \vdash \exists x P(x)$ | екзистенційне узагальнення |

У правилах 1 і 2 елемент $c$ предметної області довільний, а в правилах 3 та 4 в предметній області має бути принаймні один такий елемент.

## 1.8 Методи доведення теорем

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Позаяк багато теорем мають вигляд імплікації, то необхідно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що висловлення $p \Rightarrow q$ істинне в усіх випадках, крім того, коли $p$ істинне, а $q$ хибне.

### Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести, переконавшись у тому, що коли припущення імплікації $p$ істинне, то й висновок $q$ також істинний.

## Доведення від протилежного

Можна довести, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

Тому замість доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох вище наведених формул.

Розглянемо, наприклад, імплікацію $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. За умови істинності формули $\overline{q}$ потрібно довести істинність формули $\overline{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \Rightarrow q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, і отримуємо суперечність з тим, що дано в умові.

У разі доведення на основі решти трьох формул ми беремо до уваги водночас і те, що дано в умові ($p$), і протилежне до того, що потрібно довести ($\overline{q}$), тобто $(p \wedge \overline{q})$. Тоді для доведення теореми $p \Rightarrow q$ достатньо отримати суперечність із тим, що дано ($\overline{p}$), або вивести те, що потрібно довести ($q$), або, нарешті, отримати суперечність $0 = r \wedge \overline{r}$. Отже, в останньому випадку з висловлення $(p \wedge \overline{q})$ достатньо вивести якесь висловлення $r$ і його заперечення $\overline{r}$, оскільки тоді мало б бути істинним висловлення $r \wedge \overline{r}$, що неможливо. Останній запропонований спосіб доведення від протилежного в певному розумінні є найзагальнішим.

**Вправа 1.8.1.** Доведіть, що імплікація $p \Rightarrow q$ еквівалентна кожній з нижче перелічених формул

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q, \qquad (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow 0.$$

## Доведення аналізом випадків

Іноді для для доведення тавтологічності імплікації $p \Rightarrow q$ зручно використати замість $p$ диз'юнкцію $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ як припущення імплікації, за умови, що висловлення $p$ і $(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$ еквівалентні.

На основі логічної еквівалентності

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q = (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

доведення тавтологічності імплікації

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q$$

можна замінити доведенням тавтологічності кожної з $n$ імплікацій $p_i \Rightarrow q$, $i = 1, \ldots, n$, окремо.

**Вправа 1.8.2.** Наведіть приклади методів доведення теореми в елементарній математиці.

Для перевірки рівносильності формул логіки висловлень достатньо було скласти таблиці істинності, ставлячи замість кожної пропозиційної літери два значення. Проблеми могли виникнути лише у випадку громіздкості цього процесу. Як встановити (навіть означити) рівносильність формул логіки предикатів? З кожним предикатним символом пов'язані два позначені об'єкти: предикат і множина, на якій він визначається. Щось схоже на складання таблиць істинності для всіх можливих предикатів на всіх можливих множинах закладається в означенні рівносильності. Ще раз його сформулюємо.

**Означення 1.8.1.** *Інтерпретацією* формули логіки предикатів $\alpha$ над фіксованою множиною $M$ називається довільне заміщення всіх предикатних символів символами конкретних предикатів, означених на $M$, і всіх вільних змінних і констант певними елементами множини $M$.

**Означення 1.8.2.** Дві формули логіки предикатів $\alpha$ та $\beta$ називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*) *на множині* $M$, якщо вони набувають однакових значень при всіх інтерпретаціях над цією множиною.

Формули логіки предикатів $\alpha$ та $\beta$, які рівносильні на будь-якій множині $M$, називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), і позначаються так: $\alpha \equiv \beta$.

**Приклад 1.8.3.** Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ рівносильні на довільній одноелементній множині.

***Розв'язок.*** Справді, якщо $M = \{a\}$ — довільна одноелементна множина. Якщо $P(a) = 1$, то $\forall x\ P(x) = 1$ і $\exists x\ P(x) = 1$, якщо $P(a) = 0$, то $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 0$.

**Приклад 1.8.4.** Формули $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині, яка має більше, ніж один елемент.

***Розв'язок.*** Нехай множина $M$ має більше ніж один елемент. Зафіксуємо елемент $a \in M$ і нехай предикат $P$ набуває значення 1 лише для цього елемента: $P(a) = 1$. Тоді існує елемент $b \in M$ такий, що $P(b) = 0$. Тому $\forall x\ P(x) = 0$ і $\exists x\ P(x) = 1$. Отже предикати $\forall x\ P(x)$ і $\exists x\ P(x)$ не рівносильні на множині $M$.

**Приклад 1.8.5.** Для формули $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x, y))$ побудуйте дві інтепретації над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$, при яких вона набуває значень 0 і 1.

***Розв'язок.*** Нехай у двох інтерпретаціях предикат $P(x)$ означає "$x$ кратне 5", а $Q(x, y)$ означає "$x + y < 15$". Але у першій інтерпретації приймемо $y = 1$, а в другій приймемо $y = 10$. Тоді висловлення $\forall x\ \ ((x$ кратне $5)\Rightarrow\ (x + 1 < 15))$ істинне, а висловлення $\forall x\ \ ((x$ кратне $5)\Rightarrow (x + 10 < 15))$ хибне.

**Вправа 1.8.3.** Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\ \exists y\ Q(x, y) \wedge \forall x\ Q(x, y) \wedge \forall x\ \forall y\ \forall z\ (Q(x, y) \Rightarrow Q(x, z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x, y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

**Вправа 1.8.4.** Побудуйте інтерпретацію формули логіки предикатів

$$\forall x\ \exists y\ Q(x, y) \wedge \forall x\ \neg Q(x, y) \wedge \forall x\ \forall y\ \forall z\ (Q(x, y) \Rightarrow Q(x, z)),$$

заміщуючи предикатний символ $Q(x, y)$ на $x \leqslant y$ над множиною $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ і над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$. Оцініть істинність утвореного висловлення.

**Приклад 1.8.6.** Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \exists x\ (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \exists x\ P(x) \Rightarrow P(y)$ нерівносильні навіть над двоелементною множиною.

***Розв'язок.*** Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Тоді висловлення $\exists x\ (P(x) \Rightarrow P(b))$ істинне, бо таке $x$ існує $x = b$. Висловлення $(\exists x\ P(x)) \Rightarrow P(b)$ у цій інтерпретації хибне, оскільки в першій частині формули потрібно прийняти $x = a$.

**Приклад 1.8.7.** Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))$ та $\beta = \forall x\ P(x) \Rightarrow P(y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

***Розв'язок.*** Нехай $M = \{a, b\}$ і $|P(a)| = 1$, $|P(b)| = 0$. Якщо $y = b$, то $|P(a) \Rightarrow P(b)| = 0$ і тому $|\forall x\ (P(x) \Rightarrow P(y))| = 0$. З іншого боку маємо, що $|\forall x\ P(x)| = 0$ і $|\forall x(P(x) \Rightarrow P(y))| = 1$.

**Вправа 1.8.5.** Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\forall x\ P(x))$ та $\beta = \forall x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

**Вправа 1.8.6.** Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \neg(\exists x\ P(x))$ та $\beta = \exists x\ \neg P(x)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

**Вправа 1.8.7.** Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\ \exists y\ Q(x, y)$ та $\beta = \exists y\ \forall x\ Q(x, y)$ рівносильні над довільною одноелементною множиною. Покажіть, що вони не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

**Вправа 1.8.8.** Доведіть, що формули логіки предикатів $\alpha = \forall x\ \exists y\ \forall z\ Q(x, y, z)$ та $\beta = \exists y\ \forall x\ \forall z\ Q(x, y, z)$ не рівносильні над множиною, яка має більше, ніж один елемент.

# 1.9 Множини та відношення

## 1.9.1 Множини. Елементи множин

Поняття множини в математиці вважається первинним (неозначуваним). Інтуїтивно *множина* — це добре визначений набір (або список) об'єктів. Надалі множини ми будемо позначати великими латинськими літерами: $A$, $B$, $C$, $\dots$. Об'єкти, які складають множину називаються *елементами* множини або *членами* множини та позначаються малими латинськими літерами: $a$, $b$, $c$, $\dots$. Вважаємо, що зрозумілий зміст висловлення:

*"множина складається з елементів і визначається своїми елементами"*.

Висловлення

"*$a$ є елементом множини $A$*",

або еквівалентно

"*$a$ належить множині $A$*"

записується так:

$$a \in A.$$

Заперечення висловлення $a \in A$ записується так:

$$a \notin A,$$

і читається:

"*$a$ не є елементом множини $A$*"

або

"*$a$ не належить множині $A$*".

Є два методи описання множин. Перший з них — це перелічення усіх елементів множини. Наприклад,

$$A = \{0, 2, 3, 4, 5\},$$
$$B = \{a, b, c, d\}.$$

позначаються множини $A$, яка складається з чисел $0, 2, 3, 4$ та $5$, та множина $B$, яка складається з літер $a, b, c$ та $d$. У цьому випадку елементи множини відокремлюються комою та заключені у фігурні дужки $\{\ \ \}$. Очевидно, що так зазвичай описують множини, які мають скінченну кількість елементів.

Інший метод полягає в описанні властивостей, що характеризують елементи множини. Так, наприклад, для позначення того, що множина $A$ складається з тих і лише тих елементів, які задовольняють певну умову $\varphi$, вживається запис

$$A = \{x \mid \varphi(x)\}$$

або

$$A = \{x \colon \varphi(x)\}.$$

Наприклад запис

$$C = \{x \mid x - \text{ дійсне число}, \ x > 0\}$$

читається “$C$ — множина таких $x$, що $x$ — дійсне число та $x$ більше за нуль”, та визначає множину $C$ додатних дійсних чисел. У цьому випадку через $x$ позначають елемент множини, символи “$|$” та “ : ” читаються “*такий, що*”, а символ кома як “*і* ”.

**Приклад 1.9.1.** Множину натуральних чисел $\mathbb{N}$ можна визначити так:

$$\mathbb{N} = \{x \mid x - \text{ ціле число}, \ x > 0\}.$$

Зауважимо, що $-6 \notin \mathbb{N}$, $3 \in \mathbb{N}$ і $\pi \notin \mathbb{N}$.

**Приклад 1.9.2.** Інтервали дійсної прямої, означені нижче, часто використовуються в математиці. Нехай $a$ і $b$ — дійсні числа такі, що $a < b$. Тоді означимо:

$$\begin{aligned}
&\text{відкритий інтервал від } a \text{ до } b: && (a,b) = \{x \mid a < x < b\},\\
&\text{замкений інтервал від } a \text{ до } b: && [a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\},\\
&\text{відкрито-замкений інтервал від } a \text{ до } b: && (a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\},\\
&\text{замкено-відкритий інтервал від } a \text{ до } b: && [a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}.
\end{aligned}$$

Відкрито-замкнений та замкнено-відкритий інтервали також називаються *напіввідкритими інтервалами*.

Дві множини $A$ і $B$ називаються *рівними*, і це записують

$$A = B,$$

якщо вони мають одинакові елементи, тобто кожен елемент множини $A$ належить до $B$ і кожен елемент множини $B$ належить до $A$. *Заперечення рівності множин* $A = B$ записується так:

$$A \neq B.$$

**Приклад 1.9.3.** Нехай

$$\begin{aligned}
A &= \{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\},\\
B &= \{-1, 3\},\\
C &= \{-1, 3, 3, -1\}.
\end{aligned}$$

Тоді $A = B = C$. Зауважимо, що множина може бути визначена таким чином, що її елементи можуть бути не виписані, а також так, що у списку елементи множини можуть повторюватися.

Множини можуть бути скінченними та нескінченними. Множина називається *скінченною*, якщо вона містить $n$ різних елементів, де $n$ — довільне натуральне число, або не містить жодного елемента. В іншому випадку множина називається *нескінченною*. Якщо ж множина містить один елемент, то вона називається *одноелементною* або *одноточковою*.

### 1.9.2 Підмножини

Множина $A$ є *підмножиною* множини $B$, і це записуватимемо

$$A \subseteq B \qquad \text{або} \qquad B \supseteq A,$$

якщо кожен елемент множини $A$ належить $B$, тобто з $x \in A$ випливає $x \in B$. Також у цьому випадку кажуть, що $A$ *міститься в* $B$, або $B$ *містить* $A$. *Заперечення висловлення* $A \subseteq B$ записується

$$A \nsubseteq B \qquad \text{або} \qquad B \nsupseteq A,$$

і таке висловлення стверджує, що *існує елемент $x$ множини $A$ такий, що $x \notin B$.*

**Приклад 1.9.4.** Розглянемо множини:

$$\begin{aligned}
A &= \{x \mid x - \text{ непарне натуральне число}\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}, \\
B &= \{x \mid x - \text{ натуральне число кратне } 3\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}, \\
C &= \{x \mid x - \text{ первинне число, } x > 2\} = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}.
\end{aligned}$$

Тоді $C \subseteq A$, оскільки кожне первинне число,[1] яке перевищує 2 є непарним. З іншого боку маємо, що $B \nsubseteq A$, оскільки $6 \in B$, але $6 \notin A$.

**Приклад 1.9.5.** Через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$ позначимо множини *натуральних*, *цілих*, *раціональних*, *дійсних* і *комплексних чисел*, відповідно. Очевидно, що виконується такі включення:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Зауважимо, що включення $A \subseteq B$ не виключає можливості, що виконується рівність $A = B$. Означимо рівність двох множин також можна сформулювати так:

**Означення.** Дві множини $A$ і $B$ є *рівними* тоді і лише тільки тоді, коли

$$A \subseteq B \qquad \text{і} \qquad B \subseteq A.$$

У випадку, коли виконується умова $A \subseteq B$, але маємо, що $A \neq B$, то будемо говорити, що $A$ є *власною підмножиною* в $B$, або ж $B$ містить $A$ *власно*, і це записуватимемо так:

$$A \subset B.$$

Очевидно, що

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Наша перша теорема випливає з попереднього означення.

**Теорема 1.9.6.** *Нехай $A$, $B$ і $C$ — довільні множини. Тоді:*

(i) *$A \subseteq A$;*
(ii) *якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то $A = B$;*
(iii) *якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.*

[1] Первинні числа в старій українській математичній термінології називалися *простими*.

### 1.9.3 Універсальна та порожня множини

В довільному застосуванні теорії множин усі множини, які вивчаються, є підмножинами деякої фіксованої множини. Ми називатимемо цю множину *універсальною множиною* або ж *універсумом*, і позначатимемо її через $\mathcal{U}$. Також є потреба ввести поняття *порожньої множини*, тобто множини, яка не містить жодних елементів. Порожня множина позначається через $\varnothing$ і вважається, що вона є скінченною і міститься у кожній іншій підмножині. Отож, для довільної множини $A$ маємо:

$$\varnothing \subseteq A \subseteq \mathcal{U}.$$

**Приклад 1.9.7.** В планіметрії (геометрії на площині) універсальна множина складається з усіх точок площини.

**Приклад 1.9.8.** Нехай

$$A = \{x \mid x^4 = 13, x \in \mathbb{N}\}.$$

Тоді множина $A$ є порожньою, тобто $A = \varnothing$.

**Приклад 1.9.9.** Нехай $B = \{\varnothing\}$. Тоді маємо, що $B \neq \varnothing$, оскільки множина $B$ містить один елемент.

### 1.9.4 Класи, набори, сім'ї та простори

Дуже часто буває так, що елементи множин є множинами. Наприклад, кожна площина в множині площин є множиною точок, а кожна множина ліній є також множиною точок. Для спрощення такої ситуації ми використовуватимемо поняття "*клас*", "*набір*" і "*сім'я*"[2], як синоніми поняття множина. Ми використовуватимемо поняття клас усіх підмножин замість множини усіх множин (оскільки останнє поняття є суперечливим), і поняття набір чи сім'я для множини класів. Терміни "*підклас*", "*піднабір*" і "*підсім'я*" будемо використовувати по аналогії до терміну підмножина.

**Приклад 1.9.10.** Членами класу $\big\{\{1,2,3\},\{2,3,5\},\{4,5\}\big\}$ є множини

$$\{1,2,3\},\{2,3,5\} \qquad \text{і} \qquad \{4,5\}.$$

**Приклад 1.9.11.** *Надмножиною* множини $A$ називається клас усіх підмножин множини $A$ і позначається через $\mathscr{P}(A)$ або ж $2^A$. У частковому випадку, якщо $A = \{a,b,c\}$, то маємо:

$$\mathscr{P}(A) = \big\{A,\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a\},\{b\},\{c\},\varnothing\big\}.$$

У загальному випадку, якщо множина $A$ є скінченною і має $n$ елементів, то надмножина $\mathscr{P}(A)$ має $2^n$ елементів.

Під поняттям *простір* будемо розуміти певну непорожню множину, наділену деякою математичною структурою, наприклад векторний (лінійний) простір, метричний простір або топологічний простір. У цьому випадку елемент простору будемо називати *точкою*.

[2] В сучасній математичній літературі також використовується термін "*родина*", в сенсі сім'я.

### 1.9.5 Операції над множинами

*Об'єднанням* двох множин $A$ і $B$, надалі це ми будемо позначати через $A \cup B$, називається множина, яка складається з усіх елементів, які є елементами множини $A$, або ж елементами множини $B$, тобто

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Тут "або" використовується в розумінні "і/або".

*Перетином* двох множин $A$ і $B$, надалі це ми будемо позначати через $A \cap B$, називається множина, яка складається з усіх елементів, які є елементами одночасно множини $A$ та множини $B$, тобто

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Якщо $A \cap B \neq \varnothing$, тобто, якщо множини $A$ і $B$ не мають спільних елементів, то $A$ і $B$ називаються *диз'юнктними* або *неперетинними*. Клас $\mathscr{A}$ множин називається *диз'юнктним класом множин*, якщо довільна пара різних множин з $\mathscr{A}$ є диз'юнктною.

*Доповненням* множини $B$ стосовно множини $A$ або, просто *різницею* $A$ і $B$, яка позначається через $A \setminus B$, називається множина, яка складається з тих елементів множини $A$, які не є елементами множини $B$. Іншими словами

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

*Абсолютним доповненням* або, просто, *доповненням* до множини $A$, позначається через $A^c$ або $C_{\mathcal{U}}(A)$, називається множина елементів, які не належать до $A$, тобто

$$A^c = \{x \mid (x \in \mathcal{U}) \wedge (x \notin A)\}.$$

Іншими словами, $A^c$ є різницею універсальної множини $\mathcal{U}$ та множини $A$.

**Приклад 1.9.12.** На рис. 1.1 зображено діаграми Венна, які ілюструють об'єднання, перетин і різницю множин $X$ та $Y$.

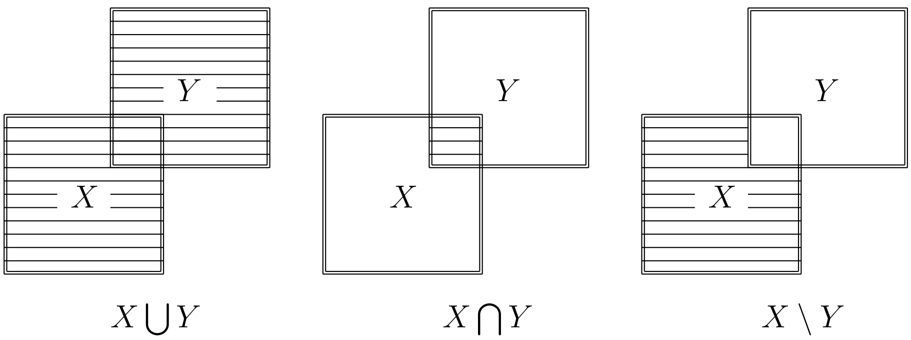



Рис. 1.1: Об'єднання, перетин і різниця множин

*Симетричною різницею* множин $A$ і $B$ називається така множина $A\triangle B$, яка складається з тих і лише тих елементів, які належать тільки одній з множин $A$ чи $B$, тобто

$$A\triangle B = \{x \mid ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin A))\}\,.$$

**Вправа 1.9.1.** Зобразити діаграми Венна доповнення до множини та симетричної різниці двох множин.

Означення об'єднання та перетину двох множин поширюється на довільні сім'ї множин. А саме, нехай $\mathscr{I}$ — деяка множина індексів, така, що для довільного $i \in \mathscr{I}$ визначена множина $A_i$.

*Об'єднанням* сім'ї множин $\{A_i \mid i \in \mathscr{I}\}$ називається така множина $A$, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать принаймні одній множині $A_i$. Позначається це так:

$$A = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i = \bigcup \{A_i \mid i \in \mathscr{I}\} = \{x \mid \exists i \in \mathscr{I}(x \in A_i)\}\,.$$

*Перетином* сім'ї множин $\{A_i \mid i \in \mathscr{I}\}$ називається така множина $A$, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать всім множинам $A_i$. Позначається це так:

$$A = \bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i = \bigcap \{A_i \mid i \in \mathscr{I}\} = \{x \mid \forall i \in \mathscr{I}(x \in A_i)\}\,.$$

Зокрема, якщо $\mathscr{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$, то для об'єднання та перетину використовуються позначення

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad \text{і} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

а якщо $\mathscr{I} = \mathbb{N}$, то записують

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \qquad \text{і} \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,$$

відповідно.

**Твердження 1.9.13.** *Для довільних множин $A$ і $B$ універсуму $\mathfrak{U}$ виконуються такі рівності:*

(i) $A \setminus B = A \cap B^c$;
(ii) $A\triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
(iii) $A\triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$;
(iv) $A\triangle B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$;
(v) $A\triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

*Доведення.* Для демонстрації методу доведемо рівність $(i)$.

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B^c)\} = A \cap B^v.$$

Інші рівності доводяться аналогічно. □

**Вправа 1.9.2.** Доведіть рівності $(ii) - (v)$ з твердження 1.9.13.

За твердженням 1.9.13 різниця та симетрична різниця можуть бути визначені через перетин і доповнення. З іншого боку, доповнення також можна визначити через різницю $A^c = \mathfrak{U} \setminus A$. Операції "$\cup$", "$\cap$" і $(\ )^c$ вважатимемо основними, а "$\setminus$" і "$\triangle$" виражатимемо через них, що дасть потым змогу нам порівнювати їх із законами логічних операцій.

**Теорема 1.9.14.** *Операції "$\cup$", "$\cap$" і $(\ )^c$ задовольняють такі закони:*

$(i)$ *закони комутативності:*

- $(i_1)$ $A \cup B = B \cup A$;
- $(i_2)$ $A \cap B = B \cap A$;

$(ii)$ *закони асоціативності:*

- $(ii_1)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
- $(ii_2)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

$(iii)$ *закони дистрибутивності:*

- $(iii_1)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $(iii_2)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

$(iv)$ *закони ідемпотентності:*

- $(iv_1)$ $A \cup A = A$;
- $(iv_2)$ $A \cap A = A$;

$(v)$ *закони поглинання:*

- $(v_1)$ $A \cup (A \cap B) = A$;
- $(v_2)$ $A \cap (A \cup B) = A$;

$(vi)$ *закони де Моргана:*

- $(vi_1)$ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
- $(vi_2)$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;

$(vii)$ $(A^c)^c = A$;

$(viii)$ $A^c \cup A = \mathfrak{U}$;

$(ix)$ $A \cap A^c = \varnothing$;

$(x)$ $A \cup \mathfrak{U} = \mathfrak{U}$;

$(xi)$ $A \cap \mathfrak{U} = A$;

$(xii)$ $A \cup \varnothing = A$;

$(xiii)$ $A \cap \varnothing = \varnothing$;

$(xiv)$ $\varnothing^c = \mathfrak{U}$;

$(xv)$ $\mathfrak{U}^c = \varnothing$.

*Доведення.* Ми доведемо рівність $(i_1)$.

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\} = \{x \mid (x \in B) \vee (x \in A)\} = B \cup A.$$

Інші рівності доводяться аналогічно. □

**Вправа 1.9.3.** Доведіть рівності $(i) - (xv)$ з теореми 1.9.14.

**Приклад 1.9.15.** Доведіть рівності:

(a) $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$;

(b) $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i \cup B)$.

***Розв'язок.*** Ми доведемо лише рівність (a). Доведення рівності (b) аналогічне.

$$\begin{aligned}
x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B \Leftrightarrow x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \wedge x \in B \Leftrightarrow&\\
\Leftrightarrow& ((x \in A_1) \vee \cdots \vee (x \in A_{n-1}) \vee (x \in A_n)) \wedge (x \in B) \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow& (((x \in A_1) \vee \cdots \vee (x \in A_{n-1})) \vee (x \in A_n)) \wedge (x \in B) \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow& (((x \in A_1) \vee \cdots \vee (x \in A_{n-1})) \wedge (x \in B)) \vee\\
&\qquad\qquad \vee ((x \in A_n) \wedge (x \in B)) \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow& \quad \cdots \quad \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow& (x \in A_1 \wedge x \in B) \vee \cdots \vee (x \in A_n \wedge x \in B) \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow& (x \in A_1 \cap B) \vee \cdots \vee (x \in A_n \cap B) \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow& x \in \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)\,.
\end{aligned}$$

**Приклад 1.9.16.** Доведіть рівності:

(a) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$;
(b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
(c) $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
(d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
(e) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

***Розв'язок.*** (a) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$:

$$\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow&\\
\Leftrightarrow& ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow& (x \in A) \wedge ((x \in B) \wedge (x \notin C)) \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow& (x \in A) \wedge (x \in B \setminus C) \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow& x \in A \cap (B \setminus C).
\end{aligned}$$

(b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$:

$$\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow&\\
\Leftrightarrow& ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow& ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge ((x \notin C) \wedge (x \notin C)) \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow& ((x \in A) \wedge (x \notin C)) \wedge ((x \in B) \wedge (x \notin C)) \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow (x \in A \setminus C) \wedge (x \in B \setminus C) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C).\end{aligned}$$

(c) $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$:

$$\begin{aligned}x \in (A \cap B) \setminus C &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in A)) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge ((x \in A) \wedge (x \notin C)) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \wedge (x \in A \setminus C) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap (A \setminus C).\end{aligned}$$

(d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$:

$$\begin{aligned}x \in A \setminus (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B \cup C) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in (B \cup C)^c) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \in B^c) \wedge (x \in C^c)) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B^c)) \wedge ((x \in A) \wedge (x \in C^c)) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \wedge ((x \in A) \wedge (x \notin C)) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C).\end{aligned}$$

(e) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$:

$$\begin{aligned}x \in A \setminus (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B \cup C) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in B \cup C) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg((x \in B) \vee (x \in C)) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (\neg(x \in B) \wedge \neg(x \in C)) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \notin B) \wedge (x \notin C)) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C.\end{aligned}$$

**Приклад 1.9.17.** Доведіть рівність

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = A \cup B.$$

***Розв'язок.*** Скориставшись відповідними твердженнями теореми 1.9.14, отримуємо

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) &= (A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) =\\ &= ((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) \cup ((A \cap B) \cup (A^c \cap B)) =\\ &= ((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) \cup ((B \cap A) \cup (B \cap A^c)) =\\ &= (A \cap (B \cup B^c)) \cup (B \cap (A \cup A^c)) =\\ &= (A \cap \mathfrak{U}) \cup (B \cap \mathfrak{U}) =\\ &= A \cup B.\end{aligned}$$

**Приклад 1.9.18.** Доведіть рівність

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A).$$

***Розв'язок.***

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \setminus A) &\Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \setminus A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B. \end{aligned}$$

**Приклад 1.9.19.** Доведіть рівність

$$A \cap (B \setminus A) = \varnothing.$$

***Розв'язок.***

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \setminus A) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \setminus A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \wedge x \notin A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in B \wedge x \in A) \wedge (x \notin A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \notin A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in B) \wedge 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0. \end{aligned}$$

**Приклад 1.9.20.** Доведіть рівність

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C).$$

***Розв'язок.***

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) &\Leftrightarrow (x \in A \setminus C) \wedge \neg(x \in B \setminus C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \notin B \vee x \in C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C \wedge x \in C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B) \vee 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge x \notin C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C. \end{aligned}$$

**Приклад 1.9.21.** Доведіть рівність

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

***Розв'язок.***

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in B \cup C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge x \notin C \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C.
\end{aligned}$$

**Приклад 1.9.22.** Доведіть рівність

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

***Розв'язок.***

$$\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C) &\Leftrightarrow x \in ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)) \vee (x \in (A \cap C) \setminus (A \cap B)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \cap B) \wedge \neg(x \in A \cap C)) \vee \\
&\qquad\qquad \vee ((x \in A \cap C) \wedge \neg(x \in A \cap B)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in C)) \vee \\
&\qquad\qquad \vee ((x \in A \wedge x \in C) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin C)) \vee \\
&\qquad\qquad \vee ((x \in A \wedge x \in C) \wedge (x \notin A \vee x \notin B)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C)) \vee \\
&\quad \vee ((x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C)) \vee \\
&\quad \vee ((x \in A \wedge x \notin A \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((0 \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C)) \vee \\
&\qquad\qquad \vee ((0 \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (0 \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C)) \vee \\
&\qquad\qquad\qquad \vee (0 \vee (x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C)) \vee (x \in A \wedge (x \in C \wedge x \notin B)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B \setminus C) \vee (x \in A \wedge x \in C \setminus B) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \setminus C \vee x \in C \setminus B) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \setminus C \cup C \setminus B) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \triangle C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in A \cap (B \triangle C).
\end{aligned}$$

**Приклад 1.9.23.** Доведіть рівність

$$(A \triangle B) \cup (A \cap B) = A \cup B.$$

***Розв'язок.***

$$\begin{aligned}
x \in (A \triangle B) \cup (A \cap B) &\Leftrightarrow (x \in A \triangle B) \vee (x \in A \cap B) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \setminus B \cup B \setminus A) \vee (x \in A \cap B) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A) \vee (x \in A \cap B) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \vee \\
&\qquad\qquad \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \vee \\
&\qquad \vee ((x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \vee \\
&\qquad \vee ((x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in B \wedge x \in A)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in B)) \vee (x \in B \wedge (x \notin A \vee x \in A)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge 1) \vee (x \in B \wedge 1) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in A \cup B.
\end{aligned}$$

**Приклад 1.9.24.** Доведіть що для довільних підмножин $A, B$ універсуму $\mathcal{U}$ виконується рівність

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cup B^c).$$

***Розв'язок.*** Спростимо ліву та праву частину рівностей. Отримаємо

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cup (A \cap B^c) &= A \cap (B \cup B^c) = \\
&= A \cap \mathcal{U} = \\
&= A
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (A \cup B^c) &= A \cup (B \cap B^c) = \\
&= A \cup \varnothing = \\
&= A,
\end{aligned}$$

та прирівнявши обидві частини, отримуємо, що в універсумі $\mathcal{U}$ виконується рівність

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cup B^c).$$

**Приклад 1.9.25.** Доведіть рівність

$$A \cup (A \cap B) = A.$$

***Розв'язок.*** Скористаємося критерієм рівності множин і проведемо перетворення з обох боків.

$$x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \cap B \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \Rightarrow\\&\Rightarrow x \in A \vee x \in A \Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow x \in A.\end{aligned}$$

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \cup (A \cap B).$$

Крім теоретико-множинних тотожностей у теорії множин між множинами існують і інші співвідношення. Розглянемо декілька таких прикладів.

**Приклад 1.9.26.** Доведіть, що для довільних підмножин $A, B$ універсуму $\mathcal{U}$ виконується еквівалентність

$$A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c.$$

***Розв'язок.*** ($\Longrightarrow$) Позаяк

$$A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; (x \in A \Rightarrow x \in B) \;\Leftrightarrow\; (\neg(x \in B) \Rightarrow \neg(x \in A)) \;\Leftrightarrow\; (x \notin B \Rightarrow x \notin A),$$

то виконується імплікація

$$x \notin B \Rightarrow x \notin A.$$

Врахувавши цю імплікацію, отримуємо

$$x \in B^c \;\Leftrightarrow\; x \in \mathcal{U} \wedge x \notin B \;\Rightarrow\; x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A \;\Leftrightarrow\; x \in A^c.$$

($\Longleftarrow$) Нехай $B^c \subseteq A^c$. Тоді за попередньо доведеним маємо

$$(A^c)^c \subseteq (B^c)^c.$$

Оскільки

$$(A^c)^c = A \qquad \text{i} \qquad (B^c)^c = B,$$

то виконується включення $A \subseteq B$.

**Приклад 1.9.27.** Доведіть, що такі умови еквівалентні:

(1) $A \subseteq B$;
(2) $A \cup B = B$;
(3) $A \cap B = A$;
(4) $A \setminus B = \varnothing$.

***Розв'язок.*** (1) $\Longrightarrow$ (2) Позаяк

$$x \in A \cup B \;\Leftrightarrow\; x \in A \vee x \in B \;\Rightarrow\; x \in B \vee x \in B \;\Leftrightarrow\; x \in B$$

і

$$x \in B \;\Rightarrow\; x \in A \vee x \in B \;\Leftrightarrow\; x \in A \cup B,$$

то маємо, що

$$(x \in A \cup B \;\Rightarrow\; x \in B) \wedge (x \in B \;\Rightarrow\; x \in A \cup B),$$

а отже з включення $A \subseteq B$ випливає рівність $A \cup B = B$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Оскільки $A \cup B = B$, то

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \cup B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\Leftrightarrow \ x \in A. \end{aligned}$$

А отже з $A \cup B = B$ випливає рівність $A \cap B = A$.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Позаяк $A \cap B = A$, то

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0, \end{aligned}$$

а отже з рівності $A \cap B = A$ випливає, що $A \setminus B = \varnothing$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Оскільки $A \setminus B = \varnothing$, то

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow x \in A \wedge 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \notin B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in A \setminus B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in \varnothing \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in B, \end{aligned}$$

а отже з умови $A \setminus B = \varnothing$ випливає включення $A \subseteq B$.

**Приклад 1.9.28.** Доведіть, що виконується еквівалентність

$$A \cup B \subseteq C \iff A \subseteq C \wedge B \subseteq C.$$

***Розв'язок.*** ($\Longrightarrow$) З умови $A \cup B \subseteq C$ та імплікацій

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in C \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} x \in B &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \in C$$

випливають включення $A \subseteq C$ і $B \subseteq C$, а отже $A \subseteq C \wedge B \subseteq C$.

($\Longleftarrow$) Оскільки $A \subseteq C \wedge B \subseteq C$, то

$$\begin{aligned} x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B &\Rightarrow \\ \Rightarrow x \in C \vee x \in C &\Rightarrow \\ \Rightarrow x \in C. & \end{aligned}$$

А отже отримуємо, що $A \cup B \subseteq C$.

**Вправа 1.9.4.** Доведіть, що

$(a)$ $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$;
$(b)$ $A \setminus B \subseteq A$;
$(c)$ $A \subseteq B \ \Rightarrow\ A \cup C \subseteq B \cup C$;
$(d)$ $A \subseteq B \ \Rightarrow\ A \cap C \subseteq B \cap C$;
$(e)$ $A \subseteq B \ \Rightarrow\ A \setminus C \subseteq B \setminus C$;
$(f)$ $A \subseteq B \ \Rightarrow\ C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

**Вправа 1.9.5.** Доведіть теоретико-множинні тотожності:

$(a)$ $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;
$(b)$ $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
$(c)$ $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
$(d)$ $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$;
$(e)$ $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
$(f)$ $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
$(g)$ $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
$(h)$ $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
$(i)$ $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$, якщо $A$ та $B$ — підмножини універсуму $\mathcal{U}$;
$(j)$ $A \cap B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$, якщо $A$ та $B$ — підмножини універсуму $\mathcal{U}$.

**Вправа 1.9.6.** Доведіть теоретико-множинні тотожності:

$(a)$ $A \triangle B = B \triangle A$;
$(b)$ $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;
$(c)$ $A \triangle (A \triangle B) = B$;
$(d)$ $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B$;
$(e)$ $(A \triangle B) \triangle (A \cup B) = A \cap B$;
$(f)$ $A \setminus (A \triangle B) = A \cap B$;
$(g)$ $A \triangle (A \cap B) = A \setminus B$;
$(h)$ $(A \triangle B) \cap A = A \setminus B$;
$(i)$ $A \triangle \varnothing = A$;
$(j)$ $A \triangle A = \varnothing$;
$(k)$ $A \triangle B = A^c \triangle B^c$, якщо $A$ і $B$ — підмножини універсуму $\mathcal{U}$.

**Вправа 1.9.7.** Доведіть, що для довільних підмножин $A$ і $B$ універсуму $\mathcal{U}$ виконується еквівалентність

$$A \subseteq B \ \Leftrightarrow\ A \cap B^c = \varnothing.$$

**Вправа 1.9.8.** Доведіть, що для довільних підмножин $A$, $B$ і $C$ універсуму $\mathcal{U}$ виконуються такі співвідношення:

$(a)$ $A \subseteq B \cap C \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B \wedge A \subseteq C$;
$(b)$ $A \cap B \subseteq C \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B^c \cup C$;
$(c)$ $A \subseteq B \cup C \;\Leftrightarrow\; A \cap B^c \subseteq C$;
$(d)$ $(A \setminus B) \cup B = A \;\Leftrightarrow\; B \subseteq A$;
$(e)$ $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup V) \;\Leftrightarrow\; C \subseteq A$;
$(f)$ $A \cup B = A \cap B \;\Leftrightarrow\; A = B$;
$(g)$ $A \triangle B = \varnothing \;\Leftrightarrow\; A = B$;
$(h)$ $A \setminus C \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A \cap B^c \subseteq C$;
$(i)$ $A \setminus C \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A \subseteq C \cup B$.

### 1.9.6 Декартовий добуток множин, відношення, відображення

*Декартовий* (*Картезіанський*) *добуток* множин $X$ та $Y$ позначається $X \times Y$ — це множина всеможливих упорядкованих пар $(x, y)$, де $x \in X$, $y \in Y$, тобто

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

(див. рис. 1.2). Під *упорядкованою парою* $(x, y)$ будемо розуміти одноелементну мно-

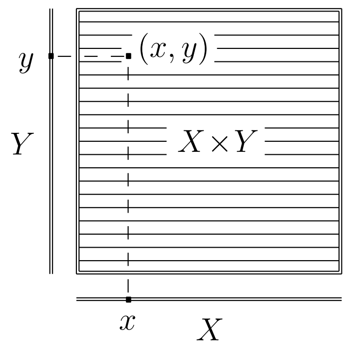



Рис. 1.2: Декартовий добуток двох множин

жину $\{x, \{x, y\}\}$ зі зазначенням, який елемент стоїть на першому місці, тобто впорядковану пару $(x, y)$ можна інтерпретувати наступним чином: *на першому місці стоїть елемент $x$, а на другому — $y$*. Очевидно, що тоді $\{x, y\} \neq (x, y) \neq (y, x)$.

За індукцією вводиться декартовий добуток трьох і довільної скінченної кількості множин:

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3$$

та

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n,$$

для довільного натурального числа $n > 2$.

Надалі, для довільної непорожньої множини $X$ і довільного натурального числа $n$ через $X^n$ позначатимемо *декартовий $n$-степінь* множини $X$, тобто:

$$X^1 = X, \quad X^2 = X \times X, \quad \ldots \quad , \quad X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n\text{-разів}}.$$

За аналогією з декартовим добутком, введемо *впорядковану трійку* трьох елементів $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$ та впорядкований набір з $n$ елементів

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)\,,$$

для довільного натурального числа $n > 3$.

**Приклад 1.9.29.** Доведіть, що $A \times B = \varnothing$ тоді і лише тоді, коли

$$(A = \varnothing) \vee (B = \varnothing).$$

***Розв'язок.*** Якщо $A \times B \neq \varnothing$, то існує елемент $(a, b) \in A \times B$. Звідси випливає, що

$$A \neq \varnothing \qquad \text{i} \qquad B \neq \varnothing.$$

Аналогічно, якщо $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$, то існують елементи $a \in A$ та $b \in B$. А, отже, отримуємо $(a, b) \in A \times B$ і

$$A \times B \neq \varnothing.$$

**Приклад 1.9.30.** Доведіть, якщо $A \times B \neq \varnothing$, то $A \times B \subseteq C \times D$ тоді і лише тоді, коли

$$(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D).$$

***Розв'язок.*** ($\Rightarrow$) Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $(a, b) \in C \times D$. Отож, якщо $a \in A$, то $a \in C$. Аналогічно отримуємо, якщо $b \in B$, то $b \in D$.

($\Leftarrow$) Нехай $(a, b) \in A \times B$. Тоді $a \in A$ і $a \in C$. Також, $b \in B$ і $b \in D$. Звідси випливає, що $(a, b) \in C \times D$ і

$$A \times B \subseteq C \times D.$$

**Вправа 1.9.9.** Доведіть такі рівності:

(*i*) $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$;
(*ii*) $A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C$;
(*iii*) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

**Вправа 1.9.10.** Доведіть такі рівності:

(*i*) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$;
(*ii*) $(A \times C) \cup (B \times D) = (A \cup B) \times (C \cup D)$;
(*iii*) $A \times C = (A \times Y) \cap (X \times C)$;
(*iv*) $(A \times D)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times D^c)$,

де $A, B \subseteq Y$ і $C, D \subseteq Y$.

*Відношення* — це підмножина декартового добутку двох множин. Відношення $f$, означене на декартовому добутку $X \times Y$ таке, що для кожного елемента $x$ з $X$ існує не більше одного елемента $y$ з $Y$ такого, що $(x, y) \in f$ називається *частковим відображенням*, і позначається так:

$$f\colon X \rightharpoonup Y.$$

У цьому випадку кажуть, що "$f$ частково відображає $X$ в $Y$". Підмножина

$$\mathbf{D}(f) = \{x \in X \mid \text{ існує елемент } y \text{ в } Y \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю визначення часткового відображення* $f$, а підмножина

$$\mathbf{E}(f) = \{y \in Y \mid \text{ існує елемент } x \text{ в } X \text{ такий, що } (x, y) \in f\}$$

називається *областю значень часткового відображення* $f$.

Зауважимо, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — часткове відображення, то для кожного елемента $x \in X$ множина

$$\overline{x} = \{y \in Y \mid (x, y) \in f\}$$

є не більше ніж одноточковою, хоча множина

$$\overline{y} = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$$

може бути і порожньою, і одноточковою, і скінченною, і нескінченною, в залежності від вибору $y \in Y$, тобто від визначення часткового відображення $f$.

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, область визначення якого збігається з $X$, тобто

$$\mathbf{D}(f) = X,$$

називається *відображенням* з множини $X$ в $Y$ і позначається так

$$f\colon X \to Y.$$

Якщо визначено часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$ (відображення $f\colon X \to Y$) і $(x, y) \in f$, то у цьому випадку будемо говорити, що *елементові* $x \in X$ *часткове відображення* (*відображення*) $f$ *ставить у відповідність елемент* $y \in Y$, і це позначатимемо так:

$$y = f(x).$$

Надалі, якщо для відображення $f\colon X \to Y$ зрозуміло, якими є множини $X$ та $Y$, то для спрощення викладу відображення $f$ позначатимемо так:

$$y = f(x).$$

Часткове відображення $f\colon X \rightharpoonup Y$, де $Y$ — множина чисел (натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних), називається *функцією*.

**Приклад 1.9.31.** 1. Відношення $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ та $\rho_4$ на декартову квадраті $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, які визначені:

$$\rho_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = |y|\right\},$$

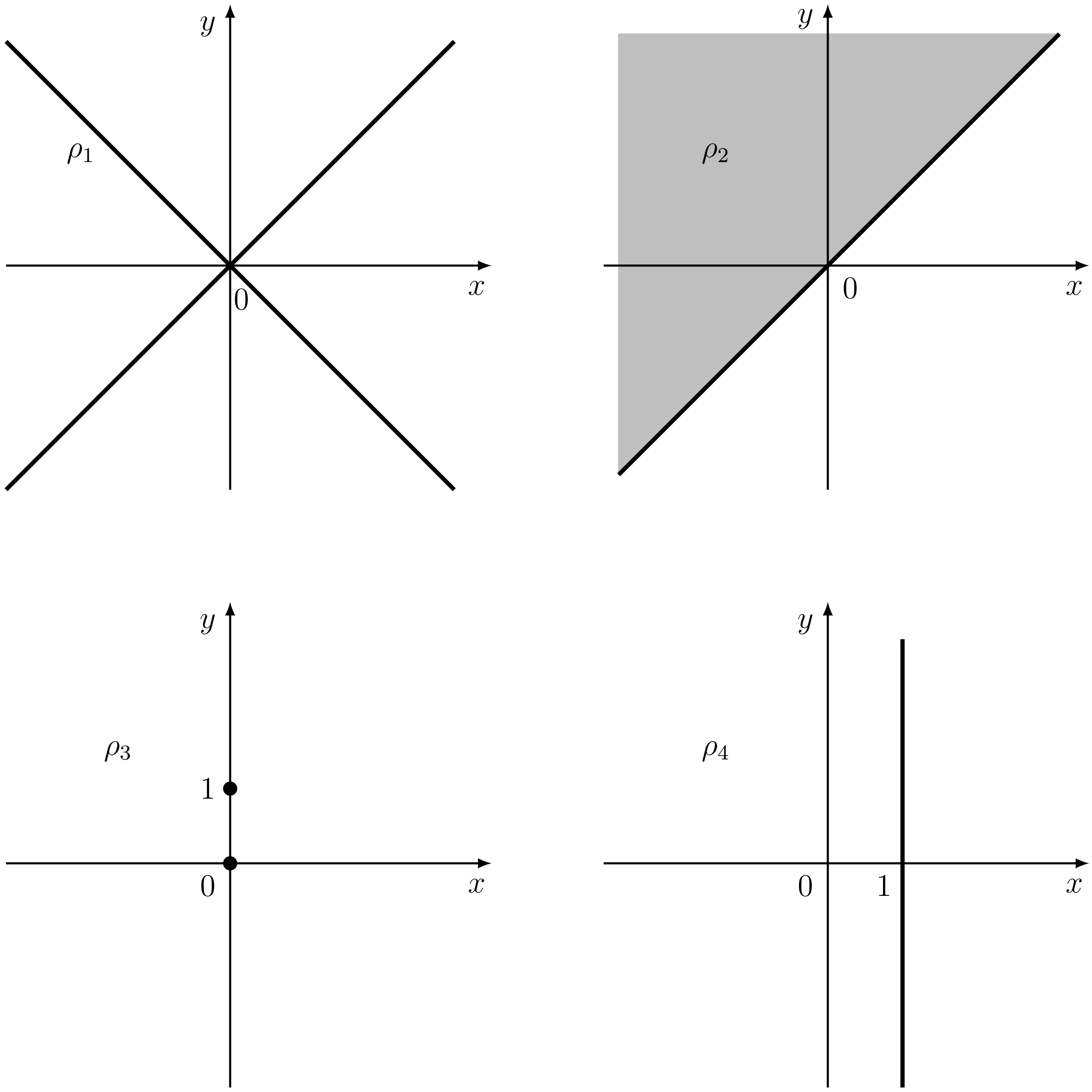



Рис. 1.3: Відношення, що не є частковими відображеннями

$$\rho_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leqslant y\},$$
$$\rho_3 = \{(0, 0), (0, 1)\},$$
$$\rho_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 1\},$$

не є частковими відображеннями (див. рис. 1.3).

2. Відношення $\varphi_1$ і $\varphi_2$ на декартову квадраті $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, які визначені:

$$\varphi_1 = \{(x, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$$
$$\varphi_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = y, |x| \leqslant 3\},$$

є частковими відображеннями, однак вони не є відображеннями (див. рис. 1.4).

3. Відношення $\psi_1$ та $\psi_2$ на декартову квадраті $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, які визначені

$$\psi_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\},$$

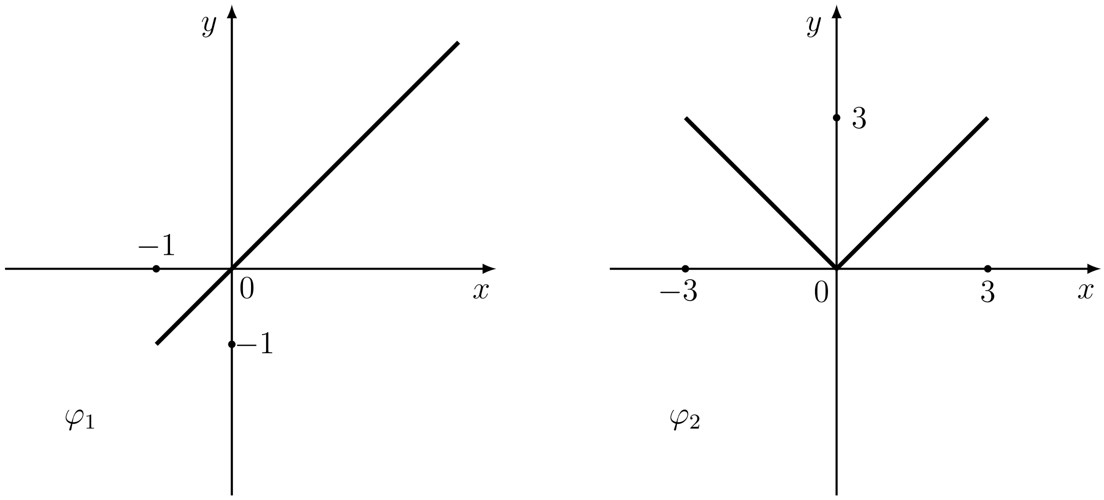



Рис. 1.4: Часткові відображення, що не є відображеннями

$$\psi_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| = y\}$$

є відображеннями (див. рис. 1.5).

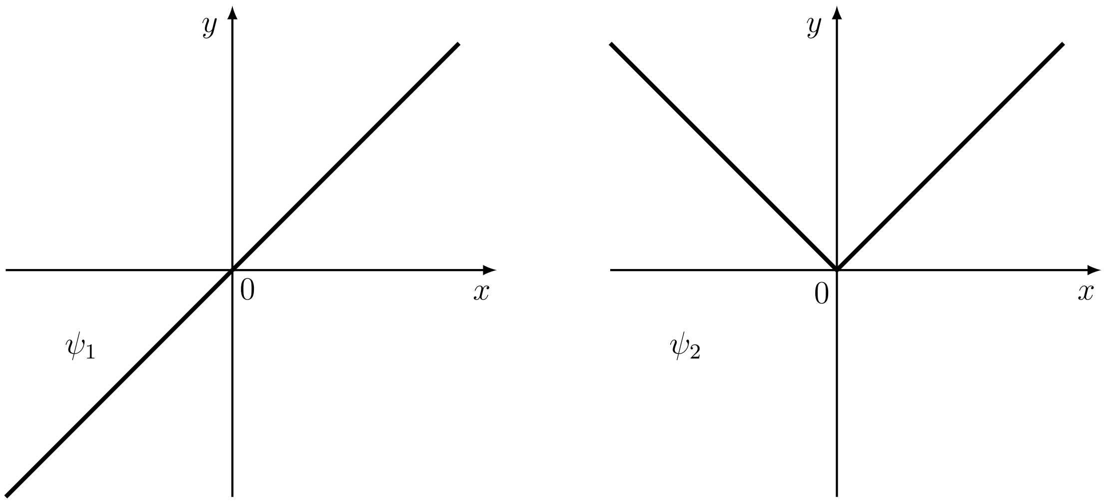



Рис. 1.5: Відображення

Надалі, якщо $f\colon X \rightharpoonup Y$ — (часткове) відображення, то для $x \in X$, $A \subseteq \mathbf{D}(f)$, $y \in Y$ і $B \subseteq \mathbf{E}(f)$, то через

$$f(x)$$

будемо позначати *образ* елемента $x$ стосовно (часткового) відображення $f$, тобто такий елемент $y \in Y$, що $(x, y) \in f$; а через

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in f\}$$

— *повний прообраз* елемента $y$ стосовно (часткового) відображення $f$; а також позначимо

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \qquad \text{і} \qquad f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{f^{-1}(y)\},$$

які ми будемо називати *образом множини* $A$ та *повним прообразом множини* $B$ стосовно (часткового) відображення $f$.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, або *взаємно однозначним*, або *вкладенням*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x \neq y$ випливає $f(x) \neq f(y)$, *сюр'єктивним*, або *відображенням "на"*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ існує елемент $x$ з $X$ такий, що $f(x) = y$. Відображення, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним називається *бієктивним*. У математичній літературі часто ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення називають *ін'єкцією*, *сюр'єкцією* та *бієкцією*, відповідно.

**Приклад 1.9.32.** Через sin позначимо відношення, яке кожному дійсному числу $x$ ставить у відповідність $\sin x$. Тоді відображення

a) $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не є ін'єктивним і не є сюр'єктивним;
b) $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ не є ін'єктивним але є сюр'єктивним;
c) $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ є ін'єктивним, але не є сюр'єктивним;
d) $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ є бієктивним.

Зауважимо також, що усі вище перелічені відображення є різними.

**Приклад 1.9.33.** Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення, $A, B \subseteq X$ і $C, D \subseteq f(X)$. Доведіть такі властивості:

(*i*) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(*ii*) $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$;
(*iii*) включення $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$ не можна замінити рівністю;
(*iv*) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
(*v*) включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю;
(*vi*) з $A \subseteq B$ випливає $f(A) \subseteq f(B)$;
(*vii*) $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин у $X$;
(*viii*) $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин у $X$;
(*ix*) включення $f\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f(A_i)$ не можна замінити рівністю;
(*x*) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин у $Y$;
(*xi*) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{I}} A_i\right) = \bigcap_{i\in\mathscr{I}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ підмножин у $Y$;
(*xii*) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

***Розв'язок.*** (*i*) Спочатку доведемо включення $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Нехай $y \in f(A \cup B)$, тобто існує такий елемент $x \in A \cup B$, що $f(x) = y$. Маємо $(x \in A) \vee (x \in B)$. Тоді

$$(x \in A \;\Rightarrow\; f(x) = y \in f(A)) \vee (x \in B \;\Rightarrow\; f(x) = y \in f(B)).$$

Звідси маємо, що

$$y = f(x) \;\wedge y \in f(A) \cup f(B).$$

Тепер доведемо включення $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Якщо $y \in f(A) \cup f(B)$, то

$$y \in f(A) \vee y \in f(B).$$

Тоді

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \text{ такий, що } f(x) = y,$$
$$y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \text{ такий, що } f(x) = y.$$

Отож,

$$y = f(x) \wedge x \in A \cup B,$$

тобто $y \in f(A \cup B)$.

$(ii)$ Нехай $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тоді існує елемент $x \in A$ такий, що $f(x) = y$, але $y \notin \{f(x) \mid x \in B\}$. Отже $x \notin B$ і $x \in A \setminus B$. Звідси випливає, що $y \in f(A \setminus B)$.

$(iii)$ Те, що включення $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f(\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) = [-1, 1],$$

але

$$f(\mathbb{R}) \setminus f([0, +\infty)) = [-1, 1] \setminus [-1, 1] = \varnothing.$$

$(iv)$ Нехай $y \in f(A \cap B)$. Тоді існує елемент $x \in A \cap B$ такий, що $f(x) = y$. Але $x \in A$ та $x \in B$, а отже

$$y = f(x) \in f(A) \qquad \text{і} \qquad y = f(x) \in f(B).$$

Отож,

$$y \in f(A) \cap f(B),$$

звідки випливає включення

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

$(v)$ Те, що включення $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ не можна замінити рівністю ілюструє такий приклад. Розглянемо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \sin x.$$

Тоді

$$f((-\infty, 0] \cap [0, +\infty)) = f(\{0\}) = \{0\},$$

однак

$$f((-\infty, 0]) \cap f([0, +\infty)) = [-1, 1] \cap [-1, 1] = [-1, 1].$$

$(vi)$ Припустимо, що $A \subseteq B$. Тоді існує елемент $x \in X$ такий, що $f(x) = y$ і $x \in A$. Отже, $x \in B$ і $f(x) = y \in f(B)$. Звідси випливає імплікація

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subseteq f(B).$$

$(vii)$ Справді,

$$y \in f\Big(\bigcup_{i \in \mathscr{J}} A_i\Big) \Longleftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i \in \mathscr{J}} A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \exists x \in A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : y \in f(A_i) \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow y \in \bigcup_{i \in \mathscr{J}} f(A_i),
\end{aligned}
$$

звідки випливає рівність $f\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f(A_i)$.

$(viii)$ Справді,

$$
\begin{aligned}
y \in f\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow \exists x \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i : f(x) = y \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \exists x : \forall i \in \mathscr{J} : x \in A_i : f(x) = y \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \exists x : \forall i \in \mathscr{J} : y \in f(A_i) \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow y \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f(A_i).
\end{aligned}
$$

$(ix)$ Приклад будується аналогічно, як і у випадку $(vi)$.

$(x)$ Справді, оскільки

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : f(x) \in A_i \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \exists i \in \mathscr{J} : x \in f^{-1}(A_i) \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i),
\end{aligned}
$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в $Y$.

$(xi)$ Справді, оскільки

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\Big) &\Longleftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{J} : f(x) \in A_i \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \forall i \in \mathscr{J} : x \in f^{-1}(A_i) \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i),
\end{aligned}
$$

то виконується рівність $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathscr{J}} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{J}} f^{-1}(A_i)$ для довільної сім'ї $\{A_i\}_{i\in\mathscr{J}}$ підмножин в $Y$.

$(xii)$ Оскільки

$$
x \in f^{-1}(C \setminus D) \Longleftrightarrow f(x) \in C \setminus D \Longleftrightarrow
$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \notin D \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \notin f^{-1}(D) \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D),
\end{aligned}$$

то маємо, що $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

**Вправа 1.9.11.** Наведіть приклад відображення, для якого не виконується обернена імплікація в твердженні $(vi)$ з прикладу 1.9.33.

**Приклад 1.9.34.** Доведіть, що відображення $f \colon X \to Y$ є взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

для довільних підмножин $A, B \subseteq X$.

***Розв'язок.*** $(\Longrightarrow)$ Припустимо, що відображення $f \colon X \to Y$ є взаємно однозначним і нехай $A, B \subseteq X$ — довільні підмножини. Оскільки для довільного $y \in f(A \cap B)$ існує єдиний елемент $x \in A \cap B \subseteq X$ такий, що $f(x) = y$, то

$$\begin{aligned}
y \in f(A \cap B) &\Longleftrightarrow \exists x : x \in A \cap B, f(x) = y \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \wedge f(x) = y \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow y \in f(A) \cap f(B).
\end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$ Тепер припустимо, що для довільних підмножин $A, B \subseteq X$ виконується рівність

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Припустимо протилежне: відображення $f \colon X \to Y$ не є взаємно однозначним. Тоді існують різні $x_1, x_2 \in X$ такі, що

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Нехай $A = \{x_1\}$ і $B = \{x_2\}$. Тоді маємо

$$f(A) \cap f(B) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}) = f(\{x_2\}) = \{y\} \neq f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing.$$

З отриманого протиріччя випливає наша імплікація.

**Вправа 1.9.12.** Нехай $f \colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що виконуються такі умови:

$(i)$ $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ для довільної підмножини $A \subseteq X$;

$(ii)$ $B \cap f(A) = f(f^{-1}(B) \cap A)$ для довільних підмножин $A \subseteq X$ і $B \subseteq Y$, зокрема $B \cap f(X) = f(f^{-1}(B))$.

*Бінарним відношенням* $\mathscr{R}$ *на множині* $X$ називається підмножина декартового добутку $X \times X$. Якщо $(x, y) \in \mathscr{R}$, то писатимемо $x\mathscr{R}y$.

*Відношенням еквівалентності* (*еквівалентністю*, *еквіваленцією*) на множині $X$ називається бінарне відношення $\mathscr{R}$, для якого виконуються такі аксіоми:

1) *рефлексивність*: $x\mathscr{R}x$, для кожного елемента $x \in X$;
2) *симетричність*: якщо $x\mathscr{R}y$, то $y\mathscr{R}x$, для $x, y \in X$;
3) *транзитивність*: якщо $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}z$, то $x\mathscr{R}z$, для $x, y, z \in X$.

**Приклад 1.9.35.** Відношеннями еквівалентності є:

а) властивість навчатися в одній групі, властивість навчатися на одному курсі, властивість навчатися в одному навчальному закладі на множині усіх студентів;
б) мати однакову рідну мову на множині усіх студентів ЛНУ;
в) подібність фігур на площині (в просторі);
г) різниця двох чисел є цілим числом, на множині дійсних чисел.

Відношення "мати можливість привітатися правою рукою" на множині, що складається з людей не є рефлексивним, але є симетричним і транзитивним. Відношення "ділить" є рефлексивним і транзитивним, але не є симетричним. Відношення "знайомий", "друг" на множині, що складається з людей і відношення "прямі на площині мають спільну точку" є рефлексивними та симетричними, але не є транзитивними.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на множині $X$ і $a \in X$. Позначимо

$$\widetilde{a} = \{x \in X \mid a \sim x\}.$$

Назвемо підмножину $\widetilde{a}$ в $X$ *класом суміжності елемента $a$ за відношенням еквівалентності* $\sim$. Тоді, очевидно, що виконується рівність $X = \bigcup_{a \in X} \widetilde{a}$.

Наступна теорема є фундаментальною в математиці та її доведення випливає з означення відношення еквівалентності.

**Теорема 1.9.36.** *Нехай $X$ — множина і $\sim$ — відношення еквівалентності на $X$. Тоді відношення $\sim$ розбиває множину $X$ на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.*

Множина класів за відношенням еквівалентності $\sim$ називається *фактор-множиною* за відношенням еквівалентності $\sim$, і позначається $X/\sim$. Отже, кожному елементові $x$ з множини $X$ можна поставити у відповідність клас, який містить елемент $x$, тобто $\widetilde{x}$, а, отже, визначене відображення $\pi \colon X \to X/\sim$. Відображення $\pi$ називається *природним*.

*Композиція $\beta \circ \alpha$ двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$* і $\beta \subseteq Y \times Z$ визначається так:

$$\beta \circ \alpha = \{(a, c) \in X \times Z \mid \text{ існує елемент } b \in Y \text{ такий, що } (a, b) \in \alpha \text{ і } (b, c) \in \beta\}.$$

Очевидно, що композиція двох відношень $\alpha \subseteq X \times Y$ і $\beta \subseteq Y \times Z$ є відношенням на $X \times Z$.

**Вправа 1.9.13.** Доведіть, що композиція

$(i)$ часткових відображень є частковим відображенням;
$(ii)$ відображень є відображенням;
$(iii)$ ін'єктивних відображень є ін'єктивним відображенням;
$(iv)$ сюр'єктивних відображень є сюр'єктивним відображенням;
$(v)$ бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

Нехай $X$ — довільна непорожня множина. Бінарне відношення

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

називається *діагоналлю* множини $X$. Очевидно, що $\Delta_X$ — відношення еквівалентності на $X$.

Нагадаємо, що бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині $X$ називається *антисиметричним*, якщо з $x\mathscr{R}y$ і $y\mathscr{R}x$ випливає рівність $x = y$, для $x, y \in X$.

Якщо $\alpha \subseteq X \times Y$ то відношення $\alpha^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \alpha\}$ називається *оберненим* до відношення $\alpha$.

**Приклад 1.9.37.** Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення $f^{-1}$ до відношенням $f$ є відображенням з $Y$ на $X$ тоді і лише тоді, коли $f$ — бієктивне відображення.

***Розв'язок.*** Імплікація ($\Longleftarrow$) очевидна.

($\Longrightarrow$) Якщо $\mathbf{E}(f) = \mathbf{D}(f^{-1}) \neq Y$, то відношення $f \subseteq X \times Y$ не є сюр'єктивним відображенням, а отже відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ не є відображенням. Тому відображення $f\colon X \to Y$ має бути сюр'єктивним.

Припустимо, що відображення $f\colon X \to Y$ — не є ін'єктивним. Тоді існують різні елементи $x_1, x_2 \in X$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Отже $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$, де $f^{-1}$ — обернене відношення до відношенням $f$, а це суперечить тому, що відношення $f^{-1} \subseteq Y \times X$ є відображенням. З отриманого протиріччя випливає, що відображення $f\colon X \to Y$ ін'єктивне.

Зауважимо, що відношення діагоналі $\Delta_X \subseteq X \times X$ можна розглядати як відображення $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, визначене за формулою $\mathrm{id}_X(x) = x$. Надалі, так визначене відображення $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ будемо називати *тотожним відображенням* множини $X$.

**Вправа 1.9.14.** Нехай $f\colon X \to Y$ — відображення. Доведіть, що обернене відношення $f^{-1}$ до відношенням $f$ є відображенням з $Y$ в $X$ тоді і лише тоді, коли

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y \qquad \text{і} \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X\,.$$

## 1.9.7 Частковий порядок. Потужність множини

Бінарне відношення $\mathscr{R}$ на множині $X$ називається:

- *передпорядком* (або *квазіпорядком*), якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне та транзитивне;
- *частковим порядком*, якщо $\mathscr{R}$ — рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Очевидно, що кожен частковий порядок на фіксованій множині є передпорядком.

Надалі передпорядок (частковий порядок) на множині $X$ будемо позначати зазвичай через $\leqslant$. У цьому випадку висловлення $x\mathscr{R}y$ для $x, y \in X$ записуватимемо $x \leqslant y$ і будемо говорити, що "*x менше, або рівне за y*". Множина $X$ із заданим на ній передпорядоком (частковим порядком) $\leqslant$ називається *квазівпорядкованою* (*частково впорядкованою*) і позначається $(X, \leqslant)$.

Якщо $(X, \leqslant)$ — квазівпорядкована (частково впорядкована) множина, $x, y \in X$ і виконується одна з умов $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, то кажуть, що елементи $x$ та $y$ є *порівняльними* в $(X, \leqslant)$, а в протилежному випадку — *непорівняльними*.

Передпорядок (частковий порядок) $\leqslant$ на множині $X$ називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ є порівняльними. Частково впорядкована множина із заданим на ній лінійним порядком називається *лінійно впорядкованою*.

**Вправа 1.9.15.** Наведіть приклади, які розрізняють квазівпорядковані, частково впорядковані та лінійно впорядковані множини.

**Вправа 1.9.16.** Доведіть, що обернене відношення до передпорядку, частково порядку, лінійного передпорядку та лінійного порядку є, відповідно, передпорядком, частковим порядком, лінійним передпорядком і лінійним порядком.

Надалі, якщо $x \leqslant y$ у квазівпорядкованій множини $(X, \leqslant)$ то писатимемо також $y \geqslant x$, і, очевидно, що відношення $\geqslant$ є оберненим до $\leqslant$. Надалі бінарне відношення $\geqslant$ будемо називати *оберненим частковим порядком* (*оберненим квазіпорядком*) на $X$ до $\leqslant$, або ж *дуальним частковим порядком* (*дуальним квазіпорядком*) на $X$ до $\leqslant$.

Елемент $x$ частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається:

- *мінімальним*, якщо з $y \leqslant x$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *максимальним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає рівність $x = y$ для $y \in X$;
- *найменшим*, якщо $x \leqslant y$ для всіх $y \in X$;
- *найбільшим*, якщо $y \leqslant x$ для всіх $y \in X$.

**Вправа 1.9.17.** Наведіть приклади частково впорядкованих множин, які розрізняють поняття мінімальний та найменший елемент (максимальний та найбільший елемент).

**Вправа 1.9.18.** Чи існує неодноточкова частково впорядкована множина з мінімальним елементом, який є максимальним?

Частково впорядкована множина, у якій кожна непорожня підмножина містить мінімальний елемент називається *цілком впорядкованою*, а цей порядок на ній називається *повним*. Очевидно, що кожен повний порядок є лінійним.

Будемо говорити, що дві множини $A$ і $B$ є *рівнопотужними*, і це записуватимемо так $|A| = |B|$, якщо існує бієктивне відображення $f\colon A \to B$. У цьому випадку будемо говорити, що “*потужність множини $A$ дорівнює потужності множини $B$*”. Якщо $|A| = |\mathbb{N}|$, то будемо говорити, що потужність множини $A$ *злічена* та записуватимемо це так $|A| = \aleph_0$, а у випадку $|A| = |[0,1]|$, де

$$[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\},$$

будемо говорити, що *потужність множини $A$ дорівнює континуум* та записуватимемо це так $|A| = \mathfrak{c}$.

Запис $|A| \leqslant |B|$ означає, що існує ін'єктивне відображення $f\colon A \to B$. А запис

$$|A| < |B|$$

означає, що

$$|A| \leqslant |B| \qquad \text{і} \qquad |A| \neq |B|.$$

**Вправа 1.9.19 (теорема Кантора–Берштейна).** Якщо $|A| \leqslant |B|$ і $|B| \leqslant |A|$, то

$$|A| = |B|.$$

**Вправа 1.9.20.** Для довільної множини $A$ виконується властивість $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

На класі, аналогічно, як і на множині, вводиться відношення еквівалентності, а також клас еквівалентності та фактор-клас за цим відношенням. Також для класів справджується теорема, яка є аналогом теореми 1.9.36 для множин:

**Теорема 1.9.38.** *Нехай $X$ — клас і $\sim$ — відношення еквівалентності на $X$. Тоді відношення $\sim$ розбиває клас $X$ на непорожні класи еквівалентностей, які або попарно не перетинаються, або збігаються.*

Очевидно, що відношення рівнопотужності на класі всіх множин є відношенням еквівалентності, і тому надалі *кардиналом* будемо називати клас еквівалентності за відношенням рівнопотужності на класі всіх множин. Тоді всі натуральні числа разом з нулем, $\aleph_0$ і $\mathfrak{c}$ є кардиналами.

Розглянемо деякі задачі обчислення потужності множин.

**Приклад 1.9.39.** Доведіть, що об'єднання зліченної та скінченної множин зліченна множина.

***Розв'язок.*** Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| < \infty$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$.

Приймемо

$$\begin{aligned} &A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \\ &B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \qquad \text{де} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = b_1, & c_2 = b_2, & \ldots & c_k = b_k, \\ c_{k+1} = a_1, & c_{k+2} = a_2, & \ldots & c_{k+n} = a_n, \quad \ldots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

**Приклад 1.9.40.** Доведіть, що об'єднання двох зліченних множин зліченна множина.

***Розв'язок.*** Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A \cap B = \varnothing$.

Приймемо

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \\ B &= \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}. \end{aligned}$$

Множину

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

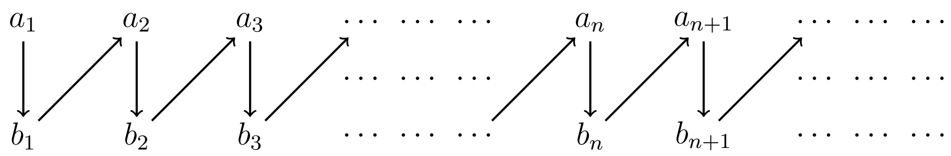



Рис. 1.6: До прикладу 1.9.40

означимо так:

$$\begin{array}{llll} c_1 = a_1, & c_3 = a_2, & \dots & c_{2n-1} = a_n, \quad \dots \\ c_2 = b_1, & c_4 = b_2, & \dots & c_{2n} = b_n, \quad\quad \dots . \end{array}$$

Тоді $|A \cup B| = |C| = \aleph_0$.

Схематично запропоновану нумерацію об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис. 1.6.

Іншу схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами зображено на рис. 1.7.

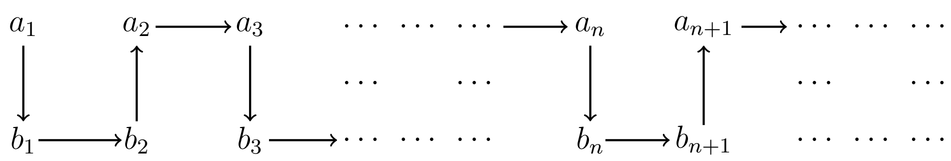



Рис. 1.7: До прикладу 1.9.40

Ми пропонуємо читачеві самостійно записати аналітично схему нумерації об'єднання $A \cup B$ натуральними числами, яка зображена на рис. 1.7.

**Вправа 1.9.21.** Доведіть, що об'єднання скінченної кількості зліченних множин множина зліченна.

**Приклад 1.9.41.** Доведіть, що об'єднання зліченної кількості зліченних множин зліченна множина.

***Розв'язок.*** Нехай $|A_i| = \aleph_0$, для кожного $i \in \mathbb{N}$. Тоді не зменшуючи загальності можемо вважати, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$.

Приймемо

$$\begin{array}{l} A_1 = \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \dots, a_{1,n}, \dots\}, \\ A_2 = \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \dots, a_{2,n}, \dots\}, \\ A_3 = \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \dots, a_{3,n}, \dots\}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \dots, a_{n,n}, \dots\}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[d] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[d] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[l] & a_{2,3} \arrow[u] & a_{2,4} \arrow[d] & a_{2,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[r] & a_{3,2} \arrow[r] & a_{3,3} \arrow[u] & a_{3,4} \arrow[d] & a_{3,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[l] & a_{4,3} \arrow[l] & a_{4,4} \arrow[l] & a_{4,5} \arrow[u] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[r] & a_{5,2} \arrow[r] & a_{5,3} \arrow[r] & a_{5,4} \arrow[r] & a_{5,5} \arrow[u] & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}$$

Рис. 1.8: До прикладу 1.9.41

Запропоновану нумерацію об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис. 1.8.

Іншу нумерацію об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами зображено на рис. 1.9.

$$\begin{tikzcd}
a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[dl] & a_{1,3} \arrow[r] & a_{1,4} \arrow[dl] & a_{1,5} \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{2,1} \arrow[d] & a_{2,2} \arrow[ur] & a_{2,3} \arrow[dl] & a_{2,4} \arrow[ur] & a_{2,5} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{3,1} \arrow[ur] & a_{3,2} \arrow[dl] & a_{3,3} \arrow[ur] & a_{3,4} \arrow[dl] & a_{3,5} \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
a_{4,1} \arrow[d] & a_{4,2} \arrow[ur] & a_{4,3} \arrow[dl] & a_{4,4} \arrow[ur] & a_{4,5} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{5,1} \arrow[ur] & a_{5,2} \arrow[dl] & a_{5,3} \arrow[ur] & a_{5,4} \arrow[dl] & a_{5,5} \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Рис. 1.9: До прикладу 1.9.41

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схеми нумерації об'єднання $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ натуральними числами, які зображені на рис. 1.8 і 1.9.

**Вправа 1.9.22.** Доведіть, що об'єднання зліченної кількості скінченних множин множина злічення.

**Приклад 1.9.42.** Доведіть, що декартовий добуток двох зліченних множин зліченна множина.

***Розв'язок.*** Нехай $|A| = \aleph_0$ і $|B| = \aleph_0$. Приймемо

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A,\ b_j \in B\ i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Одну з нумерацій декартового добутку $A \times B$ натуральними числами зображено на рис. 1.10.

$$\begin{tikzcd}
(a_1,b_1) \arrow[r] & (a_1,b_2) \arrow[dl] & (a_1,b_3) \arrow[r] & (a_1,b_4) \arrow[dl] & (a_1,b_5) \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_2,b_1) \arrow[d] & (a_2,b_2) \arrow[ur] & (a_2,b_3) \arrow[dl] & (a_2,b_4) \arrow[ur] & (a_2,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_3,b_1) \arrow[ur] & (a_3,b_2) \arrow[dl] & (a_3,b_3) \arrow[ur] & (a_3,b_4) \arrow[dl] & (a_3,b_5) \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
(a_4,b_1) \arrow[d] & (a_4,b_2) \arrow[ur] & (a_4,b_3) \arrow[dl] & (a_4,b_4) \arrow[ur] & (a_4,b_5) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_5,b_1) \arrow[ur] & (a_5,b_2) \arrow[dl] & (a_5,b_3) \arrow[ur] & (a_5,b_4) \arrow[dl] & (a_5,b_5) \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

Рис. 1.10: До прикладу 1.9.42

Ми пропонуємо читачеві записати аналітично схему нумерації декартового добутку $A \times B$ натуральними числами, яка зображена на рис. 1.10.

**Вправа 1.9.23.** Доведіть, що декартовий добуток скінченної кількості зліченних множин зліченна множина.

**Приклад 1.9.43.** Доведіть, що довільна нескінченна множина містить зліченну нескінченну підмножину.

***Розв'язок.*** Нехай $A_0$ — нескінченна множина. Виберемо довільну точку $a_1 \in A_0$. Оскільки $A_0$ — нескінченна, то

$$A_1 = A_0 \setminus \{a_1\} \neq \varnothing.$$

Виберемо довільну точку $a_2 \in A_1$. Оскільки $A_0$ — нескінченна, то

$$A_2 = A_1 \setminus \{a_2\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing,$$

і т.д. Отже, з нескінченності множини $A_0$ випливає, що для довільного натурального числа $n$ можна вибрати точку

$$a_n \in A_{n-1} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$$

так, щоб виконувалася умова

$$A_n = A_{n-1} \setminus \{a_n\} = A_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \varnothing$$

Очевидно, що так вибрана підмножина

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

в $A_0$ є зліченною та нескінченною.

**Вправа 1.9.24.** Для довільної нескінченної зліченної множини $A$ знайдіть нескінченну підмножину $B \subseteq A$, для якої виконується одна з умов:

*(i)* $|A \setminus B| = 0$;
*(ii)* $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа $n$;
*(iii)* $|A \setminus B| = \aleph_0$.

**Приклад 1.9.44.** Нехай $A$ — нескінченна множина та $B$ — скінченна підмножина в $A$. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

***Розв'язок.*** Оскільки об'єднання двох скінченних множин — скінченна множина, то $A_0 = A \setminus B$ — нескінченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина $A_0$ містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.39 множини $C$ і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

**Вправа 1.9.25.** Для множини $A$ з $|A| = \mathfrak{c}$ знайдіть підмножину $B \subseteq A$ з $|B| = \mathfrak{c}$, для якої виконується одна з умов:

*(i)* $|A \setminus B| = 0$;
*(ii)* $|A \setminus B| = n$ для довільного наперед заданого натурального числа $n$;
*(iii)* $|A \setminus B| = \aleph_0$;
*(iv)* $|A \setminus B| = \mathfrak{c}$.

**Приклад 1.9.45.** Нехай $A$ — незліченна множина та $B$ — злічена підмножина в $A$. Доведіть, що тоді $|A \setminus B| = |A|$.

***Розв'язок.*** Оскільки за твердженням прикладу 1.9.40 об'єднання двох злічених множин — злічена множина, то $A_0 = A \setminus B$ — незліченна множина, і за твердженням прикладу 1.9.43 множина $A_0$ містить зліченну нескінченну підмножину

$$C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

За твердженням прикладу 1.9.40 множини $C$ і $C \cup B$ — рівнопотужні, а отже існує бієктивне відображення $f_C \colon C \to C \cup B$. Означимо відображення $f \colon A \setminus B \to A$ за формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A \setminus (C \cup B); \\ f_C(x), & \text{якщо } x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, що так означене відображення $f \colon A \setminus B \to A$ є бієктивним, звідки випливає, що $|A \setminus B| = |A|$.

**Вправа 1.9.26.** Які з нижче перелічених множин є попарно рівнопотужними?

(*i*) $\mathbb{R}$;
(*ii*) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;
(*iii*) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;
(*iv*) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
(*v*) $\mathbb{R} \setminus \{5\}$;
(*vi*) $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
(*vii*) $\mathbb{R} \setminus (0, 1)$;
(*viii*) $\mathbb{R} \setminus [0, 1)$;
(*ix*) $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$;
(*x*) $\mathbb{R} \setminus ([0, 1] \cup (3, 4))$;
(*xi*) $\mathbb{R} \setminus ([0, 1] \cup \{3, 4\})$;
(*xii*) $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} [2i, 2i + 1]$;
(*xiii*) $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} (2i, 2i + 1]$;
(*xiv*) $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} (2i, 2i + 1)$;
(*xv*) $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} [2i, 2i + 1]$;
(*xvi*) $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} (2i, 2i + 1]$;
(*xvii*) $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} (2i, 2i + 1)$.

Відповідь обґрунтуйте.

**Приклад 1.9.46.** Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$, $e < f$ і $g < h$ множини

$$[a, b], \qquad [c, d), \qquad (e, f], \qquad (g, h)$$

рівнопотужні.

***Розв'язок.*** За твердженням прикладу 1.9.44 для довільних дійсних чисел $a < b$ множини

$$[a, b], \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad (a, b)$$

рівнопотужні. Тому достатньо довести, що для довільних дійсних чисел $a < b$, $c < d$ відрізки

$$[a, b] \qquad \text{і} \qquad [c, d]$$

рівнопотужні.

Якщо $a - b = c - d$, то відображення $f \colon [a, b] \to [c, d]$, означене за формулою

$$f(x) = x - a + c$$

є бієкцією з $[a, b]$ на $[c, d]$. Припустимо, що $a - b < c - d$. Відкладемо відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ на паралельних прямих (див. рис. 1.11). Проведемо пряму $l_{a,c}$ через точки $a$

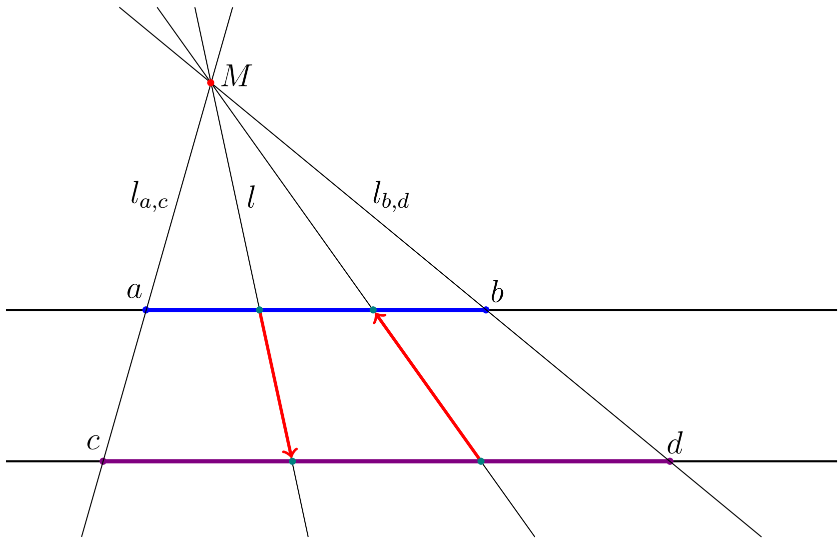



Рис. 1.11: До прикладу 1.9.46

і $c$ та пряму $l_{b,d}$ через точки $b$ і $d$, відповідно. Оскільки $a - b < c - d$, то прямі $l_{a,c}$ і $l_{b,d}$ перетнуться в деякій точці, яку ми позначимо через $M$. Тоді довільна пряма $l$, яка проходить через точку $M$ та перетинає відрізок $[a, b]$, перетинає $[c, d]$, і навпаки довільна пряма $l$, яка проходить через точку $M$ та перетинає відрізок $[c, d]$, перетинає $[a, b]$. Це визначає бієктивне відображення між відрізками $[a, b]$ і $[c, d]$ (див. рис. 1.11).

**Приклад 1.9.47.** Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

***Розв'язок.*** За твердженням прикладу 1.9.46 одиничний відрізок $[0, 1]$ та інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ рівнопотужні. Відображення $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, означене за формулою

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

бієктивне, а отже інтервал $(-\pi/2, \pi/2)$ і множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ рівнопотужні. Оскільки відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності, то множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та одиничний відрізок $[0, 1]$ рівнопотужні.

**Приклад 1.9.48.** Доведіть, що одиничний відрізок $[0, 1]$ та його декартовий квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ — рівнопотужні множини.

***Розв'язок.*** Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що кожне дійсне число $a \in [0, 1]$ можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$a = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10} \cdots a_na_{n+1} \cdots,$$

де $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, для довільного $i \in \mathbb{N}$. Означимо числа $b, c \in [0, 1]$ за формулами

$$b = 0{,}a_1a_3a_5a_7a_9 \cdots a_{2n-1}a_{2n+1} \cdots,$$
$$c = 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10} \cdots a_{2n}a_{2n+2} \cdots.$$

Отже, ми визначили відображення

$$F\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1], \quad a \mapsto (b,c),$$

яке, очевидно, є бієктивним. Звідки випливає, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його декартовий квадрат $[0,1] \times [0,1]$ — рівнопотужні множини.

**Вправа 1.9.27.** Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ та його $n$-ий декартовий степінь

$$[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{n-\text{разів}}$$

— рівнопотужні множини, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$.

**Вправа 1.9.28.** Доведіть, що множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ та її $n$-ий декартовий степінь

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{разів}}$$

— рівнопотужні множини, для довільного натурального числа $n \geqslant 2$.

Завершимо наші викладки ілюстрацією *методу діагоналізації Кантора* для доведення нерівності $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

**Приклад 1.9.49.** Доведіть, що одиничний відрізок $[0,1]$ — незліченна множина.

***Розв'язок.*** Припустимо протилежне: $[0,1]$ — зліченна множина. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує нумерація одиничного відрізка

$$[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots a_{1,n}\cdots, \\
a_2 &= 0{,}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots a_{2,n}\cdots, \\
a_3 &= 0{,}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots a_{3,n}\cdots, \\
a_4 &= 0{,}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots a_{4,n}\cdots, \\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\
a_n &= 0{,}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}a_{n,4}\cdots a_{n,n}\cdots, \\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots,
\end{aligned}$$

причому $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для довільних натуральних чисел $i$ та $j$.

Для довільного натурального числа $i$ виберемо $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за правилом: $b_i \neq a_{i,i}$ для довільного $i \in \mathbb{N}$. Приймемо

$$b = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5\cdots b_n\cdots.$$

Тоді $b \in [0,1]$ і за побудовою маємо, що $b \neq a_i$ для довільного натурального числа $i$, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $[0,1]$ — незліченна множина.

### 1.9.8 Ординали. Аксіома вибору. Трансфінітна індукція

Нехай $(X, \leqslant)$ та $(Y, \leqq)$ — дві частково впорядковані множини. Відображення $f\colon (X, \leqslant) \to (Y, \leqq)$ називається *ізоморфізмом частково впорядкованих множин* $(X, \leqslant)$ та $(Y, \leqq)$, якщо $f$ — бієктивне відображення та $a \leqslant b$ в $(X, \leqslant)$ тоді і лише тоді, коли $f(a) \leqq f(b)$ в $(Y, \leqq)$. У цьому випадку частково впорядкованих множини $(X, \leqslant)$ та $(Y, \leqq)$ називають *порядково ізоморфними*.

Нехай $(X, \leqslant)$ та $(Y, \leqq)$ — дві ізоморфні частково впорядковані множини. Про такі множини ми будемо говорити, що вони мають один і той же *порядковий тип*. Лінійно впорядковані множини — це частковий випадок частково впорядкованих множин, а тому можна також говорити про їх порядковий тип.

Множина натуральних чисел $\mathbb{N}$ зі звичайним відношенням $\leqslant$ є найпростішим прикладом нескінченної лінійно впорядкованої множини. Її порядковий тип позначають через $\omega$. Очевидно, що порядковий тип $\omega$ мають також такі підмножини в $\mathbb{R}$ зі звичайним відношенням $\leqslant$:

- множина всіх непарний натуральних чисел $2\mathbb{N}+1 = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- множина всіх парний натуральних чисел $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- кожна строго зростаюча послідовність дійсних чисел $\{x_n\}$:

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots .$$

Очевидно, якщо дві множини мають однаковий порядковий тип, то вони рівнопотужні. Однак обернене твердження хибне. Так, зокрема множини натуральних, цілих і раціональних зі звичайним відношенням $\leqslant$ чисел мають однакову потужність, а саме вони зліченні, тобто $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, але вони не є попарно порядково ізоморфними, а отже їхні порядкові типи попарно різні.

Лише порядковий тип лінійно впорядкованої скінченної множини $X$ визначається числом $|X| = n$ його елементів і позначається також через $n$.

На множині натуральних чисел існують інші порядкові типи, відмінні від $\omega$. Таким є, зокрема, порядковий тип множини натуральних чисел з таким лінійним порядком:

$$1{<}4{<}7{<}\cdots{<}3n+1{<}\cdots{<}2{<}5{<}8{<}\cdots{<}3n+2{<}\cdots{<}3{<}6{<}9{<}\cdots{<}3n+3{<}\cdots .$$

Порядковий тип такої множини $\omega 3 = \omega + \omega + \omega$.

**Вправа 1.9.29.** Доведіть, що множина порядкових типів, яка відповідає потужності $\aleph_0$ є незліченною.

Нагадаємо з останнього підрозділу означення цілком впорядкованої множини: це така лінійно впорядкована множина, що кожна її непорожня підмножина має найменший елемент. Серед нескінченних множин натуральні числа зі звичайним порядком є цілком впорядкованою множиною. Також на кожній скінченній множині можна визначити повний порядок.

Зауважимо, що множина від'ємних цілих чисел зі звичайним порядком $\leqslant$ є лінійно впорядкованою, але не є цілком впорядкованою, а її порядковий тип записують $\omega^*$.

Очевидно, також, що довільна непорожня підмножина цілком впорядкованої множини є також цілком впорядкованою.

Виникає питання: *чи на кожній множині можна визначити повний порядок?* Виявляється, умова, що кожну множину можна цілком впорядкувати еквівалентна аксіомі вибору, і це довів Цермело на початку минулого століття. Аксіому вибору часто називають також аксіомою Цермело, оскільки саме він її ввів.

**Аксіома вибору.** Нехай $\mathfrak{M} = \{M_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ — множина диз'юнктних непорожніх множин. Тоді існує множина $M$, кожен елемент якої $m_i$ є елементом деякої множини $M_i$ і $M$ перетинається з множиною $M_i$ по одному елементу $m_i$.

Порядковий тип цілком впорядкованої множини називається *ординалом* або *ординальним числом*. Ординали представляють собою одне з розширень натуральних чисел, яке відрізняється як від цілих, так і від кардинальних чисел. Як й інші різноманітності чисел, їх можна додавати, множити та підносити до степеня. Порядкові типи нескінченних цілком впорядкованих множин називаються *трансфінітами* (лат. *trans* — за, через + *finitio* — край, межа) або *трансфінітними числами*. Ординали відіграють важливу роль у доведенні багатьох теорем теорії множин — зокрема, завдяки пов'язаному з ними принципу трансфінітної індукції.

Порядкові числа були введені Георгом Кантором (Georg Cantor) у 1883 р. в [4] як спосіб описання нескінченних послідовностей, а також класифікації множин, на яких визначена впорядкована структура. Він випадково відкрив впорядковані числа, розв'язуючи задачу, яка стосувалася тригонометричних рядів.

Скінченні порядкові (та кардинальні) числа представляють собою числа натурального ряду: $0, 1, 2, \ldots$, оскільки два довільні повні упорядкування скінченної множини ізоморфні зі збереженням порядку. Найменше нескінченно велике порядкове число $\omega$ ототожнюється з кардинальним числом $\aleph_0$. Однак у випадку трансфінітних чисел, більших за $\omega$, ординали, порівнюючи з кардинальними числами, дають можливість показати більш тонку класифікацію множин, що базується на інформації про їх упорядкованості. У той же час як всі зліченні множини описуються одним кардинальним числом, що дорівнює $\aleph_0$, потужність зліченних ординалів нескінченна та є незліченна:

$$\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots, \varepsilon_0, \ldots$$

У даному випадку операції додавання та множення трансфінітних чисел не є комутативними: так, зокрема $1+\omega = \omega \neq \omega+1$; аналогічно $2\cdot\omega = \omega \neq \omega\cdot 2$. Множина всіх зліченних ординалів утворює перше незліченне порядкове число $\omega_1$, яке відповідає кардинальному числу $\aleph_1$ (наступне кардинальне число після $\aleph_0$. Цілком впорядковані кардинальні числа ототожнюються з їх початковими ординалами, тобто мінімальними ординалами відповідної потужності. Потужність порядкового числа визначає відповідність між класами порядкових і кардинальних чисел за типом "багато до одного".

Зазвичай довільний ординал $\alpha$ визначається як порядковий тип множини ординалів, строго менших за $\alpha$. Ця властивість дозволяє представити довільне порядкове число у вигляді множини ординалів, строго менших за нього самого. Усі порядкові числа можна розбити на три категорії: нуль, наступне порядкове число та граничне порядкове число. Для заданого класу порядкових чисел можна вказати його $\alpha$-й елемент — інакше кажучи, елементи класу можна проіндексувати (порахувати). Такий клас буде замкненим и необмеженим за умови, що функція індексування неперервна та ніколи не зупиняється. Нормальна форма Кантора трансфінітного числа дозволяє єдиним чином зображати довільне порядкове число у вигляді скінченної суми порядкових степенів ординала $\omega$. Однак, така форма не може використовуватися в якості основи для універсальної системи позначення порядкових чисел через наявності в ній автореферентних зображень: наприклад, $\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0}$. Можна визначити більш великі порядкові числа, однак по мірі їх росту їхнє описання ускладнюється.

### Порядкові числа як розширення множини натуральних чисел

Натуральні числа (до яких у даному випадку відноситься і число 0) мають два основних застосування: описання потужності деякої множини та описання позиції елемента в заданій послідовності. У випадку скінченних множин ці поняття збігаються; х точністю до ізоморфізму існує єдиний спосіб розкласти елементи скінченної множини у вигляді послідовності. У випадку нескінченних множин необхідно розрізняти поняття розміру та пов'язані з ним кардинальні числа та поняття позиції, узагальненням якого є порядкові числа. Це пояснюється тем, що нескінченна множина, маючи фіксовану потужність, може бути цілком впорядкованою більш ніж одним неізоморфним способом.

Хоча поняття кардинального числа, пов'язаного з множиною, не потребує визначення на ній якої-небудь структури, ординали тісно пов'язані з особливою різномаїтністю множин, які називаються цілком впорядкованими (по суті ці поняття настільки близькі, що деякі математики не розрізняють їх). Цей термін позначає лінійно впорядковану множину, в якій немає нескінченно спадних послідовностей (хояа можуть існувати нескінченно зростаючі), або, що еквівалентно, множину, в якій довільна непорожня підмножина містить найменший елемент. Порядкові числа можна використовувати як для позначення елементів довільної заданої цілком впорядкованої множини: найменший елемент отримує мітку 0, наступний за ним — мітку 1, наступний — 2, і т.д., так і для обчислення "величини" всієї множини шляхом визначення найменшого ординала, який не є міткою якого-небудь елемента множини. Така "величина" називається *порядковим типом множини*.

Довільне порядкове число визначається множиною *попередніх ординалів*: фактично найбільш поширене означення порядкового числа ототожнює його з множиною попередніх ординалів. Так зокрема, ординал 142 представляє собою порядковий тип множини попередніх ординалів, тобто ординалів від 0 (найменший ординал) до 141 (безпосередній попередник 142), і зазвичай ототожнюється з множиною

$$\{0,\, 1,\, 2, \ldots,\, 141\}.$$

Виконується й обернене твердження: довільна замкнена вниз множина (тобто така множина $S$, що містить елемент $a$, то і містить усі елементи $b \leqslant a$): ординалів $S$ — тобто є такою, що для довільного любого ординала $\alpha \in S$ і довільно ординала $\beta < \alpha$ ординал $\beta$ також є елементом ординала $S$ — сам є ординалом, оскільки його можна ототожнити з таким.

До цього ми згадували лише скінченні ординали, які збігаються з натуральними числами. Поруч з ними існують також нескінченні ординали: найменшим серед яких є порядковий тип натуральних чисел (тобто скінченних ординалів) $\omega$, який навіть можна ототожнити з самою множиною натуральних чисел. Справді, множина натуральних чисел замкнена вниз і, як довільна підмножина ординалів є цілком впорядкованою, а отже її можна ототожнити з відповідним порядковим число, що насправді відповідає означенню ординала $\omega$.

Можливо більш інтуїтивну уяву про порядкові числа можна отримати, розглянувши декілька їхніх перших представників: як згадувалося вище клас ординалів починається з натуральних чисел $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$[3] Після всіх натуральних чисел розташований перший нескінченний ординал $\omega$, за яким слідують $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+2$, і т.д. Після всіх таких чисел йде $\omega \cdot 2$ (тобто $\omega+\omega$), $\omega \cdot 2+1$, $\omega \cdot 2+2$, і т.д., потім $\omega \cdot 3$, а після нього — $\omega \cdot 4$. Далі, слідує множина ординалів, які можна записати у вигляді $\omega \cdot m+n$, де $m$ і $n$ — натуральні числа, також має мати відповідне порядкове число: таким числом буде $\omega^2$. За ним ідуть $\omega^3$, $\omega^4$, $\ldots$, $\omega^\omega$, потім $\omega^{\omega^2}$, $\omega^{\omega^3}$, $\omega^{\omega^4}$ і — набагато пізніше $\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$. Цей процес можна продовжувати необмежено. Висловлення "необмеженості" — це і є сильна властивість порядкових чисел: власно кажучи, коли ми, перелічуємо порядкові числа, використовуємо вирає "і т.д.", ми цим самим визначаємо порядкові числа, які слідують за ним. Найменший незліченний ординал є множиною всіх зліченних ординалів і позначається $\omega_1$.

### Цілком впорядковані множини

Кожна непорожня підмножина цілком впорядкованої множини містить найменший елемент. За виконання аксіоми вибору це твердження еквівалентно тому, що множина лінійно впорядкована і не містить нескінченно спадних послідовностей — останнє формулювання набагато простіше можна представити візуально. На практиці важливість поняття цілком впорядкованості пояснюється можливістю застосування трансфінітної індукції, основна ідея якої зводиться до того, що довільна властивість, яка переходить від попередників елемента до нього самого, повинна виконуватися для всіх елементів, які входять у задану цілком впорядковану множину. Якщо обчислювальний стан (комп'ютерної програми чи гри) можна цілком впорядкувати так, що кожний наступний крок буде "менше" попереднього, то процес обчислення гарантовано завершиться.

Далі, ми не хочемо розрізняти дві цілком впорядковані множини, якщо вони розрізняються лише "маркуванням своїх елементів", або, кажучи більш формальною мовою, якщо елементи першої множина можна так співвіднести з елементами другої множини, що в довільно взятій парі елементів одної множини перший менше другого тоді і лише тоді, коли те ж співвідношення виконується між їхніми відповідними партнерами з другої множини. Така взаємно однозначна відповідність називається *ізоморфізмом, що зберігає порядок* або *порядковим ізоморфізмом*, а дві цілком впорядковані множини називаються *ізоморфними*, або ж *подібними*. Така подібність, очевидно, є відношенням еквівалентності. Якщо дві цілком впорядковані множини порядково ізоморфні, то відповідний ізоморфізм єдиний: ця обставина дозволяє сприймати подібні цілком впорядковані множини як практично ідентичні та служить основою для пошуку "канонічного" зображення типів ізоморфізму (класів). Порядкові числа не лише грають роль такого зображення, але крім того дають нам канонічне маркування елементів довільної цілком впорядкованої множини.

Інакше кажучи, ми хочемо ввести поняття ординала як класу ізоморфізмів цілком впорядкованих множин, тобто класу еквівалентності, основаного на відношенні

[3] Ми вважаємо, що нуль 0 є натуральним числом.

"ізоморфності зі збереженням порядку". При такому підході, однак, існує одна технічна складність: визначений так клас еквівалентності виявляється дуже великим, щоб підходити під означення множини з точки зору стандартної формалізації теорії множин аксіоматики Цермело-Френкеля. Однак, ця складність не створює серйозних проблем. *Ординалом* ми будемо називати порядковий тип довільної множини в такому класі.

### Означення порядкових чисел як класів еквівалентності

У початковому означенні порядкового числа, під порядковим типом деякого повного впорядкування мається на увазі множина всіх повних впорядкувань, подібних йому (ізоморфних зі збереженням порядку): інакше кажучи, порядкове число насправді представляє собою клас еквівалентності цілком впорядкованої множини. У **ZFC**-теорії та пов'язаних с нею аксіоматичних систем теорії множин таке означення неприйнятно, оскільки відповідні класи еквівалентності достатньо великі, щоб їх можна було вважати множинами. Однак, це означення можна використовувати в теорії типів і аксіоматичній теорії множин Куайна, а також інших подівних системах.

### Означення порядкових чисел за фон Нойманом

Замість того, щоб означити ординал як клас еквівалентності цілком впорядкованих множин, ми ототожнюємо його з конкретною множиною, яка служить канонічним зображенням цього класу. Отож, ординал буде зображати собою деяку цілком впорядковану множину, а кожна цілком впорядкована множина буде порядково подібною рівно одному порядковому числу.

Стандартну означення, запропоноване фон Нойманом (John von Neumann) у [5], виглядає так: кожен ординал є цілком впорядкованою множиною, яка складається з усіх ординалів, менших за нього. У символічному записі: $\lambda = [0, \lambda)$. Висловлюючись більш формальною мовою,

> Множина $S$ є ординалом тоді і лише тоді, коли вона строго цілком впорядкована відношенням $\in$ і кожний елемент множини $S$ одночасно є його підмножиною.

Зауважимо, шо у відповідності з цим означенням натуральні числа є ординалами. Так, зокрема 2 належить множині $4 = \{0, 1, 2, 3\}$ і в той же час дорівнює $\{0, 1\}$, тобто є підмножиною в $\{0, 1, 2, 3\}$.

За допомогою трансфінітної індукції можна довести, щоо довільна цілком впорядкована множина порядково подібна лише одному ординалу — іншими словами, між ними можна становити бієктивну відповідність, що зберігає порядок.

Більше того, елементи довільного ординала самі є ординалами. Якщо $S$ і $T$ — довільні ординали, то $S$ належить $T$ тоді і лише тоді, коли $S$ є власною підмножиною в $T$. Далі, для довільних ординалів $S$ і $T$ виконується лише одно з співвідношень: або $S \in T$, або $T \in S$, або $S = T$. Отож, довільна множина ординалів є лінійно впорядкованою і, крім того, є цілком впорядкованою. Ця властивість є узагальненням цілком впорядкованості множини натуральних чисел.

З вище сказаного випливає, що елементи довільного ординала $S$ в точності збігаються з ординалами, строго меншими за $S$. Кожна множина ординалів, наприклад, містить супремум, який є ординалом, що дорівнює об'єднанню всіх порядкових чисел, які містяться в цій множині. З аксіоми об'єднання аксіом теорії множин такий ординал існує завжди, незалежно від потужності початкової множини.

Клас усіх порядкових чисел не є множиною. В протилежному випадку можна було б довести, щоо така множина сама є порядковим числом, а, отже, є своїм власним елементом, що суперечить строгій $\in$-впорядкованості. Це твердження називається *парадоксом Буралі-Форті*. Клас порядкових чисел позначається різними способами: **Ord**, **ON**, або $\infty$.

Порядкове число скінченне тоді і лише тоді, коли воно цілком впорядковане не лише звичайним порядком, але й оберненими (дуальним) порядком – ця умова виконується в тому і лише в тому випадку, коли кожна з його підмножин містить найбільший елемент.

Ординал $\alpha$ називається *граничним*, якщо не існує ординала $\beta$ такого, що $\alpha = \beta+1$. Граничними ординалами є $\omega$, $\omega^2$, $\omega^3$, $\omega^4$, $\omega^\omega$, $\omega^{\omega^2}$, $\omega^{\omega^3}$.

### Трансфінітна послідовність

Якщо $\alpha$ — граничний та $X$ — деяка множина, то $\alpha$-індексованою послідовністю елементів множини $X$ називається відображення з $\alpha$ в $X$. Введене так означення трансфінітної послідовності або послідовності, індексованої ординалами, є узагальненням поняття послідовності. Звичайну послідовність отримуємо у випадку $\alpha = \omega$.

### Властивості порядкових чисел (ординалів)

- Якщо $\alpha$ — порядкове число, то кожний елемент в $\alpha$ — порядкове число.
- Для довільних ординалів $\alpha, \beta$ виконується лише одне з таких співвідношень: $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta \in \alpha$
- Довільна множина порядкових чисел цілком впорядкована $\in$ (зокрема, довільне порядкове число, яке розглядається як множина, цілком впорядковано відношенням $\in$, при цьому $\bigcap x$ — найменший елемент множини $x$, $\bigcup x$ — порядкове число, більше або рівне довільному з елементів множини $x$. Вирази (висловлення) $\alpha < \beta$ і $\alpha \in \beta$ для порядкових чисел еквівалентні.
- Для довільної цілком впорядкованої множини $x$ існує єдине порядкове число, ізоморфне $x$ (зокрема, для довільної множини порядкових чисел існує єдине порядкове число, яке порядково ізоморфне цій множині).
- Довільне порядкове число $\alpha$ збігається з множиною всіх порядкових чисел, менших, за $\alpha$.
- Початковий сегмент довільного порядкового числа є порядковим числом.
- Порожня множина $\varnothing$ — найменше порядкове число (а отже, $\varnothing$ є елементом довільного іншого порядкового числа).
- Порядкове число $\alpha$ називається *неграничним*, якщо або воно дорівнює $\varnothing$, або існує безпосередній йому попередник $\beta < \alpha$, але між ними не можна вставити інше порядкове число $\beta < \gamma < \alpha$. В останньому випадку кажуть, що $\alpha$ — порядкове число, яке слідує за $\beta$, і записують це так: $\alpha = \beta \dotplus 1$ (інколи просто $\alpha = \beta + 1$, що виявляється узгодженим з позначенням для суми порядкових чисел).

- Порядкові числа, які не є неграничними, називаються *граничними* порядковими числами (інколи $\varnothing$ також відносять до граничних порядкових чисел).
- $\alpha \dotplus 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.
- Множина всіх скінченних порядкових чисел ізоморфна множині невід'ємних цілих чисел, и для них використовуються такі ж позначення, як і для цілих чисел. При цьому операції додавання, множення та піднесення до степеня для порядкових чисел переходять у відповідні операції для цілих чисел. Наведемо декілька перших порядкових чисел:

$$\begin{aligned}
&0 = \varnothing;\\
&1 = \{0\} = 0 \cup \{0\} = \{\varnothing\};\\
&2 = \{0, 1\} = 1 \cup \{1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\};\\
&3 = \{0, 1, 2\} = 2 \cup \{2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\};\\
&4 = \{0, 1, 2, 3\} = 3 \cup \{3\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\};\\
&\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots
\end{aligned}$$

- Множина всіх скінченних порядкових чисел позначається $\omega$. Вона є найменшим граничним порядковим числом і найменшим нескінченним (а саме зліченним) порядковим числом. Наступним за ним порядковим числом є $\omega \dotplus 1 = \omega \cup \{\omega\}$.
- Умову скінченності порядкового числа $\alpha$ можна записати як $\alpha < \omega$ або, що це ж саме, $\alpha \in \omega$.
- Існує нескінченна множина порядкових чисел, однак не існує множини всіх порядкових чисел. Іншими словами, сукупність усіх порядкових чисел є власне класом.
- Кожна множина порядкових чисел $A$ обмежена зверху та маж точну верхню грань, яка позначається $\sup A$. При цьому $A \subseteq \sup A$.
- Якщо $\alpha$ — граничне порядкове число або $\varnothing$, то $\sup \alpha = \alpha$, іншими словами $\sup \alpha < \alpha$.
- Точна верхня грань зліченної множини зліченних порядкових чисел зліченна.
- Кожне порядкове число $\alpha$ має єдине зображення в *нормальній формі Кантора*

$$\omega^{\beta_1} c_1 + \omega^{\beta_2} c_2 + \cdots + \omega^{\beta_k} c_k,$$

де $k \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{N}$, і $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_k \geq 0$ — порядкові числа. Форма дозволяє знаходити розклади схожі на такий

$$\omega^{\left(\omega^{\left(\omega^7 \cdot 16 + \omega + 412\right)} \cdot 122729 + \omega^9 + 818\right)} \cdot 3 + \omega^{(\omega^\omega)} \cdot 51 + 61235537.$$

**Визначення операцій на порядкових числах**

- Сума порядкових чисел рекурсивно визначається так:

$$\begin{aligned}
&\alpha + 0 = \alpha;\\
&\alpha + (\beta \dotplus 1) = (\alpha + \beta) \dotplus 1;\\
&\alpha + \gamma = \sup\{\alpha + \beta \mid \beta < \gamma\},
\end{aligned}$$

де третє правило застосовується ц випадку, коли $\gamma$ є граничним порядковим числом.

- Добуток порядкових чисел рекурсивно визначається так (у тих самих позначеннях):

$$\begin{aligned}&\alpha \cdot 0 = 0;\\&\alpha \cdot (\beta \dotplus 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha;\\&\alpha \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot \beta \mid \beta < \gamma\}.\end{aligned}$$

- Використовуючи ті ж позначення, визначимо операцію піднесення в степінь:

$$\begin{aligned}&\alpha^0 = 1;\\&\alpha^{\beta \dotplus 1} = \alpha^\beta \cdot \alpha;\\&\alpha^\gamma = \sup\{\alpha^\beta \mid \beta < \gamma\}.\end{aligned}$$

**Властивості операцій на порядкових числах**

- Додавання порядкових чисел — некомутативна операція; зокрема,

$$1 + \omega = \omega \neq \omega + 1.$$

- Додавання порядкових чисел — асоціативна операція: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$, а це дозволяє записувати суму декількох доданків без дужок.
- Сума зростає при зростанні правого доданка і не спадає при зростанні лівого доданка: з $\beta_1 > \beta_2$ випливає $\alpha + \beta_1 > \alpha + \beta_2$ і $\beta_1 + \alpha \geqslant \beta_2 + \alpha$.
- Якщо $\alpha \geqslant \beta$, то існує єдиний ординал $\gamma$, для якого $\beta + \gamma = \alpha$.
- Множення порядкових чисел — некомутативна операція; зокрема,

$$2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2.$$

- Множення порядкових чисел — асоціативна операція:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma,$$

  а це дозволяє записувати добуток декількох співмножників без дужок.
- Для додавання та множення виконується ліва дистрибутивність: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.
- $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.
- $\alpha + 1 = \alpha \dotplus 1$.
- $\alpha \in \omega \Longleftrightarrow \alpha + \omega = \omega$.
- $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$.
- $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$.
- $\alpha \in \omega \wedge \alpha \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha \cdot \omega = \omega$.
- $\alpha + \beta = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = 0$.
- $\alpha \cdot \beta = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$.
- $\alpha^0 = 1$.
- $\alpha^1 = \alpha$.
- $\alpha \neq 0 \Longleftrightarrow 0^\alpha = 0$.
- $1^\alpha = 1$.

- $\alpha \in \omega \wedge \alpha > 1 \Longleftrightarrow \alpha^{\omega} = \omega$.
- $\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$.
- $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.
- $\alpha > 1 \wedge \beta > \gamma \Longleftrightarrow \alpha^{\beta} > \alpha^{\gamma}$.
- $\beta \in \omega \Longrightarrow \alpha + \beta = \alpha \underbrace{\dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} \ldots \dot{+} 1}_{\beta}$.
- $\beta \in \omega \Longrightarrow \alpha \cdot \beta = 0 \underbrace{+ \alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{\beta}$.
- $\beta \in \omega \Longrightarrow \alpha^{\beta} = 1 \underbrace{\cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \cdots \cdot \alpha}_{\beta}$.
- У випадку скінченності аргументів додавання, множення та піднесення в степінь переходять у відповідні операції для цілих чисел (зі скінченними результатами).
- У випадку зліченності аргументів результати додавання, множення та піднесення до степіня також є зліченними.

Кожен елемент $a$ лінійно впорядкованої множини $(A, \leqslant)$ визначає початковий відрізок
$$H_a = \{x \in A \mid x < a\}.$$
Очевидно, що для довільного ординала $\alpha$ маємо, що $H_{\alpha} = [0, \alpha)$.

Будемо говорити, що для порядкових типів $\alpha$ і $\beta$ частково впорядкованих множин $A$ і $B$, відповідно, виконується нерівність:

1) $\alpha < \beta$, якщо частково впорядкована множина $A$ порядково ізоморфна деякому початковому відрізку $H$ частково впорядкованої множини $B$;
2) $\alpha > \beta$, якщо частково впорядкована множина $B$ порядково ізоморфна деякому початковому відрізку $H$ частково впорядкованої множини $A$.

З доведеної Цермелом теореми, яка еквівалентна аксіомі вибору та стверджує, що *кожну множину можна впорядкувати повним порядком*, випливає:

**Принцип трансфінітної індукції.** Якщо деяке твердження виконується для першого елемента цілком впорядкованої множини $X$, і якщо воно істинне для початкового відрізка $H_a \subset X$, який визначається елементом $a \in X$, то це твердження істинне для кожного елемента множини $X$.

У багатьох випадках трансфінітна індукція використовується разом з теоремою Цермело, яка стверджує, що будь-яку множину можна цілком впорядкувати. Теорема Цермело еквівалентна аксіомі вибору, тому доведення є неконструктивним.

Як приклад доведемо, що можна визначити деяку множину кіл таку, щоб через кожну точку площини проходило рівно два кола. Це твердження можна довести, побудувавши явну конструкцію. Однак для випадку трьох кіл явна конструкція досі не відома, тоді як доведення її існування мало чим відрізнятиметься від нижче наведеного.

Упорядкуємо всі точки множини так, щоб потужність множини точок, менших $x$ була менша, ніж континуум. Зауважимо, що можна довести, що будь-яку множину можна цілком впорядкувати так, щоб для будь-якого його елемента множини менших за нього мало меншу потужність. Як $P(x)$ візьмемо таке твердження: можна провести меншу, ніж континуальну множину різних кіл так, щоб кожна точка, яка є меншою або рівною $x$ була покрита рівно 2-ма колами, а всі інші точки були покритими не більше, ніж двома колами, а також для будь-якої точки $y < x$ цю множину можна вибрати такою, щоб вона містила множину кіл для точки $y$. Якщо $x$ — мінімальна точка, тоді візьмемо будь-які 2-а різні кола, які проходять через цю точку. Твердження $P(x)$ для мінімального $x$ доведено. Нехай тепер $x$ — будь-яка точка, і відомо, що твердження є вірним для будь-якого $y < x$. Візьмемо об'єднання множин кіл для всіх точок $y < x$. Згідно з припущенням індукції можна вважати, що множини кіл для більших точок включають множини кіл для менших точок, тому отримана множина буде покривати точки площини не більше двох разів. Оскільки множина елементів, які є менші ніж $x$, є меншою, ніж континуум, і кожна об'єднана множина менша, ніж континуум, тоді отримана множина також буде мати меншу потужність, ніж континуум. Побудована множина кіл вже вдвічі покриває всі точки, менші за $x$.

Покажемо тепер, як покрити точку $x$. Через точку $x$ проходить континуум кіл, які не перетинаються. Помітимо, що будь-яка пара кіл перетинається не більше, ніж в двох точках, а отже потужність множини точок площини, покритих 2 рази, менша, ніж континуум (тут використовується твердження, що множина $A \times A$ рівнопотужна множині $A$, якщо $A$ — нескінченна множина). Це означає, що існує континуум кіл, на яких немає точок, покритих 2 рази. Візьмемо з них одну або дві, в залежності від кількості кіл, що вже проходять через точку $x$. Твердження індукції доведено.

З принципу трансфінітної індукції випливає метод доведення теорем, який називається *методом математичної індукції*.

Доведення за допомогою математичної індукції твердження, що формула $P(n)$ істинна для довільного натурального числа $n$, складається з двох кроків:

**1.** ***Базис індукції.*** Довести, що твердження $P(1)$ істинне.

**2.** ***Крок індукції.*** Довести, що імплікація $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ істинна для кожного натурального числа $n$.

Тут формулу $P(n)$ називають *гіпотезою індукції*. Завершення обох кроків математичної індукції доводить, що формула $P(n)$ істинна для всіх натуральних чисел $n$, тобто формула $\forall n P(n)$ істинна.

Таку техніку доведення теорем можна подати як таке правило виведення, яке ґрунтується на тавтології:

$$[P(1) \wedge \forall n\,(P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n P(n).$$

В іншому варіанті математичної індукції в кроці індукції припускають, що твердження $P(k)$ істинне для $k = 1, 2, \ldots, n-1$ і доводять, що твердження $P(n)$ має бути істинним у цьому припущенні.

**1.** ***Базис індукції.*** Довести, що твердження $P(1)$ істинне.

**2. *Крок індукції.*** Довести, що імплікація

$$[P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(n-1)] \Rightarrow P(n)$$

істинна для кожного натурального числа $n$.

З методом трансфінітної (математичної) індукції тісно пов'язані так звані **теореми існування**. Багато теорем стверджують про існування певного об'єкта. Теореми такого типу можна подати у вигляді $\exists x P(x)$, де $P$ — предикат. Доведення теореми у формі $\exists x P(x)$ називають *доведенням існування*. Є різні способи доведення теорем цього типу. Іноді довести існування можна знайшовши такий елемент $a$, що твердження $P(a)$ істинне. Таке доведення існування називається *конструктивним*. Часто використовують також *неконструктивне* доведення існування. У цьому випадку не шукають такий елемент $a$, що твердження $P(a)$ істинне, а доводять, що $\exists x P(x)$ істинне іншим способом. Загальний метод доведення існування — доведення від протилежного, а саме в цьому випадку доводять, що припущення

$$\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$$

призводить до суперечності.

## 1.10 Зростання функцій. Оцінки складності алгоритмів

Характеристики зростання функцій використовуються в теоретичній інформатиці для оцінювання часової складності алгоритмів. Для спрощення викладу під *алгоритмом* ми будемо розуміти сукупність правил для розв'язування певного класу задач, які відрізняються початковими даними. Початкові дані — це вхідна інформація або вхідні дані для алгоритму. Оскільки час виконання алгоритму залежить від розміру початкових даних, то його можна визначити як функцію від обсягу вхідної інформації. Це добре ілюструють задачі сортування. У цих задачах вхідні дані — це список елементів, які підлягають сортуванню, а результат — ті самі елементи, відсортовані в порядку зростання, чи спадання. Наприклад, вхідний список

$$4, 14, 8, 1, 6, 1, 13, 11, 4$$

у випадку сортування за зростанням, буде перетворено у вихідний список

$$1, 1, 4, 4, 6, 8, 11, 13, 14.$$

Як міру обсягу вхідної інформації для алгоритму сортування природно вибирати кількість елементів, які підлягають сортуванню, або, іншими словами, довжину вхідного списку. Загалом довжина вхідних даних — придатна міра їхнього об'єму.

Як синонім терміну "вхідні дані" часто використовують термін "входи". Означимо *часову складність алгоритму*, яку подальше будемо просто називати *складністю алгоритму*, як функцію $f$, яка ставить у відповідність кожному невід'ємному цілому числу $n$ час роботи $f(n)$ алгоритму в найгіршому випадку на входах довжини $n$. Іншими словами, $f(n)$ — максимальний час роботи алгоритму по всіх входах довжини $n$. Довжина входу, як вже було сказано, характеризує розмір задачі. Час роботи алгоритму вимірюють у кроках (операціях), що виконується на ідеалізованому комп'ютері.

Аналіз ефективності алгоритмів полягає в з'ясуванні такого питання: ***як швидко зростає функція*** $f(n)$ ***зі збільшенням числа*** $n$***?*** Для порівняння швидкості зростання двох функцій $f(n)$ і $g(n)$ використовують таке поняття.

Нехай $f$ і $g$ — функції з множини цілих чисел $\mathbb{Z}$ (чи з множини дійсних чисел $\mathbb{R}$) в множину дійсних чисел $\mathbb{R}$. Будемо писати, що

$$f(x) = O(g(x)),$$

якщо існують такі сталі $C$ і $k$, що

$$|f(x)| \leqslant C \cdot |g(x)|, \qquad \text{для всіх} \quad x > k.$$

У цьому випадку пишуть також, що $f(x) \in O(g(x))$ і читають "$f(x)$ *є о-велике від* $g(x)$", і називають *O-оцінкою*.

У випадку використання поняття $O(g(x))$ функцію $g$ у співвідношенні $f(x) = O(g(x))$ вибирають настільки малою (у розумінні повільного зростання), настільки це можливо. Здебільшого функцію $g$ вибирають з множини функцій, які вважаються еталонними, як, наприклад, $x^m$, де $m \in \mathbb{N}$, чи $\log x$.

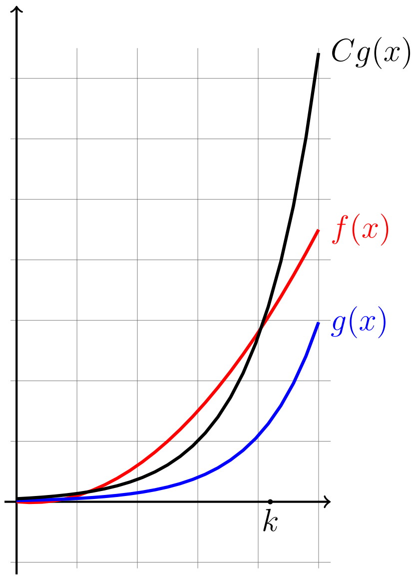



Рис. 1.12: Ілюстрація оцінки $f(x) = O(g(x))$

У подальшому ми майже завжди будемо мати справу з додатно визначеними функціями. Всі позначення абсолютних величин в оцінках для таких функцій можна опустити. На рис. 1.12 проілюстровано співвідношення $f(x) = O(g(x))$.

**Приклад 1.10.1.** Знайдіть оцінку для функцій

$$f_1(n) = n! \qquad \text{і} \qquad f_2(n) = \log n!,$$

де $n$ — натуральне число.

***Розв'язок***. Очевидно, що

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \leqslant \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{n-\text{разів}} = n^n.$$

З цієї нерівності випливає, що

$$n! = O(n^n).$$

Взявши логарифм від обох частин нерівності $n! \leqslant n^n$, отримуємо

$$\log n! \leqslant \log n^n = n \log n,$$

звідки випливає, що

$$\log n! = O(n \log n).$$

**Теорема 1.10.2.** *Нехай $f_1(x) = O(g_1(x))$ і $f_2(x) = O(g_2(x))$. Тоді*

$$f_1(x) + f_2(x) = O(g(x)),$$

*де $g(x) = \max\{g_1(x), g_2(x)\}$.*

*Доведення.* Якщо $f_1(x) = O(g_1(x))$ і $f_2(x) = O(g_2(x))$, то існують такі сталі $C_1$, $C_2$, $k_1$ і $k_2$, що

$$|f_1(x)| \leqslant C_1 \cdot |g_1(x)|, \qquad \text{якщо } x > k_1$$

і

$$|f_2(x)| \leqslant C_2 \cdot |g_2(x)|, \qquad \text{якщо } x > k_2.$$

Тоді, очевидно, що

$$|f_1(x)| \leqslant C_1 \cdot |g_1(x)| \qquad \text{і} \qquad |f_2(x)| \leqslant C_2 \cdot |g_2(x)| \qquad \text{для } x > k,$$

де $k = \max\{k_1, k_2\}$. Отже, для $x > k$ маємо

$$\begin{aligned} |f_1(x) + f_2(x)| &\leqslant |f_1(x)| + |f_2(x)| \leqslant \\ &\leqslant C_1 \cdot |g_1(x)| + C_2 \cdot |g_2(x)| \leqslant \\ &\leqslant C_1 \cdot |g(x)| + C_2 \cdot |g(x)| \leqslant \\ &\leqslant (C_1 + C_2) \cdot |g(x)| = \\ &= C \cdot |g(x)|, \end{aligned}$$

де $g(x) = \max\{g_1(x), g_2(x)\}$ і $C = C_1 + C_2$.

Отож,

$$|f_1(x) + f_2(x)| \leqslant C \cdot |g(x)| \qquad \text{для} \quad x > k = \max\{k_1, k_2\},$$

що і треба було довести. □

**Теорема 1.10.3.** *Нехай $f_1(x) = O(g_1(x))$ і $f_2(x) = O(g_2(x))$. Тоді*

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = O(g(x)),$$

*де $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$.*

*Доведення.* Якщо $f_1(x) = O(g_1(x))$ і $f_2(x) = O(g_2(x))$, то існують такі сталі $C_1$, $C_2$, $k_1$ і $k_2$, що

$$|f_1(x) \leqslant C_1 \cdot |g_1(x)|, \qquad \text{якщо } x > k_1$$

і

$$|f_2(x) \leqslant C_2 \cdot |g_2(x)|, \qquad \text{якщо } x > k_2.$$

Тоді, очевидно, що

$$|f_1(x) \leqslant C_1 \cdot |g_1(x)| \qquad \text{і} \qquad |f_2(x) \leqslant C_2 \cdot |g_2(x)| \qquad \text{для } x > k,$$

де $k = \max\{k_1, k_2\}$. Отже, для $x > k$ маємо

$$\begin{aligned} |f_1(x) \cdot f_2(x)| &\leqslant |f_1(x)| \cdot |f_2(x)| \leqslant \\ &\leqslant C_1 \cdot |g_1(x)| \cdot C_2 \cdot |g_2(x)| \leqslant \\ &\leqslant C_1 \cdot C_2 \cdot |g(x)| = \\ &= C \cdot |g(x)|, \end{aligned}$$

де $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$ і $C = C_1 \cdot C_2$. Отож,

$$|f_1(x) \cdot f_2(x)| \leqslant C \cdot |g(x)| \qquad \text{для} \quad x > k = \max\{k_1, k_2\},$$

що і треба було довести. □

**Приклад 1.10.4.** Знайдіть оцінку для функції

$$f(n) = 5n\log(n!) + (n^3 + 2n^2 + 3)\log n,$$

де $n$ — натуральне число.

***Розв'язок***. Оцінимо спочатку функцію $5n\log(n!)$. З виведеної в прикладі 1.10.1 оцінки функції $\log n!$ маємо

$$\log n! = O(n\log n).$$

Беручи до уваги цю оцінку і той факт, що

$$5n = O(n),$$

з теореми 1.10.3 випливає, що

$$5n\log(n!) = O(n^2\log n).$$

Оцінимо тепер функцію $(n^3 + 2n^2 + 3)\log n$. Оскільки

$$n^3 + 2n^2 + 3 < 3n^3 \qquad \text{для} \quad n > 3,$$

то маємо, що

$$n^3 + 2n^2 + 3 = O(n^3).$$

З теореми 1.10.3 випливає, що

$$(n^3 + 2n^2 + 3)\log n = O(n^3\log n).$$

Використавши теорему 1.10.2, остаточно отримуємо

$$\begin{aligned} f(n) &= 5n\log(n!) + (n^3 + 2n^2 + 3)\log n = \\ &= O\left(\max\left\{n^2\log n, n^3\log n\right\}\right) = \\ &= O(n^3\log n). \end{aligned}$$

Поліноми часто використовуються для оцінок зростання функцій. Наведемо твердження, яке завжди можна використати для оцінки зростання полінома.

**Теорема 1.10.5.** *Нехай*

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

*де* $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0$ *— дійсні числа. Тоді*

$$p(x) = O(x^m).$$

*Доведення.* Враховуючи нерівність, що модуль суми не перевищує суми модулів дійсних чисел, то маємо

$$\begin{aligned} |p(x)| &= \left|a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right| \leqslant \\ &\leqslant |a_m|x^m + |a_{m-1}|x^{m-1} + \cdots + |a_1|x + |a_0| = \\ &= x^m\left(|a_m| + \frac{|a_{m-1}|}{x} + \cdots + \frac{|a_1|}{x^{m-1}} + \frac{|a_0|}{x^m}\right) \leqslant \\ &\leqslant x^m\left(|a_m| + |a_{m-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|\right) \end{aligned}$$

для $x > 1$. Звідси випливає, що

$$|p(x)| \leqslant Cx^m,$$

де $C = |a_m| + |a_{m-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$ і $x > 1$. Отже, ми довели, що для поліному $p(x)$ виконується оцінка $p(x) = O(x^m)$. □

Вираз "складність алгоритму є (відп., дорівнює, складає) $O(g(n))$" означає, що функцією $f(n)$, яка визначає складність алгоритму, є $O(g(n))$. Тут $n$ — довжина входу. Як еталони оцінок складності алгоритмів використовують такі функції:

$$1,\ \log n,\ n,\ n\log n,\ n^2,\ n^3,\ n^4,\ 2^n,\ n!.$$

Ці функції ми записали в порядку зростання складності.

Зокрема, складність $O(1)$ означає, що час роботи відповідного алгоритму не залежить від довжини входу. Алгоритм зі складністю $O(n)$ називають *лінійним*. Такий алгоритм для переважної більшості задач є найкращим (за порядком) щодо складності.

Алгоритм, складність якого дорівнює $O(p(n))$, де $p(n)$ — деякий поліном, називають *поліноміальним*. Часто замість $O(p(n))$ пишуть $O(n^m)$, де $m$ — стала. Особливу роль поліноміальних алгоритмів ми опише далі. Поняття "поліноміальний алгоритм" тепер є найпоширенішою формалізацією поняття "ефективний алгоритм". Зауважимо, що всі задачі дискретної математики, які вважаються важкими для алгоритмічного розв'язування, на даний час не мають поліноміальних алгоритмів.

Задача в дискретній математиці називається *важкорозв'язуваною*, якщо для її розв'язку не існує поліноміального алгоритму. Алгоритми, часова складність яких не піддається подібній оцінці, називаються *експоненціальними*. Більшість експоненціальних алгоритмів — це просто варіанти "повного перебору", тоді як поліноміальні алгоритми здебільшого можна побудувати лише в тому випадку, коли можна заглибитися в сутність задачі.

**Вправа 1.10.1.** Нехай $F(x)$, $g(x)$ і $h(x)$ — такі функції, що $f(x) = O(g(x))$ і $g(x) = O(h(X))$. Доведіть, що $f(x) = O(h(x))$.

**Вправа 1.10.2.** Для довільного натурального числа $k$ доведіть оцінку

$$1^n + 2^n + \ldots + n^k = O(n^{k+1}).$$

**Вправа 1.10.3.** Для наведених нижче функцій дайте найкращу $O$-оцінку, наскільки це можливо:

1) $(n^2 + 8)(n + 12)$;
2) $(n\log n + n^2)(n^2 + 3)$;
3) $(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2 + 21))$.

# Розділ 2

# Комбінаторика

## 2.1 Обчислення потужності об'єднання скінченних множин

Якщо $A$ і $B$ — скінченні диз'юнктні множини, то потужність (кількість елементів) їхнього об'єднання дорівнює сумі потужностей цих множин, тобто

$$|A \sqcup B| = |A| + |B|. \tag{2.1}$$

У загальному випадку, якщо $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ — скінченна сім'я диз'юнктних скінченних множин, то формула (2.1) набуде вигляду

$$\left| \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| \,. \tag{2.2}$$

Якщо $A$ і $B$ — скінченні множини, то очевидно, що

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{2.3}$$

У загальному випадку, якщо $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ — скінченна сім'я скінченних множин, то формула (2.3) набуде вигляду

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| - \\ - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n| + \\ + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| - \\ - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \end{aligned} \tag{2.4}$$

або

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} \left( (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \right).$$

**Вправа 2.1.1.** У скінченній множині $A$ задано підмножини $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Відомо потужності кожної з них, а також потужності їхніх перетинів по 2, по 3, і т.д. Скільки елементів множини $A$ не належить жодній з множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$?

**Вправа 2.1.2.** Нехай підмножини $A_1, A_2, \ldots, A_n$ множини $A$ з вправи 2.1.1 розташовані симетрично, а саме:

$$\begin{aligned}
&|A_1| = |A_2| = \cdots = |A_n| = p_1,\\
&|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = \cdots = |A_{n-1} \cap A_n| = p_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| = p_n.
\end{aligned}$$

Скільки елементів множини $A$ не належить жодній з множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$?

**Приклад 2.1.1.** Вибори голови студентського самоврядування відбуваються так: у бюлетень внесено три кандидати $X$, $Y$ і $Z$ та потрібно викреслити кандидата, чи кандидатів. Перемагає той, за кого віддано найбільшу кількість голосів. Після голосування 950-ма розданими бюлетенями виявилося, що 160 студентів проголосувало лише за кандидата $X$, 140 – лише за $Y$, 200 — лише за $Z$. Бюлетені з одним викресленим кандидатом розподілилися так:

- 90 – і за $X$, і за $Y$;
- 40 – і за $Y$, і за $Z$;
- 60 – і за $X$, і за $Z$.

За всіх трьох кандидатів проголосувало 200 студентів. Зіпсованих бюлетенів не було. Хто з кандидатів переміг? Скільки студентів не проголосували за жодного кандидата?

***Розв'язок.*** Використаємо позначення $X$, $Y$ і $Z$ для множини студентів, які підтримують кандидатів $X$, $Y$ і $Z$, відповідно. Схематично це зобразимо на рис. 2.1.

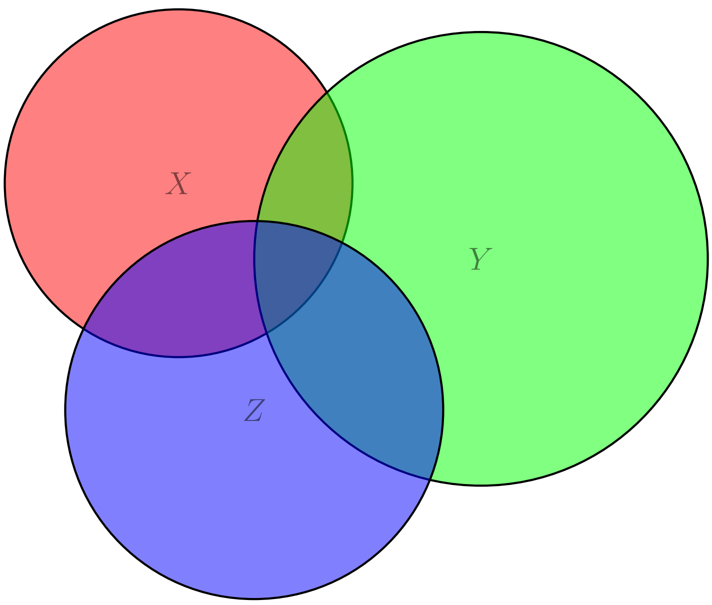



Рис. 2.1: До прикладу 2.1.1

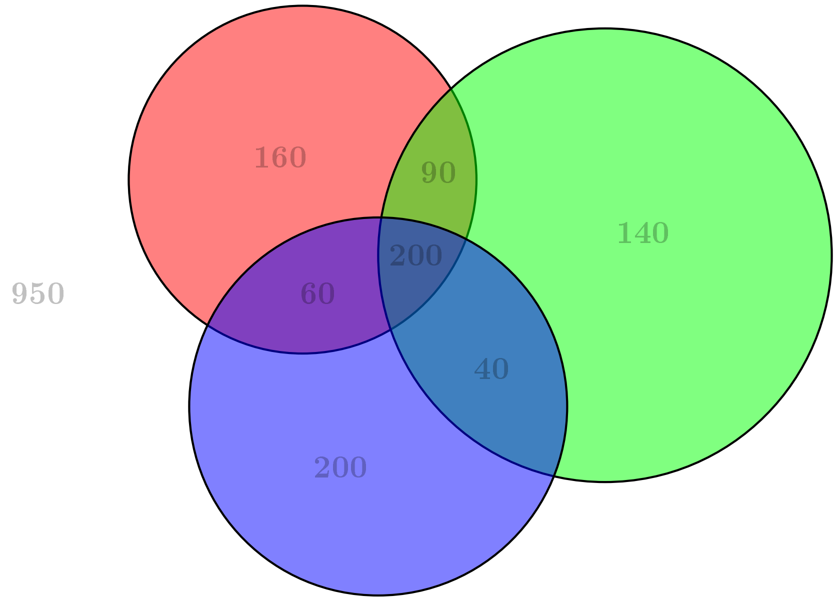



Рис. 2.2: До прикладу 2.1.1

Далі внесемо умови задачі на рис. 2.2.

Залишилося порахувати:

$$|X| = 160 + 90 + 60 + 200 = 510,$$
$$|Y| = 140 + 90 + 40 + 200 = 470,$$
$$|Z| = 200 + 60 + 40 + 200 = 500.$$

Отже, переміг кандидат $X$. Тоді кількість студентів, які не підтримали жодного кандидата:

$$950 - (200 + 160 + 140 + 60 + 90 + 40 + 200) = 60.$$

**Вправа 2.1.3.** Кожен співробітник механіко-математичного факультету володіє хоча б однією іноземною мовою. 126 осіб володіє англійською, 28 — німецькою, а 13 — французькою. Відомо також, що 13 осіб володіє більше ніж однією іноземною мовою, а один із них — всіма трьома. Одна особа володіє іспанською, і більше ніхто нею не володіє. Скільки співробітників на факультеті?

**Вправа 2.1.4.** Доведіть, що кількість натуральних чисел, які не перевищують 1000 і діляться на натуральне число $n$ дорівнює $\left[\dfrac{1000}{n}\right]$.

**Вправа 2.1.5.** Скільки існує натуральних чисел, які не перевищують 1000 і не діляться ні на 2, ні на 3, ні на 5.

**Вправа 2.1.6.** Скільки існує натуральних чисел, які не перевищують 1000 і не діляться ні на 6, ні на 10, ні на 15.

**Вправа 2.1.7.** Скільки існує простих чисел, які не перевищують 100?

**Вправа 2.1.8.** Скільки існує простих чисел, які не перевищують 200?

Формулу (2.4) також можна подати у вигляді *формули включень і виключень*. Нехай маємо $N$ елементів і $n$ властивостей $P(1), P(2), \dots, P(n)$. Позначимо через $N_i$ — кількість елементів, які задовольняють властивість $P(i)$, через $N_{i,j}$ — кількість елементів, які задовольняють одночасно властивості $P(i)$ і $P(j)$; і в загальному випадку, через $N_{i_1,i_2,\dots,i_k}$, $k \leqslant n$, — кількість елементів, які задовольняють одночасно властивості $P(i_1), P(i_2), \dots, P(i_k)$. Нехай $N(0)$ — кількість елементів, які не задовольняють жодну з перелічених властивостей $P(1), P(2), \dots, P(n)$. *Формула включень і виключень* виглядає так:

$$\begin{aligned} N(0) = N - \sum_i N_i + \sum_{i_1<i_2} N_{i_1,i_2} - \sum_{i_1<i_2<i_3} N_{i_1,i_2,i_3} + \dots + \\ + (-1)^k \sum_{i_1<i_2<\dots<i_k} N_{i_1,i_2,\dots,i_k} + (-1)^n N_{1,2,\dots,n}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Для доведення формули включень і виключень через $A_i$ позначимо множину елементів, які задовольняють властивість $P(i)$. Тоді маємо, що

$$\begin{aligned} N_i &= |A_i|, \\ N_{i,j} &= |A_i \cap A_j|, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ N_{i_1,i_2,\dots,i_k} &= |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|. \end{aligned}$$

Далі застосуємо формулу (2.4).

**Приклад 2.1.2 (задача про безлад).** Скільки існує перестановок скінченної множини натуральних чисел $\{1, 2, \dots, m\}$, які жодне з чисел не залишають на своєму місці?

***Розв'язок.*** Позначимо через $N_i$ множину таких перестановок, які не рухають число $i$. Очевидно, що $|N_i| = (m-1)!$. Через $N_{i,j}$ позначимо множину перестановок, які не рухають числа $i$ та $j$. Тоді $|N_{i,j}| = (m-2)!$. І нарешті через $N_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ позначимо множину перестановок, які не рухають числа $i_1, i_2, \dots, i_k$. Очевидно, що $|N_{i_1,i_2,\dots,i_k}| = (m-k)!$. Тоді за формулою включень і виключень (2.5) кількість перестановок скінченної множини натуральних чисел $\{1, 2, \dots, m\}$, які жодне з чисел не залишають на своєму місці дорівнює

$$\begin{aligned} D_n = m! - C_m^1(m-1)! + C_m^2(m-2)! + \dots + (-1)^m C_m^m = \\ = m!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^m \frac{1}{m!}\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

**Вправа 2.1.9.** Скільки існує перестановок скінченної множини натуральних чисел $\{1, 2, \dots, m\}$, які рівно $r$ чисел залишають на своєму місці?

## 2.2 Основні правила комбінаторики

Далі ми надамо формулі (2.1) справжнього "комбінаторного" змісту:

*Якщо треба вибрати один елемент з двох множини $A$ чи $B$, які не перетинаються, причому в множині $A$ є $m$ елементів, а в множині $B$ — $n$ елементів, то це можна зробити $m + n$ способами.*

У комбінаториці це називається *правилом суми*.

*Якщо вибір елемента $a_1$ можна зробити $n_1$ способом, вибір елемента $a_2$ незалежно від вибору елемента $a_1$ можна зробити $n_2$ способами і т.д., вибір елемента $a_k$ незалежно від вибору елементів $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ можна зробити $n_k$ способами, то вибір одного з цих елементів можна зробити $n_1+n_2+\ldots+n_k$ способами.*

Нагадаємо, якщо множина $A$ складається з $m$ елементів, а множина $B$ — з $n$, то їхній декартовий добуток має $m \cdot n$ елементів. На цій формулі ґрунтується друге основне правило комбінаторики — *правило добутку*.

*Якщо вибір елемента $a_1$ можна зробити $m_1$ способом, і при кожному з цих способів інший незалежний вибір елемента $a_2$ можна зробити $m_2$ способами, і для всіх таких способів вибір елемента $a_3$ можна зробити $m_3$ способами незалежно від попередніх виборів, і т.д., а останній вибір елемента $a_k$ незалежно від вибору елементів $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ можна зробити $m_k$ способами, то вибори елементів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ можна зробити $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ способами.*

**Приклад 2.2.1.** Карта шляхів з пункту $A$ в пункт $B$ зображена на рис. 2.3. Скіль-

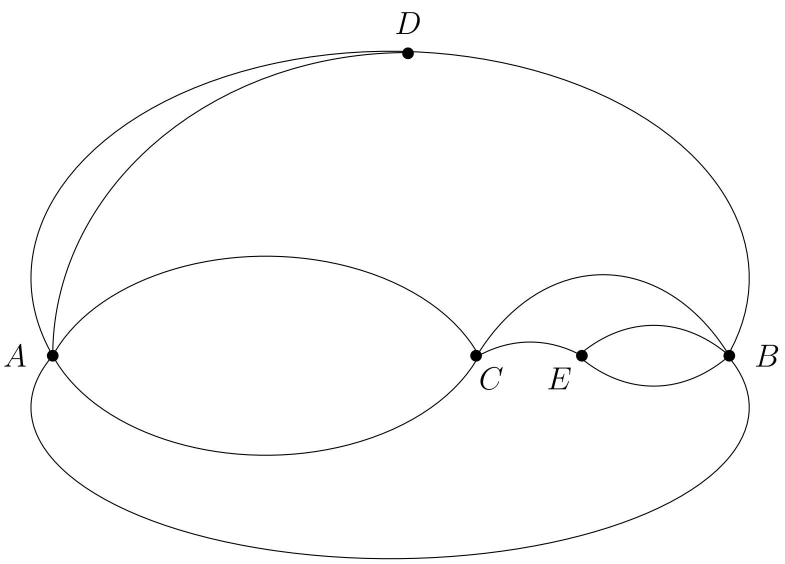



Рис. 2.3: До прикладу 2.2.1

кома способами можна дістатися з пункту $A$ в пункт $B$, не проходячи двічі через один і той самий пункт на карті?

***Розв'язок.*** Усі шляхи поділяються на три типи: безпосередньо з $A$ в $B$, не заїжджаючи в інші пункти (1 спосіб), через пункт $C$ і через пункт $D$. З пункту $A$ в пункт $C$ ведуть 2 шляхи, з пункту $C$ в пункт $B$ — 3 шляхи (один прямий та два через пункт $E$). За правилами суми та добутку маємо

$$2 \cdot (1 + 2) = 6$$

різних шляхів через пункт $C$. Аналогічно є 2 шляхи з $A$ в $B$ через пункт $D$. За правилом суми отримуємо

$$1 + 6 + 2 = 9$$

різних способів добратися з пункту $A$ в пункт $B$.

Нижченаведені вправи можна розв'язувати безпосередньо за допомогою правил суми та добутку, хоча розв'язок деяких з них стане зрозумілішим після прочитання наступних лекцій.

**Вправа 2.2.1.** З пункту $A$ в пункт $B$ веде 5 різних шляхів. Скількома різними способами можна потрапити з пункту $A$ в пункт $B$ і повернутися назад? Як зміниться відповідь, якщо повертатися з пункту $B$ треба іншим шляхом?

**Вправа 2.2.2.** Хлопчик іде до школи або через парк, або повз озеро. Через парк ведуть три різні стежки, з дому до озера — дві стежки, а від озера до школи — чотири. Скількома різними шляхами хлопчик може дійти до школи?

**Вправа 2.2.3.** Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3 і 4? Як зміниться відповідь, якщо цифри не можуть повторюватися?

**Вправа 2.2.4.** Скільки всіх п'ятизначних чисел у десятковій системі числення?

**Вправа 2.2.5.** Скільки всіх тризначних чисел у десятковій системі числення, якщо всі цифри парні? Скільки всіх тризначних чисел у десятковій системі числення, якщо всі цифри непарні?

**Вправа 2.2.6.** Скільки всіх двозначних чисел, які можна записати за допомогою цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6$ і які діляться на 3?

**Вправа 2.2.7.** На колі задано $n$ різних точок. Скільки різних хорд можна через низ провести?

**Вправа 2.2.8.** Скільки діагоналей має опуклий $n$-кутник?

**Вправа 2.2.9.** Скільки різних чотирицифорових чисел можна записати, використовуючи цифри $0, 1, 2$?

**Вправа 2.2.10.** Скільки існує поліномів $n$-го степеня з коефіцієнтами $0, 1, 2$?

**Вправа 2.2.11.** Скількома способами можна вибрати на шаховій дошці два квадрати:

($a$) білий та чорний;
($b$) два чорні;
($c$) два квадрати довільного кольору.

**Вправа 2.2.12.** Скільки всіх підмножин має $n$-елементна множина?

# 2.3 Основні комбінаторні співвідношення

## 2.3.1 Означення

Набір елементів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ з $n$-елементної множини

$$U = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

називається *$k$-вибіркою з $n$ елементів*. Якщо множина $U$ впорядкована, то вибірка також називається *впорядкованою*. Якщо дві впорядковані вибірки відрізняються лише порядком елементів, то це різні вибірки. У випадку невпорядкованих вибірок це однакові вибірки.

Елементи у вибірках можуть повторюватися, а можуть і не повторюватися. Якщо елементи у вибірці не повторюються, то невпорядкована $k$-вибірка з $n$ елементів називається *комбінацією з $n$ елементів по $k$*, і кількість усіх таких комбінацій для фіксованої множини $U$ позначається через $C_n^k$. Зокрема, якщо $k = n$, то такі вибірки з $n$ елементів називаються *перестановками з $n$ елементів*. Кількість усіх перестановок множини з $n$ елементів позначається через $P_n$. Впорядкована $k$-вибірка називається *розміщенням з $n$ елементів по $k$*, і кількість усіх таких розміщень позначається через $A_n^k$.

Якщо елементи у вибірках повторюються, то невпорядкована $k$-вибірка з $n$ елементів називається *комбінацією з повтореннями з $n$ елементів по $k$*, а кількість усіх таких комбінацій позначається через $\overline{C}_n^k$. Впорядкована $k$-вибірка з $n$ елементів з повторенням називається *розміщенням з повторенням з $n$ елементів по $k$*, а кількість усіх таких розміщень будемо позначати через $\overline{A}_n^k$.

Використовуючи правила суми та добутку виведемо основні комбінаторні формули. Найлегше виводиться кількість впорядкованих вибірок з повторенням з $n$ елементів по $k$. Позаяк кожен член вибірки незалежно від інших може бути вибраним $n$ способами, то

$$\overline{A}_n^k = n^k. \tag{2.7}$$

Обчислимо тепер впорядковані вибірки без повторень. Перший елемент можна вибрати $n$ способами. На кожен фіксований вибір першого елемента для вибору другого елемента залишається вже $n-1$ спосіб, а коли ж і другий елемент вже вибрано, то залишається вже $n-2$ способи для вибору третього елемента і т.д., для вибору $k$-го елемента залишається лише $n-k+1$ спосіб. Тому

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{2.8}$$

Зокрема, якщо $n = k$, то

$$A_n^n = n!,$$

тобто для кількості всіх перестановок $n$ елементів маємо:

$$P_n = n!. \tag{2.9}$$

Нехай маємо деяку невпорядковану вибірку з $n$ елементів по $k$. Отримати з неї всі впорядковані вибірки можна $k!$ способами. Тому

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k,$$

або

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{2.10}$$

Доцільно прийняти $C_n^k = 0$ при $k < 0$ та $k > n$.

Обчислення кількості всіх комбінацій з повтореннями дещо складніше. Кожній невпорядкованій вибірці з повтореннями з $n$ елементів по $k$ ставимо у відповідність такий вектор:

> спочатку йде стільки одиниць, скільки разів перший елемент входить у вибірку, далі цифра 0, далі стільки одиниць, скільки другий елемент входить у вибірку, потім знову 0, і т.д., після останнього нуля йде стільки одиниць, скільки $n$-ий елемент входить у вибірку.

В сукупності одиниць буде $k$, нулів, які відокремлюють ці одиниці буде $n-1$, тобто маємо вектор довжини $n+k-1$. Навпаки, кожному вектору довжини $n+k-1$ з $k$ одиниць і $n-1$ нуля за описаним вище правилом ставимо у відповідність невпорядковану вибірку з повторенням. Але всіх таких векторів є $C_{n+k-1}^k$. Тому

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \tag{2.11}$$

Зауважимо, що наведена формула має комбінаторний зміст і при $k > n$.

Залишається обчислити кількість перестановок з $n$ елементів, серед яких є $k$ типів різних елементів: $n_1$ елемент першого типу, $n_2$ елемент другого типу, і т.д., $n_k$ елемент $k$-ого типу, разом їх є $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Неважко побачити, що кількість таких перестановок обчислюється за формулою

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}. \tag{2.12}$$

Зауважимо, що нижній індекс $n$ у $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ можна опускати, оскільки жодної додаткової інформації він не містить.

## 2.3.2 Моделі

Для того щоб було легше розв'язувати комбінаторні задачі, ми пропонуємо дві різні моделі для введених комбінаторних понять. Кожна модель є насправді розв'язною задачею.

#### Літери та слова

Нехай ми маємо деякий набір різних символів – назвемо їх *літерами*. Довільну послідовність літер будемо називати *словом*, а кількість літер у слові — це *довжина слова*.

1. Нехай маємо $n$ різних літер, по одному екземплярові кожної (наприклад, літери написані на кубиках). Тоді $P_n$ — це кількість слів довжини $n$, які можна скласти з цих літер (кількість різних перестановок кубиків)

2. Нехай маємо $n$ різних літер, по одному екземплярові кожної. Тоді $A_n^k$ — це кількість слів довжини $k$, які можна скласти з цих літер.

3. Нехай ми маємо літери лише двох типів (наприклад символи нуль 0 і одиниця 1), але достатньо багато символів кожного типу. Тоді $C_n^k$ — це кількість слів довжини $n$, у яких рівно $k$ символів першого типу та $(n-k)$ символів другого типу (або кількість послідовностей довжини $n$, у яких $k$ одиниць і $(n-k)$ нулів).

4. Нехай маємо літери $k$ типів і достатньо багато літер кожного типу. Тоді $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ — це кількість слів, в яких рівно $n_j$ літер $j$-го типу, $j = 1, \ldots, n$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

5. Нехай маємо літери $k$ типів і достатньо багато літер кожного типу. Тоді $\overline{A}_n^k$ — це кількість слів довжини $n$, які можна скласти з цих літер.

6. Така модель не дає доброї інтерпретації для комбінації з повторенням $\overline{C}_n^k$ з $n$ елементів по $k$, якщо не брати до уваги, що $\overline{C}_n^k$ — це кількість послідовностей довжини $(n+k-1)$, з яких рівно $k$ одиниць і $(n-1)$ нуль.

**Предмети та ящики**

1. Маємо $n$ різних предметів і $n$ різних ящиків (наприклад ящики пронумеровані). Тоді $P_n$ — це кількість різних способів розкласти предмети у ящики, по одному в кожен.

2. Маємо $k$ різних предметів і $n$ різних ящиків ($n \geqslant k$). Тоді $A_n^k$ — це кількість способів розкласти предмети в ящики по одному в кожен (очевидно, що не всі предмети будуть розкладені при $k > n$).

3. Нехай маємо $n$ різних предметів і $k$ різних ящиків, причому кожен ящик може містити і всі предмети. Тоді $\overline{A}_n^k$ — це кількість способів розкласти ці предмети в ці ящики без жодних обмежень.

4. Маємо $n$ різних предметів і $k$ різних ящиків (предмети приблизно однакові за розміром). Відомо, що перший ящик вміщує $n_1$ предмет, другий ящик вміщує $n_2$ предмети, і т.д., $k$-ий ящик вміщує $n_k$ предметів ($n_1+n_2+\ldots+n_k = n$). Тоді $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ — це кількість різних розміщень предметів у ці ящики.

5. Маємо $n$ різних предметів і 2 різні ящики, причому перший вміщує $k$ предметів, а другий — $(n-k)$ предметів. Тоді $C_n^k$ — це кількість різних розміщень предметів у ці ящики.

6. Нехай є $n$ різних ящиків і $k$ однакових предметів ($k \leqslant n$). Тоді $C_n^k$ — це кількість різних розміщень $k$ предметів у ці $n$ ящики, по одному в кожен.

7. Нехай є $n$ різних ящиків і $k$ однакових предметів, причому кожен ящик може вмістити також всі ці предмети. Тоді $\overline{C}_n^k$ — це кількість різних розміщень цих $k$ предметів у ці $n$ ящики.

### 2.3.3 Перестановки

$$\boxed{P_n = n!}$$

Нагадаємо моделі для перестановок (див. підрозділ 2.3.2):

1. Нехай маємо $n$ різних літер, по одному екземплярові кожної (наприклад, літери написані на кубиках). Тоді $P_n$ — це кількість слів довжини $n$, які можна скласти з цих літер (кількість різних перестановок кубиків).

2. Маємо $n$ різних предметів і $n$ різних ящиків (наприклад ящики пронумеровані). Тоді $P_n$ — це кількість різних способів розкласти предмети у ящики, по одному в кожен.

Якщо ми маємо $n$-елементну множину $A$, то переставляти її елементи можна

$$P_n = n!$$

способами. У цьому випадку уявляємо собі, що на деякому відрізку є $n$ пронумерованих місць, які саме мають зайняти елементи множини $A$.

Нехай тепер у множині $A$ виокремлена фіксована $k$-елементна підмножина $B$ ($k < n$). Скількома способами можна переставити її елементи так, щоб елементи множини $B$ стояли поряд? Елементи множини $B$ можна переставляти $k!$ способами. Уявімо всю множину $B$ як один елемент, а елементи $(n-k+1)$-елементної множини можна переставляти $(n-k+1)!$ способами. Тому разом матимемо

$$k! \cdot (n-k+1)!$$

спосіб такої перестановки.

Якщо в попередній задачі послідовність елементів множини $B$ задана умовою задачі, то немає потреби домножувати на $k!$, тому відповідь буде така: такі перестановки можна зробити

$$(n-k+1)!$$

способами.

Скільки існує перестановок множини $A$, в яких не всі елементи множини $B$ стоять поряд? Від усіх всеможливих перестановок віднімемо ті перестановки, які залишають поряд елементи множини $B$. Отримаємо

$$n! - k! \cdot (n-k+1)!$$

таких перестановок.

Тепер, нехай елементи множини $A$ треба розмістити на колі. Уявляємо, що на колі є $n$ пронумерованих місць, на які мають розташуватися елементи множини $A$. Скількома способами можна це зробити. Зрозуміло, що ситуація нічим не відрізняється від випадку розташування елементів множини $A$ на відрізку, а тому відповідь буде:

$$n!$$

способами.

Але далі все змінюється. Нехай місця на колі відмічені, але не пронумеровані (наприклад коло крутиться). Скільки тоді буде різних перестановок множини $A$? Потрібно всі перестановки, отримані в першому випадку, поділити на $n$ — кількість "прокруток" кола навколо осі. У цьому випадку матимемо

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

перестановку.

Якщо ж в попередньому випадку не має значення ще крім того з якого боку дивитися на коло, то відповідь буде

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

перестановок, оскільки в цьому випадку ми ототожнюємо два дзеркально симетричні розташування.

Нехай знову маємо коло з пронумерованими місцями. Скільки є таких перестановок множини $A$, що всі елементи виділеної $k$-елементної її підмножини $B$ розташовані поряд? Переставляємо $k!$ способами елементи множини $B$, потім переставляємо $(n-k)!$ способами елементи її доповнення $A \setminus B$, і отриману ситуацію прокручуємо $n$ разів навколо осі. Разом отримуємо

$$n \cdot k! \cdot (n-k)!$$

способів.

Якщо ж у попередній умові місця на колі не пронумеровані, то відповідь буде простіша:

$$k! \cdot (n-k)!$$

способів. Якщо ж ще й ототожнити дзеркально симетричні розташування, то отримаємо таку відповідь:

$$\frac{k! \cdot (n-k)!}{2}$$

способів.

Нехай порядок розташування елементів множини $B$ заданий умовою задачі. Тоді на колі із заданою нумерацією буде

$$n \cdot (n-k)!$$

перестановок множини $A$, а на колі без нумерації буде

$$(n-k)!$$

перестановок множини $A$. У випадку, якщо ще крім того не звертати увагу на орієнтацію кола, то матимемо

$$\frac{(n-k)!}{2}$$

перестановку множини $A$.

Якщо множини $B$ і $A \setminus B$ мають однакову кількість елементів, тобто $n = 2k$, то можна сформулювати таку задачу: скільки є таких перестановок множини $A$ на відрізку, що елементи множини $B$ стоять на місцях з парними номерами? Або ж однакову їй задачу: скільки є таких перестановок множини $A$ на відрізку, що елементи множини $A \setminus B$ стоять на місцях з непарними номерами? Таких способів буде

$$k! \cdot k! = (k!)^2$$

— елементи двох множин переставляються незалежно. Відповідь не зміниться, якщо ці місця вказані на колі.

Нехай тепер умова така: жодні два елементи множин $B$ і $A \setminus B$ не стоять поряд. Матимемо тоді

$$2 \cdot (k!)^2$$

таких перестановок. Така ж сама відповідь буде у випадку, коли вказано місця на колі.

Якщо ж елементи множини $A$ мають бути розташовані на колі без вказаної нумерації, то таких перестановок, що жодні два елементи множини $B$ не стоять поряд, можна зробити

$$\frac{(k!)^2}{k} = k! \cdot (k-1)!$$

способами. А у випадку, коли не звертати увагу на орієнтацію кола, то матимемо

$$\frac{k! \cdot (k-1)!}{2}$$

способи.

Нарешті розглянемо випадок, що

$$A = B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3 \qquad \text{і} \qquad |B_1| = |B_2| = |B_3| = k.$$

Скільки є перестановок елементів множини $A$ на відрізку, якщо елементи множин

$$B_i, \qquad i = 1, 2, 3,$$

мають бути розташовані на місцях з номерами вигляду

$$3p + i, \qquad p = 0, 1, 2, 3, \ldots?$$

Як і у випадку двох множин маємо

$$(k!)^3$$

способів таких розташувань. А скільки буде всіх таких перестановок множини $A$, що кожен елемент однієї з трьох підмножин має сусідів з двох інших підмножин? Очевидно, що буде

$$3! \cdot (k!)^3$$

таких перестановок. Якщо ж ми хочемо розташувати так ці елементи на колі без вказаної нумерації місць, то це можна зробити

$$\frac{3! \cdot (k!)^3}{3k} = 2(k!)^2 \cdot (k-1)!$$

способами.

Далі ми наведемо приклади та задачі, які містять вказані моделі, втілені в словесну форму.

**Вправа 2.3.1.** Скількома способами можна переставити 7 крісел?

**Вправа 2.3.2.** Скількома способами можна прибити 20 дощок на латах паркану?

**Вправа 2.3.3.** Скільки різних слів можна отримати переставляючи літери в слові *картопля*?

**Приклад 2.3.1.** Скількома способами можна розмістити $n$ гостей за одним круглим столом? Скільки є різних розміщень $n$ гостей, якщо розміщення вважати однаковими, коли в кожного гостя ті ж самі сусіди?

***Розв'язок.*** Очевидно, що $n$ гостей за одним круглим столом можна розмістити $n!$ способами.

У другому випадку кожен поворот на одне місце, а також дзеркальна (чи осьова) симетрія не будуть змінювати сусідів за круглим столом. Отож таких розміщень буде

$$\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}.$$

**Вправа 2.3.4.** Скількома способами можна посадити за круглий стіл 10 осіб жіночої статі та 10 осіб чоловічої статі так, щоб жодні дві особи однакової статі не сиділи поряд?

**Вправа 2.3.5.** Скількома способами можна впорядкувати множину

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots, 2n-1, 2n\}$$

так, щоб кожне парне число мало парний номер?

**Приклад 2.3.2.** Скільки є перестановок множини чисел $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, в яких число 1 стоїть перед числом 2?

***Розв'язок.*** Очевидно, що всього є $n!$ перестановок множини чисел $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. У половині цих випадків число 1 стоїть перед числом 2:

$$\frac{n!}{2}.$$

**Приклад 2.3.3.** Скільки є перестановок множини чисел $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, в яких число 1 стоїть поруч з числом 2?

***Розв'язок.*** Якщо число 1 стоїть поряд з числом 2, то ми можемо вважати, що маємо перестановку множини, яка складається з $(n-1)$ елемента:

$$M = \{\{1, 2\}, 3, 4, \ldots, n\}.$$

У множині $M$ двоелементна множина $\{1, 2\}$ є елементом. Оскільки $M$ має $(n-1)$ елемент, то кількість перестановок цієї множини дорівнює $(n-1)!$. Оскільки елементи множини $\{1, 2\}$ можна впорядкувати лише двома способами: "$1, 2$" і "$2, 1$", то отримуємо, що перестановок чисел $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, в яких число 1 стоїть поряд з числом 2 є в кількості

$$2! \cdot (n-1)! = 2(n-1)!.$$

**Вправа 2.3.6.** На студентських зборах мають виступити студенти: Авраменко, Опанасенко, Пухкенький, Суленко та Щирецький. Скількома способами можна розмістити ораторів, якщо Пухкенький завжди виступає після Суленко?

**Вправа 2.3.7.** У студентській групі є $m$ хлопців і $n$ дівчат. Скількома способами можна розмістити їх в чергу так, щоб попереду були дівчата? Щоб всі хлопці стояли в черзі поряд?

### 2.3.4 Розміщення

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Нагадаємо моделі для розміщення (див. підрозділ 2.3.2):

1. Нехай маємо $n$ різних літер, по одному екземплярові кожної. Тоді $A_n^k$ — це кількість слів довжини $k$, які можна скласти з цих літер.

2. Маємо $k$ різних предметів і $n$ різних ящиків ($n \geqslant k$). Тоді $A_n^k$ — це кількість способів розкласти предмети в ящики по одному в кожен (очевидно, що не всі предмети будуть розкладені при $k > n$).

**Приклад 2.3.4.** Скільки треба словників, щоб безпосередньо робити переклади з української, польської, румунської, англійської, німецької та французької мов на будь-яку з них?

***Розв'язок.*** Скористаємося першою моделлю. Задача зводиться до наступної: скільки існує різних слів довжини 2, які можна скласти з 6 різних літер? Таких різних слів є:

$$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4!} = 5 \cdot 6 = 30.$$

**Вправа 2.3.8.** Скільки існує телефонних номерів, які містять 7 різних цифр?

**Вправа 2.3.9.** Скількома різними способами можна позначити квадрат великими літерами латинського алфавіту?

**Вправа 2.3.10.** Скільки найбільше може бути різних з'єднань у мережі, яка має 50 різних абонентів?

**Вправа 2.3.11.** Скількома різними способами можна вручити медалі в одному виді спорту 20 спортсменам на олімпіаді?

**Приклад 2.3.5.** Скільки існує шестизначних чисел з усіма різними цифрами?

***Розв'язок.*** Усі шестизначні числа починаються з цифр, які є елементами множини

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

а далі може бути довільний набір 5-и різних цифр з 9-и цифр, серед яких немає першої цифри. Очевидно, що таких наборів з 5-и різних цифр є

$$A_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!}.$$

Тоді існує

$$9 \cdot A_9^5 = \frac{9 \cdot 9!}{(9-5)!} = \frac{9 \cdot 9!}{4!}$$

шестизначних чисел з усіма різними цифрами.

**Вправа 2.3.12.** Скільки існує чотиризначних чисел з усіма різними цифрами?

**Приклад 2.3.6.** Скільки існує шестизначних чисел, які читаються однаково справа наліво та зліва направо?[1]

***Розв'язок.*** Усі шестизначні числові паліндроми визначаються своїми першими трьома цифрами. Оскільки тризначні числа починаються з елементів множини

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

а далі може бути довільний набір 2-х цифр з 10-и цифр. Очевидно, що наборів з 2-х різних цифр є

$$A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90.$$

Також наборів з 2-ох однакових цифр є

$$A_{10}^1 = \frac{10!}{(10-1)!} = \frac{10!}{9!} = 10.$$

Тоді існує

$$9 \cdot A_{10}^2 + 9 \cdot A_{10}^1 = 9 \cdot \left(A_{10}^2 + A_{10}^1\right) = 9 \cdot (90 + 10) = 900$$

шестизначних чисел, які є паліндромами.

**Вправа 2.3.13.** Скільки існує п'ятизначних чисел, які читаються однаково справа наліво та зліва направо?

**Вправа 2.3.14.** Скільки існує шестилітерних паліндромів у латинській абетці?

**Вправа 2.3.15.** Скільки існує натуральних чисел, у яких всі цифри різні?

### 2.3.5 Комбінації

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$$

Нагадаємо моделі для комбінацій (див. підрозділ 2.3.2):

1. Нехай ми маємо літери лише двох типів (наприклад символи нуль 0 і одиниця 1), але достатньо багато символів кожного типу. Тоді $C_n^k$ — це кількість слів довжини $n$, у яких рівно $k$ символів першого типу та $(n-k)$ символів другого типу (або кількість послідовностей довжини $n$, у яких $k$ одиниць і $(n-k)$ нулів).

2. Маємо $n$ різних предметів і 2 різні ящики, причому перший вміщує $k$ предметів, а другий — $(n-k)$ предметів. Тоді $C_n^k$ — це кількість різних розміщень предметів у ці ящики.

3. Нехай є $n$ різних ящиків і $k$ однакових предметів ($k \leqslant n$). Тоді $C_n^k$ — це кількість різних розміщень $k$ предметів у ці $n$ ящики, по одному в кожен.

**Вправа 2.3.16.** Скільки $k$-елементних підмножин має $n$-елементна підмножина $A$, $k \leqslant n$?

[1]Слова, які читаються однаково справа наліво та зліва направо називаються *паліндромами*.

**Приклад 2.3.7.** Скільки прямих можна провести через вісім точок, з яких жодні три не лежать на одній прямій?

***Розв'язок.*** Пряма визначається двома різними точками, через які вона проходить. Тому шукана кількість прямих дорівнюватиме кількості різних пар точок, які можна скласти з даних восьми точок. При цьому, щоб прямі не збігалися, пари точок повинні відрізнятися хоча б однією точкою. Тому маємо комбінації з восьми елементів по два, тобто маємо

$$C_8^2 = \frac{8!}{2! \cdot (8-2)!} = \frac{8!}{2! \cdot (6)!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

прямих.

**Приклад 2.3.8.** Скількома способами можна розподілити уроки в шести класах між трьома вчителями, якщо кожен учитель викладатиме у двох класах?

***Розв'язок.*** Перший вчитель може вибрати два класи із шести $C_6^2$ різними способами. Після вибору першого вчителя другий може вибрати два класи з чотирьох, що залишилися, $C_4^2$ різними способами. Тому ці два вчителі можуть вибрати по два класи $C_6^2 \cdot C_4^2$ різними способами.

Якщо перші два вчителі зробили вибір, то третій може взяти лише ті два класи, що залишилися. Звідси шукана кількість способів розподілу уроків, що кожен учитель викладатиме у двох класах, дорівнює:

$$C_6^2 \cdot C_4^2 = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 15 \cdot 6 = 90.$$

**Приклад 2.3.9.** Скільки різних добутків, кратних числу 10, можна отримати з чисел

$$2, 3, 5, 7, 11, 13?$$

***Розв'язок.*** Будемо складати добутки, кратні 10, у вигляді $2 \cdot 5 \cdot n$, де $n$ — всі можливі добутки з чисел $3, 7, 11, 13$. У число $n$ можуть включатися від 0 до 4 множників.

Отже, всіх можливих добутків, що задовольняють умову, буде

$$\begin{aligned} C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 &= 1 + \frac{4!}{1!{\cdot}(4-1)!} + \frac{4!}{2!{\cdot}(4-2)!} + \frac{4!}{3!{\cdot}(4-3)!} + \frac{4!}{4!{\cdot}(4-4)!} = \\ &= 1 + \frac{4!}{1! \cdot 3!} + \frac{4!}{2! \cdot 2!} + \frac{4!}{3! \cdot 1!} + \frac{4!}{4! \cdot 0!} = \\ &= 1 + 4 + 3 + 4 + 1 = \\ &= 13. \end{aligned}$$

**Приклад 2.3.10.** Скільки різних дільників має число 2310?

***Розв'язок.*** Оскільки

$$2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11,$$

то його дільником буде лише таке натуральне число, яке є добутком різних чисел з множини чисел

$$\{2, 3, 5, 7, 11\},$$

вибираючи не більше одного числа з цієї множини. Складемо всеможливі різні добутки з цих чисел (вони містять від 1-го до 5-и множників) і додамо 1, як дільник даного числа.

Отже, число 2310 має

$$\begin{aligned}1 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 &= 1 + 5 + \frac{5!}{2!{\cdot}(5-2)!} + \frac{5!}{3!{\cdot}(5-3)!} + \frac{5!}{4!{\cdot}(4-1)!} + 1 = \\ &= 1 + 5 + \frac{5!}{2!\cdot 3!} + \frac{5!}{3!\cdot 2!} + \frac{5!}{4!\cdot 1!} + 1 = \\ &= 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = \\ &= 32\end{aligned}$$

дільники.

**Приклад 2.3.11.** З офісу фірми, у якій працює 20 осіб, п'ятеро співробітників мають їхати у відрядження. Скільки може бути різних складів цієї групи, якщо директор, його заступник і секретар одночасно їхати не можуть?

***Розв'язок.*** Кількість усіх можливих варіантів формування групи співробітників офісу у відрядження дорівнює $C_{20}^5$. Проте не всі ці варіанти можливі. Підрахуємо кількість варіантів вибору групи, які не задовольняють умову поїздки у відрядження. При цьому три вакансії займуть директор, його заступник і секретар, а решту дві можуть бути сформовані $C_{17}^2$ способами.

Отже, можливих варіантів буде

$$C_{20}^5 - C_{17}^2.$$

**Вправа 2.3.17.** З офісу фірми, у якій працює 25 осіб, п'ятеро співробітників мають їхати у відрядження. Скільки може бути різних складів цієї групи, якщо може їхати не більше одного члена з керівництва? Керівництво офісу складається з директора та його двох заступників.

**Приклад 2.3.12.** У речовій лотереї розігруються вісім предметів. Усього в урні 100 квитків. Виймається п'ять квитків. Скількома способами їх можна вийняти так, щоб:

(1) рівно два з них були виграшними;
(2) принаймні два з них були виграшними?

***Розв'язок.***

(1) Два виграшні й три невиграшні, відповідно, квитки можна вибрати

$$C_8^2 \cdot C_{92}^3$$

способами.

(2) Якщо серед п'яти квитків буде два виграшні і три невиграшні, то це можна зробити

$$C_8^2 \cdot C_{92}^3$$

способами; якщо три виграшні і два невиграшні, то це можна отримати

$$C_8^3 \cdot C_{92}^2$$

способами; якщо чотири виграшні й один невиграшний, то це можна отримати

$$C_8^4 \cdot C_{92}^1$$

способами; якщо всі п'ять квитків є виграшніми, то це можна отримати

$$C_8^5$$

способами.

За правилом суми загальна кількість способів дорівнює

$$C_8^2 \cdot C_{92}^3 + C_8^3 \cdot C_{92}^2 + C_8^4 \cdot C_{92}^1 + C_8^5.$$

**Вправа 2.3.18.** Скількома способами можна розділити колоду із 36 карт порівну так, щоб в кожній частині було по два тузи?

### 2.3.6 Перестановки з повтореннями

$$\boxed{P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}}$$

Нагадаємо моделі для перестановок з повтореннями (див. підрозділ 2.3.2):

1. Нехай маємо літери $k$ типів і достатньо багато літер кожного типу. Тоді $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ — це кількість слів, в яких рівно $n_j$ літер $j$-го типу, $j = 1, \ldots, n$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

2. Маємо $n$ різних предметів і $k$ різних ящиків (предмети приблизно однакові за розміром). Відомо, що перший ящик вміщує $n_1$ предмет, другий ящик вміщує $n_2$ предмети, і т.д., $k$-ий ящик вміщує $n_k$ предметів ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$). Тоді $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ — це кількість різних розміщень предметів у ці ящики.

**Приклад 2.3.13.** Скільки різних "слів", у тому числі і беззмістовних, можна отримати, переставляючи літери у слові *математика*?

***Розв'язок.*** Літера *м* повторюється у даному слові два рази, літера *а* — три рази, літера *т* — два рази, літера *е* — один раз, літера *и* — один раз, літера *к* — один раз. Тому різних слів можна отримати

$$P_{10}(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200.$$

**Приклад 2.3.14.** Скількома способами можна порівну роздати чотирьом гравцям 28 кісточок доміно?

***Розв'язок.*** Шукана кількість способів:

$$P_{28}(7, 7, 7, 7) = \frac{28!}{7! \cdot 7! \cdot 7! \cdot 7!} = \frac{28!}{(7!)^4}.$$

**Вправа 2.3.19.** Скільки різних “слів” можна отримати, переставляючи літери в слові *ананас*, *анонс* і *нонсенс*?

**Вправа 2.3.20.** Скількома способами можна розділити 15 предметів між трьома особами так, щоб кожна особа отримали однакову кількість предметів?

**Вправа 2.3.21.** Скількома способами можна розділити 20 футбольних команд на 4 підгрупи по 5 команд?

**Вправа 2.3.22.** Скількома способами можна порівну роздати 4 гравцям 36 карт?

**Вправа 2.3.23.** Скількома способами можна розселити 8 студентів у три кімнати: одномісну, тримісну та чотиримісну?

**Вправа 2.3.24.** Скількома способами можна роздати 14 яблук 7 хлопчикам так, щоб кожен з них отримав рівно по 2-а яблука?

**Вправа 2.3.25.** Скільки різних “слів” можна отримати, переставляючи літери в слові *Міссісіпі*?

**Вправа 2.3.26.** Скільки різних “слів”, у яких літера *п* слідує зразу після літери *о*, можна отримати, переставляючи літери в слові *опоссум*?

**Приклад 2.3.15.** Скільки різних “слів”, у яких 7 літер *а* не стоять одночасно поруч, можна отримати, переставляючи літери в слові *абабагаламага*?

***Розв'язок.*** Очевидно, що переставляючи літери в слові *абабагаламага*, можна отримати

$$P_{13}(7,2,2,1,1) = \frac{13!}{7!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{13!}{7!\cdot 4}$$

всеможливих слів. З них 7 літер *а* стоятимуть одночасно поруч у

$$P_7(1,2,2,1,1) = \frac{7!}{1!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{7!}{4}$$

словах. Отже шуканих слів буде

$$P_{13}(7,2,2,1,1) - P_7(1,2,2,1,1) = \frac{13!}{7!\cdot 4} - \frac{7!}{4} = \frac{13! - (7!)^2}{7!\cdot 4}.$$

**Вправа 2.3.27.** Скількома способами четверо юнаків можуть запросити шестеро дівчат до танцю?

**Приклад 2.3.16.** Скількома способами можна розподілити 20 футбольних команд на однакові 4 групи, щоб 4-и найсильніші команди грали у різних групах?

***Розв'язок.*** Чотири найсильніші команди можна розподілити на 4 групи $P_4 = 4!$ способами. Оскільки в кожній групі має бути 5 команд, то залишилося розподілити 16 команд в чотири групи по чотири команди. Це можна зробити

$$P_{16}(4,4,4,4) = \frac{16!}{(4!)^4}$$

способами. Тоді за правилом добутку наш розподіл команд можна зробити

$$P_4 \cdot P_{16}(4,4,4,4) = 4! \cdot \frac{16!}{(4!)^4} = \frac{16!}{(4!)^3}$$

способами.

**Приклад 2.3.17.** Скількома способами можна розставити 10 білих і 10 чорних шашок на білих клітинках шахової дошки?

***Розв'язок.*** Усього шахових клітинок є 64, а з них білих рівно половину — 32. Отож, ми маємо розкласти 10 білих і 10 чорних шашок, а 12 клітинок залишити вільними. Це можна зробити

$$P_{32}(10, 10, 12) = \frac{32!}{10! \cdot 10! \cdot 12!}$$

способами.

**Вправа 2.3.28.** Скількома способами можна розкласти 20 книжок на 5 поличок, якщо кожна поличка може вмістити всі книги та порядок книг на поличці може бути довільним?

## 2.3.7 Розміщення з повтореннями

$$\boxed{\overline{A}_n^k = n^k}$$

Нагадаємо моделі для розміщень з повтореннями (див. підрозділ 2.3.2):

1. Нехай маємо літери $k$ типів і достатньо багато літер кожного типу. Тоді $\overline{A}_n^k$ — це кількість слів довжини $n$, які можна скласти з цих літер.

2. Нехай маємо $n$ різних предметів і $k$ різних ящиків, причому кожен ящик може містити і всі предмети. Тоді $\overline{A}_n^k$ — це кількість способів розкласти ці предмети в ці ящики без жодних обмежень.

**Приклад 2.3.18.** Камера схову містить 5 дисків, на кожен з яких нанесено 12 літер. Секретне слово при закриванні камери утворюється шляхом набору на кожному з дисків однієї літери. Яку найбільшу кількість невдалих спроб відкрити камеру може зробити крадій, який не знає секретного слова?

***Розв'язок.*** Кожне секретне слово є впорядкованою 5-и вібіркою з 12 літер, тобто є розміщенням з повтореннями з 12 по 5. А тому існуватиме

$$\overline{A}_{12}^5 = 12^5 = 248832$$

різних секретних слів. Отож, в найгіршому випадку крадій, який не знає секретного слова, може зробити

$$\overline{A}_{12}^5 - 1 = 248831$$

найбільшу кількість невдалих спроб.

**Приклад 2.3.19.** У деякій країні немає двох жителів з однаковим набором зубів. Якою може бути максимальна кількість жителів цієї країни, якщо найбільша кількість зубів у людини дорівнює 32?

***Розв'язок.*** Скористаємося принципом кодування: ставимо кожному зубу у відповідність 1, якщо він присутній у ротовій порожнині жителя, і 0 — якщо відсутній. Тоді кожен набір зубів буде розміщенням з повторенням із 2 по 32:

$$\overline{A}_2^{32} = 2^{32} = 4294967296.$$

Отож, максимальна кількість жителів цієї країни може бути 4294967296 осіб.

**Приклад 2.3.20.** Автомобільні номери деякої країни складаються з однієї, двох або трьох літер і чотирьох цифр. Скільки різних номерів можна утворити, якщо алфавіт цієї країни містить 26 літер?

***Розв'язок.*** За умовою задачі, у розглянутій країні є допустими три типи автомобільних номерів:

1) номери, які складаються з трьох літер і чотирьох цифр;
2) номери, які складаються з двох літер і чотирьох цифр;
3) номери, які складаються з однієї літери та чотирьох цифр.

Підрахуємо спочатку кількість всеможливих номерів першого типу. Окремо сформувати 3-літерну та 4-цифрову складові номера, очевидно, можна $\overline{A}_{26}^{3}$ і $\overline{A}_{10}^{4}$ способами, відповідно. Тоді за правилом добутку існуватиме

$$N_1 = \overline{A}_{26}^{3} \cdot \overline{A}_{10}^{4} = 26^3 \cdot 10^4$$

всеможливих номерів першого типу. Аналогічно міркуючи, знаходимо кількості всеможливих номерів другого та третього типів:

$$\begin{aligned} N_2 &= \overline{A}_{26}^{2} \cdot \overline{A}_{10}^{4} = 26^2 \cdot 10^4, \\ N_3 &= \overline{A}_{26}^{1} \cdot \overline{A}_{10}^{4} = 26^1 \cdot 10^4. \end{aligned}$$

Остаточно, за правилом суми, отримуємо загальну кількість всеможливих автомобільних номерів даної країни:

$$\begin{aligned} N &= N_1 + N_2 + N_3 = \\ &= \overline{A}_{26}^{3} \cdot \overline{A}_{10}^{4} + \overline{A}_{26}^{2} \cdot \overline{A}_{10}^{4} + \overline{A}_{26}^{1} \cdot \overline{A}_{10}^{4} = \\ &= 26^3 \cdot 10^4 + 26^2 \cdot 10^4 + 26 \cdot 10^4 = \\ &= 182780000. \end{aligned}$$

**Вправа 2.3.29.** Скільки існує п'ятизначних номерів телефону?

**Вправа 2.3.30.** Скільки існує шестизначних номерів телефону?

**Вправа 2.3.31.** Нехай множина $A$ містить $k$ елементів, а множина $B$ — $n$ елементів.

1) Скільки існує відображень з множини $A$ в множину $B$?
2) Скільки існує ін'єктивних відображень з множини $A$ в множину $B$?
3) Скільки існує бієкцій множини $A$ (бієктивних відображень з $A$ в $A$)?

**Вправа 2.3.32.** У ліфт 14 поверхового будинку зайшло на першому поверсі 10 осіб. Скількома незалежними способами вони можуть вийти з ліфта?

**Вправа 2.3.33.** Три листоноші мають рознести 10 листів. Скількома способами вони це можуть зробити?

**Вправа 2.3.34.** Скільки цілих чисел менших за мільйон можна записати за допомогою цифр $1, 2, 3$?

**Вправа 2.3.35.** Скільки є натуральних чисел менших за $10^n$, які не містять цифру 0?

### 2.3.8 Комбінації з повтореннями

$$\boxed{\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}}$$

Нагадаємо моделі для комбінацій з повтореннями (див. підрозділ 2.3.2):

1. Така модель не дає доброї інтерпретації для комбінації з повторенням $\overline{C}_n^k$ з $n$ елементів по $k$, якщо не брати до уваги, що $\overline{C}_n^k$ — це кількість послідовностей довжини $(n+k-1)$, з яких рівно $k$ одиниць і $(n-1)$ нуль.

2. Нехай є $n$ різних ящиків і $k$ однакових предметів, причому кожен ящик може вмістити також всі ці предмети. Тоді $\overline{C}_n^k$ — це кількість різних розміщень цих $k$ предметів у ці $n$ ящики.

**Приклад 2.3.21.** У пиріжковій продаються 10 сортів пиріжків. Скількома способами можна купити 14 пиріжків?

***Розв'язок.*** Щоб купити 14 пиріжків, необхідно 14 разів зробити вибір сорту з 10 можливих. При цьому порядок вибору несуттєвий та при виборі можна повторюватися. Більше того, оскільки $14 > 10$, то повторення будуть гарантовані. Тоді кожен спосіб покупки 14 пиріжків буде невпорядкованою 14-вибіркою з повтореннями з 10, тобто буде комбінацією з повтореннями з 10 по 14, а тому існує

$$\overline{C}_{10}^{14} = C_{23}^{14} = \frac{23!}{14! \cdot 9!}$$

різних способів купити пиріжки.

**Приклад 2.3.22.** Скількома способами можна розкласти у 4 коробки 10 білих, 15 голубих і 8 зелених кульок? Кульки однакового кольору вважаються однаковими.

***Розв'язок.*** Кульки можна розкласти окремо у 4 коробки:

- 10 білих кульок — $\overline{C}_4^{10} = C_{13}^{10} = \dfrac{13!}{10! \cdot 3!}$ способами;
- 15 голубих кульок — $\overline{C}_4^{15} = C_{18}^{15} = \dfrac{18!}{15! \cdot 3!}$ способами;
- 8 зелених кульок — $\overline{C}_4^{8} = C_{11}^{8} = \dfrac{11!}{8! \cdot 3!}$ способами.

Оскільки довільний вибір білих кульок можна поєнувати з довільним вибором голубих і з довільним вибором зелених кульок, то за правилом добутку отримуємо, що існує

$$\overline{C}_4^{10} \cdot \overline{C}_4^{15} \cdot \overline{C}_4^{8} = C_{13}^{10} \cdot C_{18}^{15} \cdot C_{11}^{8} = \frac{13!}{10! \cdot 3!} \cdot \frac{18!}{15! \cdot 3!} \cdot \frac{11!}{8! \cdot 3!}$$

шуканих способів розподілу кульок.

**Приклад 2.3.23.** Скількома способами можна розкласти у 5 коробок 15 однакових кульок так, щоб жодна коробка не була порожньою?

***Розв'язок.*** Виберемо 5 кульок і розкладемо їх по одній у 5 коробок. Оскільки кульки однакові, то це можна зробити одним способом.

У нас залишилося 10 однакових кульок, які треба розкласти у 5 коробок. А це можна зробити

$$\overline{C}_5^{10} = C_{14}^{10} = \frac{14!}{10! \cdot 4!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 11 \cdot 13 \cdot 7 = 1001$$

способом.

**Вправа 2.3.36.** Скількома способами можна розподілити 6 однакових папок у 3 шухляди стола, якщо кожна шухляда може вмістити всі папки?

**Вправа 2.3.37.** Скількома способами можна купити 8 тістечок у пекарні, де є 6 різних сортів?

**Вправа 2.3.38.** Скількома способами можна покласти 25 однакових кульок у 12 коробок?

**Вправа 2.3.39.** У поштовому відділенні продають 20 різних листівок.

1) Скількома способами можна купити 13 різних листівок?
2) Скількома способами можна купити 13 листівок?
3) Скількома способами 13 покупців можуть купити по одній листівці?

**Вправа 2.3.40.** Порахувати всі кості доміно, як комбінації з повтореннями з 7 елементів по 2.

**Вправа 2.3.41.** Скільки костей доміно можна утворити з чисел $0, 1, 2, \ldots, n$.

### 2.3.9 Формула Паскаля та трикутник Паскаля

Комбінації поєднує формула Паскаля (див. рівність (2.13)).

**Теорема 2.3.24.** *Для довільних натуральних чисел $n$ і $k$, $k \leqslant n$, виконується рівність*

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \tag{2.13}$$

*Доведення.* За формулою (2.10) маємо

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n+1-k)} = \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \\ &= C_{n+1}^k, \end{aligned}$$

що і треба було довести. □

Рівність (2.13) називається *формулою Паскаля*.

З формули (2.13) випливає простий спосіб обчислення комбінацій $C_n^k$, які ще називають *біноміальними коефіцієнтами*. Цей спосіб називається *трикутником Паскаля*.

На рис. 2.4 кожне число, крім крайніх одиниць, дорівнює сумі двох чисел, які

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\end{array}
$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Рис. 2.4: Трикутник Паскаля

стоять над ним. Оскільки $C_n^0 = C_n^n$ для довільного натурального числа $n$, то з формули Паскаля випливає, що $n$-рядок трикутника Паскаля складений з чисел $C_n^k$, $k = 0, 1, \dots, n$.

### 2.3.10 Біном Ньютона. Поліноміальна теорема

**Теорема 2.3.25.** *Нехай $A$ — $n$-елементна множина. Тоді $|\mathscr{P}(A)| = 2^n$.*

*Доведення.* Теорему доведемо методом математичної індукції.

Для $n = 1$, очевидно, що твердження теореми виконується. Справді, одноелементна множина $A = \{a\}$ має лише дві підмножини: порожню множину $\varnothing$ і саму себе $\{a\}$.

Припустимо, що твердження теореми виконується для $n = k$: множина, яка складається з $k$ елементів має $2^k$ всеможливих підмножин.

Доведемо, що з нашого припущення випливає твердження теореми для $n = k+1$: множина, яка складається з $k + 1$ елемента має $2^{k+1}$ всеможливих підмножин.

Нехай
$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$$
— множина, яка складається з $k + 1$ елемента.

Довільну підмножину множини $A$ можна отримати одним з таких двох способів:

1. Розглядаємо всі підмножини множини

$$A_0 = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\},$$

яка має $k$ елементів. Всіх підмножин множини $A_0$ за припущенням індукції буде $2^k$ , і це будуть усі підмножини множини $A$, які не містять елемента $a_{k+1}$.

2. Кожну підмножину множини $A_0$ об'єднуємо з множиною $\{a_{k+1}\}$. І це будуть усі всеможливі підмножини множини $A$, які містять елемент $a_{k+1}$. Таких множин буде рівно $2^k$.

Отже, всіх підмножин множини $A$ буде

$$2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1},$$

що і завершує доведення теореми. □

**Наслідок 2.3.26.** *Для довільного натурального числа $n$ виконується рівність*

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n. \tag{2.14}$$

*Доведення.* Оскільки число $C_n^k$ — це кількість $k$-елементних підмножин $n$-елементної множини, то сума в лівій частині рівності (2.14) дорівнює кількості всіх підмножин $n$-елементної множини. За теоремою 2.3.25 ця сума дорівнює $2^n$. □

Рівність (2.14) можна записати в більш компактному вигляді

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n. \tag{2.15}$$

Нагадаємо, що двочлен $a+b$ називається *біномом*. Зі шкільного курсу математики відомо, що

$$\begin{aligned}
&(a+b)^0 = 1, \qquad \text{якщо} \quad a+b>0;\\
&(a+b)^1 = 1\cdot a + 1\cdot b;\\
&(a+b)^2 = (a+b)^1\cdot(a+b) = 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2;\\
&(a+b)^3 = (a+b)^2\cdot(a+b) = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^3;\\
&(a+b)^4 = (a+b)^3\cdot(a+b) = 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3b + 6\cdot a^2b^2 + 4\cdot ab^3 + 1\cdot b^4.
\end{aligned}$$

Аналізуючи ці формули, легко помітити, що коефіцієнти у правих частинах рівностей дорівнюють числам із відповідних рядків трикутника Паскаля (див. рис. 2.4). Цей збіг не є випадковим.

**Теорема 2.3.27.** *Для довільного натурального числа $n$ виконується рівність*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^n b^n. \tag{2.16}$$

*Доведення.* Теорему доведемо методом математичної індукції.

Для $n = 1$, очевидно, що твердження теореми виконується. Справді,

$$(a+b)^1 = 1\cdot a + 1\cdot b = C_1^0\cdot a + C_1^1\cdot b.$$

Припустимо, що твердження теореми виконується для $n = k$: рівність (2.16) справджується для деякого натурального $n = k$, тобто

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \cdots + C_k^k b^k.$$

Доведемо, що твердження теореми виконується для $n = k+1$. Справді,

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= (a+b)^k \cdot (a+b) = \\ &= \left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \cdots + C_k^k b^k\right) \cdot (a+b) = \\ &= C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1} b^2 + \cdots + C_k^k a b^k + \\ &\qquad + C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + C_k^2 a^{k-2} b^3 + \cdots + C_k^k b^{k+1} = \\ &= C_k^0 a^{k+1} + (C_k^1 + C_k^0) a^k b + (C_k^2 + C_k^1) a^{k-1} b^2 + \cdots + \\ &\qquad + (C_k^k + C_k^{k-1}) a b^k + C_k^k b^{k+1}.\end{aligned}$$

Далі скориставшись рівностями

$$C_k^0 = C_{k+1}^0 = 1 \qquad \text{і} \qquad C_k^k = C_{k+1}^{k+1} = 1$$

та формулою Паскаля

$$C_{k+1}^i = C_k^i + C_k^{i-1},$$

отримуємо рівність

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+1}^2 a^{k-1} b^2 + \cdots + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1},$$

що і завершує доведення теореми. □

Формула (2.16) розкладу степеня двочлена у вигляді суми одночленів

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n.$$

називається *формулою бінома Ньютона*. Коефіцієнти $C_n^k$ називаються *біноміальними коефіцієнтами*.

Якщо скористатися знаком суми, то формулу бінома Ньютона (2.16) можна записати так:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

**Приклад 2.3.28.** Доведіть рівність

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

***Розв'язок.*** Підставивши у рівність (2.16) значення $a = 1$ і $b = -1$, отримаємо

$$\begin{aligned}0 &= (1-1)^n = \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot (-1)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n.\end{aligned}$$

**Основні властивості формули бінома Ньютона**

1. Розклад $n$-го степеня бінома (2.16) містить $n+1$ член.

2. Показники степеня при $a$ спадають від $n$ до 0, а показники степеня при $b$ зростають від 0 до $n$. Сума показників степенів при $a$ та $b$ у кожному члені розкладу дорівнює $n$.

3. Біноміальні коефіцієнти розкладу — це числа, які стоять у $n$-му рядку трикутника Паскаля. Коефіцієнти членів, рівновіддалених від кінців, рівні між собою.

4. Якщо показник степеня бінома — парне число, то біноміальний коефіцієнт середнього члена є найбільшим; якщо ж показник степеня бінома — непарне число, то біноміальні коефіцієнти двох середніх членів рівні між собою і є найбільшими.

5. $(k+1)$-й член розкладу $T_{k+1}$ визначається за формулою
$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,$$
де $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

6. Перший біноміальний коефіцієнт дорівнює 1, другий — $n$ (показник степеня бінома). Щоб знайти кожний наступний коефіцієнт, потрібно біноміальний коефіцієнт попереднього члена помножити на показник $a$ цього члена і знайдений добуток поділити на число, яке відповідає порядковому номеру члена, біноміальний коефіцієнт якого визначається, тобто
$$C_n^k = C_n^{k-1} \cdot \frac{n-(k-1)}{k}, \qquad 1 \leqslant k+1 \leqslant \left[\frac{n+2}{2!}\right].$$

7. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ для довільних невід'ємних цілих чисел $n$ і $k$, $n \leqslant k$.

8. Сума біноміальних коефіцієнтів розкладу, які розміщенні на парних місцях, дорівнює сумі коефіцієнтів членів розкладу, які розміщені на непарних місцях, тобто
$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots .$$

**Приклад 2.3.29.** Доведіть рівність
$$\sum_{k=0}^{n} 2^{3n-2k} C_n^k = 10^n.$$

***Розв'язок.*** Зробивши відповідні перетворення та скориставшись формулою (2.16), отримуємо
$$\sum_{k=0}^{n} 2^{3n-2k} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} 2^{3n-3k+k} C_n^k =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} 2^{3(n-k)} 2^k C_n^k = \\
&= \sum_{k=0}^{n} (2^3)^{n-k} 2^k C_n^k = \\
&= (2^3 + 2)^n = \\
&= 10^n.
\end{aligned}
$$

Отже, шукана рівність отримується шляхом безпосередньої підстановки у формулу бінома Ньютона (2.16) значень $a = 2^3$ і $b = 2$.

**Приклад 2.3.30.** Доведіть рівність

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}.$$

***Розв'язок.*** Введемо у формулу бінома Ньютона (2.16) змінну, прийнявши $b = x$:

$$(a + x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 + \cdots + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k.$$

Продиференціювавши ліву та праву частини цих рівності по $x$, отримаємо

$$n(a + x)^{n-1} = C_n^1 a^{n-1} + 2C_n^2 a^{n-2} x + \cdots + nC_n^n x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k a^{n-k} x^{k-1}.$$

Покладаючи в останній рівності $a = 1$ і $x = 1$, очевидно, що отримаємо рівність

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}.$$

**Приклад 2.3.31.** Доведіть рівність

$$\sum_{k=0}^{n} (2k + 1)C_n^k = C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + 7C_n^3 + \cdots + (2n + 1)C_n^n = (n + 1) \cdot 2^n.$$

***Розв'язок.*** Скориставшись формулою

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

та доведеною рівністю

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n \cdot 2^{n-1}$$

у прикладі 2.3.30, виконаємо такі перетворення

$$\sum_{k=0}^{n} (2k + 1)C_n^k = \sum_{k=0}^{n} \left(2kC_n^k + C_n^k\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} 2kC_n^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \\
&= 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} kC_n^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \\
&= 2 \cdot n \cdot 2^{n-1} + 2^n \\
&= (n+1) \cdot 2^n.
\end{aligned}
$$

У результаті отримуємо необхідну рівність

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)C_n^k = C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + 7C_n^3 + \cdots + (2n+1)C_n^n = (n+1) \cdot 2^n.$$

**Приклад 2.3.32.** Доведіть рівність

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{2}C_n^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1} \cdot \left(2^{n-1} - 1\right).$$

***Розв'язок.*** Введемо у формулу бінома Ньютона (2.16) змінну, прийнявши $b = x$:

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 + \cdots + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k.$$

Проінтегруємо ліву та праву частини цих рівності по $x$ в межах від $c$ до $d$:

$$
\begin{aligned}
\int_c^d (a+x)^n \, dx &= \int_c^d \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k \, dx = \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \int_c^d x^k \, dx = \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \left( \frac{1}{k+1} \, x^{k+1} \Big|_c^d \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \frac{1}{k+1} \left(d^{k+1} - c^{k+1}\right).
\end{aligned}
$$

Підставивши в рівність

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \frac{1}{k+1} \left(d^{k+1} - c^{k+1}\right) = \int_c^d (a+x)^n \, dx,$$

$a = 1$, $d = 1$ і $c = 0$, отримуємо

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \int_0^1 (1+x)^n \, dx = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \cdot \left(2^{n-1} - 1\right).$$

**Приклад 2.3.33.** Знайдіть середній член розкладу бінома

$$\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}.$$

***Розв'язок.*** За умовою маємо, що $a=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, $b=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=-x^{-\frac{1}{2}}$ і $n=12$. Тоді біноміальний розклад міститиме $n+1=13$ доданків і середнім членом буде сьомий, який дорівнює:

$$T_7=T_{6+1}=C_{12}^6a^{12-6}b^6=C_{12}^6a^6b^6=C_{12}^6\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^6\left(-x^{-\frac{1}{2}}\right)^6=C_{12}^6x^2x^{-3}=C_{12}^6x^{-1}=\frac{924}{x}.$$

**Приклад 2.3.34.** Знайдіть член розкладу бінома

$$\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n,$$

який містить $x^5$, якщо сума всіх біноміальних коефіцієнтів цього розкладу дорівнює 128.

***Розв'язок.*** За умовою маємо, що $a=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$, $b=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=x^{-\frac{1}{3}}$ і $2^n=128$. З останньої рівності випливає, що $n=7$. Тоді загальний член розкладу матиме вигляд:

$$T_{k+1}=C_7^ka^{7-k}b^k=C_7^k\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{7-k}\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^k=C_7^k\,x^{\frac{3(7-k)}{2}-\frac{k}{3}},\qquad k=0,1,2,3,4,5,6,7.$$

Розв'язавши рівняння

$$\frac{3(7-k)}{2}-\frac{k}{3}=5,$$
$$9(7-k)-2k=30,$$
$$63-9k-2k=30,$$

отримуємо, що $k=3$. Отже, шуканим є четвертий член, який має вигляд

$$T_4=C_7^3\,x^5=35x^5.$$

**Вправа 2.3.42.** Доведіть рівності:

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^kC_n^k=3^n$;

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k10^kC_{2n}^k=81^n$;

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}kC_n^k=0$;

4) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^k=n(n-1)2^{n-2}$;

5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k=n(n+1)2^{n-2}$;

6) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}$.

**Вправа 2.3.43.** Сума біноміальних коефіцієнтів розкладу бінома

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$$

дорівнює 1024. Знайдіть член розкладу, який містить $x^{11}$.

**Вправа 2.3.44.** Знайдіть значення $x$ у розкладі бінома $(1+x^2)^{12}$, якщо різниця між третім і другим членами розкладу дорівнює 54.

**Вправа 2.3.45.** Знайдіть значення $x$ у розкладі бінома

$$\left(\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}+x^{\lg\sqrt{x}}\right)^9,$$

якщо третій член розкладу дорівнює 36000.

Ісаак Ньютон вперше показав, що для довільних дійсних $x$ і $\alpha$, де $|x|<1$, справджується рівність

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}x^k+\dots.$$

Звідси випливає формула, яка виражає наближену рівність

$$(1+x)^\alpha\approx1+\alpha x \tag{2.17}$$

де $|x|<1$ і $\alpha$ — довільне дійсне число.

У формулу бінома Ньютона

$$(x+a)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^{n-k}a^k$$

підставимо значення

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Отримаємо

$$(x+a)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^{n-k}a^k,$$

або

$$(x+a)^n=\sum_{k+l=n}\frac{n!}{k!l!}x^{n-k}a^k, \tag{2.18}$$

де підсумовування поширюється на всі можливі системи цілих невід'ємних значень $k$ і $l$, які задовольняють умову $k+l=n$.

Узагальненням формули бінома Ньютона (2.16), є формула піднесення до $n$-го степеня суми

$$x_1+x_2+\dots+x_m.$$

**Теорема 2.3.35.** *Для довільного натурального числа $n$ виконується рівність*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n} \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_m!} \, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}.$$

*Доведення.* Відомо, що $n$-ий степінь суми $x_1 + x_2 + \cdots + x_m$ є добутком n співмножників:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + \cdots + x_m \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_m \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_m. \end{gathered}$$

Для того, щоб обчислити цей добуток, потрібно кожний доданок першого множника помножити на кожен доданок другого множника, кожен із знайдених добутків помножити на кожен доданок третього множника і т.д., а потім додати усі знайдені добутки.

Якщо з першого множника ми візьмемо доданок $x_{i_1}$, з другого $x_{i_2}$, і т.д., з $n$-го — $x_{i_n}$, де кожен з індексів $i_1, i_2, \ldots, i_n$ може дорівнювати будь-якому з чисел $1, 2, \ldots, m$, то отримаємо такий член добутку

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}. \tag{2.19}$$

Очевидно, що кожному члену $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$ відповідає розміщення з повтореннями з $m$ елементів $x_1, x_2, \ldots, x_m$ по $n$ елементів і, навпаки, кожному такому розміщенню відповідає один член (2.19). Звідси випливає, що кількість всіх членів (2.19) дорівнює кількості різних розміщень з повтореннями з $m$ елементів по $n$, тобто $m^n$.

Але не всі ці $m^n$ члени різні. Члени, в кожному з яких $x_1$ повторюється $\alpha_1$ раз, $x_2$ повторюється $\alpha_2$ раз, і т.д., $x_m$ повторюється $\alpha_m$ раз ($\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n$), є подібними.

Кожен такий член відповідає перестановці з повтореннями $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$ порядку $n$, в якій елементи $x_1, x_2, \ldots, x_m$ повторюються відповідно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ раз, і навпаки, кожна така перестановка відповідає лише одному з цих подібних членів.

Отже, кількість всіх подібних членів дорівнює кількості різних перестановок з повтореннями порядку $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$, в яких елементи $x_1, x_2, \ldots, x_m$ повторюються відповідно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ раз, тобто дорівнює числу $\dfrac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_m!}$.

Тоді кожен член $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}$, де $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n$, входить до розкладу $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ з коефіцієнтом $\dfrac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_m!}$.

Звідси випливає, що

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n} \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_m!} \, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m},$$

де підсумовування поширюється на будь-які системи цілих невід'ємних значень $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, які задовольняють умову $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n$, що і треба було довести. $\square$

**Означення 2.3.36.** Коефіцієнти

$$\frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_m!},$$

з якими члени $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}$ входять до розкладу $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$, називаються *поліноміальними*.

**Приклад 2.3.37.** Обчисліть наближене значення $\sqrt[4]{1{,}004}$.

***Розв'язок.*** Використаємо формулу (2.17) для наближеного обчислення:

$$\sqrt[4]{1{,}004} = \sqrt[4]{1 + 0{,}004} = (1 + 0{,}004)^{\frac{1}{4}} \approx 1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}004 = 1{,}001.$$

**Приклад 2.3.38.** Обчисліть значення $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3$.

***Розв'язок.*** Використаємо теорему 2.3.35:

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 = {} & \frac{3!}{3!0!0!0!}\, x_1^3 + \frac{3!}{0!3!0!0!}\, x_2^3 + \frac{3!}{0!0!3!0!}\, x_3^3 + \frac{3!}{0!0!0!3!}\, x_4^3 + \\
& + \frac{3!}{2!1!0!0!}\, x_1^2 x_2 + \frac{3!}{2!0!1!0!}\, x_1^2 x_3 + \frac{3!}{2!0!0!1!}\, x_1^2 x_4 + \\
& + \frac{3!}{1!2!0!0!}\, x_1 x_2^2 + \frac{3!}{0!2!1!0!}\, x_2^2 x_3 + \frac{3!}{0!2!0!1!}\, x_2^2 x_4 + \\
& + \frac{3!}{1!0!2!0!}\, x_1 x_3^2 + \frac{3!}{0!1!2!0!}\, x_2 x_3^2 + \frac{3!}{0!0!2!1!}\, x_3^2 x_4 + \\
& + \frac{3!}{1!0!0!2!}\, x_1 x_4^2 + \frac{3!}{0!1!0!2!}\, x_2 x_4^2 + \frac{3!}{0!0!1!2!}\, x_3 x_4^2 + \\
& + \frac{3!}{1!1!1!0!}\, x_1 x_2 x_3 + \frac{3!}{1!1!0!1!}\, x_1 x_2 x_4 + \frac{3!}{1!0!1!1!}\, x_1 x_3 x_4 + \\
& + \frac{3!}{0!1!1!1!}\, x_2 x_3 x_4 = \\
= {} & x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + \\
& + 3(x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1^2 x_4 + x_1 x_2^2 + x_2^2 x_3 + x_2^2 x_4 + \\
& \quad + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 + x_3^2 x_4 + x_1 x_4^2 + x_2 x_4^2 + x_3 x_4^2) + \\
& + 6(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4).
\end{aligned}$$

# Розділ 3

# Теорія графів

## 3.1 Історичний огляд. Типові задачі

Теорія графів застосовується для аналізу функціонування складних систем, таких як мережі залізничних доріг, телефонні або комп'ютерні мережі, іригаційні системи. Теорія графів є традиційним ефективним апаратом формалізації задач економічної та планово-виробничої практики, застосовується в автоматизації управління виробництвом, у календарному та мережевому плануванні. Основним поняттям теорії графів є граф.

Прийнято пов'язувати зародження теорії графів як математичної дисципліни з працею Леонарда Ойлера (Leonhard Euler, 1707–1783) 1736 року, у якій знайдено умову існування в зв'язному графі циклу, що містить всі ребра графа без повторень. Такий цикл тепер називається *ойлеровим*. Як показує простий приклад (див. рис. 3.1), існують графи, які не є ойлеровими циклами.

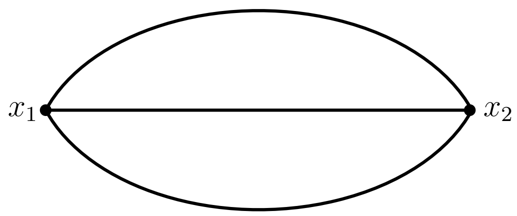



Рис. 3.1: Не ойлерів граф

Першоджерелом задачі про ойлерів цикл сам Ойлер називає відому головоломку про Кьоніґсберґські мости (див. рис. 3.2). Місто Кьоніґсберґ у Східній Пруссії було на берегах річки Преголя, рукави якої ділили місто на чотири частини, в тому числі й два острови — Кнайпгоф і Ломзе, що поєднувалися сімома мостами: Бакалійним, Зеленим, Гноєвим, Кузенним, Дерев'яним, Високим і Медовим.

Необхідно було знайти такий маршрут через місто, щоб пройти всі сім мостів і кожним мостом пройти рівно один раз. На острів не можна було потрапити інакше як через міст, і кожен з мостів мав бути пройденим за один раз (тобто не можна було

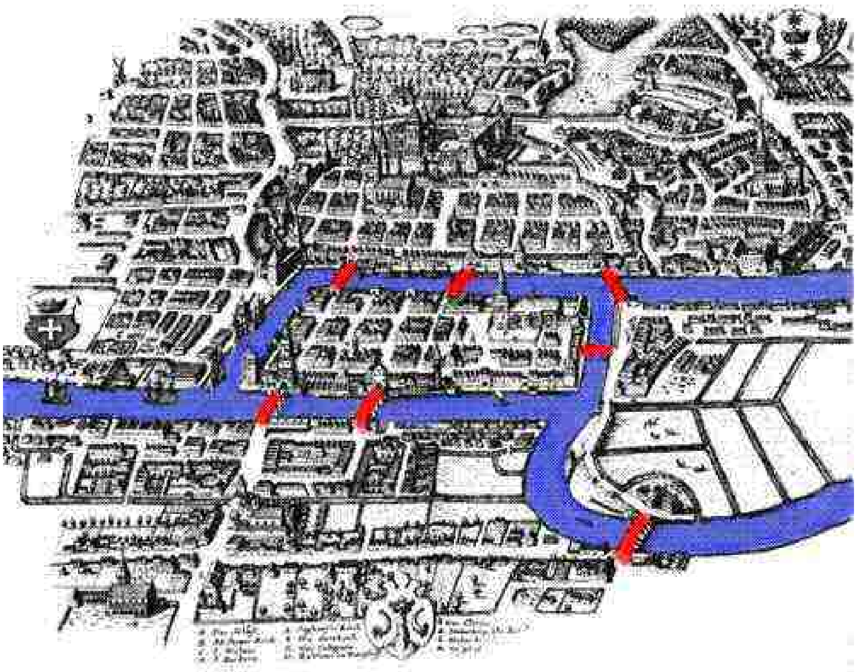


Рис. 3.2: Мапа Кьоніґсберґа в часи Ойлера із зображенням розташування сімох мостів, підсвічені мости та річка Преголя

пройти на середину мосту і повернутися назад, а потім з іншого берега пройти другу половину). Ойлер довів, що розв'язку не існує.

**Ідея Ойлера**

По-перше, Ойлер осягнув, що вибір маршруту всередині кожної з ділянок суходолу (островів, або берегів ріки) не має значення. Важлива лише послідовність перетину мостів. Це дозволило йому переформулювати задачу в абстрактних термінах (які лягли в основу теорії графів), виключивши усі ознаки окрім списку ділянок суходолу і мостів, що сполучають їх. В сучасних термінах, він кожну з ділянок суходолу замінив на абстрактну "вершину", а кожен міст на абстрактне "ребро", яке слугувало лише для відображення факту сполучення пари вершин (ділянок суходолу) цим мостом. (див. рис. 3.3), Отримана математична структура називається *графом*.

Через те, що важлива лише інформація про зв'язки, форма в якій граф зображений на малюнку не має значення, якщо при цьому не змінюється сам граф. Тільки існування (або відсутність) ребра між кожною парою вершин має значення. Наприклад, не має значення чи ребра намальовані як прямі або криві, або праворуч чи ліворуч від іншого зображений вузол.

Наступним спостереженням Ойлера було те, що (окрім кінцевих вершин прогулянки), коли хтось потрапляє до вершини через міст, обов'язково її покидає через міст. Інакше кажучи, впродовж кожного маршруту в графі, кількість входів в некінцеві вершини дорівнює кількості виходів з них. Тепер, якщо кожний міст пройдено рівно один раз, вірно наступне, для кожної ділянки суходолу (окрім початкової і

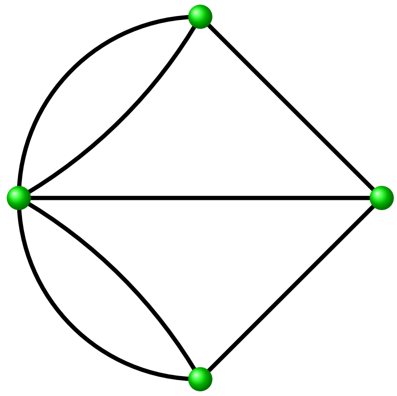


Рис. 3.3: Ідея Ойлера

кінцевої), кількість мостів до цієї ділянки парна (половина з них буде пройдена за напрямком до ділянки, а половина з ділянки). Однак всі чотири ділянки суходолу в початковій задачі мають непарну кількість мостів (одна 5, а інші по 3). Через те, що лише дві ділянки можуть слугувати як початкова і кінцева точки ймовірного маршруту, задача пройтися усіма мостами рівно по одному разу призводить до протиріччя.

Наступний крок зробив у 1847 році Кірхґоф. Вивчаючи електричні ланцюги та абстрагуючись від фізичної природи пристроїв, він виділив окремо комбінаторно-топологічну структуру, яка зараз називається графом ланцюга, розробив алгоритм знаходження максимального підграфа без циклів, який називається *деревом*, та з його допомогою записав найменшу незалежну систему рівнянь ланцюга. Дослідження з електротехніки, електроніки, релейно-контактних схем до сьогоднішнього для індукують різні дослідження з теорії графів, і навпаки.

У 1857 році у зв'язку із проблемами органічної хімії Келі розглядав задачу перелічення всіх дерев зі степенями вершин 1 і 4. Ця задача пов'язана з описанням ізомерів граничних (насичених) вуглеводнів $C_nH_{2n+2}$ з наперед заданою кількістю атомів вуглецю. Задача виявилася непростою, її сенс зрозумілий з рис. 3.4, на якому зображено для: $n = 1$ — метан, $n = 2$ — етан, $n = 3$ — пропан, $n = 4$ — два ізомери бутан і ізобутан.

Добре відома задача комівояжера, яка має численні застосування в економіці, чи проектуванні: для даної системи пунктів і доріг між ними, схематично зображених плоским (планарним) зв'язним графом, обрати найкоротший маршрут комівояжера, який виходить і повертається до вихідного пункту так, щоб відвідати решту пунктів і лише один раз. Ця задача не завжди має розв'язок, а якщо має, то відомі алгоритми працюють ефективно лише для порівняно невеликих графів — і це, незважаючи на неабияку бібліографію із задачі комівояжера.

Частковий випадок задачі комівояжера, який не враховує довжину переходів між пунктами, але зберігає всі її принципові труднощі, сформулював у 1859 році Гамільтон на прикладі графа додекаедра: обійти замкненим маршрутом по ребрам багатогранника всі його вершини, пройшовши через кожну вершину лише один раз, не враховуючи вершини початку та кінця шляху. Саме цю задачу Гамільтон продав за

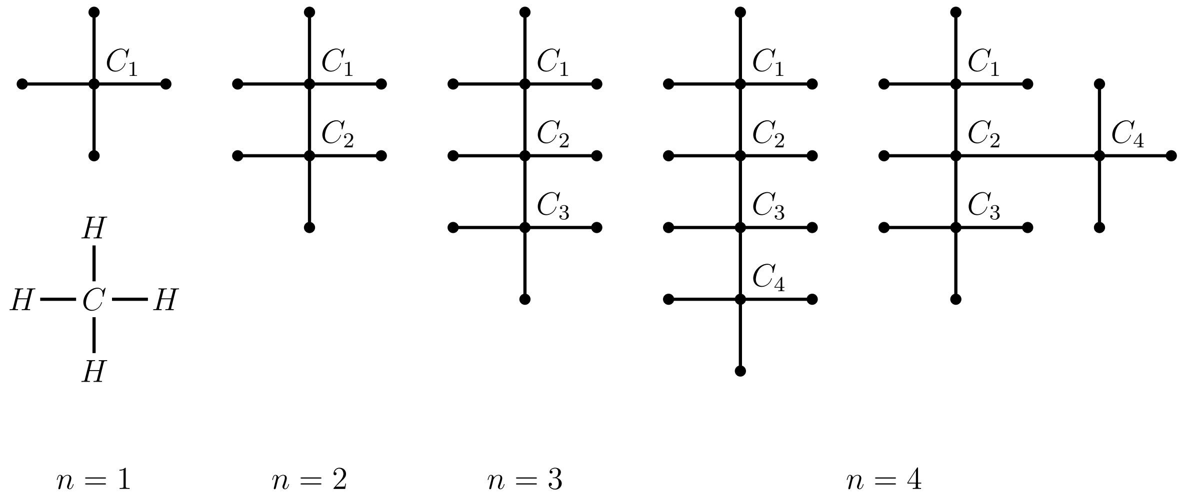



Рис. 3.4: Ізомери $C_nH_{2n+2}$

25 гіней одному майстрові іграшок у вигляді гри "Навколо світу". Для довільного графа задача Гамільтона не обов'язково має розв'язок і формулюється так: знайти простий цикл, який містить всі вершини графа[1]. Для графа додекаедра гамільтонів цикл існує. За певних умов сучасна задача комівояжера, яка припускає неодноразове відвідання вершин, зводиться до відшукання в графі із заданими "довжинами" ребер гамільтонового циклу найменшої довжини. Згадані умови такі: кожне ребро $(a, b)$ графа має довжину, яка дорівнює довжині найкоротшого ланцюга між вершинами $a$ і $b$.

Одна з найвідоміших задач математики — проблема чотирьох фарб — також належить до графів. Ще в минулому столітті було відзначено, що кожну конкретну географічну карту можна розфарбувати чотирма фарбами так, щоб довільні дві сусідні країни, які мають лінійний не точковий кордон можна пофарбувати в різні кольори. Однак доведення для довільної карти, тобто для двозв'язного плоского (планарного) графа, вдалося дати з використанням обчислювальної техніки лише в останні роки минулого століття. Починаючи з XIX-го століття, було запропоновано багато доведень проблеми чотирьох фарб, як професійними математиками, так і не математиками, які нажаль містили помилки — всіх вабила простота, естетичність і гучна популярність цієї задачі. Зауважимо, що Хівуд у 1890 році довів, що достатньо п'яти фарб для розфарбування карти.

Для неплоских графів задача про розфарбування ставиться дещо інакше — для вершин. Тут є багато результатів і нерозв'язаних задач, які цікаві як і для теорії, так і для практичного застосування.

Граф називається *плоским* або *планарним*, якщо його можна укласти на площині без схрещення (перетину) ребер, шляхом їх неперервної деформації. Топологічний критерій планарності графа запропонували Лєв Понтрягін (1927 р.), не опублікувавши цей результат, і Казимир Куратовський[2] (1930 р.). Через вагомість планарної

[1] Такий цикл називається *гамільтоновим*.

[2] У цей час Казимир Куратовський працював у Львівській політехніці

реалізації електронних схем (зокрема друкування плат) останнім часом отримано інші критерії планарності та алгоритми укладення графів.

Починаючи з середини XIX-го століття, популярність графів і кількість праць з теорії графів та її застосування неухильно зростає. За допомогою графа моделюються довільні схеми, у яких виділяються більш прості частини (вершини) і зв'язки між ними (ребра). Не дивно, що графи зустрічаються в різноманітних дослідженнях з соціології, психології, економіки, теорії ігор, логіки, програмування, теорії ймовірностей (ланцюги Маркова), квантової механіки (діаграми Фейнмана), хімії (структура молекул), статистичної механіки, кристалофізики, медицини та біології (нервові, судинні та інші мережі), електроніки, лінгвістики та ін.

## 3.2 Неорієнтовані графи та термінологія

У подальшому викладенні матеріалу буде з'ясовано, що довільний скінченний граф (при загальному його визначенні) можна для наочності уявляти як сукупність ліній, які з'єднують задані точки в тривимірному просторі. Тому корисно мати означення так званого *геометричного графа* у просторі $\mathbb{R}^n$: це сукупність точок $X$ і простих[3] кривих $Y$, кінці яких є точки з $X$. Точки з множини $X$ називаються *вершинами*, а криві з $Y$ — *ребрами* графа. На рис. 3.5 зображено граф у просторі $\mathbb{R}^2$ (його, оче-

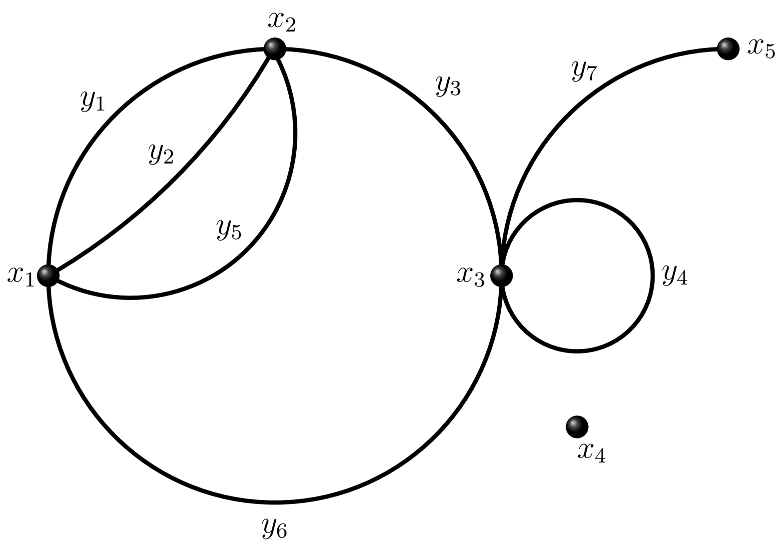



Рис. 3.5: Приклад графа в $\mathbb{R}^2$

видно, можна розглядати у просторі $\mathbb{R}^3$), де

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\};$$
$$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7\}.$$

Надалі будемо використовувати такі позначення:

$$G = (X, Y),$$

[3] Крива називається *простою*, якщо вона неперервна та не має самоперетинів.

$$n = n_G \ - \text{кількість вершин графа } G,$$
$$m = m_G \ - \text{кількість ребер графа } G.$$

### Основні терміни

Ми даємо основні терміни для неорієнтованих графів. Для орієнтованих графів термінологія буде викладена в підрозділі 3.4.

*Суміжні вершини* — це вершини, з'єднані ребром (вершини $x_2$ і $x_3$ графа $G$ на рис. 3.5 є суміжними), *суміжні ребра* — це ребра, які мають спільну вершину (ребра $y_1$, $y_2$, $y_3$ і $y_5$ графа $G$ на рис. 3.5 є суміжними)

Вершина $x_i$ і ребро $y_j$ *інцидентні* одне одному, якщо точка $x_i$ є кінцем кривої $y_j$ (вершина $x_2$ і ребро $y_3$ графа $G$ на рис. 3.5 інцидентні). *Петля* — це замкнене ребро, тобто ребро у якого кінці збігаються (ребро $y_4$ на рис. 3.5 є петлею). Вершина, яка неінцидентна жодному ребру називається *ізольованою* (вершина $x_4$ на рис. 3.5 ізольована).

*Паралельні* або *кратні* — це ребра, які інцидентні одній парі вершин (ребра $y_1$, $y_2$ та $y_5$ на рис. 3.5 є кратними, оскільки інцидентні парі вершин $x_1$, $x_2$).

*Маршрут* (який з'єднує вершини $x_i$ і $x_j$) — це скінченна послідовність ребер і інцидентних їм вершин, що складають неперервну криву з кінцями $x_i$ і $x_j$. Кількість ребер у маршруті називається його *довжиною* (тут ми також включаємо внесок повторюваних ребер). Так, зокрема, на рис. 3.5 послідовність ребер

$$y_1,\ y_5,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_7,$$

а у більш докладних позначеннях — перемішана послідовність вершин і ребер

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_5,\ x_1,\ y_2,\ x_2,\ y_3,\ x_3,\ y_4,\ x_3,\ \ y_7,\ x_5$$

є маршрутом довжини 6 з кінцями у вершинах $x_1, x_5$.

Маршрут називається *замкненим*, якщо його кінці збігаються. Так, зокрема, на рис. 3.5 маршрут

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_5,\ x_1$$

є замкненим.

Маршрут називається *ланцюгом*, якщо всі його ребра різні, і *простим ланцюгом*, якщо всі його вершини, крім, можливо, кінців ланцюга, різні. Так, зокрема, на рис. 3.5 маршрут

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_3,\ x_3\ y_4,\ x_3\ y_7,\ x_5$$

є ланцюгом, а маршрут

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_3,\ x_3\ y_7,\ x_5$$

є простим ланцюгом.

*Циклом* називається замкнений ланцюг, а *простий цикл* — це простий замкнений ланцюг. На рис. 3.5 ланцюг

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_3,\ x_3\ y_4,\ x_3\ y_6,\ x_1$$

є циклом, а простий ланцюг

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_3,\ x_3\ y_6,\ x_1$$

є простим циклом.

Граф називається *зв'язним*, якщо довільні дві його вершини можна поєднати ланцюгом.

*Підграф* — це довільна частина графа, що є графом. Так, зокрема, на рис. 3.5 вершина $\{x_4\}$ та доповнення до неї в графі $G$ є зв'язними підграфами.

*Компонентою* (*компонентою зв'язності*) називається максимальний зв'язний підграф у графі (наприклад, на рис. 3.5 вершина $\{x_4\}$ та доповнення до неї є компонентами графа $G$, тобто граф $G$ має дві компоненти).

*Степінь* $\deg x_i = \delta(x_i)$ *вершини* $x_i$ — це кількість інцидентних їй ребер, причому петля враховується як два ребра. Для графа на рис. 3.5 маємо

$$\begin{aligned}\delta(x_1) &= 4,\\ \delta(x_5) &= 1,\\ \delta(x_4) &= 0,\\ \delta(x_3) &= 5.\end{aligned}$$

Граф називається *$n$-зв'язним*, якщо між довільними двома його вершинами існує $n$ ланцюгів, які попарно не мають спільних кінцевих вершин.

Граф $G = (X, Y)$ називається:

- *порожнім*, якщо множина його ребер порожня;
- *простим*, якщо він не містить петель і кратних (паралельних) ребер;
- *повним*, якщо він простий і кожна пара його вершин суміжна (див. рис. 3.6);

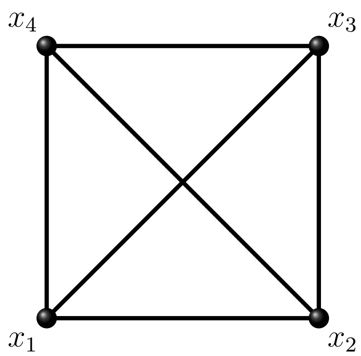



Рис. 3.6: Повний граф $K_4$

- *регулярним* або *однорідним* (*степеня $r$*), якщо степені всіх його вершин рівні (дорівнюють $r$);
- *деревом*, якщо він зв'язний і не містить циклів;
- *мультиграфом*, якщо він містить паралельні ребра;

- *псевдографом*, якщо він містить петлі та паралельні ребра.

Граф $G' = (X, Y')$ називається *доповненням* простого графа $G = (X, Y)$ з тією ж множиною вершин $X$, якщо $Y \cap Y' = \varnothing$ і граф $G_0 = (X, Y \cup Y')$ є повним (див. рис. 3.7). Іншими словами, у доповнювальному графі $G'$ вершини $x_i, x_j$ суміжні тоді

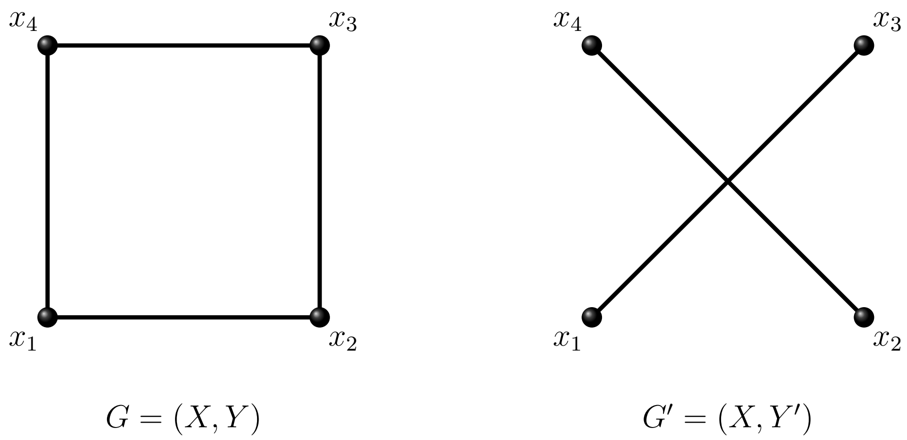



Рис. 3.7: Доповнення $G' = (X, Y')$ простого графа $G = (X, Y)$

і лише тоді, коли вони не є суміжними у вихідному простому графі $G$.

*Точка зчленування* графа — це вершина цього графа, видалення якої разом з інцидентними їй ребрами призводить до збільшення кількості компонент графа.

*Відстань $d(x_i, x_j)$ між вершинами $x_i, x_j$* графа $G$ — це довжина найкоротшого ланцюга між вершинами $x_i, x_j$. Якщо від вершини $x_i, x_j$ не з'єднує жоден ланцюг, то вважатимемо, що $d(x_i, x_j) = \infty$.

*Діаметром* $d(G)$ графа $G$ називається максимальна відстань між вершинами у графі, відмінна від $\infty$.

*Гранню* (*коміркою*) геометричного графа у просторі $\mathbb{R}^2$ (тобто плоского графа, в якого ребра перетинаються лише у вершинах) називається така непорожня замкнена підобласть площини, що довільні дві точки області можна з'єднати простою кривою, внутрішні (не кінцеві) точки якої лежать всередині області, не перетинаючись з ребрами графа.

*Границею грані* називається множина ребер і вершин графа, які належать грані. Кожен скінченний плоский граф має в точності одну необмежену грань, яка називається *зовнішньою гранню*. Решта граней (обмежених) називаються внутрішніми.

*Ексцентриситет* $e(x_i)$ вершини $x_i \in X$ у зв'язному графі $G = (X, Y)$ — це відстань від вершини $x_i$ до найвіддаленоїшої від неї вершини, а *радіус* $r(G)$ зв'язного графа $G$ — це найменший з ексцентриситетів вершин, тобто

$$e(x_i) = \max_{x_j \in X} d(x_i, x_j) \qquad \text{і} \qquad r(G) = \min_{x_i \in X} e(x_i).$$

Зрозуміло, що найбільший ексцентриситет дорівнює діаметру графа:

$$d(G) = \max_{x_i \in X} e(x_i) = \max_{x_i \in X} \max_{x_j \in X} d(x_i, x_j).$$

Вершина $x_i \in X$ у зв'язному графі $G = (X, Y)$ називається *центральною* в графі $G$, якщо на ній досягається мінімум ексцентриситетів, тобто

$$e(x_i) = r(G).$$

*Центром зв'язного графа* $G$ називається множина його центральних вершин. Центр зв'язного графа може складатися з єдиної вершини, а може — з двох і більше вершин. Наприклад центр простого циклу $C_n$ містить всі його $n$ вершин. На рис. 3.8 зображено дерево $G$ з кількістю вершини $n = 21$, кількістю ребер $m = 20$, де

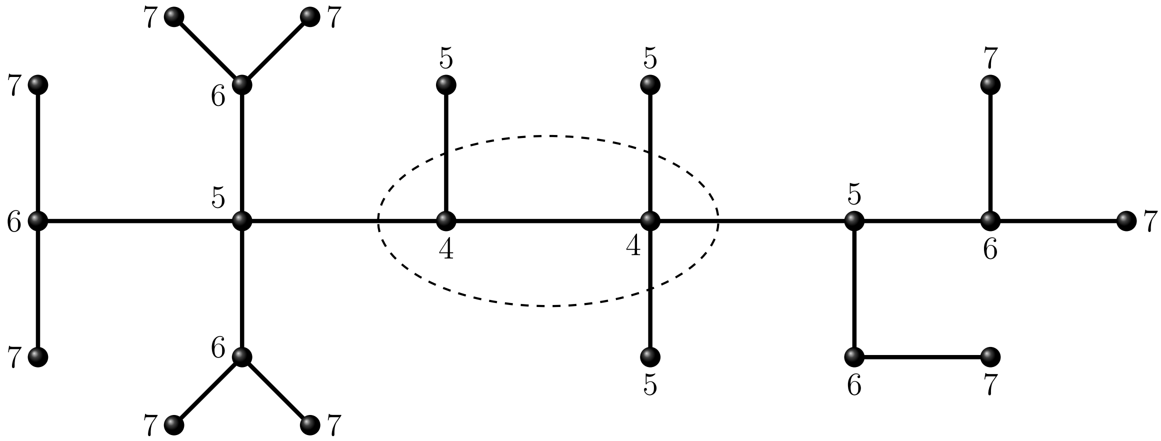



Рис. 3.8: Ексцентриситети вершин і центри дерева $G$

для кожної вершини вказано її ексцентриситет. Дерево має радіус $r(G) = 4$, діаметр $d(G) = 7$. Центр дерева $G$ складається з пари вершин, кожна з яких має мінімальний ексцентриситет 4.

## 3.3 Ойлерові цикли

Нагадаємо, що цикл зв'язного графа $G$, який містить всі ребра графа $G$ без повторень, називається *ойлеровим*.

Негативна відповідь на головоломку про Кьоніґсберські мости (див. підрозділ 3.1) випливає з такої теореми Ойлера.

**Теорема 3.3.1.** *Граф містить ойлерів цикл тоді і тільки тоді, коли він зв'язний і степені всіх його вершин — парні.*

*Доведення.* Якщо граф ойлерів, то він зв'язний і при обході ойлерового циклу вхід і вихід у чергову вершину дає дві одиниці в її степінь, оскільки ребра графа не повторюються. Позаяк обходяться всі ребра графа, то степені всіх вершин графа — парні.

Тепер припустимо, що зв'язний граф $G$ має парні степені вершин. Зафіксуємо вершину $x_0$ і перейдемо від неї до вершини $x_1$ деяким ребром $y_0$, пофарбувавши його подумки в довільний колір. Оскільки степінь вершини $x_1$ парний, то з вершини $x_1$ рушимо у вершину $x_2$ по непофарбованому ребру, пофарбувавши його після проходження. Рухаючись так по непофарбованих ребрах, ми повинні повернутися до початкової вершини $x_0$, проходячи іншими вершинами, можливо, декілька разів, оскільки в протилежному випадку вершина $x_i \neq x_0$, з якої ми не можемо рухатися далі, мала б непарний степінь. Повернувшись перший раз у вершину $x_0$, ми пофарбуємо граф $G_0$, який за побудовою є ойлеровим циклом. Якщо $G_0 \neq G$, то зі зв'язності графа $G$ випливає, що існує хоча б одне непофарбоване ребро $\overline{y}$, яке з'єднується з підграфом $G_0$ непофарбованим ланцюгом $z$, який, можливо, має нульову довжину (див. рис. 3.9). Вилучимо з графа $G$ пофарбовані ребра, внаслідок цього отримаємо граф з

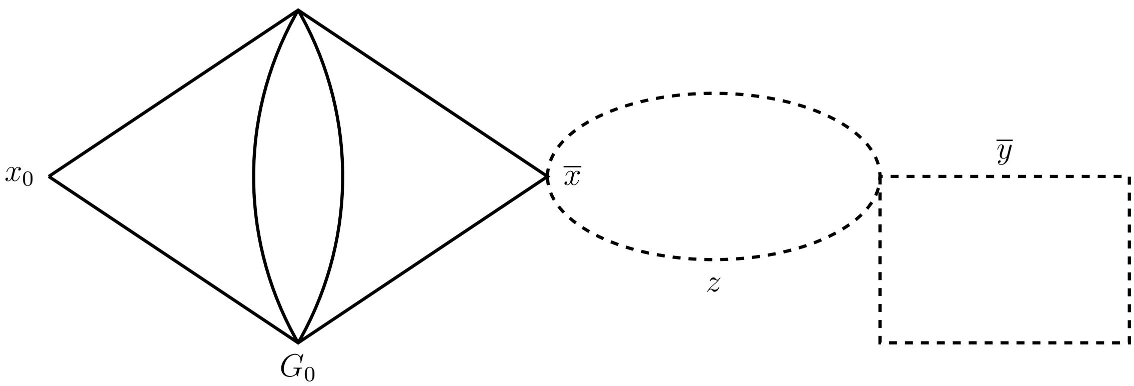



Рис. 3.9: Доведення теореми Ойлера

парними степенями вершин. Знайдемо вершину $\overline{x}$ дотику ланцюга $z \cup \overline{y}$ до підграфа $G_0$. Починаючи з вершини $\overline{x}$, можна виділити з непофарбованих ребер новий цикл $G_1$, що місить ланцюг $z \cup \overline{y}$ і в поєднанні підграфом $G_0$ також утворює ойлеровий цикл у графі $G_1 \cup G_0$. Нарощуючи вище описаним чином цикли, ми вичерпаємо весь скінченний граф $G$ ойлеровим циклом. $\square$

**Приклад 3.3.2.** Задача китайського листоноші тісно пов'язана з ойлеровими циклами: у графі $G$, ребрам якого приписані додатні ваги $c_j$, знайти замкнений маршрут $Q$, який містить усі ребра $\{y_j\}_{j=1}^m$, з мінімальною сумарною вагою $\sum\limits_{j=1}^{m} n_j c_j$, де $n_j$ — кількість проходжень ребра $y_j$ у маршруті $Q$.

Для довільного зв'язного графа $G$ задача китайського листоноші розв'язна, оскільки кількість проходжень ребра $y_j$ не обмежена одиницею. Якщо граф $G$ містить ойлеровий цикл, то довільний такий цикл дає розв'язок задачі китайського листоноші: кожне ребро має мінімум проходжень і вага циклу $\sum\limits_{j=1}^{m} n_j c_j$ — мінімальна. Алгоритми розв'язку задачі китайського листоноші пропонували Беллман і Кук — метод динамічного програмування в окремому випадку, коли $c_j = 1$ для всіх $j$, у загальному випадку — Едмондс, Джонсон, Басакер, Сааті, Крістофідес.

Застосування задачі китайського листоноші досить численні. Наприклад, це мінімізовані за довжиною пробігу транспортні задачі обслуговування споживачів у кожному ребрі на заданій мережі доріг (доставка пошти, продуктів та інших вантажів) чи інспекції кожного відрізку в мережі розподілених систем (електричних, телефонних, транспортних) та ін.

## 3.4 Графи та геометричні реалізації. Орієнтовані графи

Геометричний граф у $\mathbb{R}^n$, який визначений у підрозділі 3.2, зазвичай називається неорієнтованим. Якщо на кожному ребрі графа обрати певний напрямок, то такий граф називається *орієнтованим геометричним графом* (*орграфом*) у $\mathbb{R}^n$, а його ребра з напрямками — *дугами*. Наприклад, позначивши ребра графа на рис. 3.5 напрямками, отримаємо орієнтований граф (див. рис. 3.10).

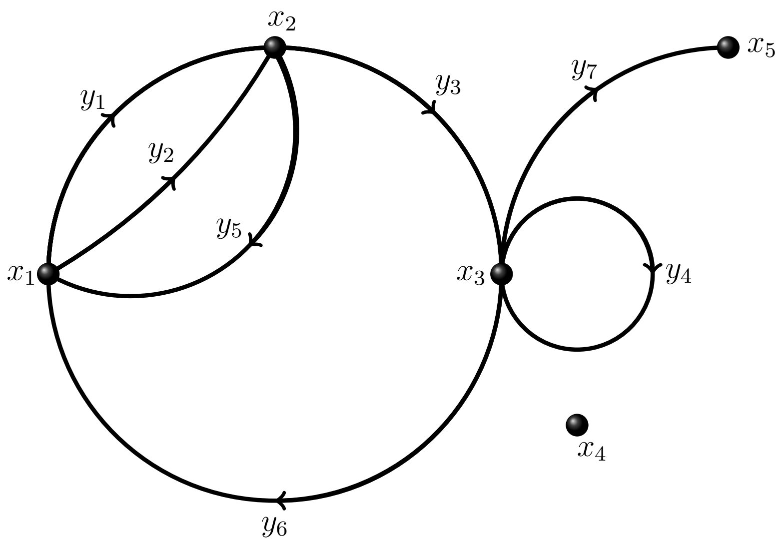



Рис. 3.10: Орієнтований граф в $\mathbb{R}^2$

Навпаки, ігноруючи напрямки дуг в орієнтованому графі, та розглядаючи їх як ребра, отримуємо відповідний *неорієнтований граф*. Саме тому, для орієнтованого графа збігаються всі поняття та характеристики, які відносяться до відповідного неорієнтованого графа: суміжність двох вершин (наприклад, на рис. 3.10 вершини $x_2$ і $x_3$), інцидентність дуги та вершини (наприклад, на рис. 3.10 вершина $x_2$ і дуга $y_3$), маршрут, ланцюг, цикл, зв'язність, степені вершини, $n$-зв'язність і т.д. Природно виникають аналогічні поняття та характеристики, які враховують орієнтацію дуг, частіше всього з додаванням прикметника "орієнтований".

*Орієнтований маршрут* (довжини $n$) — це послідовність з $n$ дуг (не обов'язково різних), які проходять неперервною лінією вздовж напрямку дуг від початкової вершини до кінцевої (наприклад, на рис. 3.10 орієнтований маршрут $y_1$, $y_5$, $y_2$, $y_3$ має початком вершину $x_1$, кінцем — вершину $x_3$). Довільний орієнтований маршрут є (неорієнтованим) маршрутом, але обернене твердження може і не виконуватися (наприклад, на рис. 3.10 маршрут $y_6$, $y_7$ між вершинами $x_1$, $x_5$ не є орієнтованим). Орієнтований маршрут без дуг, які повторюються, називається *шляхом* (наприклад, на рис. 3.10 маршрут $y_1$, $y_3$, $y_7$), а замкнений шлях — *контуром*. Очевидно, що шлях є ланцюгом, контур — циклом, але обернене твердження неправильне. Шлях (контур) без внутрішніх вершин, які повторюються, називається *простим*. Орграф називається *сильно зв'язним*, якщо для довільної пари різних вершин $v$ і $w$ існують шляхи з $v$ до $w$ і з $w$ до $v$.

Хоча геометричні графи (в просторі $\mathbb{R}^n$) мають в якості вершин $X$ і ребер (дуг) $Y$ реальні геометричні об'єкти у $\mathbb{R}^n$ (точки та криві), метричні характеристики цих об'єктів (форми кривих, їх довжини та відстані між точками) не відіграють важливої ролі. Беруться до уваги лише властивості інцидетності вершин $x_i$ і ребер (дуг) $y_j$. У зв'язку з цим означення графа як геометричного об'єкта в метричному просторі $\mathbb{R}^n$ є надмірним з логічної точки зору, хоча є наглядним, що спирається на геометричну інтуїцію.

## Означення абстрактного графа

*Орієнтованим графом*, або коротко *орграфом*, називається впорядкована трійка $G = (X, Y, f)$, де $X$, $Y$ — довільні множини $f\colon Y \to X \times X$ — відображення множини $Y$ у декартовий квадрат $X \times X$. Елементи множини $X$ називаються *вершинами*, множини $Y$ — *дугами*, а відображення $f$ — *інцидентором*. Елементами декартового квадрату $X \times X$ є впорядковані пари $(x_i, x_j)$ і рівність $f(y_k) = (x_i, x_j)$ можна інтерпретувати так: "дуга" $y_k$ виходить з "вершини" $x_i$ і входить у "вершину" $x_j$. Така дуга $y_k$ називається *інцидентною* вершинам $x_i$, $x_j$. Наприклад, для геометричного графа на рис. 3.10 можна побудувати відповідний йому абстрактний граф так: ввести абстрактні множини

$$
\begin{aligned}
X &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}\,, \\
Y &= \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7\}
\end{aligned}
$$

та інцидентор

$$
\begin{aligned}
f(y_1) &= (x_1, x_2); \\
f(y_2) &= (x_1, x_2); \\
f(y_3) &= (x_2, x_3); \\
f(y_4) &= (x_3, x_3); \\
f(y_5) &= (x_2, x_1); \\
f(y_6) &= (x_3, x_1); \\
f(y_7) &= (x_3, x_5).
\end{aligned}
$$

*Неорієнтований абстрактний граф* визначається за допомогою впорядкованої трійки $G = (X, Y, \varphi)$, де множина $X$ називається *множиною вершин*, $Y$ — *множина ребер*, а $\varphi\colon Y \to \langle X \times X\rangle$ — відображення ребер у симетризовний декартовий квадрат вершин, у якому пари $(x_i, x_j)$ і $(x_j, x_i)$ ототожнені. Якщо через $\Theta\colon X \times X \to \langle X \times X\rangle$ позначити відповідне відображення симетризації, то для орієнтованого графа $G = (X, Y, f)$, де $f\colon Y \to X \times X$, відповідний йому неорієнтований граф можна визначити як $G_0 = (X, Y, \Theta f)$.

Часто графи позначаються у вигляді впорядкованої пари перших двох множин впорядкованої трійки: $G = (X, Y)$, у цьому випадку інцидентор $f$ визначається неявно.

Два графи $G = (X, Y, f)$ і $G' = (X', Y', f')$ називаються *ізоморфними* (позначатимемо це так $G \sim G'$), якщо існують взаємно однозначні відображення вершин і ребер $\varphi\colon X \to X'$ і $\psi\colon Y \to Y'$, відповідно, які зберігають відношення інциденції:

$$f'\psi = (\varphi \times \varphi) f.$$

Інакше кажучи, ребро (дуга) $y$ інцидентне (входить у вершину $x$ графа $G$, виходить з вершини $x$ графа $G$) вершині $x$ графа $G$ тоді і тільки тоді, коли в графі $G'$ відповідне ребро (дуга) $y' = \psi(y)$ інцидентне (входить у вершину $x' = \varphi(x)$ графа $G'$, виходить з вершини $x' = \varphi(x)$ графа $G'$) вершині $x' = \varphi(x)$. Отже, ізоморфізм $\Phi\colon G \to G'$ — це відображення

$$\Phi(G) = \Phi(X, Y, f) = \left(\varphi(X), \psi(Y), (\varphi \times \varphi) f \psi^{-1}\right),$$

але для спрощення ми будемо іноді писати

$$X' = \Phi(X),\ Y' = \Phi(Y),\ f' = \Phi(f).$$

Ізоморфізми графа на самого себе називаються *автоморфізмами*. Оскільки обернене відображення до автоморфізму графа та композиція двох автоморфізмів графа є знову автоморфізмом цього графа, то автоморфізми фіксованого графа утворюють групу стосовно операції композиції автоморфізмів цього графа. Також відомо, що довільна скінченна група ізоморфна групі автоморфізмів деякого графа $G$ зі скінченною кількістю вершин та дуг. Якщо граф $G$ ізоморфний геометричному графу $G'$ у просторі $\mathbb{R}^n$, то граф $G'$ називається *геометричною реалізацією графа $G$*. Наприклад, геометричний граф у $\mathbb{R}^3$ на рис. 3.11 ізоморфний геометричному графу в

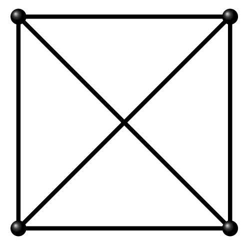


Рис. 3.11: Граф $K_4$

$\mathbb{R}^2$ на рис. 3.12.

Граф (абстрактний або геометричний), який має геометричну реалізацію в $\mathbb{R}^2$ (іншими словами — плоску реалізацію), називається *планарним* або *плоским*. Геометричний граф у $\mathbb{R}^3$ на рис. 3.11 — планарний, а п'ятивершинний граф на рис. 3.13 — непланарний.

Ізоморфізм графів є відношенням еквівалентності, тому вся множина графів розбивається на класи попарно ізоморфних графів. Часто ми не будемо розрізняти ізоморфні графи, іншими словами ми не будемо вивчати класи, а будемо лише мати справу з геометричними представниками (реалізаціями).

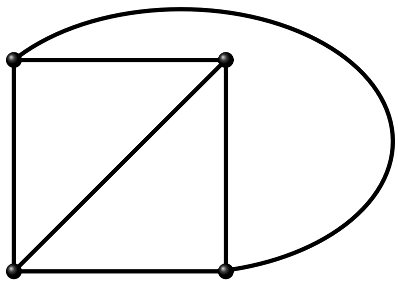


Рис. 3.12: Плоске зображення графа $K_4$

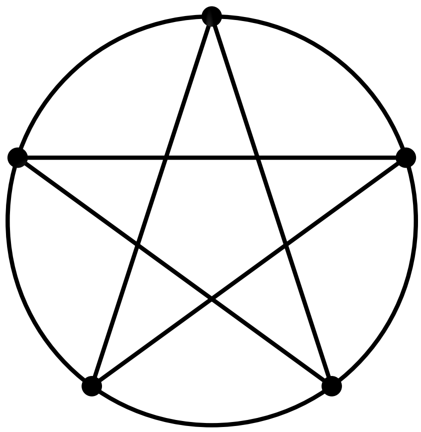


Рис. 3.13: Граф $K_5$

Необхідно підкреслити алгоритмічну складність перевірки ізоморфізму двох графів — це комбінаторна задач, яку можна звести до з'ясування подібності матриць суміжності цих графів (див. підрозділ 3.5). Геометричні зображення графів на кресленнях у цьому випадку мало ефективні. Наприклад, не відразу видно, що невеликі шестивершинні графи, які зображені на рис. 3.14, ізоморфні один одному.

Граф $G$ називається *скінченним*, якщо множини вершин $X$ і ребер $Y$ скінченні, і *локально скінченним*, якщо степені всіх вершин скінченні. Нескінченні дискретні графи (із зчисленними множинами вершин $X$ і ребер $Y$) зустрічаються в застосуваннях.

## Зв'язок з відношеннями. Найпростіші властивості

Якщо $R$ — бінарне відношення на множині $X$, то умову $x_1 R x_2$ можна зобразити наявністю дуги з елемента $x_1$ в елемент $x_2$ множини $X$. Отже, *між бінарними відношеннями та орієнтованими графами без паралельних дуг встановлюється взаємно однозначна відповідність*. Оскільки нас будуть цікавити графи, які допускають паралельні дуги (наприклад $y_1$, $y_2$ рис. 3.10), то ми маємо справу з об'єктом більш загальним, ніж бінарні відношення.

Розглянемо найпростіші комбінаторні властивості скінченних графів. Оскільки

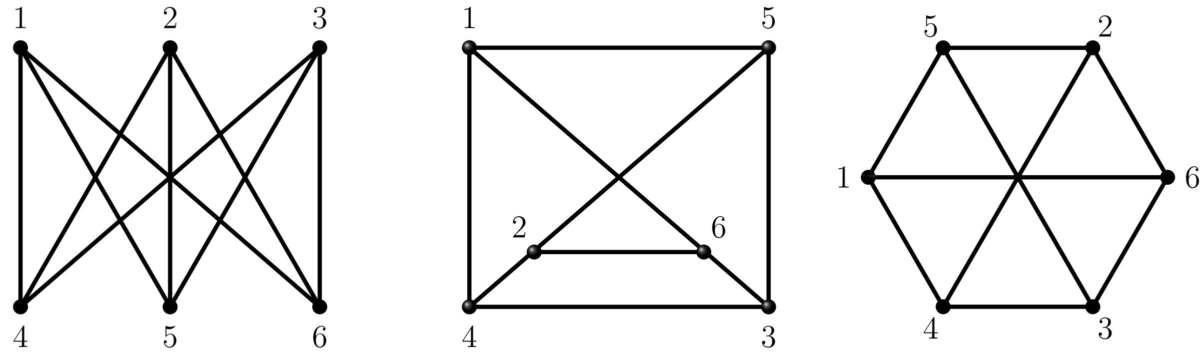



Рис. 3.14: Ізоморфні графи

поява кожного нового ребра додає по одиниці до степенів двох інцидентних йому вершин, або двійку до степеня однієї вершини у випадку петлі, то сума степенів всіх вершин графа в два рази перевищує кількість ребер $m = |Y|$ ("лема про рукостискання"):

$$\sum_{x \in X} \delta(x) = 2 \cdot |Y|.$$

**Наслідок 3.4.1.** *Кількість вершин непарного степеня графа є парним числом.*

Справді, сума парних степенів — парна, а тому і сума непарних степенів має бути парною.

В орієнтованому графі, окрім степеня вершини $\delta(x)$, вводяться поняття:

- *додатній степінь* $\delta^+(x)$ — кількість дуг, які починаються у вершині $x$;
- *від'ємний степінь* $\delta^-(x)$ — кількість дуг, які закінчуються у вершині $x$.

Також $\delta^+(x)$ і $\delta^-(x)$ називають *напівстепенями виходу* та *входу* у вершині $x$. Очевидно, що

$$\delta^+(x) + \delta^-(x) = \delta(x)$$

для довільної вершини $x$ графа, і

$$\sum_{x \in X} \delta^+(x) = \sum_{x \in X} \delta^-(x) = \frac{1}{2} \sum_{x \in X} \delta(x) = |Y| = m.$$

## Теорема Понтрягіна–Куратовського

**Теорема 3.4.2.** *Граф $G$ є планарним тоді і тільки тоді, коли він не містить підграфів вигляду $G_1$ і $G_2$, які можуть бути отримані заміною ребер у графах $K_{3,3}$ і $K_5$ довільними простими ланцюгами.*

Графи $K_{3,3}$ і $K_5$ зображено на рис. 3.15.

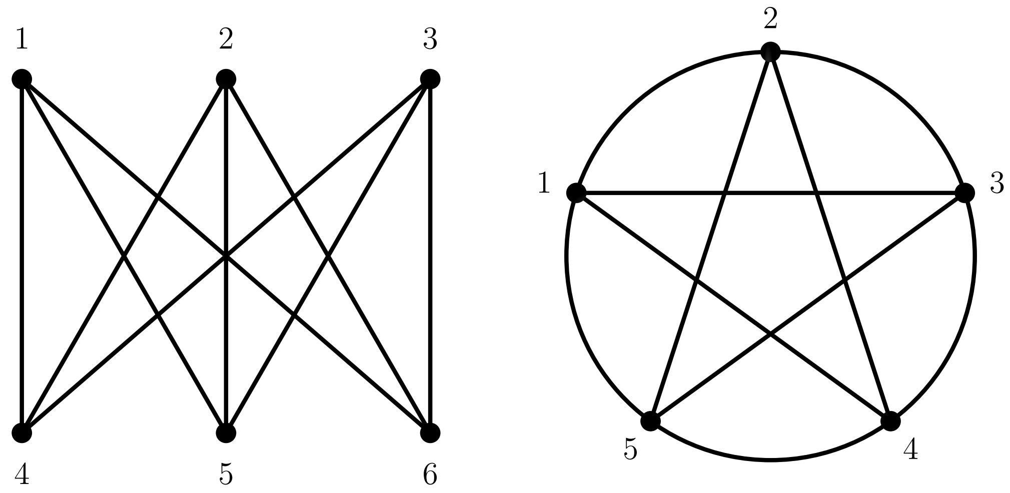



Рис. 3.15: Графи $K_{3,3}$ і $K_5$

## 3.5 Матриці суміжності, ізоморфізми та операції над графами

Квадратна матриця $A$ розміру $n \times n$, де $n = |X|$ — кількість вершин орієнтованого графа $G = (X, Y, f)$, елемент якої $a_{i,j}$ дорівнює кількості дуг, що йдуть від вершини $x_i$ до вершини $x_j$, називається *матрицею суміжності орієнтованого графа*

$$G = (X, Y, f).$$

Для неорієнтованого графа $G = (X, Y)$ елемент $a_{i,j}$ *матриці суміжності* $A_0$ визначається як кількість ребер, які з'єднують вершини $x_i$ і $x_j$. Очевидно, що матриця суміжності неорієнтованого графа $A_0$ завжди симетрична стосовно головної діагоналі:[4]

$$A_0 = A_0^T.$$

Ненульове значення елемента $a_{i,j}$ характеризує суміжність вершин $x_i$ і $x_j$ у графі, звідси й отримуємо назву — матриця суміжності. Зрозуміло, що орієнтований (неорієнтований) граф з точністю до ізоморфізму відновлюється за його матрицею суміжності $A$ $(A_0)$. Для орієнтованого графа, зображеного на рис. 3.10, матриця суміжності має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

[4]Надалі для матриці $M$, через $M^T$ ми будемо позначати *транспоновану матрицю* до матриці $M$, тобто матрицю утворену з $M$ заміною рядків на стовпці, чи навпаки.

а для неорієнтованого графа з рис. 3.5 матриця суміжності має вигляд:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що для довільного орієнтованого графа $G = (X, Y, f)$ і відповідного йому неорієнтованого графа $G_0 = (X, Y')$, який "втратив" орієнтацію ребер, матриці суміжності $A$ і $A_0$ цих графів пов'язані співвідношеннями

$$A + A^T = A_0.$$

Як вже відзначалося раніше, що практично, а у випадку геометричних графів дуже складно візуально, встановити ізморфізм двох графів (див. рис. 3.14). Матриці суміжності дозволяють сформулювати простий алгебраїчний критерій ізоморфізму графів.

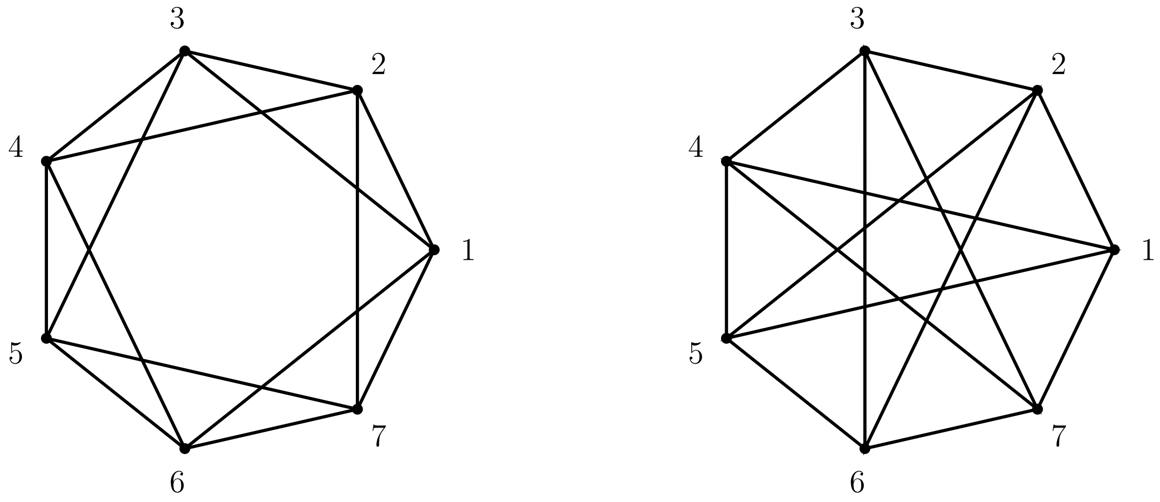
**Теорема 3.5.1.** *Орієнтовані графи $G = (X, Y, f)$ і $G' = (X', Y', f')$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакову кількість вершин, і матриця суміжності $A(G')$ графа $G'$ отримується з матриці суміжності $A(G)$ графа $G$ послідовними перестановками рядків з одночасною перестановками однойменних стовпців.*

*Доведення.* З означення матриці суміжності випливає, що взаємна заміна номерів вершин $x_1$, $x_2$ у графі $G$ призводить до перестановки місцями перших двох рядків і одночасно перших двох стовпців у матриці суміжності $A(G)$ графа $G$, і навпаки. Таке перетворення є найпростішим ізоморфізмом графа $G$ на себе, тобто є автоморфізмом графа $G$. У той же час ізоморфізм $\Phi$ графів $G$ і $G'$ одночасно визначається (і відновлюється) за своєю дією на вершинах $\Phi(X) = X'$ графів $G$ і $G'$, а отже він визначається деякою підстановкою $\sigma$ на множині номерів вершин графа. Але підстановка $\sigma$ розкладається однозначно, і це відомо з курсу алгебри, у суперпозицію найпростіших підстановок $i \leftrightarrow j$, тобто транспозицій, а тому ізоморфізм $\Phi\colon G \to G'$ еквівалентний суперпозиції найпростіших ізоморфізмів, які визначаються транспозиціями індексів вершин, та вказаному в умові теореми перетворенню матриці суміжності $A(G)$. □

У випадку неорієнтованих графів також виконується твердження теореми 3.5.1. А саме для матриць суміжності $A_0(G)$ і $A_0(G')$ графів $G = (X, Y)$ і $G' = (X', Y')$, відповідно, існує така підстановка $\sigma$ у групі підстановок множини індексів вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n = |X| = |X'|$, що для всіх елементів матриць суміжності виконується рівність

$$a'_{i,j} = a_{\sigma(i),\sigma(j)}.$$

Кількість усіх підстановок множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ дорівнює $n!$, а тому безпосереднє застосування теореми 3.5.1 для перевірки ізоморфності графів, яке полягає в переборі $n!$ варіантів, є неефективним у випадку великої кількості вершин $n = |X|$ графа. Тому існують різні засоби та алгоритми, які для графів певного виду істотно зменшують об'єм обчислень при перевірці ізоморфізму цих графів.




$G_1$ $G_2$

Рис. 3.16: До прикладу 3.5.2

**Приклад 3.5.2.** Доведіть, що неорієнтовані графи $G_1$ і $G_2$, зображені на рис. 3.16, ізоморфні один одному.

***Розв'язок.*** Запишемо матриці суміжності графів $G_1$ і $G_2$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ми пропонуємо самостійно читачеві завершити доведення, знайшовши підстановку множини чисел

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

з $7! = 5040$ можливих, яка визначає одночасну перестановку відповідних рядків і стовпців матриці $A_1$ так, щоб в результаті цього перетворення отримати матрицю $A_2$.

Для двох орієнтованих графів $G = (X, Y, f)$ і $G_1 = (X, Y_1, f_1)$ з однаковими множинами вершин визначимо операції *додавання* та *множення* графів $G$ і $G_1$.

*Сума* графів

$$G + G_1 = (X, Y \cup Y_1, f + f_1)$$

отримується об'єднанням множини дуг $Y$ і $Y_1$ (див. рис. 3.17).

При *множенні* графів

$$GG_1 = (X, Y_0, f_0)$$

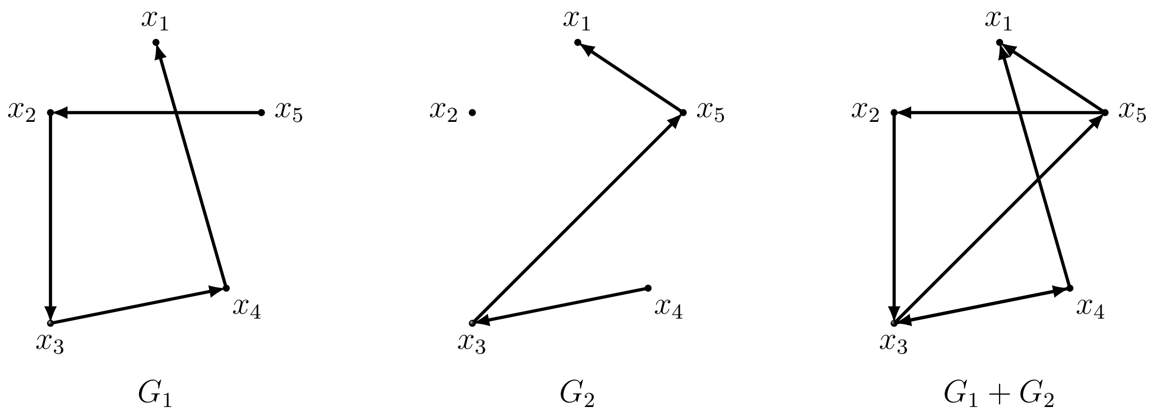



Рис. 3.17: Сума двох орієнтованих графів зі спільною кількістю вершин

з вершини $x_i$ до вершини $x_j$ іде стільки дуг, скільки існує шляхів довжини 2 у графі $G + G_1$ з вершини $x_i$ до вершини $x_j$ таких, що перша дуга належить множині $Y$, а друга — $Y_1$ (див. рис. 3.18).

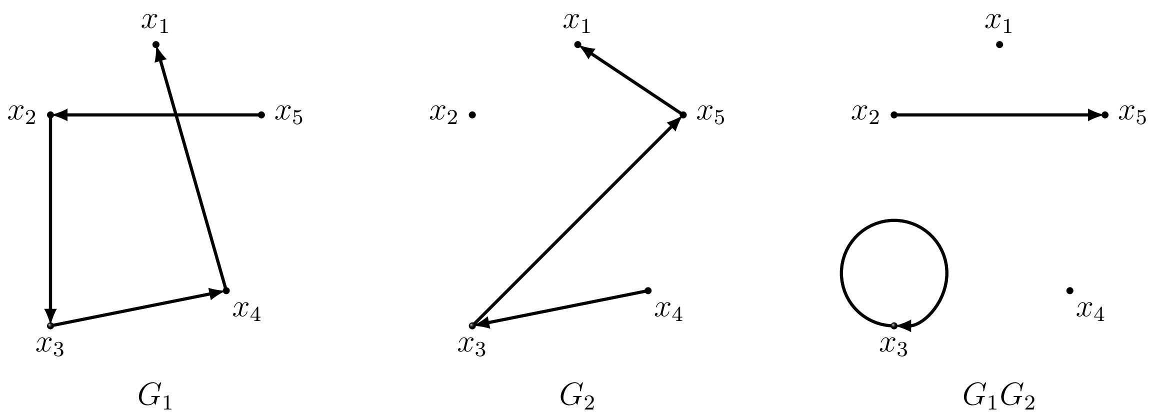



Рис. 3.18: Добуток двох орієнтованих графів зі спільною кількістю вершин

**Теорема 3.5.3.** *Для суми та добутку орієнтованих графів (з однаковими множинами вершин) матриці суміжності додаються та перемножуються, відповідно, і навпаки:*

$$A(G + G_1) = A(G) + A(G_1) \qquad i \qquad A(GG_1) = A(G) \cdot A(G_1).$$

*Доведення.* Твердження теореми для суми графів з однаковими множинами вершин є очевидним: у графі $G + G_1$ кількість дуг з вершини $x_i$ до вершини $x_j$ дорівнює

$$a_{ij}(G) + a_{ij}(G_1).$$

У графі $G+G_1$ кількість різних шляхів з послідовністю вершин вигляду $(x_i, x_k, x_j)$ таких, що дуги з вершини $x_i$ до вершини $x_k$ належать графу $G$, а дуги з вершини $x_k$

до вершини $x_j$ належать графу $G_1$, дорівнює

$$a_{ik}(G) \cdot a_{kj}(G_1)$$

(див. рис. 3.19). У цій послідовності вершин $(x_i, x_k, x_j)$ проміжна вершина $x_k$ фіксо-

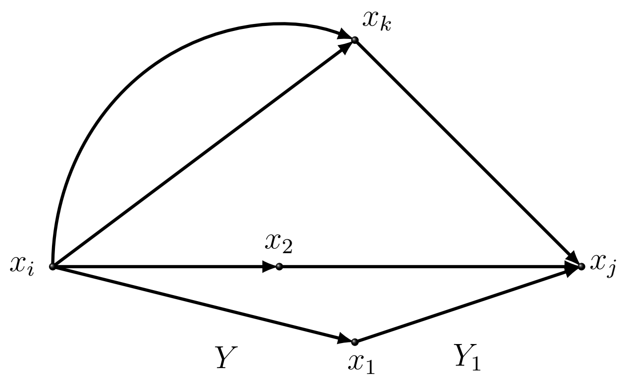



Рис. 3.19: Граф $G + G_1$

вана. Загальна кількість шляхів довжини 2 з першою дугою з множини $Y$, а з другою дугою з множини $Y_1$ дорівнює

$$\sum_{k-1}^{m} a_{ik}(G) \cdot a_{kj}(G_1)$$

— загальному елементу матриці $A(G) \cdot A(G_1)$. □

**Наслідок 3.5.4.** *Якщо $A$ — матриця суміжності орієнтованого графа $G$, то елемент $a_{ij}^n$ матриці $A^n$ (натурального степеня $n$) дорівнює кількості різних орієнтованих маршрутів довжини $n$, які виходять з вершини $x_i$ і входять у вершину $x_j$ графа $G$.*

*Доведення.* Доведення проведемо методом математичної індукції.

Твердження наслідку правильне при $n = 1$, і це випливає з означення суміжності вершин орієнтованого графа. Припустимо, що твердження правильне для $k = n - 1$: елемент $a_{ij}^{n-1}$ матриці $A^{n-1}$ дорівнює кількості різних орієнтованих маршрутів довжини $n - 1$, які виходять з вершини $x_i$ і входять у вершину $x_j$ у графі $G$, і одночасно кількості дуг з вершини $x_i$ до вершини $x_j$ у графі $G^{n-1}$, який визначений послідовним перемноженням двох чинників. Оскільки $A^n = A^{n-1} \cdot A$, то, застосувавши теорему 3.5.3 до добутку графів $G^{n-1}G$, отримуємо твердження для матриці $A^n$ ($n$-го кроку індукції). □

**Наслідок 3.5.5.** *В орієнтованому графі $G$:*

- *існує орієнтований маршрут довжини $n$ тоді і тільки тоді, коли $A^n \neq 0$;*
- *не існує контурів тоді і тільки тоді, коли матриця суміжності є нільпотентною*[5].

[5]Квадратна матриця $A$ називається *нільпотентною*, якщо її степінь $A^k$ є нуль-матрицею для деякого натурального числа $k \geqslant 2$.

**Зауваження 3.5.6.** У зв'язку з другою частиною наслідку 3.5.5 корисно відзначити, що у випадку контура довжини $k$ з вершинами $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ всі степені $A^{nk}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ матриці суміжності $A$ мають відмінні від нуля діагональні елементи з номерами $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), \ldots, (\gamma, \gamma)$. Якщо контурів у графа немає (зокрема, якщо більше того, немає циклів), то довжини всіх шляхів обмежені кількістю дуг $m$ і $A^{m+1}$ є нуль-матрицею, елемент $a_{ij}^n$ матриці $A^n$ дорівнює кількості різних простих шляхів довжини $n$ з вершини $i$ у вершину $j$.

Питання *досяжності* однієї вершини з іншої шляхом певної довжини, пов'язані, звичайно, з властивостями степенів матриці суміжності $A$ графа. Виявляється, що властивості степенів

$$A,\ A^2,\ A^3,\ \ldots$$

довільної матриці $A$ з невід'ємними елементами $a_{ij} \geqslant 0$ (наприклад, матриці вартостей у економіці, імовірностей переходів, і т. д.) також надають цінну інформацію про зв'язки між локальними "вузлами" об'єкта в даний момент чи різні моменти часу.

Практично корисні задачі про підрахунок кількості контурів заданої довжини $n$ природно пов'язані з матрицею суміжності $A$ графа: у цьому випадку достатньо проаналізувати діагональні елементи матриці $A^n$. Задачі такого типу зустрічаються при кодуванні в криптографії, лінгвістиці, при моделюванні графом дискретних фізичних процесів — у зв'язку з підсистемами, які "зациклюються".

## 3.6 Матриця інцидентності

Матриця інцидентності — одна з форм подання графа, в якій вказуються зв'язки між інцидентними елементами графа (ребро (дуга) і вершина). Стовпці матриці відповідають ребрам, рядки — вершинам. Ненульове значення в клітинці матриці вказує на зв'язок між вершиною і ребром (їх інцидентність).

Оскільки вершини та дуги орієнтованого графа $G = (X, Y, f)$ без петель занумеровані:

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\},$$
$$Y = \{y_1, \ldots, y_m\},$$

дію інцидентора $f$ можна охарактеризувати $(n \times m)$-*матрицею інцидентності* $B = \{b_{ij}\}$, де за означенням:

$$b_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{якщо дуга } y_j \text{ виходить з вершини } x_i; \\ -1, & \text{якщо дуга } y_j \text{ заходить у вершину } x_i; \\ 0, & \text{якщо дуга } y_j \text{ не інцидентна вершині } x_i. \end{cases}$$

Для неорієнтованого графа $G$ без петель *матриця інцидетності* $R = \{r_{ij}\}$ визначається так:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо ребро } y_j \text{ інцидентне вершині } x_i; \\ 0, & \text{якщо ребро } y_j \text{ не інцидентне вершині } x_i. \end{cases}$$

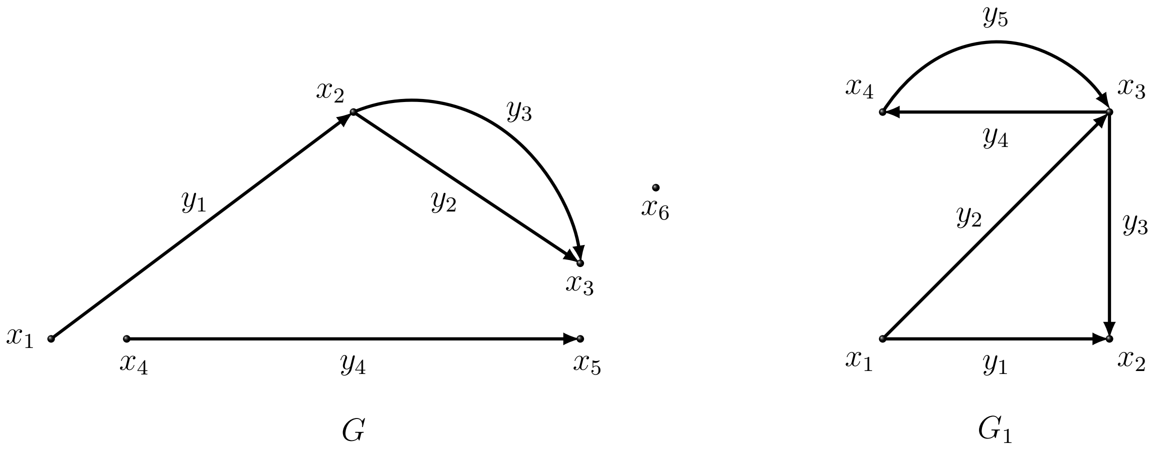



Рис. 3.20: Орієнтовані графи

**Приклад 3.6.1.** Для орієнтованих графів $G$ і $G_1$, зображених на рис. 3.20, матриці інцидентності мають вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

відповідно.

**Приклад 3.6.2.** Для неорієнтованих графів $G$ і $G_1$, зображених на рис. 3.21, матриці

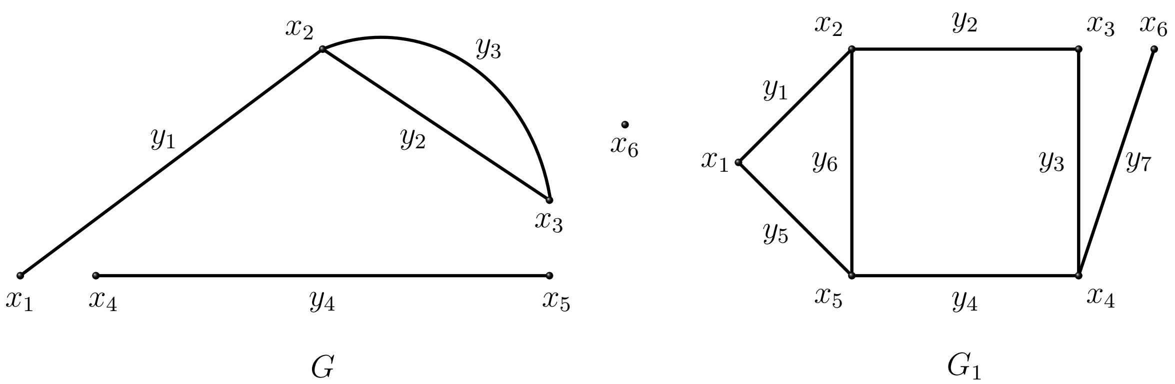



Рис. 3.21: Неорієнтовані графи

інцидентності мають вигляд

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

відповідно.

Особливості подання матриць інцидентності неорієнтованих графів:

- Не використовується для графів з петлями, оскільки в петлі одна вершина є і початком, і кінцем.
- У кожному стовпці повинні стояти дві одиниці, а всі інші символи — нулі.

Матриці орієнтованого та відповідного йому симетризованого неорієнтованого графів, а саме їх елементи пов'язані співвідношенням

$$|b_{ij}| = r_{ij}.$$

Очевидно також, що в матриці інцидентності $B$ орієнтованого графа кожен стовпчик містить лише один символ $+1$ і лише один символ $-1$, а в матриці інцидентності $R$ неорієнтованого графа кожен стовпчик містить лише два символи 1, решта ж елементів — це нулі. З цієї ж причини сума всіх рядків у матриці $B$ дорівнює нуль-вектору, а у матриці $R$ — нулю за модулем 2.

Якщо граф $G$ має $n$ компонент зв'язності, то, нумеруючи його вершини та ребра окремими групами в кожній компоненті, або переставляючи стовпці та рядки в матрицях інцидетності $B$ і $R$, отримуємо для матриці $B$ $(R)$ блочно-діагональну структуру:

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_n \end{pmatrix}.$$

Виконується й обернене твердження:

**Теорема 3.6.3.** *Ранг матриці інцидентності $B$ зв'язного орієнтованого графа $G$ з $n$ вершинами дорівнює $n-1$, а саме кількості рядків матриці $B$ без одного.*

*Доведення.* Оскільки граф $G$ є зв'язний, то кожній вершині інцидентна хоча б одна дуга, а тому в матриці інцидентності $B$ цього графа немає нульових рядків. Викреслимо останній вектор-рядок $\vec{b}_n$ матриці $B$, і припустимо, що для матриці $B_0$, яка залишилася, лінійна комбінація її вектор-рядків дорівнює нуль-вектору:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \vec{b}_i = \vec{0}.$$

Вершина $x_n$ зв'язана дугою $y_{j_1}$ з деякою вершиною $x_{i_1}$, тому у викресленому рядку $\vec{b}_n$ матриці $B$ елемент $b_{nj_1}$ відмінний від нуля, а в рядку $\vec{b}_{i_1}$ матриці $B$ елемент $b_{i_1 j_1}$

також відмінний від нуля. Оскільки в стовпці $j_1$ матриці $B_0$ тільки один елемент $b_{i_1j_1}$ відмінний від нуля, то $\alpha_{i_1} = 0$. У графі $G$ система вершин $\{x_n, \ldots, x_{i_1}\}$ зв'язана деякою дугою $y_{j_2}$ з новою вершиною $x_{i_2}$, тому $b_{i_2j_2} \neq 0$. Другий ненульовий елемент стовпця $j_2$ матриці інцидентності $B$ належить одному з рядків $\vec{b}_n$, $\vec{b}_{i_1}$, а отже $\alpha_{i_2} = 0$. Продовжуючи процес приєднання вершин (рядків матриці $B$):

$$\{x_n\}\,, \quad \{x_n, x_{i_1}\}\,, \quad \{x_n, x_{i_1}, x_{i_2}\}\,, \quad \ldots, \quad \{X\}\,,$$

ми послідовно отримаємо нульові значення для всіх коефіцієнтів $\alpha_i$ у лінійній комбінації вектор-рядків матриці $B_0$ так, що

$$\operatorname{rang} B_0 = \operatorname{rang} B = n - 1,$$

а це завершує доведення теореми[6]. □

Матриці інцидентності та суміжності орієнтованого графа можна пов'язати цікавим співвідношенням, якщо ввести діагональну матрицю степенів вершин

$$\Delta = \{\delta_{ij}\}$$

орієнтованого графа $G$: $\delta_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$ і $\delta_{ii} = \delta(x_i)$ — степінь вершини $x_i$.

**Теорема 3.6.4.** *Якщо $G$ — орієнтований граф без петель, то його матриці суміжності $A$, інцидентності $B$ і степенів вершин $\Delta$ пов'язані співвідношенням:*

$$A + A^T + BB^T = \Delta.$$

*Доведення.* Елемент $\overline{a}_{ij}$ матриці $A + A^T$ дорівнює кількості $\Pi_{ij}$ ребер, які з'єднують вершини $x_i$ та $x_j$ і $\overline{a}_{ii} = 2a_{ii} = 0$. Для матриці $BB^T$ елемент

$$\overline{b}_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} b_{jk},$$

значення якого дорівнює $-\Pi_{ij}$ у випадку $i \neq j$ і $\delta(x_i)$ — степінь вершини $x_i$ у випадку $i = j$. □

**Наслідок 3.6.5.** *Для орієнтованого графа $G = (X, Y, f)$ виконуються такі твердження:*

1. $\det(A + BB^T + A^T) = \prod_{i=1}^{n} \delta(x_i)$.
2. *Граф $G$ є регулярним тоді і тільки тоді, коли матриця*
$$\Delta = A + A^T + BB^T$$
*скалярна, тобто*
$$\Delta = A + A^T + BB^T = rI,$$
*де $r = \delta(x_i)$ — степінь графа $G$, а $I$ — одинична матриця.*
3. *Граф $G$ без петель є повним тоді і лише тоді, коли*
$$\det(A + BB^T + A^T) = (n-1)^n,$$
*де $n = |X|$.*

[6]Через $\operatorname{rang} M$ ми позначаємо ранг матриці $M$, тобто максимальну кількість лінійно незалежних рядків (чи стовпців) матриці $M$.

## 3.7 Розфарбування графів

Ми вже говорили про проблему чотирьох фарб для плоских карт у підрозділі 3.1. Настільки багато математиків і нематематиків вона спокусила, що відомий спеціаліст у теорії графів Френк Харрарі у 1969 році писав, що гіпотезу чотирьох фарб можна на повній підставі називати ще "хворобою чотирьох фарб", оскільки вона дуже схожа на захворювання.

Майже п'ятдесят років тому, у 1976 році, проблема чотирьох фарб була розв'язана позитивно. Однак багатокрокове доведення цього факту є "річчю в собі", та його настільки важко перевірити, що деякі спеціалісти в теорії графів піддають до сумніву, що проблема чотирьох фарб розв'язана. Етапи доведення-розв'язку проблеми чотирьох фарб такі. Спочатку, використовуючи ідею Гаррета Біркгофа (Garrett Birkhoff, 1911–1996) про описання властивостей спеціальних "незвідних", тобто таких, що не розфарбовуються чотирма фарбами графів, математики звели кількість вершин 4-розфарбовних графів до 96. Потім у 1969 році Х. Хаєш звів проблему чотирьох фарб до питання 4-розфарбування великої, але скінченної кількості графів. Трохи пізніше кількість таких графів була зведена до 1482. Нарешті, у 1976 році К. Аппель і В. Хейкен разом з колективом математиків і програмістів правильно розфарбували всі 1482 графа за допомогою потужного комп'ютера, затративши на розфарбування приблизно 2000 годин машинного часу.

Однак ця проблема, яка так довго стояла відкритою, — лише окремий випадок цілого напрямку теорії графів — розфарбування графів. Переформулюємо задачу розфарбування країн зв'язного графа $G$ у задачу розфарбування вершин іншого плоского графа $\overline{G}$, не вимагаючи для загальності, щоб граф $G$ був двозв'язним. Всередині кожної області $Q_i$ (грані, країни) графа $G$, включаючи зовнішню, позначимо одну точку $\overline{x}_i$ — вершину шуканого графа $\overline{G}$.

Якщо у графі $G$ країни $Q_i$ і $Q_j$ мають спільне ребро $y$, то з'єднаємо у графі $\overline{G}$ вершини $\overline{x}_i$ і $\overline{x}_j$ ребром $\overline{y}$, яке перетинає лише ребро $y$. Граф $\overline{G}$ називається *геометрично дуальним* до плоского графа $G$.

**Наслідок 3.7.1.** *Задача розфарбування країн географічної карти (областей плоского графа $G$) еквівалентна задачі розфарбування вершин геометрично дуального графа $\overline{G}$, який також є плоским.*

При цьому умова правильного розфарбування вершин полягає в тому, що суміжні у графі $\overline{G}$ вершини $\overline{x}_i$, $\overline{x}_j$ набувають різних кольорів. Оскільки операція $G \mapsto \overline{G}$ відображає увесь клас зв'язних графів плоских графів на себе взаємно однозначно, і це випливає з рівності $\overline{\overline{G}} = G$, то проблем чотирьох фарб переформулюється так:

> *довільний плоский граф допускає правильне розфарбування вершин не більш, ніж чотирма фарбами.*

**Зауваження 3.7.2.** Еквівалентність проблеми розфарбування країн і проблеми розфарбування вершин у класі всіх плоских графів можна встановити, не користуючись точною рівністю $\overline{\overline{G}} = G$. Важливо, що при переході до дуального графа $G \mapsto \overline{G}$ розфарбування країн $G$ переходить у розфарбування вершин графа $\overline{G}$, розфарбування вершин графа $G$ — у розфарбування країн графа $\overline{G}$.

Довільний, не обов'язково плоский та зв'язний, граф $\overline{G}$ називається *r-розфарбовним* або *r-хроматичним*, якщо він допускає правильне розфарбування вершин графа $r$ фарбами.

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що при розфарбуванні вершин граф не містить паралельних ребер і петель, тобто є простим.

Неорієнтовані графи $G_1$ і $G_2$, зображені на рис. 3.22: $G_1$ є 3-розфарбовним, а $G_2$

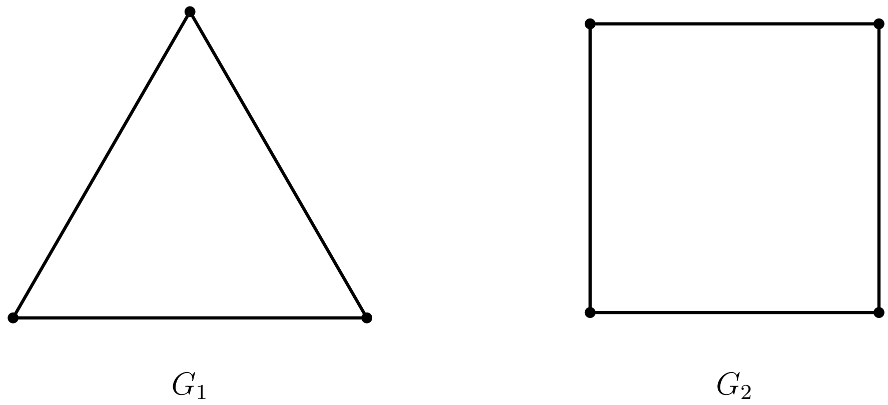



Рис. 3.22: 3-розфарбовний та 2-розфарбовний графи

є 4, 3, 2-розфарбовним.

Мінімальна кількість кольорів, необхідна для правильного розфарбування графа $G$ ($\min r$) називається *хроматичним числом* графа $G$ і позначається $\gamma(G)$.

Деякі практичні задачі пов'язані з розфарбуванням ребер графа $G$, яке вважається правильним, якщо кожні два суміжні ребра, які інцидентні одній вершині, розфарбовуються в різні кольори. Найменша кількість кольорів, яка допускає правильне розфарбування ребер, називається *хроматичним класом* або *індексом* графа $G$ і позначається $\gamma'(G)$. В принципі розфарбування ребер графа $G$ зводиться до розфарбування вершин деякого графа $G^1$, який називається *дуальним*[7] за відношенням до графа $G$, а тому $\gamma'(G) = \gamma(G^1)$ — хроматичний клас графа $G$ дорівнює хроматичному числу дуального графа $G^1$. Ця властивість дуального графа $G^1$ відповідним чином індукує його означення: *вершини дуального графа $G^1$ перебувають у взаємно однозначній відповідності з ребрами графа $G$, і дві вершини у графі $G^1$ поєднані ребром тоді і тільки тоді, коли два ребра у графі $G$ суміжні.*

Якщо $\gamma(G) = 1$, то граф $G$ не має ребер, тобто він складається з ізольованих вершин, а петлі в питаннях розфарбування вершин не враховуються. Довільне дерево має хроматичне число 2; граф $G$ з хроматичним числом $\gamma(G) = 2$ називається *біхроматичним*. Довільне розфарбування графа $G$ двома фарбами (див. рис. 3.23) розбиває вершини цього графа на дві множини одного кольору $X_1$ і $X_2$, всередині кожної з яких вершина графа $G$ несуміжні. Ця обставина знаходить різноманітні застосування на практиці та при різних доведеннях.

Нам буде потрібна майже очевидна така лема.

[7] У літературі також граф $G^1$ називається *реберним графом* для графа $G$ і позначається $L(G)$

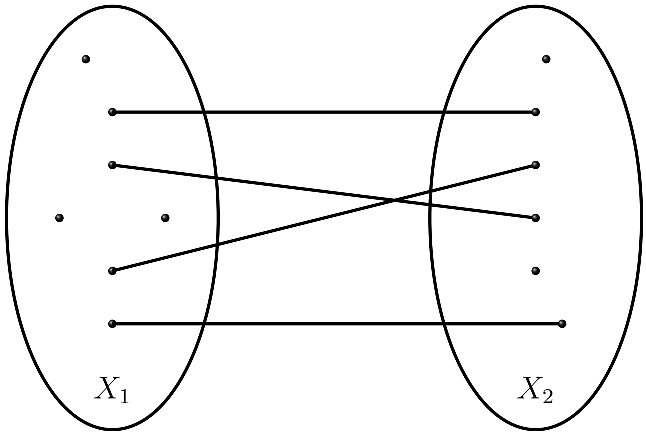



Рис. 3.23: Біхроматичний граф

**Лема 3.7.3.** *Довільний замкнений маршрут*

$$Q = \{x_0, y_1, x_1, y_2, x_2, \ldots, y_n, x_0\}$$

*у графі $G$ можна вичерпати шляхом багатократного застосування таких операцій:*

$\Phi$ : *видалення неперервно прохідного маршруту, який є простим циклом;*
$\Psi$ : *видалення тривіального замкненого підмаршруту довжини 2 вигляду*

$$\{x_k, y_k, x_{k+1}, y_k, x_k\}.$$

*Доведення.* Справді, застосуємо до замкненого маршруту $Q$ послідовно операцію $\Phi$ настільки, наскільки це можливо. Оскільки підмаршрути $Q_i$ маршруту $Q$, які залишилися не входять до жодного циклу, то кожне ребро $q \in Q_i$ зустрічається в об'єднанні підмаршрутів $\bigcup\limits_i Q_i$ однакову кількість разів у прямому та зворотньому напрямках. Застосовуючи тепер послідовно операцію $\Psi$, отримуємо порожні ланцюг. □

**Зауваження 3.7.4.** Такі три властивості для графа $G$ еквівалентні:

($i$) усі замкнені маршрути в графі $G$ мають парну довжину;
($ii$) усі цикли в графі $G$ мають парну довжину;
($iii$) усі прості цикли в графі $G$ мають парну довжину.

**Теорема 3.7.5 (теорема Кьоніґа, теорема Кьоніґа–Егерварі).** *Граф $G$ є біхроматичним тоді і лише тоді, коли всі його цикли мають парну довжину.*

*Доведення.* Припустимо, що граф $G$ є біхроматичним. Реалізуємо довільне його розфарбування двома кольорами у кожній компоненті зв'язності. Кінці довільного ланцюга у цьому графі парної довжини мають однаковий колір, а непарної довжини — різні кольори. Тому замкнені маршрути та цикли непарної довжини відсутні.

Навпаки, нехай усі замкнені маршрути графа $G$ мають парну довжину. Пофарбуємо кольором $\alpha$ вершину $x_0$, потім кольором $\beta$ — її оточення, тобто множину суміжних вершин, кольором $\alpha$ — оточення вершин кольору $\beta$ і т.д. За скінченну кількість кроків усі вершини графа пофарбуються кольорами $\alpha$ і $\beta$, причому розфабування вершини $x_i$ двічі означає, що між першим і другим пофарбуванням алгоритм розфарбування захопив замкнений маршрут з початком і кінцем — вершиною $x_i$. Через парність довжини маршруту графа $G$ обидва рази вершина $x_i$ пофарбована одним кольором ($\alpha$ або $\beta$). □

Охарактеризувати структуру $n$-хроматичних графів для $n \geqslant 3$ подібно до того, як це запропоновано в теоремі Кьоніґа (теорема 3.7.5) для біхроматичного графа, поки ще не вдалося. Є багато часткових результатів, наприклад, для деяких класів регулярних графів, плоских графів з трикутними комірками (плоских триангуляцій).

Зауважимо, що хоча планарний граф має хроматичне число $\gamma \leqslant 4$, планарність не є характеристичною ознакою 4-хроматичності графа: граф $K_{3,3}$ (див. рис. 3.15) біхроматичний ($\gamma(K_{3,3}) = 2$), але не є планарним.

Для отримання загальних оцінок хроматичного числа графів зручно ввести декілька нових означень.

*Клікою* графа $G$ називається довільний повний підграф в $G$. *Клікове число* або *щільність графа* $G$ — це кількість вершин максимальної кліки та клікове число графа $G$ позначається $\rho(G)$.

*Незалежна множина* графа $G$ — це довільна підмножини попарно несуміжних вершин в $G$. *Число незалежності* $\alpha(G)$ графа $G$ — це потужність максимальної незалежної множини в $G$.

*Доповненням графа* $G = (X, Y)$ називається граф $\widetilde{G} = (X, \widetilde{Y})$ з тією є множиною вершин, який доповнює граф $G$ до повного графа

$$G_0 = G + \overline{G} = (X, Y \cup \widetilde{Y}).$$

Розглянемо граф $G$, який зображений на рис. 3.24. Його кліки, а точніше всі його

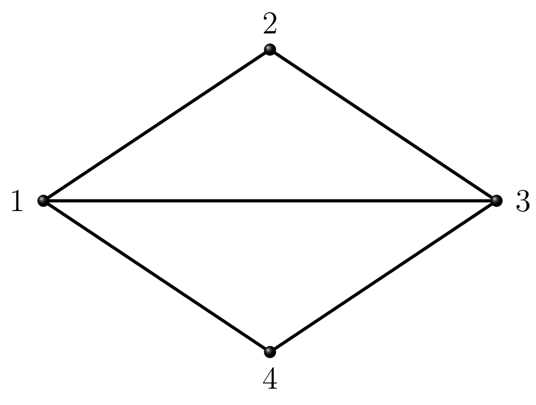



Рис. 3.24: Граф $G$

ізоморфні кліки, зображені на рис. 3.25. Доповнення графа $G$ зображено на рис. 3.26.

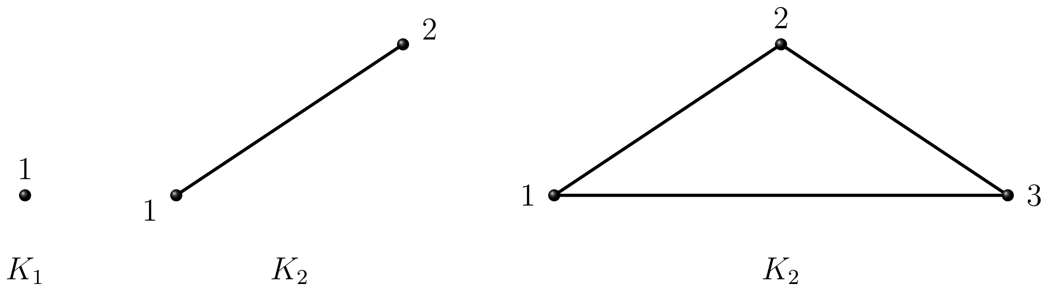



Рис. 3.25: Кліки графа $G$ з рис. 3.24

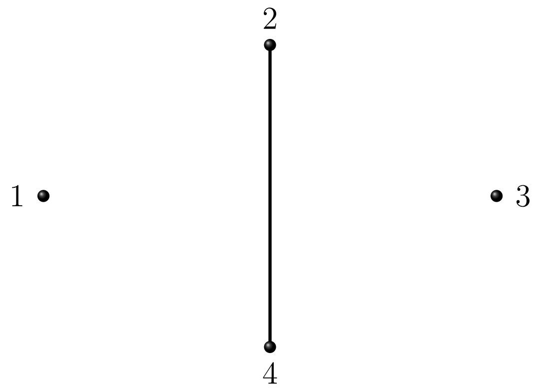



Рис. 3.26: Доповнення графа $G$ з рис. 3.24

Оскільки довільна множина попарно суміжних вершин графа $G$ при розфарбуванні вимагає кольорів за кількістю вершин, то клікове число є нижньою оцінкою для хроматичного числа цього графа

$$\gamma(G) \geqslant \rho(G). \tag{3.1}$$

Друга оцінка (3.2) отримується з того факту, що число незалежності $\alpha(G)$ графа $G$ збігається з кількістю $p_{i_0}$ максимальної множини вершин, яка допускає розфарбування одними кольором:

$$\gamma(G) \geqslant \left[\frac{|X|}{\alpha(G)}\right]. \tag{3.2}$$

Справді, нехай зафіксовано деяке оптимальне розфарбування, $V_i$ — однокольорові множини вершин, $|V_i| = p_i$. За побудовою маємо

$$\bigcup_{i=1}^{\gamma(G)} V_i = X,$$

$$\sum_{i=1}^{\gamma(G)} p_i = |X|$$

і кожна множина $V_i$ є незалежною. Поділивши останню рівність на число незалежності $\alpha(G)$ графа $G$ з урахування нерівностей $p_i \leqslant \alpha(G)$, отримуємо шукану оцінку:

$$\gamma(G) \geqslant \sum_{i=1}^{\gamma(G)} \frac{p_i}{\alpha(G)} = \frac{|X|}{\alpha(G)} \geqslant \left[\frac{|X|}{\alpha(G)}\right].$$

Цікаві оцінки суми та добутку хроматичних чисел $\gamma(G)$ і $\gamma(\widetilde{G})$ графа $G$ та його доповнення $\widetilde{G}$ доведені Е. А. Нордгаузом і Ж. В. Гаддумом у 1965 році:

$$2\sqrt{n} \leqslant \gamma(G) + \gamma(\widetilde{G}) \leqslant n + 1; \qquad n \leqslant \gamma(G) \cdot \gamma(\widetilde{G}) \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2. \tag{3.3}$$

Очевидна також оцінка зверху:

$$\gamma(G) \leqslant n + 1 - \alpha(G).$$

Нехай $\delta = \delta(G)$ — найменший із степенів вершин графа $G$ і $\Delta = \Delta(G)$ — найбільший із степенів його вершин. Виконуються такі тонкі оцінки.

**Теорема 3.7.6 (теорема Брукса).** *Якщо $G$ — неповний зв'язний граф і $\Delta(G) \geqslant 3$, то $\gamma(G) \leqslant \Delta(G)$.*

**Теорема 3.7.7.** *Для довільних натуральних чисел $n$, $\alpha$, $\gamma$, які задовольняють нерівності*

$$\frac{n}{2} \leqslant \gamma \leqslant n + 1 - \alpha$$

*існує $n$-вершинний граф з числом незалежності $\alpha$ і хроматичним числом $\gamma$.*

Задачу розфарбування вершин графа $G$ можна переформулювати у вигляді деякої задачі булевого програмування.

Нехай $r \geqslant \gamma(G)$ — довільна верхня оцінка хроматичного числа така, що граф $G = (X, Y)$ є $r$ — розфарбовним. Введемо матрицю булевих змінних розфарбування

$$T = \{t_{ij}\}, \quad i = 1, \ldots, r, \quad i = 1, \ldots, n, \quad n = |X|,$$

де для кожного розфарбування

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } x_j \text{ пофарбована у } i\text{-й колір}, \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Якщо $R = \{r_{ij}\}$ — матриця інцидентності неорієнтованого графа $G$, то для добутку матриць $TR$ елементи добутку мають вигляд

$$(T \cdot R)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} r_{kj} =$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо жодний з кінців ребра } j \text{ не пофарбований у } i\text{-й колір;} \\ 1, & \text{якщо рівно один кінець ребра } j \text{ пофарбований у } i\text{-й колір;} \\ 2, & \text{якщо обидва кінця ребра } j \text{ пофарбовані в } i\text{-й колір;} \end{cases}$$

Останній випадок можливий лише при неправильному розфарбуванні графа $G$, а тому умова правильності розфарбування виражається системою $r \cdot m$ нерівностей:

$$(T \cdot R)_{ij} \leqslant 1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant r, \quad 1 \leqslant j \leqslant m = |Y|. \tag{3.4}$$

Умовою розфарбування кожної вершини $x_j$ одним кольором є

$$\sum_{i=1}^{r} t_{ij} = 1, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{3.5}$$

Довільна булева матриця $T$, яка задовольняє обмеження (3.4) і (3.5), забезпечує $r$-розфарбування графа $G$. Щоб отримати стандартну оптимізаційну задачу, необхідно додати функцію мети, наприклад, мінімізувати частоту використання останнього ($r$-го) кольору:

$$\rho_r(T) = \sum_{j=1}^{n} t_{rj} \to \min . \tag{3.6}$$

Довільний розв'язок $T_0$ задачі лінійного булевого програмування (3.4), (3.5), (3.6) дає правильне розфарбування графа $G$ за допомогою $(r-1)$ фарби, якщо $\gamma(G) < r$. У цьому випадку маємо $\rho_r(T_0) = 0$ і можна зменшити кількість рядків матриці розфарбування $T$ на одну, замінити в умовах (3.4), (3.5), (3.6) значення $r$ на $r-1$ і розв'язати задачу заново. Продовжуючи такий процес, ми прийдемо до моменту, коли для розв'язку матриці розфарбування $T$ чергової зменшеної задачі вперше отримається ненульове значення форми мети:

$$\rho_S(T) \neq 0.$$

Це буде означати, що $\gamma(G) = S$.

Існує спосіб задання форми мети, який одразу призводить до розфарбування з найменшою кількістю фарб $\gamma(G)$. Поставимо у відповідність кожному кольору $i$ штраф $p_i$ так, щоб

$$p_{i+1} > np_i, \qquad n = |X|.$$

Тоді форма мети

$$Z(T) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} p_i t_{ij} \to \min \tag{3.7}$$

з обмеженнями (3.4), (3.5) забезпечує розфарбування $T_0$ за допомогою $\gamma(T)$ фарб. Іншими словами, булевий розв'язок $T_0$ задачі (3.4), (3.5), (3.7) має ненульові рядки $\gamma + 1, \ldots, r$.

Справді, нульовий $i$-й рядок у матриці $T_0$ означає, що $i$-й колір не використовується, і якщо використовується колір $i + m$, то перестановка двох рядків $i$, $i + m$ у матриці $T_0$ приведе до розфарбування матриці $\overline{T}_0$ з меншою формою:

$$Z(\overline{T}_0) < Z(T_0),$$

що неможливо. Тому в матриці $T_0$ нульові рядки стоять останніми. Далі, нехай $r_0$ — найбільший номер ненульових рядків. Тоді

$$r_0 \geqslant \gamma = \gamma(G),$$

оскільки для довільного правильного розфарбування потрібно не менше $\gamma$ фарб. Припустимо, що $r_0 \geqslant \gamma + 1$ і $\overline{T}$ — матриця правильного розфарбування $\gamma$ фарбами, причому хоча б одне таке розфарбування існує та задовольняє умови (3.4), (3.5). Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що всі нульові рядки матриці $\overline{T}$ мають номери $\gamma + 1, \ldots, r$. Очевидно, що

$$Z(\overline{T}) = \sum_{i=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^{n} p_i \bar{t}_{ij} \leqslant p_\gamma \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\gamma} \bar{t}_{ij} = p_\gamma \sum_{j=1}^{n} 1 = np_\gamma,$$

$$Z(T_0) = \sum_{i=1}^{r_0} \sum_{j=1}^{n} p_i t_{ij}^0 \geqslant p_{r_0} \geqslant p_{\gamma+1}.$$

З умови оптимальності розв'язку $T_0$ випливає, що виконується нерівність

$$Z(T_0) \leqslant Z(\overline{T}),$$

звідки випливає, що $p_{\gamma+1} \leqslant np_\gamma$. Остання нерівність суперечить умові обрання штрафних коефіцієнтів, тому $r_0 = \gamma$.

Залежно від ситуації, замість $r \cdot m$ умов (3.4) можна використовувати $r \cdot n$ умов

$$L(1 - t_{ij}) - \sum_{k=1}^{n} t_{ik} a_{kj} \geqslant 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant r, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{3.8}$$

де $L$ — довільне число, що більше за $n$ і $a_{kj}$ — елементи матриці суміжності $A$ неорієнтованого графа $G$. При цьому, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $0 \leqslant a_{kj} \leqslant 1$, оскільки кратні ребра можна вилучити з графа $G$, не змінюючи задачі розфарбування вершин.

Зазначимо, що при великих значеннях $n$ і $r$ у цільовій формі штрафні коефіцієнти мають занадто великий розкид за порядком значень, а це створює незручності для обчислень і потребує особливих засобів для збереження належної точності. У поєднанні з принциповими труднощами точного розв'язку задача булевого програмування великої розмірності ми приходимо до невтішного висновку:

> *для графів з великою кількістю вершин розфарбування та знаходження хроматичного числа методом зведення до задачі булевого програмування практично неефективні.*

Необхідно використовувати специфічні алгоритми, які враховують особливості геометрії графа. Більш того, якщо поставлена перед обчислювачем задача булевого програмування припускає інтерпретацію як задача розфарбування графа $G$, то при великих розмірностях ефективніше шукати найоптимальніше розфарбування графа, а вже за його допомогою записувати розв'язок вихідної задачі програмування.

Для розфарбування не дуже великих графів застосовуються алгоритми перебору.

Для розфарбування великих графів, коли точні алгоритми виявляються недопустимо трудомісткими, використовуються алгоритми наближеного розфарбування, сім'я яких є достатньо численною. Серед них є евристичні та випадково-пошукові алгоритми. При їх використанні слід проявляти відому обережність, наприклад, порівнювати результати розв'язку за кількома принципово різними алгоритмами, оскільки для кожного алгоритму, як правило, можна побудувати граф, для якого алгоритм дає довільно неправильну оцінку хроматичного числа.

Прикладні задачі, що пов'язані з розфарбуваннями, можуть бути в точності еквівалентними задачі розфарбування, але частіше містять додаткові обмеження.

**Задача завантаження (розміщення) $n$ продуктів (предметів) по ящикам (сховищам).** Модельний граф $G$ має $n$ вершин, які відповідають продуктам, а наявність ребра $(x_i, x_j)$ означає, що продукт $x_i$ несумісний з продуктом $x_j$. Якщо місткості $Q_i$ ящиків великі ($Q_i \geqslant n$), то задача розміщення в найменшу кількість ящиків еквівалентна задачі оптимального розфарбування вершин графа $G$. При обмеженні місткості $Q_i$ до звичайних умов розфарбування в позначеннях викладених раніше додаються обмеження

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} \leqslant Q_i. \tag{3.9}$$

**Задача теорії розкладів (календарного планування).** У задачах теорії розкладів (чи як їх часто називають задачами календарного планування) операціям (оглядам) ставляться у відповідність тимчасові інтервали. Поставимо їм вершини $x_i$ модельного графа $G$, в якому є ребро $(x_i, x_j)$ тоді і тільки тоді, коли операції $x_i$, $x_j$ несумісні в часі. При однаковій довжині та довільній черговості операцій оптимальний розклад, тобто сумарний час, що мінімізує виконання всіх робіт, еквівалентний оптимальному розфарбуванню модельного графа $G$. Хроматичне число дорівнює оптимальному часу виконання всіх робіт:

$$\gamma(G) = T_{\min}.$$

Крім того, різні кольори можуть відповідати, наприклад, різним ділянкам (приміщенням), і якщо на $i$-й ділянці не можна виконати більше $Q_i$ операцій одночасно, то в модельному розфарбуванні появляється додаткове обмеження (3.9).

Типовою задачею цього типу є задача складання розкладу занять. Нехай, наприклад, треба прочитати декілька лекцій (кожна по одній годині) за найкоротший час. Кількість груп слухачів дорівнює кількості лекцій, але все ж деякі лекції не можна читати одночасно (наприклад, їх читає один і той же лектор). Оптимальний розклад еквівалентний мінімальному розфарбуванню такого графа $G$, у якого вершини відповідають лекціям, а суміжність вершин означає, що відповідні лекції не можна читати одночасно.

Неважко скоректувати довільний з алгоритмів оптимального розфарбування так, щоб враховувалися обмеження (3.9).

# Бібліоґрафія


[1] Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина, *Дискретна математика*, BHV, Київ, 2007. 368 с.

[2] Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина, *Дискретна математика*, видання третє, випралене та доповнене, Магнолія – 2006, Львів, 2013. 432 с.

[3] О. Л. Швай, *Комбінаторні задачі*, навчальний посібник для студентів вищ. навч. закл. СНУ імені Лесі Українки, Луцьк, 2018. 142 с.

[4] G. Cantor, *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. 5*, Math. Ann. **21** (1883), no. 4, 545–591.

[5] J. von Neumann, *Zur Einführung der transfiniten Zahlen*, Acta litterarum ac scientiarum Ragiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio scientiarum mathematicarum **1** (1923), 199–208.

# Предметний покажчик