МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ ТА МЕРЕЖ

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Ужгород – 2021

УДК 519.1

Дискретна математика. Навчальний посібник. – Ужгород: ПП «АУТДОР-ШАРК», 2021. – 124 с.

Укладачі: Балога С.І., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри комп'ютерних систем та мереж ДВНЗ «УжНУ»

У посібнику викладено теорію множин і відношень; елементи комбінаторного аналізу та теорію графів.

Теоретичний матеріал, що викладено у посібнику, проілюстровано великою кількістю прикладів з детальними розв'язками і поясненнями, містить вправи для аудиторної і самостійної роботи для перевірки як теоретичного так і практичного рівня засвоєння матеріалу студентами. За змістом та обсягом посібник відповідає робочій програмі дисципліни «Дискретна математика» для студентів напряму підготовки 123 – «Комп'ютерна інженерія». Навчальний посібник буде корисним для студентів інших спеціальностей, які бажають вивчати методи дискретної математики для використання їх у природничих науках із залученням комп'ютерної техніки.

Рецензент: Погоріляк О.О., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теорії ймовірностей та математичного аналізу.

Відповідальний за випуск: Горват П. П., кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри комп'ютерних систем та мереж.

Даний навчальний посібник розглянуто та схвалено на засіданні кафедри комп'ютерних систем та мереж, протокол № 11 від 20 травня 2021 року, методичної комісії інженерно-технічного факультету, протокол №4 від 24 травня 2021 року.

ВСТУП

Основні способи подання інформації є дискретними: це слова і конструкції мов та граматик – природних і формалізованих; табличні масиви реальних даних у технічних системах та науково-природних спостереженнях; дані господарської, соціальної, демографічної, історичної статистики тощо.

Математичні методи обробки, аналізу та перетворення дискретної інформації необхідні в галузях наукової, господарської та соціальної сферах. Зазвичай ці методи викладаються в курсі «Дискретної математики».

Часто для аналізу реальних систем з неперервними конструктивними елементами будуються моделі скінченої або дискретної математики. Наприклад, класична транспортна або інформаційна мережа трактується як граф із заданими пропускними здатностями або вагами гілок, а геометрична форма гілки між двома пунктами-вузлами мережі не відіграє роль.

Мета посібника – систематичне викладення методів та засобів дискретної математики як інструментарію при обробці інформації в комп'ютерах. В ньому відображено основні розділи нормативного курсу «Дискретна математика» із спеціальностей комп'ютерних та інженерно-технічних напрямків, а саме теорія множин, теорія відношень, елементи комбінаторного аналізу та теорія графів. Кожен розділ складається з основних визначень, властивостей, операцій і теорем; має значну кількість розв'язаних та ілюстрованих прикладів; містить вправи для аудиторної і самостійної роботи.

Навчальний посібник створено згідно із робочою програмою курсу «Дискретна математика» і призначений для використання студентами, які вивчають математичні методи для використання їх у комп'ютерних технологіях, зокрема, напряму підготовки «Комп'ютерна інженерія». Від читача вимагається знання з математики в обсязі середньої школи.

Структура та перелік викладених розділів, їх наповнення легко вбачаються зі змісту. Для кращого засвоєння теоретичний матеріал проілюстровано прикладами з різних областей знань. Крім того, наведено велику кількість вправ і задач для набуття практичного досвіду студента.

1. ТЕОРІЯ МНОЖИН

1.1. Поняття множини

Поняття множини – одне з основних понять математики. Воно не має точного визначення і його слід віднести до аксіоматичних понять. Такими аксіоматичними поняттями, наприклад, в елементарній геометрії є поняття *точка, пряма, площина.*

Як правило, термін *множина* пояснюється за допомогою прикладів, а потім вказуються правила його використання в математичних застосуваннях.

Часто приймається формулювання інтуїтивного поняття множини Г. Кантора – основоположника цієї теорії: «Довільне зібрання певних предметів нашої інтуїції чи інтелекту, які можна відрізнити один від одного і які уявляються як єдине ціле, називається множиною. Предмети, які входять до складу множини, називаються її елементами.»

Визначення 1.1. *Множиною* є сукупність визначених об'єктів, різних між собою, об'єднаних за певною ознакою чи властивістю.

Визначення 1.2. Якщо a один з об'єктів множини A, то говорять, що a – *елемент множини* A або a *належить* A.

Домовимося позначати множини великими латинськими літерами $A, B, C, \ldots$, а елементи множини – малими латинськими літерами $a, b, c, \ldots$

Способи задання множин:

- *перерахуванням,* тобто списком всіх своїх елементів. Такий спосіб задання прийнятний тільки для скінченних множин. Позначення списку – у фігурних дужках. Наприклад, множина, що складається з перших п'яти простих чисел $A = \{2,3,5,7,11\}$. В загальному вигляді твердження, що скінченна множина A складається з n елементів, записується $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Запис $a \in A$ $(a \notin A)$ означає, що a є (не є) елементом множини A.

Використовуються такі загальноприйняті позначення основних числових множин:

1. N – множина натуральних чисел:

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

2. Z – множина цілих чисел:

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

3. Q – множина раціональних чисел. Будь-яке раціональне число можна зобразити у вигляді дробу:

$$\left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}.$$

4. R – множина дійсних чисел. Будь-яке дійсне число можна зобразити у вигляді нескінченого десяткового дробу $a,b_1b_2..b_n...$ із цілою частиною $a \in Z$ і $b_k \in \{0,...,9\}$. Множині дійсних чисел відповідає множина точок на числовій прямій;

- *процедурою,* що породжує і описує спосіб одержання елементів множини із уже отриманих елементів або з інших об'єктів. Наприклад, множина усіх цілих додатних чисел, що є степенями двійки $M_{2^n}, n \in N$, може бути представлена процедурою, заданою двома правилами, що називають рекурсивними:

а) $1 \in M_{2^n}$; б) якщо $m \in M_{2^n}$, тоді $2m \in M_{2^n}$;

- *описом характеристичних властивостей*, якими повинні володіти елементи множини. Так множина A, що складається з таких елементів x, які мають властивість $P(x)$, позначимо в такий спосіб:

$$A = \{x | P(x)\}.$$

Так розглянута вище множина всіх цілих додатних чисел, що є степенями числа 2 може бути записана як $A = \left\{x \,\middle|\, x = 2^n, n \in N\right\}$.

Визначення 1.3. Множина A називається *підмножиною* (або *включенням*) множини B $(A \subseteq B)$, якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, тобто, якщо $x \in A$, то $x \in B$.

Якщо $A \subseteq B$ й $A \neq B$, то A називається строгою підмножиною й позначається $A \subset B$.

Наприклад, $\{2,4\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$.

Символ «$\subseteq$» називається символом операції включення множин.

Множина A називається власною підмножиною множини B, якщо $A \subseteq B$ і $A \neq B$.

Наприклад, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Символ «$\subset$» називається символом операції строгого включення множин.

Властивості операції включення:

1) $A \subseteq A$;

2) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то $A = B$;

3) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;

4) для довільної множини A $\varnothing \subseteq A$.

Властивості операції строгого включення:

1) $A \not\subset A$;

2) якщо $A \subset B$,то $B \not\subset A$;

3) якщо $A \subset B$ і $B \subset C$,то $A \subset C$.

Визначення 1.4. Дві множини *рівні* $(A = B)$, якщо всі їх елементи збігаються. Множини A і B рівні, якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$.

Множина, яка містить скінченну кількість елементів, називається *скінченною,* у протилежному випадку – *нескінченною.* Кількість елементів у скінченій множині A називається *потужністю* множини A і позначається $|A|$.

Визначення 1.5. Множина, що не містить елементів, називається *порожньою множиною* і позначається $\varnothing$. Порожня множина є підмножиною будь-якої множини. *Універсальна множина* U є множина, яка володіє такою властивістю, що всі розглянуті множини є її підмножинами.

Варто розрізняти поняття належності елементів множині й включення! Так, наприклад, якщо множина $A = \{1, 3, 6, 13\}$, то $3 \in A$, $6 \in A$, але $\{3, 6\} \notin A$, у той час як $\{3, 6\} \subseteq A$.

Приклад 1.1. Які з наведених визначень множин A, B, C, D є коректними:

а) $A = \{1, 3, 5\}$, б) $B = \{4, 7, 7, 11\}$,в) $C = \{x | x \in A\}$, г) $D = \{A, B\}$?

Чи належить число 5 множині D?

Розв'язання:

а) визначення множини A перерахуванням елементів коректне.

б) відповідно до визначення множини, елементи її повинні бути різні, тому при перерахуванні елементів множини не слід указувати той самий елемент кілька разів. Коректне визначення множини B виглядає в такий спосіб: $B = \{4, 7, 11\}$.

в) визначення множини C описом характеристичної властивості коректне.

г) визначення списком множини D коректне: елементами множини D є множини A і B, $D = \{\{1, 3, 5\}, \{4, 7, 7, 11\}\}$. Однак $5 \notin D$, тому що даний елемент не перерахований у списку.

Визначення 1.6. Множина всіх підмножин, що складаються з елементів множини A, називається *булеаном* і позначається 2^A, або $B(A)$, або $P(A)$.

Приклад 1.2. Нехай $A = \{a, b, c, d\}$. Визначити булеан множини A. Яка потужність множини $P(A)$?

Розв'язання:

$P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\},$
$\{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$

Потужність $|P(A)|=16$.

Якщо непорожня скінченна множина містить n елементів, то її булеан містить 2^n елементів.

Задачі для самостійної роботи

1. Задати різними способами множину натуральних чисел, кратних 3 і не перевищуючих 100.
2. Задати різними способами множину обласних центрів України.
3. Перелічити елементи множини $\{x | x - \textit{ціле і } x^3 < 100\}$.
4. Перелічити елементи множини $\{x | x - \textit{додатне непарне ціле число}, \ \mathrm{x} < 35\}$.
5. Перелічити елементи множини $\{x | x - \textit{список студентів вашої групи}\}$.
6. Опишіть множину $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$ за допомогою характеристичної властивості.
7. Опишіть множину $\{\textit{березень, квітень, травень}\}$ за допомогою характеристичної властивості.
8. Опишіть множину $\{1, 5, 25, 125, 625, 3125\}$ за допомогою характеристичної властивості.
9. Перелічити підмножини множини $A=\{a, b\}$.
10. Перелічити підмножини множини $A=\{\textit{грудень, січень, лютий}\}$.
11. Перелічити підмножини множини $A=\{3, 7, 11, 25\}$.
12. Визначте булеан множини A. Яка потужність множини $P(A)$:

а) $A=\{2, 5\}$; б) $A=\{2, 5, 18\}$;

в) $A=\{1, 2, 5, 6\}$; г) $A=\{1, 2, 5, 6, 18\}$.

13. Використовуючи результати попередніх чотирьох прикладів, визначте потужність множини, що має k елементів.
14. Визначте істинність або хибність кожного з наступних висловлювань:

а) $\varnothing \subseteq \varnothing$; б) $\varnothing \subset \varnothing$; в) $\varnothing \in \varnothing$; г) $\varnothing \subseteq A$; д) $\varnothing \in A$, де A – довільна множина.

15. Визначте істинність або хибність кожного з наступних висловлювань:

а) $5 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$; б) $\{5\} \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$;

в) $\{1, 3, 5\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$; в) $\{1, 3, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

16. Визначте кількість елементів у кожній множині:

а) $\{\varnothing, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; б) $\{1, 2, 3, \{4, 5, 6, 7\}\}$;

в) $\{1, 2, 3, \{4, \{5, 6, 7\}\}\}$; г) $\{\{1, 2\}, \{\{3, 4\}, 5\}, 6, 7\}$.

1.2. Операції над множинами

Визначення 1.7. *Об'єднанням* множин A і B називається множина, що складається із всіх тих елементів, які належать хоча б до однієї з множин A або B. Об'єднання множин A і B позначається $A \cup B$. Це визначення рівносильне наступному:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Визначення 1.8. *Перетином* множин A і B називається множина, що складається із всіх тих елементів, які належать множині A і множині B. Перетин множин A і B позначається $A \cap B$. Це визначення рівносильне наступному:

$$A \cap B = \{x | x \in A \ \text{ і } \ x \in B\}.$$

Визначення 1.9. *Доповненням (*або *абсолютним доповненням)* множини A називається множина, що складається із всіх елементів універсальної множини, які не належать A. Доповнення множини A позначається $\overline{A}$ або A'. Це визначення рівносильне наступному:

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x | x \in U, \ x \notin A\}.$$

Визначення 1.10. *Різницею* множин A і B *(*або *відносним доповненням)* називається множина, що складається із всіх елементів множини A, які не належать B. Різницю множин A і B позначають $A \setminus B$. Це визначення рівносильне наступному:

$$A \setminus B = \{x | x \in A \ \text{ і } \ x \notin B\}.$$

Визначення 1.11. *Симетричною різницею* множин A і B називається множина, що складається з об'єднання всіх елементів, що належать множині A і не містяться в B та елементів, що належать множині B і не містяться в A. Симетрична різниця множин A і B позначається $A \div B$. Це визначення рівносильне наступному:

$$A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Визначення 1.12. Операції, які виконують над однією множиною, називають *унарними*. Операції, які виконують над двома множинами, називають *бінарними*. Прикладом унарної операції є знаходження доповнення. Прикладами бінарних операцій є об'єднання, перетин, різниця, симетрична різниця.

Визначення 1.13. Якщо множина A є об’єднанням підмножин $A_1, A_2, ..., A_n, ...$, то сукупність підмножин $\{A_1, A_2, ..., A_n, ...\}$ називається покриттям множини A. Якщо ж сукупність підмножин покриття множини A такі, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то сукупність $\{A_1, ..., A_n, ...\}$ називається розбиттям множини A, а підмножини A_i – класами цього розбиття, $i = 1, 2, ..., n$.

Приклад 1.3. Нехай $A = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \div B$.

Розв’язання:

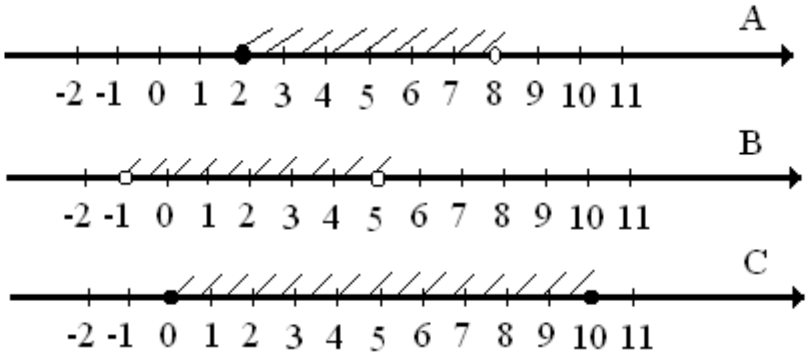
$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$, $A \cap B = \{2, 3, 7\}$, $A \setminus B = \{5, 6\}$, $A \div B = \{1, 5, 6, 9\}$.

Приклад 1.4. Нехай П – множина всіх парних натуральних чисел, а Н – множина всіх непарних натуральних чисел; тоді $\text{П} \cup \text{Н} = N$, $\text{П} \cap \text{Н} = \varnothing$, $N \cap П = \text{П}$, $N \cap \text{Н} = \text{Н}$, $N \setminus \text{П} = \text{Н}$, тобто $N \setminus \text{П}$ – множина непарних натуральних чисел і навпаки $N \setminus \text{Н} = \text{П}$.

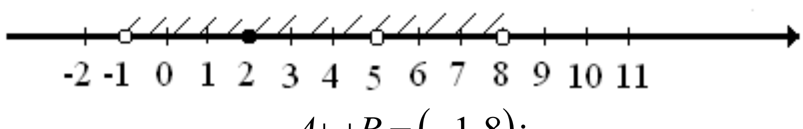
Приклад 1.5. Якщо A – множина прямих, які проходять через точку M деякої площини; B – множина прямих, які проходять через точку N цієї площини. Тоді $A \cap B = \{l\}$, де l – пряма, яка проходить через точки M і N.

Приклад 1.6. Нехай $A = [2, 8)$, $B = (-1, 5)$, $C = [0, 10]$. Знайти $A \cup B$, $B \cap C$, $C \setminus A$, $B \div C$, $\overline{B}$.

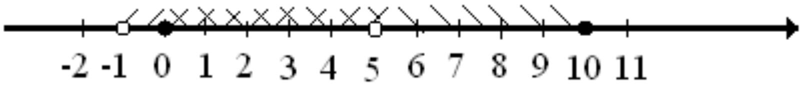
Розв’язання: Зобразимо задані множини на числовій осі



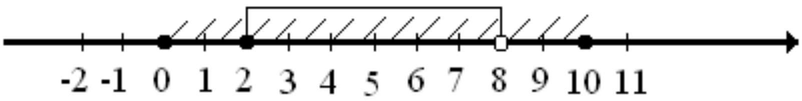
Тоді шукані множини будуть мати вигляд (рис. 1.1):



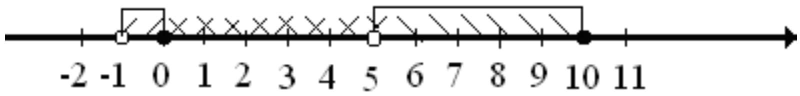
$$A \cup B = (-1, 8);$$



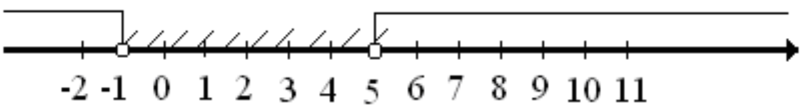
$$B \cap C = [0, 5);$$



$$C \setminus A = [0, 2) \cup [8, 10];$$



$$B \div C = (-1, 0) \cup [5, 10];$$

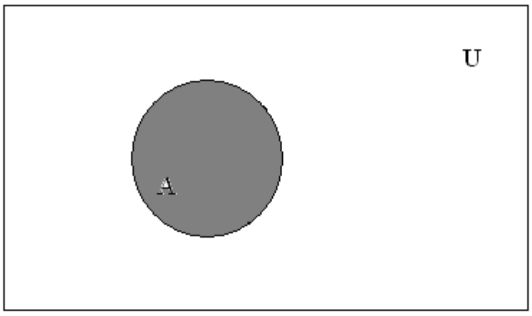


$$\overline{B} = (-\infty, -1] \cup [5, \infty).$$

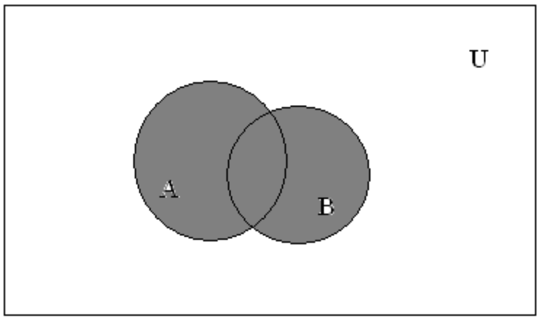
Рис. 1.1.

1.3. Діаграми Ейлера-Венна

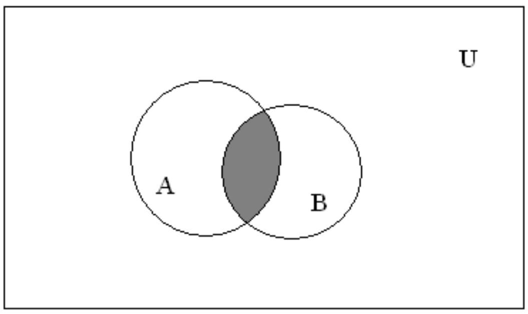
Для графічної ілюстрації відносин між множинами даної універсальної множини U використовують діаграми Ейлера-Венна. Діаграма Ейлера-Венна – це зображення множини у вигляді геометричної множини, наприклад, кола. При цьому універсальну множину зображують у вигляді прямокутника. На рис. 1.2 зображені діаграми Ейлера-Венна для розглянутих операцій над множинами.



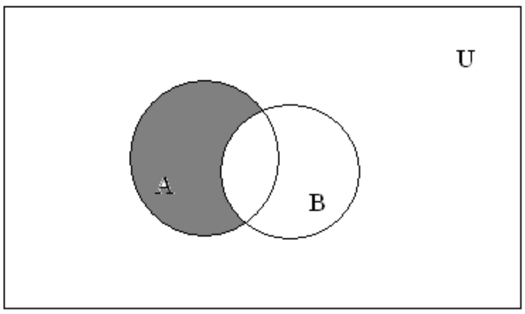
A



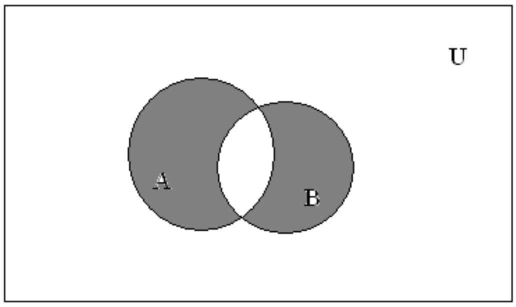
$A \cup B$



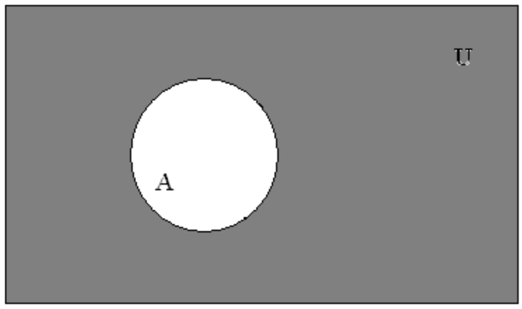
$A \cap B$



$A \setminus B$



$A \div B$



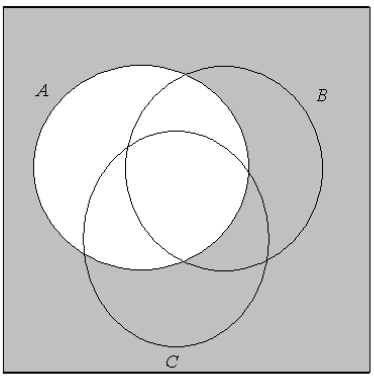
$\overline{A}$

Рис. 1.2.

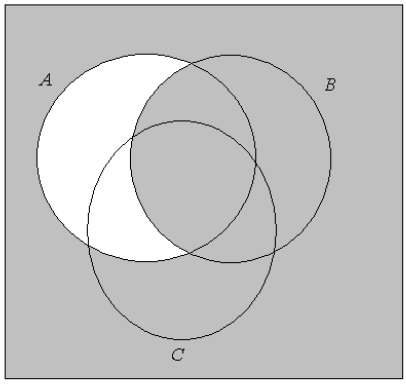
Приклад 1.7. Довести, що для довільних множин A, B та C справджується рівність

$$C \setminus \overline{\overline{A} \cup B} = B \cap C \cup (C \setminus A).$$

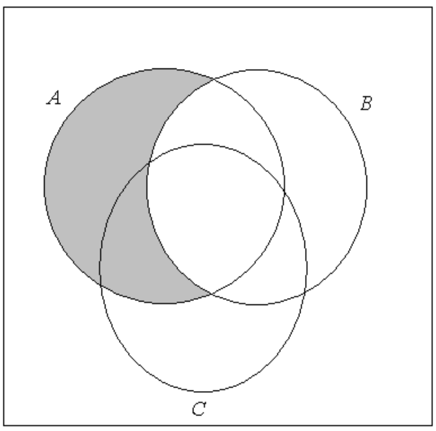
Розв'язання: Скористаємося діаграмами Ейлера-Венна. Для множини у лівій частині рівності відповідна їй діаграма зображена справа на рис. 1.3.



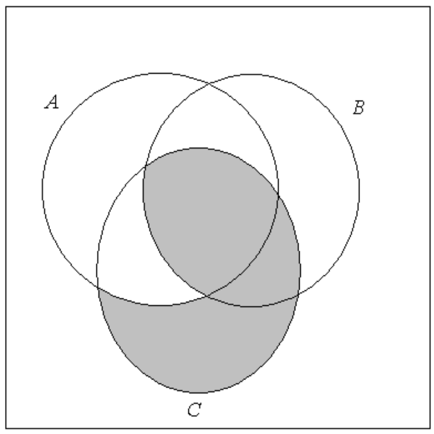
$\overline{A}$



$\overline{A} \cup B$



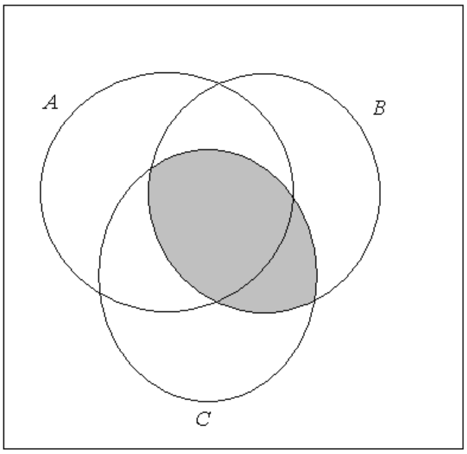
$\overline{\overline{A} \cup B}$



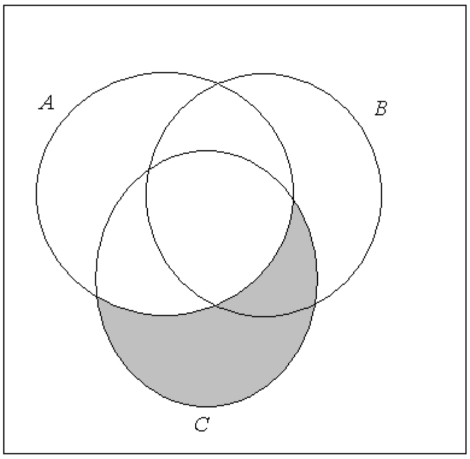
$C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$

Рис. 1.3.

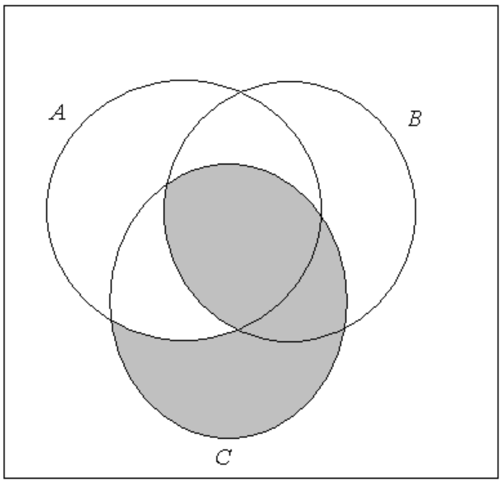
Побудуємо діаграму для правої частини тотожності, як це показано на рис. 1.4.



$B \cap C$



$C \setminus A$



$B \cap C \cup (C \setminus A)$

Рис. 1.4.

Порівняємо діаграми, наведені на рис. 1.3 (справа) та рис. 1.4. Легко переконатися, що вони ідентичні. Тому множини $C \setminus A \cup B$ та $B \cap C \cup (C \setminus A)$ рівні.

Приклад 1.8. Із 40 програмістів 18 володіють мовою Python, 19 — мовою C++, 21 — мовою Java. Відомо, що 10 програмістів знають одночасно Python і C++, 7 — Python і Java, 8 — C++ і Java. Троє програмістів не володіють жодною із мов Python, C++, Java. Знайти кількість програмістів, які одночасно знають усі три мови програмування.

Розв'язання: У якості універсальної множини U візьмемо множину тих 40 програмістів, про яких йде мова у задачі. Нехай P, C, J — множини програмістів, які володіють мовами програмування Python, C++ та Java відповідно, і нехай x — шукана кількість програмістів, які одночасно знають усі три мови.

Скористаємося діаграмами Ейлера-Венна. У кожній частині діаграми позначимо кількість елементів множини відповідної цій частині. Оскільки із 10 програмістів, які володіють і мовою Python, і мовою C++, x знає ще й мову Java, то 10 – x програмістів знають лише Python і С++ і не знають Java. Позначимо це число на тій частині діаграми на рис.1.6, яка відповідаємножині (P∪C)\J. Із застосуванням аналогічних міркувань отримуємо, що 7 – x програмістів знають лише мови Python і Java, 8 – x — лише мови С++ та Java.

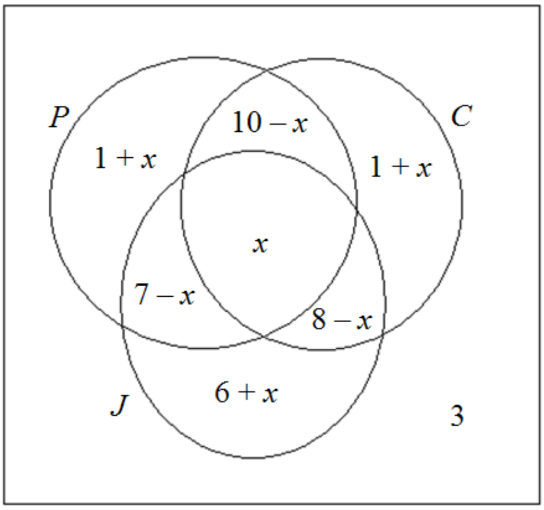


Рис 1.5. Діаграма до прикладу 1.8

Знайдемо тепер кількість програмістів, які володіють рівно однією із мов програмування Python, С++ та Java. Оскільки мову Python знає 18 програмістів, то кількість програмістів, які знають лише мову Python рівна

$$18 - (10 - x) - (7 - x) - x = 1 + x .$$

Аналогічно отримуємо, що $19 - (10 - x) - (8 - x) - x = 1 + x$ програмістів знають лише мову С++, $21-(7-x)-(8-x)-x=6+x$ програмістів — лише мову Java. Позначимо отримані числа на діаграмі (див. рис. 1.6). Із урахуванням того, що загальна кількість програмістів рівна 40, ми можемо записати наступну рівність:

$$18 + (8 - x) + (1 + x) + (6 + x) + 3 = 40 .$$

Перший доданок у лівій частині попередньої рівності відповідає кількості елементів множини P, останній — кількості програмістів, які не володіють жодною із мов. Після спрощень отримаємо $36 + x = 40$. Звідси $x = 4$.

Теорема 1.1. Для будь-яких підмножин A, B, C універсальної множини U справедливо наступне:

а) закони ідемпотентності:

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A;$$

б) подвійне доповнення:

$$\overline{\left(\overline{A}\right)} = A;$$

в) закони де Моргана: $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

г) властивості комутативності: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

д) властивості асоціативності:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

е) властивості дистрибутивності:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C);$$

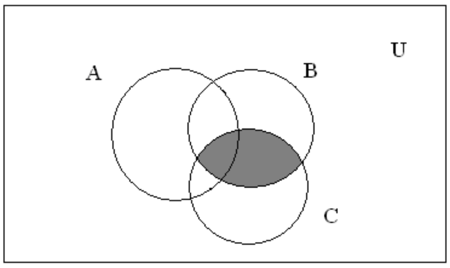
ж) властивості тотожності: $A \cup \varnothing = A$; $A \cap U = A$;

з) властивості доповнення $A \cup \overline{A} = U$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

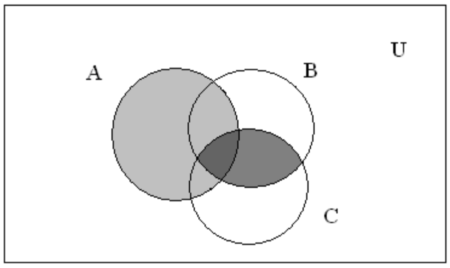
Пріоритет операцій: 1. $\overline{A}$; 2. $A \cap B$; 3. $A \cup B$; 4. $A \setminus B$; 5. $A \div B$.

Приклад 1.7. Покажіть, що $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

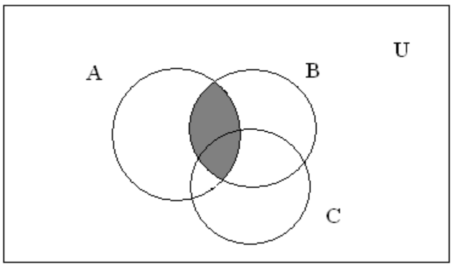
Розв'язання. Доведемо властивість асоціативності, скориставшись діаграмами Ейлера-Венна (рис. 1.6):



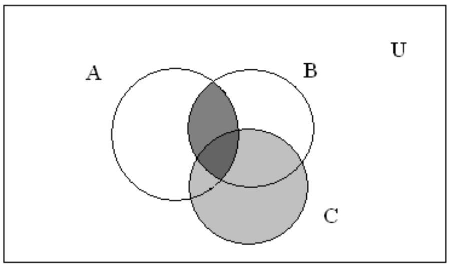
$B \cap C$



$A \cap (B \cap C)$



$A \cap B$



$(A \cap B) \cap C$

Рис. 1.6.

Як бачимо з рис. 1.5 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, що й треба було довести.

Приклад 1.9. Спростити вирази:

1. $(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup B' \cup C' = [(A \cup A') \cap B \cap C] \cup B' \cup C' =$

$= (U \cap B \cap C) \cup B' \cup C' = (B \cap C) \cup B' \cup C' = (B \cap C) \cup (B \cap C)' = U$

2. $(A \cap B \cap C \cap D') \cup (A' \cap C) \cup (B' \cap C) \cup (C \cap D) = (A \cap B \cap C \cap D') \cup$

$\cup [(A' \cup B' \cup D) \cap C] = [(A \cap B \cap D') \cup (A' \cup B' \cup D)] \cap C =$

$= \left[(A \cap B \cap D') \cup (A \cap B \cap D')'\right] \cap C = U \cap C = C$.

3. $(A \cap B')' \cup B = (A' \cup B'') \cup B = A' \cup (B \cup B) = A' \cup B$.

4. $\left(\overline{\overline{A} \cup B \cup C}\right) \cap \left(A \cap \left(B \cup \overline{C}\right)\right) \cap \overline{B} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

1.4. Метод включення і вилучення

Нехай A і B – скінченні множини. З'ясуємо, чому дорівнює число $|A \cup B|$, якщо відомі числа $|A|$ і $|B|$. Основна формула, якою можна скористатися для визначення числа $|A \cup B|$, слідує з означення операції об'єднання множин:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \qquad (*)$$

Дійсно, $|A| + |B|$ є число, яке одержимо при підрахунку спочатку всіх елементів множини A, а потім всіх елементів множини B. Але при цьому спільні елементи множини A і B (а їх буде $|A \cap B|$) рахуються двічі, тобто $|A| + |B| - |A \cup B| - |A \cap B| = 0$, звідки і випливає рівність (*).

Користуючись законами операцій над множинами, можна одержати формулу для числа елементів будь-якої скінченої сукупності скінчених множин.

Наприклад,

$$|A \cup B \cup C| = |A| \cup |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| = |A| \cap |B| \cup |C| - |B \cap C| -$$
$$- |A \cap B \cup A \cap C| = |A| \cup |B| \cup |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| -$$
$$- |(A \cap B) \cap (A \cap C)| = |A| \cup |B| \cup |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

Теорема 1.2. *Якщо* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *– деякі скінченні множини, то*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \le i < j < .. l \le n} |A_i \cap \ldots \cap A_l|.$$

Метод обчислення за формулою (*), який полягає в послідовному виконанні операцій додавання і віднімання, що чергуються між собою, називається *методом включення і вилучень.*

Приклад 1.10. В групі кожний студент або блондин, або брюнет. Серед студентів 10 блондинів, решта брюнети. 12 студентів люблять читати детективи. Серед 12 студентів, які люблять читати детективи, 5 блондинів і 7 брюнетів. Скільки чоловік налічує вся група, якщо 2 брюнети не люблять читати детективи.

Розв'язання: Нехай множина A – множина блондинів; $|A| = 10$, B – множина брюнетів. C – любителі детективу. $|B| = 9$; $|C| = 12$, $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C$ – множина блондинів, які люблять читати детективи.

$$|A\cap C|=5,\ |B\cap C|=7,\quad A\cap B\cap C=\varnothing.$$

Отже,

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap C|-|A\cap|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=$$
$$=10+9+12-0-5-7+0=19.$$

Задачі для самостійної роботи

1. $A=\{0,3,5,\{6,9\}\}$, $B=\{2,3,9\}$, $C=\{0,2,3,6\}$. Визначити наступні множини: $B\setminus C$, $A\cap B$, $A\div C$, $(A\cup B)\setminus C$.
2. $A=\{1,4,8\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{0,\{3,4\},\{5,6\},8\}$. Визначити наступні множини: $A\setminus B$, $A\cup C$, $A\div B$, $(A\cap B)\cup(B\setminus C)$.
3. $A=\{2,3,\{8,9\}\}$, $B=\{0,\{1,2\},3,5\}$, $C=\{2,5,8\}$. Визначити наступні множини: $A\cup B$, $C\setminus B$, $A\div C$, $B\div(A\cap C)$.
4. $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$, $C=\{2,4,6,8,10\}$, $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Визначити наступні множини: $A\cap B$, $B\cup C$, $A\setminus C$, $A\div B$, $\overline{C}$, $A\cup(B\cap C)$, $(A\cup B)\cap C$, $\overline{(A\cap B)}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$.
5. $A=\{1,2,7,8,9\}$, $B=\{1,2,3,5,7\}$, $C=\{2,4,6,8,10\}$, $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Визначити наступні множини: $A\cap C$, $A\cup B$, $B\setminus C$, $A\div C$, $\overline{B}$, $(A\setminus\varnothing)\cup(A\setminus A)$, $\overline{A}\cap(B\cup C)$, $(A\cap B)\setminus\overline{C}$.
6. $A=[0,6)$, $B=[1,7)$, $C=[2,8]$. Визначити наступні множини: $C\setminus B$, $A\div C$, $\overline{B}\cap\overline{C}$.
7. $A=(3,7)$, $B=(1{,}5]$, $C=[4,8]$. Визначити наступні множини: $A\setminus B$, $B\div C$, $\overline{A\cup B}$.
8. $A=(5,8)$, $B=[2,6)$, $C=(4,7]$. Визначити наступні множини: $\overline{A\cap C}$, $A\setminus B$, $B\cup C$.
9. Визначити, які з наступних тверджень істинні, а які хибні:
   а) $A\cap\varnothing=A$; б) $A\cup\varnothing=A$; в) $A\setminus A=\varnothing$; г) $A\div A=\varnothing$;
   д) якщо $A\subseteq B$, то $A\cap B=A$; е) якщо $A\cap B=A$, то $B\subseteq A$;
   ж) якщо $A\subseteq B$, то $A\cup B=A$; з) якщо $A\cup B=A$, то $B\subseteq A$;
10. Для кожної з наведених нижче множин використайте діаграми Ейлера-Венна і заштрихуйте ті її частини, які зображують задані множини:
   а) $\overline{(A\cap B)}$; б) $\overline{(A\cup B)}$; в) $B\setminus\overline{A}$;
   г) $(A\cup B)\setminus(A\cap B)$; д) $B\setminus(A\cap B)$; е) $\overline{(A\cap B\cap C)}$;

ж) $A\setminus(B\cap C)$; з) $(A\cap B)\div C$; и) $(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)$;
к) $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

11. Опишіть множини, що відповідають зафарбованій частині кожної діаграми Ейлера-Венна (рис. 1.4):

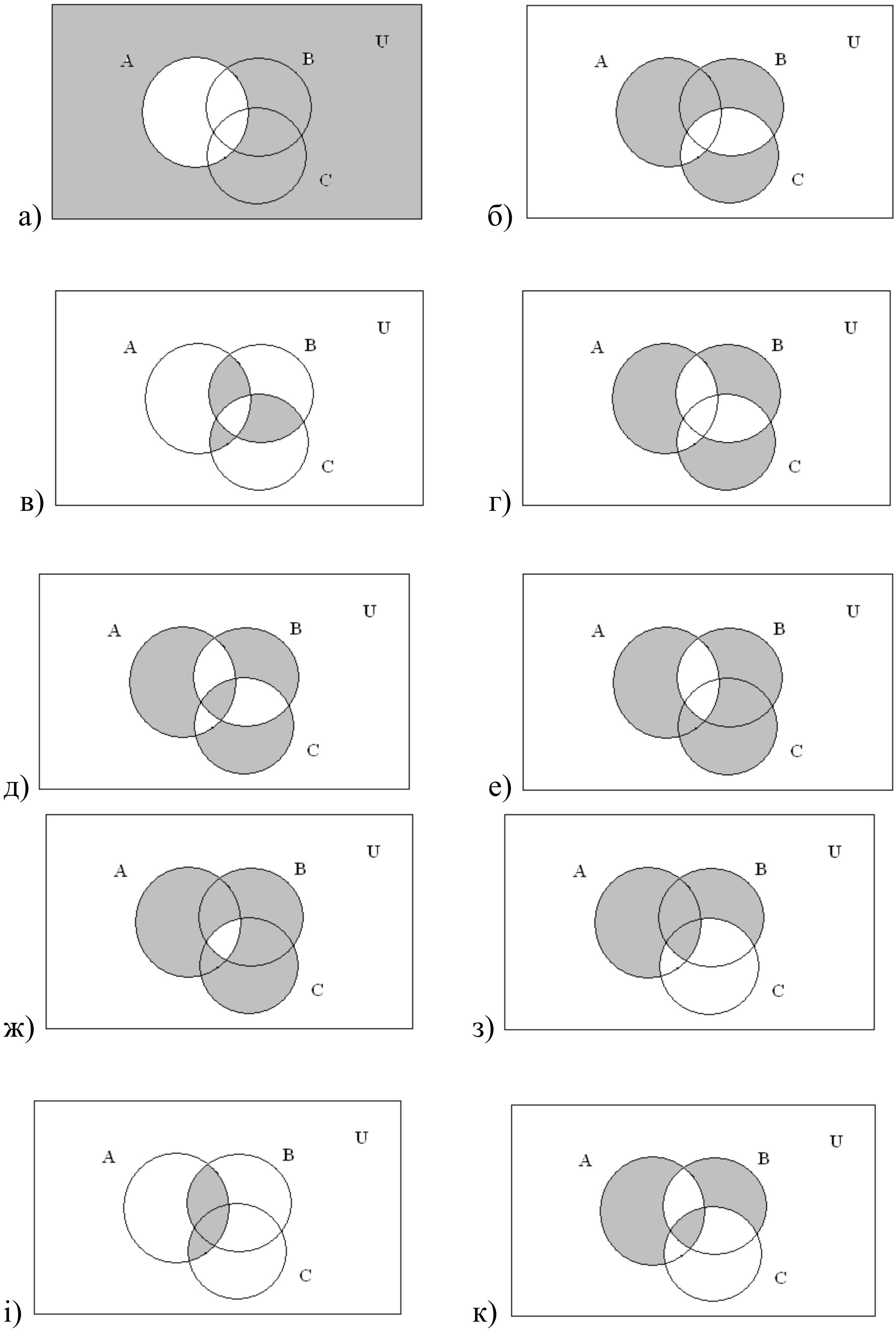


Рис. 1.4

12. Нехай S — множина усіх квадратів, R — множина усі прямокутників, L — множина усіх ромбів, P — множина усіх правильних многокутників площини. Вказати множини:

а) $\left(L \setminus S\right) \cap \left(R \setminus \bar{P}\right)$.

б) $\left(P \setminus S\right) \cup \left(R \setminus \bar{L}\right)$.

13.Довести, що у алгебрі множин виконуються наступні рівності:

а) $\bar{A} \setminus B = \overline{A \cup \bar{A} \cap B}$;

б) $\left(B \setminus A\right) \cup \bar{A} = \overline{C \setminus \bar{A}} \setminus A$.

14.У групі 90 студентів. Із них 25 чоловік програмують на мові Pascal, 35 – на мові Delphi і 25 – на мові C++, на мовах Pascal і Delphi – 8, Pascal і C++ – 10, Delphi і C++ – 5, а всіма трьома мовами програмування володіють 3 студенти. Скільки студентів не знають програмувати на жодній із названих мов?

15. У групі з 100 студентів англійською володіють 28 чоловік, німецькою – 30, французькою – 42, англійською і німецькою – 8, англійською і французькою – 10, німецькою і французькою – 5, а всіма трьома мовами програмування володіють 3 студенти. Скільки студентів не знають жодній із названих мов?

16. У лабораторії працює кілька людей, причому кожен з них знає хоча б одну іноземну мову, 6 чоловік – англійську, 6 – німецьку, 7 – французьку, 4 – англійську і німецьку, 3 – німецьку і французьку, 2 – французьку і англійську, всі три мови знає тільки одна людина. Скільки людей працює в лабораторії? Скільки з них знає тільки англійську мову? Скільки осіб знає тільки одну іноземну мову?

2. ВІДНОШЕННЯ

2.1. Основні визначення

Визначення 2.1. *Упорядкована пара предметів* – це сукупність, що складається із двох предметів, розташованих у певному порядку. При цьому впорядкована пара має наступні властивості:

а) для будь-яких двох предметів x і y існує об'єкт, який можна позначити як $\langle x, y\rangle$, названий упорядкованою парою;

б) якщо $\langle x, y\rangle$ і $\langle u, v\rangle$ – упорядковані пари, то $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$ тоді і тільки тоді, коли $x = u$, $y = v$.

При цьому x будемо називати першою координатою, а y – другою координатою впорядкованої пари $\langle x, y\rangle$.

Визначення 2.2. *Декартовим добутком* $X \times Y$ множин X і Y є *множина* $\{\langle x, y\rangle | x \in X,\ y \in Y\}$.

Якщо множини X і Y скінченні і складаються відповідно з m *і* n елементів, то очевидно, що $X \times Y$ складається з $m \times n$ елементів.

Визначення 2.3. *Бінарним* (або *двомісним*) відношенням R називається підмножина декартового добутку $X \times Y$, тобто $R \subseteq X \times Y$ (тобто множина, кожен елемент якого є впорядкована пара).

Якщо R є деяке відношення, це записують як $\langle x, y\rangle \in R$ або xRy.

Приклад 2.1. Знайти області визначення і значень відношення $A = \{\langle a,1\rangle, \langle c,1\rangle, \langle c,2\rangle, \langle c,5\rangle, \langle e,7\rangle\}$.

Розв'язання: Область визначення заданого відношення $D(A) = \{a, c, e\}$, а область значень – $E(A) = \{1,2,5,7\}$.

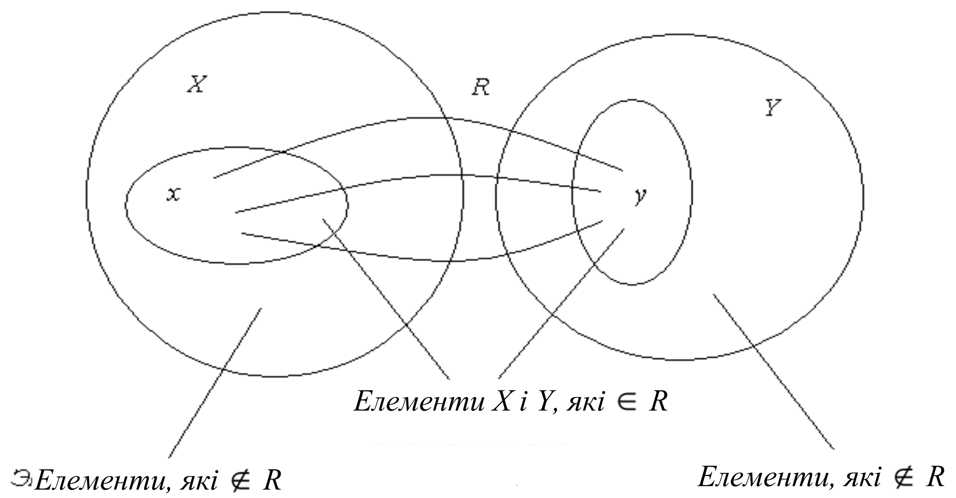


Рис. 2.1.

Поняття упорядкованої пари можна розширити на упорядковані трійки елементів (a_1, a_2, a_3), упорядковані четвірки (a_1, a_2, a_3, a_4) і т.д. Упорядкована n -ка елементів із множини A – це n необов'язково різних елементів із A, заданих у певній послідовності.

Якщо $(a_1, a_2, ..., a_n) = (a_1', a_2', ..., a_n')$, то $a_1 = a_1'$, $a_2 = a_2', ...,$ $a_n = a_n'$. Для того, щоб відрізнити упорядковані пари, трійки і т.д. від неупорядкованих, останні будемо позначати $A^{(2)}, A^{(3)}$ і т.д.

Визначення 2.4. *Декартовим добутком* $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ множин $A_1, A_2, ..., A_n$ називається сукупність послідовностей (тобто сукупність упорядкованих перестановок елементів) вигляду $(a_1, a_2, ..., a_n)$, де $a_i \in A_i$, $1 \le i \le n$.

Елементи декартового добутку називаються *ще кортежами.* Довільна підмножина множини $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ називається *відношенням*, заданим або визначеним на множинах $A_1, A_2, ..., A_n$. Якщо $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, то декартовий добуток $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ називають декартовим добутком n-го степеня множини A (A^n), а відношення R, задане на множинах $A_1, A_2, ..., A_n$ – n-арним відношенням на множині A.

Коли $(a_1, a_2, ..., a_n) \in R$, то говорять, що елементи $a_i \ (i = 1, 2, ..., n)$ знаходяться між собою у відношенні R або відношення R істинне для a_1, $a_2, ...,$ a_n.

Якщо $(a_1, a_2, ..., a_n) \notin R$, то вважають, що R хибне для $a_1, a_2, ..., a_n$. При $n = 1$ відношення називається *унарним*, при $n = 2$ – *бінарним*, при $n = 3$ – *тернарним* і т.д.

Надалі ми будемо розглядати бінарні відношення, тому замість терміна "бінарне відношення" будемо вживати термін "відношення".

Розглянемо кілька прикладів відношень:

1. Якщо R – множина дійсних чисел, тобто $\left\{ \langle x, y \rangle \in R \middle| \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \right\}$ – бінарне відношення на R. Графічно його зобразити можна в такий спосіб (рис. 2.2):

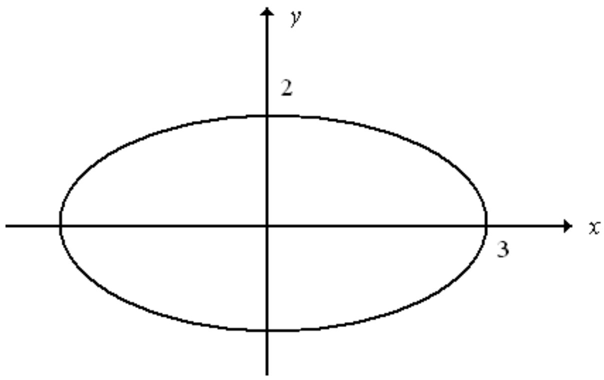


Рис. 2.2.

2. Якщо N – множина натуральних чисел, то відношення $\{\langle x, y\rangle \in N \times N | x \geq y\}$ виконується для пар $\langle 5,3\rangle$, $\langle 7,1\rangle$, $\langle 2,2\rangle$, але не виконується для пар $\langle 1,7\rangle$, $\langle 9,11\rangle$, $\langle 2,5\rangle$.

3. Якщо X – множина студентів університету, а Y – множина груп університету, то відношення множин X і Y – є множина $\{\langle x, y\rangle \in X \times Y | x - \ -$ *студент групи* $y\}$.

4. Якщо X – множина товарів у магазині, а $Y = R^+$ – множина дійсних додатних чисел, то відношення множин X і Y – є множина $\{\langle x, y\rangle \in X \times Y | y - \text{ціна } x\}$.

У силу визначення бінарних відношень, як спосіб їх задання можуть бути використані будь-які способи задання множин. Відношення, визначені на скінченних множинах, звичайно задаються:

1. *Списком (перерахуванням)* упорядкованих пар, для яких це відношення виконується.

Приклад 2.2. На множинах чисел $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B = \{24,25,26\}$ побудуємо відношення «дільник», яке складається з упорядкованих пар вигляду (x, y), де x – дільник y, $x \in A$, $y \in B$:

$$R = \{(1,24),(1,25),(1,26),(2,24),(2,26),(3,24),(4,24),(5,25),(6,24),(8,24)\}.$$

2. *Матрицею* – бінарному відношенню $R \subseteq X \times X$, де $X = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ відповідає квадратна матриця порядку n, кожен елемент a_{ij} якої дорівнює 1, якщо між x_i і x_j є відношення R і 0, у протилежному випадку, тобто:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i R x_j, \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Приклад 2.3. Наступна матриця W задає відношення R «дільник» для числових множин A і B з попереднього прикладу:

$A \setminus B$	24	25	26
1	1	1	1
2	1	0	1
3	1	0	0
4	1	0	0
5	0	1	0
6	1	0	0
7	0	0	0
8	1	0	0
9	0	0	0

3. Бінарне відношення R на множинах A і B може бути задане *графічно*. На площині зобразимо точками x_i і x_j елементи множин A і B. Якщо пара (x_i, x_j) належить відношенню R, з'єднаємо точки x_i і x_j лінією, яка спрямована від першого елемента пари до другого. Позначивши таким чином всі пари, що належать відношенню R, одержимо фігуру, яка називається графом відношення. Спрямовані лінії, що з'єднують пари точок, називаються дугами, а точки, що зображують елементи множин, – вершинами графа. Якщо бінарне відношення R задане на одній множині А $\left(R \subseteq A^2\right)$, то вершинами графа будуть елементи множини A.

Розглянемо деякі частинні випадки відношень. Нехай задане бінарне відношення R на множині A: $R \subseteq A^2$. Можливий випадок, коли $R = A^2$ – таке відношення називається *повним*. Може трапитись, що $R = \varnothing$, – таке відношення називається *порожнім*.

Якщо відношення містить всі можливі пари вигляду (a, a) і не містить інших пар елементів, то таке відношення називається *тотожним*.

Якщо повне відношення задане за допомогою матриці, то всі елементи цієї матриці рівні 1. Матриця порожнього відношення складається з нульових елементів.

Переліком елементів можливо задавати n-арні відношення при $n \geq 2$. За допомогою матриці і графа зручно задавати тільки бінарні відношення.

Приклад 2.4. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. Знайти декартовий добуток множин $A \times B$ й $B \times A$. Записати $(A \times B) \setminus (B \times A)$, $(A \times B) \cap (B \times A)$, $(A \times B) \div (B \times A)$.

Розв'язання:

$A \times B = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle\}$;

$B \times A = \{\langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle\}$;

$(A \times B) \setminus (B \times A) = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle\}$;

$(A \times B) \cap (B \times A) = \{\langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$;

$(A \times B) \div (B \times A) = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle\}$.

Приклад 2.5. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Задати в явному вигляді (списком) і матрицею відношення $R \subseteq A \times A$, якщо відношення R означає "бути строго більше".

Розв'язання: Відношення R містить всі впорядковані пари елементів $\langle x, y\rangle$ з A: $R = \{\langle x, y\rangle \in A \times A | x > y\}$.

Список відношення R виглядає в такий спосіб:

$R = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 5,1\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,3\rangle, \langle 5,4\rangle, \langle 6,1\rangle, \langle 6,2\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,4\rangle, \langle 6,5\rangle,$
$\langle 7,1\rangle, \langle 7,2\rangle, \langle 7,3\rangle, \langle 7,4\rangle, \langle 7,5\rangle, \langle 7,6\rangle, \langle 8,1\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 8,3\rangle, \langle 8,4\rangle, \langle 8,5\rangle, \langle 8,6\rangle, \langle 8,7\rangle, \langle 9,1\rangle, \langle 9,2\rangle, \langle 9,3\rangle,$
$\langle 9,4\rangle, \langle 9,5\rangle, \langle 9,6\rangle, \langle 9,7\rangle, \langle 9,8\rangle, \langle 10,1\rangle, \langle 10,2\rangle, \langle 10,3\rangle, \langle 10,4\rangle, \langle 10,5\rangle, \langle 10,6\rangle, \langle 10,7\rangle, \langle 10,8\rangle, \langle 10,9\rangle\}$.

Матриця відношення R наведена на рис. 2.3:

R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
6	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
8	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
9	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Рис. 2.3

Приклад 2.6. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Задати в явному вигляді (списком) і матрицею відношення $R \subseteq A \times A$, якщо відношення R означає:

а) "мати спільний дільник, відмінний від одиниці";

б) "їх сума – число, кратне 3".

Розв'язання: а) відношення R_1 може бути записане в такий спосіб:

$$R_1 = \{\langle x, y\rangle \in A \mid x \; і \; y \; мають \; спільний \; дільник, \; відмінний \; від \; одиниці\}.$$

Список відношення R_1:

$R_1 = \{\langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 2,10\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 3,9\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,6\rangle, \langle 4,10\rangle, \langle 4,8\rangle, \langle 5,5\rangle,$
$\langle 5,10\rangle, \langle 6,2\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,4\rangle, \langle 6,6\rangle, \langle 6,8\rangle, \langle 6,10\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 8,4\rangle, \langle 8,6\rangle, \langle 8,8\rangle, \langle 8,10\rangle, \langle 9,3\rangle, \langle 9,6\rangle,$
$\langle 9,9\rangle, \langle 10,2\rangle, \langle 10,4\rangle, \langle 10,5\rangle, \langle 10,6\rangle, \langle 10,8\rangle, \langle 10,10\rangle\}.$

Матриця відношення R_1 наведена на рис. 2.4, а;

б) відношення R_2 може бути записане в такий спосіб

$R_2 = \{\langle x, y\rangle \in A \mid x + y \; кратне \; 3\}$. Список відношення R_2:

$R_2 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 1,8\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,7\rangle, \langle 2,10\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 3,9\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 4,8\rangle, \langle 5,1\rangle,$
$\langle 5,4\rangle, \langle 5,7\rangle, \langle 5,10\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,6\rangle, \langle 6,9\rangle, \langle 7,2\rangle, \langle 7,5\rangle, \langle 7,8\rangle, \langle 8,1\rangle, \langle 8,4\rangle, \langle 8,7\rangle, \langle 8,10\rangle, \langle 9,3\rangle, \langle 9,6\rangle,$
$\langle 9,9\rangle, \langle 10,2\rangle, \langle 10,5\rangle, \langle 10,8\rangle\}.$

Матриця відношення R_2 наведена на рис. 2.4, б.

R_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
6	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
9	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1

а)

R_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
2	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
4	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
5	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
6	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
7	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
8	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
9	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
10	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

б)

Рис. 2.4

Приклад 2.7. Скласти матриці відношень, заданих на системі множин "булеан множини A" – $P(A)$, де $A = \{x, y, z\}$:

1) R_1 – "перетинатися з" (мати не порожнє перетинання);

2) R_2 – "бути нестрогим включенням $\subseteq$".

Розв'язання: $P(A) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$.

Матриці відношень R_1, R_2 представлені на рис. 2.5.

R_1	$\varnothing$	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$	$\{x,y\}$	$\{x,z\}$	$\{y,z\}$	$\{x,y,z\}$
$\varnothing$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\{x\}$	0	1	0	0	1	1	0	1
$\{y\}$	0	0	1	0	1	0	1	1
$\{z\}$	0	0	0	1	0	1	1	1
$\{x,y\}$	0	1	1	0	1	1	1	1
$\{x,z\}$	0	1	0	1	1	1	1	1
$\{y,z\}$	0	0	1	1	1	1	1	1
$\{x,y,z\}$	0	1	1	1	1	1	1	1

R_2	$\varnothing$	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$	$\{x,y\}$	$\{x,z\}$	$\{y,z\}$	$\{x,y,z\}$
$\varnothing$	0	1	1	1	1	1	1	1
$\{x\}$	0	1	0	0	1	1	0	1
$\{y\}$	0	0	1	0	1	0	1	1
$\{z\}$	0	0	0	1	0	1	1	1
$\{x,y\}$	0	0	0	0	1	0	0	1
$\{x,z\}$	0	0	0	0	0	1	0	1
$\{y,z\}$	0	0	0	0	0	0	1	1
$\{x,y,z\}$	0	0	0	0	0	0	0	1

Рис. 2.5.

Приклад 2.8. Нехай відношення R – "є мама", визначене на множині $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ і представлене схемою (рис. 2.6). Задати списком відношення R. Визначити родинні відносини між парами $\langle a,c\rangle$, $\langle a,g\rangle$, $\langle e,f\rangle$, $\langle a,h\rangle$, $\langle b,g\rangle$.

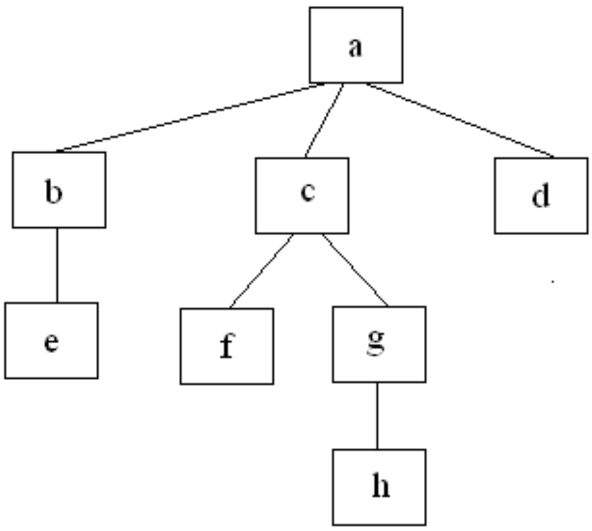


Рис. 2.6.

Розв'язання: 1) відношення $R = \{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,e\rangle,\langle c,f\rangle,\langle c,g\rangle,\langle g,h\rangle\}$.

2) a – мама для c; a – бабуся для g; e – двоюрідна сестра для f; a – прабабуся для h, b – тітка для g.

Задачі для самостійної роботи

1. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4,5\}$, $C=\{-1,0,2\}$. Знайти декартовий добуток $(A\div B)\times(C\setminus B)$ і накреслити його в декартовій системі координат.

2. $A=\{2,3,5\}$, $B=\{1,4\}$, $C=\{2,7\}$. Записати множину $(A\times B)\div(C\times B)$.

3. $A=\{1,2,3,5,7\}, B=\{1,2,4\}, C=\{2,9,10\}$. Записати множину $(A\setminus B)\times(C\div B)$.

4. $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{0,1,2,3\}$, $C=\{1,2,3,4,5,6\}$. Записати множину $((A\div B)\setminus C)\times C$.

5. Чи вірне твердження: якщо $A\setminus C=\varnothing$, то $(A\times B)\setminus(C\times B)=\varnothing$?

6. Чи вірне твердження: якщо $A\neq C$ і $B\neq\varnothing$, то $A\times B\neq C\times B$?

7. Чи вірне твердження: якщо $A\subset C$, то $A\times B\subset C\times B$?

8. Чи вірне твердження: якщо $A\times C=B\times C$ і $C\neq\varnothing$, то $A=B$?

9. Чи вірне, що $(A\cap C)\times B=(A\times B)\cap(C\times B)$?

10. $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Задати в явному вигляді (списком) і матрицею відношення $R\subseteq A\times A$, якщо відношення R означає "*їх сума – просте число*".

11. $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Задати в явному вигляді (списком) і матрицею відношення $R\subseteq A\times A$, якщо відношення R означає "*їх сума – складне число*".

12. Множина M – булеан множини $A=\{1,2,3,4\}$, $(M=P(A))$. Скласти матриці відношень R_1, R_2, R_3 заданих на системі множин M, якщо R_1 – "*бути строгим включенням*", R_2 – "*бути доповненням до* ", R_3 – "*перетинатися з*". Задати відношення R_1, R_2, R_3 описом його характеристичних властивостей.

13. Відношення R визначене на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Задати списком і матрицею відношення $R=\{\langle a,b\rangle | a,b\in A,\ \ (a+b)\text{ - }парне\}$.

14. Відношення R визначене на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Задати списком і матрицею відношення $R=\{\langle a,b\rangle | a,b\in A,\ \ b\text{ - }дільник\ \ (a+b),\ b\neq 1\}$.

15. Відношення R визначене на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Задати списком і матрицею відношення $R=\{\langle a,b\rangle | a,b\in A,\ \ (a+2)\text{ - }дільник\ \ (a+b)\}$.

16. Для визначених нижче відношень навести приклади пар, для яких виконуються відношення і, навпаки, не виконуються:

а) відношення на множині точок дійсної площини:

R_1 – "*знаходитися на колі* $x^2+y^2=16$";

R_2 – “*знаходитися усередині кола* $x^2 + y^2 = 16$”;

R_3 – “*знаходитися зовні кола* $x^2 + y^2 = 16$”;

R_4 – “*бути точкою перетину ліній* $x^2 + y^2 = 1$ *й* $y = x^3$”;

R_5 – “*знаходитися на прямій* $2x + 5y = 10$”;

б) відношення на множині студентів вашої групи:

R_6 – “*сидіти за однією партою*”;

R_7 – “*знаходитися за…у списку студентів академгрупи*”;

R_8 – “*мають однаковий середній бал за результатами сесії*”;

в) відношення, задані на множині членів вашої родини:

R_{12} – “*бути старше*”;

R_{13} – “*бути сином (дочкою)*”;

R_{14} – “*мають спільну кімнату*”;

г) відношення, задані на множині міст України:

R_{15} – “*знаходитися в одній області*”;

R_{16} – “*знаходитися в сусідніх областях*”;

R_{17} – “*знаходитися по одну сторону річки Дніпро*”.

2.2. Властивості бінарних відношень

Визначення 2.5. Відношення R на $A \times A$ називається *рефлексивним*, якщо має місце $\langle a, a \rangle \in R$, для кожного $a \in A$. Головна діагональ матриці такого відношення містить тільки одиниці.

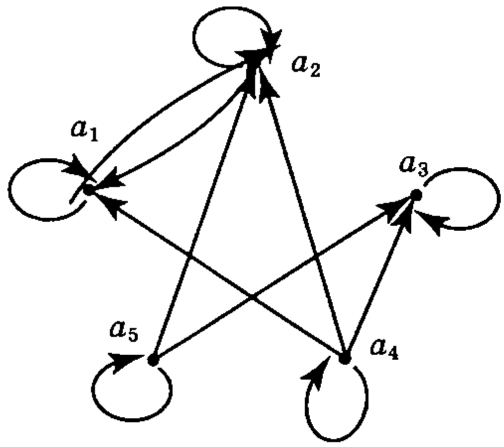


Рис. 2.7. Рефлексивне бінарне відношення

Наприклад, відношення "*жити в одній країні*" – рефлексивне. Відношення "*бути канцелярським приладдям*" рефлексивне для всього вмісту пенала. Відношення "≤" на множині дійсних чисел рефлексивне.

Визначення 2.6. Відношення R на $A \times A$ називається *антирефлексивним*, якщо ні для якого $a \in A$ не виконується $\langle a, a \rangle \in R$, тобто із $\langle a, b \rangle \in R$ слідує, що $a \neq b$. Головна діагональ матриці такого відношення містить тільки нулі.

Наприклад, відношення *"бути дочкою"*, *"бути молодше"* антирефлексивні. Відношення "<" на множині дійсних чисел антирефлексивне.

Визначення 2.7. Відношення R на $A \times A$ називається *симетричним*, якщо для всіх $a, b \in R$ з умови $\langle a, b \rangle \in R$ слідує, що $\langle b, a \rangle \in R$. Матриця симетричного відношення симетрична щодо головної діагоналі, тобто $c_{ij} = c_{ji}$ для всіх i і j.

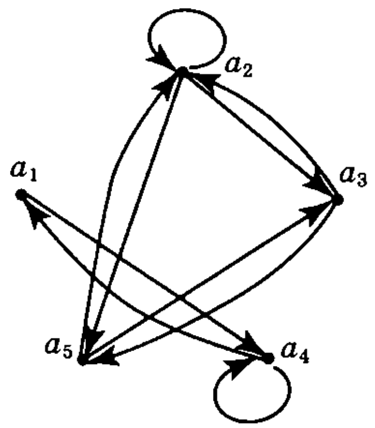


Рис. 2.8. Діаграма симетричного бінарного відношення

Наприклад, відношення "*працювати в одній компанії*", *"вчитися в одному класі"* – симетричні. Відношення "=" на множині дійсних чисел симетричне.

Визначення 2.8. Відношення R на $A \times A$ називається *антисиметричним*, якщо для всіх $a, b \in R$ з умов $\langle a, b \rangle \in R$ і $\langle b, a \rangle \in R$ слідує, що $a = b$, тобто ні для яких елементів a і b, що розрізняються $(a \neq b)$, не виконуються одночасно відношення $\langle a, b \rangle \in R$ і $\langle b, a \rangle \in R$. У матриці антисиметричного відношення відсутні одиниці, симетричні щодо головної діагоналі.

Наприклад, відношення *"бути дочкою"*, *"бути керівником"* – антисиметричні. Відношення "≤" на множині дійсних чисел антисиметричне. Дійсно, якщо $a \leq b$ й $b \leq a$, то $a = b$.

Визначення 2.9. Відношення R на $A \times A$ називається *транзитивним*, якщо для будь-яких a, b, c з умов $\langle a, b \rangle \in R$ і $\langle b, c \rangle \in R$ слідує $\langle a, c \rangle \in R$. У матриці такого відношення повинна виконуватися наступна умова: якщо в i-тому рядку і в j-тому стовпці стоїть одиниця, тобто $c_{ij} = 1$, то всім одиницям в j-тому рядку і k-тому стовпці $(c_{jk} = 1)$ повинні відповідати одиниці в i-тому рядку і у тих самих k-тих стовпцях, тобто $c_{ik} = 1$ (і, можливо, в інших стовпцях).

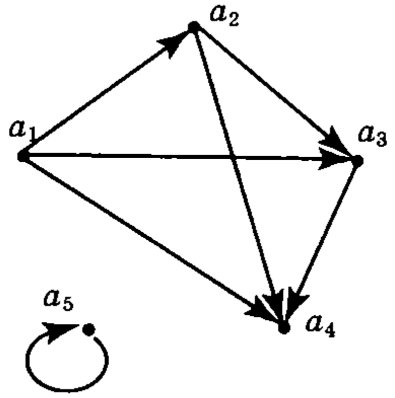


Рис. 2.9. Діаграма транзитивного відношення

Наприклад, відношення *"жити в одному місті"*, *"бути сестрою"* – транзитивні. Відносини "≤", "=" на множині дійсних чисел транзитивні.

Визначення 2.10. Бінарне відношення називається *еквівалентним,* якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне. Бінарне відношення R називається *відношенням порядку (порядком)* на множині A, якщо воно є антисиметричним та транзитивним. Якщо порядок є рефлексивним, то він називається *частковим (нестрогим) порядком*. Прикладом є відношення "≤" на множині дійсних чисел. Антирефлексивний порядок називається *строгим порядком*. Прикладом є відношення "$\subset$" (відношення строгого включення множин). Відношення R є строгим порядком тоді і тільки тоді, коли воно є одночасно асиметричним і транзитивним. Наприклад, відношення "≤" є відношенням часткового порядку, яке відповідає відношенню строгого порядку "<".

Наприклад, відношення *"жити в одному місті"* – еквівалентне на множині*: «велика кількість людей».*

Приклад 2.8. Нехай $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ і відношення $R_1 \subseteq A \times A$ є множина $R_1 = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 5,5 \rangle, \langle 6,6 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,5 \rangle, \langle 5,3 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 4,2 \rangle\}$.

Які властивості має задане відношення?

Розв'язання:

Побудуємо матрицю відношення (рис. 2.10):

R_1	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	1	0	0
2	1	1	0	1	0	0
3	0	0	1	0	1	0
4	1	1	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

Рис. 2.10.

Відношення R_1 рефлексивне, бо для кожного $a \in A$ $\langle a,a \rangle \in R_1$. Головна діагональ матриці відношення R_1 містить одиниці. Відношення R_1 не є антирефлексивне, бо з умови $\langle a,b \rangle \in R$ не випливає $a \neq b$, наприклад, $\langle 2,2 \rangle \in R_1$, але $2 = 2$. Розглянувши всі можливі випадки методом безпосереднього перебору (табл. 2.2, а) можна показати, що відношення R_1 симетричне. Крім того, матриця відношення R_1 симетрична щодо головної діагоналі. R_1 не є антисиметричне, бо $\langle 3,5 \rangle \in R_1$ і $\langle 5,3 \rangle \in R_1$, але $3 \neq 5$. Скориставшись методом безпосереднього перебору (табл. 2.2, б) можна також показати, що відношення R_1 транзитивне.

Таблиця 2.2.

(а)

№	$\langle a,b \rangle \in R_1$	$\langle b,a \rangle$	$\langle b,a \rangle \in R_1$?
1	$\langle 1,2 \rangle$	$\langle 2,1 \rangle$	так
2	$\langle 1,4 \rangle$	$\langle 4,1 \rangle$	так
3	$\langle 2,1 \rangle$	$\langle 1,2 \rangle$	так
4	$\langle 2,4 \rangle$	$\langle 4,2 \rangle$	так
5	$\langle 3,5 \rangle$	$\langle 5,3 \rangle$	так
6	$\langle 5,3 \rangle$	$\langle 3,5 \rangle$	так
7	$\langle 4,1 \rangle$	$\langle 1,4 \rangle$	так
8	$\langle 4,2 \rangle$	$\langle 2,4 \rangle$	так

(б)

	$\langle a,b \rangle \in R_1$	$\langle b,c \rangle \in R_1$	$\langle a,c \rangle \in R_1$	$\langle a,c \rangle \in R_1$?
1	$\langle 1,2 \rangle$	$\langle 2,1 \rangle$	$\langle 1,1 \rangle$	так
2	$\langle 1,2 \rangle$	$\langle 2,2 \rangle$	$\langle 1,2 \rangle$	так
3	$\langle 1,2 \rangle$	$\langle 2,4 \rangle$	$\langle 1,4 \rangle$	так
4	$\langle 1,4 \rangle$	$\langle 4,1 \rangle$	$\langle 1,1 \rangle$	так
5	$\langle 1,4 \rangle$	$\langle 4,2 \rangle$	$\langle 1,2 \rangle$	так
6	$\langle 1,4 \rangle$	$\langle 4,4 \rangle$	$\langle 1,4 \rangle$	так
7	$\langle 2,1 \rangle$	$\langle 1,1 \rangle$	$\langle 2,1 \rangle$	так
8	$\langle 2,1 \rangle$	$\langle 1,2 \rangle$	$\langle 2,2 \rangle$	так
9	$\langle 2,1 \rangle$	$\langle 1,4 \rangle$	$\langle 2,4 \rangle$	так
10	$\langle 2,4 \rangle$	$\langle 4,1 \rangle$	$\langle 2,1 \rangle$	так
11	$\langle 2,4 \rangle$	$\langle 4,2 \rangle$	$\langle 2,2 \rangle$	так
12	$\langle 2,4 \rangle$	$\langle 4,4 \rangle$	$\langle 2,4 \rangle$	так

13	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 5,3\rangle$	$\langle 3,3\rangle$	так
14	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 5,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	так
15	$\langle 4,1\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	$\langle 4,1\rangle$	так
16	$\langle 4,1\rangle$	$\langle 1,2\rangle$	$\langle 4,2\rangle$	так
17	$\langle 4,1\rangle$	$\langle 1,4\rangle$	$\langle 4,4\rangle$	так
18	$\langle 4,2\rangle$	$\langle 2,1\rangle$	$\langle 4,1\rangle$	так
19	$\langle 4,2\rangle$	$\langle 2,2\rangle$	$\langle 4,2\rangle$	так
20	$\langle 4,2\rangle$	$\langle 2,4\rangle$	$\langle 4,4\rangle$	так
21	$\langle 5,3\rangle$	$\langle 3,3\rangle$	$\langle 5,3\rangle$	так
22	$\langle 5,3\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 5,5\rangle$	так

Приклад 2.9. Які властивості мають відношення:

1. На множині натуральних чисел N:

а) R_1 – “бути не менше”;

б) R_2 – “бути рівним”;

в) R_3 – “їх сума – парне число”.

2. На множині точок дійсної площини R:

а) R_4 – “бути на одній відстані від початку координат”;

б) R_5 – “бути симетричним щодо осі Oy”;

в) R_6 – “знаходитися в одному квадранті”.

3. На множині: «велика кількість людей»:

а) R_7 – “бути дочкою”;

б) R_8 – “бути сестрою”;

в) R_9 – “жити в одній країні”.

4. На множині елементів структури (рис. 2.5):

а) R_{10} – “ бути безпосередньо пов'язаним з”;

б) R_{11} – “бути керівником”.

Розв’язання:

1. На множині натуральних чисел N:

а) $R_1 = \{\langle a,b\rangle | a \ge b\}$

- рефлексивне, не антирефлексивне, тому що $a \ge a$ виконується для всіх $a \in N$. Наприклад, $5 \ge 5$;

- не симетричне, тому що $5 \ge 2$, але $2 \ge 5$ – невірно;

- антисиметричне, тому що $a \ge b$ і $b \ge a$ виконуються тільки тоді, коли $a = b$;

- транзитивне, бо коли $a \geq b$ і $b \geq c$, то $a \geq c$. Наприклад, $8 \geq 5$, $5 \geq 1$ і $8 \geq 1$.

б) $R_2 = \{\langle a,b\rangle | a = b\}$

- рефлексивне, не антирефлексивне, тому що виконується $a = a$ для всіх $a \in N$. Наприклад, $5 = 5$;

- симетричне, бо коли $a = b$, то і $b = a$;

- антисиметричне, бо коли $\langle a,b\rangle \in R_2$ і $\langle b,a\rangle \in R_2$, то $a = b$;

- транзитивне, бо коли $a = b$ і $b = c$, то і $a = c$.

в) $R_3 = \{\langle a,b\rangle | a + b = 2n,\ n \in N\}$

- рефлексивне, не антирефлексивне, тому що сума двох парних чисел і двох непарних чисел є число парне. Наприклад, $4 + 6 = 10$ – парне і $5 + 7 = 12$ – парне;

- симетричне, не антисиметричне, бо коли $a + b$ – парне, то і $b + a$ – теж парне (від переставлення доданків сума не міняється). Наприклад, $3+5=8$ – парне і $5+3=8$ – теж парне, $2+4=6$ – парне і $4+2=6$ – теж парне;

- транзитивне, бо якщо $a + b$ – парне, $b + c$ – парне, то і $a + c$ – теж парне. Наприклад, $1+3=4$ – парне і $3+11=14$ – парне, то і $1+11=12$ – теж парне.

2. На множині точок дійсної площини R:

а) $R_4 = \{\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle | (x_1)^2 + (y_1)^2 = (x_2)^2 + (y_2)^2\}$:

- рефлексивне, не антирефлексивне, тому що $x^2 + y^2 = x^2 + y^2$ для будь-яких точок (x, y) дійсної площини;

- симетричне, не антисиметричне, тому що, наприклад, для точок $(5,4)$ і $(5,–4)$ має місце рівність $5^2 + 4^2 = 5^2 + (-4)^2$, але при цьому $(5,4) \neq (5,–4)$;

- транзитивне, бо якщо (x_1, y_1) і (x_2, y_2) перебувають на однаковій відстані від початку координат $(x_1)^2 + (y_1)^2 = (x_2)^2 + (y_2)^2$, а також (x_2, y_2) і (x_3, y_3) задовольняють умові $(x_2)^2 + (y_2)^2 = (x_3)^2 + (y_3)^2$, то точки (x_1, y_1) і (x_3, y_3) теж перебувають на однаковій відстані від початку координат: $(x_1)^2 + (y_1)^2 = (x_3)^2 + (y_3)^2$.

б) $R_5 = \{\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle | x_1 = -x_2, y_1 = y_2\}$:

- не рефлексивне, бо для жодної із точок (x, y) площини, що не лежать на осі Oy $(x \neq 0)$ не виконується $\langle (x, y), (x, y)\rangle \in R_5$;

- не антирефлексивне, тому що точка площини симетрична самої собі, якщо вона лежить на осі Oy. Тобто для точок (x,y) з $x=0$ має місце рівність $\langle(x,y),(x,y)\rangle \in R_5$;

- симетричне, наприклад, $\langle(3{,}5),(-3{,}5)\rangle \in R_5$ і $\langle(-3{,}5),(3{,}5)\rangle \in R_5$;

- не антисиметричне, тому що $\langle(3{,}5),(-3{,}5)\rangle \in R_5$ і $\langle(-3{,}5),(3{,}5)\rangle \in R_5$, але $(3{,}5) \neq (-3{,}5)$;

- не транзитивне, тому що $\langle(3{,}5),(-3{,}5)\rangle \in R_5$ і $\langle(-3{,}5),(3{,}5)\rangle \in R_5$, але не виконується $\langle(3{,}5),(3{,}5)\rangle \in R_5$.

в) $R_6 = \{\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle | x_1 \cdot x_2 > 0, y_1 \cdot y_2 > 0\}$:

- рефлексивне, не антирефлексивне, бо та сама точка лежить у тому самому квадранті $\langle(x,y),(x,y)\rangle \in R_6$;

- симетричне, наприклад, якщо $\langle(-7{,}2),(-3{,}4)\rangle \in R_6$, то і $\langle(-3{,}4),(-7{,}2)\rangle \in R_6$;

- не антисиметричне, тому що виконуються $\langle(-7{,}2),(-3{,}4)\rangle \in R_6$ і $\langle(-3{,}4),(-7{,}2)\rangle \in R_6$, але при цьому $(-3{,}4) \neq (-7{,}2)$;

- транзитивне, тому що, наприклад, коли $\langle(-7{,}2),(-3{,}4)\rangle \in R_6$ і $\langle(-3{,}4),(-5{,}6)\rangle \in R_6$, то і $\langle(-7{,}2),(-5{,}6)\rangle \in R_6$.

3. На множині: «велика кількість людей»:

а) $R_7 = \{\langle a,b\rangle | a - \textit{дочка } b\}$:

- не рефлексивне, антирефлексивне, тому що ні для яких a не може бути виконана умова $a - \textit{дочка } b$, а з умови $\langle a,b\rangle \in R_7$ треба, щоб $a \neq b$;

- не симетричне, антисиметричне, тому що ні для яких $a \neq b$ не виконується $a - \textit{дочка } b$ і $b - \textit{дочка } a$;

- не транзитивне, бо якщо $a - \textit{дочка } b$, а $b - \textit{дочка } c$, то $a - \textit{не дочка } c$, а її онука.

б) $R_8 = \{\langle a,b\rangle | a - \textit{сестра } b\}$:

- не рефлексивне, антирефлексивне, тому що та ж сама людина не може бути сама собі сестрою;

- не симетричне, бо в загальному випадку, якщо між братом a і сестрою b має місце $\langle a,b\rangle \in R_7$, то $\langle b,a\rangle \notin R_7$;

- не антисиметричне, бо якщо a і b – сестри, то $\langle a,b\rangle \in R_7$ і $\langle b,a\rangle \in R_7$, але $a \neq b$;

- транзитивне, якщо вважати сестрами людей, що мають загальних батьків.

в) $R_9 = \{\langle a,b \rangle | a \ \textit{живе у одній країні з} \ b\}$:

- рефлексивне, не антирефлексивне, тому що кожна людина живе в одній і тій же країні із самим собою, тобто $\langle a,a \rangle \in R_9$.

- симетричне, бо якщо a живе в одній країні з b, то і b живе в одній країні з a, тобто якщо $\langle a,b \rangle \in R_9$, то і $\langle b,a \rangle \in R_9$;

- не антисиметричне, тому що з умов $\langle a,b \rangle \in R_9$ і $\langle b,a \rangle \in R_9$ не слідує $a = b$;

- транзитивне, бо якщо a живе в одній країні з b, b – в одній країні з c, то a живе в одній країні з c.

4. На множині елементів структури (рис. 2.5):

а) $R_{10} = \{\langle a,b \rangle | a \ \textit{безпосередньо зв'язаний з} \ b\}$:

- не рефлексивне, не антирефлексивне, тому що $\langle a,a \rangle \in R_{10}$ не має сенсу;

- симетричне, не антисиметричне, тому що для всіх $a \neq b$, якщо виконується $\langle a,b \rangle \in R_{10}$, то виконується і $\langle b,a \rangle \in R_{10}$;

- не транзитивне, тому що $\langle a,b \rangle \in R_{10}$, $\langle b,e \rangle \in R_{10}$, але $\langle a,e \rangle \notin R_{10}$ (a і e зв'язані, але опосередковано).

б) $R_{11} = \{\langle a,b \rangle | a \ – \textit{керівник} \ b\}$:

- не рефлексивне, антирефлексивне, тому що a не може бути керівником самому собі;

- не симетричне, антисиметричне, тому що якщо a – керівник b, то не може бути b керівником a;

- транзитивне, бо якщо a – керівник b, а b – керівник e, то a – керівник e.

Задачі для самостійної роботи

1. $A = \{a,b,c,d,e\}$, а R_1, R_2, R_3, R_4 – відношення на A:

$R_1 = \{\langle a,a \rangle, \langle a,b \rangle, \langle b,c \rangle, \langle b,d \rangle, \langle c,e \rangle, \langle e,d \rangle, \langle c,a \rangle\}$;

$R_2 = \{\langle a,b \rangle, \langle b,a \rangle, \langle b,c \rangle, \langle b,d \rangle, \langle e,e \rangle, \langle d,e \rangle, \langle c,b \rangle\}$;

$R_3 = \{\langle a,b \rangle, \langle a,a \rangle, \langle b,c \rangle, \langle b,b \rangle, \langle e,e \rangle, \langle b,a \rangle, \langle c,b \rangle, \langle c,c \rangle, \langle d,d \rangle, \langle a,c \rangle, \langle c,a \rangle\}$;

$R_4 = \{\langle a,b \rangle, \langle b,c \rangle, \langle b,b \rangle, \langle e,e \rangle, \langle b,a \rangle, \langle c,b \rangle, \langle d,d \rangle, \langle a,c \rangle, \langle c,a \rangle\}$.

Побудувати матриці заданих відношень і з'ясувати, яке з них:

а) симетричне?

б) рефлексивне?

в) транзитивне?

г) антисиметричне?

2. $A=\{a,b,c,d,e\}$. Опишіть відношення на A:

а) рефлексивне, але не симетричне, не транзитивне;

б) симетричне, але не рефлексивне, не транзитивне;

в) транзитивне, але не симетричне, не рефлексивне;

г) рефлексивне і симетричне, але не транзитивне;

д) симетричне і транзитивне, але не рефлексивне.

3. Якими властивостями характеризуються наступні відношення на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$:

а) $R_1=\{\langle a,b\rangle | a+b \text{ - } непарне\}$; б) $R_2=\{\langle a,b\rangle | (a+2) \text{ - } дільник \ (a+b)\}$;

в) $R_3=\{\langle a,b\rangle | a \text{ - } дільник \ (ab+1),\ a\neq 1\}$.

4. Якими властивостями характеризуються зазначені нижче відношення. Побудувати матриці відношень:

а) відношення, задані на множині елементів структури, зображеної на рис. 2.6:

R_1 – “*бути безпосередньо зв'язаним з……*”;

R_2 – “*бути начальником*”;

R_3 – “*бути безпосереднім начальником*”.

б) відношення, задані на множині членів родини, що складається з 5 чоловік: бабуся, тато, мама, син, дочка, які проживають в 4-х кімнатній квартирі. В 1-й кімнаті – бабуся, в 2-й – мама і тато, в 3-й – син, в 4-й – дочка. За умови, що тато старший від дружини, дочка старіша від брата, а бабуся – мама тата:

R_4 – “*бути старше*”; R_5 – “*бути сином (дочкою)*”;

R_6 – “*мати спільну кімнату*”.

в) відношення, задані на множині міст України: Харків, Полтава, Чугуїв, Кременчук, Богодухів, Донецьк, Горлівка, Конотоп, Ахтирка, Херсон, Каховка, Луцьк: R_7 – “*знаходитися в одній області*”;

R_8 – “*знаходитися в сусідніх областях (мають спільну межу)*”.

2.3. Операції над бінарними відношеннями

Оскільки відношення на множині A задаються підмножинами $R\subseteq A\times B$, то для них визначні ті ж операції, що й над множинами, а саме:

1. *Об'єднання*: $R_1 \cup R_2 = \{\langle a,b\rangle | \langle a,b\rangle \in R_1 \quad або \quad \langle a,b\rangle \in R_2\}$.

2. *Перетин:* $R_1 \cap R_2 = \{\langle a,b\rangle | \langle a,b\rangle \in R_1 \quad і \quad \langle a,b\rangle \in R_2\}$.

3. *Різниця:* $R_1 \setminus R_2 = \{\langle a,b\rangle | \langle a,b\rangle \in R_1 \;\; і \; \langle a,b\rangle \notin R_2\}$.

4. *Доповнення:* $\overline{R} = U \setminus R$, де $U = A \times B$.

Крім того, необхідно визначити інші, ще не знайомі нам операції над бінарними відношеннями.

5. *Обернене відношення* R^{-1}.

Визначення 2.11. Якщо $\langle a,b\rangle \in R$ – відношення, то відношення R^{-1} називається *оберненим відношенням* до даного відношення R тоді й тільки тоді, коли $R^{-1} = \{\langle b,a\rangle | \langle a,b\rangle \in R\}$.

Наприклад, якщо R – "бути старше", то R^{-1} – "бути молодше"; якщо R – "бути дружиною", то R^{-1} – "бути чоловіком". Нехай $R = \{\langle a,b\rangle | b \;\; є \; родич \;\; a\}$ або $R = \{\langle x,y\rangle | x^2 + y^2 = 1\}$. У такому випадку $R = R^{-1}$.

Приклад 2.10. Знайти відношення R^{-1}, обернене даному $R = \{\langle 1,r\rangle, \langle 1,f\rangle, \langle 2,k\rangle, \langle 3,r\rangle\}$.

Розв'язання:

$$R^{-1} = \{\langle r,1\rangle, \langle f,1\rangle, \langle k,2\rangle, \langle r,3\rangle\}.$$

6. *Композиція* (або *складене відношення*):

Визначення 2.12. Нехай $R \subseteq A \times B$ – відношення на $A \times B$, а $S \subseteq B \times C$ - відношення на $B \times C$. *Композицією* відношень R і S називається відношення $T \subseteq A \times C$, визначене наступним чином:

$$T = \{\langle a,c\rangle | існує \; такий \; елемент \;\; b \;\; з \;\; B, \; що \; \langle a,b\rangle \in \; R \; і \; \langle b,c\rangle \in \; S\}.$$

Ця множина позначається $T = S \circ R$.

Зокрема, якщо відношення R визначене на множині A $\left(R \subseteq A^2\right)$, то композиція визначається як $R \circ R = R^{(2)} = \{\langle a,c\rangle | \langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle \in R\}$.

Приклад 2.11. Нехай $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{x,y,z\}$, $C = \{\Delta, \mathrm{O}\}$ і нехай відношення R на $A \times B$ і S на $B \times C$ задані у вигляді $R = \{\langle 1,x\rangle, \langle 2,x\rangle, \langle 3,z\rangle, \langle 4,y\rangle\}$ $S = \{\langle x,\Delta\rangle, \langle x,\mathrm{O}\rangle, \langle y,\Delta\rangle, \langle y,\mathrm{O}\rangle, \langle z,\mathrm{O}\rangle\}$. Знайти композицію $S \circ R$.

Розв'язання:

$\langle 1,x\rangle \in R$ і $\langle x,\Delta\rangle \in S$; $\langle 1,\Delta\rangle \in S \circ R$; $\langle 3,z\rangle \in R$ і $\langle z,\mathrm{O}\rangle \in S$; $\langle 3,\mathrm{O}\rangle \in S \circ R$;

$\langle 1,x\rangle \in R$ і $\langle x,\mathrm{O}\rangle \in S$; $\langle 1,\mathrm{O}\rangle \in S \circ R$; $\langle 4,y\rangle \in R$ і $\langle y,\Delta\rangle \in S$; $\langle 4,\Delta\rangle \in S \circ R$;

$\langle 2,x\rangle \in R$ і $\langle x,\Delta\rangle \in S$; $\langle 2,\Delta\rangle \in S\circ R$; $\langle 4,y\rangle \in R$ і $\langle y,\text{O}\rangle \in S$; $\langle 4,\text{O}\rangle \in S\circ R$.

$\langle 2,x\rangle \in R$ і $\langle x,\text{O}\rangle \in S$; $\langle 2,\text{O}\rangle \in S\circ R$.

Отже, $S\circ R = \{\langle 1,\Delta\rangle,\langle 1,\text{O}\rangle,\langle 2,\Delta\rangle,\langle 2,\text{O}\rangle,\langle 3,\text{O}\rangle,\langle 4,\Delta\rangle,\langle 4,\text{O}\rangle\}$.

Приклад 2.12. Нехай R і S – бінарні відношення, задані на множині додатних цілих чисел у вигляді $R=\{\langle x,y\rangle | y=x^3\}$ і $S=\{\langle x,y\rangle | y=x+5\}$. Знайти композиції $R\circ S$ і $S\circ R$.

Розв'язання:

$$S\circ R=\{\langle x,y\rangle | y=x^3+5\},\qquad R\circ S=\{\langle x,y\rangle | y=(x+5)^3\}.$$

Приклад 2.13. Нехай на множині натуральних непарних чисел $A=\{1,3,5,7\}$ визначене відношення R – "бути більше". Задати характеристичною властивістю і списком відношення R, обернене відношення R^{-1}, доповнення $\overline{R}$, композицію $R\circ R$.

Розв'язання:

$R=\{\langle a,b\rangle | a>b\}$ – "бути більше"; $R=\{\langle 3,1\rangle,\langle 5,1\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 7,1\rangle,\langle 7,3\rangle,\langle 7,5\rangle\}$.

$R^{-1}=\{\langle a,b\rangle | a<b\}$ – "бути менше"; $R^{-1}=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 1,7\rangle,\langle 3,7\rangle,\langle 5,7\rangle\}$.

$\overline{R}=(A\times A)\setminus R=\{\langle a,b\rangle | a\le b\}$ – "бути не більше";

$\overline{R}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,7\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 3,7\rangle,\langle 5,1\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 5,7\rangle,\langle 7,7\rangle\}$.

$R\circ R=\{\langle 5,1\rangle,\langle 7,1\rangle,\langle 7,3\rangle\}$.

Приклад 2.14. Нехай на множині натуральних чисел задані відношення $R_1=\{\langle a,b\rangle | b=a+3;\ \ a,b\in N\}$ і $R_2=\{\langle a,b\rangle | b=a^3;\ \ a,b\in N\}$. Визначити відношення: $R_1\circ R_2$; $R_2\circ R_1$; $R_1\circ R_1=R_1^{(2)}$; $R_2\circ R_2=R_2^{(2)}$.

Розв'язання:

$R_1\circ R_2=\{\langle a,b\rangle | \langle a,c\rangle\in R_1,\langle c,b\rangle\in R_2; a,b,c\in N\}$.

$\langle a,c\rangle=\langle a,a+3\rangle$; $\langle b,c\rangle=\langle a,a^3\rangle$; $\langle a,c\rangle=\langle a,a+3\rangle$; $\langle c,b\rangle=\langle a^3,a\rangle$; $c\leftrightarrow a$;

$\Rightarrow\ c=a+3$; $b=c^3 \Rightarrow\ R_1\circ R_2=\{\langle a,b\rangle | b=(a+3)^3; a,b\in N\}=$

$=\{\langle 1,64\rangle,\langle 2,125\rangle,\langle 3,216\rangle,\langle 4,343\rangle,\ldots\}$.

Аналогічно знайдемо

$R_2\circ R_1=\{\langle a,b\rangle | b=a^3+3; a,b\in N\}=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,11\rangle,\langle 3,30\rangle,\langle 4,67\rangle,\ldots\}$;

$$R_1 \circ R_1 = R_1^{(2)} = \{\langle a,b\rangle | b = a+6; a,b \in N\} = \{\langle 1,7\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 3,9\rangle, \langle 4,10\rangle, ...\};$$

$$R_2 \circ R_2 = R_2^{(2)} = \{\langle a,b\rangle | b = a^6; a,b \in N\} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,64\rangle, \langle 3,729\rangle, \langle 4,4096\rangle, ...\}.$$

Приклад 2.15. Нехай структура деякого малого підприємства може бути зображена схемою на рис. 2.11. Виходячи із зображеної схеми, задати матрицями відношення R_1 – "*бути в підлеглості у…*" і R_2 – *"бути підлеглим"*. Визначити властивості відношень.

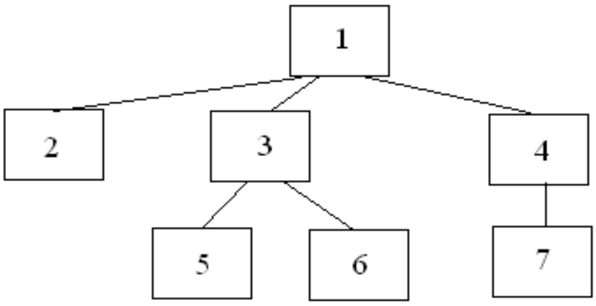


Рис. 2.11

Розв'язання: Тут задана множина $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Матриці відношень R_1 і R_2 наведені на рис. 2.12. Елементи відношень R_1 і R_2 виглядають у такий спосіб:

$$R_1 = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 5,3\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 7,4\rangle\};$$

$$R_2 = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 5,3\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 7,4\rangle, \langle 5,1\rangle, \langle 6,1\rangle, \langle 7,1\rangle\}.$$

R_1	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	1	0	0	0

R_2	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0
6	1	0	1	0	0	0	0
7	1	0	0	1	0	0	0

Рис. 2.12.

Опишемо властивості отриманих відношень:

- відношення R_1 – не рефлексивне, антирефлексивне, не симетричне, антисиметричне, не транзитивне;

- відношення R_2 – не рефлексивне, антирефлексивне, не симетричне, антисиметричне, транзитивне.

Задачі для самостійної роботи

1. Назвати відношення: $\overline{R}$, R^{-1}, $R^{(2)}$, якщо відношення R – це:

а) "бути сестрою"; б) "бути мамою";

в) "бути начальником"; г) "бути колегою".

2. На множинах $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{6,7,8,9\}$, $C=\{10,11,12,13\}$ і $D=\{\Delta,\mathrm{O},*,\nabla\}$ визначені відношення $R\subseteq A\times B$, $S\subseteq B\times C$ і $T\subseteq C\times D$ в такий спосіб: $R=\{\langle 1,7\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 5,6\rangle,\langle 2,8\rangle\}$; $S=\{\langle 6,10\rangle,\langle 6,11\rangle,\langle 7,10\rangle,\langle 8,13\rangle\}$; $T=\{\langle 11,\Delta\rangle,\langle 10,\Delta\rangle,\langle 13,*\rangle,\langle 12,\nabla\rangle,\langle 13,\mathrm{O}\rangle\}$.

Визначити відношення:

а) R^{-1} і S^{-1}; б) $R\circ R^{-1}$ і $R^{-1}\circ R$;

в) $S\circ R$ і $S\circ T$; г) $T\circ(S\circ R)$;

д) $(T\circ S)\circ R$; е) $R^{-1}\circ S^{-1}$.

3. Нехай $A=\{\langle b,a\rangle,\langle c,e,\rangle,\langle d,i\rangle,\langle f,o\rangle,\langle g,u\rangle\}$ і $B=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,e\rangle,\langle 3,i\rangle,\langle 4,0\rangle,$ $\langle 5,u\rangle\}$. Опишіть відношення: A^{-1}; B^{-1}; $A^{-1}\circ B$; $B^{-1}\circ A$.

4. На множині $A=\{a,b,c,d,e\}$ визначені відношення:

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,e\rangle,\langle e,d\rangle,\langle c,a\rangle\}$

$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle e,e\rangle,\langle d,e\rangle,\langle c,b\rangle\}$;

$R_3=\{\langle a,b\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle e,e\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$;

$R_4=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle e,e\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$.

Опишіть відношення $R_1\cup R_2$; $R_3\cap R_4$; $R_3\setminus R_2$.

5. На множині $A=\{2,5,7,10\}$ визначене відношення R – "*бути менше*". Задати характеристичною властивістю і списком відношення: R; R^{-1}; $\overline{R}$; $R\circ R$. Визначити властивості цих відношень.

6. На множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ задані відношення: $R_1=\{\langle a,b\rangle | a\geq b\}$; $R_2=\{\langle a,b\rangle | a=b\}$; $R_3=\{\langle a,b\rangle | a<b\}$. Виконати операції над відношеннями R_i. Тобто знайти: $R_i\cup R_j$; $R_i\setminus R_j$; $R_i\cap R_j$; $\overline{R}_i$, де ($j,i=1,2,3$).

7. На множині $A=\{a,b,c,d\}$ визначене відношення R, яке задане матрицею (рис. 2.13, а). Які властивості має відношення R?

8. На множині $A=\{a,b,c,d\}$ визначені відношення R_1 і R_2, які задані матрицями (рис. 2.13, б, в). Які властивості мають відношення R_1 і R_2. Виконати операції над відношеннями R_1 і R_2. Які властивості мають отримані відношення?

R	a	b	c	d
a	1	1	1	1
b	0	0	1	1
c	0	1	1	1
d	0	1	0	0

(а)

R_1	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	1	0	1	0
c	0	1	1	0
d	1	0	0	0

(б)

R_2	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	1	0	0	1
c	0	0	0	0
d	0	1	0	0

(в)

Рис. 2.13.

9. Відношення R задане матрицею (рис. 2.14, варіанти а – г). Визначити властивості відношення R. Виконати унарні операції над відношенням R, визначити властивості отриманих відношень.

R	a	b	c
a	1	1	0
b	0	1	0
c	0	1	1

(а)

R	a	b	c
a	0	1	0
b	1	0	0
c	0	0	0

(б)

R	a	b	c
a	1	0	1
b	0	1	0
c	1	0	1

(в)

R	a	b	c
a	0	0	1
b	0	1	0
c	1	0	0

(г)

Рис. 2.14.

10. Відношення R_1 і R_2 задані матрицями (рис. 2.15 варіанти, а і б). Визначити властивості цих відношень. Виконати бінарні операції над відношеннями R_1 і R_2. Визначити властивості отриманих відношень.

R_1	a	b	c	d
a	1	1	0	1
b	0	1	0	0
c	1	0	1	0
d	0	1	0	1

R_2	a	b	c	d
a	0	0	0	1
b	1	1	1	1
c	0	0	1	0
d	1	0	0	0

(а)

R_1	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	1	0	1	1
c	0	1	1	0
d	0	0	0	1

R_2	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	0	0	0	1
c	0	1	0	0
d	1	0	1	0

(б)

Рис. 2.15

2.4. Функції

Визначення 2.13. *Функцією* f називається таке відношення R, що будь-які два різних елементи якого не мають однакових перших координат. Тобто f є функцією тоді й тільки тоді, коли вона задовольняє наступним умовам:

- елементами f є упорядковані пари;
- якщо упорядковані пари $\langle a,b\rangle$ і $\langle a,c\rangle$ – елементи функції f, то $b=c$.

Отже, відношення f на $A\times B$ називається функцією з A в B і позначається як $f: A\to B$.

Якщо $f: A\to B$ функція і $\langle a,b\rangle \in f$, то говорять, що $b=f(a)$.

Визначення 2.14. Множина A називається *областю визначення* функції f і позначається $D(f)$, а множина B – *областю потенційних значень*. Якщо $I\subseteq A$, то множина $f(I)=\{b \mid f(a)=b \text{ для деякого } a \in I\}$ називається *образом* множини I. Образ усієї множини A називається *областю значень* функції f і позначається $E(f)$.

Приклад 2.17. Які із наведених відношень є функціями:

а) $\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,7\rangle,\langle 4,9\rangle,\langle 2,13\rangle\}$; б) $\{\langle 4,2\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 1,11,\rangle\langle 7,2\rangle\}$;

в) $\{\langle x,x^2\rangle \mid x\in R\}$; г) $\{\langle x^2,x\rangle \mid x\in R\}$.

Розв'язання:

а) відношення не є функцією, тому що два елементи $\langle 2,7\rangle$ і $\langle 2,13\rangle$ мають однакову першу координату;

б) відношення є функцією, тому що перший елемент кожної впорядкованої пари зустрічається рівно один раз;

в) відношення є функцією, графіком якої буде парабола;

г) відношення не є функцією, тому що його елементами є, наприклад, і $\langle 1,1\rangle$, і $\langle 1,-1\rangle$.

Приклад 2.18. Знайти область визначення і область значень функції:

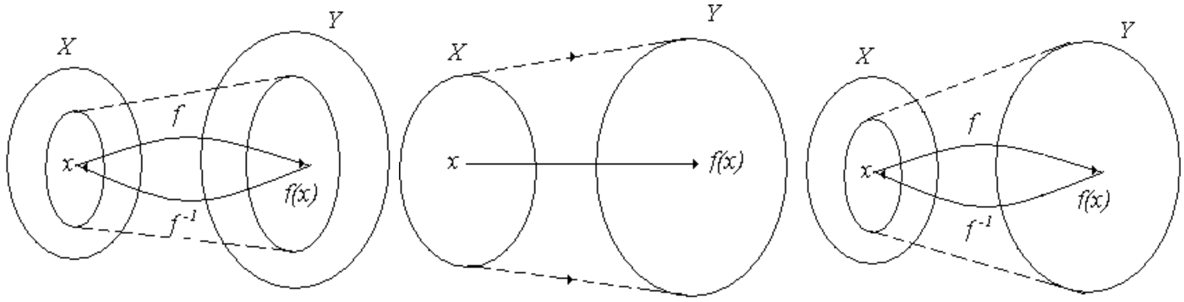
а) $\{\langle 4,2\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 1,11,\rangle\langle 7,2\rangle\}$; б) $\{\langle x,x^2\rangle \mid x\in R\}$.

Розв'язання:

а) область визначення функції $A=\{1,4,5,7\}$, а область значень $B=\{2,3,11\}$;

б) область визначення – $x\in R$, а область значень – $y\in R^+$.

Визначення 2.15. Функція $f : A \to B$ називається *ін'єктивною*, або *ін'єкцією*, якщо з $f(a) = f(a')$ слідує $a = a'$ (рис. 2.13, а). Функція $f : A \to B$ називається *"відображенням на", сюр'єктивною* функцією, або *сюр'єкцією*, якщо для кожного $b \in B$ існує деяке $a \in A$ таке, що $f(a) = b$ (рис. 2.13, б). Функція, що є одночасно і ін'єктивною, і сюр'єктивною, називається *бієктивною* або *взаємно однозначною* (рис. 2.16, в).



(а) (б) (в)

Рис. 2.16.

Можна навести ще одне визначення взаємно однозначної функції.

Визначення 2.16. Функція $f : A \to B$ називається *взаємно однозначною,* якщо вона переводить різні елементи в різні, тобто з умови $a \neq a'$ слідує $f(a) \neq f(a')$.

Якщо R^{-1} – обернене відношення до взаємно однозначного функціонального відношення R, то R^{-1} визначає функцію f^{-1}, яку називають *оберненою* до функції f.

Ін'єктивна функція f має обернену функцію f^{-1}.

Функція f^{-1}, обернена до бієктивної, є відображенням не на множину X, а в множину X. Взаємно однозначність функції зручно доводити виходячи з міркувань: "з умови $f(x_1) = f(x_2)$ слідує $x_1 = x_2$".

Приклад 2.19. Чи є функція $f(x) = 3x + 5$ взаємно однозначною?

Розв'язання:

$f(x_1) = 3x_1 + 5$; $f(x_2) = 3x_2 + 5$. З умови $f(x_1) = f(x_2)$ слідує; $3x_1 + 5 = 3x_2 + 5$. Отже, $x_1 = x_2$ і функція є взаємно однозначною.

Визначення 2.17. Нехай f – функція із множини A в множину B, тобто $f : A \to B$ $(f \subseteq A \times B)$. *Обернене відношення* $f^{-1} \subseteq B \times A$ визначається як

$f^{-1} = \{\langle b,a\rangle | \langle a,b\rangle \in f\}$. При цьому f^{-1} називається *перетворенням* функції f або її *оберненою функцією*.

Приклад 2.20. Знайти функцію, обернену до даної: $y = 5x - 1$.

Розв'язання: Обертаючи функцію, одержуємо $\{\langle y,x\rangle | y = 5x-1,\ x,y \in R\}$, але це те ж саме, що і $\{\langle x,y\rangle | x = 5y-1,\ x,y \in R\}$. Розв'язуючи рівняння відносно y, одержуємо $\left\{\langle x,y\rangle \middle| y = \frac{1}{5}(x+1),\ x,y \in R\right\}$. Тобто, якщо

$$f = \{\langle x,y\rangle | y = 5x-1,\quad x,y \in Z\}, \text{ то } f^{-1} = \left\{\langle x,y\rangle \middle| y = \frac{1}{5}(x+1),\ x,y \in R\right\}.$$

Відповіді на питання, чи є представлене відношення функцією і чи є функція взаємно однозначною, можна легко одержати за допомогою його графічної ілюстрації. Відповідно до визначення функції, ніякі два різних елементи відношення не можуть мати однакових перших координат. Отже, промінь, спрямований паралельно осі Oy, повинен перетинати графік відношення не більше одного разу. Оскільки взаємно однозначні функції переводять різні елементи в різні, то промінь, спрямований паралельно осі Ox, повинен перетинати графік відношення теж не більше одного разу.

Приклад 2.21. З'ясувати, чи є дані відношення функціями? Якщо так, то чи будуть вони взаємно однозначні? У випадку позитивної відповіді, знайти обернені функції:

а) $f = \{\langle x,y\rangle | y^2 = -x,\quad x,y \in R\}$;

б) $f = \left\{\langle x,y\rangle \middle| \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\quad x \in R, y \in R^+\right\}$;

в) $f = \{\langle x,y\rangle | 3x - 2y + 6 = 0,\quad x,y \in R\}$.

Розв'язання:

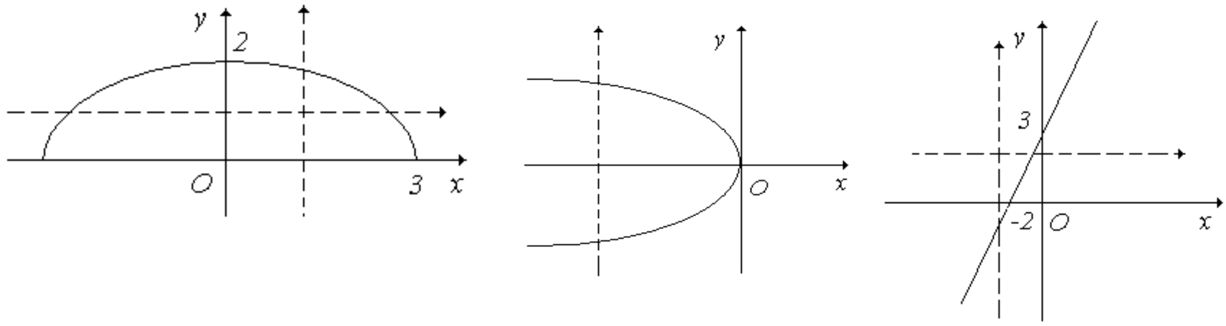
а) відношення не є функцією, тому що існує два різних елементи, що мають однакові перші координати (див. рис. 2.14, а);

б) відношення є функцією, тому що не існує елементів, що мають однакові перші координати. Дана функція не є взаємно однозначною, тому що існують елементи, що мають однакові другі координати (див. рис. 2.14, б);

в) відношення є функцією. Дана функція є взаємно однозначною, тому що переводить різні елементи в різні (див. рис. 2.14, в). Знайдемо функцію, обернену до даної:

$f = \{\langle x, y\rangle | 3x - 2y + 6 = 0, \quad x, y \in R\}$; $f^{-1} = \{\langle y, x\rangle | 3x - 2y + 6 = 0, \quad x, y \in R\}$;

$f^{-1} = \{\langle x, y\rangle | 3y - 2x + 6 = 0, \quad x, y \in R\}$; $f^{-1} = \left\{\langle y, x\rangle \middle| y = \frac{2}{3}x - 2; \quad x, y \in R\right\}$.



(а) (б) (в)

Рис. 2.14.

Визначення 2.18. Нехай дані дві функції $f : X \to Y$ і $g : Y \to Z$, де X, Y, Z - довільні множини. Функція f визначена на X і приймає значення на Y, а функція g визначена на Y і приймає значення на Z. Якщо для кожного $x \in X$ знайдеться такий елемент $z \in Z$, що $z = g(f(x))$, то така відповідність між множинами X і Z називається *композицією* або *суперпозицією* функцій g і f і позначається $g \circ f$ (рис. 2.15).

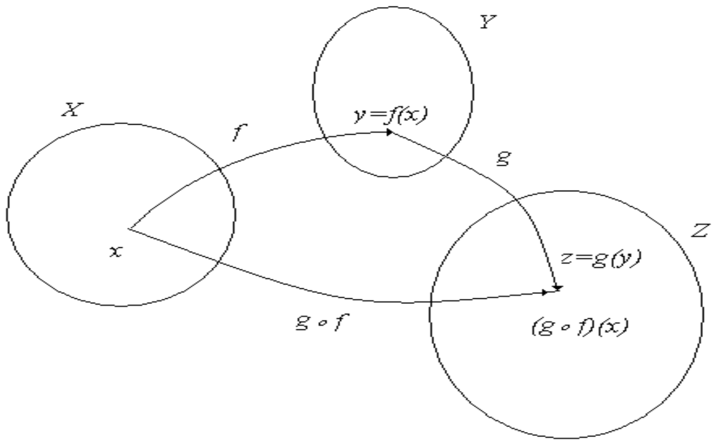


Рис. 2.15.

Приклад 2.22. Функції $f(x) = x^2$ і $g(x) = x + 5$ задані на множині дійсних чисел. Знайти композицію функцій $f \circ g$ і $g \circ f$.

Розв'язання:

$f \circ g = f(g(x)) = f(x+5) = (x+5)^2$; $\quad g \circ f = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 5$.

Задачі для самостійної роботи

1. Нехай $f \subseteq R \times R$. Знайти області визначення і значень наступних функцій:

а) $f(x) = x^2 + 9$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 9}$; в) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$;

г) $f(x) = \sqrt{x - 9}$; д) $f(x) = |x + 9|$.

2. З'ясуйте, які з наведених нижче відношень є функціями. Визначте властивості функцій. Для взаємно однозначних функцій знайдіть обернені:

а) $f = \{\langle x, y\rangle | y = 5x - 1, \quad x, y \in R\}$;

б) $f = \left\{\langle x, y\rangle \middle| \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1, \quad x \in R, y \in R^+\right\}$;

в) $f = \left\{\langle x, y\rangle \middle| x^2 + (y-1)^2 = 9, \quad x, y \in R^+\right\}$;

г) $f = \{\langle x, y\rangle | y = \ln x, \quad x \in R^+, y \in R\}$;

д) $f = \left\{\langle x, y\rangle \middle| \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1, \quad x, y \in R^+\right\}$;

е) $f = \{\langle x, y\rangle | y = e^x, \quad x \in R, y \in R^+\}$;

ж) $f = \{\langle x, y\rangle | 4x + 5y - 20 = 0, \quad x, y \in R\}$.

3. Знайти композицію функцій $f \circ g$ й $g \circ f$, заданих на множині дійсних чисел:

а) $f(x) = x^3 - 8$, $g(x) = 2x + 7$;

б) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$, $g(x) = x - 5$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$, $g(x) = 4x - 6$;

г) $f(x) = e^{5x}$, $g(x) = \cos 3x$;

д) $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = x - 4$.

3. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

Центральною задачею комбінаторики вважається задача про вибір із деякої множини тих об'єктів, що мають задані властивості, розміщення їх у відповідності зі спеціальними правилами та знаходження кількості способів, якими це можна зробити. Якщо правила прості, то головним у цій задачі є підрахування кількості можливостей для здійснення шуканого розв'язку. Якщо ж прави- ла складні, то головною проблемою стає питання про існування таких розміщень та знаходження методів їх побудови.

Комбінаторика має важливе значення для теорії ймовірносей, математичної логіки, теорії чисел.

3.1. Метод математичної індукції

Нехай потрібно довести твердженні P(n), де n – натуральне число.

1. Довести, що дане твердження справджується для n=1. Цю частину доведення називають базисом індукції – доведення істинності твердження P(1).

2. Припустивши, що дане твердження правильне при n=k, де k – яке-небудь довільне натуральне число (це припущення називають *індуктивним припущенням*), доводимо, що твердження є правильним і для n=k+1. Ця частина доведення має назву *індуктивний перехід* або *індуктивний крок*.

Якщо обидва ці етапи проведено, то на підставі принципу математичної індукції твердження справедливе для всякого натурального n.

Приклад 3.1. Довести методом математичної індукції, що сума перших n членів натурального ряду

$$S(n)=1+2+3+4+5+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Розв'язання:

1) При n=1 $1=\frac{1(1+1)}{2}=1$. Рівність має місце.

2) Припустимо, що вона має місце і при n=k, тобто

$$S(k)=1+2+3+4+5+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Виходячи із цього припущення, доведемо, що воно істине і для n=k+1 тобто, що

$$S(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Запишемо S(k+1)=S(k)+(k+1).

Враховуючи припущення, маємо

$$S(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Робимо висновок, що формула вірна і при n= k+1.

Тоді за припущенням математичної індукції вона вірна і для будь-якого натурального n

$$S(n)=1+2+3+4+5+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Приклад 3.2. Довести рівність $\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

Розв'язання: Доведемо цю формулу методом математичної індукції.

1) Базис індукції: При n=1 $S_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$ формула вірна.

2) Індуктивний перехід: припустимо, що дана рівність має місце при n=k, тобто

$$S_k=\frac{k}{k+1}. \qquad (*)$$

Виходячи із цього припущення, доведемо, що воно істине і для n=k+1, тобто, що

$$S_{k+1}=\frac{k+1}{k+1+1}=\frac{k+1}{k+2}, \quad S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Враховуючи припущення $(*)$ маємо:

$$S_{k+1}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Отже, формула вірна і при n=k+1. За принципом математичної індукції вона справджується і при будь-якому $n\in N$.

Приклад 3.3.

$$\frac{1}{1*3}+\frac{1}{3*5}+\frac{1}{5*7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

Доведемо цю формулу методом математичної індукції.

Розв'язання:

1) Базис індукції: При n=1 $S_1=\frac{1}{3}=\frac{1}{2*1+1}=\frac{1}{3}$ формула вірна.

2) Індуктивний перехід: припустимо, що дана рівність має місце при n=k, тобто

$$\frac{1}{1*3}+\frac{1}{3*5}+\frac{1}{5*7}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}.$$

Виходячи із цього припущення, доведемо, що воно істине і для n=k+1, тобто, що

$S_{k+1}=$

$$\frac{1}{1*3}+\frac{1}{3*5}+\frac{1}{5*7}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}=\frac{k+1}{2k+3}$$

Враховуючи припущення маємо:

$$S_{k+1}=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$\frac{2k^2+3k+3}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+2k+k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(1+2k)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}.$$

Отже, формула вірна і при n=k+1. За принципом математичної індукції вона справджується і при будь-якому $n\in \mathrm{N}$.

Приклад 3.4. Довести методом математичної індукції, що для nєN

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Розв'язання:

1) Перевіримо, чи справджується ця формула при n=1:

$$S_1=1.$$

$$S_1=\frac{1\cdot(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=\frac{6}{6}=1.$$

Так, формула справджується.

2) Припустимо, що формула справджується при n=k, тобто

$$1^2+2^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad (*)$$

Доведемо справедливість формули при n=k+1, тобто покажемо, що

$$S_{k+1}=1^2+2^2+...+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3).$$

З іншого боку

$$S_{k+1}=S_k+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(k(2k+1))+6k+6}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}.$$

Розкладемо на множники тричлен $2k^2+7k+6$:

$$2k^2+7k+6=0. \qquad D=7^2-4\cdot 2\cdot 6=49-48=1>0.$$

$$k_1=\frac{-7+1}{4}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}. \qquad k_2=\frac{-7-1}{4}=-2.$$

$$S_{k+1}=\frac{2}{6}(k+1)(k+\frac{3}{2})(k+2)=\frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}$$

Отже, формула справджується при n=k+1. Тоді вона вірна і для будь-якого n натурального за принципом математичної індукції.

Приклад 3.5. Довести, що виконується рівність

$$1\cdot 3+2\cdot 5+...+n(2n+1)=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$

при будь-якому натуральному n.

Розв'язання:

1) При n=1

$$S_1=1\cdot 3=3.$$

$$S_1=\frac{1\cdot 2\cdot 9}{6}=3;$$

формула вірна.

2) Зробимо припущення, що дана формула справедлива і при n=k, тобто має місце рівність

$$1\cdot 3+2\cdot 5+...+k(2k+1)=\frac{k(k+1)(4k+5)}{6}.$$

Доведемо, що формула вірна і при n=k+1.

$$S_{k+1}=S_k+(k+1)(2(k+1)+1).$$

Враховуючи припущення, маємо

$$S_{k+1}=\frac{k(k+1)(4k+5)}{6}+(k+1)(2k+3)=\frac{k(k+1)(4k+5)+(k+1)(2k+3)\cdot 6}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(4k^2+5k+12k+18)}{6}=\frac{(k+1)(4k^2+17k+18)}{6}.$$

Розкладемо на множники тричлен $4k^2+17k+18$:

$$4k^2+17k+18=0.$$

$$D=289-16\cdot 18=289-288=1>0;$$

$$k_1=\frac{-17+1}{8}=-2; \qquad k_2=\frac{-18}{8}=-2\frac{1}{4}.$$

Отже,

$$S_{k+1} = \frac{4\cdot(k+1)(k+2)(k+\frac{9}{4})}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(4k+9)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(4(k+1)+5)}{6}.$$

Формула вірна і при n=k+1.

За принципом математичної індукції вона вірна і при $\forall n \in N$.

3.2. Основне правило комбінаторики

Приклади комбінаторних задач

Приклад 3.6. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, якщо: 1) цифри в числі не повторюються; 2) цифри можуть повторюватись; 3) цифри повинні бути парними?

Розв'язок:

1) Першою цифрою числа може бути одна з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Якщо першу цифру вибрано, то другу можна вибрати сімома способами, третю – шістьма способами, четверту – п'ятьма способами. Отже, всього способів вибору цифр для чо- тиризначного числа 7×7×6×5 =1470.

2) Першою цифрою числа може бути одна з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Кожну з останніх цифр можна вибирати вісьмома способами. Отже, кількість чотиризначних чисел, в яких допускається повторювання цифр, дорівнює: 7 × 8 × 8 × 8 = 3584 .

3) Першою цифрою числа може бути одна з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Останньою – одна з цифр 0, 2, 4, 6. Тому кількість парних чисел дорівнює 7×8×8×4 =1792.

При розв'язанні кожної з задач ми використовували один і той же спосіб обчислення можливих варіантів. Цей спосіб носить назву *основного правила комбінаторики* або *правила добутку*, яке має таке загальне формування.

Нехай необхідно виконати послідовно k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами і т.д. до k-ї дії, яку можна виконати n_k способами, то всі k дії можна виконати $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Приклад 3.7.

1. Скількома способами на першості світу з футболу можуть розподілитися медалі, якщо у фінальній частині грають 24 команди?

Розв'язання: Золоту медаль можуть одержати кожна з 24-х команд. Тобто маємо 24 можливості. Срібну медаль може виграти одна з 23-х команд, а бронзову – одна з 22-х команд. За основним правилом комбінаторики загальне число способів розподілу медалей $24 \cdot 23 \cdot 22 = 12144$.

2. Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 0,1,2,3,4,5, якщо:

а) цифри можуть повторюватися;

б) ні одна цифра не повторюється двічі;

в) цифри непарні і можуть повторюватися.

Розв'язання: а) Першою із цифр може бути одна з 1,2,3,4,5, бо 0 не може бути першою. Друга може бути вибрана шістьома способами, як і третя. Отже, $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$.

б) $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$.

в) $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

3.3. Число різних k-елементних підмножин n-елементної множини

Теорема 3.1. *Число різних k-елементних підмножин n-елементної множини становить*

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

де $n! = n(n-1)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,\ 0! = 1$ називається факторіалом числа n.

◄ Щоб побудувати k-елементну підмножину множини *A*, необхідно до $(k-1)$-елементної множини приєднати один із $n-k+1$ елементів, які не входять в цю підмножину. Оскільки число $(k-1)$-елементних підмножин дорівнює C_n^{k-1} і кожну з цих підмножин можна зробити k-елементною $n-k+1$ способами, то згідно з основним правилом комбінаторики одержимо число $C_n^{k-1} \cdot (n-k+1)$ підмножин. Але не всі ці підмножини будуть різними, оскільки всяку k-елементну підмножину можна так побудувати k способами. Отже,

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{k(k-1)} C_n^{k-2} = \ldots = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1)}{k(k-2)\cdot \ldots \cdot 2} C_n^1.$$

Оскільки C_n^1 – число одноелементних підмножин множини *A* дорівнює n, то $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. ►

Визначення 3.1. Довільна k-елементна підмножина множини A називається *комбінацією* або *сполученням*, а число C_n^k – число комбінацій або сполучень із n елементів по k елементів.

Наслідок 3.1. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ *(формула додавання)*

$$◀\ C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} =$$

$$= (n-1)!\left(\frac{n-k+k}{k!(n-k)!}\right) = \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k .▶$$

Приклад 3.8.

1. Збірна команда університету з волейболу налічує 15 чоловік. Скільки різних варіантів повинен розглянути тренер перед грою, щоб заявити список гравців на гру.

Розв'язання: Число гравців волейбольної команди дорівнює 6. Значить, скільки різних підмножин, які складаються з 6 елементів у множині з 15-ти елементів. За теоремою 3.1

$$C_{15}^6 = \frac{15!}{6!9!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 5005 .$$

2. У скількох точках перетинаються діагоналі випуклого десятикутника, якщо ніякі три з них не перетинаються в одній точці?

Розв'язання: Кожній точці перетину двох різних діагоналей відповідають чотири вершини десятикутника, і навпаки. Таким чином, число всіх точок перетину дорівнює числу способів, якими з 10-ти вершин можна вибрати чотири вершини

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = 210$$

точок перетину.

Приклад 3.9. Рота складається з 3 офіцерів, 6 сержантів і 60 рядових. Скількома способами можна з них виділити загін, що складається з офіцера, 2 сержантів і 20 рядових?

Розв'язання: Офіцерів вибираємо способами C_3^1, сержантів – C_6^2, рядових – C_{60}^{20}. За правилом добутку маємо

$$C_3^1 \cdot C_6^2 \cdot C_{60}^{20} = 3\cdot \frac{6\cdot 5}{2}\cdot \frac{60\cdot 59\cdot \ldots \cdot 41}{20!}.$$

Приклад 3.10. Шаховий гурток відвідують 2 дівчинки і 7 хлопчиків. Для участі в змаганнях необхідно скласти команду з чотирьох членів, до якої обов'язково має входити хоча б одна дівчинка. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання: Хоча б одна означає одна або дві дівчинки. Якщо до команди увійде одна дівчинка, яку можна вибрати способами C_2^1, то хлопчиків можна вибрати C_7^3 способами. Усього способів $C_2^1 \cdot C_7^3$. Якщо до команди увійдуть дві дівчинки, яких можна вибрати способами C_2^2, то хлопчиків можна вибрати способами C_7^2. Усього способів $C_2^2 \cdot C_7^2$.

За правилом суми маємо всього

$$C_2^1 \cdot C_7^3 + C_2^2 \cdot C_7^2 = \frac{2\cdot 1}{1} \cdot \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2!}{2!} \cdot \frac{7\cdot 6}{2} = 91 \text{ способів.}$$

Приклад 3.11. У одного хлопчика є 6 книг з математики, а у іншого 8. Скількома способами вони можуть обміняти три книги одного на три книги іншого?

Розв'язання:

$$C_6^3 \cdot C_8^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 20 \cdot 56 = 1120.$$

Приклад 3.12. Три стрільці повинні влучити по 15 мішеням (кожен по 5). Скількома способами вони можуть розподілити мішені між собою?

Розв'язання: Для першого стрільця існує C_{15}^5 різних варіантів, другому залишиться 10 мішеней, із яких він може зробити вибір C_{10}^5 способами, третьому – решта 5. Усього способів

$$C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot C_5^5 = 756756.$$

Приклад 3.13. Є колода з 36 карт. Скількома способами можна витягнути 6 карт так, щоб:

а) був рівно один туз;

б) не було жодного туза;

в) був хоча б один туз;

г) серед цих шести був рівно один туз і один король;

д) серед цих шести були туз і король однієї масті.

Розв'язання:

а) Туз із колоди можна вибрати C_4^1 способами. Будемо вибирати решту 5 із 32 карт, тому що тузи нам вже не потрібні. Це можна зробити C_{32}^5 способами. Тоді маємо:

$$C_4^1 \cdot C_{32}^5 = \frac{4 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{5!} = 805504;$$

б) необхідні 6 карт вибиратимемо із колди без тузів: $C_{32}^{6} = 906192$ способами;

в) *I спосіб:* від усіх можливостей вибору по 6 карт, а таких C_{36}^{6}, віднімемо ті варіанти, у яких взагалі немає тузів, тобто C_{32}^{6}, тоді залишаться випадки, де серед шести буде хоча б один туз: $C_{36}^{6} - C_{32}^{6} = 1041600$;

II спосіб: якщо туз один, то виборів буде $C_4^1 \cdot C_{32}^5$, якщо два – $C_4^2 \cdot C_{32}^4$, три – $C_4^3 \cdot C_{32}^3$, чотири – $C_4^4 \cdot C_{32}^2$. За правилом суми маємо:

$$C_4^1 \cdot C_{32}^5 + C_4^2 \cdot C_{32}^4 + C_4^3 \cdot C_{32}^3 + C_4^4 \cdot C_{32}^2 = 1041600;$$

г) туз можна вибрати C_4^1 способами, короля C_4^1, а решта 4 карти із колоди без тузів і королів C_{28}^4.

Усього способів

$$C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{28}^4 = 4 \cdot 4 \cdot \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 327600;$$

д) $C_4^1 \cdot C_{28}^4$=81900.

3.4. Перестановки і розміщення впорядкованих множин

Комбінаторні формули, які були встановлені, не залежать від порядку елементів у множинах. Формули, які будуть встановлені нижче, відносяться до упорядкованих множин. Дві упорядковані множини вважаються різними, якщо вони відрізняються між собою або своїми елементами, або порядком елементів. Розглянемо скількома різними способами можна упорядкувати скінченну n-елементну множину A.

Визначення 3.2. Упорядковані множини, які відрізняються одна від одної лише порядком своїх елементів (тобто можуть бути одержані з однієї і тієї ж множини лише перестановкою своїх елементів), називаються *перестановками.* Позначимо число всіх перестановок n-елементної множини A через P_n.

Теорема 3.2. Число перестановок з n елементів дорівнює добутку всіх натуральних чисел від 1 до n:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

Приклад 3.14.

1. Скількома різними способами можна розмістити п’ять книжок на книжковій полиці?

Розв’язання: $P_n = 5! = 120$.

2. Скількома способами можна упорядкувати n-елементну множину $A = \{1, 2, ..., n\}$ $(n \geq 2)$ так, щоб останні два елементи були $n-1$ і n?

Розв'язання:

$$P_{n-2} = (n-2)!$$

Приклад 3.15. Скількома способами можна розставити 5 томів зібрання творів так, щоб:

а) перший том стояв ліворуч;

б) перший том стояв з краю;

в) перший і другий томи стояли праворуч;

г) перший і другий томи стояли ліворуч;

д) перший і другий томи не стояли праворуч?

Розв'язання:

а) Якщо перший том стоїть ліворуч, то переставляти будемо чотири, що залишилися:

$$\mathrm{P}_4 = 4! = 24;$$

б) перший том може стояти або ліворуч, або праворуч. За правилом суми маємо

$$\mathrm{P}_4 + \mathrm{P}_4 = 4! + 4! = 48;$$

в) об'єднаємо перший і другий томи в один. Тоді переставляти будемо 4 книги P_4 способами, причому перший і другий можна переставляти P_2 способами. За правилом добутку маємо:

$$\mathrm{P}_4 \cdot \mathrm{P}_2 = 4! \cdot 2! = 48;$$

г) перший і другий томи, об'єднані в один, будемо переставляти між собою P_2 способами, але у загальній перестановці трьох книг, що залишилися, вони участі не братимуть. Таким чином маємо:

$$\mathrm{P}_3 \cdot \mathrm{P}_2 = 3! \cdot 2! = 12;$$

д) з усіх перестановок п'яти книг виключимо ті, у яких перший і другий томи стоять поруч. Тоді одержимо

$$\mathrm{P}_5 - \mathrm{P}_4 \cdot \mathrm{P}_2 = 5! - 4! \cdot 2! = 120 - 48 = 72.$$

Приклад 3.16. Скількома способами можна пошикувати в одну шеренгу гравців двох футбольних команд (по 11 чоловік) так, щоб при цьому два футболісти однієї команди не стояли поруч?

Розв'язання: Футболістів однієї команди розставимо P_{11} способами. Між ними розставимо футболістів другої команди P_{11} способами. При цьому першим стоятиме футболіст першої команди. Потім виконаємо ті самі перестановки, але з урахуванням того, що першим тепер стоятиме футболіст другої команди. Тоді маємо

$$11! \cdot 11! + 11! \cdot 11! = 2 \cdot 11!.$$

Перестановки з повторенням

Скількома способами можна представити n-елементну множину у вигляді об'єднання її підмножин $A_1, A_2, ..., A_m$, що попарно не перетинаються, так що $|A_1| = k_1$, $|A_2| = k_2$, ..., $|A_m| = k_m$, $k_i \geq 0$, $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$.

Візьмемо k_1-елементну підмножину A_1 множини A (це можна зробити $C_n^{k_1}$ способами); серед $n - k_1$ елементів, що залишилися, візьмемо k_2-елементну підмножину A_2 множини A $\left(C_{n-k_1}^{k_2}\right)$ і т.д. За основним правилом комбінаторики маємо, що число шуканих відношень еквівалентів становить:

$$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} ... C_{n-k_1-k_2...-k_{m-1}}^{k_m} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdot ... \cdot$$

$$\cdot \frac{(n-k_1-k_2-...-k_{m-1})!}{k_m!(n-k_1-k_2-...-k_m)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}.$$

Теорема 3.3. *Нехай $k_1, k_2, ..., k_m$ – деякі натуральні числа такі, що $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$. Кількість способів, якими можна побудувати розбиття n-елементної множини на класи $A_1, A_2, ..., A_m$, числа елементів яких відповідно $k_1, k_2, ..., k_m$, становить*

$$C_n(k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}.$$

Корисною є інтерпретація останньої теореми. Нехай маємо деякий алфавіт $X = \{a, b, c, ..., d\}$ з m символів і множину n символів цього алфавіту, причому серед цієї n-елементної множини є k_1 – буква a, k_2 – буква b, …, k_m – буква d і $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$. Необхідно визначити кількість різних слів, які можна побудувати з цих n букв.

Пронумеруємо місця, на яких стоять букви, числами від 1 до n. Кожне слово однозначно визначається множинами A_1 (номери місць, на яких стоїть буква a), A_2 (номери місць, на яких стоїть буква b), …, A_m (номери місць, на яких стоїть буква d).

Отже, число різних слів дорівнює числу різних представлень n-елементної множини $\{1, 2, ..., n\}$ у вигляді об'єднання її підмножини $A_1, A_2, ..., A_m$, тобто

$$C_n(k_1,...,k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}.$$

З цієї задачі випливає інше формулювання попередньої теореми.

Теорема 3.4. *Число різних перестановок, які можна побудувати з k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу, ..., k_m елементів m-го типу дорівнює $C_n(k_1,...,k_m)$.*

Приклад 3.17.

1) Скільки різних слів можна побудувати перестановкою букв у слові «лаваш»?

Розв'язання: $n = 5$ л, в, ш – по одному екземпляру, а – два екземпляри.

$$\frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60.$$

2) скільки слів довжини 8 можна скласти з букв a і b таких, що кількість букв a в цих словах на перевищує 3.

$$C_8(0,8) + C_8(1,7) + C_8(2,6) + C_8(3,5) = \frac{8!}{0!\cdot 8!} + \frac{8!}{1!\cdot 7!} + \frac{8!}{2!\cdot 6!} + \frac{8!}{3!\cdot 5!} = = 1 + 8 + 28 + 56 = 93.$$

Приклад 3.18. Підрахувати кількість різних 6-цифрових чисел, які

а) складаються із різних цифр;

б) містять лише парні цифри;

в) містять лише непарні цифри;

г) містять дві цифри 3, три цифри 7 та одну цифру 6;

д) містять рівно одну цифру 5, хоча би дві цифри 2 та жодної цифри 0.

Розв'язання:

а) Використаємо правило множення. Існує 9 способів вибору 1-ї цифри (усі цифри крім 0). Оскільки не допускаються повтори цифр і 1-ша цифра вже вибрана, то є A^5 = 9 · 8 · 7 · 6 · 5=15120 способів вибору інших п'яти цифр. Тому 9 усього є 9 ·15120 = 136080 шуканих 6-цифрових чисел;

б) шукані числа не можуть починатися на цифру 0. Усі інші цифри можуть приймати одне з п'яти можливих значень (0, 2, 4, 6 або 8). Тому є $4\cdot 5^5$ =12500 чисел складених із парних цифр;

в) на першу цифру нема додаткових обмежень. Тому шукана кількість рівна 5^6 =15625;

г) у цьому пункті ми не можемо довільним чином вибирати цифри числа, а лише переставляємо вже вибрані цифри з урахуванням їх повторів. Шукана кількістьрівна $C_n(2,3,1)=6!/(2!3!1!)=4\cdot 5\cdot 6/2=60$;

д) Нехай N — кількість 6-цифрових чисел, які містять одну цифру 5 та не містять жодної цифри 0, N_i — кількість 6-цифрових чисел, які містять одну цифру 5, не містять жодної цифри 0 та місять і цифр 2. При підрахунку числа N ми маємо 6 способів вибору позиції цифри 5 та 8 способів вибору для кожної з інших цифр, при підрахунку N_i — C_5^i способів вибору позицій для двійок та 7 способів вибору для кожної з інших цифр. Тому $N_i = 6\cdot C_5^i \cdot 7^{5-i}$, $0 \le i \le 5$. Тоді шукана кількість способів рівна $N - N_0 - N_1 = 6\cdot(8^5 - 7^5 - C_5^1 \cdot 7^4) = 23736$.

Розміщення елементів множини

Нехай дана деяка неупорядкована n - елементна множина A.

Визначення 3.3. Упорядкована k -елементна підмножина множини A, всі елементи якої різні, називаються *розміщенням* $(k \le n)$.

Скільки існує розміщень з k елементів по n?

Оскільки множина A неупорядкована, то всяка її k -елементна підмножина може бути упорядкована одним із $k!$ способів, а число всіх можливих різних k - елементних підмножин множини A дорівнює C_n^k. Отже, число всіх можливих розміщень із n -елементів по k дорівнює $k!C_n^k$.

Теорема 3.5. *Кількість упорядкованих k - елементних підмножин n - елементної множини, всі k - елементів якої різні, становить*

$$A_n^k = C_n^k k! = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdot\ldots(n-k+1).$$

Приклад 3.18.

1) Студенту необхідно скласти три екзамени протягом семи днів. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання: $A_7^3 = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$.

2) Скількома різними способами можна розмістити п'ять студентів в аудиторії, яка має 20 місць?

Розв'язання: $A_{20}^5 = 20\cdot 15\cdot 18\cdot 17\cdot 16 = 1860480$.

Теорема 3.6. *Кількість різних упорядкованих k -елементних підмножин n -елементної множини, всі k елементів якої не обов'язково різні між собою, дорівнює n^k.*

Приклад 3.19. Скільки різних трицифрових натуральних чисел можна скласти із запропонованого набору цифр за умови, що жодна цифра в кожному із цих чисел не повторюється?

а) 1, 2, 3, 4, 5; б) 0, 1, 2, 3, 4.

Розв'язання:

а) Із п'ятиелементної множини будемо вибирати триелементні підмножини.

$$\mathrm{A}_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60;$$

б) усього трицифрових чисел буде $\mathrm{A}_5^3 = 60$, але виключимо числа, що починаються з нуля, яких буде $\mathrm{A}_4^2 = 12$. Разом

$$\mathrm{A}_5^3 - \mathrm{A}_4^2 = 60 - 12 = 48.$$

Приклад 3.20. Скільки різних натуральних чисел, які містять не більше ніж три знаки, можна скласти з цифр 2, 4, 6, 8?

Розв'язання: Не більше ніж означає, що числа можуть бути одно-, дво- або трицифровими. За правилом суми маємо

$$\mathrm{A}_4^1 + \mathrm{A}_4^2 + \mathrm{A}_4^3 = 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 40 \text{ чисел.}$$

Приклад 3.21. Скільки різних натуральних чисел можна скласти із цифр 0, 1, 2, 3, щоб до кожного такого числа кожна із цифр входила не більше одного разу?

Розв'язання: Одноцифрових чисел можна скласти A_3^1, двоцифрових – $\mathrm{A}_4^2 - \mathrm{A}_3^1$, трицифрових – $\mathrm{A}_4^3 - \mathrm{A}_3^2$, чотирицифрових – $\mathrm{A}_4^4 - \mathrm{A}_3^3$. Усього чисел

$$\mathrm{A}_3^1 + \mathrm{A}_4^2 - \mathrm{A}_3^1 + \mathrm{A}_4^3 - \mathrm{A}_3^2 + \mathrm{A}_4^4 - \mathrm{A}_3^3 = 48.$$

Приклад 3.22. Скількома (способом) різних слів можна скласти:

а) в алфавіті $X = \{0,1\}$ з 8 символів;

б) в алфавіті $X = \{0,1\}$ з 16 символів?

Розв'язання:

а) $2^8 = 256$.

б) $2^{16} = 65536$ слів.

3.5. Комбінації елементів з повторенням

Нехай маємо неупорядковану n-елементну множину A.

Визначення 3.4. *Комбінацією з n елементів по m елементів з повторенням* називають m-елементна підмножина множини A, кожний елемент якої належить одному з n типів. Сукупність таких комбінацій називають комбінаціями з n елементів по m.

Теорема 3.7. *Кількість різних комбінацій з n елементів по m елементів з повторенням становить*

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^{m} = P(m, n-1).$$

Приклад 3.23. Скільки цілих невід'ємних розв'язків має рівняння

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = m? \qquad (*)$$

Розв'язки даного рівняння можна інтерпретувати так. Якщо маємо цілі невід'ємні числа $x_1, x_2, ..., x_n$, такі, що $x_1 + ... + x_n = m$, то можна скласти комбінацію з n елементів по m, взявши x_1 елементів першого типу, x_2 елементів другого типу, …, x_n елементів n типу. І навпаки, маючи комбінацію з n по m елементів, одержимо розв'язок даного рівняння. Таким чином, між множиною всіх невід'ємних розв'язків рівняння (*) і множиною комбінацій із n елементів по m встановлюється взаємно однозначна відповідність. Отже, число цілих невід'ємних розв'язків рівняння (*) становить

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^{m}.$$

Наприклад, якщо $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, то це рівняння має $C_{10+4-1}^{9} = C_{13}^{4} = \frac{13!}{4!9!} = 715$ цілих невід'ємних розв'язків.

Приклад 3.24. Якщо у вигляді початкової множини взяти все слово, наприклад, БРАТ, тоді одержимо 24 слова з 4 різних букв (24 перестановки без повторення $4!$).

Розв'язання: Якщо можливі повторення букв, то ми одержимо кількість слів $\overline{A_4^4} = 4^4 = 256$ (типи БРРР, БАБА та інші).

Множина 3 слів, що використовує 4 різні букви (БАР, РАБ, АРА…) складається з $4^3 = 64$ слів.

Приклад 3.25. Скільки різних слів довжиною 4 можна утворити, переставляючи між
собою букви у слові ГАГА (ГААГ, ГГАА, АГАГ, …).

Розв'язання: $P_4(2;2) = \frac{4!}{2!2!} = 6$ замість $P_4 = 4! = 24$.

Приклад 3.26. В магазині продаються тістечка 4 сортів (типів).

а) Скільки існує комбінацій придбання семи тістечок? Тут $n = 4,\ m = 7$.

Розв'язання: Якщо типи тістечок позначити номерами 1,2,3,4, то приклади придбання тістечок мають вигляд послідовності довжини 4: (1,1,1,4), (2,2,2,1), (2,0,0,5), (0,2,3,2),…

$$C_4^7 = C_{n+m-1}^m = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} = 120\ .$$

б) Скільки існує таких варіантів купівлі семи тістечок, які містять хоча б одне тістечко 1 типу?

Розв'язання:

$$\overline{C_3^6} + \overline{C_3^5} + \overline{C_3^4} + \overline{C_3^3} + \overline{C_3^2} + \overline{C_3^1} + \overline{C_3^0} = C_8^6 + C_7^5 + C_6^4 + C_5^3 + C_4^2 + C_3^1 + C_2^0 =$$

$$= \frac{8!}{6!2!} + \frac{7!}{5!2!} + \frac{6!}{4!2!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{3!}{1!2!} + \frac{2!}{2!0!} =$$

$$= \frac{7\cdot 8}{2} + \frac{6\cdot 7}{2} + \frac{5\cdot 6}{2} + \frac{4\cdot 5}{2} + \frac{3\cdot 3}{2} + 3 + 1 = = 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 4 = 84\,.$$

в) Скільки існує таких варіантів купівлі семи тістечок, якщо не менше, ніж три тістечка 4 типу.

Розв'язання: $\overline{C_3^4} + \overline{C_3^3} + \overline{C_3^2} + \overline{C_3^1} + \overline{C_3^0} = C_6^4 + C_5^3 + C_4^2 + C_3^1 + C_2^0 =$

$$= \frac{6!}{4!2!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{3!}{2!1!} + \frac{2!}{2!} =$$

$$= \frac{5\cdot 6}{2} + \frac{4\cdot 5}{2} + \frac{3\cdot 4}{2} + 3 + 1 = 15 + 10 + 6 + 4 = 35\,.$$

3.6. Біном Ньютона

З елементарної математики добре відомі формули скороченого множення:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Ці формули можна записати і так:

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a\cdot b + C_2^2 a^0 b^2,$$

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 \cdot b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 a^0 b^3\,.$$

Виявляється, що існує і загальна закономірність.

Теорема 3.8. *Справедлива рівність.*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1}\cdot b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n\,. \qquad (**)$$

◄ Доведення проводиться індукцією за числом n. При $n=1$

$$(a+b)^1 = C_1^0 a^1 \cdot b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = a + b\ .$$

Нехай теорема справедлива і для n. Покажемо, що вона справедлива і для $n+1$. За припущенням індукції маємо

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) =$$
$$\left(C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n\right) \cdot (a+b) =$$
$$= C_n^0 a^{n+1} b^0 + \left(C_n^0 a^n b + C_n^1 a^n b\right) + \left(C_n^1 a^{n-1} b^2 + C_n^2 a^{n-1} b^2\right) + \ldots + C_n^n a^0 b^{n+1} =$$
$$= C_{n+1}^0 a^{n+1} b_0 + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} a^0 b^{n+1},$$

згідно з тим, що $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ і $C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1$, $C_{n+1}^{n+1} = C_n^n = 1$.►

Рівність (**) називається *біномом Ньютона.*

З рівності встановленої в наслідку 3.1 слідує, що біноміальні коефіцієнти можна виписати у вигляді трикутної таблиці, яка носить назву трикутника Паскаля:

$$\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \end{array}$$

У n рядку трикутника Паскаля стоять коефіцієнти розкладу (3.1), причому кожен коефіцієнт, крім двох крайніх, які дорівнюють одиниці – це сума відповідних коефіцієнтів із попереднього рядка.

Узагальненням бінома Ньютона є *поліноміальна теорема.*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{\substack{r_1 \geq 0, \ldots, r_k \geq 0 \\ r_1 + \ldots + r_k = n}} C_n(r_1, r_2, \ldots, r_k) a_1^{r_1} \cdot a_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{r_k}.$$

Наслідок. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

Дійсно, якщо покласти $r_1 = k,\ r_2 = n-k$, то з поліноміальної теореми випливає наслідок.

Властивості біноміальних коефіцієнтів

1. Формула симетрії: $C_{n+m}^m = C_{n+m}^n$

$$\frac{(n+m)!}{m!n!} = \frac{n!(n+1)\cdot \ldots \cdot (n+m)}{n!(n+m-n)!} = \frac{(n+m)!}{n!m!}.$$

2. Формула додавання: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

3. $C_0^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$ (якщо в (3.1) $a = 1$, $b = -1$).

4. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Оскільки C_n^k – число різних k-елементних підмножин n-елементної множини, то сума всіх таких чисел становить числу всіх підмножин даної n-елементної множини, яке дорівнює 2^n.

3.7. Метод рекурентних співвідношень

Метод рекурентних співвідношень дозволяє знаходити значення деякої функції для заданої величини аргументу через менші значення аргументів. Цей метод дає можливість знаходити розв'язок комбінаторної задачі для n предметів через розв'язок аналогічної задачі з меншим числом предметів (через розв'язок) за допомогою деякого співвідношення, яке називається рекурентним співвідношенням.

Метод рекурентних співвідношень відомий з курсу шкільної математики, де він застосовується при визначенні сум арифметичної і геометричної прогресії та при визначенні n-го члену цих прогресій.

1. Ряд чисел Фібоначчі.

Цей ряд задається такими співвідношеннями:

$$a_1 = a(1) = 1,\ a_2 = a(2) = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n > 2$$

Користуючись ними, одержимо послідовність чисел, яка відома під назвою послідовність чисел Фібоначчі.

2. Квадрати натуральних чисел.

Розглянемо послідовність квадратів натуральних чисел $a_1 = a(1) = 1^2$, $a_2^2 = a(2) = 2^2, \ldots, a_n = a(n) = n^2, \ldots$

Користуємось формулою скороченого множення $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ отримаємо таку рекурентну формулу

$$a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = a_n + 2n + 1.$$

Наприклад, якщо відомо, що $15^2 = 225$, то $16^2 = 225 + 2 \cdot 15 + 1$.

Задачі для самостійної роботи

1. Спростити: а) $\frac{(n+1)!}{n!}$; б) $\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}$.

2. Обчислити: а) $7!-5!$; б) $\frac{7!+5!}{6!}$.

3. Методом математичної індукції довести:

а) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

б) $1\cdot 3+2\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$;

в) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{(n+2)}{(2n+2)}$.

4. Довести, що довільного натурального n > 1

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

5. Довести, що для довільного натурального n

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}.$$

6. Довести, що для довільного натурального n число n^3-7n ділиться на 4.

7. Довести, що для довільного $n\in\mathbb{N}$ число $6^{2n-1}+1$ ділиться на 7.

8. Довести, число $7^{n+1}+8^{2n-1}$ націло ділиться на 19 для всіх $n\in\mathbb{N}$.

9. Довести, що число $2^{2^n}+1$ закінчується цифрою 7 $(n>1)$.

10. Скількома способами можна розставити книги з математики і фізики так, щоб жодні дві книги з одного предмет не стояли поруч, якщо:
    а) з фізики – 5 книг, з математики – 5;
    б) з фізики – 5 книг, з математики – 4?

11. У купе залізничного вагона є два протилежних дивани по 5 місць у кожному. Із 10 пасажирів четверо бажають сидіти обличчя до паровоза, троє – спиною до паровоза, а решті байдуже, як сидіти. Скількома способами можуть розміститися пасажири?

12. Скільки різних варіантів хокейної команди можна скласти з 9 нападаючих, 5 захисників і 3 воротарів, якщо до складу команди повинно ввійти 3 нападаючих, 2 захисника і воротар?

13. Чотири біатлоністи з України брали участь у чемпіонаті світу. Скількома способами можуть бути розподілені місця, які посіли представники з України, якщо:
1) жоден з них не посів місце, нижче п’ятнадцятого, і жодне місце не було поділене;
2) жоден з них не посів призового місця, а всього було 15 учасників чемпіонату?
3) Розклад одного дня містить 5 уроків. Визначити кількість таких розкладів при виборі з 11 предметів і за умови, що один предмет займає один урок. Як зміниться розв’язування задачі, якщо відомо, що першим уроком обов’язково має бути математика?
4) Скількома способами можна вибрати з повної колоди карт (52 шт.) по одній карті кожної масті за умови, що серед вийнятих карт немає жодної пари однакових, тобто двох королів, двох дам тощо?

14. а) Чемпіонат країни з футболу, в якому беруть участь 16 команд, проводиться у два кола (кожна команда двічі зустрічається з кожною з інших). Яка кількість зустрічей буде в чемпіонаті? б) Скільки буде зустрічей, якщо чемпіонат проводитиметься в одне коло?

15. З 10 студентів призначають двох чергових. Скількома способами можна це зробити, якщо:
1) один із призначених стає старшим;
2) старших немає?

16. Побудувати різні перестановки по 2 і по 3 елементи множини $M=\{1,2,3\}$.

17. У футбольному чемпіонаті беруть участь 15 команд вищої ліги. За умовою, що 2 останні команди її залишають, скільки варіантів завершення чемпіонату?

18. Скільки різних натуральних чисел менших мільйона можна скласти з цифр 0,1,2,3,4, якщо
а) жодна цифра не повторюється більше одного разу;
б) цифри можуть повторюватися;
в) числа повинні бути кратними 5.

19. Скільки слів можна одержати із букв слова
а) обороноздатність; б) гіпербола.

20. У лотереї 5 із 36 головний виграш одержить той, хто вгадає всі 5 номерів. Той, хто вгадає 4, 3 або 2, одержує менший виграш. Скільки може бути різних карток, де вгадано: а) 4 номери; б) 3 номери?
15. Скільки слів із п'яти букв можна скласти, якщо $X = \{a, b, c\}$ і буква a зустрічається не більше двох разів, буква b – не більше одного разу і буква c – не більше трьох разів.
16. Обчислити $(a+b+c)^4$ та $(a+b+c)^3$.
17. Знайти коефіцієнт при x^5 при $(1+x)^7$ і при x^{17} в $(1+x^5)^7$.

4. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Теорія графів є одним з розділів математики з досить широкою областю застосування. Оперуючи множинами точок та ліній, що їх з'єднують, ця теорія дає багатий різновид форм, які мають цікаві властивості, корисні для дослідження різноманітних проблем.

До графічних подань у широкому змісті можуть бути віднесені рисунки, креслення, графіки, діаграми, блок-схеми і т.п. З їх допомогою наочно ілюструються залежності процесів і явищ, логічні, структурні, причинно-наслідкові й інші взаємозв'язки. Однак теорія графів має свою власну проблематику. На основі теорії графів будуються моделі різноманітних задач, таких як маршрутизації, розподілу ресурсів, дискретної оптимізації, сіткового планування і керування, аналізу і проектування організаційних структур, аналізу процесу їх функціонування і багато іншого. До задач теорії графів можна віднести наступні: календарне планування промислового виробництва; мережеве планування та управління; побудова систем зв'язку та дослідження процесів передачі інформації; вибір оптимальних маршрутів та потоків у мережах; побудова електричних мереж та електронних схем; ідентифікація у хімії та інші.

4.1. Основні визначення. Різновиди графів

Історично теорії графів, як розділу математики, зародилася при розв'язуванні Ейлером задачі про Кенігсбергські мости. Ця знаменита у свій час задача полягає в наступному: сім мостів міста Кенігсберг були розташовані на річці Прегель так, як зображено на рис. 4.1. Питається, чи можна вийти із дому, пройти через кожен міст точно по одному разі і повернутися назад.

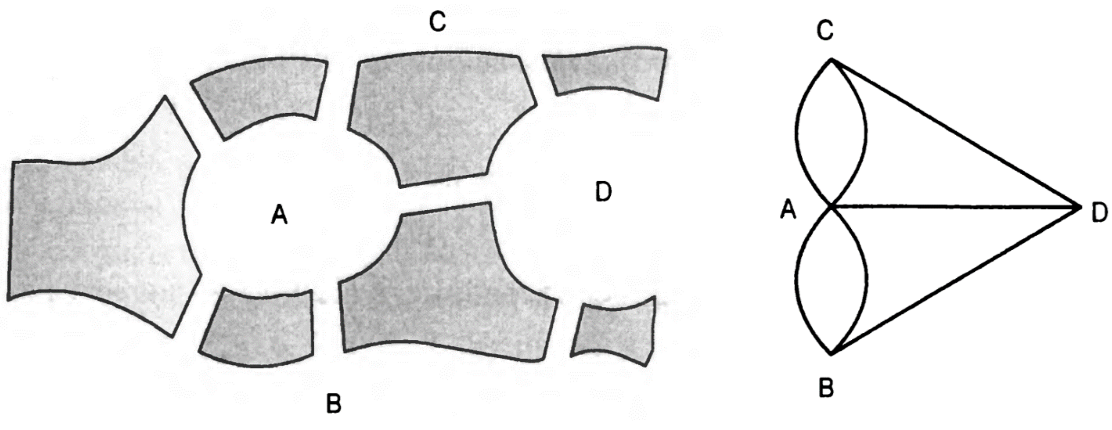


Рис. 4.1. Кенігсберзькі мости

Визначення 4.1. *Графом* G називається множина V із заданим на ній бінарним відношенням $E \subset V^2$, тобто G = (V,E).

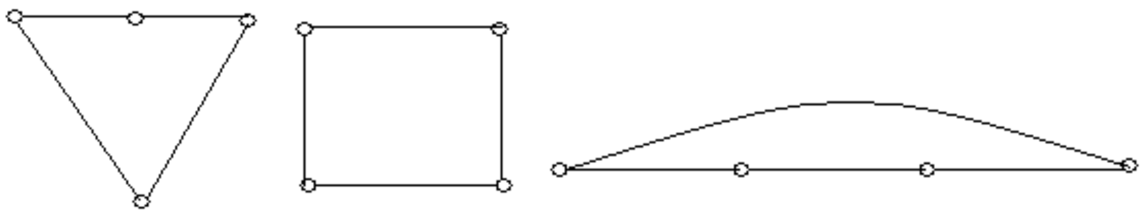
Можна граф визначити інакше, спираючись на більш елементарні геометричні поняття точки та лінії. Причому геометричні характеристики цих ліній до уваги не приймаються.

Графом G називається сукупність двох множин V точок і E ліній, між якими визначене *відношення інцидентності*, причому кожен елемент $e \in E$ інцидентний рівно двом елементам $v', v'' \in V$. Елементи множини V називаються *вершинами*, а елементи множини E – *ребрами* графа. Вершини і ребра графа називаються його *елементами*, тому найчастіше пишуть $v \in G$ і $e \in G$.

Визначення 4.2. Якщо ребро e з'єднує вершини v', v'', тоді вони є для нього кінцевими точками і називаються *суміжними* вершинами. Два ребра називаються *суміжними*, якщо вони інцидентні до одної вершини.

Необхідно відзначити, що при зображенні графа не всі деталі рисунка мають значення. Так, наприклад, несуттєвою є довжина і кривизна ребер, взаємне розташування вершин на площині. Принциповим є тільки відношення інцидентності.

Приклад 4.1. Моделі, зображені на рис. 4.2, а, б, в, з погляду теорії графів однакові.

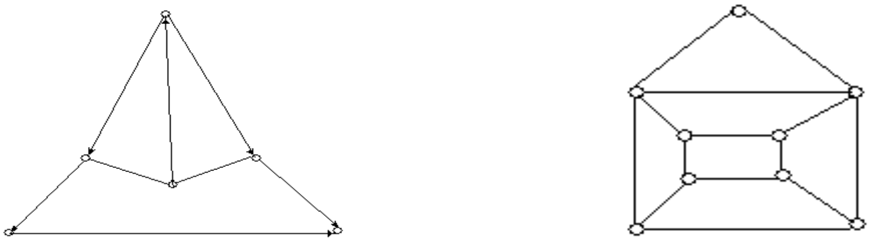


(а) (б) (в)

Рис. 4.2.

У деяких задачах інцидентні ребру вершини не рівноправні, а розглядаються в певному порядку. Тоді кожному ребру можна приписати напрямок від першої інцидентної вершини до другої.

Визначення 4.3. Напрямлені ребра називають *орієнтованими ребрами* або *дугами*, перша по черзі вершина називається *початком* дуги, а друга – її *кінцем*. Граф, що містить напрямлені ребра, називається *орієнтованим* графом або *орграфом* (рис. 4.2, а), а граф, що не містить напрямлених ребер – *неорієнтованим* або *н-графом* (рис. 4.3, б).



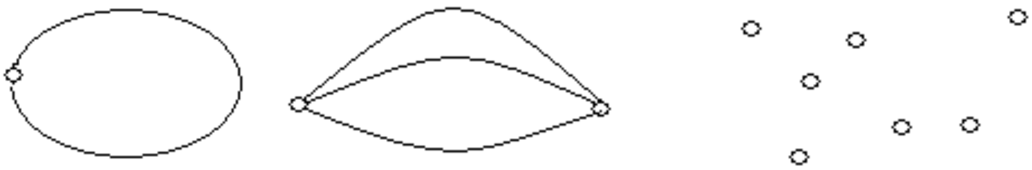
(а) (б)

Рис. 4.3.

Визначення 4.4. Ребро, що з'єднує деяку вершину саму із собою, називається *петлею* (рис. 4.4, а).

Визначення 4.5. Ребра, інцидентні до однієї і тієї ж вершини, називаються *кратними* (рис. 4.4, б). Граф, що містить кратні ребра, називається *мультиграфом*, а граф, що містить кратні ребра і петлі – *псевдографом*.

Визначення 4.6. Множина ребер графа може бути порожньою (рис. 4.4, в). Такий граф називається *порожній* або *пустий*.



(а) (б) (в)

Рис. 4.4.

Визначення 4.7. Граф без петель і кратних ребер називається *повним*, якщо кожна пара його вершин з'єднана ребром. Повний граф з n вершинами позначається K_n.

Приклад 4.2. На рис. 4.4 зображені повні графи K_2, K_3, K_4, K_5 і K_6 відповідно:

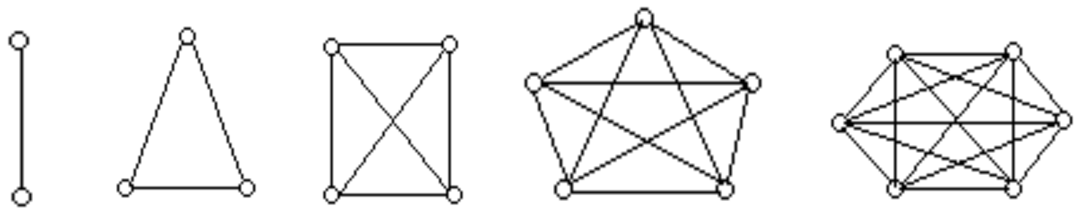
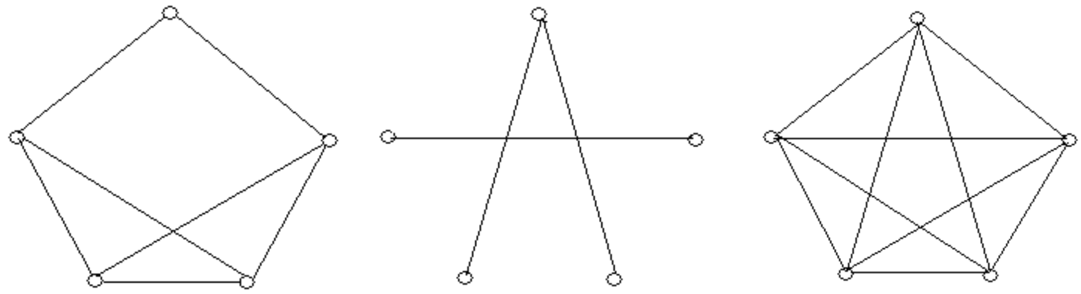


Рис. 4.5.

Визначення 4.8. *Доповненням графа* G називається граф $\overline{G}$, що має ті ж вершини, що і граф G і тільки ті ребра, які необхідно додати до графа G, щоб він став повним.

Приклад 4.3. Доповненням графа G, зображеного на рис. 4.6, а є граф $\overline{G}$, зображений на рис. 4.6, б. Для порівняння, повний граф зображений на рис. 4.6, в.



(а) (б) (в)

Рис. 4.6.

Визначення 4.9. *Степенем вершини* v $(\deg v)$ називається кількість ребер, інцидентних цій вершині. Вершина степеня 0 називається *ізольованою*. У графі з петлями петля дає внесок в 2 одиниці у степінь вершини.

Теорема 4.1. *(лема про рукостискання)* Сума степенів вершин графа завжди парна: $\sum\limits_{v \in G} \deg v = 2m$, де m – кількість ребер графа.

Доведення: Оскільки кожне ребро графа має два кінці, степінь кожного кінця збільшується на 1 за рахунок одного ребра. Тобто у суму степенів всіх вершин кожне ребро вносить 2 одиниці. Отже, сума степенів вершин повинна у два рази перевищувати число ребер, тобто бути парною.

Теорема 4.2. У будь-якому графі кількість вершин непарного степеня парна.

Доведення: Доведемо від оберненого. Припустимо, є непарне число вершин непарного степеня. Сума вершин парного степеня – парна. Сума степенів всіх вершин графа є сума вершин непарного і парного степенів. Така сума завжди є число непарне. Тобто, сума степенів усіх вершин графа буде непарною. Це суперечить умові теореми 4.1. Прийшли до протиріччя. Отже, кількість вершин непарного степеня в будь-якому графі парна.

Справедливість теорем 4.1 і 4.2 можна проілюструвати на наступному прикладі.

Приклад 4.4. Визначити степені вершин графа, зображеного на рис. 4.7.

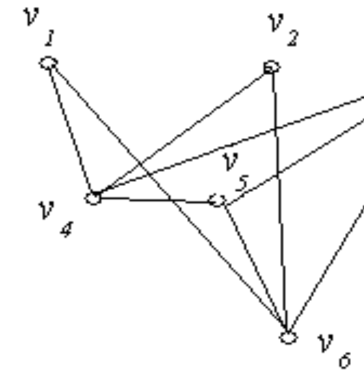


Рис. 4.7.

Розв'язання: $\deg v_1 = 2$; $\deg v_2 = 2$; $\deg v_3 = 3$; $\deg v_4 = 4$; $\deg v_5 = 3$; $\deg v_6 = 4$. $\sum\limits_{v \in G} \deg v = 2+2+3+4+3+4 = 18 = 2 \cdot 9 = 2m$. У розглянутому графі дев'ять ребер, а вершин непарного степеня дві: v_3; v_5.

Визначення 4.10. Для орієнтованого графа визначаються дві степені вершин: $on(v)$ – кількість ребер, що виходять із вершини v і $in(v)$ – кількість ребер, що входять у вершину v. Петля дає внесок по одиниці в обидва степені.

В орграфі суми степенів всіх вершин $\deg v'$ і $\deg v''$ рівні між собою і дорівнюють кількості ребер m цього графа: $\sum\limits_{v \in G} in(v) = \sum\limits_{v \in G} on(v) = m$.

Приклад 4.5. Визначити степені вершин орграфа, зображеного на рис. 4.8.

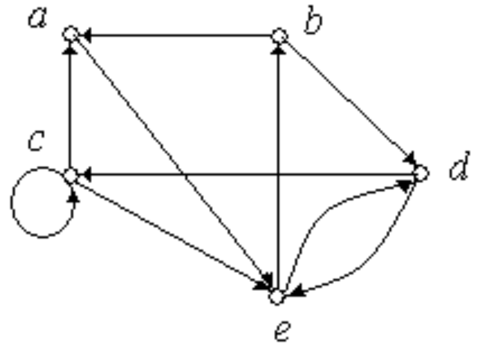


Рис. 4.8.

Розв'язання: $on(a) = 1$, $on(b) = 2$; $on(c) = 3$; $on(d) = 2$; $on(e) = 2$;

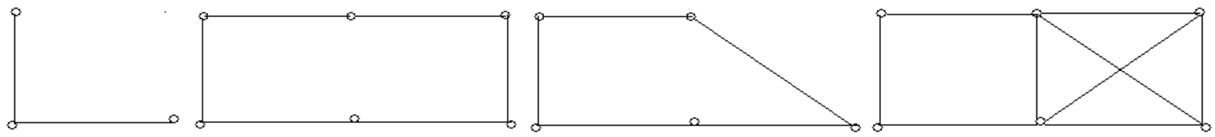
$in(a) = 2$, $in(b) = 1$; $in(c) = 2$; $in(d) = 2$; $in(e) = 3$;

$\sum\limits_{v \in G} on(v) = 1+2+3+2+2 = 10 = \sum\limits_{v \in G} in(v) = 2+1+2+2+3 = 10 = m$.

Визначення 4.11. Граф G' називається *підграфом* графа G, якщо кожна вершина і кожне ребро графа G' є відповідно вершиною і ребром графа G.

Визначення 4.12. Граф G' називається *остовом (каркасом)* графа G, як що містить всі його вершини. За визначенням 4.11 він також є *підграфом* графа G.

Приклад 4.6. На рис. 4.9 (а, б, в) зображені підграфи графа, зображеного на рис. 4.8, г, причому підграф (рис. 4.9, б) є його каркас.



(а) (б) (в) (г)

Рис. 4.9.

Один і той же граф можна зображувати по-різному. Різним чином можна розташовувати вершини на площині і ребра можна зображувати не тільки відрізками прямих (різної довжини), але і дугами. Тому порівнюючи графи, будемо спиратися на наступні визначення.

Визначення 4.13. Графи G_1 і G_2 *рівні*, якщо множини їх вершин і ребер, визначених через пари інцидентних їм вершин, збігаються.

Наприклад, графи, зображені на рис. 4.1 рівні.

Задати граф означає описати множини його вершин і ребер, а також відношення інцидентності. Коли граф G – скінченний, для його опису досить пронумерувати вершини і ребра.

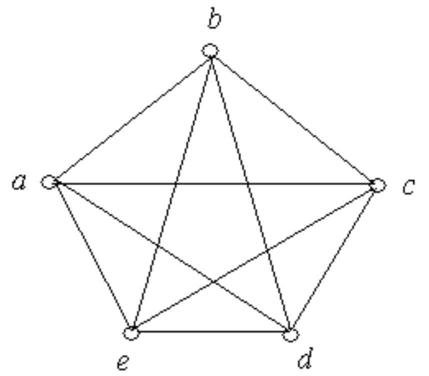
Визначення 4.14. Граф G називається *повністю заданим* у точному значенні, якщо нумерація його вершин і ребер зафіксована. Графи, що відрізняються тільки нумерацією, називаються *ізоморфними*.

Наведемо ще одне визначення ізоморфних графів.

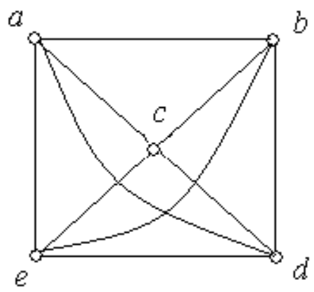
Визначення 4.15. Графи G_1 і G_2 *ізоморфні,* якщо їх вершини можна пронумерувати таким чином, що ребро e_j тоді і тільки тоді з'єднує вершини v_i і v_k у графі G_1, коли ребро e'_j з'єднує вершини v'_i і v'_k у графі G_2, тобто графи $G_1=(V_1, E_1)$ і $G_2=(V_2, E_2)$ називаються *ізоморфними*, якщо існує таке взаємно однозначне відображення φ множини вершин V_1 на множину вершин V_2, що ребро $(v, w)\in E_1$ тоді і тільки тоді, коли ребро $(\varphi(v), \varphi(w))\in E_2$. Відображення φ називається *ізоморфним відображенням* або *ізоморфізмом* графа G_1 на граф G_2.

Таким чином, ізоморфні графи відрізняються фактично лише ідентифікаторами (іменами) своїх вершин. З точки зору теорії графів ця відмінність не є суттєвою, тому звичайно ізоморфні графи ототожнюють і, зображаючи графи у вигляді діаграм, або зовсім не ідентифікують їх вершини, або нумерують вершини натуральними числами.

Приклад 4.7. Графи, зображені на рис. 4.10, (а), (б) – ізоморфні.



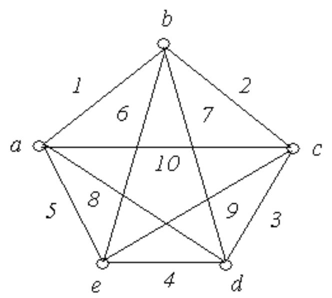
(а)



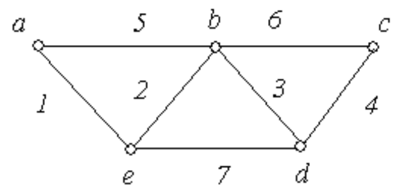
(б)

Рис. 4.10.

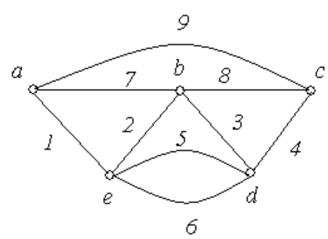
Приклад 4.8. На рис. 4.11 зображені графи $G_1 - G_{13}$ з п'ятьма вершинами в кожному. Порівняти графи.



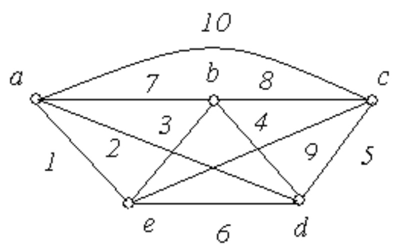
G_1



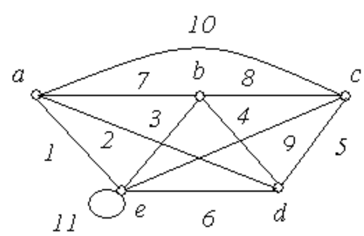
G_2



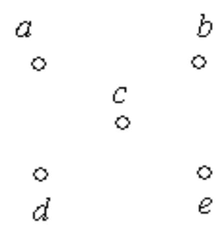
G_3



G_4



G_5



G_6

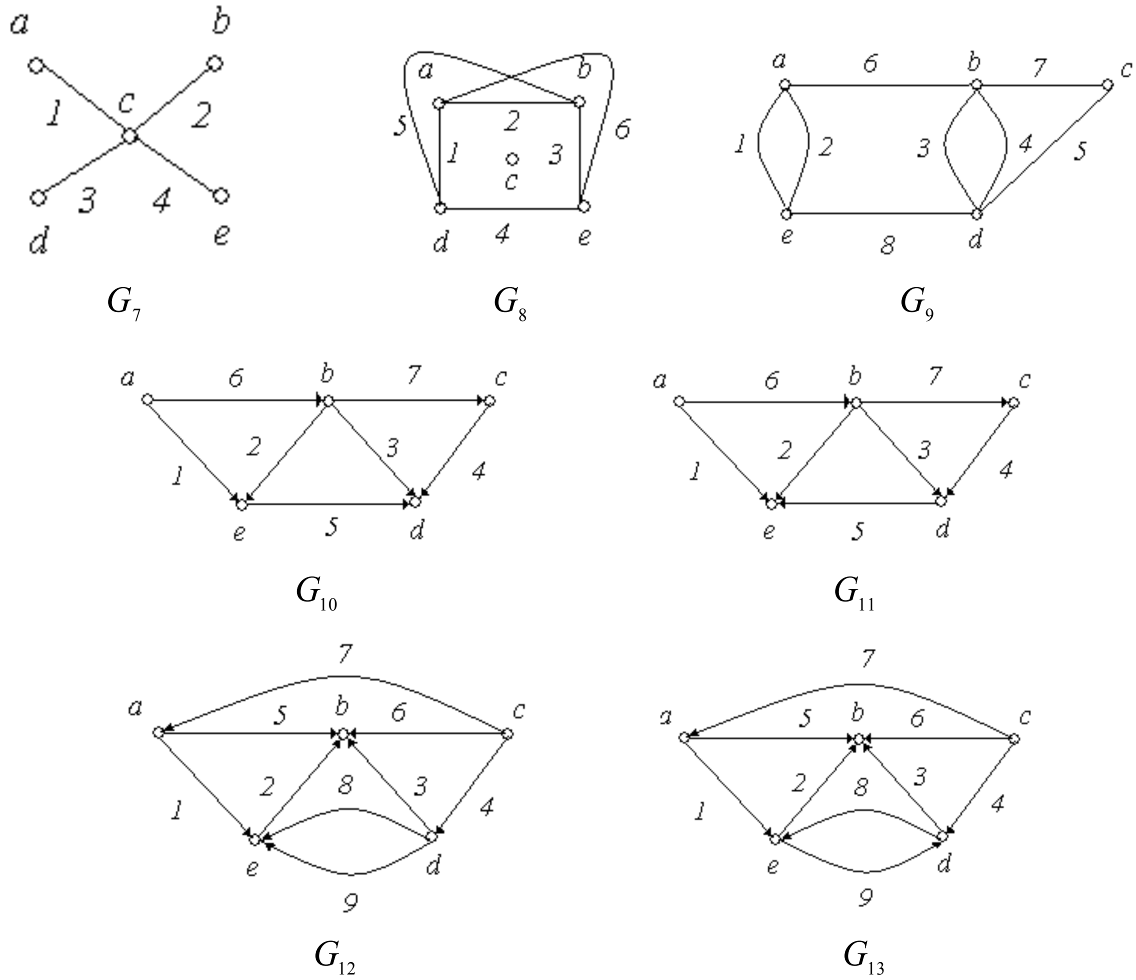


Рис. 4.11.

Розв'язання:

Графи $G_1 - G_9$ – неорієнтовані графи, а $G_{10} - G_{13}$ – орієнтовані.

Графи G_1 і G_4 – повні, причому $G_1 = G_4$.

Граф G_5 не є повним, бо незважаючи на те, що кожна пара вершин з'єднана ребром, є петля.

Графи G_3 і G_9 є мультиграфами, тому що містять кратні ребра.

Граф G_6 – має порожню множину ребер, всі вершини графа є ізольованими.

Графи G_7 і G_8 є доповненням один до одного.

Графи G_{10} і G_{11} не є рівними, тому що ребра 5 мають різний напрямок.

Граф G_{12} – орієнтовний мультиграф, тому що має кратні ребра, у той час як граф G_{13} не є мультиграфом, тому що ребра 8 і 9 по-різному орієнтовані.

Теорема 4.3. Графи G_1 та G_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли матрицю суміжності (матрицю інцидентності) одного з цих графів можна одержати з матриці суміжності (матриці інцидентності) іншого графа за допомогою відповідних перестановок рядків та стовпчиків.

Операція вилучення вершини v з графа $G=(V, E)$ полягає у вилученні з множини V елемента v, а з множини E – всіх ребер, інцидентних v.

Операція вилучення ребра e з графа $G=(V, E)$ – це вилучення елемента e з множини E. При цьому всі вершини зберігаються.

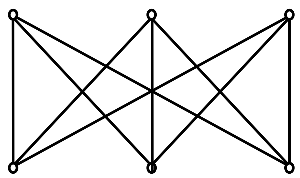
Для графів можна визначити операції об'єднання, перетину і різниці.

Визначення 4.16. *Об'єднанням* графів $G_1=(V_1, E_1)$ і $G_2=(V_2, E_2)$ називається граф $G=(V_1\cup V_2, E_1\cup E_2)$; позначається $G = G_1\cup G_2$. Об'єднання $G = G_1\cup G_2$ називається *прямою сумою* графів G_1 і G_2, якщо $V_1\cap V_2=\varnothing$.

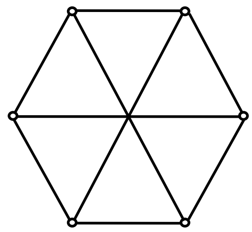
Визначення 4.17. *Перетином і різницею* графів $G_1=(V, E_1)$ і $G_2=(V, E_2)$ з однаковими множинами вершин називаються графи – $G'=(V, E_1\cap E_2)$ і $G''=(V, E_1\backslash E_2)$ відповідно; позначаються $G'=G_1\cap G_2$ *і* $G''=G_1\backslash G_2$.

Теорема 4.4. Графи G_1 і G_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли ізоморфні їх доповнення $\overline{G}_1$ і $\overline{G}_2$.

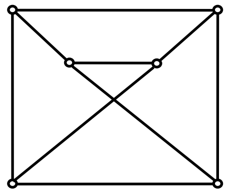
Приклад 4.9. Об'єднання і перетин графів H_1 і H_2 та доповнення графів G_2 і H_2 з попереднього прикладу зображені на рис. 4.12.



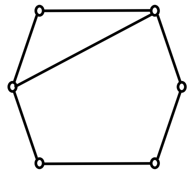
G_1



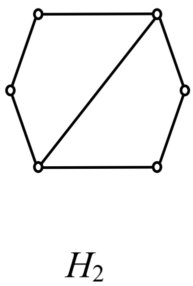
G_2



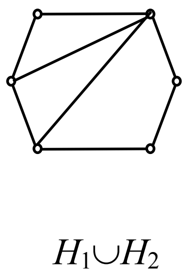
G_3



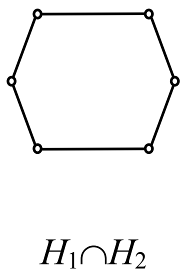
H_1



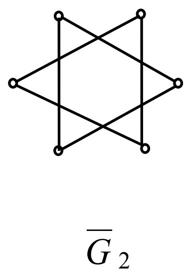
H_2



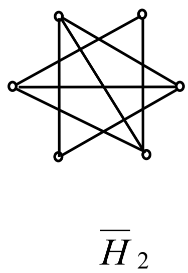
$H_1\cup H_2$



$H_1\cap H_2$



$\overline{G}_2$



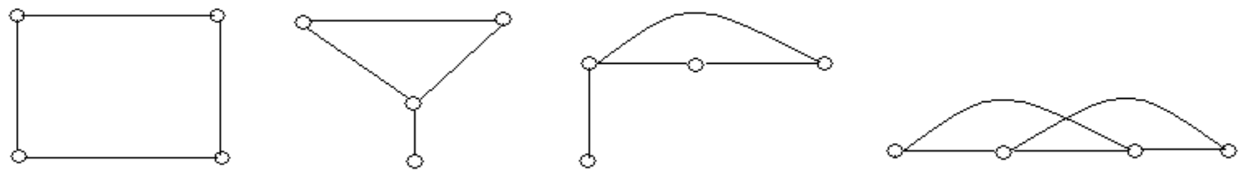
$\overline{H}_2$

Рис.4.12

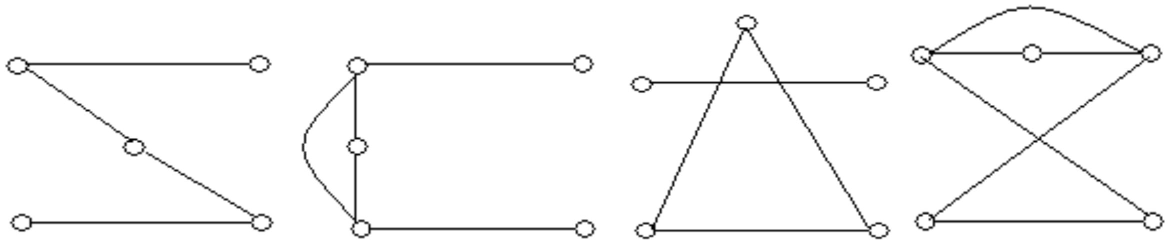
Задачі для самостійної роботи

1. Визначити степені вершин графів $G_1 - G_{13}$ (рис. 4.12).

2. Визначити доповнення $\overline{G}$ графів G, зображених на рис. 4.13. Побудувати повні графи.



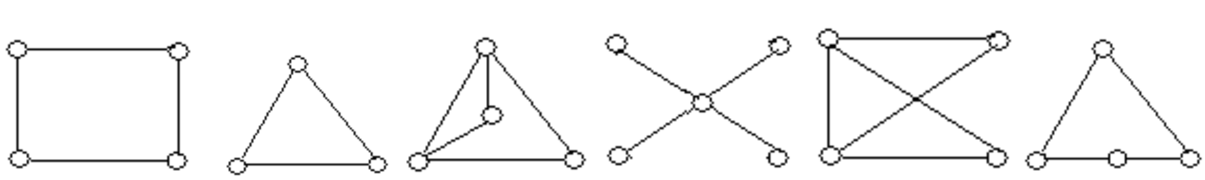
(а) (б) (в) (г)



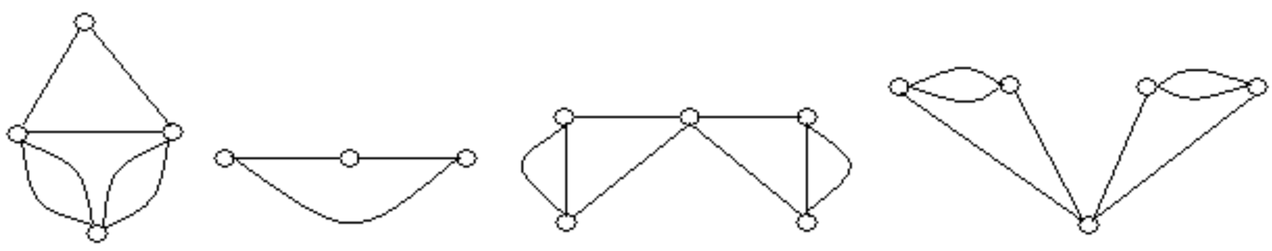
(д) (е) (ж) (з)

Рис. 4.13.

3. Які пари графів, представлених на рис. 4.14, ізоморфні?



G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6



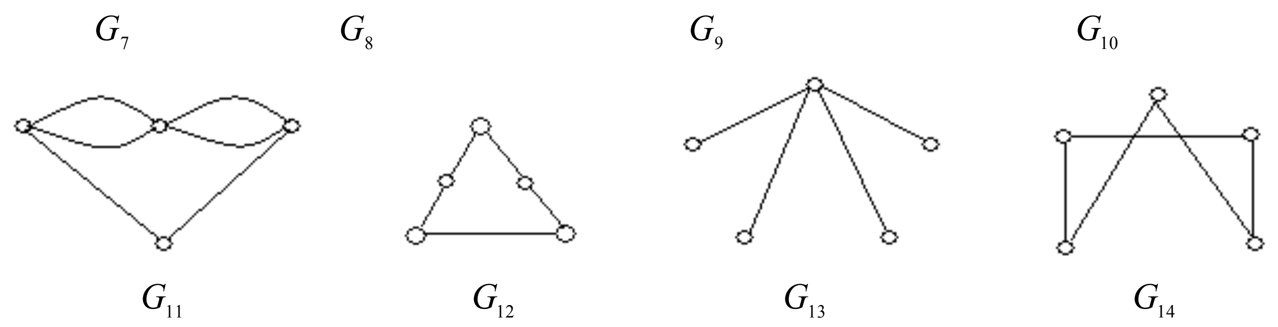


Рис. 4.14.

4. Пропонуємо переконатись, що графи $G_1 - G_3$, зображені на рис. 4.12, ізоморфні між собою, а графи H_1, H_2 – не є ізоморфними.

4.2. Способи задання графів

Як було сказано в п. 4.1 для задання графа необхідно пронумерувати вершини і ребра, а також задати відношення інцидентності. Відношення інцидентності будемо описувати трьома способами: *матрицею інцидентності*, *матрицею суміжності*, *списком ребер* графа. Опишемо докладно кожний з перерахованих способів.

Матриця інцидентності $\left\|\varepsilon_{ij}\right\|$ – це матриця розміром $m \times n$, де вертикально вказуються вершини $i = 1,\overline{n}$, а горизонтально – ребра $j = 1,\overline{m}$. На перетині i-того і j-того рядків число ε_{ij} дорівнює:

а) у випадку неорієнтованого графа

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо ребро } e_i \text{ інцидентно вершині } v_j; \\ 0, \text{ якщо ребро } e_i \text{ не інцидентно вершині } v_j; \\ \alpha, \text{ якщо ребро } e_i - \text{ петля} \left(\alpha \neq 0 \text{ і } \alpha \neq 1\right). \end{cases}$$

б) у випадку орієнтованого графа

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ якщо } v_i - \text{початок ребра } e_j; \\ 1, \text{ якщо } v_i - \text{кінець ребра } e_j; \\ 0, \text{ якщо вони не інцидентні;} \\ \alpha, \text{ якщо } e_j - \text{петля, а } v_i - \text{інцидентна їй вершина.} \end{cases}$$

Матриця суміжності $\left\|\delta_{ij}\right\|$ – це квадратна матриця розміром $n \times n$, де вертикально і горизонтально вказуються вершини графа $i = \overline{1,n}$ і $j = \overline{1,n}$. На перетині i-того і j-того рядків число δ_{ij} дорівнює:

- числу ребер, що з'єднують ці вершини у випадку неорієнтованого графа;

- числу ребер з початком в i -тій вершині і кінцем в j -тій вершині у випадку орієнтовного графа.

Список ребер графа – це таблиця, що складається із трьох рядків. У першому перераховані всі ребра; у другому і третьому – інцидентні їм вершини:

- у випадку неорієнтованого графа порядок вершин у рядку довільний;

- у випадку орієнтованого графа першою записується вершина, де починається ребро (другий рядок); вершина, де закінчується ребро, записується у третій рядок.

Для нумерації вершин і ребер графа використовують різний символьний запис: римські, арабські цифри, латинські букви.

Якщо графи рівні, то їх матриці суміжності й інцидентності, а також список ребер, однакові.

Приклад 4.10. Задати матрицями інцидентності і суміжності, а також списком ребер неорієнтований граф, зображений на рис. 4.15.

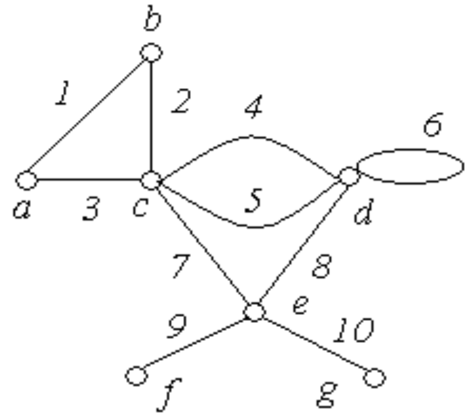


Рис. 4.15.

Розв'язання:

Матриця інцидентності

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0
d	0	0	0	1	1	2	0	1	0	0
e	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
f	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Матриця суміжності

	a	b	c	d	e	f	g
a	0	1	1	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0
c	1	1	0	2	1	0	0
d	0	0	2	1	1	0	0
e	0	0	1	1	0	1	1
f	0	0	0	0	1	0	0
g	0	0	0	0	1	0	0

Тут $\alpha = 2$.

Список ребер

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вершини	початок	*a*	*b*	*a*	*c*	*c*	*d*	*c*	*d*	*e*	*e*
	кінець	*b*	*c*	*c*	*d*	*d*	*d*	*e*	*e*	*f*	*g*

Як бачимо, у кожному стовпці матриці інцидентності є тільки два елементи, відмінних від нуля (або один, якщо ребро – петля).

Матриця суміжності симетрична щодо головної діагоналі.

Список ребер є найбільш компактним способом задання графів.

Кожний із наведених способів однозначно описує граф, зображений на рис. 4.15.

Приклад 4.11. Задати матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер орієнтовний граф, зображений на рис. 4.15.

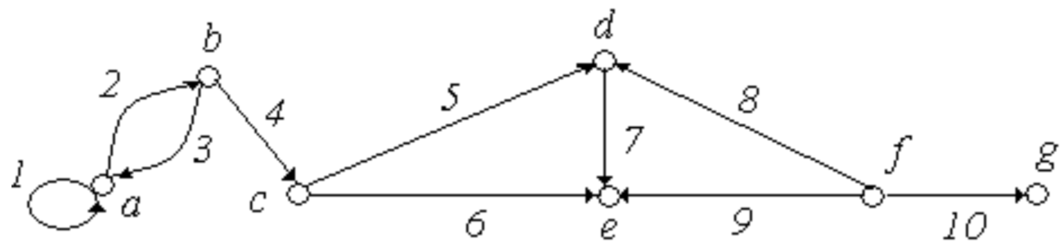


Рис. 4.15.

Розв'язання:

Матриця інцидентності

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	2	–1	1	0	0	0	0	0	0	0
b	0	1	–1	–1	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	1	–1	–1	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1	0	–1	1	0	0
e	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
f	0	0	0	0	0	0	0	–1	–1	–1
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Матриця суміжності

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
a	1	1	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0
c	0	0	0	1	1	0	0

d	0	0	0	0	1	0	0
e	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	1	1	0	1
g	0	0	0	0	0	0	0

Список ребер

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вершини	початок	a	a	b	b	c	c	d	f	f	f
	кінець	a	b	a	c	d	e	e	d	e	g

Як відзначалося вище, всі розглянуті способи задання графів однозначно визначають граф. Виникає питання: чи можливо відновити граф по заданих матрицях інцидентності, суміжності або списку ребер? Очевидна позитивна відповідь.

По матриці інцидентності число ребер і вершин визначається з розмірності матриці: число ребер $|E|$ графа дорівнює числу стовпців m, а число вершин $|V|$ – числу рядків n матриці.

По матриці суміжності число вершин визначається з розмірності матриці. Як було відзначено, матриця суміжності н-графа симетрична щодо головної діагоналі і кількість ребер визначається верхнім правим трикутником матриці, розташованим над головною діагоналлю, включаючи останню. Тобто, число ребер н-графа дорівнює сумі елементів, розташованих на головній діагоналі і у верхньому правому трикутнику. У матриці суміжності орграфа симетрія відсутня, а число ребер дорівнює сумі всіх елементів матриці суміжності.

Список ребер є скороченим варіантом матриці інцидентності. Кількість ребер очевидна, а кількість вершин дорівнює максимальному номеру всіх перерахованих вершин зі списку.

Тобто, матриця інцидентності і список ребер по суті еквівалентні, то знаючи матрицю інцидентності можна записати список ребер, і навпаки.

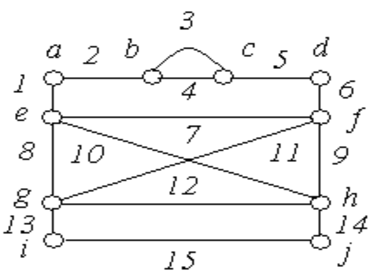
У визначенні 4.14 введене поняття ізоморфних графів. Чи можливо встановити, чи є графи ізоморфними за їх матрицями інцидентності, суміжності?

Для перевірки ізоморфності графів G_1 і G_2 за матрицею суміжності (інцидентності) необхідно визначити, чи існує така перестановка рядків і стовпців у матриці суміжності (інцидентності) G_1, щоб у результаті вийшла матриця G_2. Із цією метою треба зробити всі можливі перестановки рядків і стовпців (а їх максимальна кількість дорівнює $n! \cdot n!$)! Якщо після однієї із цих перестановок матриці суміжності (інцидентності) тотожно збігаються, то графи ізоморфні.

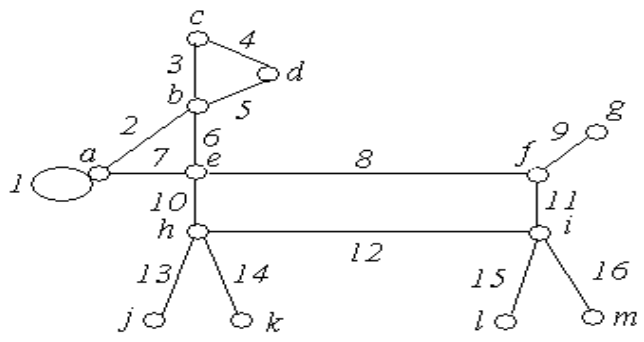
Це досить трудомісткі операції і розв'язання задачі "вручну" не завжди виправдано. Найчастіше ізоморфність графів простіше встановити з їх графічних представлень.

Задачі для самостійної роботи

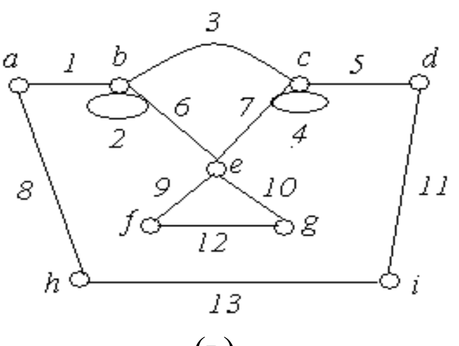
Задати матрицями інцидентності, суміжності і списком ребер неорієнтовані графи, зображені на рис. 4.16:



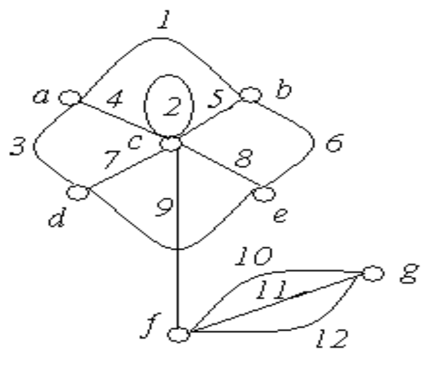
(а)



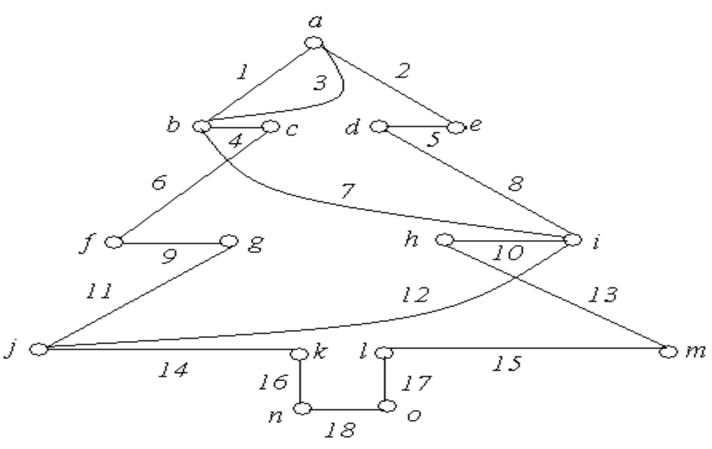
(б)



(в)



(г)



(д)

Рис. 4.16.

2. Задати матрицями інцидентності, суміжності і списком ребер орієнтовані графи, зображені на рис. 4.17:

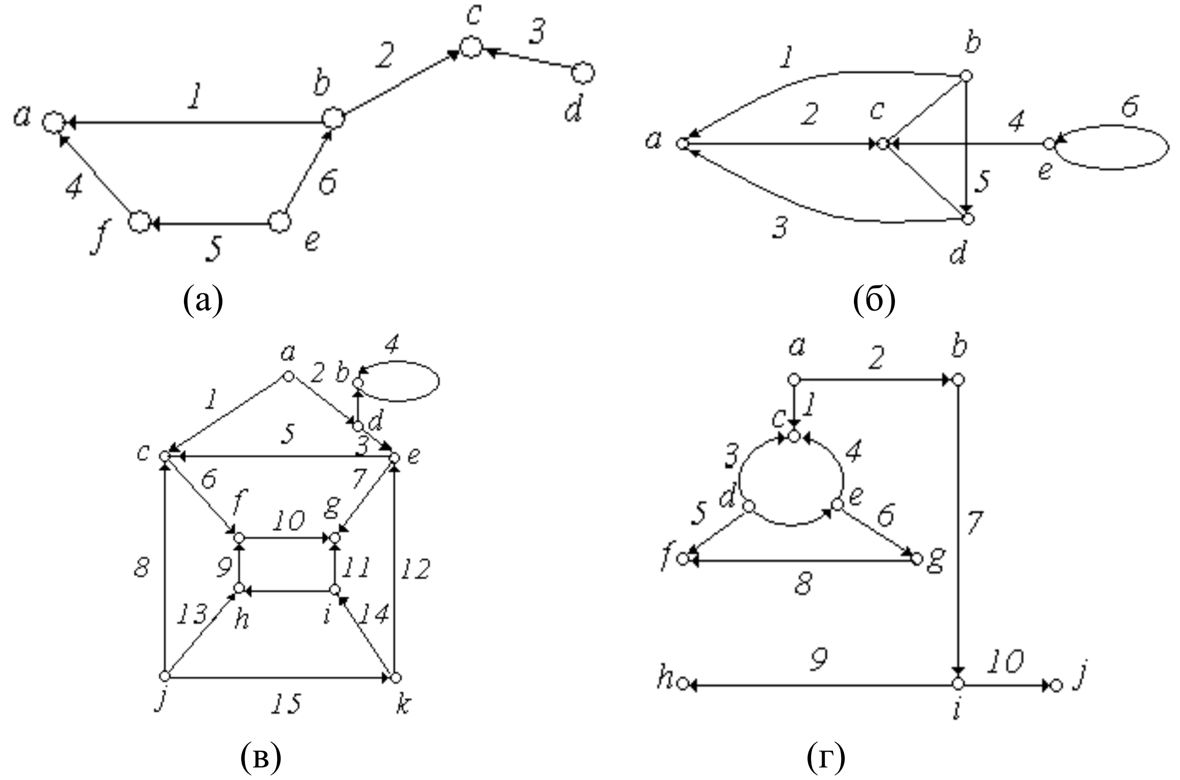


Рис. 4.17.

3. Для заданих матриць інцидентності а) і б) знайти відповідний граф.

а)

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	1	0	1	0	0	1	0	0
b	0	1	0	1	0	0	1	0
c	0	1	1	0	1	0	0	1
d	1	0	0	1	1	0	0	0
e	0	0	0	0	0	1	1	1

б)

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	1	0	1	0	1	0	0	0
b	0	1	0	1	0	1	0	1
c	0	1	0	0	0	0	1	0
d	1	0	0	0	1	1	0	0
e	0	0	1	1	0	0	1	1

4. Для заданих матриць суміжності а) і б) знайти відповідний граф.

а)

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
a	0	0	1	0	1	0
b	0	0	1	0	1	1
c	1	1	0	1	0	0
d	0	0	1	0	1	1
e	1	1	0	1	0	0
f	0	1	0	1	0	0

б)

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
a	0	1	0	0	1	0
b	1	0	1	1	0	0
c	0	1	0	1	0	0
d	0	1	1	0	1	1
e	1	0	0	1	0	1
f	0	0	0	1	1	0

4.3. Зв’язність графа. Маршрути, шляхи, ланцюги, цикли

4.3.1. G – неорієнтований граф

Визначення 4.18. *Маршрутом (шляхом)* у графі G називається така послідовність ребер $M(e_1, e_2, ..., e_n)$, у якій кожні два сусідніх ребра e_{i-1} і e_i мають спільну вершину. У маршруті те саме ребро може зустрічатися кілька разів. Іншими словами *маршрут* – це сукупність ребер, які об'єднані вершинами так, що можна рухатися по них уздовж графа. *Початок маршруту* – це вершина v_0, інцидентна ребру e_1 і не інцидентна ребру e_2. *Кінець маршруту* – це вершина v_n, інцидентна ребру e_n і не інцидентна e_{n-1}. Якщо ребра (e_1, e_2), … $(e_{n-1}\ , e_n\ )$ – кратні, то необхідно додатково вказувати, яку із двох інцидентних вершин вважати початком (кінцем) маршруту.

Позначення маршруту з v_0 у v_n – послідовністю $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 .... v_{n-1} e_n v_n$ зайве, тому ми будемо позначати маршрут як $v_0 v_1 v_2 .... v_{n-1} v_n$.

Визначення 4.19. *Маршрут довжини* k – послідовність, що містить k ребер. Іншими словами, *довжиною маршруту* називається кількість ребер у ньому; при цьому кожне ребро враховується стільки разів, скільки разів воно зустрічається в маршруті. Маршрут, всі ребра якого різні, називається *ланцюгом*. Ланцюг, який не має вершин, що повторюються, називається *простим*.

Приклад 4.12. Визначити можливі маршрути (і їх довжину) з вершини v_0 в v_8 у графі, зображеному на рис. 4.18.

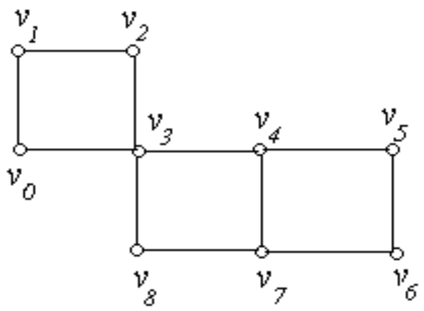


Рис. 4.18

Розв’язання: З вершини v_0 у v_8 ведуть, наприклад, шляхи:

1) $v_0 v_3 v_8$ – довжини 2;

2) $v_0 v_1 v_2 v_3 v_8$ – довжини 4;

3) $v_0 v_3 v_4 v_7 v_8$ – довжини 4;

4) $v_0 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8$ – довжини 6;

5) $v_0 v_3 v_4 v_5 v_4 v_7 v_8$ – довжини 6;

6) $v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_7 v_8$ – довжини 6;

7) $v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8$ – довжини 8;

8) $v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_7 v_6 v_5 v_4 v_3 v_8$ – довжини 10.

Шляхи: 6), 8) не є простими.

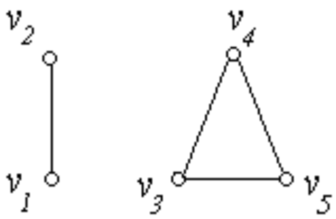
Визначення 4.20. Маршрут, у якому збігаються початок і кінець, називається *циклічним.* Циклічний маршрут називається *циклом*, якщо він є ланцюг, і *простим циклом* – якщо це простий ланцюг.

Наприклад, маршрут $v_0v_1v_2v_3v_0$ для графа, зображеного на рис. 4.18, є простим циклом; а маршрут $v_3v_4v_5v_6v_7v_4v_3$ є циклом, але не буде простим, тому що містить вершини, які повторюються.

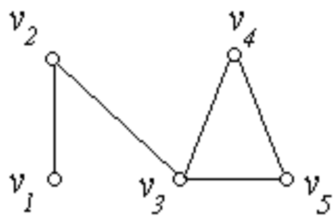
Визначення 4.21. Вершини v' і v'' графа G називаються *зв'язаними*, якщо існує маршрут з початком у v' і кінцем у v''. Маршрут між зв'язаними вершинами може бути поданий простим ланцюгом.

Визначення 4.22. Граф G називається *зв'язним*, якщо будь-які пари його вершин зв'язані між собою.

Наприклад, граф, зображений на рис. 4.19, а – не зв'язний, а граф на рис. 4.19, б – зв'язний.



(а)



(б)

Рис. 4.19

Твердження. Якщо існує маршрут з вершини v_0 в v_n графа G, то існує простий ланцюг, що з'єднує вершини v_0 і v_n.

Наслідок. Граф G є зв'язним тоді і тільки тоді, коли між будь-якими двома його вершинами існує простий ланцюг.

Визначення 4.23. Максимальний непустий зв'язний підграф G' графа G називається *компонентом* графа G.

Отже, кожен граф є об'єднанням своїх компонент, які попарно не перетинаються. Незв'язний граф має, як мінімум, два компоненти. Наприклад, граф, зображений на рис. 4.19, а, має два компоненти: v_1v_2 і $v_3v_4v_5$.

Визначення 4.24. Вершина v називається *точкою зчленування*, якщо видалення її із графа приводить до збільшення числа компонент зв'язності.

Визначення 4.25. Ребро e називається *мостом*, якщо видалення його із графа приводить до збільшення числа компонент зв'язності.

Наприклад, у графі, зображеному на рис. 4.19, б вершина v_3 є точкою зчленування, а ребро, що з'єднує вершини v_1v_2 – міст.

Визначення 4.26. Множина ребер C зв'язного графа G називається *множиною розрізу*, якщо видалення ребер із множини C порушує зв'язність графа, а видалення власної підмножини множини C залишає граф зв'язним. Якщо множина C складається з одного ребра, то це ребро називається *ребром розрізу*.

Приклад 4.13. Визначити ребра розрізу графа, зображеного на рис. 4.20.

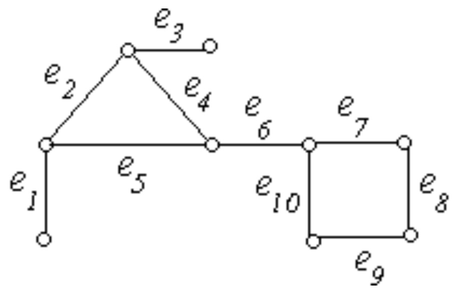


Рис. 4.20.

*Розв'язання: Р*ебра e_1, e_3 і e_6 – є ребрами розрізу. Їх видалення порушує зв'язність графа.

Приклад 4.14. Визначити множини розрізу для графа, зображеного на рис. 4.21.

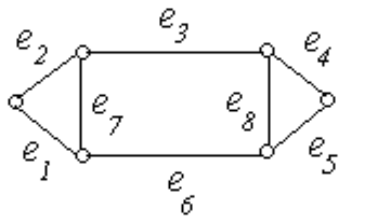


Рис. 4.21.

Розв'язання. Множинами розрізу для даного графа можуть бути, наприклад: $\{e_1, e_2\}$, $\{e_4, e_5\}$, $\{e_3, e_6\}$, $\{e_2, e_4, e_7, e_8\}$, $\{e_1, e_4, e_7, e_5\}$ і т.д.

4.3.2. G – орієнтований граф

Визначення 4.27. Послідовність ребер, у якому кінець кожного попереднього ребра e_{i-1} збігається з початком наступного e_i, називається *шляхом* або *орієнтованим маршрутом*. У шляху те саме ребро може зустрічатися кілька разів.

Визначення 4.28. *Початком шляху* є вершина v_0 ребра e_1, а *кінцем шляху* є вершина v_n ребра e_n.

Визначення 4.29. *Довжиною орієнтованого маршруту* називається кількість орієнтованих ребер, що входять у цей шлях.

Приклад 4.15. Для графа, зображеного на рис. 4.22, наведемо приклади орієнтованих маршрутів з вершини v_0 до вершини v_6: $v_0v_1v_3v_6$; $v_0v_2v_5v_6$; $v_0v_4v_3v_6$ – довжини 3; $v_0v_2v_5v_4v_3v_6$ – довжини 5.

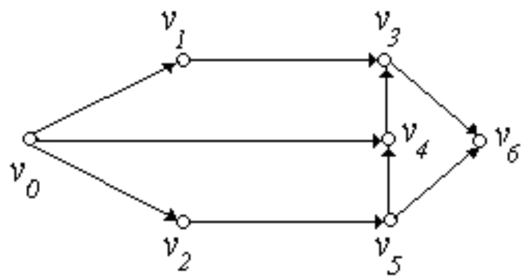
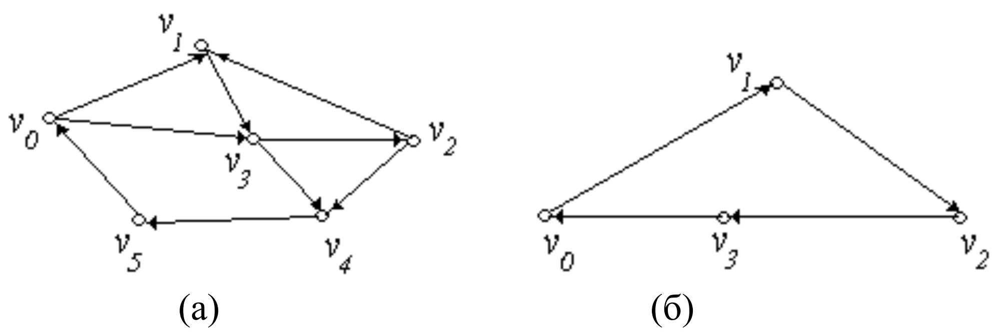


Рис. 4.22.

Визначення 4.30. *Орієнтованим ланцюгом* називається шлях, кожне ребро якого зустрічається не більше одного разу, і *простим ланцюгом*, якщо будь-яка вершина орграфа G інцидентна не більше, ніж двом його ребрам.

Визначення 4.31. *Контуром* називається шлях, початок v_0 і кінець v_n якого збігаються. Контур називається *циклом*, якщо він є ланцюгом і *простим циклом* – якщо це простий ланцюг.

Приклад 4.16. Для графа, зображеного на рис. 4.23, а, приклади: орієнтованого ланцюга - $v_0v_1v_3v_2v_4v_5$; контуру – $v_0v_1v_3v_2v_1v_3v_4v_5v_0$; циклу - $v_0v_3v_4v_5v_0$. Для графа, зображеного на рис. 4.23,б, приклади: простого орієнтованого ланцюга – $v_0v_1v_2$; простого циклу – $v_0v_1v_2v_3v_0$. При цьому зауважимо, що при записі циклу як для орієнтованого, так і для неорієнтованого графа, як початком, так і кінцем може бути обрана будь-яка вершина. Наприклад: $v_1v_2v_3v_0v_1$; $v_2v_3v_0v_1v_2$ і т.п.

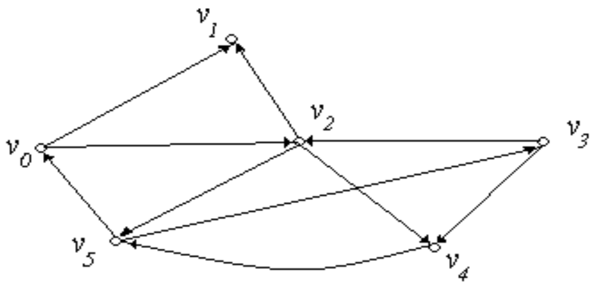


(а) (б)

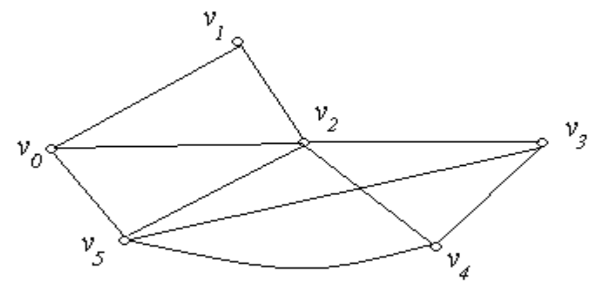
Рис. 4.23.

Визначення 4.32. Для кожного орієнтованого графа G може бути побудований неорієнтований граф G^s, такий, що всі вершини цих графів збігаються, а кожне ребро G (крім петель) стане неорієнтованим ребром графа G^s. У такому випадку граф G^s називається *співвіднесеним графом* орієнтованого графа G.

Приклад 4.17. Для графа G, зображеного на рис. 4.24, а, співвіднесений граф G^s буде мати вигляд (рис. 4.24, б):



(а)



(б)

Рис. 4.24.

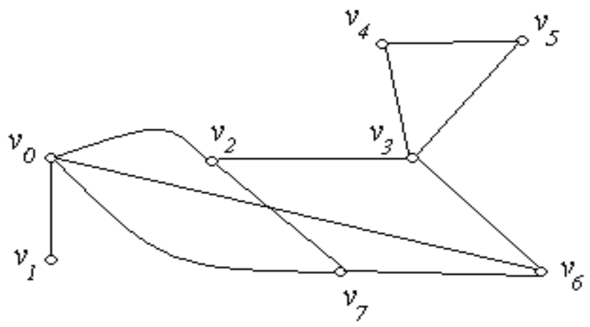
Визначення 4.33. Вершина $v'' \in G$ називається *досяжною* з вершини $v' \in G$ якщо існує шлях з початком у v' і кінцем у v''.

Визначення 4.34. Орієнтований граф G називається *зв'язним*, якщо його співвіднесений граф G^s є зв'язним. Орієнтований граф називається *сильно зв'язним*, якщо для будь-якої пари вершин v', v'' існує орієнтований шлях з v' у v''.

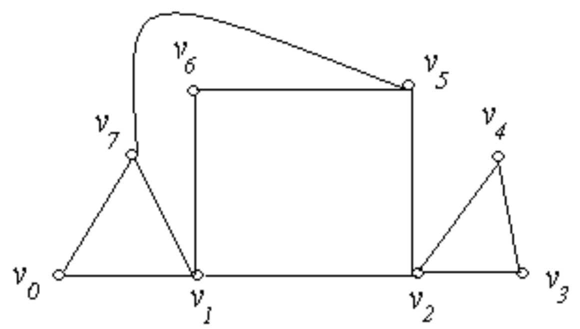
Так, наприклад, граф, зображений на рис. 4.24, а, є зв'язним, але не є сильно зв'язним.

Задачі для самостійної роботи

1. Для неорієнтованих графів, зображених на рис. 4.25 (а, б), навести приклади: маршруту; ланцюга; простого ланцюга; циклічного маршруту; циклу; простого циклу.



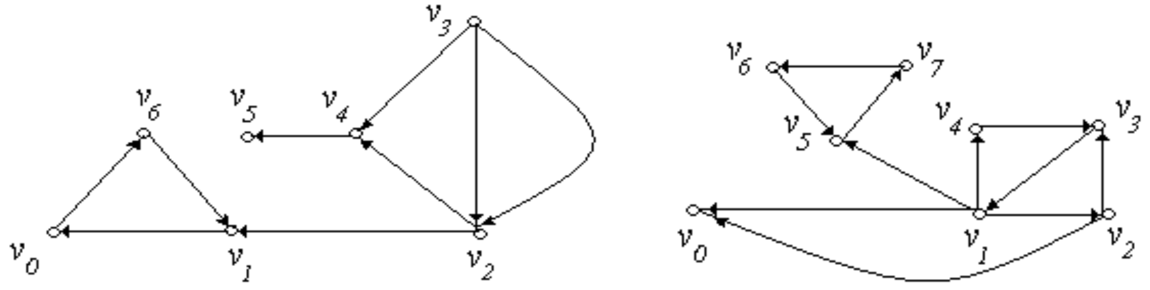
(а)



(б)

Рис. 4.25.

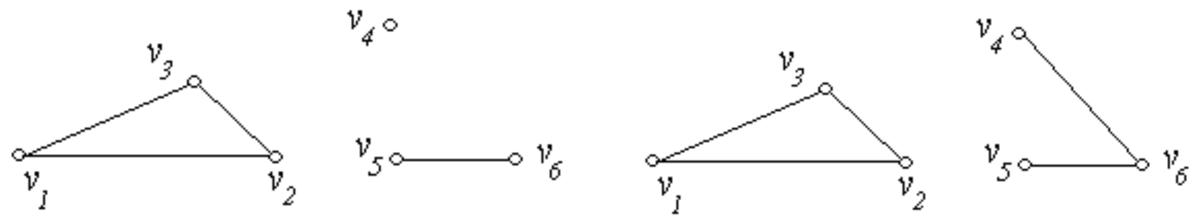
2. Для орієнтованих графів, зображених на рис. 4.26 (а, б), навести приклади: шляху; орієнтованого ланцюга; простого ланцюга; контуру; циклу; простого циклу.



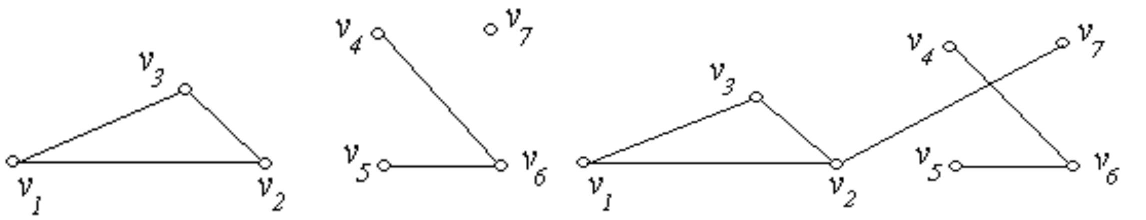
(а) (б)

Рис. 4.26.

3. Визначити число компонент зв'язності у графах G, зображених на рис. 4.27 (а, б, в, г).



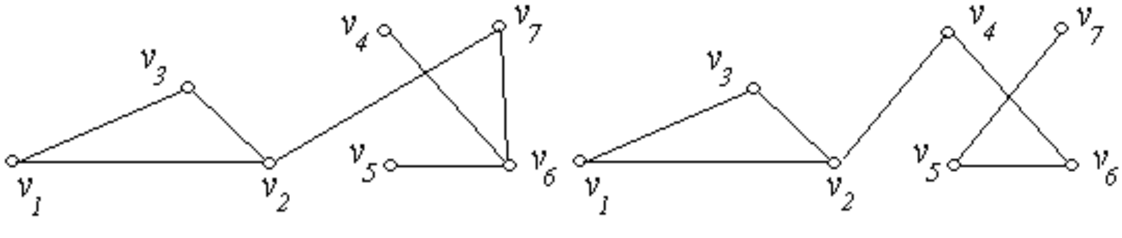
(а) (б)



(в) (г)

Рис. 4.27.

4. Знайти на графах G, зображених на рис. 4.28 (а – г), всі точки зчленування і мости:



(а) (б)

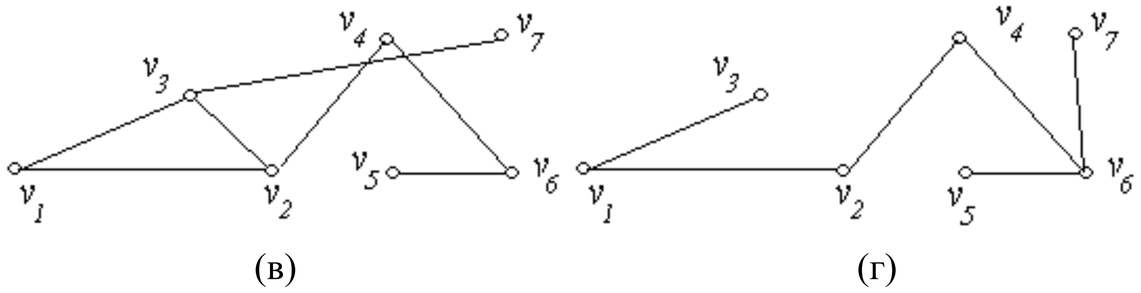


Рис. 4.28.

4.4. Метрика на графах

Визначення 4.35. *Відстанню* $d(v',v'')$ між вершинами v' і v'' графа G називається мінімальна довжина простого ланцюга з початком у вершині v' і кінцем у вершині v''. Якщо вершини v' і v'' не з'єднані ланцюгом, тобто належать різним компонентам, то вважається, що $d(v',v'')=\infty$.

У зв'язному графі G відстань між вершинами задовольняє наступним умовам:

1) $\forall v',v'' \in G$, $d(v',v'') \geq 0$ і $d(v',v'')=0$ тоді і тільки тоді, коли $v'=v''$;

2) $\forall v',v'' \in G$, $d(v',v'')=d(v'',v')$;

3) $\forall v',v'',v''' \in G$, $d(v',v'') \leq d(v',v''')+d(v''',v'')$.

Функція $d(v',v'')$, що задовольняє трьом перерахованим умовам, називається *метрикою графа*.

Визначення 4.36. *Центром графа* називається вершина, від якої максимальна з відстаней до інших вершин була б мінімальною.

Визначення 4.37. *Периферійною точкою графа* називається вершина, від якої максимальна з відстаней до інших вершин була б максимальна.

Визначення 4.38. Максимальна відстань від центра графа G до його вершин називається *радіусом графа* $r(G)$.

Алгоритм Дейкстри *(Едсгер Дейкстра, нідерландський математик, 1930 – 2002).* Розглянемо наступну задачу: заданий скінченний орієнтовний граф G, кожному ребру якого приписана його числова характеристика („довжина”). Необхідно знайти найкоротший шлях від заданої вершини (позначимо її через s) до відповідної вершини або до всіх інших вершин графу.

Класичний алгоритм Дейкстри працює тільки для графів без дуг від'ємної довжини.

Нехай G – орієнтований граф із зваженими дугами. Позначимо s-вершину – початок шляху і t-вершину – кінець шляху. В процесі роботи алгоритму вершинам v_i приписуються числа (мітки) $d(v_i)$, які служать оцінкою довжини (ваги) найкоротшого шляху від вершини s до вершини v_i. Якщо вершина v_i отримала на деякому кроці мітку $d(v_i)$, то це означає, що в графі G існує шлях із s в v_i, який має вагу $d(v_i)$. Мітки можуть знаходитися в двох станах – бути тимчасовими або постійними. Перетворення мітки в постійну означає, що найкоротша відстань від вершини s до відповідної вершини знайдено. Сам алгоритм складається з двох етапів. На першому знаходиться довжина найкоротшого шляху, а на другому будується сам шлях від вершини s до вершини t.

Опис алгоритму Дейкстри

Етап 1. Знаходження довжини найкоротшого шляху.

Крок 1. Присвоєння вершинам початкових міток.

Покладемо $d(s) = 0^*$ і вважаємо цю мітку постійною (постійні мітки помічаємо зверху зірочкою). Для решти вершин $x_i \in V, x_i \neq s$ покладемо $d(x_i) = \infty$ і вважаємо ці мітки тимчасовими. Нехай $\tilde{x} = s$, $\tilde{x}$ – позначення поточної вершини.

Крок 2. Зміна міток.

Для кожної вершини x_i з тимчасовою міткою, що безпосередньо слідує за вершиною $\tilde{x}$, змінюємо її мітку у відповідності з наступним правилом:

$$d_{нов.}(x_i) = \min\{d_{стар.}(x_i); d(\tilde{x}) + \omega(\tilde{x}; x_i)\},$$

де $\omega(\tilde{x}; x_i)$ – вага ребра $(\tilde{x}; x_i)$.

Крок 3. Перетворення тимчасової мітки в постійну.

Із всіх вершин з тимчасовими мітками вибираємо вершину x_j^* з найменшим значенням мітки

$$d(x_j^*) = \min\{d(x_j)\}, \quad x_j \in V, \quad d(x_j) \text{ – тимчасова.}$$

Перетворюємо цю мітку в постійну і покладемо $\tilde{x} = x_j^*$.

Крок 4. Перевірка на завершення першого етапу.

Якщо $\tilde{x} = t^*$, то $d(\tilde{x})$ – довжина найкоротшого шляху від s до t. В протилежному випадку повернення до кроку 2.

Етап 2. Побудова найкоротшого шляху.

Крок 5. Послідовний пошук дуг найкоротшого шляху.

Серед вершин, що передують вершині $\widetilde{x}$ з постійними мітками, знаходимо вершину x_i, яка задовольняє рівність

$$d(\widetilde{\mathrm{x}}) = \mathrm{d}(\mathrm{x_i}) + \omega(\mathrm{x_i}; \widetilde{\mathrm{x}}).$$

Включаємо дугу $(\mathrm{x_i}; \widetilde{\mathrm{x}})$ в шуканий шлях і покладемо $\widetilde{\mathrm{x}} = \mathrm{x_i}$.

Крок 6. Перевірка на завершення другого етапу.

Якщо $\widetilde{\mathrm{x}} = \mathrm{s}$, то найкоротший шлях знайдено – його утворює послідовність дуг, отриманих на п’ятому кроці і записаних в оберненому порядку. В протилежному випадку повертаємося до п’ятого кроку.

Приклад 4.18. Знайти величину мінімального шляху і сам шлях від вершини $\mathrm{s} = \mathrm{x_1}$ до вершини $\mathrm{t} = \mathrm{x_7}$ за допомогою алгоритму Дейкстри для наступного графа (рис. 4.29).

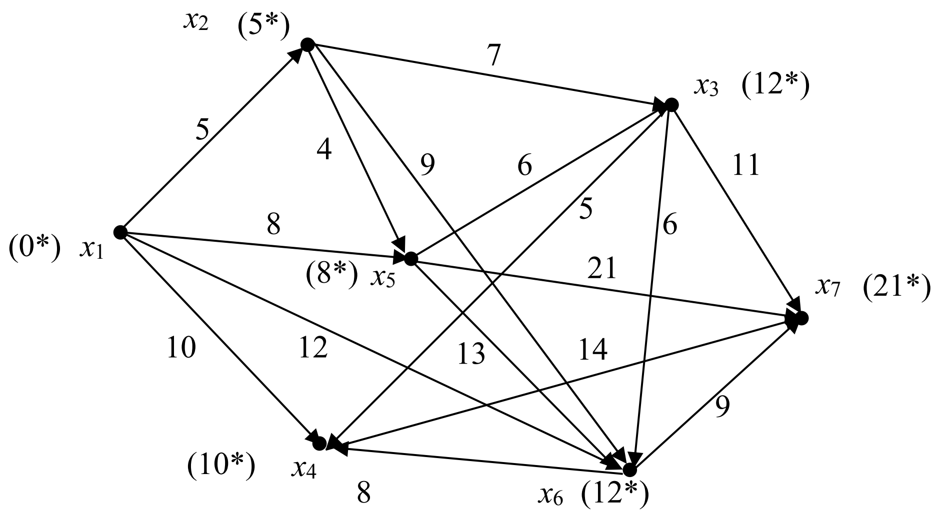


Рис. 4.29.

Розв’язання.

Етап 1.

1) Покладемо $d(x_1) = 0^*$,

$$d(x_2) = d(x_3) = d(x_4) = d(x_5) = d(x_6) = d(x_7) = \infty.$$

2) За вершиною $\widetilde{x} = x_1$ слідують вершини, які утворюють множину $\widetilde{s} = \{x_2, x_4, x_5, x_6\}$.

Порахуємо тимчасові мітки:

$d(\mathrm{x}_5) = \min\{\infty; 0^* + 8\} = 8,$ $\qquad d(\mathrm{x}_2) = \min\{\infty; 0^* + 5\} = 5,$

$d(\mathrm{x}_4) = \min\{\infty; 0^* + 10\} = 10,$ $\qquad d(\mathrm{x}_6) = \min\{\infty; 0^* + 12\} = 12.$

Отримуємо $d(\mathrm{x}_2) < d(\mathrm{x}_5) < d(\mathrm{x}_4) < d(\mathrm{x}_6)$. Отже, вершині x_2 присвоюється постійна мітка $\mathrm{d}(\mathrm{x}_2) = 5^*$, $\tilde{x} = x_2$.

3) $\tilde{s} = \{x_4, x_5, x_6, x_3\}$. Перерахуємо тимчасові мітки:

$d(\mathrm{x}_5) = \min\{\infty; 0^* + 8; 5^* + 4\} = 8$, $\quad d(\mathrm{x}_4) = \min\{\infty; 0^* + 10\} = 10$,

$d(\mathrm{x}_6) = \min\{\infty; 0^* + 12; 5^* + 9\} = 12$, $\quad d(\mathrm{x}_3) = \min\{\infty; 5^* + 7\} = 12$.

Отримуємо $d(\mathrm{x}_5) < d(\mathrm{x}_4) < d(\mathrm{x}_3) < d(\mathrm{x}_6)$. Отже, вершині x_5 присвоюється постійна мітка $\mathrm{d}(\mathrm{x}_5) = 8^*$, $\tilde{x} = x_5$.

4) $\tilde{s} = \{x_4, x_3, x_6, x_7\}$. Перерахуємо тимчасові мітки:

$d(\mathrm{x}_7) = \min\{\infty; 8^* + 21\} = 29$, $\quad d(\mathrm{x}_4) = \min\{\infty; 0^* + 10\} = 10$,

$d(\mathrm{x}_6) = \min\{\infty; 0^* + 12; 5^* + 9; 8^* + 13\} = 12$, $\quad d(\mathrm{x}_3) = \min\{\infty; 5^* + 7; 8^* + 6\} = 12$.

Отримуємо $d(\mathrm{x}_4) < d(\mathrm{x}_3) = d(\mathrm{x}_6) < d(\mathrm{x}_7)$. Отже, вершині x_4 присвоюється постійна мітка $\mathrm{d}(\mathrm{x}_4) = 10^*$, $\tilde{x} = x_4$.

5) $\tilde{s} = \{x_3, x_6, x_7\}$. Перерахуємо тимчасові мітки:

$d(\mathrm{x}_3) = \min\{\infty; 5^* + 7; 8 * + 6\} = 12$, $\quad d(\mathrm{x}_6) = \min\{\infty; 0^* + 12; 5^* + 9; 8^* + 13\} = 12$,

$d(\mathrm{x}_7) = \min\{\infty; 8^* + 21; 10^* + 14\} = 24$.

Отримуємо $d(\mathrm{x}_3) = d(\mathrm{x}_6) < d(\mathrm{x}_7)$. Отже, вершинам x_3 і x_6 присвоюється постійна мітка $\mathrm{d}(\mathrm{x}_3) = 12^*$, $\mathrm{d}(\mathrm{x}_6) = 12^*$, $\tilde{x} = x_3$, $\tilde{x} = x_6$.

6) $d(\mathrm{x}_7) = \min\{\infty; 12^* + 11; 10^* + 14; 12^* + 9\} = 21$. Вершині x_7 присвоюється постійна мітка $\mathrm{d}(\mathrm{x}_7) = 21^*$, $\tilde{x} = x_7$.

Етап 2.

Проводимо послідовний пошук дуг найкоротшого шляху.

Вершині $\tilde{x} = x_7$ передують вершини $\tilde{s} = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Найкоротшу відстань отримуємо при проходженні по дузі $(\mathrm{x}_6; \mathrm{x}_7)$.

Вершині $\tilde{x} = x_6$ передують вершини $\tilde{s} = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$. Найкоротшу відстань отримуємо при проходженні по дузі $(\mathrm{x}_1; \mathrm{x}_6)$.

Таким чином, найкоротший шлях від вершини x_1 до вершини x_7 побудований. Його довжина (вага) рівна 21, тобто $d_{\min} = 21$, а сам шлях утворює наступну послідовність дуг $(x_1; x_6) - (x_6; x_7)$.

Алгоритм Флойда-Уоршелла – алгоритм для знаходження найкоротших відстаней між усіма вершинами зваженого орієнтованого графа. Розроблений в 1962 році Робертом Флойдом і Стівеном Уоршеллом.

Нехай вершини графа $G = (V, E)$ пронумеровані від 1 до n і введено позначення d_{ij}^{k} для довжини найкоротшого шляху від i до j, який окрім самих вершин i, j проходить тільки через вершини 1,…, k. Очевидно, що d_{ij}^{0} – довжина (вага) ребра (i, j), якщо воно існує (в іншому разі його довжина може бути позначена як ∞).

Існує два варіанти значення d_{ij}^{k}, $k \in (1,...,n)$:

1. Найкоротший шлях між i, j не проходить через вершину k, тоді

$$d_{ij}^{k} = d_{ij}^{k-1}.$$

2. Існує більш короткий шлях між i та j, що проходить через k, який спочатку йде від i до k, а потім від k до j. У цьому випадку, очевидно, $d_{ij}^{k} = d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}$.

Таким чином, для знаходження значення функції досить вибрати мінімум з двох позначених значень.

Тоді рекурентна формула для d_{ij}^{k} має вигляд:

$$d_{ij}^{k} = \min(d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}),$$

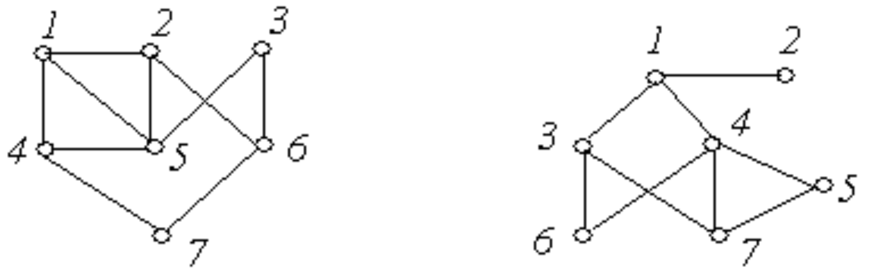
d_{ij}^{0} – довжина ребра (i, j).

Алгоритм Флойда-Уоршелла послідовно обчислює всі значення d_{ij}^{k}, для всіх i, j при k від 1 до n. Отримані значення d_{ij}^{n} є довжинами найкоротших шляхів між вершинами i, j. На кожному кроці алгоритм генерує матрицю W, $w_{ij} = d_{ij}^{k}$. Матриця W містить довжини найкоротших шляхів між усіма вершинами графа. Перед роботою алгоритму матриця W заповнюється довжинами ребер графа.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити відстані від зазначеної вершини до всіх вершин графа G, зображеного на рис. 4.30 (а – г):

а) від вершини 5; б) від вершини 2;



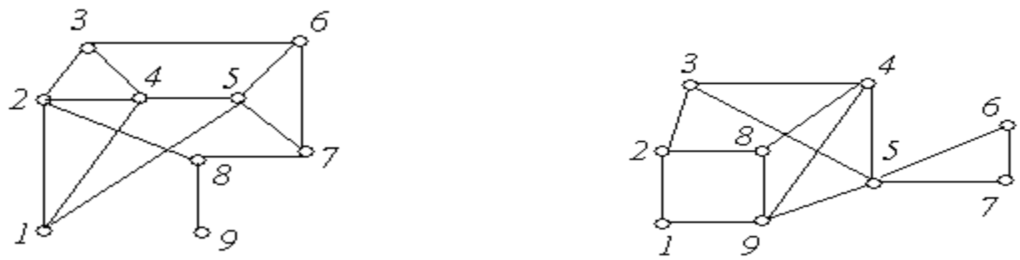
(а) (б)

в) від вершини 6; г) від вершини 3.

(в) (г)

Рис. 4.30.

2. Визначити центр, периферійні точки, радіус, діаметр графа G, зображеного на рис. 4.31 (а, б):



(а) (б)

Рис. 4.31.

4.5. Ейлерів цикл. Ейлерів граф

Теорія графів бере свій початок з розв’язання видатним математиком Ейлером у 1736 р. задачі про кенігсбергські мости. Вона виникла в пруському містечку Кенігсберг на річці Прегель. Жителі Кенігсберга полюбляли гуляти по доріжках, які включають сім мостів через річку. Людей цікавило питання, чи можуть вони, почавши шлях з однієї ділянки суші, обійти всі мости по черзі за одну ходу і повернутися в початок шляху, не перепливаючи річку. План розташування семи мостів у Кенігсберзі наведений на рис. 4.32.

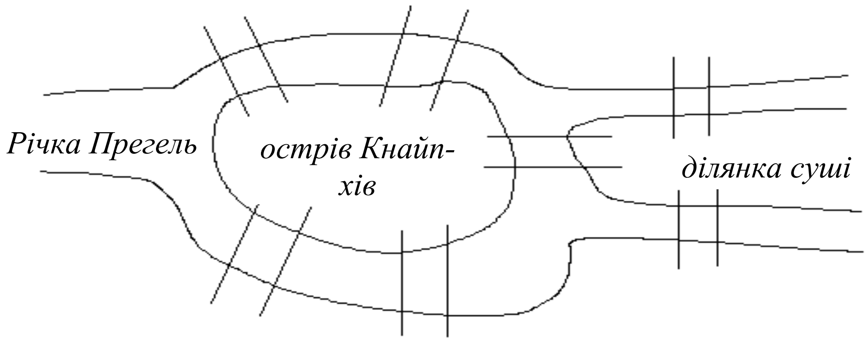


Рис. 4.32.

Ейлер замінив план міста графом (рис. 4.33), у якому ділянки суші зобразив як вершини, а мости, що їх з'єднують – як ребра.

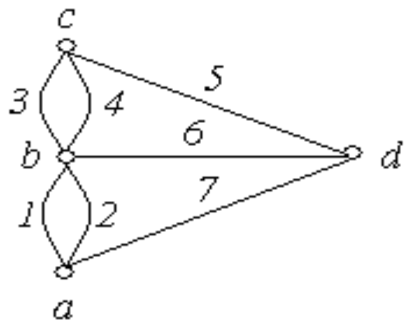


Рис. 4.33.

Для того, щоб відповістити на поставлене запитання, дамо ряд визначень.

Визначення 4.39. *Ейлеровим циклом* називається цикл, що містить всі ребра графа.

Ейлерів цикл можна вважати як слід олівця, що вимальовує граф, не відриваючись від паперу. Відшукання ейлерових циклів пов'язане з рядом прикладних задач. Наприклад, при перевірці дорожньої мережі необхідно по кожній дорозі досліджуваної мережі проїхати тільки один раз і повернутися у вихідний пункт. Очевидно, що такі цикли існують не в будь-якому графі.

Визначення 4.40. *Ейлеровим графом* називається граф, що містить ейлерів цикл.

Теорема Ейлера. Неорієнтований граф ейлерів тоді і тільки тоді, коли він зв'язний і степінь всіх його вершин парна (при підрахунку степеня вершини, будь-яку інцидентну їй петлю вважати двічі).

Доведення:

Необхідність. Якщо граф G містить ейлерів цикл C, то будь-які дві його вершини належать цьому циклу; граф зв'язний. Якщо при обході циклу C деяка вершина a зустрічається k разів, то ми k разів входимо і виходимо з неї (щораз по різних ребрах). Отже, степінь вершини a дорівнює $2k$.

Достатність. Нехай граф G – зв'язний і степінь будь-якої його вершини парна (рис. 4.34). Нехай a_1 – деяка вершина графа, a_i – суміжна їй вершина. Цій вершині a_i інцидентне хоча б одне ребро (a_i, a_j), відмінне від (a_1, a_i), вершині a_j – ребро, відмінне від (a_i, a_j), і т.д.

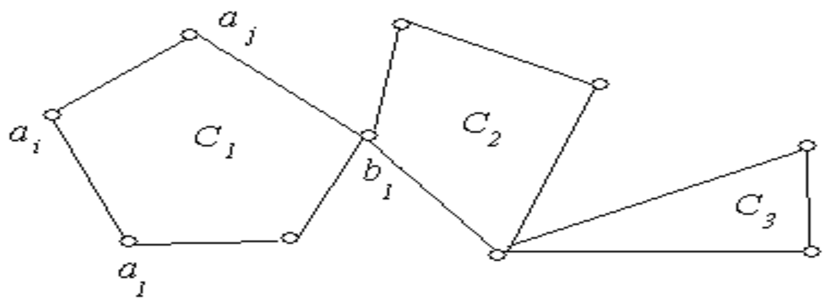


Рис. 4.34.

Побудуємо із цих ребер ланцюг, позначаючи їх і не повторюючи вже пройдені. Граф G скінченний, то цей ланцюг повинен закінчитися в деякій вершині a_2. Число ребер, інцидентних вершині a_2, парне. Якби a_2 була відмінною від a_1, ланцюг необхідно було би продовжити. Отже, $a_1 = a_2$. Ми побудували цикл C_1. Якщо в графі G залишилися невідмічені ребра, то оскільки G зв'язний, серед них найдеться хоча б одне, інцидентне якій-небудь вершині b_1 в циклі C_1. Починаючи з вершини b_1, ми можемо побудувати, як і раніше, цикл C_2 із ребер, що не ввійшли в C_1. З C_1 і C_2 можна скласти новий цикл, що проходить із a_1 у b_1 по C_1, потім уздовж усього циклу C_2 і по частині циклу C_1, що залишилася від b_1 до a_1. Оскільки граф G скінченний, то після скінченного числа кроків ми одержимо ейлерів цикл.

Отже, ми готові відповістити на запитання жителів Кенігсберга. Для цього підрахуємо степені вершин графа, побудованого Ейлером (рис. 4.33):

$$\deg(a) = 3;\ \deg(b) = 5;\ \deg(c) = 3;\ \deg(d) = 3.$$

Цей граф має непарні степені вершин. Отже, цей граф не має ейлерового циклу. Тобто, неможливо пройти кожен міст по черзі за одну ходу і повернутися у вихідну точку шляху.

Приклад 4.19. Чи мають графи, зображені на рис. 4.35 (а, б), ейлерів цикл.

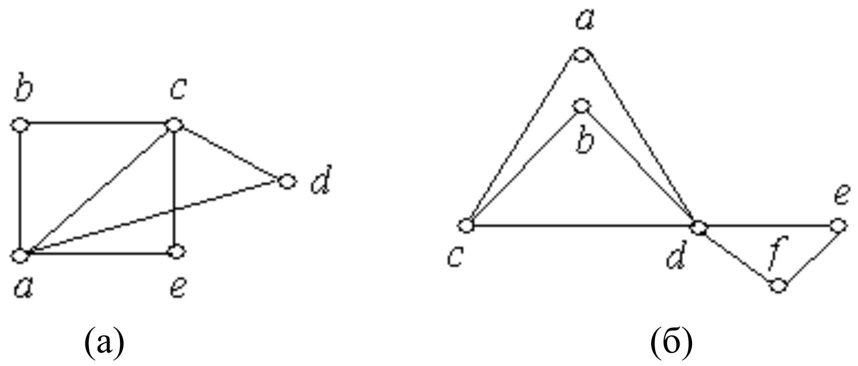


Рис. 4.35.

Розв'язання: Щоб відповістити на поставлене запитання, порахуємо степені вершин графа: а) $\deg(a) = 4$; $\deg(b) = 2$; $\deg(c) = 4$; $\deg(d) = 2$; $\deg(e) = 2$

Степені всіх вершин графа, зображеного на рис. 4.35, а, парні, отже, граф має ейлерів цикл;

б) $\deg(a) = 2$; $\deg(b) = 2$; $\deg(c) = 3$; $\deg(d) = 5$; $\deg(e) = 2$; $\deg(f) = 2$.

Степені вершин c і d графа, зображеного на рис. 4.35, б, непарні, отже, граф не має ейлерового циклу.

Що стосується кенігсбергських мостів, можна задати інше питання: "чи можливо пройти кожен міст по одному разі і не обов'язково повертатися у вихідну точку маршруту?" Відповідь на це питання жадає від нас знання наступного визначення і теореми.

Визначення 4.41. Шлях, що включає кожне ребро графа G тільки один раз, називається е*йлеровим шляхом*. У тому випадку, якщо ейлерів шлях не є ейлеровим циклом, він називається *власним ейлеровим шляхом,* а граф G – напівейлеровим.

Наслідок. Граф G має власний ейлерів шлях тоді і тільки тоді, коли він зв'язний і рівно дві його вершини мають непарний степінь.

Оскільки граф для задачі про кенігсбергські мости має чотири вершини з непарними степенями, то можна зробити висновок про те, що даний граф не має власного ейлерового шляху, а отже, неможливо пройти кожен міст один раз, навіть якщо не потрібно повертатися у вихідну точку маршруту.

Так, наприклад, граф, зображений на рис. 4.35, б, не має ейлеревого циклу, але має власний ейлерів шлях, тому що дві його вершини мають непарний степінь.

Алгоритм побудови ейлеревого циклу:

1) вибираємо довільну вершину $a \in V$;

2) будуємо довільний ланцюг P з початком у вершині „a". Оскільки локальні степені всіх вершин графу є парні, то ланцюг може завершитись тільки в „a" (тобто він є циклом);

3) якщо $P(a, a)$ містить не всі ребра графа G, то будуємо граф $G_1 = G - P(a, a)$, в якому всі вершини мають теж парний локальний степінь. Оскільки граф G є зв'язним, то серед вершин $P(a, a)$ має знайтись вершина „b", яка зв'язана ребром хоча б з однією вершиною графа G (інакше граф G був би незв'язним);

4) будуємо з ребер графа G_1 ланцюг P', що починається у вершині „b" і може закінчуватись тільки у „b"; з ланцюгів P і P' будуємо новий цикл:

$$P_1(a, a) = P(a, b) \cup P'(b, b) \cup P(b, a);$$

5) якщо $P_1(a, a)$ не містить всіх ребер графа G, то за аналогією з кроком 3) будуємо граф $G_2 = G - P_1(a, a)$ і т.д.

З огляду на скінченність графа цей процес зупиниться, коли всі ребра графа G будуть вичерпані.

Приклад 4.20.

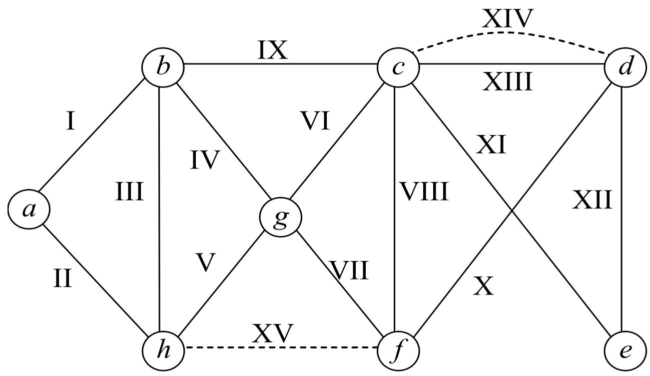


Рис. 4.36.

Степені вершин графа:

Вершина	a	b	c	d	e	f	g	h
Степінь	2	4	5	3	2	3	4	3

Таким чином, $k = 4$. З'єднаємо ребрами вершини (c, d) та (f, h) (на рис. 4.36 ці ребра позначені штриховими лініями).

Поетапно побудуємо для утвореного графа цикл Ейлера:

а) P_1 = (I, III, II);

б) P_2 = (I, IX, VI, IV, III, II);

в) P_3 = (I, IX, XIII, XII, XI, VI, IV, III, II);

г) P_4 = (I, IX, XIV, X, VIII, XIII, XII, XI, VI, IV, III, II);

д) P_5 = (I, IX, XIV, X, VIII, XIII, XII, XI, VI, VII, XV, V, IV, III, II).

Віднімаючи додані раніше ребра XIV і XV, отримаємо три ланцюги:

1) (I, X); 2) (X, VIII, XIII, XII, XI, VI, VII); 3) (V, IV, III, II).

Зауважимо, що перший і третій ланцюги мають спільний кінець – вершину „a”. „Склеюючи” ці ланцюги, отримаємо остаточно:

1) (V, IV, III, II, I, IX); 2) (X, VIII, XIII, XII, XI, VI, VII).

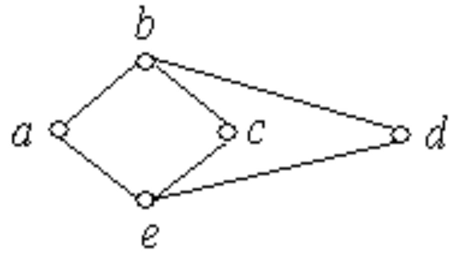
Для орієнтованих графів має місце

Твердження. Нехай G – орієнтований зв’язний граф. Граф G містить ейлерів цикл тоді і тільки тоді, коли у кожну вершину v входять стільки ж ребер, скільки і виходить.

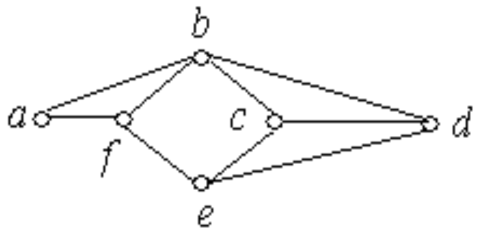
Завдання длясамостійної роботи

1. Серед наведених нижче графів знайти ті, які мають ейлерів цикл. Обґрунтувати відповідь.

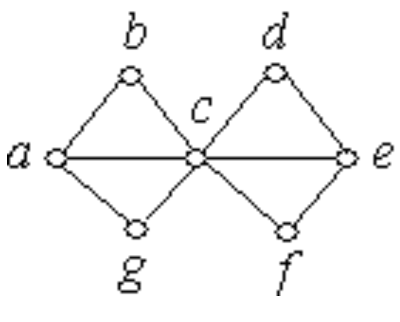
а)



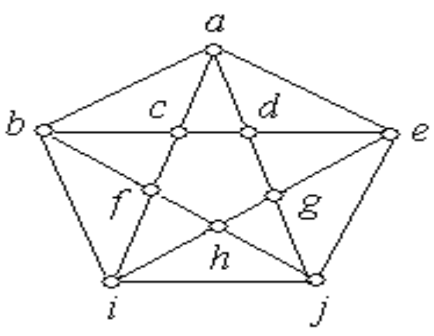
б)



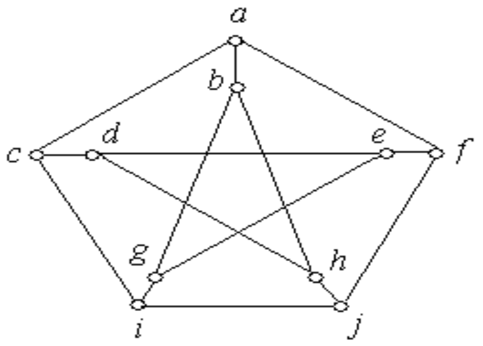
в)



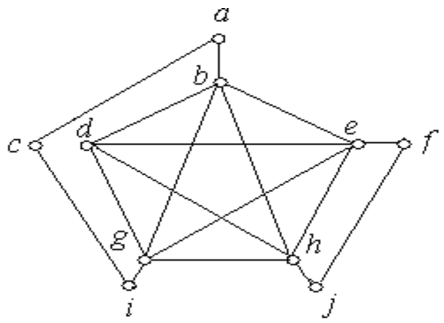
г)



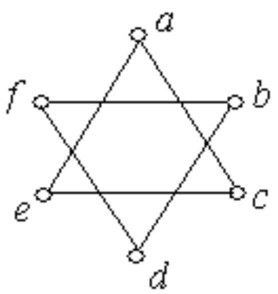
д)



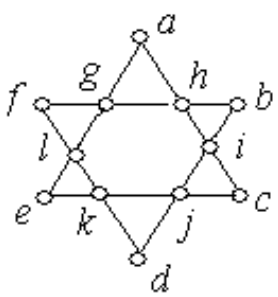
е)



ж)



з)



і)

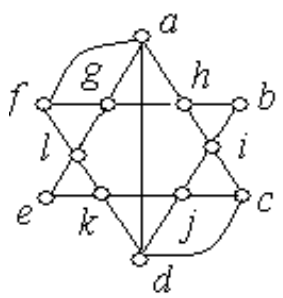
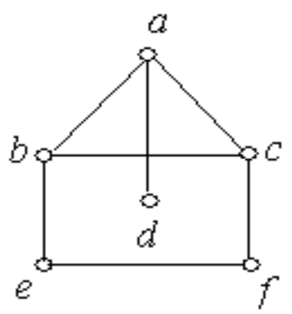


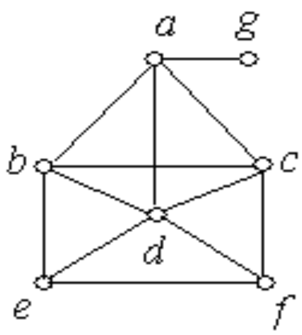
Рис. 4.37.

2. Серед наведених нижче графів знайти ті, які мають власний ейлерів шлях. Обґрунтувати відповідь.

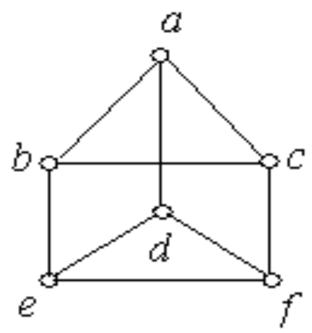
а)



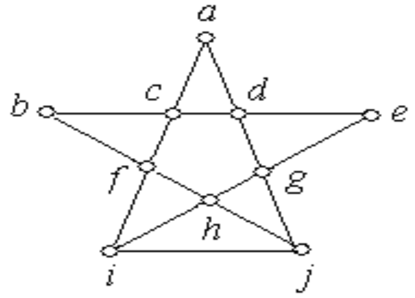
б)



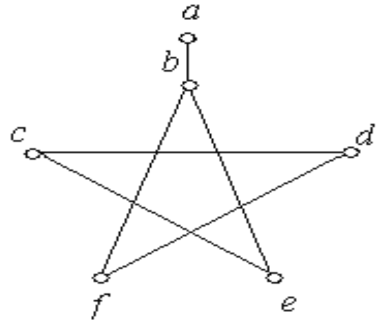
в)



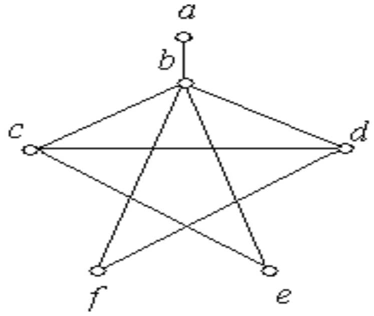
г)



д)



е)



ж) з) і)

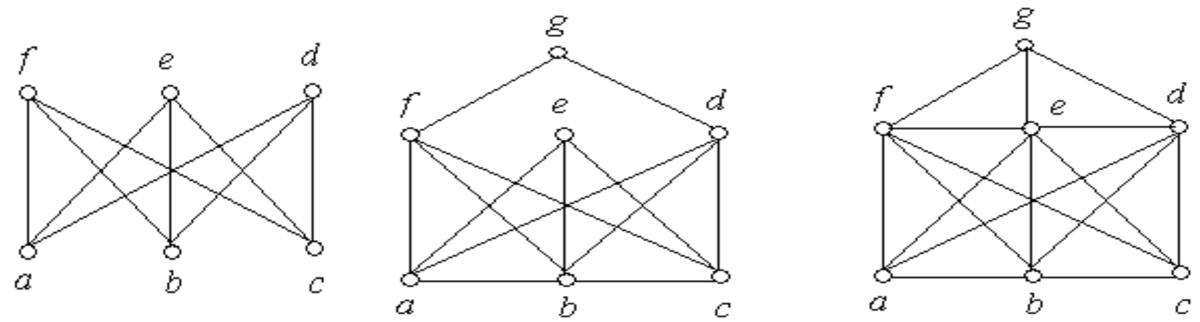


Рис. 4.38.

3. Побудувати графи, що містять ейлерів цикл. Обґрунтувати розв’язання.

4. Побудувати графи, що містять власний ейлерів шлях. Обґрунтувати розв’язання.

4.6. Шляхи і цикли Гамільтона

В 1859 році ірландський математик У. Гамільтон придумав іграшку-головоломку. Ця іграшка являла собою додекаедр – правильний многогранник, 12 граней якого − це правильні п'ятикутники. У кожному з 20 кутів просвердлювалась дірка, у яку вставляли кілочок, що зображував місто. За допомогою мотузки було потрібно знайти шлях через міста, відвідати кожне місто один раз і повернутися у вихідне місто. Додекаедр на площині зображується так, як показано на рис. 4.39.

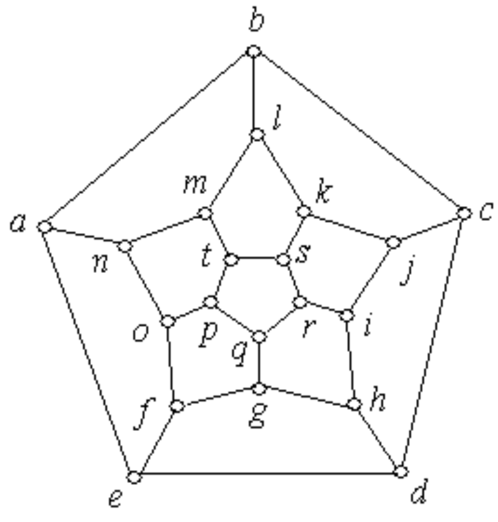


Рис. 4.39.

Задача головоломки зводиться до знаходження циклу в графі, що проходить через кожну вершину, крім початкової, тільки один раз.

Визначення 4.42. *Шляхом Гамільтона* (або *гамільтоновим ланцюгом*) називається простий ланцюг, що проходить через всі вершини графа, з початком і кінцем у різних вершинах $v', v'' \in G$.

Визначення 4.43. *Цикл Гамільтона* – це простий цикл, що проходить через всі вершини графа G.

Гамільтонів цикл у деякому змісті протилежний ейлеровому циклу, що проходить через всі ребра один раз, хоча до певного моменту обидва цикли можуть здаватися схожими. Цикл Гамільтона виявляється набагато складніше і для його знаходження поки немає ефективних алгоритмів, що вимагають істотно меншого часу, ніж пряме перебирання варіантів. Проте приведемо ряд теорем без доведення, що дозволяють нам судити про можливість відшукати гамільтонів цикл у досліджуваному графі. А для початку покажемо один з варіантів розв'язання головоломки, запропонованої Гамільтоном (рис. 4.40).

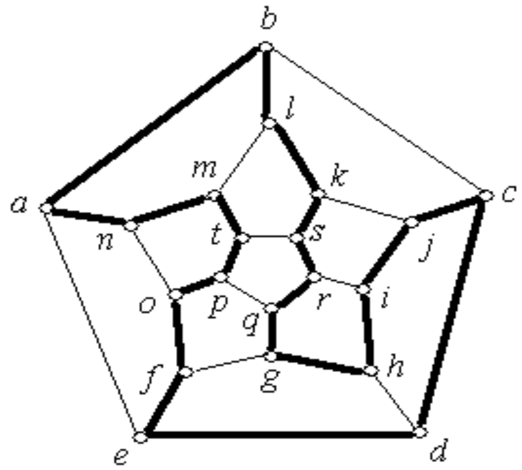


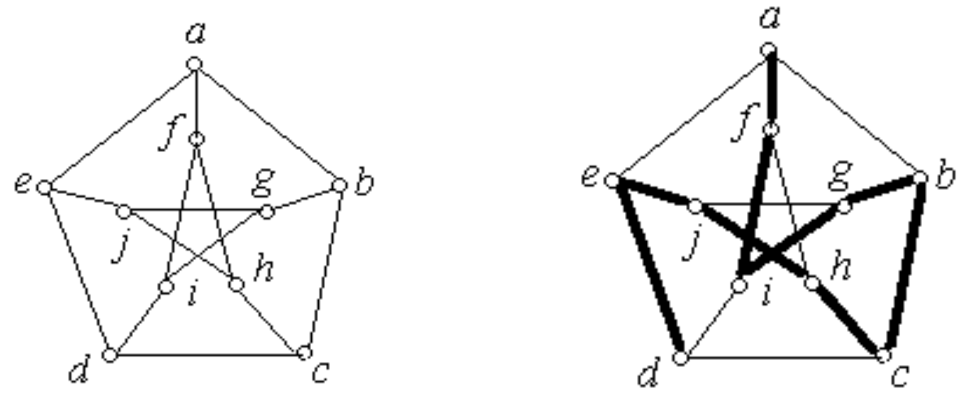
Рис. 4.40.

Теорема 4.5. Для будь-якої вершини із циклу Гамільтона існує рівно два ребра із цього циклу, інцидентні даній вершині.

Визначення 4.44. Граф, що має цикл Гамільтона, називається *гамільтонів*.

Виходячи з наведеного визначення, як наслідок теореми 4.5, робимо висновок про те, що будь-який граф, що має вершину степені 1 не є гамільтонів. Помітимо також, що для того, щоб граф мав цикл Гамільтона, необхідно, щоб він був зв'язним.

Приклад 4.21. Граф Петерсена, зображений на рис. 4.41, а, має шлях Гамільтона (рис. 4.41, б), але не має циклу Гамільтона.



(а) (б)

Рис. 4.41.

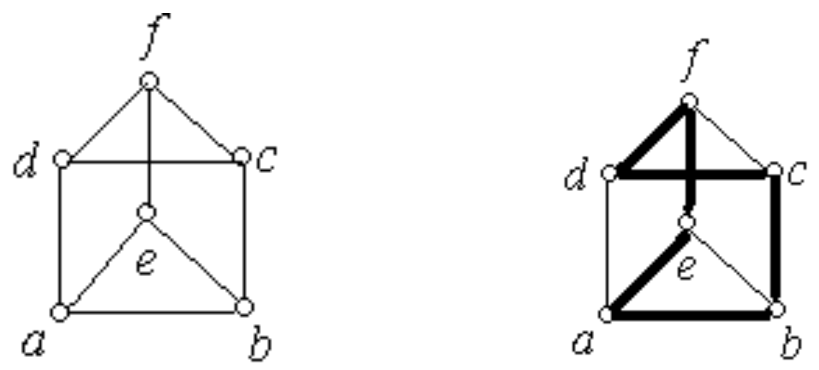
Теорема 4.6. Якщо граф G має ребро розрізу, то він не може мати цикл Гамільтона. Якщо компоненти графа, отримані шляхом видалення ребра розрізу, мають цикл Гамільтона, то граф G має шлях Гамільтона.

Теорема 4.7. Якщо G – зв'язний граф з n вершинами $(n \geq 3)$ і для кожної пари несуміжних вершин $v', v'' \in V$ сума степенів вершин задовольняє умові $\deg v' + \deg v'' \geq n$, тоді граф G має цикл Гамільтона.

З теореми 4.7 випливає наслідок, більш відомий, ніж сама теорема.

Наслідок (теорема Дірака). Якщо G – зв'язний граф з n вершинами $(n \geq 3)$ і для кожної вершини $v \in V$ виконується умова $\deg v \geq \dfrac{n}{2}$, то граф G має цикл Гамільтона.

Приклад 4.22. Знайдіть цикл Гамільтона, якщо він існує, для графа G, зображеного на рис. 4.42, а.



(а) (б)

Рис. 4.42.

Розв'язання: Граф G – зв'язний, кількість вершин графа – $\text{n} = 6$. Степінь кожної з вершин дорівнює 3, тобто кожна з вершин графа задовольняє умові

$\deg v \geq \frac{n}{2}$. Отже, даний граф є гамільтонів, тобто існує цикл Гамільтона. Знайти його можемо тільки методом перебору. Результат прямого перебору – цикл $baefdcb$ (рис. 4.42, б).

Практичне застосування циклів Гамільтона знаходимо в розв'язанні класичної задачі комівояжера, яка цікава для людей, у чиє коло обов'язків входить знаходження оптимальних шляхів, наприклад, об'їзду філій фірми, транспортування вантажів, доставки товарів і інше.

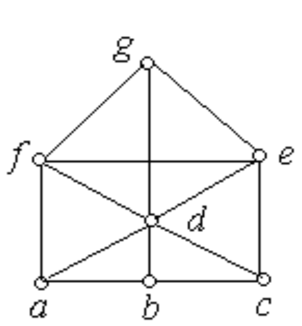
Задача комівояжера. Комівояжер повинен відвідати кілька міст і повернутися у вихідний пункт. Відстані між містами відомі. Потрібно знайти дорогу найкоротшої довжини. При такій постановці задачі схема доріг − це граф, у якому кожному ребру v запропонована певна довжина $\mathrm{d}(v)$. Задача комівояжера зводиться до знаходження в отриманому графі із заданими довжинами ребер циклу Гамільтона C мінімальної довжини.

Існує ряд алгоритмів досить громіздких, що дозволяють знаходити найкоротший шлях від вершини v' до вершини v'', таких як алгоритми Дейкстри, Флойда-Уоршолла, метод гілок і меж, метод генетичних алгоритмів, а так само алгоритм мурашиної колонії і т.п. Але ці алгоритми не є ефективними для графів великих об’ємів і тому часто використовують наближені алгоритми, що використовують евристики.

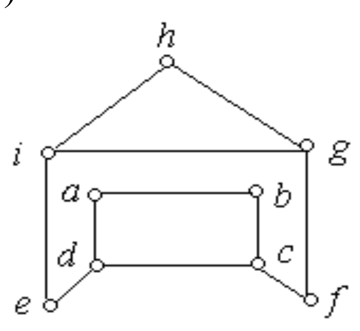
Задачі для самостійної роботи

1. Знайдіть цикл Гамільтона, якщо він існує, для кожного з наведених графів рис. 4.43, а) − е).

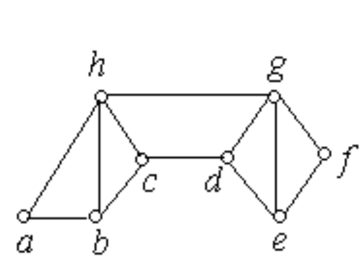
а)



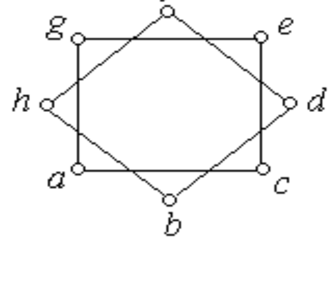
б)



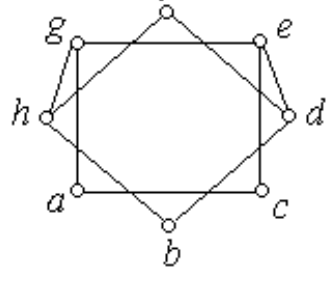
в)



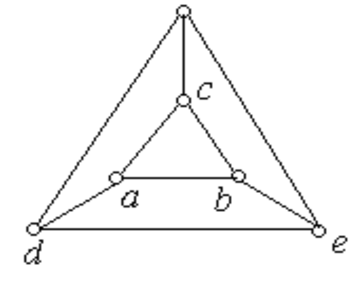
г)



д)



е)



ж) з) к)

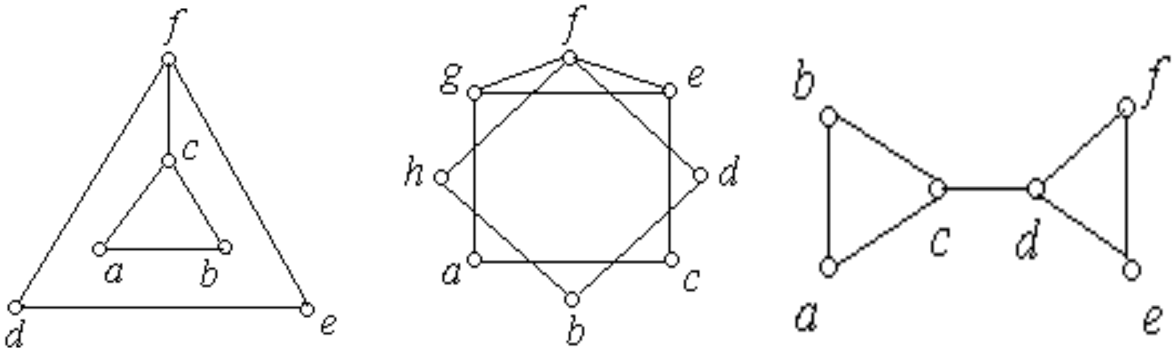


Рис. 4.43.

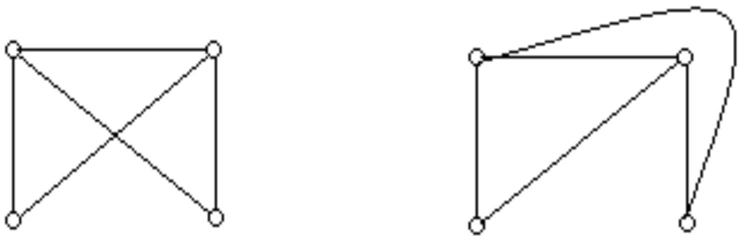
2. Знайдіть шлях Гамільтона, якщо він існує для кожного з наведених графів рис. 4.43, ж) – к).

4.7. Планарні графи

Визначення 4.45. Граф G називається *правильно укладеним на площині або плоским*, якщо його графічне подання таке, що ребра графа перетинаються тільки в його вершинах.

Визначення 4.46. Граф G називається *планарним*, якщо він ізоморфний деякому плоскому графу G^*.

Приклад 4.23. Графи G_1 і G_2, подані на рис. 4.44, ізоморфні. Граф G_2 – правильно укладений на площині. Отже, дані графи − плоскі.



G_1 G_2

Рис. 4.44.

Розглянемо граф як рисунок на аркуші паперу. Якщо граф планарний, тобто нарисований так, що його ребра не перетинаються і його необхідно розрізати уздовж ребер, то граф виявиться розділеним на частини, включаючи зовнішню частину. Такі частини називаються *гранями*. Границя кожної грані є циклом.

Визначення 4.47. *Гранню планарного графа* називається така максимальна ділянка площини, що будь-які дві її точки можуть бути з'єднані кривою, що не перетинає ребро графа.

Задача про можливості правильного укладання графа на площині є актуальною у зв'язку з використанням у радіотехніці друкованих схем. Інтегральні мікросхеми складаються із шарів мініатюрних мікросхем, удрукованих у пластину. Ці схеми наносяться на ізолятор у друкований спосіб і перетин яких-небудь двох провідників у непередбачуваних точках (не у вершинах графа), привело б до їх замикання. Тобто для друкування електричних схем просто необхідно, щоб графи (що їх зображують) були плоскими.

Задачі, пов'язані із планарними графами, актуальні не тільки в радіотехніці. Приведемо класичну задачу про три міста і три джерела постачання. Нехай є три міста x_1, x_2 і x_3 і три джерела життєзабезпечення: водонапірна башта y_1, електростанція y_2 і станція магістрального газопроводу y_3. Чи можна з'єднати ці міста із джерелами постачання водою, газом і електрикою так, щоб траншеї, прориті для цих ліній (на одній глибині) не перетиналися?

Ця задача зводиться до побудови плоского графа, ізоморфного графу, зображеному на рис. 4.45.

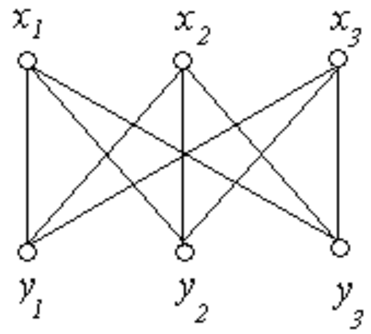


Рис. 4.45.

Відповідь на питання, поставлене у сформульованій задачі, негативна. Завжди можна нарисувати 8 ліній, що попарно не перетинаються, а дев'ята обов'язково перетне одну із цих восьми.

Доведення неможливості такої побудови спирається на теорему, доведену Жорданом. Проілюструємо її в такий спосіб. Нехай L − неперервна замкнута лінія без самоперетинів (рис. 4.46). Ця лінія ділить площину на дві частини: зовнішню і внутрішню. Будь-які дві точки x і y із внутрішньої і зовнішньої частин відповідно можна з'єднати тільки лінією, що перетинає L.

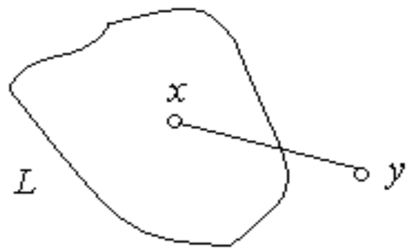


Рис. 4.46.

Позначимо граф, зображений на рис. 4.47 як K_{33}. Замінимо граф K_{33} йому ізоморфним (рис. 4.47).

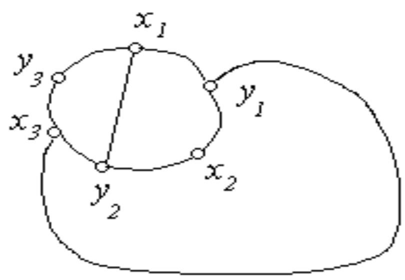


Рис. 4.47.

З'єднати вершини x_2 і y_3 без перетинання вже проведених ребер неможливо, тому що точка x_2 лежить усередині області, обмеженої кривою $x_1y_1x_3y_2x_1$, а точка y_3 – поза зазначеної області. Отже, граф K_{33} не є планарним.

Аналогічно доводиться непланарність повного графа K_5 (рис. 4.48).

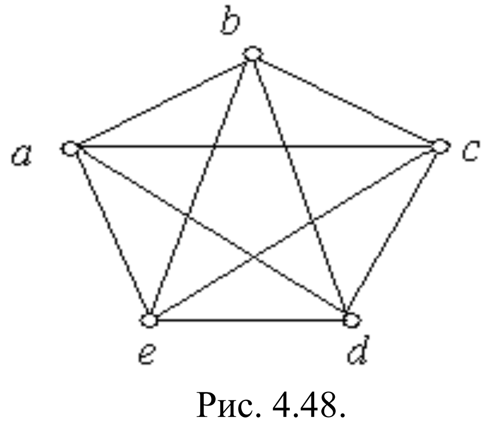


Рис. 4.48.

Використовуючи графи K_{33} і K_5, можна сформулювати наступний критерій планарності графів.

Теорема 4.7. (Теорема Куратовського). Граф є планарним тоді і тільки тоді, коли він не містить підграф, ізоморфний графу K_{33} або K_5.

Існують й інші критерії планарності графів.

Теорема 4.8. Якщо G - зв'язний планарний граф, що містить v вершин, e ребер і f граней, то повинна виконуватися умова $v-e+f=2$.

За допомогою теореми 4.8 задача про життєзабезпечення трьох будинків (рис. 4.45) вирішується в такий спосіб. У графа K_{33} шість вершин і дев'ять ребер: $v=6$, $e=9$, а кількість граней − $f=2$. Підставимо в умову $v-e+f=6-9+2=-1\neq 2$. Умова теореми 4.8 не виконується. Отже, граф $K_{33}-$ не планарний.

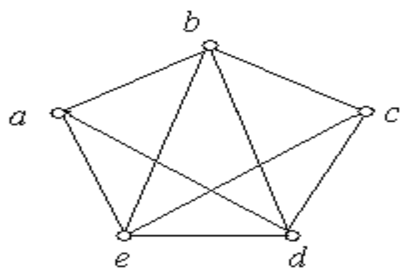
Лема 4.1. У довільному планарному графі G з кількістю вершин не менше трьох має місце нерівність $3v-e\geq 6$.

За допомогою леми 4.1 доведемо, що граф K_5 не планарний. Граф K_5 має п'ять вершин і десять ребер: $v=5$, $e=10$. Скористаємося умовою $3v-e=3\cdot 5-10=5<6$. Як бачимо, умова $3v-e\geq 6$ для графа K_5 не виконана, отже, граф K_5 не планарний.

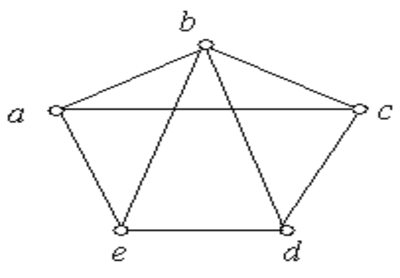
Задачі для самостійної роботи

1. Кожний з наведених на рис. 4.49, а) − і) графів перевірити на планарність. Аргументувати розв’язання.

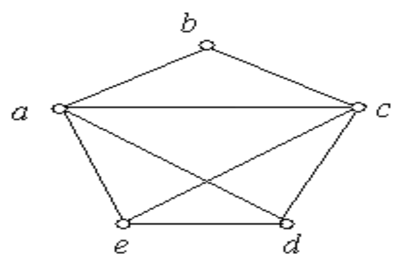
а)



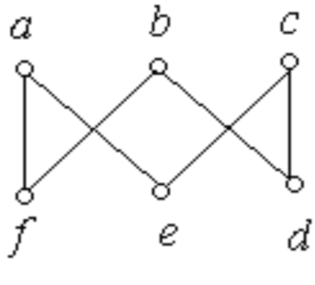
б)



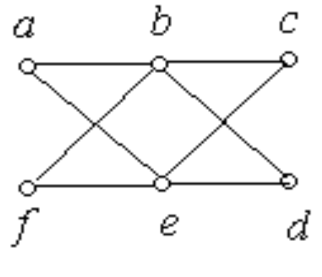
в)



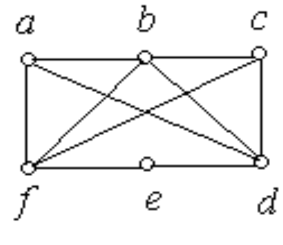
г)



д)



е)



ж) з) і)

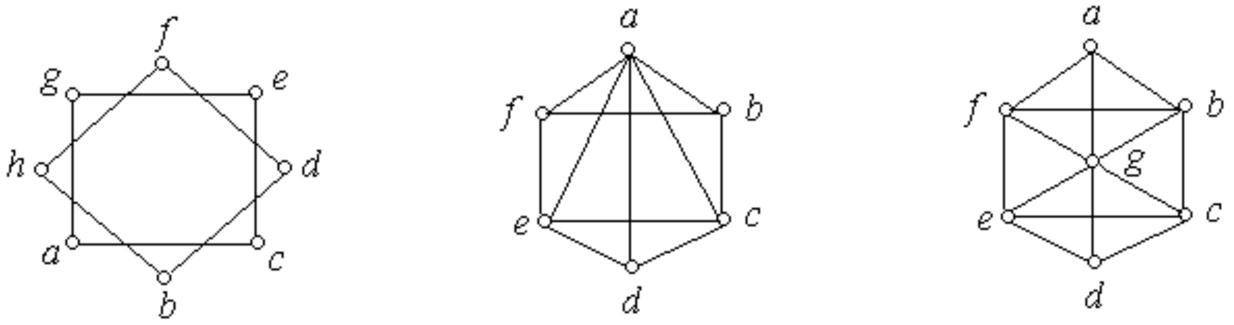


Рис. 4.49.

2. Для кожного планарного графа із завдання 1 запропонувати правильне укладання його на площині.

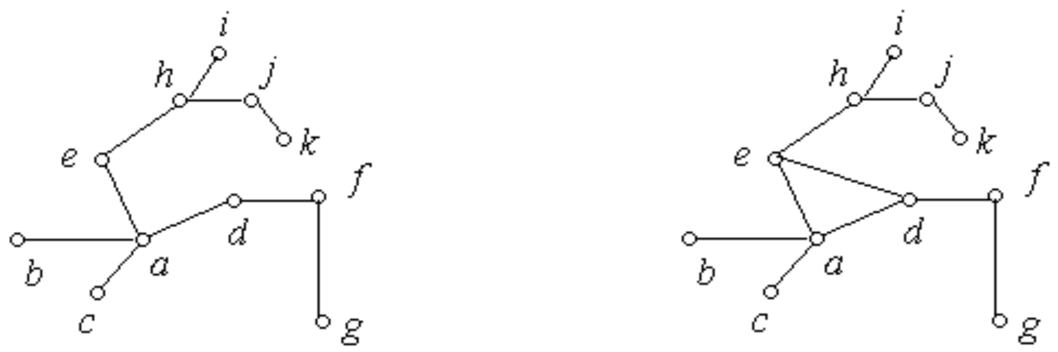
3. Для кожного планарного графа із завдання 1 перевірити виконання умови $v - e + f = 2$.

4.8. Дерева і ліс

Визначення 4.48. *Неорієнтованим деревом* (або просто *деревом*) називається неорієнтований зв'язний граф без циклів, отже без петель і кратних ребер, що має не менше двох вершин.

Дерево є мінімальним зв'язним графом у тому розумінні, що видалення хоча б одного ребра приводить до того, що граф виявляється незв'язним.

Приклад 4.24. Чи є графи, зображені на рис. 4.50, (а, б) деревами?



(а) (б)

Рис. 4.50.

Розв'язання: Граф на рис. 4.50, а є деревом, тому що він зв'язний і не містить циклів. Граф на рис. 4.50, б не є деревом, тому що містить цикл $adea$.

Сформулюємо без доведення ряд теорем, корисних для вивчення дерев. Читач може довести їх самостійно.

Теорема 4.9. Будь-яке дерево G з n вершинами містить $n-1$ ребро.

Теорема 4.10. Нехай G – граф, що містить більше однієї вершини. Видаляючи його ребра можна одержати дерево тоді і тільки тоді, коли він зв'язний.

Визначення 4.49. *Лісом* називається незв'язний неорієнтований граф без циклів. Зв'язні компоненти лісу є деревами.

Приклад 4.24. На рис. 4.51 наведений приклад лісу, що містить три дерева.

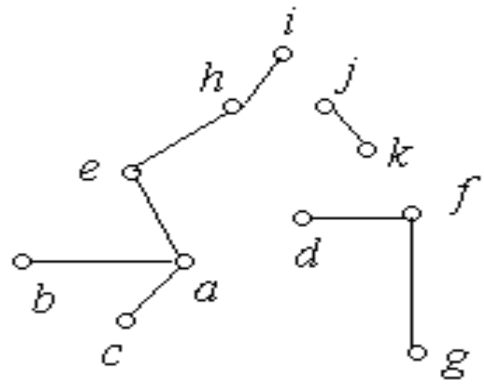


Рис. 4.51.

Добре зрозумілим прикладом дерева є: будь-яке генеалогічне дерево; організаційна структура будь-якого підприємства, організації.

Визначення 4.50. *Орієнтованим деревом* називається вільний від петель орієнтований граф, співвіднесений граф якого є деревом; тому якщо існує шлях від вершини v' до вершини v'', то він єдиний.

Зауважимо, що якщо в орієнтованому дереві є ребро (v', v''), то немає ребра (v'', v'), інакше шлях $v'v''v'$ був би циклом.

Приклад 4.25. На рис. 4.52 наведено приклад орієнтованого дерева:

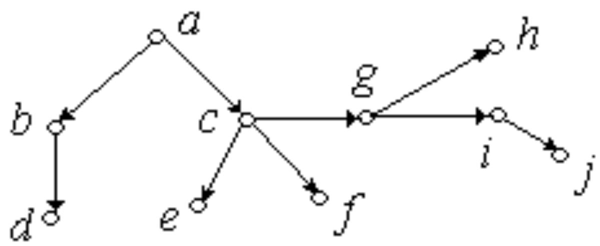


Рис. 4.52.

Визначення 4.51. Вершини дерева степеня 1 називаються *листками*, інші вершини – *внутрішніми вершинами.*

Наприклад, у дерева, зображеного на рис. 4.53, а, листя − це вершини c, b, g, i, k. Інші вершини є внутрішніми. Дерева визначаються такою властивістю: для будь-яких двох вершин v', v'' дерева T шлях з вершини v' до вершини v'' єдиний. І, навпаки, якщо для будь-яких двох вершин v', v'' графа G існує єдиний шлях з вершини v' до вершини v'', тоді граф G – дерево.

Припустимо, що дерево – це якийсь фізичний об'єкт, рухливий у вершинах. Його можна підвісити за кожну з вершин. Так, наприклад, якщо дерево, зображене на рис. 4.50, а підвісити за вершину e або d, то воно буде виглядати, як показано на рис. 4.53, а або на рис. 4.53, б.

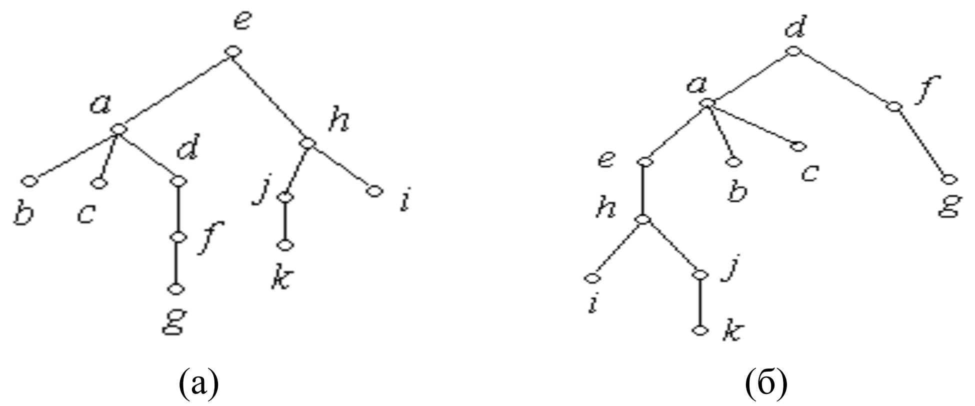


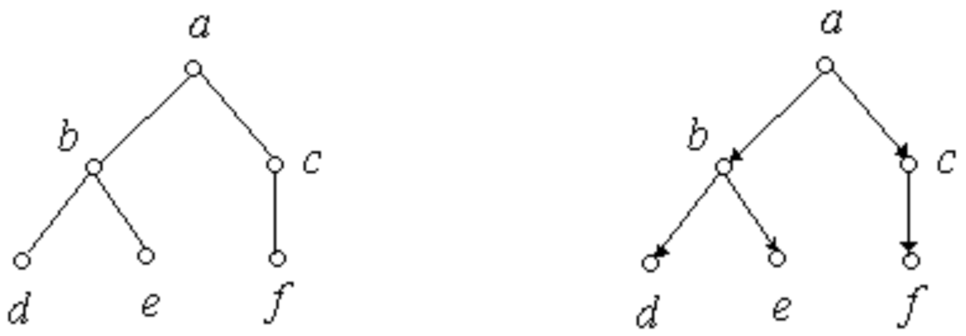
Рис. 4.53.

Обрана нами вершина називається *коренем* дерева і розташовується в самій верхній його частині. Для дерева на рис. 4.53, а коренем є вершина e, а для дерева на рис. 4.53, б – вершина d.

Визначення 4.52. Дерево, корінь якого визначений, називається *кореневим деревом*.

Аналогічно визначається і *орієнтоване кореневе дерево*. При цьому варто пам'ятати, що всі його ребра орієнтуються від кореня. При заміні кореневого неорієнтованого дерева T на кореневе орієнтоване дерево T' говорять, що T' є *породженим кореневим деревом* T.

Приклад 4.26. На рис. 4.54, а зображене неорієнтоване кореневе дерево, а на рис. 4.54, б – породжене ним орієнтоване кореневе дерево.



(а) (б)

Рис. 4.54

Якщо корінь дерева обраний, то можна ввести ще ряд визначень.

Визначення 4.53. *Рівнем вершини* v називається довжина єдиного шляху від кореня дерева до вершини v.

Визначення 4.54. *Висотою дерева* називається довжина самого довгого шляху від кореня дерева до листка.

Приклад 4.27. Для кореневого дерева, зображеного на рис. 4.55, визначити рівень вершини d, висоту дерева.

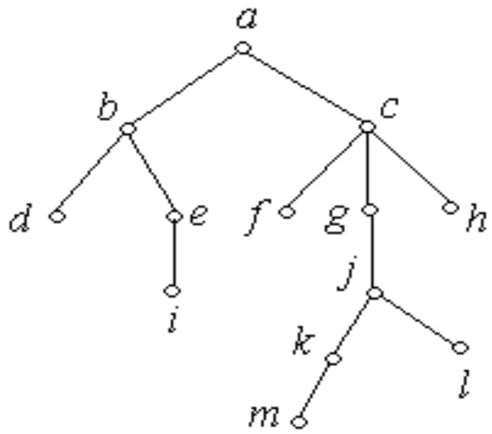


Рис. 4.55

Розв'язання: Рівень вершини d дорівнює двом; а висота дерева з коренем у вершині a дорівнює максимальному шляху від кореня до вершини $m - acgjkm$ і дорівнює п'яти.

Для генеалогічних дерев дамо ряд визначень. Їх можна поширити на будь-які орієнтовані кореневі дерева.

Визначення 4.55. Якщо існує орієнтоване ребро з u в v, то вершина u називається *безпосереднім попередником (предком)* вершини v, а вершина v – *безпосередньо підлеглою* вершині u *(нащадком)* або *безпосередньо досяжною з вершини* u.

Приклад 4.28. Визначити предків і нащадків кореневого орієнтованого дерева, зображеного на рис. 4.56

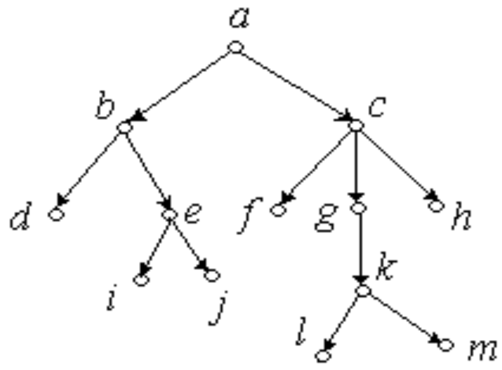


Рис. 4.56

Розв'язання:

Груп нащадків і предків можна виділити дуже багато, наведемо лише деякі приклади: d, e, i, j − нащадки b, отже, b − предок для d, e, i, j; l є нащадком c отже, c – предок l.

Ациклічна множина ребер, що поєднують усі вершини графа і загальна вага яких мінімальна, називається *мінімальним каркасним (або остовним) деревом.* Для побудови остовних дерев існують різні методи. Найбільш поширеними є два методи: метод пошуку в ширину і метод пошуку в глибину.

Згідно методу пошуку остовного дерева в ширину довільну вершину v_0 графа G вибираємо як корінь дерева T. Для кожної вершини v графа G, суміжної з вершиною v_0, в дерево T додається вершина v і ребро (v_0, v). Це вершини рівня 1. Потім беремо кожну вершину v_1 рівня 1 і для кожної вершини графа G v_j, суміжною з вершиною v_i з тих, що ще не обрані, додаємо в дерево T вершину v_j і ребро (v_i, v_j). Вершини, додані на цьому етапі, − це вершини рівня 2. Продовжуємо процес, поки в графі G не залишиться вершин, які можна було б додати в дерево. За побудовою T є деревом. Якщо відстань від v_0 до вершини v графа G рівно n, то ця вершина буде додана в дерево на рівні n. Отже, T безсумнівно, є остовне дерево. При пошуку в ширину насамперед відшукуються всі вершини, суміжні з заданою вершиною, а потім здійснюється перехід на наступний рівень. При пошуку в глибину зусилля спрямовані на побудову для дерева якомога довшого шляху.

Метод пошуку в глибину починається з завдання вершини графа, яку будемо вважати коренем. Вибираємо вершину v_i, суміжну з коренем, і формуємо ребро дерева. Потім вибираємо вершину v_j, суміжну з раніше вибраною вершиною v_i, і формуємо нове ребро. По ходу необхідно позначати використані вершини, щоб кожна вершина використовувалася один раз. Якщо, перебуваючи у вершині v, ми вибираємо іншу вершину w і виявляємо, що вершина w вже була додана в дерево, то ребро (v, w) між цими вершинами не може бути додане в дерево. Коли маємо вихідний граф, то само собою виникає питання: скільки можна побудувати остовних дерев для заданого графа з n вершинами? Відповідь на це питання дає теорема Келі, яка розглядає число остовних дерев для K_n.

Теорема Келлі. Число різних дерев, які можна побудувати на n вершинах, дорівнює n^{n-2}.

Якщо розглядати довільний граф, який відрізняється від повного, то ця формула не годиться для визначення числа остовних графів. В цьому випадку використовують теорему Кірхгофа. Перш ніж сформулювати теорему, спочатку визначимо *матрицю Кірхгофа* $K_{v\times v}=K(G)$ зв'язного графа G:

$$K(G) = k_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{якщо } v_i \text{ і } v_j \text{ суміжні}, \\ 0, & \text{якщо } v_i \text{ і } v_j \text{ не суміжні при } i \neq j, \\ d(v_i), & \text{якщо } i = j. \end{cases}$$

Теорема Кірхгофа. Число остовних дерев у зв'язному графі G порядку $n\geq 2$ дорівнює алгебраїчному доповненню довільного елемента матриці Кірхгофа $K(G)$.

Приклад 4.29. Знайти число остовних дерев даного графа.

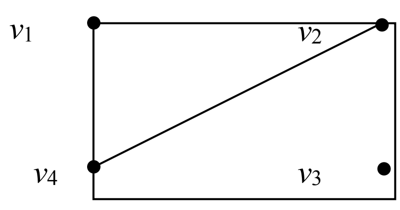


Рис. 4.57

Розв'язання: Спочатку складаємо для даного графа матрицю Кірхгофа.

$$K(G)=\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ v_2 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ v_4 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{array}.$$

Тепер знаходимо алгебраїчні доповнення, наприклад, для елемента k_{11} матриці Кірхгофа.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=18-1-1-2-3-3=8\,.$$

Перевіримо, наприклад, для елемента k_{23}.

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-1\cdot(-6-1+0+1-0-2)=8\,.$$

Отже, отримуємо, що даний граф має 8 остовних дерев.

Алгоритм Краскала – алгоритм побудови мінімального остовного дерева зваженого неорієнтованого графа. Алгоритм було вперше описано Джозефом Краскалом 1956 року. Візьмемо зважений зв'язний граф G=(V, E), де V – множина вершин, E – множина ребер, для кожного з яких задано вагу. Алгоритм Краскала починається з побудови виродженого лісу, що містить $|V|$ дерев, кожне з яких складається з однієї вершини. Далі виконуються операції об'єднання двох дерев, для чого використовують найкоротше можливе ребро, що не утворює цикл з обраними раніше ребрами, поки не утвориться єдине дерево. Це дерево і буде мінімальним кістяковим деревом.

Алгоритм Прима – алгоритм побудови мінімального остовного дерева. Алгоритм було вперше описано Примом в 1957 року і полягає в наступному:

1. Спочатку ребра сортують за зростанням ваги.
2. Додають найменше ребро в дерево.
3. Зі списку ребер із найменшою вагою вибирають таке нове ребро, щоб одна з його вершин належала дереву, а інша – ні.
4. Це ребро додають у дерево і знову переходять до кроку 3.
5. Робота закінчується, коли всі вершини будуть у дереві.

Приклад 4.30. Для даного заданого графа:

1) знайти число остовних дерев, використовуючи теорему Кірхгофа;

2) знайти мінімальне кореневе остовне дерево, використовуючи алгоритм Краскала або алгоритм Прима. Визначити висоту побудованого дерева.

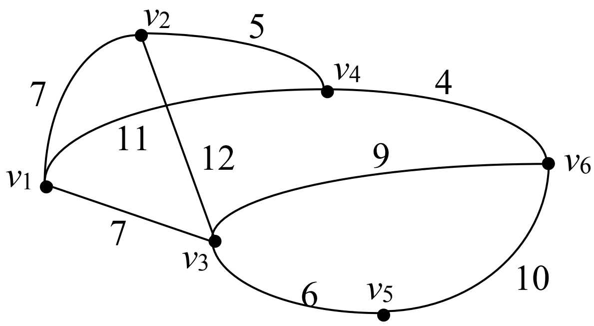


Рис. 4.58

Розв'язання: 1) Для того, щоб знайти число остовних дерев, спочатку складемо матрицю Кірхгофа.

$$K(G)=\left(\begin{array}{c|cccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \hline v_1 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_3 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ v_4 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ v_5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ v_6 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Знайдемо, наприклад, алгебраїчне доповнення елемента k_{11}.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=$$

=[четвертий і п'ятий рядок залишаємо,

третій множимо на (–1) і додаємо до другого,

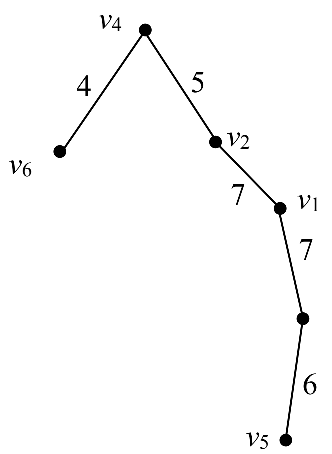
потім третій множимо на 3 і додаємо з першим]=

$$=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 8 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & \boxed{-1} & 3 \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 8 & 0 & -3 \\ 5 & -2 & 0 & -3 \\ -3 & -2 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$-1\cdot(-1)\cdot(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 8 & -3\\ 5 & -2 & -3\\ -3 & -2 & 5\end{vmatrix}=-1\cdot(10+72+30+18+6-200)=64\ .$$

Таким чином, для даного графа можна побудувати 64 остовних дерева.

2) Використаємо для побудови остовного дерева алгоритм Краскала. В графі вибираємо ребро з мінімальною вагою, тобто ребро, що з'єднує вершини v_4 і v_6 з вагою 4. Нехай, наприклад, вершина v_4 буде коренем дерева. Далі вибираємо ребра, інцидентні вершинам v_4, v_6, які мають мінімальну вагу. Таким є ребро з вагою 5, що з'єднує вершини v_4 і v_2. Включаємо його в дерево, яке будується. До вершини v_2 приєднуємо ребро з вагою 7, яке з'єднує вершини v_2 і v_1. До вершини v_1 приєднуємо ребро з вагою 7, яке з'єднує вершини v_1 і v_3. І на завершення, до вершини v_3 приєднуємо ребро з вагою 6, яке з'єднує вершини v_3 і v_5. Таким чином, отримуємо мінімальне остовне дерево. Вага побудованого дерева дорівнює 4+5+7+7+6=29.

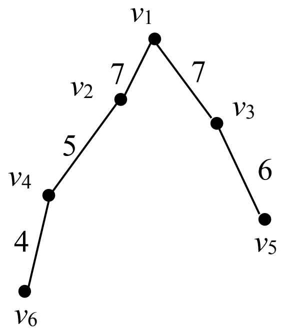


Оскільки ми в якості кореня дерева вибрали вершину v_4, то висота дерева буде рівна $h(T)$=4.

Зауваження. Якщо би в якості кореня вибрали вершину v_6, то висота дерева була би рівна $h(T)$=5.

Використаємо для побудови остовного дерева алгоритм Прима. Вибираємо вершину v_1, яка буде коренем дерева. Із трьох ребер, які інцидентні вершині v_1, вибираємо ті, що мають найменшу вагу. Два ребра з вагою 7 інцидентні вершині v_1. Приєднуємо ці ребра до вибраної вершини. До вершини v_2 приєднуємо ребро з вагою 5, яке з'єднує вершини v_2 і v_4. До вершини v_4 приєднуємо ребро з вагою

4, яке з’єднує вершини v_4 і v_6. До вершини v_3 приєднуємо ребро з вагою 6, яке з’єднує вершини v_3 і v_5. Таким чином, отримуємо наступне мінімальне кореневе дерево з вагою, рівною 7+7+6+5+4=29. Висота побудованого дерева рівна $h(T)$=3.

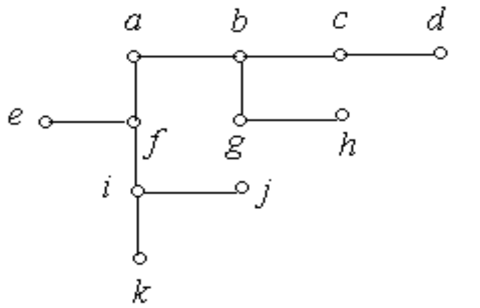


Відповідь: 1) число остовних дерев дорівнює 64;

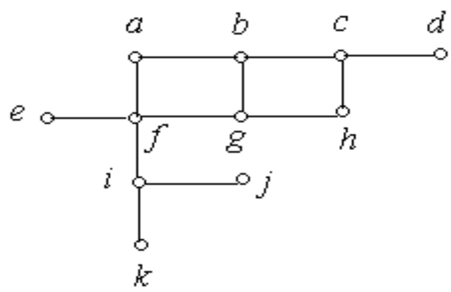
2) мінімальна вага дерева рівна 29, висота − $h(T)$=4.

Задачі для самостійної роботи

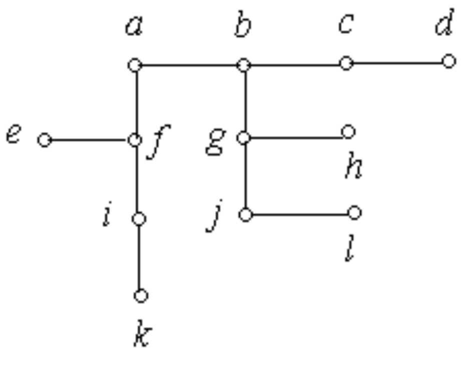
1. Які з наведених на рис. 4.59 а) − к) графів є деревами:



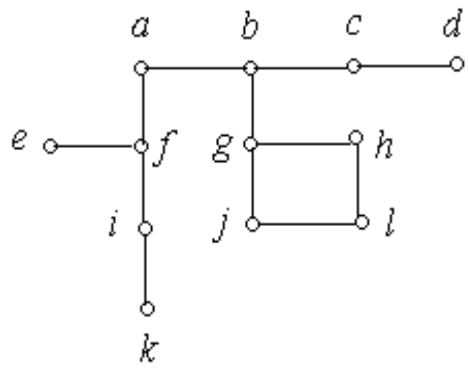
(а)



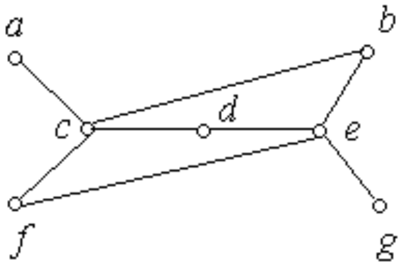
(б)



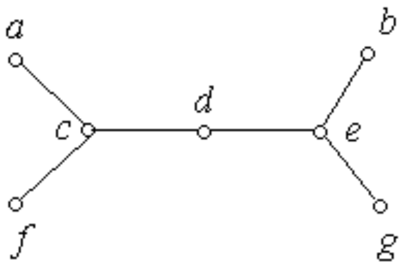
(в)



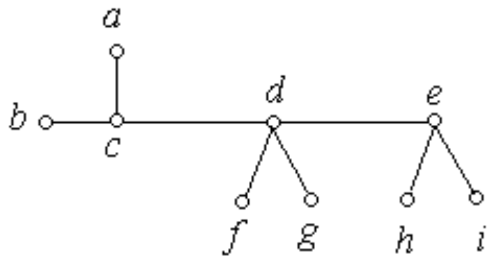
(г)



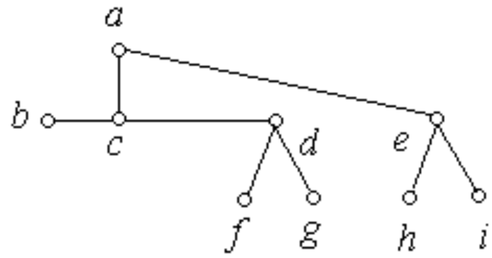
(д)



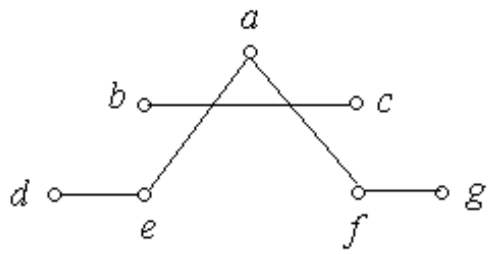
(е)



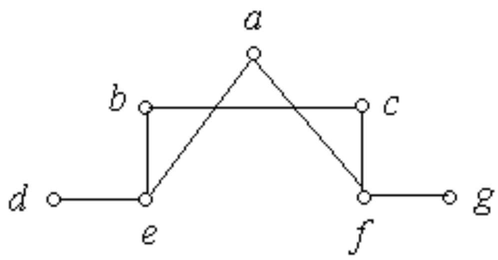
(ж)



(з)



(и)



(і)

Рис. 4.59

2. Для кожного графа з попередньої вправи:

а) використати як корінь вершину d і нарисувати кореневе дерево;

б) нарисувати породжене кореневе орієнтоване дерево.

3. Для кореневих орієнтованих дерев, отриманих у завданні 2:

а) знайдіть нащадків вершини c; б) знайдіть предків вершини e;

в) знайдіть висоту дерева; г) знайдіть рівень вершини g;

д) знайдіть листки дерева.

4.9. Розфарбування графів

Нехай G =(V, E) довільний граф, а $N_k=\{1,2,...,k\}$.

Визначення 4.56. Будь-яке відображення $f:V \to N_k$, яке ставить у відповідність кожній вершині $v\in V$ деяке натуральне число $f(v) \in N_k$, називається *розфарбуванням графа G*. Число f (v) називається *кольором* або *номером фарби вершини v*.

Визначення 4.57. Розфарбування f графа G називається *правильним*, якщо для будь-яких його суміжних вершин v і w виконується $f(v) \neq f(w)$.

Визначення 4.58. Мінімальне число *k*, для якого існує правильне розфарбування графа *G*, називається *хроматичним числом* графа *G* і позначається $\chi(G)$.

Визначення 4.59. *Мінімальним правильним розфарбуванням* графа *G* називається правильне розфарбування для $k=\chi(G)$.

Для певних типів графів визначити хроматичні числа нескладно. Наприклад, 1-хроматичними є порожні графи $G=(V, \varnothing)$ і тільки вони. Хроматичне число повного графа K_n дорівнює *n*, а хроматичне число довільного двочастинного графа – 2. 2-хроматичні графи часто називають *біхроматичними*.

Очевидними є такі твердження.

Теорема 4.11. Якщо кожна зв’язна компонента графа *G* потребує для свого правильного розфарбування не більше *k* фарб, то $\chi(G)\leq k$.

Теорема 4.12. Граф є біхроматичний тоді і тільки тоді, коли він двочастинний.

Зокрема, всі дерева і прості цикли парної довжини C_{2k} є біхроматичні. У той же час, $\chi(C_{2k+1})=3$.

Теорема 4.13. Граф є біхроматичний тоді і тільки тоді, коли він не має циклів непарної довжини.

Проблема визначення, чи є заданий граф *k*-хроматичним для певного *k* та проблема знаходження мінімального правильного розфарбування для заданого графа належать до класу задач, для яких на сьогодні не існують (і є всі підстави вважати, що не існують взагалі) ефективні точні алгоритми їх розв’язку. Тому важливими є результати, які дозволяють оцінити значення хроматичного числа $\chi(G)$, виходячи з певних характеристик та властивостей графа *G*.

Теорема 4.14. Нехай $\Delta(G)$ найбільший зі степенів вершин графа *G*. Тоді $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$.

Доведення проведемо індукцією за кількістю n вершин графа G. Для тривіального графа (n=1) і графів з двома вершинами нерівність виконується.

Нехай твердження теореми виконується для всіх графів з кількістю вершин t ($t \geq 2$). Розглянемо довільний граф G з t +1 вершиною. Вилучимо з G деяку вершину v, дістанемо граф G', всі степені вершин якого не перевищують $\Delta(G)$. Отже, за припущенням індукції, для правильного розфарбування G' потрібно не більше ніж $\Delta(G)+1$ фарба. Правильне розфарбування для G дістанемо з правильного розфарбування графа G', якщо пофарбуємо вершину v у колір, відмінний від кольорів усіх суміжних із v вершин. Оскільки таких вершин не більше, ніж $\Delta(G)$, то для правильного розфарбування графа G достатньо $\Delta(G)+1$ фарба.

Наслідок. Для правильного розфарбування довільного кубічного графа достатньо чотири фарби.

Так склалося історично, що окреме місце в теорії графів займають дослідження з розфарбування планарних графів. Пов'язано це зі славетною *проблемою* або *гіпотезою чотирьох фарб*.

Грані плоскої карти назвемо *суміжними*, якщо їх межі мають принаймні одне спільне ребро.

Гіпотеза чотирьох фарб виникла у зв'язку з розфарбуванням друкованих географічних карт (звідси й термін "плоска карта") і формулювалась так: *Грані довільної плоскої карти можна розфарбувати не більше, ніж чотирьма фарбами так, що будь-які суміжні грані матимуть різні кольори.*

Згодом з'явилось інше, рівносильне, формулювання гіпотези чотирьох фарб:

Для правильного розфарбування вершин довільного планарного графа потрібно не більше чотирьох фарб.

Ця гіпотеза виникла в середині XIX століття. Більше ста років професійні та непрофесійні дослідники намагалися довести або спростувати цю гіпотезу. В результаті багаторічних досліджень виявилось, що для розв'язання проблеми чотирьох фарб необхідно перевірити її справедливість для скінченного числа графів певного виду. Кількість варіантів, які потрібно було перебрати, була настільки великою, що тільки за допомогою потужної ЕОМ, яка неперервно працювала протягом більше двох місяців, у 1976 році справедливість гіпотези чотирьох фарб була підтверджена. Однак такий "фізичний" експериментальний спосіб доведення не зовсім влаштовує багатьох професійних математиків і вони продовжують пошуки аналітичного доведення гіпотези.

На завершення зауважимо, що існують планарні графи, хроматичне число яких дорівнює 4. Найпростішим таким графом є K_4. Отже, гіпотезу чотирьох фарб не можна "вдосконалити", перетворивши у "гіпотезу трьох фарб".

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бондаренко М. Ф. Комп'ютерна дискретна математика / М. Ф. Бондаренко, Н. В. Білоус, А. Г. Руткас. – Харків: «Компанія СМІТ», 2004. – 480с.
2. Бордачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Є. Дискретна математика /підручник . – К.:"Вища школа", 2002, - 287с.
3. Капітонова Ю. В. Основи дискретної математики / Ю. В. Капітонова, С. Л. Кривий, О. А. Летичевський. – К.: Наукова думка, 2002. – 578 с.
4. Коваленко Л. Б. Дискретна математика: Навчальний посібник для студентів економічних, менеджерських та електротехнічних спеціальностей вищих навчальних закладів / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків: ХНАМГ, 2006. – 192 с.
5. Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов, Г.М. Адельсон-Вельский. – М.: Энергия, 1980. – 344 с.
6. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. 3-е изд. – СПб.: Питер, 2009. – 384 с.
7. Спекторський І.Я. Навчальний посібник з дисципліни «Дискретна математика». Алгебра висловлень, теорія множин, теорія відношень, елементи комбінаторики, теорія графів, елементи теорії груп та кілець. – К.: НТУУ «КПІ», ННК «ІПСА», 2002. – 120 с.
8. Тевяшев А. В. Основы дискретной математики в примерах и задачах / А. В. Тевяшев, И. Г. Гусарова. – Харьков: ХНУРЭ, 2003. – 272 с.
9. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М.: Наука, 1979.– 384 с.
10. Уилсон Р. Введение в теорию графов / Р. Уилсон. – М.: Мир, 1977. – 205 с.

ЗМІСТ

ВСТУП 3
1. ТЕОРІЯ МНОЖИН 4
1.1. Поняття множини 4
1.2. Операції над множинами 8
1.3. Діаграми Ейлера-Венна 10
2. ВІДНОШЕННЯ 19
2.1. Основні визначення 19
2.2. Властивості бінарних відношень 27
2.3. Операції над бінарними відношеннями 35
2.4. Функції 41
3. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ 46
3.1. Основне правило комбінаторики 46
3.2. Число різних k-елементних підмножин n-елементної множини 50
3.3 Перестановки і розміщення впорядкованих множин 51
3.4. Комбінації елементів з повторенням 54
3.5. Біном Ньютона 59
3.6. Метод рекурентних співвідношень 61
3.7. Метод включення і вилучення 63
4. ГРАФИ 67
4.1. Основні визначення. Різновиди графів 67
4.2. Способи задання графів 77
4.3. Зв'язність графа. Маршрути, шляхи, ланцюги, цикли 83
4.3.1. G – неорієнтований граф 83
4.3.2. G – орієнтований граф 85
4.4. Метрика на графах 89
4.5. Ейлерів цикл. Ейлерів граф 94
4.6. Шляхи і цикли Гамільтона 101
4.7. Планарні графи 105
4.8. Дерева і ліс 109
4.9. Розфарбування графів 120
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ 123