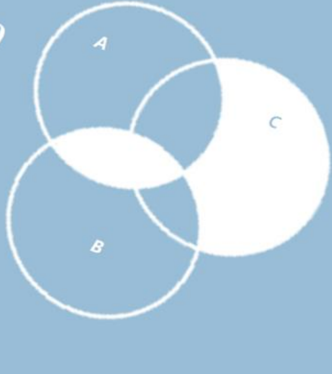
О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК



Полтава
2023

ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД УКООПСПІЛКИ
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ» (ПУЕТ)
Кафедра комп'ютерних наук та інформаційних технологій

О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
для самостійного вивчення навчальної дисципліни студентами денної форми навчання спеціальності 122 Комп'ютерні науки освітня програма «Комп'ютерні науки» ступеня бакалавра

Видання 3-тє, доповнене і перероблене

Полтава
ПУЕТ
2023

УДК 510.3:519.1
Є60

Рекомендовано до видання, розміщення в електронній бібліотеці та використання в освітньому процесі вченою радою Вищого навчального закладу Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі», протокол № 3 від 29.03.2023 р.

Автори:

О. О. Ємець, д. ф.-м. н., професор;
Т. О. Парфьонова, к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри комп’ютерних наук та інформаційних технологій Вищого навчального закладу Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі».

Рецензенти:

Т. М. Барболіна, д. ф.-м. н., доцент, декан факультету комп’ютерних наук, математики, фізики та економіки Полтавського національного педагогічного університету імені В. Г. Короленка;
Л. О. Флегантов, к. ф.-м. н., доцент, професор кафедри інформаційних систем та технологій Полтавського державного аграрного університету.

Ємець О. О.

Є60 Дискретна математика : навчальний посібник для самостійного вивчення навчальної дисципліни студентами денної форми навчання спеціальності 122 Комп’ютерні науки освітня програма «Комп’ютерні науки» ступеня бакалавра / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова. – Вид 3-тє, допов. і перероб. – Полтава : ПУЕТ, 2023. – 282 с. – 1 електрон. опт. диск (CVD-ROM).

ISBN 978-966-184-443-7

Посібник розраховано на студентів спеціальності 122 Комп’ютерні науки, які вивчають дисципліну Дискретна математика. Містить матеріали лекцій з елементів теорії множин, відношень. У результаті вивчення матеріалу посібника студенти засвоять поняття булевих функцій, способи їх мінімізації; освоять елементи комбінаторики, теорії графів, скінчених автоматів, вступ у математичну логіку, теорію алгоритмів. Запропоновано завдання для кожного із практичних занять, наведено критерії оцінювання знань студентів.

УДК 510.3:519.1

ISBN 978-966-184-443-7

© О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова, 2023
© Вищий навчальний заклад Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі», 2023

ВСТУП

Навчальний посібник із дисципліни «Дискретна математика» *призначений для студентів денної форми навчання спеціальності 122 Комп'ютерні науки, яка є складовою частиною галузі знань 12 «Інформаційні технології» і розроблена на основі «Освітньо-професійної програми», робочого навчального плану бакалавра з комп'ютерних наук.*

Програма регламентує обсяг і послідовність лекцій, практичних робіт, самостійної роботи, види та сфери контролю, критерії оцінювання знань.

Предметом дисципліни «Дискретна математика» є різноманітні дискретні множини та побудовані на їх основі відношення, функції, операції та оператори.

Основною метою вивчення дисципліни «Дискретна математика» є формування особистості студентів як спеціалістів, розвиток їх інтелекту і здібностей до логічного й алгебраїчного мислення на основі систематичного засвоєння засобів дискретної математики.

Головним завданням дисципліни є ознайомлення студентів з основними поняттями, методами та засобами дискретної математики як інструментарієм для подання і обробки інформації в комп'ютерах.

Після вивчення дисципліни студент повинен

знати:

– *способи опису множини та її елементів;*

– *операції над множинами;*

– *властивості відношень, області визначення та значення відношень, способи задання відношень;*

– *типи, композиції відображень;*

– *способи задання графів;*

– *операції над графами;*

– *властивості різних типів графів (зв'язні графи, дводольні графи, дерева, Ейлерові графи, Гамільтонові графи);*

– *теореми Куратовського, Ейлера, про розфарбування планарних графів, Форда-Фалкерсона;*

– *основні типи задач комбінаторного аналізу;*

– *визначення понять: переставлення, розміщення, сполучення елементів;*

– *властивості алгебраїчних операцій на множині та типи алгебри;*

– сутність математичної логіки, її ролі у діяльності людей;

– таблиці істинності та їх ролі у встановленні істинності складних висловлень;

– аксіоматичну теорію числення висловлень, визначення понять: предикат, терм, квантор, формула;

– теореми Поста, повний набір булевих функцій;

– основи теорії автоматів, властивості автоматів, типи автоматів (скінченні автомати, автомати з магазинною пам'яттю, нескінченні автомати);

уміти:

– виконувати дії над елементами множини;

– використовувати діаграми Вена або кола Ейлера;

– описувати типи відношень;

– визначати області значення та області визначення відношень;

– використовувати аксіоми порядку для визначення властивостей відношень;

– використовувати графи для моделювання різних об'єктів;

– виконувати операції над графами;

– використовувати алгоритм Краскала для отримання мінімального стягуючого лісу;

– використовувати теореми Ейлера, Куратовського, Форда-Фалкерсона для розв'язання прикладних задач і розробки алгоритмів на графах;

– розраховувати переставлення, розміщення, сполучення та використовувати їх в конкретних задачах;

– застосовувати елементи комбінаторного аналізу до комбінаторних систем з оптимальним розподілом елементів;

– використовувати біноміальні коефіцієнти для генерування к-елементних підмножин;

– використовувати алгебраїчний підхід до проектування систем обробки інформації;

– використовувати таблиці істинності для встановлення істинності висловлень, встановлення істинності алгебраїчним методом;

– будувати виводи в аксіоматичній теорії числення висловлень;

– перевіряти повноту наборів булевих функцій, приводити формули до заданого базису;

– застосовувати булеві функції до логічних і релейно-контактних схем;

– використовувати приклади скінченних автоматів для моделювання реальних об’єктів;

мати уявлення про:

– загальну проблему розпізнавання та трансляції;

– поняття лінійно-обмежених автоматів і машин Тьюрінга;

– класифікацію граматик та їх властивостей;

– аналіз мови, що допускаються автоматами з магазинною пам’яттю, лінійно-обмеженими автоматами та машиною Тьюрінга;

– про аналіз досяжності станів і автоматів, шляхи і маршрути у графах переходів, про побудову еквівалентного розбиття.

Вивчення дисципліни базується на елементах знань з алгебри та математичного аналізу.

Дисципліна є основою для вивчення дисципліни «Математична логіка», «Теорія алгоритмів», «Архітектура обчислювальних систем», «Теорія програмування» та багатьох інших.

Текст лекцій, представлених в посібнику, ґрунтується на матеріалах з деяких джерел, що наведені в списку літератури в кінці посібника.

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Модуль 1. Теорія множин

Тема 1. Теорія множин

Множини, операції над множинами. Відношення, операції над відношеннями. Спеціальні класи бінарних відношень: відношення еквівалентності та порядку. Решітки та булеві алгебри.

Модуль 2. Булеві функції

Тема 2. Булеві функції

Елементарні булеві функції, суперпозиція функцій. Табличний спосіб визначення функцій. Канонічні форми булевих функцій, способи побудови канонічних форм. Алгебра Жегалкіна, способи побудови поліномів Жегалкіна. Замкнені класи булевих функцій. Функціональна повнота систем булевих функцій. Теорема Поста. Мінімізація булевих функцій. Скорочені, тупикові, мінімальні форми, способи їх побудови.

Модуль 3. Комбінаторика

Тема 3. Комбінаторика

Основні комбінаторні схеми. Правила суми та добутку. Розміщення, перестановки та комбінації з повторенням та без. Комбінаторні тотожності, поліноміальна формула. Формула включень та виключень, її застосування. Рекурентні співвідношення, способи розв'язання лінійних рекурентних співвідношень. Твірні функції, їх застосування для розв'язку комбінаторних проблем.

Модуль 4. Теорія графів, скінченних автоматів, алгоритмів та математична логіка

Тема 4. Теорія графів

Графи, способи визначення. Шляхи у графах, зв'язні графи. Ейлерові графи. Дерева, властивості дерев. Планарні графи, необхідні та достатні умови планарності. Теорема про 5 фарб.

Тема 5. Теорія скінченних автоматів

Алфавіт, слова, алфавітні відображення. Автомати Мілі та Мура, способи визначення. Генерація алфавітних відображень автоматами. Тотожність класів відображень, що генеруються автоматами Мілі та Мура. Умови автоматності відображень. Еквівалентні стани та еквівалентні автомати. Мінімізація скінченних автоматів, алгоритм Ауфенкампа-Хона. Події, представлення подій в автоматах. Регулярні події, зв'язок регулярних подій та скінченних автоматів. Структурний синтез автоматів.

Тема 6. Математична логіка. Теорія алгоритмів

Числення висловлювань. Побудова таблиць для пропозиційних форм. Аксіоматичні теорії. Аксіоми та правила виводу для числення висловлень. Зв'язок тавтологій та теорем. Непротирічність та розв'язність числення висловлень. Теорії 1-го порядку. Аксіоми та правила виводу для теорій 1-го порядку. Числення предикатів, його непротирічність. Концепція алгоритму. Нормальні алгоритми Маркова. Алгоритмічно нерозв'язні проблеми. Універсальний нормальний алгоритм. Машини Тьюрінга, еквівалентність різних алгоритмічних систем.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

№ з/п	Назва розділу, модуля, теми	Кількість годин за видами занять					
		разом	аудиторні				позааудиторні
			лекції	семінарські	практичні	лабораторні	завдання самостійної роботи в розрізі тем
1	**Модуль 1. Теорія множин** Тема 1. Теорія множин	58	8		14		36
2	**Модуль 2. Булеві функції** Тема 2. Булеві функції	62	8		18		36
3	**Модуль 3. Комбінаторика** Тема 3. Комбінаторика	56	8		12		36
4	**Модуль 4. Теорія графів, скінченних автоматів, алгоритмів та математична логіка** в т. ч.:	64	8		20		36
	Тема 4. Теорія графів	26	4		10		12
	Тема 5. Теорія скінченних автоматів	20	2		6		12
	Тема 6. Математична логіка. Теорія алгоритмів	18	2		4		12
	Усього	240	**32**		**64**		**144**

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Модуль 1. Теорія множин

1.1. Алгоритм вивчення тем модуля

Тема 1. Теорія множин

У процесі самостійного вивчення теми особливу увагу слід звернути на визначення основних понять: множини, операцій над множинами, відношення класів бінарних відношень: відношення еквівалентності та порядку, решітки та булевої алгебри, потужності множин.

1.2. Термінологічний словник

Поняття множини не означається, бо воно є первинним. За Кантором, множина – це дещо різне, що можна розглядати як єдине. Тобто множина – це сукупність різних об'єктів, які мають дещо спільне, що дозволяє об'єднати ці об'єкти в одну спільноту.

Дві множини називають рівними, коли вони складаються з однакових елементів.

Сім'єю множин називається множина, елементи якої є множинами.

Кажуть, що A – підмножина B, якщо кожний елемент A є й у B.

Для множин A та B об'єднанням множин $A \cup B$ називається множина $C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$.

Для множин A й B перерізом множин $A \cap B$ називається множина $C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ та } x \in B\}$.

Якщо всі множини, що розглядаються в певній ситуації, є підмножинами деякої множини I, то остання називається універсальною множиною (універсумом), або унітарною (основною) множиною.

Різницею $X–Y$ множин X та Y є сукупність усіх елементів X, що не ввійшли в Y, тобто $X - Y = \{x \mid x \in X,\ x \notin Y\}$, ще $X–Y$ позначають $X \backslash Y$.

Симетрична різниця $X\Delta Y$ множин X та Y – це множина, що означається формулою $X\Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.

Множина $I–X$, де I – універсум, називається запереченням (доповненням) множини X.

Упорядкованою парою $<a, b>$ називають множину $\{\{a\},\{a,b\}\}$, a – першою координатою пари, b – другою.

Множину з одного елемента назвемо синглетоном, а з двох різних – парою.

Декартовим (або прямим) добутком $A\times B$ множин A, B є множина впорядкованих пар $<a, b>, a \in A, b \in B$: $A \times B = \{<a,b> | a \in A, b \in B\}$.

Сукупність $G = \{g_1, ..., g_h\}$ називається мультимножиною, якщо серед $g_1, ..., g_\eta$ можуть бути однакові елементи.

Упорядкований набір (кортеж) $S(G) = (e_1, ..., e_n)$, що складається з елементів G, узятих по одному разу, називається основою мультимножини G.

Упорядкований набір $[G] = (h_1, ..., h_n)$, що складається з чисел η_i, називається первинною специфікацією, якщо η_i – кількість повторень елемента e_i в $G \forall i \in J_n$. Позначають також $\eta_i = k_G(e_i)$.

Для мультимножин A і B переріз $A \bigcap B$, об’єднання $A \bigcup B$, сума $A + B$, підмультимножина A мультимножини B ($A \subset B$) уводяться таким чином:

$$A \bigcap B = C : S(C) = S(A) \bigcap S(B), k_C(x) = min(k_A(x), k_B(x));$$

$$A \bigcup B = C : S(C) = S(A) \bigcup S(B), k_C(x) = max(k_A(x), k_B(x));$$

$$A + B = C : S(C) = S(A) \cup S(B), k_C(x) = k_A(x) + k_B(x);$$

$$A \subset B : S(A) \subset S(B), k_A(x) \le k_B(x).$$

Якщо $A \subset B; |A| = k$, то A називають k-вибіркою.

Декартовим добутком мультимножин A та B назвемо декартовий добуток множин $S(A)$ та $S(B)$ – їх основ: $A \times B = \{<a,b> | a \in S(A), b \in S(B)\}$.

Множина f називається відображенням (функцією) з множин A в множину B тоді і тільки тоді, коли вона є підмножиною множини впорядкованих пар $A \times B$ та умови: $< a,b > \in f$, $< a,c > \in f$ тягнуть за собою $b = c$.

Функція $f : A \to B$ називається взаємно однозначною, якщо вона відображає різні елементи A в різні елементи B, тобто $f(a_1) = f(a_2)$ тягне $a_1 = a_2$ або $a_1 \neq a_2$ тягне $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – довільні множини (необов'язково різні). Під n-арним відношенням (або n-відношенням) ρ^n на множинах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ розуміють закон (правило, характеристичну властивість), що виділяє в декартовому добуткові $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ деяку підмножину $\rho^n_{A_1,\ldots,A_n} \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$, яка називається графіком відношення.

Часто під відношенням розуміють сам графік. Відношення ρ^1 називають унарним $(n = 1)$; ρ^2 – бінарним $(n = 2)$; ρ^3 – тернарним $(n = 3)$.

Відношення на множині A називається:

1) рефлексивним, якщо $x\rho x \forall x \in A$.

2) іррефлексивним, якщо $x\rho x$ не виконується $\forall x \in A$.

3) симетричним, якщо $x\rho y$ тягне за собою $y\rho x \forall x,\ y \in A$.

4) антисиметричним, якщо з $x\rho y$ та $y\rho x$ випливає $x = y \forall x$, $y \in A$.

5) транзитивним, якщо $x\rho y,\ y\rho z$ тягнуть за собою $x\rho z \forall x,\ y$, $z \in A$.

Еквівалентністю називається бінарне відношення, яке є рефлексивним, симетричним, транзитивним.

Відношенням часткового порядку на деякій множині (або частковим порядком) називається рефлексивне, антисиметричне та транзитивне відношення на цій множині. Якщо ρ – частковий порядок на A, то впорядкована пара $< A,\rho >$ називається частково впорядкованою множиною.

Відношення часткового порядку ρ на A називається лінійним порядком тоді і тільки тоді, коли для кожної пари $a,b \in A$

виконується або $a\rho b$, або $b\rho a$. Якщо ρ – лінійний порядок в A, то впорядкована пара $<A,\rho>$ називається лінійно впорядкованою множиною (або ланцюгом).

Алгебраїчною операцією на множині A називається відображення ω: $A^n = A \times A \times \ldots \times A \to A$. Число n – називається арністю операції.

Відношенням на мультимножинах $A_1,\ldots,A_n$ назвемо підмножину ρ декартового добутку $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Число n назвемо арністю відношення на мультимножинах.

Розглянемо бінарне відношення на X та Y $\left(\rho \subseteq X + Y\right)$. Тоді множину всіх $x \in X$ таких, що для деяких $y \in Y$ маємо $\left(x,y\right) \in \rho$ називають областю визначення бінарного відношення ρ. А множину всіх $y \in Y$ таких, що $\left(x,y\right) \in \rho$ для деяких $x \in X$ називають областю значень бінарного відношення ρ.

Якщо $X \neq Y$, то кажуть, що ρ є відношенням від X до Y. Якщо $X = Y$, то ρ називають відношенням у X.

Розглянемо бінарне відношення $\rho^2_{X,Y} = \rho \subseteq X \times Y$. Нехай $x_i \in X$. Множина $A\left(x_i\right)$ таких y, що пари $\left(x,y\right) \in \rho$, називається перерізом за x_i відношенням ρ. Множина всіх перерізів відношення ρ називається фактор-множиною множини Y за відношенням ρ і позначається Y/ρ.

Об’єднання перерізів за елементами деякої множини $A \subset X$ є перерізом $\rho\left(A\right)$ по множині A відношення ρ.

Таблиця T розміру $m \times n$ (m – рядків, n – стовпців), де $m = \left|X\right|$, $n = \left|Y\right|$, заповнена таким чином: у клітинці, що стоїть в i-му рядку, j-му стовпці стоїть: 1, якщо $x_i \rho y_j$, $x_i \in X$, $y_j \in Y$; 0, якщо x_i та y_j не знаходяться у бінарному відношенні ρ, називається матрицею суміжності відношення ρ.

Уведемо поняття графа відношення $S \subseteq N \times N$. Упорядкована пара $<N,S>$ множини (мультимножини) N із бінарним відношенням S у ній $\left(S \subseteq N \times N\right)$ називається графом Γ, тобто

$\Gamma =< N,S >$. Множину N – називають носієм графа (множиною вершин), а множину S – сигнатурою графа (множиною дуг). Такий граф і називають графом відношення $S \subseteq N \times N$.

Розглянемо множину $N = X \cup Y$, що утворена об'єднанням областей визначення і значення бінарного відношення $S \subseteq X \times Y$. Зазначимо, що якщо $S \subseteq X \times Y$, то виконується $S \subseteq N \times N$. Граф $\Gamma =< N,S >=< X \cup Y,S >$ називають графом відношення $S \subseteq X \times Y$.

Розглянемо бінарне відношення $\rho \subset X \times Y$. Відношення симетричне (обернене) до відношення ρ (позначається ρ^{-1}) – це підмножина $\rho^{-1} \subset Y \times X$, причому $\rho^{-1} = \left\{ < y,x > \middle| < x,y > \in \rho \right\}$, тобто ρ^{-1} утворено всіма тими парами $< y,x > \in Y \times X$, для яких пари $< y,x > \rho$.

Розглянемо композицію відношень. Нехай є множини X,Y,Z на яких задані відношення $\alpha \subset X \times Y$, $\beta \subset Y \times Z$. Композицією відношень α і β називають відношення γ, яке складається з усіх таких пар $< x,z > \subset X \times Z$, для яких існує такий $y \in Y$, що $< x,y > \in \alpha$ та $< y,z > \in \beta$.

Якщо областю визначення функціонального відношення є вся множина X, то таке функціональне відношення (функцію) називають відображенням множини X в Y. Елемент $x \in X$ називають аргументом (змінною), а y – образом (значенням відображення, функції).

Якщо для довільних $x \neq y$ маємо: $f(x) \neq f(y)$, то відображення називається ін'єкцією. Якщо при відображенні всі елементи Y використані, то відображення називають відображенням X на Y, або сюр'єкцією (покриттям).

Відображення, яке є ін'єкцією і сюр'єкцією (одночасно), називають бієкцією (накладанням).

Якщо відображення f є бієкцією, то кажуть, що між X і Y встановлюється взаємно однозначна відповідність. Якщо X та Y – однакові множини, то $f : X \to Y$ називається відображенням множини самої на себе ($f : X \to Y$).

Якщо маємо $<x,y>\in f$, то x називається прообразом для y, а y – образом для x. Сукупність усіх елементів $y_i \in Y$ таких, що $<x,y_i>\in f$, називається повним образом елемента x.

Повним прообразом для деякого $y\in Y$ називається множина $\{x_1,\ldots,x_n\}$, де $<x_i,y>\in f$.

Множина $f(Q)$ називається повним образом множини Q, якщо вона є сукупністю образів усіх елементів $g\in Q: f(g)\in f(Q)$.

Множина $f^{-1}(R)$ називається повним прообразом множини R, якщо ця множина є сукупністю прообразів усіх елементів $f^{-1}(r),\ r\in R\subseteq Y$.

Якщо $f: X\to Y, Q\subset X,\ f_1: Q\to Y,\ f(x)=f_1(x)$ для всіх $x\in Q$, то кажуть, що f_1 є звуженням функції f на Q.

При цьому кажуть, що f – розширення функції f_1 із множини Q на X.

Назвемо класом еквівалентності $k(m_a)$ елемента m_a множину всіх елементів m_i, кожний із яких знаходиться з елементом m_a у відношенні еквівалентності, тобто $k(m_a)=\{m_i | m_i\sim m_a\}$. Множину $k(m_a)$ ще називають множиною еквівалентних елементів.

Будь-який елемент $m\in k(m_a)$ називається представником (еталоном) цього класу. Системою представників називається підмножина множини M, що містить рівно по одному елементові з кожного класу еквівалентності.

Бінарне відношення на множині A, що є іррефлексивне та транзитивне, називають відношенням строгого порядку, позначається воно <: $a<b$.

Якщо граф відображає транзитивне відношення ρ, то, крім дуг, що відповідають відношенням $a\rho b$, $b\rho c$, є дуга, що відображає відношення $a\rho c$. Остання називається такою, що транзитивно замикає.

Граф частково впорядкованого відношення з видаленими петлями та дугами, що транзитивно замикають, називається діаграмою Хассе.

Розглянемо властивості бінарних операцій, які будемо позначати $\circ$, T, $\perp$. Якщо пишуть $a \perp b = c,\ aTb = d,\ a \circ b = e,$ то $a,\ b$ називають операндами, c,d,e – результатами операції; $a,b,c,d,e \in A$.

Якщо в множині $S \subset A$ $c = a \circ b$ є результатом операції, $a \circ b \in S$ для будь-яких $a,b \in S,$ то множина S називається замкненою відносно операції $\circ$.

Елемент $e \in A$ називається нейтральним, якщо для всіх елементів $a \in A$ справедливо: $e \circ a = a \circ e = a.$

Нехай множина A має нейтральний елемент e відносно операції $\circ$. Елемент b називається симетричним (оберненим, протилежним) елементу $a,$ якщо $a \circ b = b \circ a = e..$

Властивості операцій можна представити у двох формах. В адитивній операція $\circ(T)$ записується символом додавання (+), у мультиплікативній операція $\circ(\perp)$ зображається символом множення $(\cdot)$, який у записах можна опускати: $a \cdot b = ab.$ Якщо в множині визначено дві операції, то першу, як правило, вважать адитивною, а другу – мультиплікативною. Для адитивної операції нейтральний елемент позначається 0 і називається нулем, а симетричний до a позначається $(-a)$ і називається протилежним. В мультиплікативній – нейтральний елемент позначається 1 та називається одиницею, а симетричний до a позначається a^{-1} і називається оберненим.

Алгебраїчною системою A називається множина з визначеними на ній операціями та відношеннями $A = < M, O, R >$, де M – не порожня множина, O – сім'я алгебраїчних операцій, R – сім'я відношень, заданих на множині M. Множина з системою визначених на ній алгебраїчних операцій називається універсальною алгеброю, тобто якщо $R = \varnothing,$ то $A = < M, O, \varnothing >$ – універсальна алгебра. Множину M називають носієм, а O – сигнатурою. Якщо $O = \varnothing,$ то $A = < M, \varnothing, R >$ – називають реляційною системою (або моделлю).

Алгеброю множин називають непорожню сукупність $M(I)$ підмножин деякої множини I, замкнену відносно теоретико-множинних операцій (об'єднання, перерізу, заперечення), які робляться скінченну кількість разів.

Кільцем називається непорожня множина *K* (довільної природи), для якої означені дві бінарні операції: додавання (позначається +), множення (позначається точкою, яка опускається), що задовольняють аксіоми: для всіх $a,b,c \in K$:

– комутативність додавання $a+b=b+a$;

– асоціативність додавання $a+(b+c)=(a+b)+c$;

– обратимість додавання (можливість «віднімання»): рівняння $a+x=b$ має єдиний розв'язок $x=b-a \in K$;

Поле – це множина *П*, що має принаймні два елементи, у якій задані дві бінарні операції – додавання (+) та множення (·), обидві асоціативні й комутативні, пов'язані між собою законом дистрибутивності, тобто для всіх $a,b,c \in \Pi$ виконується:

– комутативність $a+b=b+a,\ ab=ba;$

– асоціативність $a+(b+c)=(a+b)+c,\ a(bc)=(ab)c;$

– дистрибутивність множення відносно додавання $a(b+c)=ab+bc;$

крім цього, в П вимагається:

– існування нульового елемента 0 (нуля), тобто елемента, для якого $0+a=a$, для всіх $a \in \Pi;$

– існування протилежного елемента (позначається $-a$), тобто такого елемента, що $(-a)+a=0;$

– існування одиничного елемента *e* (одиниці), тобто такого елемента *e*, що для всіх $a \in \Pi$ виконується $ae=a;$

– існування для кожного ненульового елемента оберненого (a^{-1}), тобто такого, що $a^{-1}a=e.$

Мажорантою (верхньою межею) підмножини $Q \subset A$ називається такий елемент $m \in A,$ що для всіх $q \in Q$ справедливо $q \preccurlyeq m$. Підкреслимо, що $m \in A,$ не обов'язково, щоб *m* належав *Q*.

Мінорантою (нижньою межею) підмножини $Q \subset A$ називається такий елемент $n \in A,$ що для всіх $q \in Q$ справедливо $n \preccurlyeq q$. Не обов'язково *n* належить *Q*.

Якщо мажоранта m (мінoранта n) належить Q, то m називають максимумом (мінімумом) множини Q і позначають $max Q$ ($min Q$) (або ще називають відповідно максимальним (мінімальним) елементом Q). Неважко бачити, що максимум (мінімум) множини Q, якщо він існує, – єдиний.

Якщо множина мажорант (мінорант) у свою чергу має максимальний (мінімальний) елемент, то його називають верхньою (нижньою) гранню *підмножини* Q і позначають $sup Q \left(inf\, Q \right)$. Верхня (нижня) грань підмножини Q, що належить Q, називається найбільшим (найменшим) елементом підмножини Q.

Найбільший елемент, якщо він існує, впорядкованої множини M назвемо одиничним і позначимо 1. Найменший – відповідно нульовим, позначимо 0 (якщо він існує).

Під ізоморфізмом між двома впорядкованими множинами M та M^* будемо розуміти взаємно однозначну відповідність η між M і M^* таку, що з $m_i \preccurlyeq m_j$ випливає $\eta\left(m_i\right) \preccurlyeq \eta\left(m_j\right)$ й із $\eta\left(m_i\right) \preccurlyeq \eta\left(m_j\right)$ випливає $m_i \preccurlyeq m_j$, де $m_i, m_j \in M;$ $\eta\left(m_i\right)$, $\eta\left(m_j\right) \in M^*$.

Дві впорядковані множини M, M^* називаються ізоморфними, коли між ними існує ізоморфізм.

Двоїстою до частково впорядкованої множини $\bar{M}$ називають частково впорядковану множину M, задану на тому ж носії M за допомогою оберненого відношення.

Довжиною ланцюга називається число $\ell = |L| - 1$, де $|L|$ – кількість елементів (потужність) носія лінійно впорядкованої множини L. Кожний ланцюг довжини ℓ ізоморфний ланцюгу цілих чисел $1, 2, \ldots, \ell + 1$.

Висотою $d(m)$ елемента m упорядкованої множини M називається максимум довжини ланцюгів, для яких m є найбільшим елементом.

Довжиною $d(m)$ впорядкованої множини M називається максимум висот її елементів.

Найменшою (або точною) верхньою гранню множини Q називається мажоранта, менша за інші мажоранти. Найбільшою (або точною) нижньою гранню називається мінoранта, більша (якій передують) за інші мінoранти. Очевидно, що їх (точних граней) для підмножини $Q \subset M$ не більше, ніж одна. Нагадаємо, що M – упорядкована множина.

Решіткою називається частково впорядкована множина $<M, \preccurlyeq>$, будь-які два елементи x, y якої мають точну нижню грань (або переріз $x \cap y$) і точну верхню грань (або об'єднання $x \cup y$).

Упорядкована множина, в якій всі підмножини мають найбільшу нижню і найменшу верхню грані, називається повною решіткою.

Можна дати інше означення решітки як алгебри $A = < M, \cup, \cap >$, сигнатура якої має властивості:

I. Комутативність:

1) $x \cup y = y \cup x;$

2) $x \cap y = y \cap x;$

II. Асоціативність:

3) $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z);$

4) $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z);$

III. Поглинання:

5) $x \cup (x \cap y) = x;$

6) $x \cap (x \cup y) = x;$

IV. Ідемпотентність:

7) $x \cup y = x;$

8) $x \cap x = x.$

Елементи 0 і 1 у решітці будемо називати структурними нулем та одиницею.

У решітці A зі структурними нулем і одиницею два елементи x, y називають доповняльними, якщо $x \cap y = 0;$ $x \cup y = 1$. Елемент $\bar{m}$, доповняльний до елемента m, називається також доповненням елемента в решітці A.

Решітка A називається дистрибутивною, якщо її сигнатура, крім перерахованих чотирьох властивостей, задовольняє тотожності, яку називають дистрибутивність перерізу відносно об'єднання: $(x \cup y) \cap z = (x \cap z) \cup (y \cap z)$ $\forall x, y, z \in M$.

Дистрибутивна решітка з доповненнями називається булевою алгеброю.

Булева алгебра – це не порожня множина B з операціями $\cup, \cap, \bar{}$ над елементами $x, yz \in B,$ що задовольняють аксіоми:

I. Комутативність:

1) $x \cup y \equiv y \cup x;$

2) $x \cap y \equiv x \cap y;$

II. Дистрибутивність:

3) $x \cap (y \cup z) \equiv (x \cap y) \cup (x \cap z);$

4) $x \cup (y \cap z) \equiv (x \cup y) \cap (x \cup z);$

III. Асоціативність:

5) $x \cup (y \cup z) \equiv (x \cup y) \cup z;$

6) $x \cap (y \cap z) \equiv (x \cap y) \cap z;$

IV. Поглинання:

7) $x \cup (x \cap y) = x;$

8) $x \cap (x \cup y) = x;$

V. Склеювання:

9) $(x \cap \bar{x}) \cup y = y;$

10) $(x \cup \bar{x}) \cap y = y.$

У булевій алгебрі вводиться впорядкованість елементів: $x \preccurlyeq y$, тоді і тільки тоді, коли $x = x \cap y.$

Дві множини M та N називаються еквівалентними, якщо між їх елементами може бути встановлена взаємно однозначна відповідність.

Множину $A,\ A \sim N$ (еквівалентну множині натуральних чисел), називають зліченною множиною (синонім – зчисленна множина).

Якщо $M \sim N,$ то кажуть, що M і N – мають однакову потужність, яку позначають $|M|,\ |N|.$ Тобто потужність – це те спільне, що є у двох еквівалентних множин. Для скінченних множин поняття потужності збігається з поняттям кількості елементів. Потужність множини натуральних чисел позначають $\aleph_0$ – читається: «алеф нуль». Про множини, еквівалентні множині дійсних чисел, кажуть, що вони мають потужність континуума, її позначають *C* (або $\aleph$); (на латинській мові *continuum* – означає «неперервний», «безпосередньо прилеглий», «наступний», «суміжний»).

Нехай *A*, *B* – дві частково впорядковані порядком $\preccurlyeq$ множини, а відображення *f* – взаємно однозначна відповідність між ними. Нагадаємо, що відображення *f* називають ізоморфізмом частково впорядкованих множин *A* і *B*, якщо $f(a) \preccurlyeq f(b)$, де $a, b \in A;\ f(a),\ f(b) \in B$ тоді й тільки тоді, коли $a \preccurlyeq b$. *A* та *B* називають при цьому ізоморфними.

1.3. План практичних занять

Зміст практичних занять	**Обсяг годин**
Практичне заняття 1. Множини. Дії над множинами. Круги Ейлера	2
Практичне заняття 2. Доведення тотожностей за допомогою законів та кругів Ейлера	2
Практичне заняття 3. Декартовий добуток. Мультимножини. Операції над мультимножинами	2
Практичне заняття 4. Відношення. Область визначення, область значень, граф, матриця відповідності, переріз за елементами	2
Практичне заняття 5. Властивості відношень. Відношення еквівалентності і порядку. Функції і відображення	2
Практичне заняття 6. Алгебраїчні системи, їх властивості	2
Практичне заняття 7. Упорядковані множини. Решітки. Модульна контрольна робота 1	2

1.4. Перелік завдань до модуля

Завданням для самостійної роботи за першим модулем є розрахунково-графічна робота (РГР) № 1, індивідуальні завдання з якої представлено в дистанційному курсі «Дискретна математика» (Частина 1). Далі представлено завдання до практичних занять за першим модулем.

Множини. Дії над множинами. Круги Ейлера

Завдання 1. Які з цих множин рівні: $\{x, y, z\}$, $\{z, y, z, x\}$, $\{y, x, y, z\}$, $\{y, z, x, y\}$?

Завдання 2. Які зі співвідношень є неправильні і чому?

а) $x \in \{2, a, x\}$; б) $3 \in \{1, \{2, 3\}, 4\}$; в) $x \in \{1, \sin x\}$; г) $\{x, y\} \in \{a, \{x, y\}, b\}$.

Завдання 3. Чи рівні між собою множини *A* і *B*? Чому?

а) $A = \{2,5,4\}$, $B = \{5,4,2\}$; б) $A = \{1,2,4,2\}$, $B = \{1,2,4\}$;

в) $A = \{2,4,5\}$, $B = \{2,4,3\}$; г) $A = \{1,\{2,5\},6\}$, $B = \{1,\{5,2\},6\}$;

д) $A = \{1,\{2,5\},6\}$, $B = \{1,2,5,6\}$.

Завдання 4. Записати наступні множини переліком їх елементів, де $N = \{1, 2, 3, ...\}$.

а) $A = \{x \in N \mid 3 < x < 9\}$; б) $B = \{x \in N \mid x \text{ парні}, x < 11\}$;

в) $C = \{x \in N \mid 4 + x = 3\}$.

Завдання 5. Нехай $A = \{2, 3, 4, 5\}$.

а) Показати, що A не є підмножиною $B = \{x \in N \mid x \text{ парні}\}$;

б) Показати, що A – власна підмножина $C = \{1, 2, 3, ..., 8, 9\}$.

Завдання 6. Показати, що можна отримати: а) $A \cap B = A \cap C$ без $B = C$ ($B \neq C$); б) $A \cup B = A \cup C$ без $B = C$ ($B \neq C$).

Завдання 7. Перерахувати елементи наступних множин, якщо універсальна множина $I = \{a, b, c, ..., y, z\}$. Крім того, визначити, які з множин, якщо такі є, рівні.

$A = \{x \mid x - \text{голосна літера}\}$, $B = \{x \mid x - \text{передує } f \text{ в алфавіті}\}$,

$C = \{x \mid x - \text{це літера у слові "little"}\}$, $D = \{x \mid x - \text{це літера у слові "title"}\}$.

Завдання 8. Чи пов'язані множини *A* і *B* відношенням включення? Якщо так, то вказати, яка з них є підмножиною іншої.

а) $A = \{a,b,d\}$, $B = \{a,b,c,d\}$; б) $A = \{a,c,d,e\}$, $B = \{a,e,c\}$;

в) $A = \{c,d,e\}$, $B = \{c,a\}$.

Завдання 9. У яких відношеннях знаходяться між собою три множини: $A=\{1,3\}$, B – множина непарних додатних чисел; C – множина розв'язків рівняння $x^2-4x+3=0$?

Завдання 10. Прийнявши множину перших 20 натуральних чисел як універсум, записати наступні його підмножини: A – парні числа; B – непарні числа; C – квадрати чисел; D – прості числа. У яких відношеннях знаходяться ці підмножини?

Завдання 11. Записати множини, які одержані в результаті наступних операцій над множинами із задачі 10: $A\cup B$, $A\cap B$, $A\cap C, A\cap D, C\setminus A, C\setminus B, C\Delta\overline{D}$.

Завдання 12. Нехай задано універсальну множину $I=\{1,2,3,...,8,9\}$ і множини $A=\{1,2,5,6\}$, $B=\{2,5,7\}$, $C=\{1,3,5,7,9\}$. Знайти: а) $A\cap B$ та $A\cap C;$ б) $A\cup B$ та $B\cup C;$ в) $\overline{A}$ та $\overline{C}$; д) $A\Delta B$ та $A\Delta C;$ г) $A\setminus B$ та $A\setminus C;$ е) $(A\cup C)\setminus B$ та $(B\Delta C)\setminus A.$

Завдання 13. Нехай $A=\{1,2,...,8,9\}$, $B=\{2,4,6,8\}$, $C=\{1,3,5,7,9\}$, $D=\{3,4,5\}$, $E=\{3,5\}$. Які з цих множин можуть дорівнювати множині X при кожній із наступних умов? а) X і B не перетинаються; б) $X\subseteq D$, але $X\not\subset B;$ в) $X\subseteq A$, але $X\not\subset C;$ г) $X\subseteq C$, але $X\not\subset A.$

Доведення тотожностей за допомогою законів і кругів Ейлера

Завдання 1. Що можна сказати про відношення між множинами A, B, C, представлені кругами Ейлера (рис. 1)? Записати за допомогою операцій над множинами вирази для множин, які відповідають заштрихованим областям.

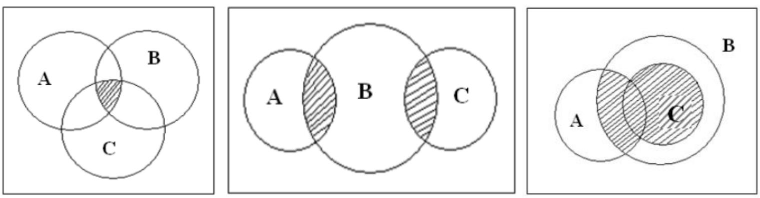


Рисунок 1 – Представлення множин до завдання 1

Завдання 2. Довести за допомогою тотожних перетворень співвідношення:

а) $A\setminus(A\setminus B)=B\setminus(B\setminus A);$ б) $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C).$

Завдання 3. Показати справедливість тотожностей:

а) $\overline{A\cap\overline{B}}\cup B=\overline{A}\cup B;$ б) $(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)=B\cap C.$

Завдання 4. Довести закони про поглинання:

а) $A\cup(A\cap B)=A;$ б) $A\cap(A\cup B)=A.$

Завдання 5. Довести, що $B\setminus A=B\cap\overline{A}.$

Завдання 6. Довести дистрибутивний закон:

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$

Завдання 7. Проілюструвати закон де Моргана: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ використовуючи діаграми Венна.

Завдання 8. Довести: $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A).$

Завдання 9. Формула $A\setminus B=A\cap\overline{B}$ визначає операцію різниці з точки зору операцій перетину та доповнення. Знайдіть формулу, яка визначає об’єднання $A\cup B$ з точки зору операцій перетину та доповнення.

Завдання 10. Доведіть наступне: а) $A\subseteq B$ тоді і тільки тоді, коли $A\cap\overline{B}=\varnothing;$ б) $A\subseteq B$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{A}\cup B=I;$ в) $A\subseteq B$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{B}\subseteq\overline{A};$ г) $A\subseteq B$ тоді і тільки тоді, коли $A\setminus B=\varnothing.$

Декартовий добуток. Мультимножини. Операції над мультимножинами

Завдання 1. Записати основу та первинну специфікації мультимножин: $A=\{2, 2, 3, 7, 7, 7, 8, 5, 5, 5\}$ та $B=\{4, 4, 3, 1, 1, 1\}$.

Завдання 2. Нехай задано множини $A=\{3, 7, 8, 5\}$ та $B=\{4, 3, 1\}$.

Знайти результат декартового добутку $A\times B, B\times A, B\times B.$

Завдання 3. Записати результат наступних операцій над мультимножинами $A=\{a,\ a,\ b,\ c,\ d,\ d,\ d\}$ і $B=\{a,\ a,\ a,\ b,\ b\}$:

$A\cup B,\ A\cap B,\ A+B$. Визначити чи є одна мультимножина підмультимножиною іншої.

Завдання 4. Нехай задані мультимножини $A=\{2, 2, 5, 5, 5\}$ та $B=\{3, 4, 4, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 1\}$. Знайти наступні операції над мультимножинами: $A\cup B, B\cap A, A+B.$ Перевірити, чи $A\subseteq B,$ $B\subseteq A.$

Завдання 5. Знайти результат декартового добутку $A\times B,$ $B\times A,$ $B\times B$ для мультимножин $A=\{3, 3, 4, 4\}$ та $B=\{2, 2, 2, 5, 5, 1\}$.

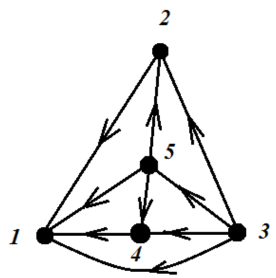
Відношення. Область визначення, область значень, граф, матриця відповідності, переріз за елементами

Завдання 1. Дано дві множини $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ та $Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ і визначене бінарне відношення:

$$A=\{(x_1,y_2),\ (x_2,y_1),\ (x_2,y_2),\ (x_4,y_2),\ (x_4,y_3),\ (x_5,y_1),\ (x_5,y_3)\}.$$

а) записати область визначення та область значень; б) визначити перерізи за кожним елементом з X; в) визначити перерізи за підмножинами $X'=\{x_1, x_4\}$ та $X''=\{x_1, x_3,x_5\}$ множини X; г) записати матрицю і накреслити граф; д) визначити симетричне відношення.

Завдання 2. Представити бінарне відношення, задане графом на рисунку як множину впорядкованих пар і записати його матрицю. Якими властивостями характеризується це відношення?



Завдання 3. Якими загальними властивостями володіють бінарні відношення, що задані на деякій множині людей X і виражаються співвідношеннями ($x_i, x_j \in X$):

а) « x_i схожий на x_j »; б) « x_i знайомий з x_j »; г) « x_i сусід x_j »; д) « x_i мешкає в одному будинку з x_j »; в) « x_i родич x_j »; е) « x_i має вагу не більшу ніж у x_j »; ж) « x_i підлеглий по відношенню до x_j ».

Завдання 4. Записати композицію $C = B \circ A$ відношень $A = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,4),(3,3)\}$ та $B = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(4,2),(4,3)\}$. Знайти обернені відношення A^{-1}, B^{-1}. Перевірити результат за допомогою операцій над матрицями та графами заданих відношень.

Властивості відношень. Відношення еквівалентності і порядку.

Функції і відображення

Завдання 1. На множині $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задані відношення:

а) $\{(1,2),(2,3),(2,4),(3,2),(5,1)\}$;

б) $\{(2,1),(3,4),(4,4),(5,3)\}$;

в) $\{(1,2),(2,3),(3,2),(4,3),(5,1)\}$;

г) $\{(1,2),(2,3),(4,1),(4,5),(5,5)\}$;

д) $\{(1,5),(2,1),(3,4),(4,3),(5,2)\}$.

Які з цих відношень є функціями і які відображеннями?

Завдання 2. Які з наведених нижче відношень є функціями на множині дійсних чисел R?

а) $\{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 + 2x + 1\}$; б) $\{(x, y) \in R \times R \mid x = y^2\}$;

в) $\{(x, y) \in R \times R \mid |x| + |y| = 1\}$;

г) $\{(x, y) \in R \times R \mid y^2 + x^2 = 1 \text{ і } y > 0\}$.

Завдання 3. Відношення еквівалентності на множині $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ задане розбиттям на класи: $M_1 = \{1, 4\}$, $M_2 = \{2, 3, 7\}$ та $M_3 = \{5, 6\}$. Представити це відношення множиною впорядкованих пар, матрицею і графом.

Завдання 4. Показати, що наведені нижче відношення є відношеннями порядку і визначити тип упорядкованості.

а) «*x* важче за *y*» на множині деталей;

б) «*x* підлеглий по відношенню до *y*» на множині посад;

в) «*x* довше за *y*» на множині відрізків на площині;

г) «*x* старший за *y*» на множині людей;

д) «*x* не перевищує *y*» на множині номерів будинків;

е) «з *x* випливає *y*» на множині висловлювань;

ж) «*x* знаходиться всередині *y*» на множині кіл на площині;

з) «*x* рівний за площею *y*» на множині геометричних площ.

Завдання 5. Показати, що наведені нижче відношення є відношеннями порядку і визначити тип упорядкованості.

а) «*x* важче за *y*» на множині деталей; б) «*x* не перевищує *y*» на множині номерів будинків.

Алгебраїчні системи, їх властивості

Завдання 1. Задана множина виразів: $M = \{a + 7\sqrt{b}\}$, де a, b – дійсні числа, операції множення і додавання таких виразів. Перевірити, що ця множина є певною алгебраїчною системою.

Завдання 2. Перевірити властивості заданих законів композиції і при виконанні певних властивостей визначити тип відповідної алгебраїчної системи.

T	*a*	*b*	*c*
a	*b*	*c*	*a*
b	*c*	*c*	*b*
c	*b*	*b*	*c*

а)

T	*a*	*b*	*c*
a	*b*	*c*	*a*
b	*c*	*a*	*b*
c	*a*	*b*	*c*

б)

T	*a*	*b*	*c*
a	*a*	*c*	*b*
b	*c*	*b*	*a*
c	*b*	*a*	*c*

в)

Завдання 3. На множині $G = \{a, b, c\}$ задані два внутрішніх закони композиції: адитивний і мультиплікативний.

+	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

а)

•	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

б)

Показати, що **G** із заданими на ній законами утворюють комутативне тіло (поле).

Упорядковані множини. Решітки

Завдання 1. Знайти мажоранту, міноранту, min, max для підмножин частково впорядкованої множини $P(A)$ (сім'ї всіх підмножин множини $A=\{1, 2, 3, 4\}$) відносно $\subset$:

а) $Q=\{(1,3,4),(2,3,4),(2,3),(1,2),(1)\}$;

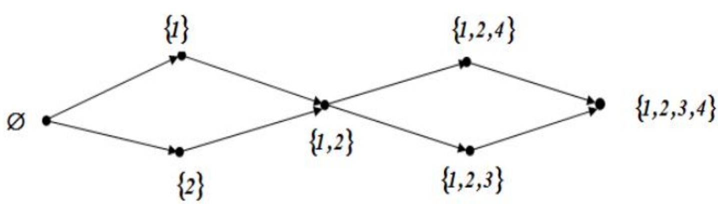
б) $M=\{(1,2,3),(1,2),(2,3),(1),(3)\}$;

в) $N=\{(1,2,4),(1,2),(1,3),(4),\varnothing\}$;

г) $K=\{(2),(2,3),(1,2,3,4)\}$; д) $L=\{(2),(1,3,4)\}$.

Завдання 2. Представити як діаграму множину дільників числа 84. Знайти мажоранту, міноранту, min, max для множин A, B, C, D. $A=\{2, 14, 21, 28\}$; $B=\{7, 21, 28, 84\}$; $C=\{1, 12, 14, 42\}$; $D=\{2, 14, 12\}$.

Завдання 3. Задана частково впорядкована множина A діаграмою Хассе:



Знайти найменшу (точну) верхню грань множини $Q_1 = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ і найбільшу (точну) нижню грань множини $Q_2 = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$.

1.5. Питання та інформаційні джерела для самостійного вивчення тем модуля

Назва розділу, модуля, теми, з якої виносяться питання на самостійне опрацювання	**Перелік питань, що вивчаються студентом самостійно**	**Література (порядковий номер за переліком)**
Тема 1. Теорія множин	1.1. Множини, операції над множинами	[1, с. 3–4], [2, с. 14–19], [3, с. 46–50], [4, с. 9–11, 20–22], [10, с. 7–16], [23], [24]
	1.2. Способи опису множини та її елементів; операцій над множинами	[1, с. 4–5], [2, с. 15–16], [4, с. 11–13], [10, с. 7–8]
	1.3. Виконання дій над елементами множини; використовування діаграм Вена або кіл Ейлера	[1, с. 10–14], [4, с. 18–22], [10, с. 16–20],
	1.4. Відношення, операції над відношеннями	[1, с. 19–27, 35–40], [2, с. 81–86], [4, с. 30–42]
	1.5. Властивості відношень, області визначення та значення відношень, способи задання відношень; визначення областей значення та областей визначення відношень; опис типів відношень. Функції	[1, с. 19, 27–35, 41–44], [2, с. 86–92], [4, с. 42–47, 54–61], [10, с. 29-34, 41-44], [21], [23], [24]
	1.6. Спеціальні класи бінарних відношень: відношення еквівалентності та порядку	[2, с. 93–102], [4, с. 47–54], [10, с. 34–41]
	1.7. Решітки та булеві алгебри	[4, с. 93–98], [17, с. 57–62], [19, с. 88]

Модуль 2. Булеві функції

2.1. Алгоритм вивчення тем модуля

Тема 2. Булеві функції

У процесі вивчення теми слід ознайомитись з поняттями: елементарні булеві функції, суперпозиція функцій.

Рекомендується приділити увагу табличному способу визначення функцій.

Особливу увагу слід звернути на канонічні форми булевих функцій, способи побудови канонічних форм.

Також слід розглянути алгебру Жегалкіна, способи побудови поліномів Жегалкіна, замкнені класи булевих функцій, функціональну повноту систем булевих функцій, теорему Поста, мінімізацію булевих функцій, скорочені, тупикові, мінімальні форми, способи їх побудови.

2.2. Термінологічний словник

Функція $y = f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ називається булевою функцією, якщо $x_1,\ldots,x_n, y \in \{0,1\}$. Змінні, що приймають значення 0 або 1. Називаються булевими змінними.

Функції однієї змінної (їх 4), а також $x_1 \vee x_2$ (диз'юнкція), $x_1 \wedge x_2$ (кон'юнкція), $x_1 \to x_2$ (імплікація), $x_1 + x_2$ (додавання за модулем 2) та $x_1 | x_2$ (штрих Шефера) називають *елементарними.*

Підстановка замість змінної іншої формули в булевій функції називається *суперпозицією булевих функцій.*

Дві функції (формули) вважаються *рівносильними* (тотожніми), якщо при будь-яких значеннях однакових аргументів ці функції (формули) приймають однакові значення.

Диз'юктивна нормальна форма (ДНФ) – це диз'юнкція скінченої кількості різних членів, кожний з яких є кон'юнкцією певних змінних або їх заперечень, взятих в кон'юнкції не більше разу.

Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ) – це кон'юнкція скінченої кількості різних членів, кожний з яких є диз'юнкція певних змінних або їх заперечень, що входять в цей член (диз'юнкцію) не більше одного разу.

Якщо в кожному члені ДНФ (КНФ) представлені всі змінні (в прямому x_i чи в інверсному $\overline{x_i}$ вигляді), то ця форма називається досконалою (ДДНФ; ДКНФ – відповідно).

Для змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ формула $\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_n$, де $\tilde{x}_i$ це або x_i або $\overline{x_i}$, називається констітуентою одиниці, а формула $\tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee \ldots \vee \tilde{x}_n$ – констітуентою нуля.

Іншу вживану алгебру булевих функцій можна побудувати, взявши операції:

– додавання за модулем 2; $x + y$;

– кон'юнкцію $x \wedge y$.

Ця алгебра носить назву *алгебри Жегалкіна*, який її запропонував. Кон'юнкція вважається старшою за $x + y$.

Будь-яка булева функція може бути приведена до канонічного багаточлена Жегалкіна, тобто до такого, який не містить числових коефіцієнтів (крім 1) та містить всі змінні тільки в першому степені (відносно операції кон'юнкції).

Позначимо множину всіх булевих функцій n змінних через P_2. Тобто $P_2 = \{y = f(x_1, \ldots, x_n); x_i, y \in \{0,1\}, i = 1,2,\ldots,n\}$. Нехай $m \subset P_2$.

Замиканням m називається множина всіх булевих функцій, що можна представити у вигляді формул, використовуючи функції тільки з множини m. Позначають замикання $[m]$.

Множина m називається *замкненою* (ще кажуть «функціонально замкненою»), якщо $[m] = m$. Замкнену множину ще називають *замкненим класом*.

Класом K_0 булевих функцій $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, що *зберігають константу* 0, називається та їх множина, для елементів якої виконується умова: $f_i(0,0,\ldots,0) = 0$, тобто, якщо всі змінні – нулі, то і значення функції – нуль.

Класом K_1 булевих функцій $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, що зберігають константу 1, називається та їх множина, для елементів якої виконується умова: $f_i(1,\ 1,\ \ldots,\ 1) = 1$, тобто, якщо всі змінні – одиниці, то і значення функції – одиниця.

Класом L лінійних булевих функцій називається множина, що складається з функцій, які в алгебрі Жегалкіна представляються канонічними многочленами вигляду $a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$, (тобто многочлени, що не містять добутків), де коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_n$ є булевими змінними.

Класом S самодвоїстих булевих функцій називається *множина самодвоїстих булевих функцій,* тобто функцій, які задовольняють умові: $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}_i\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}\right)$ для будь-яких $x_1, \ldots, x_n$.

Набори $(x_1, \ldots, x_n)$, $\left(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\right)$, називають протилежними. Тобто самодвоїста функція – це булева функція, що *на всіх протилежних наборах* приймає *протилежні значення*. Задамо на множині векторів ***n*** булевих змінних відношення передування як частковий порядок $\prec$ так: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \prec \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, якщо $\alpha_i \le \beta_i$, для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$.

Класом M монотонних булевих функцій називається множина монотонних функцій, тобто функцій, що для довільних наборів змінних $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, які знаходяться у відношенні передування $\alpha \prec \beta$, задовольняють умові: $f(\alpha) \le f(\beta)$, або іншими словами: $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \le f(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Система (множина) функцій, суперпозицією яких може бути одержана будь-яка функція з деякої множини булевих функцій, називається *функціонально повною* (повною) в множині. Якщо при цьому в системі допускаються сталі 0 та 1, то вона називається *ослаблено функціонально повною*. Система (множина) функцій з замкненого класу *m* називається його *базисом*, якщо вона є повною в *m*, але будь-яка її власна підсистема (підмножина) не є повною в *m*.

Матриці, елементами яких є константи 0,1, змінні $x_1, \ldots, x_n$ і булеві функції цих змінних, називають булевими матрицями.

Матрицею P беспосередніх зв'язків (примітивною матрицею з'єднання) називається квадратна таблиця, елементи головної діагоналі якої дорівнюють 1, а елементи $p_{ij} = p_{ji}$ є булевими функціями прямого з'єднання між узлами i та j.

Матрицею Q повних зв'язків (повною матрицею з'єднань) називається матриця, елементи якої $q_{ij} = q_{ji}$ є булевими функціями, що враховують всі можливі шляхи (не замкнені, без циклів) між узлами і та *j*.

Добутком двох булевих матриць *A* і *B* однакового порядку n називається матриця *C*, елементи c_{ij} якої обчислюються за формулою $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} \vee a_{i2}b_{2j} \vee \ldots \vee a_{in}b_{nj}$.

Пристрій, що реалізує (елементарні) булеві функції, називають *логічним елементом*. Входи логічного елемента – це булеві змінні, а вихід – булева функція, що реалізується елементом.

Канонічною задачею синтезу логічних схем у булевому базисі є мінімізація булевих функцій, тобто представлення їх в ДНФ, що містить найменшу сумарну кількість змінних та їх заперечень. Такі форми називають *мінімальними*.

Аналітичний вираз, коли подальше застосування формул склеювання та поглинання неможливе, називають тупиковою формулою.

Область визначення булевих функцій від n змінних $y = (x_1, \ldots, x_n)$ – це вектори з n елементів 0, або 1. При $n = 3$ кожен вектор є вершиною одиничного куба в тривимірному просторі. В загальному випадку $(x_1, \ldots, x_n)$ можна розглядати як вершини n-вимірного одиничного куба (далі n-куба). Такі вершини ще називаються *логічним простором*.

Елемент n-куба, що має s вимірів називають s-кубом: вершина – 0-куб; ребро – 1-куб. Таким чином, кон'юнкція з $n - s$ змінних або їх заперечень відповідає s-кубу. Кажуть s-куб покриває всі k-куби для $k < s$, якщо k-куби є елементами s-куба.

Кажуть, що така сукупність s-кубів *утворює покриття функції*. Покриття, що відповідає мінімальній формі, називають *мінімальним покриттям*.

Карти Карно – один з методів графічного зображення булевих функцій з метою їх мінімізації. Це спеціальним чином побудовані *таблиці відповідності*. Їх використовують, як правило, для булевих функцій 2, 3, 4 змінних. Карти Карно будуються так: рядки і стовпці відповідають всім можливим наборам двох змінних (або однієї), набори розташовані так, що сусідні відрізняються значенням тільки однієї змінної. Відповідні клітини, що розташовані по краям також вважають сусідніми, якщо при згортанні карти в циліндр ці клітини можуть стати сусідніми.

Мінітерм k-го рангу – це член ДНФ – елементарна кон'юнкція k літер (змінних або їх заперечень).

Максітерм k-го рангу – це член КНФ – елементарна диз'юнкція k літер (змінних або їх заперечень).

Комплексом $K(y)$ кубів функції $y = f(x_1,\dots,x_n)$ називається *об'єднання множин* $K^s(y)$ всіх її s-кубів, тобто $K(y) = \bigcup_{s=0}^{n} K^s(y)$.

*Вартістю **C** покриття* називається загальна кількість літер, що входить в нормальну форму: $C = \sum_{s=0}^{n} q_s(n-s)$, де q_s – кількість s-кубів, що утворюють покриття данної функції n змінних.

Мінімальним називають покриття з мінімально можливою вартістю покриття.

Скороченним називають покриття, яке включає всі s-куби максимальної вимірності, але не містять жодного куба, що покривається будь-яким кубом цього покриття.

ДНФ, що відповідає скороченому покриттю, називають *скороченою ДНФ,* а її мінітерми – *простими імплікантами*.

Очевидно, що *куб* скороченого покриття, який *покриває вершини, які не покривають жодні інші куби, не може бути зайвим*. Отже, він завжди війде в мінімальне покриття. Такий куб і імпліканту, що відповідає йому, називають *екстремаллю* (або *суттєвою імплікантою*). Вершини, що покриваються екстремаллю, називають *позначеними вершинами*.

2.3. План практичних занять

Зміст практичних занять	Обсяг годин
Практичне заняття 8. Булеві функції (таблиця відповідності)	2
Практичне заняття 9. Перетворення булевих функцій	2
Практичне заняття 10-11. Канонічні форми. Зведення до ДКНФ, ДДНФ	4
Практичне заняття 12. Алгебра Жегалкіна. Побудова поліномів алгебри Жегалкіна	2

Зміст практичних занять	Обсяг годин
Практичне заняття 13. Замкнені класи булевих функцій. Базис системи булевих функцій. Функціональна повнота системи булевих функцій	2
Практичне заняття 14. Мінімізація булевих функцій. Скорочені тупикові, мінімальні форми, способи їх побудови	2
Практичне заняття 15–16 Мінімізація булевих функцій. Карти Карно. Модульна контрольна робота 2	4

2.4. Перелік завдань до модуля

Завданням для самостійної роботи за другим модулем є розрахунково-графічна робота (РГР) 2, індивідуальні завдання з якої представлено в дистанційному курсі «Дискретна математика» (Частина 1). Далі представлено завдання до практичних занять за другим модулем.

Булеві функції (таблиця відповідності)

Завдання 1. Знайти значення кожної з наступних булевих функцій, коли $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1.$

1) $(x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_4;$ 2) $(x_1 x_2 \to x_3)x_4;$

3) $x_1 \overline{x_2} \to (x_2 x_3);$ 4) $(x_1 \downarrow x_2) | (x_2 \downarrow x_4).$

Завдання 2. Записати таблиці відповідності для наступних формул:

1) $\left(\overline{\overline{x}\,\overline{y}} \vee y\right) \to x;$ 2) $\left(\overline{x y}\right)\left(x z \vee \overline{y}\right);$

3) $(x \to y)(x \to \overline{z});$ 4) $p\overline{q} \vee \overline{p}q \vee pq.$

Завдання 3. Перевірити за допомогою таблиць відповідності наступні тотожності:

1) $\overline{x} = x \downarrow x = x | x;$ 2) $x_1 x_2 = (x_1 | x_2) \downarrow x_1 x_2;$

3) $x_1 \vee x_2 = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2);$

4) $\overline{x_1} \vee x_2 = (x_1 \to x_2)(x_1 \vee \overline{x_2}).$

Перетворення булевих функцій

Завдання 1. Перетворити формули до такого вигляду, щоб операція заперечення застосовувалась тільки до логічних змінних і спростити їх, якщо це можливо.

1) $\overline{xy \vee \bar{z}} \vee z\left(\overline{zy} \vee x\right);$ 2) $\overline{\overline{xy} \vee z} \vee \bar{z};$

3) $xy\left(\overline{xz} \vee \overline{xy \vee z}\right);$ 4) $x\left(xy \vee \overline{yz} \vee \overline{y \vee z\bar{\upsilon}}\right).$

Завдання 2. Підстановкою змінних записати $a \vee b$ і спростити, якщо це можливо:

1) $a = \overline{c \vee d},\ b = yz,\ c = \bar{x},\ d = \bar{z}.$

2) $a = xyz,\ b = \overline{cd},\ c = \overline{xy},\ d = z.$

3) $a = x\bar{y}\,\bar{z},\ b = cd,\ c = \overline{yz},\ d = x\bar{z}.$

4) $a = xy,\ b = c \vee d,\ c = xz,\ d = yz.$

Канонічні форми. Зведення до ДКНФ, ДДНФ

Завдання 1. Звести до ДНФ:

1) $\overline{b \vee \bar{a}\,\bar{c}} \vee \overline{a \vee \bar{c}};$ 2) $\overline{\bar{a} \vee b} \vee \overline{\overline{a \vee b} \vee c} \vee ab\bar{c};$

3) $(A \to B)(B \to C);$ 4) $(A \to B)\left(A \to \bar{C}\right).$

Завдання 2. Звести до КНФ:

1) $\overline{a \vee bc} \vee \overline{\bar{c} \vee b};$ 2) $\overline{\bar{a}\,\bar{c} \vee \bar{b}} \vee a\left(\overline{\bar{a}\,\bar{c}}\right);$; 3) $(A \to C)\left(\bar{B} \to \bar{D}\right).$

Завдання 3. Звести до ДДНФ і ДКНФ $y = \left(\left(x_1 \to x_2\right) \vee x_2\right) \to x_2x_3.$

а) шляхом тотожних перетворень;
б) за допомогою таблиці відповідності;

Завдання 4. Побудувати ДДНФ: $\bar{a}b \vee ab\bar{c} \vee b\bar{c}.$

Завдання 5. Побудувати ДКНФ:

$(p \vee q \vee r)\left(p \vee \bar{q}\right)\left(\bar{p} \vee r\right)\left(\bar{q} \vee r\right).$

Завдання 6. Записати ДДНФ і ДКНФ булевої функції $y = (x \to y)z$ за допомогою таблиць відповідності.

Алгебра Жегалкіна. Побудова поліномів алгебри Жегалкіна

Завдання 1. Виразити через операції алгебри Жегалкіна наступні функції:

1) $x \vee y \vee z;$ 2) $(x \to y)\,\bar{z};$ 3) $\bar{x}y \vee yz \vee \bar{y}\,\bar{z}.$

Завдання 2. Побудувати поліном Жегалкіна для функцій:

а) $\left(yx \vee x\bar{z}\right)\left(x \vee \bar{y}z\left(z \vee \bar{x}\,y\right)\right);$

б) $\left((y \vee z) \leftarrow (y \oplus z)\right) \vee \left((x \leftarrow t) \downarrow (x \leftrightarrow t)\right);$

в) $\left(\left(z \mid \bar{y}\right) \mid \left(z \leftrightarrow \bar{y}\right)\right) \mid \left(\left(\bar{x} \oplus \bar{t}\right) \to \left(\bar{x} \leftarrow \bar{t}\right)\right).$

Завдання 3. Формулу алгебри Жегалкіна перевести у формулу булевої алгебри. Результат перевірити за таблицями відповідності.

а) $1 + xz + yz + xyz;$ б) $1 + x + y + yz;$ в) $x + z + xy + xyz.$

Замкнені класи булевих функцій. Базис системи булевих функцій. Функціональна повнота системи булевих функцій

Завдання 1. Довести повноту заданих систем функцій шляхом зведення їх до відомих повних класів а) $\left\{x \to y, \bar{x}\right\};$ б) $\left\{x \downarrow y\right\}$; в) $\left\{x \to y, x \oplus y\right\};$ г) $\left\{x \vee y, x \oplus y, 1\right\};$ д) $\left\{x \leftrightarrow y, 1, x \vee y\right\}.$

Завдання 2. Перевірити на повноту наступні класи функцій:

а) $\left\{x \wedge y, x + y + 1\right\};$ б) $\left\{0, 1, x \leftrightarrow y\right\};$ в) $\left\{\bar{x}, (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)\right\};$ г) $\left\{x + y, x \vee y \vee \bar{z}\right\}.$

Завдання 3. Визначити, чи зберігають 0 та 1 функція $f = \overline{(x \to y)} \vee (x + yz).$

Завдання 4. Дослідити на монотонність функції із завдання 3.

Завдання 5. Перевірити, чи є самодвоїстими функції із завдання 3.

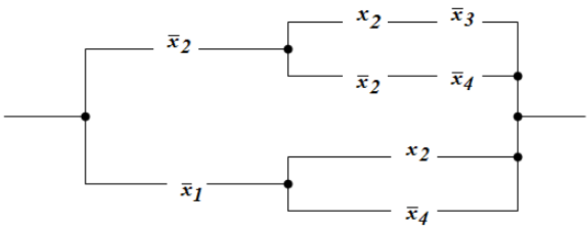
Завдання 6. Дослідити на лінійність функції із завдання 3.

Завдання 7. На основі отриманих результатів у завданнях 3–6 зробити висновки щодо функціональної повноти заданої функції.

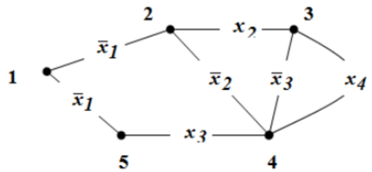
Завдання 8. Довести функціональну повноту кожної із функцій: штрих Шеффера та стрілка Пірса.

Завдання 5. Побудувати контактні схеми, що відповідають наведеним нижче булевим функціям в ДНФ та КНФ: 1) $(x_1 \vee x_2) \rightarrow \overline{x_1}\, x_3$; 2) $\overline{x_1}\ \overline{x_2} \vee \overline{x_1}\, x_3$.

Завдання 6. Записати булеву функцію, яка відповідає контактній схемі:



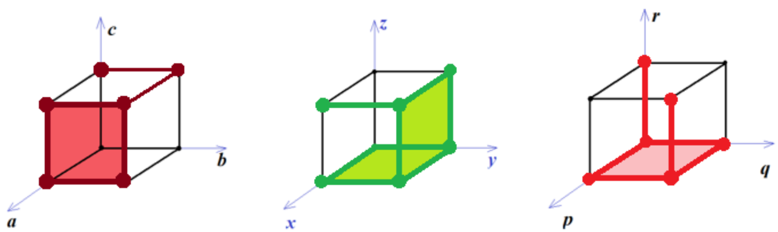
Завдання 6. Записати матрицю безпосередніх зв'язків P і матрицю повних зв'язків Q.



Мінімізація булевих функцій. Скорочені тупикові, мінімальні форми, способи їх побудови

Завдання 1. Представити функцію $y = \left(x_1 \rightarrow \overline{x_2}\right)\left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)$ на трьохвимірному кубі. Записати різні покриття цієї функції в диз'юнктивній і кон'юнктивній нормальних формах.

Завдання 2. Булева функція задана кубом (варіанти а–в).



а) б) в)

Представити різні (два-три) варіанти аналітичного представлення булевої функції, а також її мінімальну форму.

Завдання 3. Знайти мінімальну форму булевої функції, використовуючи куб.

а) $x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z;$

б) $\bar{a}\bar{b}c \vee \bar{a}b \vee abc \vee a\bar{b}c \vee a\bar{b}\bar{c}.$

Мінімізація булевих функцій. Карти Карно

Завдання 1. Представити функцію: $y = \left(x_1 \to \overline{x_2}\right)\left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)$ на карті Карно.

Завдання 2. Записати всі можливі форми функції на основі заданої карти Карно (рис. 1) та знайти мінімальну форму. Записати мінімальне покриття як підмножину комплексу кубів.

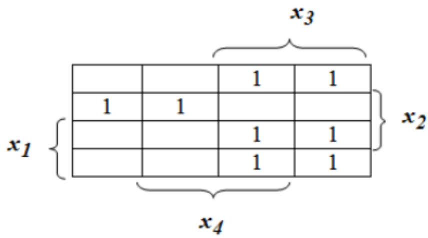


Рисунок 1 – Карта Карно до завдання 2

Завдання 3. Побудувати карту Карно для функції

$$f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xyz.$$

Завдання 4. Представити булеву функцію, що відповідає контактній схемі (рис. 2): а) таблицею відповідності; б) на багатомірному кубі; в) на карті Карно; г) комплексом кубів.

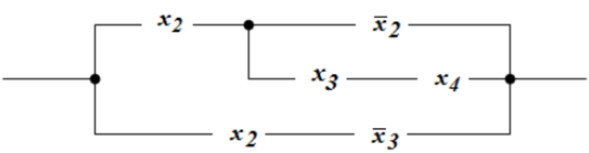


Рисунок 2 – Контактна схема до завдання 4

Завдання 5. Знайти мінімальну диз’юнктивну форму функції, що представлена на карті Карно (рис. 3).

x_3

1	1	1	1
	1		1
	1		
1	1		1

x_1, x_2, x_4

Рисунок 3 – Карта Карно для функції до завдання 5

2.5. Питання та інформаційні джерела для самостійного вивчення тем модуля

Назва розділу, модуля, теми, з якої виносяться питання на самостійне опрацювання	**Перелік питань, що вивчаються студентом самостійно**	**Література (порядковий номер за переліком)**
Тема 2. Булеві функції	2.1. Елементарні булеві функції, суперпозиція функцій	[2, с. 29–38], [4, с. 99–102, 107–109], [17, с. 240–247], [26]
	2.2. Табличний спосіб визначення функцій	[2, с. 30–33], [4, с. 102–104]
	2.3. Канонічні форми булевих функцій, способи побудови канонічних форм	[2, с. 53–56], [4, с. 120–137], [17, с. 263–268]
	2.4. Алгебра Жегалкіна, способи побудови поліномів Жегалкіна	[2, с. 49–50], [4, с. 138–145] [17, с. 273–277], [22]
	2.5. Замкнені класи булевих функцій	[2, с. 50–51], [4, с. 145–151], [17, с. 277–284]
	2.6. Функціональна повнота систем булевих функцій. Повні набори булевих функцій. Перевірка повноти наборів булевих функцій, приведення формули до заданого базису	[2, с. 51–52], [4, с. 145–155], [17, с. 284–289]

Назва розділу, модуля, теми, з якої виносяться питання на самостійне опрацювання	**Перелік питань, що вивчаються студентом самостійно**	**Література (порядковий номер за переліком)**
Тема 2. Булеві функції	2.7. Теорема Поста	[2, с. 52], [4, с. 151–155]
	2.8. Мінімізація булевих функцій	[2, с. 58–59], [4, с. 155–177], [5, с. 93–117], [17, с. 305–313]
	2.9. Скорочені, тупикові, мінімальні форми, способи їх побудови	[2, с. 60–79], [4, с. 155–177], [17, с. 307–331]
	2.10. Застосовування булевих функцій до логічних та релейно-контактних схем	[4, с. 177–182], [10, с. 84–90]

Модуль 3. Комбінаторика

3.1. Алгоритм вивчення тем модуля

Тема 3. Комбінаторика

У процесі вивчення теми слід ознайомитись із поняттями: основні комбінаторні схеми, правило суми та добутку, розміщення, переставлення, сполучення.

Особливу увагу слід звернути на комбінаторні тотожності, поліноміальну формулу, формулу включень та виключень, її застосування.

Слід приділити особливу увагу роботі з рекурентними співвідношеннями, способами розв’язання лінійних рекурентних співвідношень, з твірними функціями, їх застосуваннями.

3.2. Термінологічний словник

Область дискретної математики, яка вивчає задачі, в котрих фігурує вибір комбінацій та вивчення їх властивостей, називається комбінаторикою, або комбінаторним аналізом.

Упорядковану (наприклад, нумерацією) множину будемо називати *кортежем*.

Мультимножиною $G=\{g_1,\ldots,g_n\}$ називають сукупність об'єктів, серед яких можуть бути й однакові. *Основою* $S(G)=(e_1,\ldots,e_n)$ мультимножини G називають кортеж всіх її різних елементів. Упорядковану відповідно до елементів $S(G)$ мультимножину кратностей (повторень) елемента e_i $k_G(e_i)=\eta_i$, $i\in J_n$ називають *первинною специфікацією* мультимножини G і позначають $[G]=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$.

Підмультимножиною B мультимножини A називається мультимножина з основою $S(B)\subset S(A)$, кожен елемент якої $b\in S(B)$ справджує нерівність $k_B(b)\le k_A(b)$. Позначимо це таким же знаком $\subset$, як і для множин, $B\subset A$. Назвемо k-елементну підмультимножину B мультимножини A *k-вибіркою*, тобто B – *k-вибірка*, якщо $B\subset A, |B|=k$. *Упорядковану* k-вибірку будемо називати *загальним k-кортежем.*

Розглянемо кортеж $g\subset G$

$$g=\left(g_i,\ldots,g_{i_k}\right). \qquad (1)$$

Множина переставлень без повторень із k різних елементів. Розглянемо кортежі вигляду (1) з G при умові $\eta=n=k$. Це означає, що $[G]=(1^n)$, тобто G – множина. При цьому кортежі будуть відрізнятися один від одного тільки порядком елементів, бо $\eta=k$. Такі кортежі називають *переставленнями без повторення*. Сукупність усіх таких переставлень елементів із G утворює множину, яку позначають $P_k(G)$ і називають *множиною переставлень без повторення* з k різних елементів множини G.

Множина переставлень із повтореннями з k-елементів, серед яких n різних. Розглянемо кортеж вигляду (1) за умови, що $\eta=k,(n<\eta)$. Такі кортежі назвемо переставленнями з повтореннями. Сукупність усіх таких переставлень утворює множину, яку назвемо множиною переставлень із повтореннями. Позначимо її $P_{kn}(G)$.

Множина k-розміщень без повторення з n різних елементів. Нехай $\eta = n$, тобто G – множина. За такої умови кортеж вигляду (1) називають *k-розміщенням* (або просто розміщенням) без повторень із n елементів (по *k*). Множину всіх таких розміщень називають множиною *k*-розміщень без повторень із *n* різних елементів і позначають $A_n^k(G)$.

Множина k-розміщень із (необмеженими) повтореннями з n різних елементів. Нехай G – мультимножина з первинною специфікацією $[G] = (n^k)$, тобто $\eta = nk$, що означає, що кратності всіх елементів дорівнюють *k*. За таких умов кортеж вигляду (1) називають *k*-розміщенням із необмеженими (будь-якими можливими) повтореннями з *n* різних елементів (по *k*). Множину всіх таких розміщень позначають $\overline{A_n^k}(G)$ та називають множиною *k*-розміщень із (необмеженими) повтореннями.

Загальна множина k-розміщень. Нехай, як і раніше, $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ – мультимножина. Її основа – $S(G) = (e_1, \ldots, e_n)$, первинна специфікація – $[G] = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. Нехай $\eta_i \le k$ $\forall i \in J_n$. За таких умов кортеж вигляду (1) назвемо загальним *k*-розміщенням, а множину всіх таких кортежів – загальною множиною розміщень. Позначатимемо її $A_{\eta n}^k(G)$. Зазначимо, що в кожному загальному розміщенні g – не більше η_i елементів $e_i \forall i \in J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Розглянемо *k*-вибірку $g \subset G$ вигляду

$$g = \left\{g_{i_1}, \ldots, g_{i_k}\right\}. \tag{2}$$

Множина k-сполучень без повторень. Нехай $\eta = n$, тобто G – множина. За такої умови вибірка вигляду (2) називається *k*-сполученням (або просто сполученням) без повторень із *n* елементів (по *k*). Множину всіх таких сполучень позначимо $C_n^k(G)$ і назвемо множиною сполучень без повторення.

Множина k-сполучень із (необмеженими) повтореннями. Нехай G – мультимножина з первинною специфікацією $[G] = (k^n)$, тобто $\eta = nk$, що означає, що кратності всіх елементів дорівнюють *k*. За таких умов вибірку виду (2) називають

k-сполученням із (необмеженими) повтореннями із n різних елементів (по k). Множину всіх таких сполучень називають множиною сполучень із (необмеженими) повтореннями та позначають $\overline{C}_n^k(G)$.

Загальна множина сполучень. Нехай $G=\{g_1,\ldots,g_\eta\}$ – мультимножина з основою $S(G)=(e_1,\ldots,e_n)$ та первинною специфікацією $[G]=(\eta_1,\ldots,\eta_n)$, де $\eta_i \le k \ \forall i \in J_n$. За таких умов вибірку вигляду (2) називають загальним сполученням із n різних елементів по k. Множину всіх таких сполучень позначають $C_{\eta n}^k(G)$ та називають загальною множиною сполучень.

Комбінаторні множини, що складаються з кортежів, називають *евклідовими*, а ті, що складаються з виборок, – *неевклідовими*.

Добуток $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$ називають k-*факторіалом*. За означенням вважають $0!=1$.

$$|P_{kn}(G)|=P_{kn}=\frac{k!}{\eta_1!\,\eta_2!\ldots\eta_n!}. \tag{3}$$

Числа P_{kn} з (3) називають *поліноміальними* коефіцієнтами. Іноді їх позначають $P(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$.

$$|C_n^k(G)|=C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{4}$$

Числа C_n^k з (4) називають *біноміальними* коефіцієнтами.

Рекурентні співвідношення – це такі, в яких виражають значення $f(n)$ через $f(n-1),\ldots,f(n-k)$, де n, k – цілі змінні. Рекурентне співвідношення вигляду:

$$f(n)=F\big(f(n-1),f(n-2),\ldots,f(n-k)\big),k<n, \tag{5}$$

називається рекурентним співвідношенням *порядку k*.

Розв'язком рекурентного співвідношення (5) називається функція $f(m)$ цілого аргументу m, яка при підстановці в (5) перетворює це співвідношення в тотожність.

Якщо рекурентне співвідношення k-го порядку (5) описує послідовність $\{f_n\}$, то перші k елементів $f(1),\ldots,f(k)$ послідовності називаються *початковими умовами*.

Розв'язок рекурентного співвідношення k-го порядку називається ***загальним***, якщо він залежить від k довільних сталих $C_1,\ldots,C_k$.

Лінійними рекурентними співвідношеннями зі сталими коефіцієнтами називають рекурентні співвідношення вигляду

$$f(n+k)=a_1 f(n+k-1)+a_2 f(n+k-2)+\ldots$$

$$+a_{k-1} f(n+1)+a_k f(n)+b, \qquad (6)$$

де $a_1,a_2,\ldots,a_k$ та b – деякі задані числа.

Якщо $b\neq 0$, то (6) називають *неоднорідним* рекурентним співвідношенням, а якщо $b=0$ – то *однорідним*.

Рівняння $r^k=a_1r^{k-1}+a_2r^{k-2}+\ldots+a_{k-1}r+a_k$ називають *характеристичним* для (3) при $b=0$.

Нехай є сума:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots. \qquad (7)$$

У математичному аналізі такі суми називають *рядами.* $S_n=a_1+\ldots+a_n$.

Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$, то ряд (7) називається *збіжним,* а число S називають *сумою* ряду (7). Якщо ж S не існує, то ряд називають розбіжним і йому не приписують ніякої суми.

Твірною функцією (або генератрисою) послідовності $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ називається сума ряду $A(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

Композицією двох послідовностей $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ та $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ називається послідовність $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, загальний член якої має вигляд: $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_ib_{n-i}+\ldots+a_nb_0$.

3.3. План практичних занять

Зміст практичних занять	Обсяг годин
Практичне заняття 17–19. Основні комбінаторні схеми. Правила суми і добутку. Комбінаторні множини з повтореннями	6
Практичне заняття 20. Доведення комбінаторних тотожностей. Поліноміальна формула. Формула включень і виключень	2
Практичне заняття 21–22. Рекурентні співвідношення, розв'язування лінійних рекурентних співвідношень. Модульна контрольна робота 3	4

3.4. Перелік завдань до теми

Завданням для самостійної роботи за третім модулем є розрахунково-графічна робота (РГР) № 3, індивідуальні завдання з якої представлено в дистанційному курсі «Дискретна математика» (Частина 2). Далі представлено завдання до практичних занять за третім модулем.

Основні комбінаторні схеми. Правила суми і добутку. Комбінаторні множини з повтореннями

Завдання 1. На картках написано цифри 1, 2, 3, 4, 5. Картки перемішуються і навмання ставляться в ряд. Скільки існує способів одержання таким чином 5-ти значних чисел?

Завдання 2. Скільки різних слів (комбінацій літер) можна отримати, переставляючи літери в словах: а) «море»; б) «парабола»; в) «математика»?

Завдання 3. У групі 15 студентів. З них необхідно вибрати три особи для виконання різних обов'язків. Скількома способами це можна зробити?

Завдання 4. Скількома способами можна вибрати з повної колоди карт (52 шт.) по одній карті кожної масті? Те ж саме за умови, що серед вийнятих карт немає жодної пари однакової, тобто двох королів чи двох десяток і т. д.

Завдання 5. Скількома способами можна вибрати три різні фарби з наявних п'яти?

Завдання 6. У поштовому відділі продаються листівки 10-ти видів. Скількома способами можна придбати в ньому 12 листівок? Скількома способами можна придбати 8 листівок? Скількома способами можна придбати 8 різних листівок?

Завдання 7. З групи, яка складається з 7 чоловіків і 4 жінок необхідно вибрати 6 осіб так, щоб серед них було не менше ніж 2 жінки. Скількома способами це можна зробити?

Завдання 8. Записати основу, первинну специфікацію мультимножини $G_1 = \{1, 2, 4, 4, 4, 5, 9, 9, 9, 1\}$. Для мультимножини $G_2 = \{1, 2, 3, 3\}$ записати множину переставлень, для $k = 2$ сполучень та розміщень.

Завдання 9. З групи *n* людей вибирають *m*. Скільки варіантів вибору якщо вони будуть робити: а) однакову роботу; б) різну роботу.

$n = 30,\ m = 12.$

Завдання 10. Розсипалось слово з *n* літер. Скількома варіантами його можна скласти якщо: а) всі літери різні; б) перша літера зустрічається n_1 разів; друга n_2, усі інші різні. $n = 16$, $n_1 = 4,\ n_2 = 5.$

Завдання 11. Задано $G = \{a^{\eta_1}, b^{\eta_2}, c^{\eta_3}\}$. Записати n_1 переставлень; n_2 k_1 – сполучень; n_3 k_2 – розміщень.

$$\eta_1 = 2,\ \eta_2 = 4,\ \eta_3 = 5,\ n_1 = 3,\ n_2 = 1,\ n_3 = 2,\ k_1 = 4,\ k_2 = 3.$$

Доведення комбінаторних тотожностей. Поліноміальна формула. Формула включень і виключень

Завдання 1. Із 30 співробітників відділу англійську мову знають 19, німецьку – 17, французьку – 11, англійську та німецьку – 12, англійську та французьку – 7, німецьку та французьку – 5, усі три мови – 2. Скільки співробітників відділу не володіють іноземними мовами? Скільки з них знають тільки англійську, тільки німецьку, тільки французьку мови? Накреслити діаграму.

Завдання 2. Скільки існує цілих чисел від 0 до 999, які не діляться ні на 2, ні на 3, ні на 5, ні на 7?

Завдання 3. Скільки невід'ємних чисел, менших ніж мільйон містить всі цифри 1, 2, 3, 4? Скільки чисел складається тільки з цих цифр?

Завдання 4. У розкладі $(1+x)^n$ четвертий член дорівнює 0,96. Знайти значення x та n, якщо сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює 1024.

Завдання 5. Визначити коефіцієнти розкладу наступних біномів Ньютона: а) $(2-x)^n$; б) $(a+36)^7$; в) $(x+2)^{10}$; г) $\left(\sqrt{x}-2/x\right)^8$.

Завдання 6. Знайти розклад наступних біномів Ньютона:

а) $\left(x^2+x+1\right)^2$; б) $\left(x^2-x-2\right)^3$.

Завдання 7. Скориставшись поліноміальною формулою знайти:

а) $\left(x_1+x_2+x_3\right)^2$; б) $\left(x_1+x_2+x_3\right)^3$.

Завдання 8. Довести, що $\dfrac{\left(C_{n+1}^{r+1}-C_n^r\right)C_{n-1}^{r-1}}{\left(C_n^r\right)^2-C_{n+1}^{r+1}C_{n-1}^{r-1}}=r.$

Завдання 9. Довести, що $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}.$

Завдання 10. Розв'язати рівняння:

а) $2C_x^2+2A_x^3\cdot C_x^{x-2}=x^2-x$; б) $A_x^2\cdot C_x^{x-1}=48$;

в) $\dfrac{A_x^4}{A_{x+1}^3-C_x^{x-4}}=\dfrac{24}{23}$; г) $C_x^1+6C_x^2+6C_x^3=9x^2-14x.$

д) $C_{x+1}^{x-2}+2C_{x-1}^3=7(x-1)$; е) $2C_x^2+7C_x^1+6C_x^3=-4x^2+32.$

Рекурентні співвідношення, розв'язування лінійних рекурентних співвідношень

Завдання 1. Знайти загальний розв'язок рекурентних співвідношень:

а) $a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$; б) $a_{n+2}+3a_{n+1}-10a_n=0$;

в) $a_{n+2}-4a_{n+1}+13a_n=0$; г) $a_{n+2}+a_n=0$;

д) $a_{n+2}+4a_{n+1}+4a_n=0$; е) $a_{n+3}-9a_{n+2}+26a_{n+1}-24a_n=0$;

ж) $a_{n+3}+3a_{n+2}+3a_{n+1}+a_n=0$; з) $a_{n+4}+4a_n=0.$

Завдання 2. Знайти a_n, знаючи рекурентні співвідношення і початкові члени.

а) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = -7;$

б) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0,\ a_1 = 2,\ a_2 = 4;$

в) $a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0,\ a_1 = -(1/4),\ a_2 = -(1/2);$

г) $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = -3,\ a_3 = -29;$

д) $a_{n+2} - 4a_{n+2} + 4a_n = 0,\ a_1 = 3,\ a_2 = -2;$

е) $a_{n+2} - 6a_{n+2} + 18a_n = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = 4.$

Завдання 3. Розв'язати рекурентне співвідношення

$$f(n) + a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) = 0,\ a_1 = -1,\ a_1 = -2.$$

Завдання 4. Розв'язати рекурентне співвідношення

а) $a_{n+2} + 5a_{n+1} - 6a_n = 49;$ б) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n - 5 = 0.$

3.5. Питання та інформаційні джерела для самостійного вивчення тем модуля

Назва розділу, модуля, теми, з якої виносяться питання на самостійне опрацювання	**Перелік питань, що вивчаються студентом самостійно**	**Література (порядковий номер за переліком)**
Тема 3. Комбінаторика	3.1. Основні комбінаторні схеми	[8, с. 155–156]
	3.2. Правила суми та добутку	[4, с. 416–417], [15, с. 93–95]
	3.3. Розміщення, переставлення та сполучення з повторенням та без: визначення понять; розраховування переставлень, розміщень, сполучень та використання їх в конкретних задачах	[4, с. 418–424], [9, с. 42–51], [14, с. 79–85], [17, с. 203–208], [25]
	3.4. Комбінаторні тотожності, поліноміальна формула	[4, с. 424–426], [10, с. 56–58], [15, с. 99–101], [17, с. 208–212]
	3.5. Формула включень та виключень, її застосування	[4, с. 426–431], [10, с. 60–61], [15, с. 98–99], [17, с. 197–203]
	3.6. Рекурентні співвідношення, способи розв'язання лінійних рекурентних співвідношень	[4, с. 433–437], [9, с. 68], [17, с. 218–226]

Модуль 4. Теорія графів, скінчених автоматів, алгоритмів та математична логіка

4.1. Алгоритм вивчення тем модуля

Тема 4. Теорія графів

У процесі вивчення теми слід ознайомитись із поняттями: графи, способи визначення, шляхи у графах, зв'язні графи, ейлерові графи.

Особливу увагу слід звернути на дерева, властивості дерев, планарні графи, необхідні та достатні умови планарності, теоремі про 5 фарб.

Тема 5. Теорія скінченних автоматів

У процесі вивчення теми слід ознайомитись із поняттями: алфавіт, слова, алфавітні відображення, автомати Мілі та Мура, способи їх означення.

Особливу увагу слід звернути на генерацію алфавітних відображень автоматами, тотожність класів відображень, що генеруються автоматами Мілі та Мура, умови автоматності відображень, еквівалентні стани та еквівалентні автомати.

Слід приділити особливу увагу мінімізації скінченних автоматів, алгоритму Ауфенкампа-Хона, подіям, представленням подій в автоматах, регулярним подіям, зв'язку регулярних подій та скінченних автоматів, структурному синтезу автоматів.

Тема 6. Математична логіка. Теорія алгоритмів

У процесі вивчення теми слід ознайомитись із поняттями: числення висловлювань та предикатів, алгоритм, нормальний алгоритм Маркова, алгоритмічно нерозв'язні проблеми, машини Тьюрінга, еквівалентність різних алгоритмічних систем.

Особливу увагу слід звернути на побудову таблиць для пропозиційних форм, аксіоматичні теорії, аксіоми та правила виводу для числення висловлень, зв'язок тавтологій та теорем, непротирічність та розв'язність числення висловлень.

Слід приділити особливу увагу роботі з теоріями 1-го порядку, аксіомами та правилами виводу для теорій 1-го порядку, численням предикатів, його непротирічності.

4.2. Термінологічний словник

Упорядкована пара $< N, S >$ множини N з бінарним відношенням в ній $S \subset N \times N$ називається *графом Г*, тобто $Г =< N, S >$. N називають *носієм* графу (множиною вершин), а S *сигнатурою* графу (множиною дуг).

Підграфом $Г_A$ графа $Г=< N, S >$ називається граф $Г_A =< A, S_A >$, в який входить *лише частина* $A \subset N$ з множини N вершин графа $Г$, *разом з дугами*, що їх з’єднують (можливо не всіма), $S_A \subseteq A$.

Частковим графом (*суграфом*) графа $Г =< N, S >$ називається граф $Г_P$, який містить *всі вершини* графа $Г$ та частину дуг, що їх з’єднують, $S_p \subset S$, $Г_p =< N, S_p >$.

Частиною (або частковим підграфом) графа $Г =< N, S >$ називається граф $Г' =< N', S' >$, якщо $N' \subset N, S' \subset S$.

Дуга u, що з’єднуються з вершиною v, називається *інцидентною* вершині v, а вершина v – *коінцидентною* дузі u.

Шляхом в графі $Г$ називають таку послідовність μ дуг $u_i \mu = (u_1, ..., u_к)$, в якій кінець попередньої дуги збігається з початком наступної: $u_i = \left(n_{\alpha_i}, n_{\alpha_{i+1}}\right)$, $u_{i+1} = \left(n_{\alpha_{i+1}}, n_{\alpha_{i+2}}\right)$, α_i – номер вершини, $i = 1, 2, \ldots, к-1$. Шлях можна позначати також послідовністю вершин $n_{\alpha_i}, \ldots, n_{\alpha_{k+i}}$, де $u_i = \left(n_{\alpha_i}, n_{\alpha_{i+1}}\right)$.

Довжиною шляху $\mu = (u_1, \ldots, u_k)$ називають кількість k дуг, що його складають. Інколи дугам приписують деяку «вагу», наприклад, довжину дуги $l(u_1)$. Тоді довжина $l(\mu)$ шляху μ – це сума довжин дуг шляху: $l(\mu) = \sum_{i=1}^{k} l(u_i)$. *Шлях*, в якому жодна *дуга не зустрічається* двічі, називається *простим*. Шлях, в якому жодна *вершина не зустрічається двічі*, називається *елементарним*.

Контуром називається *скінчений шлях* $\mu = (n_1, \ldots, n_k)$, у якого *початкова* вершина збігається *з кінцевою* $n_1 = n_k$. Якщо серед вершин $n_1, ..., n_{k-1}$ не має однакових, то *контур* μ називають *елементарним*.

Контур $(a,\ a)$, утворений *однією вершиною а* (дугою $(a,\ a)$), називається *петлею*.

Часто графи задають *матрицями суміжності та інцидентності. Вершини* n_1, n_2 називають *суміжними*, якщо $n_1 \neq n_2$ та існує дуга $(n_1,\ n_2)$. Нехай $n_1,\ldots,n_к$ – вершини графа, позначимо

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{якщо є дуга} \left(n_i, n_j\right), \\ 0, \textit{якщо такої дуги немає}. \end{cases}$$

Квадратна матриця $R = \left(r_{ij}\right)$ порядку $k \times k$ називається *матрицею суміжності*.

Нехай $n_1,\ldots,n_к$ – вершини, $u_1,\ldots,u_m$ – дуги графа *Г* (без петель). Матрицю $P = \left(p_{ij}\right)$ порядку $k \times m$ називають *матрицею інциденцій* дуг графа *без петель, де:*

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{якщо дуга } u_j \textit{ виходить з вершини } n_i, \\ -1, \textit{якщо дуга } u_j \textit{ входить в вершину } n_i, \\ 0, \textit{якщо дуга } u_j \textit{ не інцидентна вершині } n_i. \end{cases}$$

Граф *з петлями* задається двома матрицями $P^+ = \left(p_j^+\right)$ і $P^- = \left(p_{ij}^-\right)$ порядку $k \times m$, що відображають інцидентність дуг і вершин. Нехай $n_1,\ldots,n_к$ – вершини, $u_1,\ldots,u_m$ – дуги графа Г, позначимо:

$$p_{ij}^+ = \begin{cases} 1, \textit{якщо дуга } u_j \textit{ виходить з вершини } n_i, \\ 0, \textit{в іншому разі}. \end{cases}$$

$$p_{ij}^- = \begin{cases} 1, \textit{якщо дуга } u_j \textit{ входить в вершину } n_i, \\ 0, \textit{в іншому разі}. \end{cases}$$

Якщо граф *Г* без петель, то $P = P^+ - P^-$.

Ребро – це відрізок, що з’єднує дві вершини.

Маршрут – послідовність ребер, які одне з одним з'єднуються вершинами. Часто простий маршрут називають ланцюгом.

Цикл – маршрут, у якого початкова і кінцева вершини збігаються.

Вершини *x* та *y* називають *суміжними*, якщо існує ребро, що їх з'єднує, і це ребро називають *инцидентним вершинам x* та *y*.

Матриця суміжності $R=\left(r_{ij}\right)$ будується так:

$$r_{ij}=\begin{cases}1, \textit{якщо є ребро} \left(n_i, n_j\right);\\ 0 \textit{ в іншому разі.}\end{cases}$$

Матриця інциденцій $P=\left(p_{ij}\right)$ визначається так:

$$p_{ij}=\begin{cases}1, \textit{якщо ребро } u_j \textit{ інцидентне вершині } n_i;\\ 0 \textit{ в іншому разі.}\end{cases}$$

Степенем d_x вершини *x* називають кількість ребер, інцидентних вершині *x*.

Якщо $d_x=1$, то вершину *x* називають *тупиковою*, якщо $d_x=0$ – *ізольованою*.

Граф називається *зв'язним*, якщо будь-які його вершини можна *з'єднати маршрутом.*

Якщо граф *Г* не зв'язаний, то його можна розбити на такі підграфи $Г_i$, які будуть зв'язні. Такі підграфи називають *компонентами зв'язності* графу *Г*.

Для орієнтованого графа зв'язність визначають, не звертаючи увагу на орієнтацію дуг. Вводиться для орграфа також поняття *сильної зв'язності*.

Орграф називається *сильно зв'язним*, якщо для *будь-яких двох вершин x* та *y* існує шлях, що йде з *x* в *y* $\left(x \neq y\right)$.

Важливим у застосуванні графів є частковий випадок неорієнтованого графу – *скінчений зв'язний неорієнтований граф D, що не має циклів, або дерево.*

Якщо пара вершин графу з'єднана двома або більшим числом ребер (дуг), то останні називаються *паралельними*, або кратними. Кількість ребер (дуг) називають *кратністю* ребра (дуги).

Граф без петель і кратних ребер називають *простим* або *звичайним*.

Граф без петель, але з кратними ребрами називають *мультиграфом*.

Якщо граф має і петлі і кратні ребра, то його називають *псевдографом.*

Простий граф, у якому всі вершини з'єднані ребрами називають *повним.*

Якщо граф простий та його множина вершин N може бути розбита на підмножини N_1 та N_2 $\left(N_1 \cap N_2 = \varnothing, N_1 = \varnothing, N_2 = \varnothing\right)$, такі, що не існує ребер, що з'єднують вершини однієї і тієї ж підмножини, то цей граф називають *дводольним* (двочастковим, біграфом).

Об'єднанням графів $\Gamma_1 = \langle N_1, E_1 \rangle, \Gamma_2 = \langle N_2, E_2 \rangle$ називається граф $\Gamma = \langle N_1 \cup N_2; E_1 \cup E_2 \rangle$. Позначатимемо $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Граф $\Gamma = \langle V, E \rangle$ називається *сумою* графів $\Gamma_1 = \langle N_1, E_1 \rangle$, $\Gamma_2 = \langle N_2, E_2 \rangle$ (позначається $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$), якщо Γ є об'єднанням графів Γ_1, Γ_2 та дводольного повного графа $K_{|A|,|B|}$, де $A = N_1 \setminus \left(N_1 \cap N_2\right);\ B = N_2 \setminus \left(N_1 \cap N_2\right)$. Тобто $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup K_{|A|,|B|}$.

Цикл називається *ейлеровим,* якщо кожне ребро графа належить йому один раз.

Граф, що має ейлеровий цикл, називають *ейлеровим графом*.

Цикл називається гамільтонів, якщо він елементарний і проходить через *кожну* вершину графа.

Граф, що містить такий цикл, називається *гамільтонів*.

Цикломатичною матрицею $C(\Gamma)$ графа Γ називається матриця, що складається з рядків (векторів циклу) C_i, які взаємно однозначно відповідають всім *елементарним циклам* графа Γ, а елементи c_{ij} рядка C_i означаются так:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{якщо ребро } u_j \textit{ входить в цикл } i; \\ 0, \textit{в іншому разі.} \end{cases}$$

Найменша кількість векторів простору, через які можна представляти інші вектори циклів як лінійні комбінації векторів, називається *базисом простору циклів*.

Базисом циклів графа Г називається *базис простору циклів графа Г*. (нагадаємо, що він складається з *елементарних циклів*).

Кістяком називають кістяковий підграф (нагадаємо, що це теж саме, що і *частковий граф* або суграф), *що є деревом*, тобто зв'язним графом без циклів.

Хордою кістяка *K* в зв'язному графі *Г* називають будь-яке *ребро* графа *Г*, що *не належить* кістяку *K*.

Цикломатичним числом $\nu(\Gamma)$ графа *Г* називають *кількість хорд* будь-якого *кістяка* в *Г*.

Лісом називається незв'язний граф, що *не містить циклів*. Тобто ліс – це граф, у якого кожна компонента зв'язності є деревом.

Алфавітом A називають скінченну множину елементів $\{a_i\}_{i=1}^{n}$, кожен елемент якої називають *літерою. Словом* над деяким алфавітом називають будь-яку скінчену послідовність його літер.

Можна розглядати *відображення*, що переводить слова алфавіту А в слова алфавіту *B* (*B* може бути тим же самим алфавітом *A*). Таке відображення називають *алфавітним відображенням*. Алфавіт *A* називають *вхідним*, а алфавіт *B* – *вихідним*. Сукупність слів, на якій відображення означено називається його *областю визначення*. Якщо область визначення скінченна, то відображення може бути задано *таблицею відповідності*. Алфавітне відображення ще називають алфавітним оператором.

Часом в *дискретних* системах вважають *лінійно упорядковану множину T*. Як правило, $T=\{t_i\}_{i=0}^{n}$, де $t_{i+1}=t_i+\Delta t$. Елементи t_i множини Т називають *тактовими моментами* або *тактами* і часто позначають: 0, 1, 2, …, вважаючи $\Delta t=1$.

Скінченним автоматом (СА) називають п'ятірку $\langle A, X, Y, \delta, \lambda\rangle$, де *A, X, Y* – скінченні множини, які називають:

A – множина внутрішніх *станів* (або просто множина станів),
X – множина *вхідних сигналів* (*вхідний алфавіт*);
Y – множина *вихідних сигналів* (*вихідний алфавіт*);
а δ та λ – функції:

$\delta: A\times X\to A$ – функція *переходів*; $a(t+1)=\delta(a(t),x(t))$.

$\lambda: A\times X\to A$ – функція *виходів*: $y(t)=\lambda(a(t),x(t))$.

Скінченні автомати розглядають у двох формах:

1) вихід СА $y(t)$ в даний такт *t* залежить від його стану $a(t)$ в цьому такті і значення входу $x(t)$:

$$y(t)=\lambda\big(a(t),x(t)\big). \qquad (1)$$

Цю форму СА ввів Мілі, тому СА з властивістю (1) називають *автоматом Мілі,* або СА 1-го роду.

2) вихід $y(t)$ СА в даний такт t залежить від його стану $a(t)$ в цьому такті і не залежить від значення входу:

$$y(t)=\lambda\big(a(t)\big). \qquad (2)$$

Ці форми СА ввів Мур. Тепер СА з властивістю, що виражена в (2), називають *автоматом Мура* або СА 2-го роду.

Початкові відрізки $p=x_0x_1\ldots x_t$, $q=y_0y_1\ldots y_t$ вхідної і вихідної послідовностей можна розглядати як *слова з алфавітів X та Y*. Позначимо X^* множину слів алфавіту *X*, а Y^* – алфавіту *Y*. Отже слово $q\in Y^*$ однозначно визначається словом $p\in X^*$ та початковим станом *a*. Таким чином, означено *відображення* $\varphi_a : X^*\to Y^*$, яке *називають автоматним відображенням* (або *операторам, представленим в автоматі*) *при початковому стані a.*

Автоматні відображення мають властивість зберігати довжину слів та початкові відрізки. Тобто, якщо X^* та Y^* – множини слів алфавітів *X* і *Y*, то *відображення* $\varphi_a : X^*\to Y^*$ є автоматним тоді і тільки тоді, коли *довжина слова* $\varphi_a(\rho)$ дорівнює довжині слова ρ, а також $\varphi_a(\rho)$ є початковим відрізком слова $\varphi_a(\rho q)\forall\rho,q\in X^*$.

Стани a та b двох автоматів зі спільними вхідним та вихідним алфавітом називаються *еквівалентними*, якщо однаковими є автоматні відображення $\varphi_a=\varphi_b$, де φ_a – для одного СА, φ_a – для іншого СА.

Автомати A_1 та A_2 називаються *еквівалентними*, якщо для будь-якого стану a автомату A_1 існує стан b автомату $A_2 : a\sim b$.

Автомат A_0 називається *зведеним,* якщо всі його стани попарно не *еквівалентні*.

Назвемо *явно еквівалентними* станами такі еквівалентні стани a_i, a_j, для яких рядки в таблиці переходів і таблиці виходів однакові, або стають однаковими при заміні a_i на a_j.

Назвемо *явно відмінними* станами СА такі стани a_i, a_j, для яких *відрізняються* відповідні їм рядки в таблиці *виходів*.

Минущий стан – стан, із якого можна перейти в інший (принаймні в один), але після цього в *цей стан уже не можна повернутися*. Відповідна вершина не має дуг, що заходять; має принаймні одну дугу, що виходить з неї.

Безвихідний стан – стан, в який можна перейти принаймні з одного іншого стану, але вийти з нього вже не можна. Відповідна вершина не має дуг, що виходять (крім можливо петель), має принаймні одну дугу, що входить.

Ізольований стан – стан, з якого не можна перейти ні в який інший стан і в нього не можна попасти ні з якого іншого стану. Відповідна вершина містить тільки петлю.

Подією в теорії автоматів називають довільну множину слів в деякому фіксованому *скінченому* алфавіті.

Перелічувана автоматом *A* подія – це *множина* слів, яку отримують на *виході* автомату *A*, коли на його *вхід* подають всі можливі вхідні слова.

Зображена автоматом *A* подія – це *множина всіх вхідних слів*, що переводить автомат *A* з початкового стану в один з так званих заключних станів.

Правильно побудовані вирази в мові *L* будемо називати *L-виразами,* а події, які вони задають *L-подіями.*

Для побудови *мови регулярних виразів* (як алгебри подій) використані 3 операції над подіями:

1) $A \vee B$ – *диз'юнкція (об'єднання)* подій;
2) *AB – добуток (конкатенація) подій*;
3) $\{A\}$ – ітерація подій (друге позначення A^*).

Диз'юнкція подій збігається з теоретико-множинною операцією об'єднання множин *A* та *B*.

Добуток подій означається через добуток слів. *Добутком слів p* і *q* називається слово *pq*, утворене дописуванням до слова *p* слова *q* справа. *Подія AB* складається з тих і тільки тих слів, які мають вигляд *pq*, де $p \in A, q \in B$.

Позначимо $\underbrace{AA...A}_{\text{n раз}} = A^n$ – добуток n подій A.

Ітерацію можна представити через добуток та диз'юнкцію так:

$$\{A\} = A \vee A^2 \vee \ldots \vee A^n \vee \ldots$$

Іншими словами *слово q тоді і тільки тоді* належить $\{A\}$, коли має вигляд p^n, де $p \in A$, $p^n = pp\ldots p$.

Нехай $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ – алфавіт, над яким розглядаються події. *Події*, що складаються з однолітерних слів $x_i, i = 1,2,\ldots m,$ називаються *елементарними* і позначаються відповідними літерами алфавіту x_i.

Вирази, що побудовані із символів елементарних подій, символів операцій диз'юнкції, добутку, ітерації з використанням круглих дужок, називають *регулярними виразами в алфавіті X*. Будь-який регулярний вираз *R* визначає деяку подію *S* (*S* одержується як результат виконання всіх оперцій, що входять в *R*). *Подія*, що визначається таким чином, називається *регулярною* подією над алфавітом *X*. Тобто регулярною називається подія, одержана з елементарних за допомогою застосування скінченої кількості операції диз'юнкції, конкатенації та ітерації.

Триггер – це логічна схема зі зворотніми зв'язками, яка може знаходитись в одному з *двох стійких станів*, які забезпечуються цими зв'язками.

Висловленням будемо називати твердження, відносно якого можна сказати, що воно істинне або хибне.

Предикат – це логічна функція $P(x)$, яка приймає одно з двох значень $\{0,1\}$ (або $\{T,F\}$), а x – вибирається з деякої множини об'єктів $M : P(x) \in \{0,1\}, x \in M$.

Сентенціональні зв'язки – це слова «не», «і (та)», «або», «якщо … то», «якщо і тільки якщо» та їх синоніми.

Означення формули в численні висловлювань рекурсивне:

1) змінні висловлювання є формулами;

2) якщо *A, B* – формули, то $AB, A \vee B, A \to B, A \sim B, \bar{A}$ – також формули.

Тавтологією називають формулу, яка тотожна одиниці (на будь-якому наборі), якщо формула є тотожна нулю, її називають протиріччям.

Дві формули називають рівносильними, якщо вони на всіх однакових наборах значень змінних, що входять у них, приймають однакові значення.

Кажуть, що формула *B* є логічним наслідком формули *A*, і пишуть $A \Rightarrow B$, якщо *B* істинне на всіх наборах значень змінних, для яких *A* істинне.

Формула називається вивідною в численні висловлювання, якщо вона може бути одержана зі скінченної сукупності вихідних формул шляхом скінченної кількості застосувань правил виведення.

Предикатом $P(x_1,...,x_n)$ називають двозначну логічну функцію, аргументами якої $(x_1,...,x_n)$ є об'єкти з множини їх визначення $X_1,...,X_n$ – відповідно. Число *n* називають місністю предиката, а $P(x_1,...,x_n)$ – *n-місним предикатом.* Аргументи називають *предметними змінними,* конкретні значення аргументів – *предметними сталими.* Предметні змінні і предметні сталі разом називають *термами***.**

Підстановкою замість предметної змінної предметної сталої називається *заміщенням.*

Нехай $P(x)$ – предикат, що визначений на *M,* $(x \in M)$. Твердження, що всі $x \in M$ мають властивість $P(x)$ записується за допомогою знака ∀, який називають *квантором загальності,* у вигляді: $\exists x\, P(x)$, що читається: «для всіх *x, P* від *x*».

Твердження, що існує хоча б один об'єкт $x \in M$, що має властивість $P(x)$, записується за допомогою знака ∃, який називають *квантором існування*, у вигляді: $\exists x\, P(x)$, що читається: «існує таке *x*, що *P* від *x*».

Змінні, до яких застосовані квантори, називають *зв'язаними*, інші – *вільними*.

Вирази, які можна утворити застосуванням до предикатів сентенціональних зв'язок і кванторів, називають *формулами логіки предикатів.*

Формули логіки предикатів, які приймають значення 1 («істинно») при кожному заміщенні вільних змінних і предикатів, називають *загальнозначущими.*

Означення логічного висновку в логіці висловлювань: формула B є логічним висновком формул $A_1, A_2, \ldots, A_m$, тобто: $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow B$, якщо для кожної множини визначення і для кожного заміщення змінних в формулах $A_1, \ldots, A_m$ в цій множині, формула B – істинна при умові, що всі A_i – істинні. При цьому для всіх вільних входженнях деякої змінної X в будь-які A_i вибирається одне й те ж значення x з множини визначення, тобто таке x розглядають як сталу.

Числення – це формальний апарат оперування зі знаками і знакосполученнями певного виду, який використовується при точному описанні задач та їх розв’язків.

Іншими словами *числення* – це система, що задає множину шляхом означення вихідних елементів (*аксіом*) і *правил виводу,* кожне з яких описує спосіб побудови нових елементів з вихідних та вже побудованих.

Непротирічністю аксіоматичної теорії називається її властивість, що з її аксіом випливає (не виводиться застосуванням правил виводу) протиріччя, тобто два твердження, одне з яких є запереченням іншого.

Повнотою системи аксіом A називається та властивість множини формул A, що будь-яка формула f, або її заперечення, є логічним наслідком множини A.

Числення предикатів – загальна назва для логічних числень. Логічні закони, які доводяться в них формулюються в тій чи іншій логічній мові, яка містить квантори та символи для предикатів.

Як правило, під *алгоритмом* розуміють сукупність правил, що визначає ефективну процедуру розв’язування будь-якої задачі з деякого заданого класу задач.

Розглянемо поняття алгоритму в алфавіті *словарного алгоритму.* Кажуть, що задано *алгоритм в алфавіті A*, який застосовується до слова p і перетворює його в слово q, якщо починаючи зі слова p, виконуючи задані правила, отримують слово q, на якому процес перетворення згідно заданих правил обривається (закінчується).

Множина слів, до яких може бути застосовано данний алгоритм, називається областю його *застосування.*

Два алгоритми в деякому алфавіті називають *еквівалентними,* якщо області їх застосування збігаються і результати перетворення ними будь-якого слова (з області застосування) також збігаються.

Одне важливе уточнення поняття алгоритму дав радянський вчений Марков. Він дав норми (правила) застосування підстановок в словарних алгоритмах. Тому поняття алгоритму за Марковим, яке включає ці вказівки про порядок застосування підставлень, називають *нормальним алгоритмом Маркова.*

Означення

1. Задається алфавіт А.
2. Задаються правила підстановки слів з літер алфавіту A замість інших таких слів. Позначимо таке правило $W_1 \to W_2$ (Частина слова (слово) W_1 заміняється словом W_2). (Вважаємо, що символ $\to \in A$).
3. Фіксуємо порядок застосування цих підстановок.
4. Виходячи з заданого (довільного) слова W з літер алфавіта A, перебираючи задані підстановки, знаходять першу підстановку (нехай це: $W_1 \to W_2$), в якій зустрілися ліва частина W_1, що входить в W.
5. Ця підстановка використовується для перетворення W в інше слово $\tilde{W}$, в якому замість першого входження W_1 підставляється W_2.
6. Далі процес повторюється (переходимо на пункт 4), виходячи зі слова $W = \tilde{W}$, поки не здійсниться його зупинка. Зупинка відбувається в таких двох ситуаціях:
   - підстановкою одержується таке слово, що жодна з лівих частин заданих підстановок в нього не входить (і отже не може бути застосована);
   - при отриманні слова використана остання підстановка.

4.3. План практичних занять

Зміст практичних занять	Обсяг годин
Практичне заняття 23–24. Графи, способи задання, характеристики, орієнтовані графи, неорієнтовані графи	4
Практичне заняття 25–26. Ейлерові графи, планарні графи. Умови планарності. Гамільтонів та ейлерів цикли. Теорема про п'ять фарб	4

Зміст практичних занять	Обсяг годин
Практичне заняття 27. Дерева та їх властивості	2
Практичне заняття 28–29. Автомати, алфавіт, алфавітні відображення Автомати Мілі та Мура, способи визначення	4
Практичне заняття 30. Еквівалентні стани, еквівалентні автомати. Мінімізація скінчених автоматів. Структурний синтез автоматів	2
Практичне заняття 31. Числення висловлень і предикатів. Предикати і квантори. Аксіоми та правила виводу для числених висловлень	2
Практичне заняття 32. Нормальні алгоритми Маркова. Машина Тюрінга. Модульна контрольна робота 4	2

4.4. Перелік завдань до теми

Завданням для самостійної роботи за четвертим модулем є розрахунково-графічна робота (РГР) № 4, індивідуальні завдання з якої представлено в дистанційному курсі «Дискретна математика» (Частина 2). Далі представлено завдання до практичних занять за четвертим модулем.

Графи, способи задання, характеристики, орієнтовані графи, неорієнтовані графи

Завдання 1. Над графом зображеним на рисунку виконати такі дії:

а) відмітити вершини та ребра орграфа літерами або цифрами;

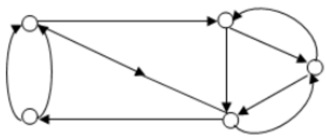
б) записати всі ребра як упорядковані пари вершин і помітити паралельні ребра;

в) визначити додатні та від'ємні степені вершин, підрахувати їх суми, відмітити їх властивості (властивості сум);

г) чи є граф однорідним (якщо ні, то додаванням ребер перетворити його в однорідний)?

д) до якого типу належить граф, що розглядається (простий, мультиграф, псевдограф)?

е) записати матрицю інцендентності і матрицю суміжності графа.



Завдання 2. З графом, зображеним на рисунку із завдання 1 виконати вправи:

а) знайти деякі шляхи від вершини n2 до вершини n1, довжиною: 1) 4 дуги, 2) 6 дуг;

б) вказати усі прості й елементарні шляхи з вершини n2 у вершину n1;

в) записати приклади контурів для вершини (6 штук). Виділити серед них прості та елементарні контури.

Завдання 3. Над неорієнтованим графом, зображеним на рисунку нижче, виконати такі дії:

а) відмітити вершини та ребра графа літерами або цифрами;

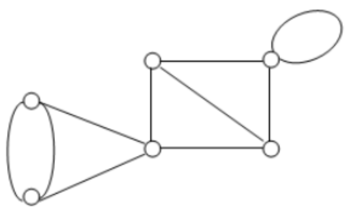
б) записати всі пари ребер як невпорядковані пари вершин і відмітити кратні ребра та петлі;

в) визначити степені усіх вершин і підрахувати кількість, а також суми степеней усіх вершин і суму всіх непарних степеней вершин графа. Що можна сказати про ці степені?

г) чи є граф однорідним (якщо ні, то додаванням ребер перетворити його в однорідний)?

д) до якого типу належить граф, що розглядається (простий, мультиграф, псевдограф)?

е) записати матрицю суміжності графа.



Завдання 4. По матрицям суміжності побудувати графи. Охарактеризувати отримані графи та записати для них матриці інцидентності.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

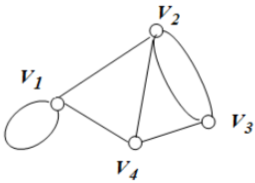
Завдання 5. Для заданого у завданні 1 графа зобразити підграф, який складається із 3 вершин; часткові графи; часткові підграфи, які складаються з 3 вершин і 4 дуг.

Завдання 6. Виконати наступні вправи з графом на рисунку:

а) знайти будь-які маршрути довжини 5 і довжини 8 між V1 та V4;

б) визначити всі ланцюги і прості ланцюги між вершинами V1 та V4;

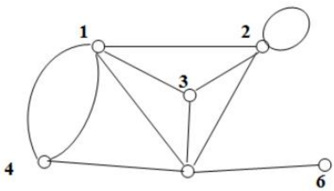
в) визначити всі прості цикли графа.



Завдання 7. Для графа на малюнку побудувати:

а) частину, що складається із чотирьох вершин і п’яти ребер;

б) суграф із чотирма, п’ятьма та шістьма ребрами.



Ейлерові графи, планарні графи. Умови планарності. Гамільтонів та ейлерів цикли. Теорема про п’ять фарб

Завдання 1. Для заданого графу, що зображено на рис. 1:

1) знайти всі елементарні цикли;

2) цикломатичну матрицю;

3) утворити кістяк у порядку зростання номерів ребер. Знайти базисні вектори, які відповідають цьому кістяку;

4) за допомогою базису утворити всі елементарні цикли. За теоремою Ейлера знайти цикломатичне число;

5) для отриманої цикломатичної матриці знайти базис.

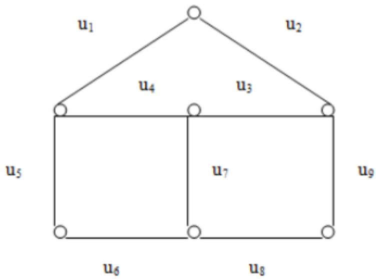
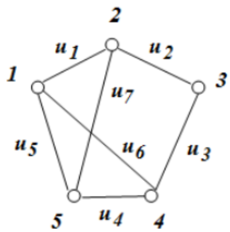


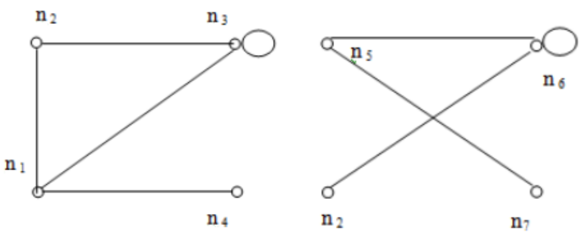
Рисунок 1 – Граф із циклами

Завдання 2. Дано граф:



Знайти: гамільтонів та ейлеровий цикли, всі елементарні цикли, побудувати цикломатичну матрицю, базис, знайти цикломатичне число, зобразити кістяк і знайти його хорди. Довести або спростувати планарність графа.

Завдання 3. Побудувати об’єднання і суму графів:



Завдання 4. Показати, що кількість ребер повного графа дорівнює $12p(p-1)$, де p – кількість його вершин (тобто знайти залежність між кількістю ребер повного графа та кількістю його вершин).

Завдання 5. Показати, що графи, зображені на рис. 2 не є плоскими. Яку мінімальну кількість ребер необхідно видалити з графа, щоб він перетворився у плоский? Скільки є різних способів такого перетворення з точністю до ізоморфізму?

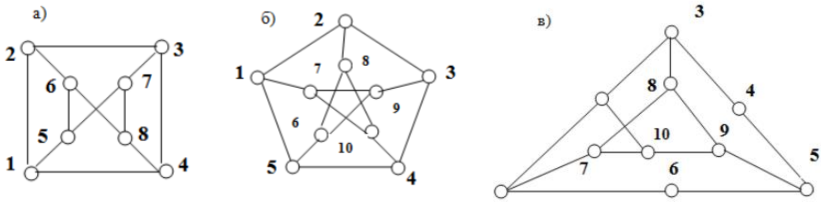


Рисунок 2 – Графи до завдання 5

Завдання 6. Розфарбувати карту, зображену на рис. 3 мінімальною кількістю кольорів (4 кольори).

Рисунок 3 – Карта до завдання 6

Дерева та їх властивості

Завдання 1. Скільки різних дерев, які можна побудувати на 4, 5, 6 нумерованих вершинах?

Завдання 2. Побудувати всі можливі дерева для чотирьох вершин. Скільки з них є не ізоморфними?

Завдання 3. Побудувати всі можливі дерева для шести вершин. Скільки з них є не ізоморфними?

Завдання 4. Побудувати мінімальний кістяк, використовуючи жадібний алгоритм Краскала для графа (рис. 4).

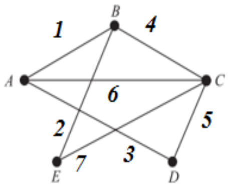


Рисунок 4 – Граф до завдання 4 (для побудови кістяка)

Завдання 5. Побудувати різні кістяки (мінімум три варіанти), використовуючи різні способи для графа (рис. 5).

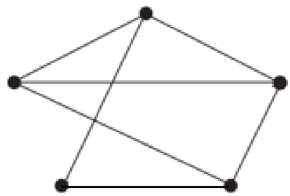


Рисунок 5 – Граф до завдання 5 (для побудови кістяка)

Автомати, алфавіт, алфавітні відображення. Автомати Мілі та Мура, способи визначення

Завдання 1. Накопичувальний лічильник, на вхід якого подаються двійкові цифри 0 та 1, підраховує за модулем 3 загальну кількість одиниць, що подаються на вхід.

а) записати вхідний і вихідний алфавіти, а також визначити множину станів;

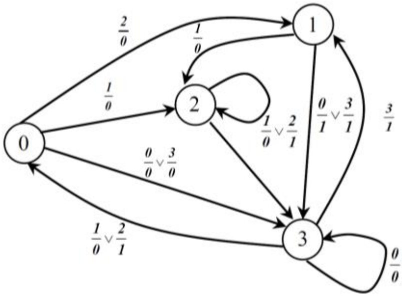
б) записати таблицю переходів, таблицю виходів і загальну таблицю переходів заданого СА;

в) побудувати граф автомата та записати матрицю з’єднань.

Завдання 2. На основі графа, зображеного на рисунку, наведеному нижче, визначити вихідну послідовність і зміну станів автомата при початковому стані 3 і вхідній послідовності:

а) $X = (01233012)$;

б) $X = (20132002)$; в) $X = (3100230211)$.



Завдання 3. Текст складається із 32 літер алфавіту і проміжків між словами. Він аналізується з метою підрахунку слів, що починаються на «а» і закінчуються на «ія» (таких як, наприклад, «арія», «анатомія»,…). Усі літери, крім «а», «і», «я» позначимо через α, а проміжок через β.

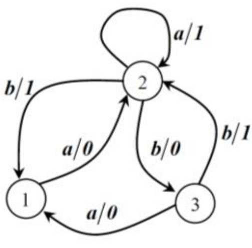
1. Охарактеризувати цю систему як скінчений автомат. Записати вхідний, вихідний алфавіти і множину станів.

2. Записати таблицю переходів і матрицю з'єднань, побудувати граф автомата.

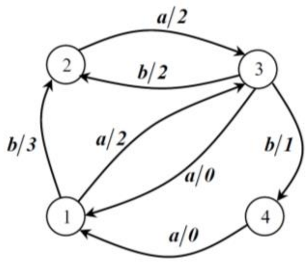
3. Визначити вихідну послідовність і послідовність станів автомата, якщо на вхід при початковому стані «нове слово» подаються слова: армія, анатомія, автобус.

4. Розв'язати задачу за умови, що аналіз тексту здійснюється з метою підрахунку слів, які закінчуються на «тор».

Завдання 4. Побудувати таблиці переходів та матриці з'єднань для автоматів, представлених графами.



а)



б)

Завдання 5. Для графа із завдання 2 побудувати загальну таблицю переходів.

Еквівалентні стани, еквівалентні автомати. Мінімізація скінчених автоматів. Структурний синтез автоматів

Завдання 1. Знайти явно еквівалентні та явно не еквівалентні стани скінченого автомата.

Стани	Входи		
	x_1	x_2	x_3
1	0/1	1/0	2/1
3	0/0	2/1	1/0
0	2/0	3/1	1/0
2	3/1	2/0	1/1

Завдання 2. Знайти мінімальну форму заданого скінченого автомата, використовуючи алгоритм Ауфенкампфа-Хона.

Стани	Входи		
	x_1	x_2	x_3
0	4/2	5/0	0/1
1	6/1	1/1	2/0
2	3/1	1/2	4/0
3	4/2	5/0	0/1
4	3/1	1/2	2/0
5	4/2	0/0	0/1
6	5/1	1/1	3/0

Завдання 3. Задано скінчений автомат загальною таблицею переходів:

Стани	Входи		
	0	1	2
0	3/1	7/1	6/0
1	8/1	3/0	5/0
2	5/0	1/0	6/1
3	0/1	1/0	6/1
4	0/0	2/0	7/1
5	2/0	1/0	6/1
6	4/1	2/1	2/0
7	0/0	5/0	7/1
8	3/1	7/1	6/0

Знайти явно відмінні стани та явно еквівалентні заданого СА. Побудувати скорочений СА.

Числення висловлень і предикатів. Предикати і квантори. Аксіоми та правила виводу для числених висловлень

Завдання 1. Перевірити методом контрприкладу, чи є формула тавтологією: $\left(A\to\overline{B}\right)\wedge C\wedge\left(B\to\overline{C}\right)\wedge\left(A\to D\right)\to D$.

Завдання 2. Методом відшукання контрприкладу довести, що формула є логічно істиною:

$$\left(A\to B\right)\wedge\left(C\to D\right)\to\left(A\vee C\to B\vee D\right).$$

Завдання 3. Довести, що ця формула є тавтологією:

$$\left(A\to\left(B\to C\right)\right)\to\left(\left(C\to D\right)\to\left(A\to\left(B\to D\right)\right)\right).$$

Завдання 4. Записати у вигляді логічної формули такі твердження:

1) якщо «Д» гратиме в основному складі (*A*) і черговий матч не буде перенесено (*B*), то «Д» виграє черговий матч (*C*).

2) якщо «Д» виграє черговий матч, то буде чемпіоном країни (*D*).

3) якщо міжнародний матч (*E*) не буде призначено на цей тиждень, то черговий матч не буде перенесено.

4) міжнародна зустріч на цей тиждень не буде призначена і «Д» гратиме в основному складі. Висновок: «Д» – чемпіон.

Завдання 5. Записати символікою логіки предикатів:

1) кожне число кратне 10 – кратне 5, кратне 2;

2) деякі вписані в коло чотирикутники є квадратами;

3) будь-яке непарне число є простим;

4) ніяке непарне число не є простим;

5) деякі непарні числа – прості.

6) деякі непарні числа не є простими.

Завдання 6. Задане висловлювання: «Для того, щоб матриця мала обернену, необхідно, щоб її визначник був відмінним від нуля». Які із наведених нижче висловлювань логічно слідують із цього?

а) для того, щоб матриця мала обернену, достатньо, щоб її визначник був рівний нулю;

б) для того, щоб визначник матриці був відмінний від нуля, достатньо, щоб ця матриця мала обернену;

в) для того, щоб визначник матриці був рівний нулю, необхідно, щоб ця матриця не мала оберненої;

г) матриця має обернену тоді і тільки тоді, коли визначник її не рівний нулю;

д) визначник матриці рівний нулю тоді і тільки тоді, коли ця матриця не має оберненої.

Нормальні алгоритми Маркова. Машина Тюрінга

Завдання 1. Програма роботи машини Тюрінга задана наступною функціональною таблицею:

	s_0	s_1	s_2	s_3
1	$\alpha П s_2$	$1 Л s_1$	$1 П s_2$	$1 Н s_3$
$\wedge$	$\wedge П s_0$	$\wedge П s_0$	$1 Н s_1$	$\wedge П s_0$
$*$	$* Н s_3$	$* Л s_1$	$* П s_2$	$\wedge Н s_3$
α	$\alpha П s_0$	$\alpha П s_0$	$1 Н s_1$	$1 Л s_3$

а) записати зовнішній і внутрішній алфавіти машини (зірочка $*$ означає відокремлення між числами, що задаються послідовностями одиниць);

б) як змінити функціональну таблицю, щоб вона реалізувала алгоритм множення двох чисел?

Завдання 2. Нехай алфавіт $A = \{a, b, c\}$. Застосувати нормальний алгоритм Маркова до рядків «c a b c c», «c c c b a», якщо задано підстановки:

1. $ba \to ab$.
2. $ca \to ac$.
3. $cb \to bc$.

Завдання 3. Скласти функціональну схему машини Тюрінга, яка реалізує функцію слідування $S(n) = n+1$, де n – натуральне число в алфавіті $A = \{1\}$.

Завдання 4. Скласти нормальний алгоритм множення двох натуральних чисел n та m, записаних в алфавіті $A = \{1\}$.

4.5. Питання та інформаційні джерела для самостійного вивчення тем модуля

Назва розділу, модуля, теми, з якої виносяться питання на самостійне опрацювання	**Перелік питань, що вивчаються студентом самостійно**	**Література (порядковий номер за переліком)**
Тема 4. Теорія графів	4.1. Графи, способи визначення, способи задання графів; операцій над графами; використання графів для моделювання різних об'єктів; виконання операцій над графами	[4, с. 253–260], [11, с. 41–57], [17, с. 145–150], [20, с. 86–93], [27], [28], [29]
	4.2. Шляхи в графах, зв'язні графи. Властивості різних типів графів (зв'язні графи, дводольні графи, Ейлерові графи, Гамільтонові графи)	[4, с. 246–248], [11, с. 41–57], [14, с. 109–130], [17, с. 157–167], [27]
	4.3. Дерева, властивості дерев	[4, с. 269–286], [12, с. 218–223], [17, с. 170–175], [20, с. 97–102]
	4.4. Планарні графи, необхідні та достатні умови планарності	[1, с. 105–109], [10, с. 110–111], [17, с. 175–182]
	4.5. Теорема про 5 фарб. Теореми про розфарбування планарних графів	[15, с. 120–122], [4, с. 260–269], [17, с. 182–185], [19, с. 13, 36–37]
Тема 5. Теорія скінченних автоматів	5.1. Алфавіт, слова, алфавітні відображення	[4, с. 394–398], [17, с. 356–360],
	5.2. Автомати Мілі та Мура, способи визначення	[15, с. 170–183], [19, с. 32–33]
	5.3. Еквівалентні стани та еквівалентні автомати. Визначення еквівалентності станів і автоматів, побудова еквівалентного розбиття	[19, с. 33]
	5.4. Мінімізація скінченних автоматів, алгоритм Ауфенкампа-Хона	[15, с. 183–187]

Продовження питань та інформаційних джерел для самостійного вивчення тем модуля

Назва розділу, модуля, теми, з якої виносяться питання на самостійне опрацювання	**Перелік питань, що вивчаються студентом самостійно**	**Література (порядковий номер за переліком)**
Тема 5. Теорія скінченних автоматів	5.5. Події, представлення подій в автоматах	[8, с. 238–240]
	5.6. Регулярні події, зв'язок регулярних подій та скінченних автоматів	[8, с. 238–240]
	5.7. Структурний синтез автоматів	[8, с. 241–242]]
	5.8. Основи теорії автоматів, властивостей автоматів, типів автоматів (скінченні автомати, автомати з магазинною пам'яттю, нескінченні автомати). Приклади використання скінченних автоматів для моделювання реальних об'єктів	[19, с. 35–37]
Тема 6. Вступ в математичну логіку	6.1. Числення висловлювань. Знання таблиць істинності та їх ролі у встановленні істинності складних висловлень; встановлення істинності алгебраїчним методом	[9, с. 154], [13, с. 9–19], [18, с. 6–14]
	6.2. Побудова таблиць для пропозиційних форм	[18, с. 14–28]
	6.3. Аксіоматичні теорії	[9, с. 159]
	6.4. Аксіоми та правила виводу для числення висловлень Побудова виводів в аксіоматичній теорії числення висловлень	[18, с. 51–64]
	6.5. Непротирічність та розв'язність числення висловлень	[19, с. 227, 350, 409]
	6.6. Теорії 1-го порядку	[13, с. 19–25], [19, с. 228, 350, 409]

Продовження питань та інформаційних джерел для самостійного вивчення тем модуля

Назва розділу, модуля, теми, з якої виносяться питання на самостійне опрацювання	**Перелік питань, що вивчаються студентом самостійно**	**Література (порядковий номер за переліком)**
Тема 6. Вступ в математичну логіку	6.7. Аксіоми та правила виводу для теорій 1-го порядку	[13, с. 32–34], [19, с. 350, 409]
	6.8. Числення предикатів, його несуперечність. Визначення понять: предикат, терм, квантор, формула. Дедуктивні властивості теорії	[18, с. 77–113], [19, с. 350, 409]
Тема 7. Теорія алгоритмів	7.1. Концепція алгоритму	[19, с. 51, 56], [31, с. 90–93]
	7.2. Нормальні алгоритми Маркова	[19, с. 351]
	7.3. Алгоритмічно нерозв'язні проблеми	[19, с. 52], [31, с. 103–104]
	7.4. Машини Тьюрінга, еквівалентність різних алгоритмічних систем	[19, с. 531], [31, с. 93–103]

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ (НАВЧАЛЬНО-ДОСЛІДНІ ПРОЕКТИ) ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ І МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ЇХ ВИКОНАННЯ

Перелік питань, що вивчаються студентами самостійно

Модуль 1. Індивідуальним завданням за першим модулем є розрахунково-графічна робота 1, індивідуальні завдання з якої представлено в дистанційному курсі «Дискретна математика» (Частина 1).

Модуль 2. Індивідуальним завданням за другим модулем є розрахунково-графічна робота 2, індивідуальні завдання з якої представлено в дистанційному курсі «Дискретна математика» (Частина 1).

Модуль 3. Індивідуальним завданням за третім модулем є розрахунково-графічна робота 3, індивідуальні завдання з якої представлено в дистанційному курсі «Дискретна математика» (Частина 2).

Модуль 4. Індивідуальним завданням за четвертим модулем є розрахунково-графічна робота 4, індивідуальні завдання з якої представлено в дистанційному курсі «Дискретна математика» (Частина 2).

Для виконання індивідуальних завдань попередньо необхідно вивчити теоретичні питання, які виносяться на лекції і самостійне вивчення, опрацювати матеріал практичних занять. У разі виникнення ускладнень звертатись за консультацією до викладача.

Виконання РГР оцінюється у відсотках до максимальної суми за РГР.

ПОРЯДОК І КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ

Поточне оцінювання знань студентів

Метою та завданням поточного контролю є визначення рівня засвоєння матеріалу студентами для корекції їх навчальної роботи в разі потреби, а також накопичування балів рейтингу студента з дисципліни.

Засоби поточного контролю вивчення дисципліни:
- опитування на заняттях;
- перевірка підготовки до практичних занять;
- перевірка виконання РГР;
- перевірка виконання модульних контрольних робіт;
- розв'язування практичних завдань біля дошки;
- опитування в процесі індивідуально-консультативних занять для перевірки засвоєння матеріалу пропущених занять;

Об'єктами поточного контролю є: відвідування занять, відповіді на заняттях, виконання РГР, виконання модульних контрольних робіт, додаткові види робіт, які вказані в таблицях нарахування балів (додатки А–Д).

Перелік питань для підготовки до поточного модульного контролю наведено в наступній таблиці.

Питання для підготовки до МКР

Назва модуля, теми	Питання з підготовки до поточного модульного контролю
Модуль 1. Теорія множин Тема 1. Теорія множин	1.1. Множини, операції над множинами
	1.2. Способи опису множини та її елементів; операцій над множинами
	1.3. Виконання дій над елементами множини; використовування діаграм Вена або кіл Ейлера
	1.4. Відношення, операції над відношеннями
	1.5. Властивості відношень, області визначення та значення відношень, способи задання відношень; визначення областей значення та областей визначення відношень; опис типів відношень
	1.6. Спеціальні класи бінарних відношень: відношення еквівалентності та порядку
	1.7. Решітки та булеві алгебри
	1.8. Використання аксіоми порядку для визначення властивостей відношень
	1.9. Типи композиції відображень
	1.10. Властивості алгебраїчних операцій на множині і типи алгебри
Модуль 2. Булеві функції Тема 2. Булеві функції	2.1. Елементарні булеві функції, суперпозиція функцій
	2.2. Табличний спосіб визначення функцій

Продовження питань для підготовки до МКР

Назва модуля, теми	Питання з підготовки до поточного модульного контролю
Модуль 2. Булеві функції Тема 2. Булеві функції	2.3. Канонічні форми булевих функцій, способи побудови канонічних форм
	2.4. Алгебра Жегалкіна, способи побудови поліномів Жегалкіна
	2.5. Замкнені класи булевих функцій
	2.6. Функціональна повнота систем булевих функцій. Повні набори булевих функцій; перевірка повноти наборів булевих функцій, приведення формули до заданого базису
	2.7. Теорема Поста
	2.8. Мінімізація булевих функцій
	2.9. Скорочені, тупикові, мінімальні форми, способи їх побудови
	2.10. Застосовування булевих функцій до логічних та релейно-контактних схем
Модуль 3. Комбінаторика Тема 3. Комбінаторика	3.1. Основні комбінаторні схеми
	3.2. Правила суми та добутку
	3.3. Розміщення, переставлення та сполучення з повторенням та без: визначення понять; розраховування переставлень, розміщень, сполучень та використання їх в конкретних задачах
	3.4. Комбінаторні тотожності, поліноміальна формула
	3.5. Формула включень та виключень, її застосування
	3.6. Рекурентні співвідношення, способи розв'язання лінійних рекурентних співвідношень
	3.7. Твірні функції, їх застосування для розв'язання комбінаторних проблем
	3.8. Основні типи задач комбінаторного аналізу
Модуль 4. Теорія графів, скінченних автоматів, алгоритмів та математична логіка Тема 4. Теорія графів	4.1. Графи, способи визначення, способи задання графів; операцій над графами; використання графів для моделювання різних об'єктів; виконання операцій над графами

Назва модуля, теми	Питання з підготовки до поточного модульного контролю
Модуль 4. Теорія графів, скінченних автоматів, алгоритмів та математична логіка Тема 4. Теорія графів	4.2. Шляхи в графах, зв'язні графи. Властивості різних типів графів (зв'язні графи, дводольні графи, Ейлерові графи, Гамільтонові графи)
	4.3. Дерева, властивості дерев
	4.4. Планарні графи, необхідні та достатні умови планарності
	4.5. Теорема про 5 фарб. Теореми про розфарбування планарних графів
	4.6. Теореми Куратовського, Ейлера, Форда-Фалкерсона; використання теорем Ейлера, Куратовського, Форда-Фалкерсона для розв'язування прикладних задач та розробки алгоритмів на графах
	4.7. Використання алгоритму Краскала для отримання мінімального стягуючого лісу
Тема 5. Теорія скінченних автоматів	5.1. Алфавіт, слова, алфавітні відображення
	5.2. Автомати Мілі та Мура, способи визначення
	5.3. Генерація алфавітних відображень автоматами
	5.4. Тотожність класів відображень, що генеруються автоматами Мілі та Мура
	5.5. Умови автоматності відображень
	5.6. Еквівалентні стани та еквівалентні автомати. Визначення еквівалентності станів і автоматів, побудова еквівалентного розбиття
	5.7. Мінімізація скінченних автоматів, алгоритм Ауфенкампа-Хона
	5.8. Події, представлення подій в автоматах
	5.9. Регулярні події, зв'язок регулярних подій та скінченних автоматів
	5.10. Структурний синтез автоматів
	5.11. Основи теорії автоматів, властивостей автоматів, типів автоматів (скінченні автомати, автомати з магазинною пам'яттю, нескінченні автомати). Приклади використання скінченних автоматів для моделювання реальних об'єктів

Назва модуля, теми	**Питання з підготовки до поточного модульного контролю**
Тема 5. Теорія скінченних автоматів	5.12. Аналіз в досяжності станів, шляхи і маршрути у графах переходів
Тема 6. Математична логіка. Теорія алгоритмів	6.1. Числення висловлювань. Знання таблиць істинності та їх ролі у встановленні істинності складних висловлень; встановлення істинності алгебраїчним методом
	6.2. Побудова таблиць для пропозиційних форм
	6.3. Аксіоматичні теорії
	6.4. Аксіоми та правила виводу для числення висловлень. Побудова виводів в аксіоматичній теорії числення висловлень
	6.5. Зв'язок тавтологій та теорем
	6.6. Непротирічність та розв'язність числення висловлень
	6.7. Теорії 1-го порядку
	6.8. Аксіоми та правила виводу для теорій 1-го порядку
	6.9. Числення предикатів, його непротирічність. Визначення понять: предикат, терм, квантор, формула. Дедуктивні властивості теорії
	6.10. Знання сутності математичної логіки, її ролі у діяльності людини
	6.11. Концепція алгоритму
	6.12. Нормальні алгоритми Маркова
	6.13. Алгоритмічно нерозв'язні проблеми
	6.14. Універсальний нормальний алгоритм
	6.15. Машини Тьюрінга, еквівалентність різних алгоритмічних систем

Зразок модульних контрольних робіт

Модульна контрольна робота 1

1. Для множин A і B знайти $A \cup B, A \cap B, A - B, A \Delta B.$ Взявши $I = A \cup B$ знайти $\overline{A}$. Множини A та B такі:

$$A = \{1,3,5,7\}, B = \{1,5,8,10\}.$$

2. Намалювати діаграму Ейлера для: $A \cup B$.

– © ПУЕТ –

3. Перевірити, чи є дане відношення «x перпендикулярно y» на множині прямих площини:

1) рефлексивним; 2) іррефлексивним; 3) симетричним; 4) антисиметричним; 5) транзитивним; 6) частковим порядком; 7) лінійним порядком; 8) еквівалентністю.

4. За даними парами, що складають відношення, побудувати його граф та матрицю суміжності. Пари такі:

$$(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(2,4).$$

5. Перевірити, чи має операція T, що задана наступною таблицею, властивість – асоціативність.

T	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	a
c	c	a	c

6. Порівняння трансфінітів. Аксіома вибору. Трансфінітна індукція.

Модульна контрольна робота 2

1. Записати таблицю значень для функції $x \vee y$.

2. Обчислити при $x=0;$ $y=1;$ $z=1$ вираз $\left((x \vee y)(z \to \overline{y})\right) \sim \overline{x}.$

3. Одержати ДНФ функції $\overline{\overline{xy} \vee \overline{x\overline{y}}} \vee y\overline{z}.$ Результат перевірити за таблицею.

4. Для формули, що задана в завданні 3, намалювати контактну схему.

5. Для формули, що задана в завданні 3, одержати канонічний багаточлен Жегалкіна, враховуючи, що $\overline{x} = 1 + x, x \vee y = x + y + xy.$

6. Матриця безпосередніх зв'язків та матриця повних зв'язків; зв'язок між ними.

Модульна контрольна робота 3

1. З групи n людей вибирають m. Скільки варіантів вибору, якщо вони будуть робити:

а) однакову роботу; б) різну роботу, якщо: $n=10, m=5.$

2. Розсипалось слово з n літер. Скількома варіантами його можна скласти. якщо:

а) всі літери різні; б) перша літера зустрічається n_1 раз; друга n_2, всі інші різні. Задано, що: $n=10, n_1=2, n_2=3.$

3. Задано $G=\{a^{\eta_1}, b^{\eta_2}, c^{\eta_3}\}$. Записати n_1 переставлень; n_2 k_1-сполучень; n_3 k_2-розміщень. Необхідні параметри такі:

$$\eta_1=2, \eta_2=2, n_1=3, n_2=3, n_3=4, k_1=2, k_2=3.$$

4. Розв'язати рекурентне співвідношення
$f(n)+a_1 f(n-1)+a_2 f(n-2)=0,$ де $a_1=6, a_2=9.$

5. Правило суми. Приклад його застосування.

Модульна контрольна робота 4

I (1; 2). За даною матрицею інцидентності: 1) побудувати граф; 2) записати матрицю суміжності.

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	
1				1		1		n_1
1	1				1		1	n_2
	1	1				1		n_3
		1	1		1			n_4
			1	1			1	n_5

II (3; 4). Побудувати суму та об'єднанння графів $\Gamma_1(N;S_1)$; $\Gamma_2(N;S_2)$, де $N=\{n_1;n_2;n_3;n_4;n_5\}$; $S_1=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$; $S_2=\{u_5,u_6,u_7,u_8\}$ (див. I).

III. (5). Чи є планарними три графи з завдань I та II. Намалювати їх як планарні або довести їх не планарність.

IV. (6). Знайти явно еквівалентні та явно нееквівалентні стани скінченого автомата:

Стани	Входи		
	x_1	x_2	x_3
0	0	1	2
	1	0	1
1	0	2	1
	0	1	0
2	2	3	1
	0	1	0
3	3	2	1
	1	0	1

V. (7). Означення і приклади орієнтованого графа.

VI. (8). Означення скінченого автомата (СА). Задання СА шляхом словесного опису та перерахування елементів множини та відношень.

Критерії оцінювання знань та система нарахування балів

Виконання модульної контрольної роботи оцінюється у відсотках до максимальної суми за неї. Система нарахування балів представлена в таблицях додатків А–Д.

Підсумкове оцінювання знань студентів

Перелік питань для підготовки до підсумкового контролю
(перелік питань для підготовки до екзамену з дисципліни)

Питання для підготовки до іспиту (1 семестр)

1. Основні означення множин.
2. Операції над множинами.
3. Означення впорядкованої пари та декартового добутку.
4. Означення мультимножини.
5. Діаграми Венна.
6. Відношення.
7. Типи відношень.
8. Область визначення та значення бінарних відношень. Переріз, матриця суміжності і граф відношення.
9. Операції над відношеннями. Симетрія і композиція.
10. Відображення.
11. Властивості еквівалентності.
12. Властивості відношення порядку.
13. Властивості бінарних операцій.
14. Алгебраїчні системи.
15. Деякі властивості впорядкованих множин, необхідні для означення решітки.
16. Решітки.
17. Булева алгебра.
18. Означення булевих функцій.
19. Булеві функції однієї змінної. Булеві функції двох аргументів.
20. Канонічні форми булевих функцій.
21. Досконалі нормальні форми.
22. Алгебра та багаточлени Жегалкіна.
23. Канонічні багаточлени Жегалкіна.

24. Замкнені класи булевих функцій.

25. Функціональна повнота систем булевих функцій.

26. Застосування булевих функцій до логічних та релейно-контактних схем.

27. Булеві матриці.

28. Логічні елементи і логічні схеми.

29. Карти Карно.

30. Комплекс кубів.

31. Постановка задачі мінімізації булевих функцій.

32. Метод Квайна-Мак-Класки.

33. Алгебраїчний метод.

34. Метод Блейка-Порецького.

35. Склеювання і поглинання кубів.

Питання для підготовки до іспиту (2 семестр)

1. Основні комбінаторні схеми та задачі. Правила суми та добутку.

2. Означення різних комбінацій.

3. Формула включень та виключень.

4. Деякі комбінаторні тотожності.

5. Рекурентні співвідношення.

6. Розв'язування лінійних рекурентних співвідношень зі сталими коефіцієнтами.

7. Застосування рекурентного співвідношення до аналізу комбінаторної системи з точки зору оптимізації розподілу елементів.

8. Означення графу та історична довідка.

9. Властивості орієнтованих графів.

10. Властивості неорієнтованих графів.

11. Різні типи графів.

12. Властивості графів, пов'язані з циклами.

13. Ейлерові і гамільтонові графи.

14. Планарність графів.

15. Розрізи та потоки.

16. Означення скінченного автомата.

17. Способи задавання скінченного автомата.

18. Властивості автоматних відображень та мінімізація скінченного автомату.

19. Аналіз скінченних автоматів.

20. Регулярні події та скінченні автомати.
21. Синтез автоматів.
22. Висловлення та предикати. Сентенціональні зв’язки в численні висловлювань.
23. Формули і підстановки в численні висловлювань.
24. Тавтології і закони логіки висловлювань.
25. Рівносильність формул та логічний наслідок в логіці висловлювань.
26. Правила виводу в численні висловлювань.
27. Дедуктивний метод в численні висловлювань.
28. Квантори та їх властивості.
29. Символізація мови в численні предикатів.
30. Оціночна процедура в логіці предикатів.
31. Загальнозначущість та правила виводу в численні предикатів.
32. Нормальні алгоритми Маркова.
33. Машина Тьюрінга.
34. Алгоритмічно нерозв’язні проблеми.

Зразок екзаменаційних білетів

1-й семестр

1. Основні означення теорії множин.
2. Застосування булевих функцій до логічних та релейно-контактних схем.
3. Вказати властивості, якими володіють наступні відношення (рефлективність, іррефлексивність, симетричність, антисиметричність, транзитивність).

а) «з x випливає *y*» на множині висловлювань;

б) «*x* є керівником *y*» на множині посад;

в) «*x* не перевищує *y*» на множині номерів білетів на іспиті.

4. Скласти таблицю істинності для $\left(x \vee y\bar{z}\right) \sim \bar{y}$.

2-й семестр

1. Означення різних комбінацій.
2. Способи задавання скінченого автомата.
3. Задача на графи. Покажіть, що число ребер повного графа дорівнює $\frac{1}{2}\nu\left(\nu-1\right)$, де ν – число його вершин.

4. Задача на математичну логіку. Дано висловлювання: «Для того, щоб матриця мала обернену, необхідно, щоб її визначник не дорівнював нулю». Які з наведених нижче висловлювань логічно слідують із даного і доведіть це:

а) для того, щоб визначник матриці не дорівнював нулю, необхідно, щоб ця матриця не мала оберненої;

б) для того, щоб визначник матриці дорівнював нулю, достатньо, щоб ця матриця мала обернену;

в) визначник матриці дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ця матриця не має оберненої.

Порядок проведення іспиту

Іспит проходить усно. Оцінюється в 40 балів за 100-бальною шкалою.

Екзамен оцінюється за такими критеріями. Екзаменаційний білет складається з двох теоретичних і двох практичних питань. Повна безпомилкова відповідь на кожне питання оцінюється в 10 балів. Помилки, неповна відповідь знижують кількість балів, які студент одержує за питання. Якщо студент отримав менше 11 балів, то за екзамен він отримує 0 балів. Якщо студент протягом семестру отримав 60 і більше балів, то здавати іспит не обов'язково.

Критерії, параметри та шкала оцінювання знань студентів і відповідність оцінок у різних шкалах наведено у додатках А–Д.

Загальна підсумкова оцінка з дисципліни

Загальна підсумкова оцінка з дисципліни за семестр – це зважена сума оцінок поточного та підсумкового контролю. Якщо студент здає іспит, то бали, що отримані в семестрі, враховуються з коефіцієнтом 0,6. До них додаються бали за іспит. Якщо така сума менше отриманої за семестр, то підсумковою залишається більша семестрова сума.

Якщо студент не з'явився на підсумковий контроль, то йому виставляється як підсумкова та оцінка, яка отримана за результатами поточного контролю. Рейтингом студента за дисципліною є напівсума балів, отримана за обидва семестри.

Лекція 1. Множини, операції над множинами. Декартовий добуток. Мультимножини

Одним із розділів дискретної математики є теорія множин і відношень. Розглянемо елементи цих теорій.

1. Основні означення

Поняття множини не означається, бо воно є первинним. За Кантором, множина – це дещо різне, що можна розглядати як єдине. Тобто множина – це сукупність різних об'єктів, які мають дещо спільне, що дозволяє об'єднати ці об'єкти в одну спільноту. Об'єкти (елементи множини) записують у фігурних дужках.

Приклад 1.

1) $\{0,1,\ldots,9\}$ – цифри;

2) $\{1,2,\ldots,n,\ldots\}$ – натуральні числа;

3) {Андреєва, Борисенко, …, Яцик} – множина студентів у групі. Перша і третя множини скінченні, друга – нескінченна.

Позначатимемо множини великими «друкованими» літерами, а їх елементи – малими (переважно латинськими).

Означення 1. Дві множини називають рівними, коли вони складаються з однакових елементів.

Рівність множин позначають так: $A=B,$ а нерівність так: $A\neq B.$

$$A=\{a,b,c,d\}=\{a,b,d,c\}=\{a,a,b,d,d,c\}\neq\{a,b,c\}$$

$$A\neq\{a,b,c,e\}.$$

Зауваження. Кількість повторень елемента не має значення:

$$\{a\}=\{a,a\}=\underbrace{\{a,\ldots,a\}}_{\textit{кілька разів}}.$$

Множину записують ще так:

$A=\{a\,|\,\text{об'єднуюча властивість}\}.$

Наприклад:

$\{0,1,...,9\}=\{i\,|\,i-\text{цифра десяткової системи числення}\}.$

Позначення:

$a \in A$ – елемент a належить множині A (позначають ще так: $A \ni a$);

$a \notin A$ – елемент a не належить множині A;

$A = \varnothing$ – A – порожня множина (без елементів).

Означення 2. Сім'єю множин називається множина, елементи якої є множинами.

Позначають сім'ю множин звичайно «рукописними» літерами.

Приклад 2.

1) $\mathscr{A} = \{\{0\}, \{2,5\}, \{3,4,6,7,8\}, \{9\}\}$; 2) $\mathscr{D} = \{B \mid B = \{x \mid x -$ літера в слові B української мови$\}\}$, $\{с, и, с, т, е, м, а\} \in \mathscr{D}$. $\{е, ю, я\} \notin \mathscr{D}$.

Означення 3. Кажуть, що A – підмножина B, якщо кожний елемент A є й у B.

Позначають: $A \subseteq B$, ($B \supseteq A$).

Якщо у B існує x, що $x \notin A$, а $A \subseteq B$, то кажуть, що A – власна підмножина B і позначають $A \subset B$ ($B \supset A$).

Теорема 1. $A = B$ *тоді і тільки тоді, коли* $A \subseteq B$, $B \subseteq A$.

Доведення. Достатність. Нехай $A \subseteq B$, $B \subseteq A$. Припустимо $A \neq B$. Тоді існує $x \in A$, $x \notin B$. Але якщо $x \in A$, оскільки $A \subseteq B$, то $x \in B$. Протиріччя. Отже, припущення, що $A \neq B$ неправильне.

Необхідність. Нехай $A = B$, а одна з умов: $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ не виконується; тобто в одній із множин є $x \in A$ (або $x \in B$), і $x \notin B$ ($x \notin A$), тоді $A \neq B$. Одержали протиріччя, тобто припущення, що одна з умов $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ не виконується, неправильне.

Приклад 3. Нехай $A = \{a, b, c\}$. Утворимо $\mathscr{A}$ – сім'ю всіх підмножин множини A. $\mathscr{A} = \{\{a,b,c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\} \varnothing\}$.

Сім'ю всіх підмножин множини A позначають $P(A)$ або 2^A, тобто в прикладі 3 $\mathscr{A} = P(A) = 2^A$. Позначимо $|A|$ – кількість елементів у A.

Теорема 2. *Якщо* $|A| = n,$ то $|P(A)| = 2^n$.

Доведення. Проведемо його по індукції. При $n=1$ теорема очевидна. $A = \{a\}, P(A) = \{\{a\}, \varnothing\}; |P(A)| = 2^1$.

Нехай теорема справедлива для $n = k : |P(A_k)| = 2^k$, доведемо її для $n = k+1$, тут: $A_k = \{a_1, \ldots, a_k\};$ $P(A_k) = \{a_1, \ldots, a_k\}$, ($k$ штук підмножин по $k-1$ елементу), …, (k штук підмножин по 1 елементу), $\varnothing\}$. Позначимо $A_{k+1} = \{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$, тоді $P(A_{k+1}) =$ {усі підмножини з $P(A_k)$, усі підмножини з $P(A_k)$ доповнені елементом $a_{k+1}\}$. Тобто $|P(A)| = 2^k + 2^k = 2^k(1+1) = 2^{k+1}$, що і треба було довести.

2. Операції над множинами

Означення 4. Для множин A та B об'єднанням множин $A \cup B$ називається множина $C = A \cup B = \{x \mid x \in A$ або $x \in B\}$.

Приклад 4. $A = \{1, a, e, \pi, 3.14\};$ $B = \{1, 2, b, e, 2.7\}$. $A \cup B = \{1, 2, a, b, p, 3.14, e, 2.7\}$.

Означення 5. Для множин A й B перерізом множин $A \cap B$ називається множина $C = A \cap B = \{x \mid x \in A$ та $x \in B\}$.

Множини A і B із прикладу 4 дають $A \cap B = \{1, e\}$.

Якщо $A \cap B = \varnothing$, то множини A та B називають такими, що не мають перерізу.

Означення 6. Якщо всі множини, що розглядаються в певній ситуації, є підмножинами деякої множини I, то остання називається універсальною множиною (універсумом), або унітарною (основною) множиною.

Приклад 5. Якщо $A_1, \ldots, A_n$ – множини студентів в академічних групах університету, то I – множина всіх студентів університету.

Означення 7. Різницею $X–Y$ множин X та Y є сукупність усіх елементів X, що не ввійшли в Y, тобто $X - Y = \{x \mid x \in X, x \notin Y\}$, ще $X - Y$ позначають $X \backslash Y$.

Приклад 6. $X=\{1,2,5,7\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$. $X-Y=\{5,7\}$, $X-Y=\{5,7\}$, $Y-X=\{3,4\}$.

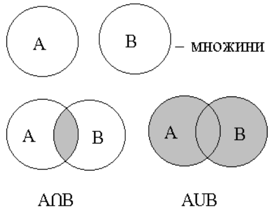


Рисунок 1 – Діаграми Ейлера (Ойлера) для *A*, *B*, $A\cap B$, $A\cup B$

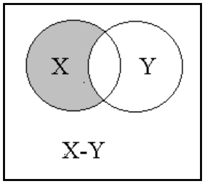


Рисунок 2 – Різниця множин

Означення 8. Симетрична різниця $X\Delta Y$ множин *X* та *Y* – це множина, що означається формулою $X\Delta Y=(X-Y)\cup(Y-X)$.

Множини *X, Y* з прикладу 5 дають: $X\Delta Y=\{3,4,5,7\}$.

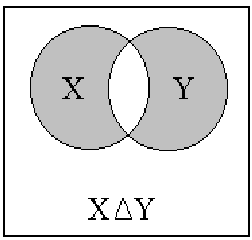


Рисунок 3 – Симетрична різниця

Означення 9. Множина *I–X,* де *I* – універсум, називається запереченням (доповненням) множини *X*.

Позначають заперечення множини *X* так: $\overline{X}=I-X$.

Приклад 7. $I = \{0,1,2,\ldots,9\}$ – цифри. $X = \{0,2,\ldots,8\}$ – парні. $\bar{X} = \{1,3,\ldots,9\}$ – непарні.

Уведені операції називають елементарними.

Теорема 3. а) $X - Y \equiv X \bigcap \bar{Y};$

б) $X \Delta Y = \left(X \bigcap \bar{Y}\right) \bigcup \left(\bar{X} \bigcap Y\right)$.

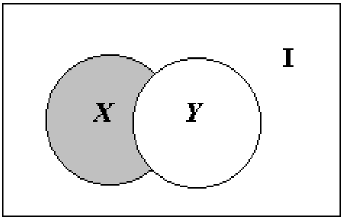


Рисунок 4 – Множина $X \bigcap \bar{Y}$

Доведемо а) $X - Y = \{x | x \in X, x \notin Y|\} = A,$ $X \bigcap \bar{Y} = \{x | x \in X\} \bigcap \{x \notin Y\} =$ $= \{x \in X, x \notin Y\} = A,$ що і треба було довести.

Довести б) самостійно.

Отже, можна розглядати тільки $X \bigcup Y; X \bigcap Y; \bar{X}$. Інші операції над множинами можна виразити через них.

Теорема 4. Операції $X \bigcup Y; X \bigcap Y; \bar{X}$ мають такі властивості.

I. Комутативність:

1) $X \cup Y \equiv Y \cup X,$

2) $X \cap Y \equiv X \cap Y.$

II. Дистрибутивність:

3) $X \cap (Y \cup Z) \equiv (X \cap Y) \cup (X \cap Z),$

4) $X \cup (Y \cap Z) \equiv (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$

III. Асоціативність:

5) $X \cup (Y \cup Z) \equiv (X \cup Y) \cup Z,$

6) $X \cap (Y \cap Z) \equiv (X \cap Y) \cap Z.$

IV. Ідемпотентність:

7) $X \cap X \equiv X$,

8) $X \cup X \equiv X$.

V. Закон подвійного заперечення:

9) $\overline{\overline{X}} \equiv X$.

VI. Правила де Моргана:

10) $\overline{X \bigcap Y} \equiv \overline{X} \bigcup \overline{Y}$,

11) $\overline{X \bigcup Y} \equiv \overline{X} \bigcap \overline{Y}$.

VII.Закон логічного протиріччя:

12) $X \bigcap \overline{X} \equiv \varnothing$.

VIII. Закон виключеного третього:

13) $X \bigcup \overline{X} \equiv I$.

IX. Операції з унітарною та порожньою множинами:

14) $X \cap I \equiv X$,

15) $X \cup I \equiv I$,

16) $\varnothing \cap X \equiv \varnothing$,

17) $\varnothing \cup X \equiv X$,

18) $\overline{\varnothing} \equiv I$,

19) $\overline{I} \equiv \varnothing$.

Довести самостійно.

Зауваження. Формули 1−19 мають певну симетрію, а саме, якщо в них провести формальну заміну символів $\cup$ на $\cap$, $\cup$ на $\cap$, *I* на $\varnothing$, $\varnothing$ на *I*, то одержимо ту ж систему тотожностей.

3. Означення впорядкованої пари та декартового добутку

Означення 10. Упорядкованою парою $<a, b>$ називають множину $\{\{a\}, \{a,b\}\}$, a – першою координатою пари, b – другою.

Означення 11. Множину з одного елемента назвемо синглетоном, а з двох різних – парою.

Теорема 5. *Якщо* $<a,b>=<x,y>$, то $a=x;\ b=y$.

Доведення. Запишемо за означенням:

$$< a,b > = \{\{a\},\{a,b\}\}, \tag{1}$$

$$< x,y > = \{\{x\},\{x,y\}\}. \tag{2}$$

1) Нехай $x = y$. Тоді $< x,y > = < x,x > = \{\{x\},\{x,x\}\} = = \{\{x\},\{x\}\} = \{\{x\}\}$.

Тобто $< x, y >$ – синглетон, отже, за умовою $< a, b > = < x, y >$, тобто $< a, b >$ – теж синглетон, отже, в (1) $\{a,b\} = \{a\}$, тобто $a = b$, отже, з $x = y$ випливає: $a = b$, тобто $\{\{x\}\} = < x,y > = < a,b > = \{\{a\}\}$. Таким чином, $a = x$, $b = y$.

2) Нехай $x \neq y$, отже, (2) містить рівно один синглетон і рівно одну пару. Оскільки $< a, b > = < x, y >$, то $\{a\} = \{x\}$; $\{a,b\} = \{x,y\}$, тобто $a = x$, отже, маємо пари: $\{x,b\} = \{x,y\}$. Значить, $b \neq x$ (бо $\{x, b\}$ не буде тоді парою), отже, $b = y$, що й треба було довести.

Означення 12. Декартовим (або прямим) добутком $A \times B$ множин *A, B* є множина впорядкованих пар $< a, b >$, $a \in A$, $b \in B$:

$$A \times B = \{< a,b > \mid a \in A, b \in B\}.$$

Приклад 8. $A = \{1,2\}$; $B = \{a,b,c\}$. Тоді маємо

$$A \times B = \{< 1,a >, < 1,b >, < 1,c >, < 2,a >, < 2,b >, < 2,c >\}.$$

$$B \times A = \{< a,1 >, < b,1 >, < c,1 >, < a,2 >, < b,2 >, < c,2 >\}.$$

$$A \times A = \{< 1,1 >, < 1,2 >, < 2,1 >, < 2,2 >\}.$$

Декартовий добуток n множин уводиться рекурентно:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = (\ldots((A_1 \times A_2) \times A_3) \times \ldots) \times A_n.$$

Якщо $A_1 = \ldots = A_n = A$, то $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = A \times A \times \ldots \times A = A^n$ називають *n*-м степенем множини *A*.

Приклад 9. $A=\{1,2\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{\sqrt{2},\sqrt{3}\}$.

Тоді $A\times B\times C=\{<1,a\sqrt{2}>;\quad <1,a,\sqrt{3}>;\quad <1,b,\sqrt{2}>;$ $<1,b,\sqrt{3}>;\ <2,a,\sqrt{2}>;\ <2,a,\sqrt{3}>;\ <2,b,\sqrt{2}>;\ <2,b,\sqrt{3}>\}$.

Елемент декартового добутку називають упорядкованим набором (кортежем, вектором).

4. Означення мультимножини

Означення 13. Сукупність $G=\{g_1,...,g_\eta\}$ називається мультимножиною, якщо серед $g_1,...,g_h$ можуть бути однакові елементи.

Упорядкований набір (кортеж) $S(G)=(e_1,...,e_n)$, що складається з елементів *G*, узятих по одному разу, називається основою мультимножини *G*. Якщо порядок елементів у $S(G)$ значення не має, то $S(G)$ розглядають як множину. Якщо *G* – числова мультимножина, то кортеж $S(G)$, як правило, впорядковують за зростанням (спаданням).

Упорядкований набір $[G]=(\eta_1,\ ...,\ \eta_n)$, що складається з чисел η_i, називається первинною специфікацією, якщо η_i – кількість повторень елемента e_i в $G \forall i\in J_n$. Тут $J_n=\{1,2,\ldots,n\}$ – множина *n* перших натуральних чисел. Використовують також позначення $\eta_i=k_G(e_i)$. Очевидно, що $\eta_1+...+\eta_n=\eta$.

Нехай *A, B* – мультимножини, |*A*| – кількість елементів в *A* (очевидно, |*G*| = η).

Означення 14. Для мультимножин *A* і *B* переріз $A\cap B$, об'єднання $A\cup B$, сума $A+B$, підмультимножина *A* мультимножини *B* ($A\subset B$) уводяться таким чином:

$$A\cap B=C: S(C)=S(A)\cap S(B), k_C(x)=min\left(k_A(x),k_B(x)\right);$$

$$A\cup B=C: S(C)=S(A)\cup S(B), k_C(x)=max\left(k_A(x),k_B(x)\right);$$

$$A+B=C:S(C)=S(A)\cup S(B),k_C(x)=k_A(x)+k_B(x);$$

$$A\subset B:S(A)\subset S(B),k_A(x)\le k_B(x).$$

Якщо $A\subset B;|A|=k,$ то A називають k-вибіркою.

Приклад 10. Нехай задано мультимножини $A=\{1,1,5,7,7,7,9\};$ $B=\{1,7,5,7\}$. Знайти $A\cap B,A\cup B,A+B$. Перевірити умови $A\subset B,B\subset A$.

Знайдемо основу мультимножин (кортеж її різних елементів) A та B.

$$S(A)=(1,5,7,9),\ S(B)=(1,5,7).$$

Тоді первинні специфікації мультимножин (кортеж кратностей елементів мультимножини відповідно до її основи) A та B:

$$[A]=(2,1,3,1),\ [B]=(1,1,2).$$

1) Знайдемо $A\cap B$.

Спершу шукаємо основу мультимножини $C=A\cap B$:

$$S(C)=S(A)\cap S(B)=(1,5,7,9)\cap(1,5,7)=(1,5,7).$$

Знайдемо кратності кожного елемента основи мультимножини $C=A\cap B$:

$$k_C(1)=min\big(k_A(1),k_B(1)\big)=min(2,1)=1,$$

$$k_C(5)=min\big(k_A(5),k_B(5)\big)=min(1,1)=1,$$

$$k_C(7)=min\big(k_A(7),k_B(7)\big)=min(3,2)=2.$$

Отже, мультимножина $C=A\cap B$ матиме вигляд:

$$C=A\cap B=\{1,5,7,7\}.$$

2) Знайдемо $A\cup B$.

Основа мультимножини $C = A \cup B$:

$$S(C) = S(A) \cup S(B) = (1,5,7,9) \cup (1,5,7) = (1,5,7,9).$$

Знайдемо кратності кожного елемента основи мультимножини $C = A \cup B$:

$$k_C(1) = max(k_A(1), k_B(1)) = max(2,1) = 2,$$

$$k_C(5) = max(k_A(5), k_B(5)) = max(1,1) = 1,$$

$$k_C(7) = max(k_A(7), k_B(7)) = max(3,2) = 3,$$

$$k_C(9) = max(k_A(9), k_B(9)) = max(1,0) = 1.$$

Отже, мультимножина $C = A \cap B$ матиме вигляд:

$$C = A \cup B = \{1,1,5,7,7,7,9\}.$$

3) Знайдемо $A + B$.

Основа мультимножини $C = A + B$:

$$S(C) = S(A) \cup S(B) = (1,5,7,9) \cup (1,5,7) = (1,5,7,9).$$

Знайдемо кратності кожного елемента основи мультимножини $C = A \cup B$:

$$k_C(1) = k_A(1) + k_B(1) = 2 + 1 = 3,$$

$$k_C(5) = k_A(5) + k_B(5) = 1 + 1 = 2,$$

$$k_C(7) = k_A(7) + k_B(7) = 3 + 2 = 5,$$

$$k_C(9) = k_A(9) + k_B(9) = 1 + 0 = 1.$$

Отже, мультимножина $C = A + B$ матиме вигляд:

$$C = A + B = \{1,1,1,5,5,7,7,7,7,7,9\}.$$

4) Перевіримо умову $A \subset B$.

$$A \subset B:\ S(A) \subset S(B), k_A(x) \le k_B(x).$$

Чи виконується $S(A) \subset S(B)$? $(1,5,7,9) \not\subset (1,5,7)$. Тому $A \not\subset B$.

Перевіримо умову $B \subset A$.

Чи виконується $S(B) \subset S(A)$? $(1,5,7) \subset (1,5,7,9)$. Тоді необхідно перевірити наступну умову: $k_B(x) \le k_A(x)$ для кожного елемента мультимножини *B*.

$$k_B(1) = 1 \le k_A(1) = 2,\ k_B(5) = 1 = k_A(5) = 1,\ k_B(7) = 2 \le k_A(7) = 3.$$

Тому $B \subset A$.

Означення 15. Декартовим добутком мультимножин *A* та *B* назвемо декартовий добуток множин $S(A)$ та $S(B)$ – їх основ: $A \times B = \{< a, b > | a \in S(A),\ b \in S(B)\}$.

Приклад 11. $A = \{1,1\};\ B = \{1,2,2\}$. Тоді $A \times B = \{<1,1>, <1,2>\}$.

5. Діаграми Венна

Побудову діаграм починають із розбиття площини на 2^n комірок (чарунок) за допомогою *n* фігур (замкнених ліній, як правило, кругів, еліпсів, еліпсоподібних фігур).

Для $n = 3$ – див. наступний рисунок (рис. 5).

При цьому кожна наступна фігура повинна мати одну і тільки одну спільну частину з раніше побудованими. Таке розбиття площини називають символом Венна.

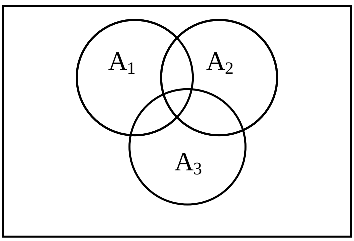


Рисунок 5 – Символ Венна для $n = 3$

Для $n=4$ символ Венна представлено на рис. 6 (область 1 не має спільних з *A, B, C, D* частин; області 2, 3, 4, 5 з *A, B, C, D* відповідно не мають спільних частин з іншими; області 6, 7, 8, 9, 10, 11 – є попарно спільними частинами множин *A, B, C, D;* області 12, 13, 14, 15 – належать трьом з областей *A, B, C, D;* а область 16 – усім чотирьом областям).

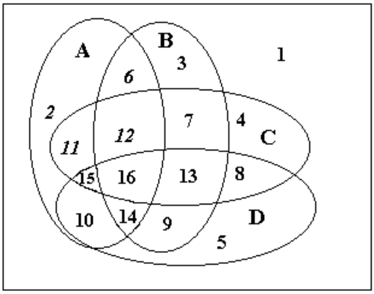


Рисунок 6 – Символ Венна для $n=4$

Для певного *n* символ Венна має стандартний вигляд.

Співвідношення в теорії множин відображаються на символ Венна штрихуванням тих чарунок, які відповідають порожнім підмножинам. У результаті одержують діаграми Венна. Об'єднання будь-яких заштрихованих чарунок дає порожню множину, а об'єднання всіх незаштрихованих чарунок – універсум.

Для відображення рівняння з правою частиною $\varnothing$ достатньо заштрихувати область, що відповідає лівій частині рівняння, тобто маємо:

а) $A=B,$ або $\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)=\varnothing$ (див. рис. 7):

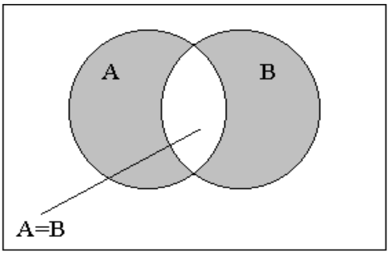


Рисунок 7 – Діаграма Венна для $A=B$

б) $A \subset B,$ або $A \cap \overline{B} = \varnothing$ (див. рис. 8).

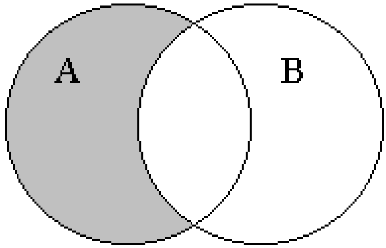


Рисунок 8 – Діаграма Венна для $A \subset B$

Застосування діаграм – у розв'язуванні систем рівнянь, у які входять множини; доведення тотожностей тощо.

Головна відмінність діаграм Венна від кругів Ейлера полягає в тому, що діаграма Венна відображає систему співвідношень на стандартному символі для *n* змінних шляхом «деформації» цього символу виокремленням (шляхом штрихування) області порожніх множин.

Приклад 12. Розв'язати $X \cup C = D.$ Тобто знайти X (його приналежність).

Розв'язок. Нарисуємо $\left(\left(X \cup C\right) \cap \overline{D}\right) \cup \left(\overline{X \cup C} \cap D\right) = \varnothing.$ Отже, $D \setminus C \subset X \subset D.$

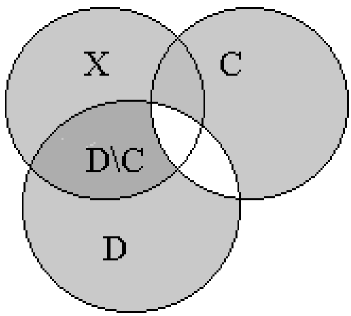


Рисунок 9 – Множини з прикладу 12

Лекція 2. Відношення, операції над відношеннями

1. Відношення

У теорії множин розглядалися об'єкти, не пов'язані один з одним. Формалізуємо поняття зв'язку (відповідності) об'єктів (елементів).

Означення 1. Множина f називається відображенням (функцією) з множини A в множину B тоді і тільки тоді, коли вона є підмножиною множини впорядкованих пар $A \times B$ та умови: $< a,b > \in f$, $< a,c > \in f$ тягнуть за собою $b = c$.

Позначають відображення $f : A \to B.$ Не важко бачити, що термін «операція» над множинами (зокрема $\cup$) є синонімом терміна «відображення». Інше позначення $f\left(a\right) = b,\ \ a \in A,$ $b \in B.$ Властивістю відображення є однозначність (виконання $f\left(a\right) = b$ та $f\left(a\right) = c$ – тягне виконання $b = c$).

Означення 2. Функція $f : A \to B$ називається взаємно однозначною, якщо вона відображає різні елементи A в різні елементи B, тобто $f\left(a_1\right) = f\left(a_2\right)$ тягне $a_1 = a_2$ або $a_1 \neq a_2$ тягне $f\left(a_1\right) \neq f\left(a_2\right)$.

Приклад 1. У родині троє дітей: Олена, Микола, Петро. Розглянемо множину $G = \left\{O, M, П\right\}$ – перших літер імен. Розглянемо множину впорядкованих пар

$$G \times G = \left\{< O,M >,< O,П >,< M,O >,< П,O >,< M,П >,< П,M >,\right.$$

$$\left.< O,O >,< M,M >,< П,П >\right\}$$

та її підмножини

$$A = \left\{< O,M >,< O,П >\right\};$$

$$B = \left\{< П,O >,< П,M >,< M,П >< M,O >\right\};$$

$$C = \left\{< П,M >< M,П >\right\}.$$

Якщо *x* – перша, *y* – друга координати пар, то елементам з *A* – можна надати інтерпретацію: «*x* є сестрою *y*», елементам із *B* – «*x* є братом *y*», елементам із *C* – «*x* і *y* брати». Тут *x, y* – змінні, а «є сестрою», «є братом», «брати» – відношення, причому між двома змінними (бінарні). Дамо означення.

Означення 3. Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – довільні множини (необов'язково різні). Під *n*-арним відношенням (або *n*-відношенням) ρ^n на множинах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ розуміють закон (правило, характеристичну властивість), що виділяє в декартовому добуткові $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ деяку підмножину $\rho^n_{A_1, \ldots, A_n} \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$, яка називається графіком відношення.

Якщо $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, то кажуть, що відношення – на *A*.

Відношення позначають $\rho, \alpha, \beta, \gamma, \geq, \leq, =, <, >, \sim$ тощо.

Часто під відношенням розуміють сам графік. Відношення ρ^1 називають *унарним* $(n=1)$; ρ^2 – *бінарним* $(n=2)$; ρ^3 – *тернарним* $(n=3)$.

Приклад 2. 1) унарне – «бути парним числом», графік $N = \{2n | n = 1,2,3,\ldots\}$; 2) бінарне – «бути братом» (із попереднього прикладу).

Позначають також так: якщо α знаходиться у відношенні ρ із β, то кажуть $\alpha\rho\beta$.

2. Типи відношень

Означення 4 (властивості відношень). Відношення на множині *A* називається:

1) *рефлексивним, якщо* $x\rho x \forall x \in A$. (символ $\forall$ тут і скрізь далі читається і розуміється «для всіх»).

Приклад 3: а) *ρ: «a* є дільником *b»* $a\rho a \forall a$.

2) *іррефлексивним, якщо* $x\rho x$ *не виконується* $\forall x \in A$.

Приклад 3: б) *ρ: «x* є брат *y»* в множині рідних, оскільки сам собі братом ніхто не є.

3) *симетричним, якщо* $x\rho y$ *тягне за собою* $y\rho x \forall x, y \in A$.

Приклад 3: в) ρ: $x\rho y$ – «x і y – брати» з прикладу 1.

4) *антисиметричним, якщо з* $x\rho y$ *та* $y\rho x$ *випливає* $x = y \forall x, y \in A$.

Приклад 3: г) ρ: числа $x, y : x \le y$, якщо $x\rho y$, $y\rho x$ $(x \le y, y \le x)$, то $y = x$.

5) *транзитивним, якщо* $x\rho y$, $y\rho z$ *тягнуть за собою* $x\rho z \forall x,\ y,\ z \in A$.

Приклад 3: д) ρ: $x\rho y$, «людина x старша від людини y».

Приклад 4.

1. Відношення «є сестрою» в множині рідних жіночої статі є іррефлексивним, симетричним, транзитивним.
2. Відношення ρ «дисципліна x читається не пізніше ніж дисципліна y» на множині дисциплін, що читають студентам певної спеціальності, є рефлексивним, транзитивним (не симетрично, не антисиметрично) (є дисципліни, що читаються одночасно).
3. Відношення «$\le$» у множині чисел – рефлексивне, антисиметричне, транзитивне.
4. Відношення «$<$» у множині чисел – іррефлексивне, транзитивне.
5. Відношення «$=$» у множині чисел – рефлексивне, симетричне, антисиметричне, транзитивне.

Означення 5. Еквівалентністю називається бінарне відношення, яке є рефлексивним, симетричним, транзитивним.

Приклад 5. Відношення «$=$» на множині чисел – еквівалентність.

Означення 6. Відношенням часткового порядку на деякій множині (або частковим порядком) називається рефлексивне, антисиметричне та транзитивне відношення на цій множині. Якщо ρ – частковий порядок на A, то впорядкована пара $< A, \rho >$ називається частково впорядкованою множиною.

Зауваження. Є елементи, які не можна порівняти в частково впорядкованій множині.

Приклад 6: а) приклад 4, пункт 3 (відношення «$\le$», «$=$» на множині чисел) – частковий порядок.

б) ρ**:** бути підмножиною в сім'ї $P(I)$ множин є частковим порядком:

– рефлексивне $X \subseteq X \ \forall X \in P(I)$ за означенням $\subseteq$;

– антисиметричне $X \subseteq Y, Y \subseteq X \Rightarrow X = Y \forall X,\ Y \in P(I)$ (це доведено як теорема раніше);

– транзитивне $X \subseteq Y,\ Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$ за означенням $\subseteq$;

в) відношення «$<$» на множині чисел іррефлексивне, отже – не частковий порядок.

Означення 7. Відношення часткового порядку ρ на А називається лінійним порядком тоді і тільки тоді, коли для кожної пари $a,b \in A$ виконується або $a\rho b$, або $b\rho a$. Якщо ρ – лінійний порядок в А, то впорядкована пара $< A,\rho >$ називається лінійно впорядкованою множиною (або ланцюгом).

Приклад 7. а) відношення «менше або дорівнює» на множині чисел – лінійний порядок, бо для будь-якої пари $a,b\ a < b\ (a = b)$, тобто $a \le b$;

б) відношення «бути підмножиною в сім'ї множин» не є лінійним порядком. Дійсно, якщо $A = \{1,2,3\}$; $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$, то пара $< P(A), \subseteq >$ не є ланцюгом: $\{1,2\} \not\subset \{3\}; \{3\} \not\subset \{1,2\}$, тобто ці множини не можна порівняти. Пара $< B, \subseteq >$ де $B = \{\varnothing, \{1\}, \{1,3\}, A\}$ – ланцюг.

Означення 8. Алгебраїчною операцією на множині A називається відображення ω: $A^n = A \times A \times \ldots \times A \to A$. Число n – називається арністю операції.

Тобто *n*-арна алгебраїчна операція ставить у відповідність будь-якій упорядкованій *n*-ці $(a_1,\ldots,a_n)$ елементів з A однозначно визначений елемент з $A\omega(a_1,\ldots,a_n)$.

Приклад 8. У числових системах:

– бінарні операції: додавання, віднімання, множення;

– унарні: взяття протилежного елемента. Але ділення (наприклад, у множині дійсних чисел) не є алгебраїчною операцією; на нуль ділити не можна;

– нульарні: фіксовані елементи.

Означення 9. Відношенням на мультимножинах $A_1,\ldots,A_n$ назвемо підмножину ρ декартового добутку $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$. Число *n* назвемо арністю відношення на мультимножинах.

Лекція 3. Відношення та їх властивості. Спеціальні класи бінарних відношень: відношення еквівалентності та порядку

1. Область визначення та значення бінарних відношень. Переріз, матриця суміжності та граф відношення

Розглянемо бінарне відношення ρ: $x\rho y,\ x\in X,\ y\in Y$. Тоді X називають областю визначення бінарного відношення ρ, а Y – областю значень.

Якщо $X\neq Y$, то кажуть, що ρ є відношенням від X до Y. Якщо $X=Y$, то ρ називають відношенням у X.

Приклад 1: 1) «*x* є братом *y*». $x\in G,\ y\in G,\ G$ – область визначення і значення; 2) $a\in A,\ b\in B$, «*a* є дільником *b*». A – область визначення, B – область значення.

Розглянемо бінарне відношення $\rho^2_{X,Y}=\rho\subseteq X\times Y$. Нехай $x_i\in X$. Множина $A(x_i)$ таких *y*, що пари $(x_i,y)\in\rho$, називається перерізом за x_i відношенням ρ. Множина всіх перерізів відношення ρ називається фактор-множиною множини Y за відношенням ρ і позначається Y/ρ.

Фактор-множина повністю визначає відношення ρ.

Приклад 2. Якщо $G=\{O,M,\Pi\}$ та відношення «*x* є братом *y*» $\rho\subset G\times G=\{<\Pi,O>,<M,\Pi>,<\Pi,M>,<M,O>\}$ і виписати під кожним $x_i\in X=G$ відповідний переріз відношення *ρ*, то маємо:

$$\begin{pmatrix} O & \Pi & M \\ \varnothing & \{O,M\} & \{O,\Pi\} \end{pmatrix}.$$

Елементи другого рядка утворюють фактор-множину Y/ρ (де $Y=G$).

Об'єднання перерізів за елементами деякої множини $A\subset X$ є перерізом $\rho(A)$ по множині *A* відношення *ρ*.

Граф відношення

Уведемо поняття графа відношення $S\subseteq N\times N$. Упорядкована пара $<N,S>$ множини (мультимножини) *N* із бінарним відношенням *S* у ній $(S\subseteq N\times N)$ називається графом *Г*, тобто $\Gamma=<N,S>$. Множину *N* – називають носієм графа (множиною вершин), а множину *S* – сигнатурою графа (множиною дуг). Такий граф і називають графом відношення $S\subseteq N\times N$.

Таблиця *T* розміру $m\times n$ (*m* – рядків, *n* – стовпців), де $m=|X|$, $n=|Y|$, заповнена таким чином: у клітинці, що стоїть в *i*-тому рядку, *j*-му стовпці стоїть: 1, якщо $x_i\rho y_j$, $x_i\in X$, $y_j\in Y$; 0, якщо x_i та y_i не знаходяться у бінарному відношенні *ρ*, називається матрицею суміжності відношення *ρ*.

Приклад 3. $\rho\subset G\times G$, $G=\{O,M,\Pi\}$, $\rho=\{<\Pi,O>,<M,\Pi>,$ $<\Pi,M>,<M,O>\}$.

x_i	y_1	y_2	y_3
	О	М	П
О	0	0	0
М	1	0	1
П	1	1	0

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, $Y = \{2,3\}$, $\rho \subset X \times Y$, нехай ρ це відношення «*x* ділиться на *y*». Тоді матриця суміжності має вигляд:

x_i	y_1	y_2
	2	3
1	0	0
2	1	0
3	0	1
4	1	0
5	0	0
6	1	1

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Графи зображають графічно: вершини – маленькими колами (іноді точками), дуги – у вигляді стрілок, що виходять із n_i та входять в n_j, якщо $<n_i, n_j> \in S$, при цьому n_i – початок дуги, а n_j – кінець дуги.

Приклад 5. Намалюємо граф відношення з матрицею суміжності T_1. Він представлений на рис. 1.

Відношення від X до $Y\left(X \neq Y\right)$ також можна задавати у вигляді так званого графа відношення $S \subseteq X \times Y$.

Розглянемо множину $N = X \cup Y$, що утворена об’єднанням областей визначення і значення бінарного відношення

$S \subseteq X \times Y$. Зазначимо, що якщо $S \subseteq X \times Y$, то виконується $S \subseteq N \times N$. Граф $\Gamma = < N, S > = < X \cup Y, S >$ називають графом відношення $S \subseteq X \times Y$.

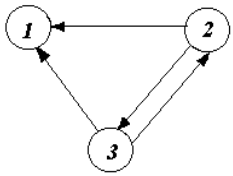


Рисунок 1 – Граф відношення з матрицею суміжності T_1

Приклад 6. Побудуємо граф відношення, заданого в розглянутому раніше прикладі 4, матрицею суміжності T_2. Цей граф – на рис. 2.

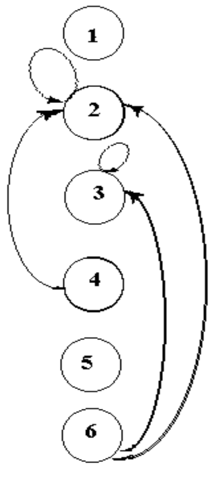


Рисунок 2 – Граф відношення з матрицею суміжності T_2

2. Операції над відношеннями. Симетрія і композиція

За означенням відношення – це множина, значить, над відношеннями можна виконувати всі операції, що означені для множин. Крім відомих операцій над множинами, розглянемо симетризацію та композицію відношень.

Розглянемо бінарне відношення $\rho \subset X \times Y$. *Відношення симетричне (обернене) до відношення ρ (позначається ρ^{-1}) – це підмножина $\rho^{-1} \subset Y \times X$, причому $\rho^{-1} = \left\{ < y,x > \middle| < x,y > \in \rho \right\}$, тобто ρ^{-1} утворено всіма тими парами $< y,x > \in Y \times X$, для яких пари $< x,y > \in \rho$.*

Перехід від ρ до ρ^{-1} здійснюється переставленням елементів у кожній парі відношення: з $x\rho y$ маємо $y\rho^{-1}x$, або з «*x* є дільником *y*» маємо «*y* ділиться на *x*». Граф ρ^{-1} одержують із графа ρ зміною напрямів усіх дуг на протилежні.

Розглянемо композицію відношень. Нехай є множини X, Y, Z, на яких задані відношення $\alpha \subset X \times Y$, $\beta \subset Y \times Z$.

Означення 1. Композицією відношень α і β називають відношення γ, яке складається з усіх таких пар $< x,z > \subset X \times Z$, для яких існує такий $y \in Y$, що $< x,y > \in \alpha$ та $< y,z > \in \beta$.

Композицію γ відношень α та β записують так: $\gamma = \beta\alpha$ (або $\gamma = \beta \circ \alpha$).

Розглянемо переріз $\gamma(x) = \beta(\alpha(x))$, він збігається з перерізом відношення β по підмножині $\alpha(x) \subset Y$, тобто маємо $(\beta\alpha)(x) = \beta(\alpha(x))$.

Можна довести, що для композиції виконується асоціативність

$$\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha = \gamma\beta\alpha,$$

та не виконується комутативність

$$\beta\alpha \neq \alpha\beta.$$

Справедливе також співвідношення:

$$(\beta\alpha)^{-1} = \alpha^{1}\beta^{1}.$$

Приклад 7. На множині $\{1,2,3,4,5\}$ задані відношення

$A=\{(1,2),(3,4),(2,5),(4,3),(1,5)\}$ та

$B=\{(1,5),(2,4),(2,5),(2,3),(4,5),(5,3)\}$.

Знайти 1) обернені відношення A^{-1}, B^{-1}.

2) композицію відношень *A* та *B*: $A \circ B$.

1) $A^{-1}=\{(2,1),(4,3),(5,2),(3,4),(5,1)\}$,

$B^{-1}=\{(5,1),(4,2),(5,2),(3,2),(5,4),(3,5)\}$.

2) Розглянемо пари, у яких перша координата дорівнює 1. Це пари $(1,2),(1,5) \in A$.

$(1,2) \in A$, де друга координата 2. Знаходимо у відношенні *B* всі пари, де перші координати рівні 2. Це пари $(2,4),(2,5),(2,3) \in B$. У цих парах другі координати 4, 5, 3. Формуємо пари, що належать композиції $A \circ B$ і у яких першою координатою буде перша координата обраної пари $(1,2) \in A$, тобто 1, а другою елементи 4, 5, 3. Тобто отримаємо пари $(1,4),(1,5),(1,3) \in A \circ B$.

$(1,5) \in A$, де друга координата 5. Знаходимо у відношенні *B* всі пари, де перші координати рівні 5. Це пара $(5,3) \in B$. У цій парі друга координата 3. Формуємо пару, що належить композиції $A \circ B$ і у якій першою координатою буде перша координата обраної пари $(1,5) \in A$, тобто 1, а другою елемент 3. Тобто отримаємо пару $(1,3) \in A \circ B$. Аналогічно знайдемо наступні пари:

$(2,5) \in A$. $(5,3) \in B \Rightarrow (2,3) \in A \circ B$.

$(3,4) \in A$. $(4,5) \in B \Rightarrow (3,5) \in A \circ B$.

$(4,3) \in A$. Немає пари $(3,y) \in B$. Тому немає пари $(4,y) \in A \circ B$.

Отже, композиція $A \circ B=\{(1,4),(1,5),(1,3),(1,3),(2,3),(3,5)\}$.

3. Відображення

Раніше розглянуто означення функції як бінарного відношення (його ще називають функціональним) $f \subset X \times Y$ та взаємооднозначного відображення, коли будь-якому $x \in X$ відповідає один і тільки один елемент із *Y*.

Якщо областю визначення функціонального відношення є вся множина *X*, то таке функціональне відношення (функцію) називають *відображенням множини X в Y*. Елемент $x \in X$ називають аргументом (змінною), а *y* – образом (значенням відображення, функції).

Приклад 8. $f : X \to Y$, де $y = x^2$, *X* – множина дійсних чисел. Якщо *f* визначено тільки для цілих чисел, то *f* – це функція. Якщо для всіх $x \in X$, то бінарне відношення *f* – відображення.

(Зауважимо, що часто функцію й відображення не відрізняють і вживають ці слова як синоніми).

Розглянемо типи відображень. Якщо для довільних $x \neq y$ маємо: $f(x) \neq f(y)$, то відображення називається ін'єкцією. Якщо при відображенні всі елементи *Y* використані, то відображення називають відображенням *X* на *Y*, або сюр'єкцією (покриттям).

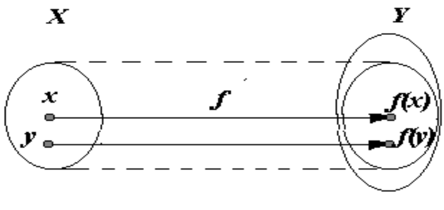


Рисунок 3 – Відображення *X* в *Y* (ін'єкція)

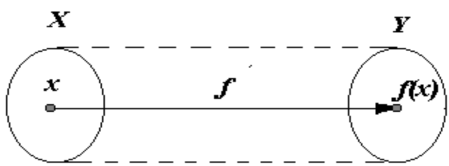


Рисунок 4 – Відображення *X* на *Y* (сюр'єкція)

Відображення, яке є ін'єкцією і сюр'єкцією (одночасно), називають бієкцією (накладанням).

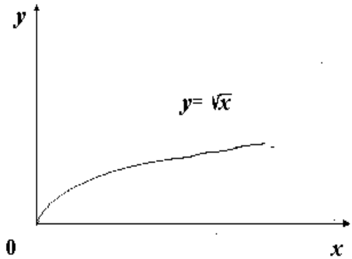


Рисунок 5 – Приклад бієкції $\left(y=\sqrt{x}, y\in\left[0,+\infty\right)\right)$

Якщо відображення f є бієкцією, то кажуть, що між X і Y встановлюється взаємно однозначна відповідність. Якщо X та Y – однакові множини, то $f: X\to Y$ називається відображенням множини самої на себе ($f: X\to X$).

Якщо маємо $<x,y>\in f$, то x називається прообразом для y, а y – образом для x. Сукупність усіх елементів $y_i\in Y$ таких, що $<x,y>\in f$, називається повним образом елемента x.

Повним прообразом для деякого $y\in Y$ називається множина $\left\{x_1,\ldots,x_n\right\}$, де $<x,y>\in f$. На рис. 6 повний прообраз для $y=1$ – множина $\left\{-1;1\right\}$.

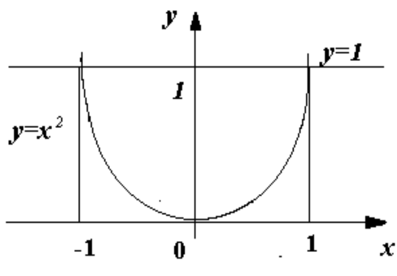


Рисунок 6 – Відображення $y=x^2, x, y\in R^1$.
Образ $y=1$ та прообрази $x_1=-1, x_2=1$

Множина $f(Q)$ називається повним образом множини Q, якщо вона є сукупністю образів усіх елементів $g \in Q : f(g) \in f(Q)$.

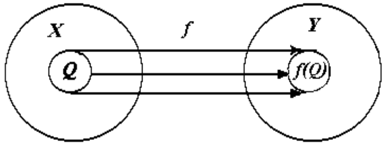


Рисунок 7 – Повний образ

Множина $f^{-1}(R)$ називається повним прообразом множини R, якщо ця множина є сукупністю прообразів усіх елементів $f^{-1}(r), r \in R \subseteq Y$.

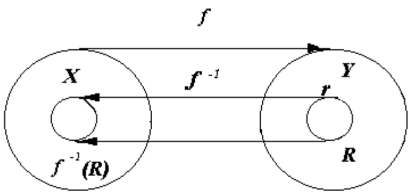


Рисунок 8 – Повний прообраз

Приклад 9. $y = x^2,\ \ x, y \in R^1$.

$$Q = \{-1, -2, 0, 1, 2\},\ f(Q) = \{1, 4, 0\},\ R = \{0, 1, 2\},$$

$$f^{-1}(R) = \left\{0, 1, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}.$$

4. Властивості еквівалентності

Часто еквівалентність позначають знаком $\sim$: $a \sim b$.

Означення 2. Назвемо класом еквівалентності $k(m_a)$ елемента m_a множину всіх елементів m_i, кожний із яких знаходиться з елементом m_a у відношенні еквівалентності, тобто:

$$k(m_a) = \{m_i | m_i \sim m_a\}.$$

Множину $k(m_a)$ ще називають множиною еквівалентних елементів.

Самостійно довести, що: 1) $m_a \in k(m_a);$ 2) якщо $m_a \sim m_b$, то $k(m_a) \subseteq k(m_b);$ 3) якщо $m_a \sim m_b$, то $k(m_a) = k(m_b);$ 4) якщо m_a не еквівалентне m_b, то $k(m_a) \cap k(m_b) = \varnothing$.

Представлення множини *M* у вигляді підмножин, що попарно не перерізаються, будемо називати розбиттям цієї множини *M* на підмножини $M_i, i = 1,2,\ldots,n$: $M = M_1 \cup \ldots \cup M_n;$ $M_i \neq \varnothing,$ $M_i \cap M_j = \varnothing,$ $i \neq j$.

Тобто класи еквівалентності утворюють розбиття множини.

Будь-який елемент $m_в \in k(m_a)$ називається представником (еталоном) цього класу. Системою представників називається підмножина множини *M*, що містить рівно по одному елементові з кожного класу еквівалентності.

Приклад 10. Група розбивається на класи еквівалентності за оцінкою (5, 4, 3, 2), що її одержали на екзамені з дискретної математики. Певний із класів може бути порожній. Система представників – множина студентів, кожен із яких має відмінну від інших оцінку. Нехай *M*={Авраменко, Борисенко, Вакуленко, Гавриленко, Давиденко, Євдокименко, Жаботенко, Зайченко, Іваненко, Клименко, Левченко} – група студентів, котрі складали іспит.

M_5={Зайченко, Іваненко, Клименко, Левченко} – одержали 5,

M_4={Авраменко, Борисенко, Вакуленко, Гавриленко} – 4;

M_3={Давиденко, Євдокименко} – 3; а M_2={Жаботенко} – 2.

Тоді матриця суміжності має вигляд, наведений в табл. 1, в якій прізвища скорочені до першої літери.

В табл. 1 порожні клітини – це нулі.

Граф цього відношення наведено на рис. 9.

Таблиця 1 – Матриця суміжності відношення еквівалентності

	А	Б	В	Г	Д	Є	Ж	З	І	К	Л
А	1	1	1	1							
Б	1	1	1	1							
В	1	1	1	1							
Г	1	1	1	1							
Д					1	1					
Є					1	1					
Ж							1				
З								1	1	1	1
І								1	1	1	1
К								1	1	1	1
Л								1	1	1	1

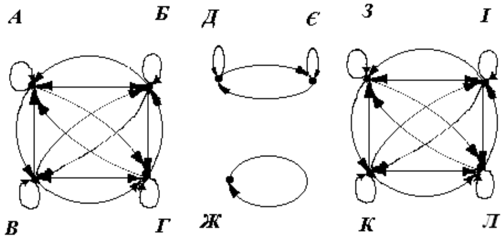


Рисунок 9 – Граф відношення еквівалентності на множині М

Кожна частина графа відношення, що відповідає певному класу еквівалентності, є повним графом (кожна вершина зв'язана з кожною дугою).

Зрозуміло, що для будь-якого відношення еквівалентності матриця суміжності може бути представлена як квадрати з одиниць, які стоять на головній діагоналі.

5. Властивості відношення порядку

Розглянемо деякі властивості відношення порядку. Частковий порядок позначають, як правило, знаком $\leq$: $a \leq b$, (a передує b, b слідує за a; $a, b \in A$). Тоді: 1) рефлексивність: $x \leq x$; 2) антисиметричність: $x \leq y$, $y \leq x$ означає $x = y$; 3) транзитивність $x \leq y$, $y \leq z$ означає $x \leq z$.

Строгий порядок**.** Бінарне відношення на множині *A*, що є іррефлексивне та транзитивне, називають відношенням строгого порядку, позначається воно $<$: $a < b$.

Приклад 11. Відношення «менше» на множині натуральних чисел – це відношення строгого порядку.

Для наступного прикладу побудуємо матрицю суміжності і граф відношення часткового порядку.

Приклад 12. Відношення «*x* є дільником *y*»: $x\rho y$ $x, y \in \{1,2,3,4,5,6,8,10,14,15\}$. Очевидно, що це відношення часткового порядку (рефлексивність, антисиметричність і транзитивність виконується). Побудуємо матрицю суміжності у вигляді табл. 2.

Таблиця 2 – Матриця суміжності відношення часткового порядку

x \ *y*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**10**	**14**	**15**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1		1		1	1	1	1	
3			1			1				1
4				1			1			
5					1					1
6						1				
8							1			
10								1		
14									1	
15										1

Зазначимо, що в матриці суміжності відношення часткового порядку елементи головної діагоналі – одиниці (це забезпечує рефлексивність відношення). Під цією діагоналлю немає одиниць (це забезпечує антисиметричність відношення).

Граф цього відношення наведено на рис. 10.

Зазначимо, що в матриці суміжності відношення часткового порядку елементи головної діагоналі – одиниці (це забезпечує рефлексивність відношення). Під цією діагоналлю немає одиниць (це забезпечує антисиметричність відношення).

Граф цього відношення наведено на рис. 10.

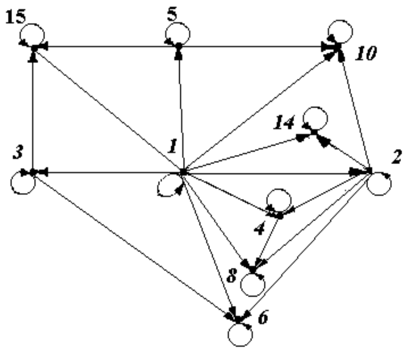


Рисунок 10 – Приклад графа відношення часткового порядку

Якщо граф відображає транзитивне відношення ρ, то, крім дуг, що відповідають відношенням $a\rho b$, $b\rho c$, є дуга, що відображає відношення $a\rho c$. Остання називається такою, що транзитивно замикає.

Граф частково впорядкованого відношення з видаленими петлями та дугами, що транзитивно замикають, називається діаграмою Хассе.

Діаграма Хассе для відношення, представленого графом на рис. 10, зображена на рис. 11.

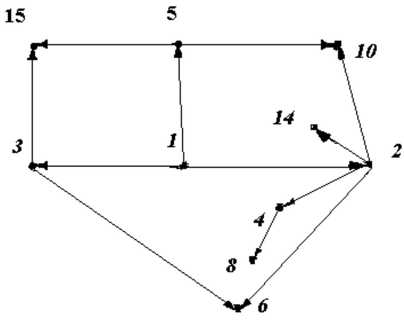


Рисунок 11 – Діаграма Хассе для відношення,
що задано графом на рисунку 2

Діаграми Хассе відомі з 19 століття, коли ними зображали генеалогічні дерева.

Лекція 4. Алгебраїчні системи та їх властивості. Решітки та булеві алгебри

1. Властивості бінарних операцій

Раніше введено поняття n-арної алгебраїчної операції на множині A. Розглянемо властивості бінарних операцій, які будемо позначати $\circ$, T, $\perp$. Якщо пишуть $a \perp b = c$, $aTb = d$, $a \circ b = e$, то a, b називають операндами, c, d, e – результатами операції; $a, b, c, d, e \in A$.

Операції на множині A можуть мати деякі спільні властивості:

– комутативність $a \circ b = b \circ a$;

– асоціативність $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$;

– дистрибутивність зліва $(aTb) \perp c = (a \perp c) T (b \perp c)$ та справа $c \perp (aTb) = (c \perp a) T (c \perp b)$.

Приклад 1.

1. Додавання і множення на числовій множині асоціативне й комутативне. Множення дистрибутивне відносно додавання (як зліва, так і справа) в числовій множині.

2. Додавання не дистрибутивне відносно множення, оскільки, взагалі кажучи, якщо a, b, c – числа, то $a + bc \neq (a + c)(b + c)$.

3. Переріз множини – дистрибутивна операція відносно об'єднання і навпаки (з обох боків).

Якщо в множині $S \subset A$ $c = a \circ b$ є результатом операції $a \circ b \in S$ для будь-яких $a, b \in S$, то множина S називається замкненою відносно операції $\circ$.

Приклад 2. Множина парних чисел замкнена відносно операції додавання. Вона ж замкнена і відносно множення ($2k \cdot 2n = 4kn$ – парне число, $2k + 2n = 2(k + n)$ – парне число).

Елемент $e \in A$ називається нейтральним, якщо для всіх елементів $a \in A$ справедливо:

$$e \circ a = a \circ e = a.$$

Приклад 3. 1. Якщо A – множина дійсних чисел, а операція $\circ$ – додавання, то нейтральний елемент – це нуль, якщо операція $\circ$ – це множення, то нейтральний елемент – це одиниця.

2. Якщо A – сім'я множин, а операція $\circ$ – це операція об'єднання $\cup$, то нейтральним елементом є порожня множина $\varnothing$, якщо операція $\circ$ – це переріз $\cap$, то нейтральним елементом виступає універсальна множина I.

3. Множина натуральних чисел N не має нейтрального елемента відносно додавання ($0 \notin N$).

Нехай множина A має нейтральний елемент e відносно операції $\circ$. Елемент b називається *симетричним (оберненим, протилежним)* елементу a, якщо $a \circ b = b \circ a = e$.

Приклад 4. 1. Якщо A – множина дійсних чисел, то симетричним числу x відносно додавання є $-x\big(x+(-x)=0\big)$, а (при $x \neq 0$) відносно множення є $x^{-1}\big(x \cdot x^{-1} = 1\big)$.

2. Множина всіх власних підмножин деякої множини не має симетричних елементів відносно $\cap$ та $\cup$. (Довести самостійно).

Властивості операцій можна представити у двох формах. В *адитивній* операція $\circ$ (T) записується символом *додавання* (+), у *мультиплікативній* операція $\circ$ ($\perp$) зображається *символом множення* ($\cdot$), який у записах можна опускати: $a \cdot b = ab$. Якщо в множині визначено дві операції, то першу, як правило, вважають *адитивною*, а другу – *мультиплікативною*.

Для *адитивної* операції нейтральний елемент позначається 0 і називається *нулем*, а *симетричний* до a позначається ($-a$) і називається *протилежним*. У *мультиплікативній* – нейтральний елемент позначається 1 та називається *одиницею*, а *симетричний* до a позначається a^{-1} і називається *оберненим*.

Зручність адитивної й мультиплікативної форм запису полягає в тому, що при операціях над числами співвідношення між операціями *збігаються зі звичайними* операціями додавання і множення чисел.

2. Алгебраїчні системи

Означення 1. Алгебраїчною системою A називається множина з визначеними на ній операціями та відношеннями $A = <M, O, R>$, де M – не порожня множина, O – сім'я алгебраїчних операцій, R – сім'я відношень, заданих на множині M.

Множина з системою визначених на ній алгебраїчних операцій називається універсальною алгеброю, тобто якщо $R = \varnothing$, то $A = <M, O, \varnothing>$ – універсальна алгебра. Множину M називають носієм, а O – сигнатурою.

Якщо $0 = \varnothing$, то $A = <M, \varnothing, R>$ – називають *реляційною системою (або моделлю).*

Означення 2. Алгеброю множин називають непорожню сукупність $M(I)$ підмножин деякої множини I, замкнену відносно теоретико-множинних операцій (об'єднання, перерізу, заперечення), які виконуються скінченну кількість разів.

Нагадаємо, що замкненість означає: результат операції належить $M(I)$. Тобто $A \subset M(I)$, $B \subset M(I) \Rightarrow A \cup B \subset M(I)$, $A \cap B \subset M(I)$, $\bar{A} \subset M(I)$. Зазначимо: $M(I)$ завжди містить I та $\varnothing$ (оскільки $A \cup \bar{A} = I$, $A \cap \bar{A} = \varnothing$).

Алгебра множин – це $< M(I), \cap, \cup, \bar{\ }, \varnothing, I >$, де $M(I)$ – носій, а $\{\cap, \cup, \bar{\ }, \varnothing, I\}$ – сигнатура; $\cup$, $\cap$ – бінарні, $\bar{\ }$ – унарна, $\varnothing, I$ – нульарні операції у цій сигнатурі.

Деякі найбільш важливі з алгебраїчних систем наведено в табл.1.

До табл. 1 зауважимо, що друга операція (якщо вона визначена) є дистрибутивною зліва та справа відносно першої. Симетричні елементи для другої операції *визначені* для всіх елементів, за винятком нейтрального для першої операції (нуля).

Класичними прикладами алгебраїчних систем є групи, кільця, векторні простори, лінійні алгебри, лінійно впорядковані групи, решітки. Найбільш важливі з цих прикладів розглянемо детальніше.

Таблиця 1 – Алгебраїчні системи

Назва алгебраїчної системи	Перша операція (адитивна)				Друга операція (мультиплікативна)			
	властивості		елементи		властивості		елементи	
	асоціативність	комутативність	нейтральний (нуль)	симетричний (протилежний)	асоціативність	комутативність	нейтральний (одиниця)	симетричний (обернений)
Півгрупа (моноїд)	+							
Абелева (комутативна) півгрупа	+	+						
Півгрупа з нулем (одиницею)	+		+					
Абелева півгрупа з нулем (одиницею)	+	+	+					
Група	+		+	+				
Абелева (комутативна) група	+	+	+	+				
Асоціативне кільце	+	+	+	+	+			
Абелеве (комутативне) кільце	+	+	+	+	+	+		
Кільце з одиницею (унітарне кільце)	+	+	+	+	+		+	
Абелеве кільце з одиницею	+	+	+	+	+	+	+	
Тіло	+	+	+	+	+		+	+
Поле (комутативне тіло)	+	+	+	+	+	+	+	+

Означення 3. Кільцем називається непорожня множина K (довільної природи), для якої означені дві бінарні операції: додавання (позначається +), множення (позначається точкою, яка опускається), що задовольняють аксіоми: для всіх $a, b, c \in K$.

– комутативність додавання $a+b=b+a;$

– асоціативність додавання $a+(b+c)=(a+b)+c;$

– оборотність додавання (можливість «віднімання»): рівняння $a+x=b$ має єдиний розв'язок $x=b-a\in K;$

– дистрибутивність множення відносно додавання $a(b+c)=ab+ac,\ (b+c)a=ba+ca.$

У кільці може бути відсутня асоціативність множення (*неасоціативні кільця*) та комутативність множення (*некомутативні кільця*).

Приклад 5. Приклади кілець:

– дійсні числа зі звичайними операціями додавання і множення;

– сукупність многочленів з однією змінною відносно операції додавання й множення многочленів;

– множина чисел, кратних заданому *m*, відносно додавання, множення;

– множина цілих чисел відносно додавання, множення;

– множина всіх функцій, неперервних на даному відрізку числової прямої відносно додавання, множення;

– множина квадратних матриць одного порядку з дійсними елементами відносно операцій додавання та множення матриць;

множина всіх векторів тривимірного простору відносно додавання і векторного добутку векторів.

Розглянемо особливий клас кілець – поле.

Означення 4. Поле – це множина *П*, що має принаймні два елементи, у якій задані дві бінарні операції – додавання (+) та множення (·), обидві асоціативні й комутативні, пов'язані між собою законом дистрибутивності, тобто для всіх $a,b,c\in П$ виконується:

– комутативність $a+b=b+a,\ ab=ba;$

– асоціативність $a+(b+c)=(a+b)+c,\ a(bc)=(ab)c;$

– дистрибутивність множення відносно додавання $a(b+c)=ab+ac;$

– крім цього, в $П$ вимагається:

- існування нульового елемента 0 (нуля), тобто елемента, для якого $0+a=a,$ для всіх $a \in \Pi;$
- існування протилежного елемента (позначається $-a$), тобто такого елемента, що $(-a)+a=0;$
- існування одиничного елемента e (одиниці), тобто такого елемента $e,$ що для всіх $a \in \Pi$ виконується $ae=a;$
- існування для кожного ненульового елемента оберненого $\left(a^{-1}\right),$ тобто такого, що $a^{-1}a=e.$

Отже, в полі можна ввести віднімання та ділення на ненульовий елемент.

Приклад 6. Відносно звичайних операцій множення і додавання полями є:

– множина всіх раціональних чисел;

– множина всіх дійсних чисел;

– множина чисел вигляду $a+b\sqrt{2},$ де a,b – раціональні числа.

3. Деякі властивості впорядкованих множин, необхідні для означення решітки

Нехай є деяке відношення порядку (частковий порядок, лінійний порядок, або інший) на множині A, яке позначаємо $\rho, \ \leq, \preccurlyeq$.

Мажорантою (верхньою межею) підмножини $Q \subset A$ називається такий елемент $m \in A,$ що для всіх $q \in Q$ справедливо $q \preccurlyeq m$. Підкреслимо, що $m \in A,$ не обов'язково, щоб m належав $Q.$

Мінорантою (нижньою межею) підмножини $Q \subset A$ називається такий елемент $n \in A,$ що для всіх $q \in Q$ справедливо $n \preccurlyeq q$. Не обов'язково n належить $Q.$

Якщо мажоранта m (міноранта n) належить Q, то m називають *максимумом (мінімумом)* множини Q і позначають

$maxQ$ ($minQ$) (або ще називають відповідно *максимальним (мінімальним)* елементом Q). Неважко бачити, що максимум (мінімум) множини Q, якщо він існує, – єдиний.

Приклад 7. На рис. 1 – діаграма Хассе частково впорядкованої множини $P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ по відношенню $\subset$.

На діаграмі Хассе (рис. 1) елемент $\{2\}$ є мінорантою множини $\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$. Елемент $\{2,3\}$ є мажорантою множини $\{\{2\},\{3\},\varnothing\}$. У множині $\{\{2\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ мінімальним є елемент $\{2\}$, а максимальним – $\{1,2,3\}$.

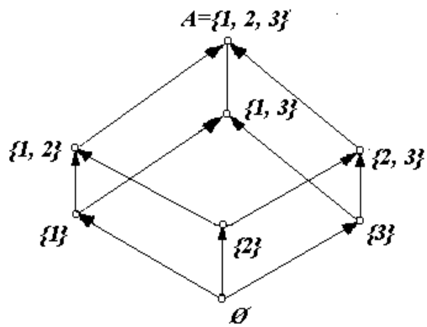


Рисунок 1 – Приклад діаграми Хассе частково впорядкованої множини

Якщо множина мажорант (мінорант) у свою чергу має максимальний (мінімальний) елемент, то його називають *верхньою (нижньою) гранню підмножини* Q і позначають $supQ$ ($infQ$).

Верхня (нижня) грань підмножини Q, що належить Q, називається *найбільшим (найменшим)* елементом підмножини Q.

Приклад 8. Розглянемо частково упорядковану множину, що представлена на рис. 1. Для множини $Q=\{\{2\},\{3\},\varnothing\}$ мажорнатами є множини $\{1,2,3\}$, $\{2,3\}$. Інших мажорант немає. Максимальним у множині мажорант є елемент $\{1,2,3\}$. Отже, він є верхньою гранню множини Q, але оскільки $\{1,2,3\}$ не належить Q, то це не є найбільшим елементом. Елемент $\{1,2,3\}$ є найбільшим, наприклад, для множини $\{\{1,2,3\},\{2,3\},\{2\},\{3\},\{\varnothing\}\}$. Аналогічно, елемент $\varnothing$ є нижньою гранню множини $\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$, оскільки є мінімальним елементом множини мінорант $\{\{2\},\{\varnothing\}\}$. Для множини $\{\varnothing,\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ порожня множина є найменшим елементом. Множина $\{\{2\},\{3\},\{\varnothing\}\}$ максимуму не має, мажорантою є множина $\{2,3\}$, а в множині $\{\{2,3\},\{2\},\{3\},\{\varnothing\}\}$ максимумом є елемент $\{2,3\}$. У множині $\{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\}\}$ мінімуму немає, міноранта – це $\{1\}$, а в множині $\{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{1\}\}$ мінімум є, це – елемент $\{1\}$.

Теорема 1. Частково впорядкована множина M містить не більше від одного найбільшого (найменшого) елемента.

Доведення. Проведемо його для найбільшого елемента. Нехай є два найбільших елементи $m_1 \in M$, $m_2 \in M$, а $\preccurlyeq$ – відношення часткового порядку.

За означенням найбільшого елемента маємо $m_1 \preccurlyeq m_2$; $m_2 \preccurlyeq m_1$. У силу антисиметричності $\preccurlyeq$ $m_1 = m_2$. Протиріччя, отже, двох найбільших елементів M не містить.

Для найменшого доведення аналогічне.

Далі, якщо не оговорене інше, під *порядком* розуміємо *частковий порядок,* під упорядкованою множиною – частково впорядковану множину.

Найбільший елемент, якщо він існує, впорядкованої множини M назвемо *одиничним* і позначимо 1. *Найменший* – відповідно *нульовим,* позначимо 0 (якщо він існує).

Під *ізоморфізмом* між двома впорядкованими множинами M та M^* будемо розуміти *взаємно однозначну відповідність* η

між M і $M*$ таку, що з $m_i \preccurlyeq m_j$ випливає $\eta(m_i) \preccurlyeq \eta(m_j)$ й із $\eta(m_i) \preccurlyeq \eta(m_i)$ випливає $m_i \preccurlyeq m_j$, де $m_i, m_j \in M$; $\eta(m_i)$, $\eta(m_j) \in M*$.

Дві впорядковані множини M, $M*$ називаються ізоморфними, коли між ними існує ізоморфізм.

Нагадаємо, що під оберненим відношенням $\overline{\rho}$ до бінарного відношення ρ розуміють таке відношення, при якому $<x,y>\in \overline{\rho}$ тоді і тільки тоді, коли $<y,x>\in \rho$.

Принцип двоїстості. *Відношення, обернене до відношення порядку, також є відношенням порядку.*

Часто принцип двоїстості формулюють так: *якщо теорема справедлива для частково впорядкованих множин, то справедлива і двоїста їй теорема,* тобто теорема для множин, що є двоїстими до заданих упорядкованих множин.

При цьому двоїстою до частково впорядкованої множини $\overline{M}$ називають частково впорядковану множину M, задану на тому ж носії M за допомогою оберненого відношення**.**

Приклад 9. На рис. 2 зображена двоїста діаграма Хассе для діаграми рис. 1, тобто діаграма двоїстої до $P(A)$, $A=\{1,2,3\}$ частково впорядкованої множини $\overline{P(A)}$.

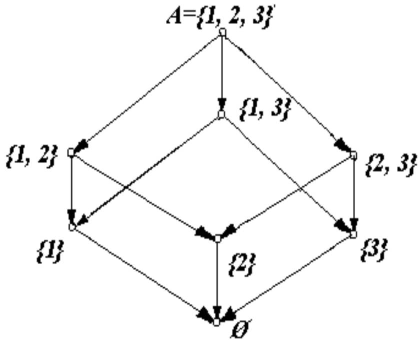


Рисунок 2 – Двоїста діаграма до зображеної на рис. 1

Розглянемо *лінійно впорядковану* підмножину L (ланцюг) частково впорядкованої множини M.

Довжиною ланцюга називається число $\ell = |L| - 1$, де $|L|$ – кількість елементів (потужність) носія лінійно впорядкованої множини L. Кожний ланцюг довжини ℓ ізоморфний ланцюгу цілих чисел $1, 2, \ldots, \ell + 1$.

Висотою $d(m)$ елемента m упорядкованої множини M називається *максимум довжин ланцюгів*, для яких m є найбільшим елементом.

Довжиною $d(M)$ впорядкованої множини M називається *максимум висот* її *елементів.*

Приклад 10. З рис. 2: $L = \{\{1,2\}, \{2\}, \varnothing\}$, $\ell = 3 - 1 = 2$; $d(\{1,2\}) = 1$; $d(\{1\}) = 2$; $d(\varnothing) = 3$; $d\overline{(P(A))} = 3.$

4. Решітки

Найменшою (або точною) верхньою гранню множини Q називається мажоранта, менша за інші мажоранти. *Найбільшою (або точною) нижньою гранню* називається міноранта, більша (якій передують) за інші міноранти. Очевидно, що їх (точних граней) для підмножини $Q \subset M$ не більше ніж одна. Нагадаємо, що M – упорядкована множина.

Приклад 11. Розглянемо частково упорядковану множину, що представлена на рис. 3. Елементи $\{1,2,3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2\}$ – це мажоранти множини $Q_1 = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$. Передує всім мажорантам мажоранта $\{1,2\}$, отже вона є найменшою (точною) верхньою гранню множини Q_1. Для множини $Q_2 = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ мінорантами є $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$. Оскільки мінорнаті $\{1,2\}$ всі інші мінорани передують, то найбільшою (точною) нижньою гранню множини Q_2 є міноранта $\{1,2\}$.

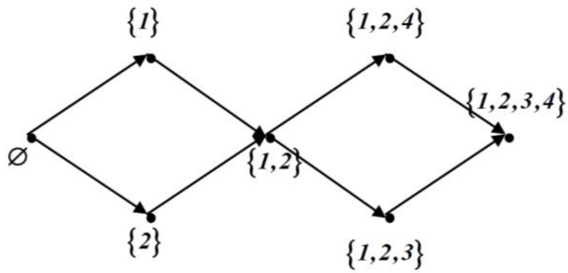


Рисунок 3 – Приклад частково упорядкованої множини, заданої діаграмою Хассе

Використовуючи поняття частково впорядкованої множини, дамо означення *решітки (структури)*.

Означення 5. Решіткою називається частково впорядкована множина $< M, \preccurlyeq >$, будь-які два елементи *x*, *y* якої мають точну нижню грань (або переріз $x \cap y$) і точну верхню грань (або об'єднання $x \cup y$).

Зауваження. Впорядкована множина $\overline{M}$, що двоїста решітці, є решіткою, в якій переріз та об'єднання міняються місцями.

Упорядкована множина, в якій всі підмножини мають найбільшу нижню і найменшу верхню грані, називається *повною решіткою.*

Очевидно, що якщо *всі ланцюги* в решітці *скінченні*, то будь-яка підмножина в решітці *має* точну верхню й точну нижню грані.

Приклад 12. Розглянемо решітку на рис. 1. Знайдемо об'єднання та переріз деяких її елементів:

$$\{2\} \cup \{1\} = \{1,2\};$$

$$\{2\} \cap \{2,3\} = \{2\};$$

$$\{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\};$$

$$\{1,2,3\} \cup \varnothing \{1,2,3\};$$

$$\{1,2\} \cap \{3\} = \varnothing;$$

$$\{1\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}.$$

Зауважимо, що $\cup$, $\cap$ як операції з елементами решітки – це не операції об’єднання і перерізу множин, хоч для цього прикладу, як ми бачимо, є повний збіг формальних записів.

Можна дати *інше означення решітки* як *алгебри* $A = < M, \cup, \cap >$, сигнатура якої має властивості:

I. Комутативність:

1) $x \cup y = y \cup x$,

2) $x \cap y = y \cap x$.

II. Асоціативність:

3) $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$,

4) $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$.

III. Поглинання:

5) $x \cup (x \cap y) = x$,

6) $x \cap (x \cup y) = x$.

IV. Ідемпотентність:

7) $x \cup x = x$,

8) $x \cap x = x$.

Тут $x, y, z \in M$, а $\cap, \cup$ – операції взяття точної верхньої (об’єднання) та точної нижньої (перерізу) граней елементів відповідно.

Можна показати, що обидва означення рівносильні, якщо порядок $\preccurlyeq$ ввести так: якщо $x \cap y = x$, $x \cup y = y$, то $x \preccurlyeq y$.

Елементи 0 і 1 у решітці будемо називати *структурними нулем та одиницею*.

У решітці *А* зі структурними нулем і одиницею два елементи *x, y* називають *доповняльними*, якщо

$$x \cap y = 0; x \cup y = 1.$$

Елемент $\overline{m}$, доповняльний до елемента m, називається також *доповненням* елемента m в решітці A.

Решітка A називається *дистрибутивною,* якщо її сигнатура, крім перерахованих чотирьох властивостей, задовольняє тотожності, яку називають *дистрибутивність перерізу відносно об'єднання:*

$$(x \cup y) \cap z = (x \cap z) \cup (y \cap z) \;\; \forall x, y, z \in M.$$

У решітці A зі *структурними нулем і одиницею,* в якій кожен елемент m має доповнення $\overline{m}$, можна вважати заданою операцію (унарну) $f(x) = \overline{x}$.

Решітка A називається *решіткою з доповненнями,* якщо вона *має структурний нуль* і таку унарну операцію $f(x) = \overline{x}$, що $\forall x, y \in M$

$$\overline{\overline{x}} = x, \tag{1}$$

$$\overline{x \cup y} = \overline{x} \cap \overline{y},, \tag{2}$$

$$x \cap \overline{x} = 0.. \tag{3}$$

Згідно з (1) та (2) одна з операцій $\cap, \cup$ виражається через іншу й доповнення. Отже, *решітку з доповненням* можна визначити як алгебру $A = < M, \cup, ^{-} >$.

Наслідок тотожностей (1)–(3):

1) $0 \preccurlyeq m \, \forall m \in M$, отже, $0 \cap m = 0;$
2) позначимо $1 = \overline{0}$, тоді з $0 \cap m = 0$ та (1), (2), маємо:

$$1 \cup m = 1 \;\; (0 \cap m = \overline{\overline{0}} \cap \overline{\overline{m}} = \overline{\overline{0} \cup \overline{m}} = \overline{\overline{0}},$$

отже,

$$\overline{0} \cup \overline{m} = 0; 1 \cup \overline{m} = 1; 1 \cup m = 1).$$

Отже, 1 – найбільший елемент решітки, тобто він є структурною одиницею.

3) згідно з (1), (2) та (3) $m \cup \bar{m} = 1$. ($m \cap \bar{m} = 0$; $\overline{m \cap \bar{m}} = \bar{0}$; $\overline{\overline{\overline{m}} \cap \bar{m}} = 1$, $\bar{m} \cup m = 1$).

5. Булева алгебра

Означення 6. Дистрибутивна решітка з доповненнями називається булевою алгеброю.

Можемо дати інше означення булевої алгебри, що еквівалентне даному.

Означення 7. Булева алгебра – це не порожня множина B з операціями $\cup, \cap, \bar{\ }$ над елементами $x, y, z \in B$, що задовольняють аксіоми:

V. Комутативність:

1) $x \cup y = y \cup x$,

2) $x \cap y = y \cap x$.

VI. Дистрибутивність:

3) $x \cap (y \cup z) \equiv (x \cap y) \cup (x \cap z)$,

4) $x \cup (y \cap z) \equiv (x \cup y) \cap (x \cup z)$.

VII. Асоціативність:

5) $x \cup (y \cup z) \equiv (x \cup y) \cup z$,

6) $x \cap (y \cap z) \equiv (x \cap y) \cap z$.

VIII. Поглинання:

7) $x \cup (x \cap y) = x$,

8) $x \cap (x \cup y) = x$.

V. Склеювання:

9) $(x \cap \bar{x}) \cup y = y$,

10) $(x \cup \bar{x}) \cap y = y$.

У булевій алгебрі *вводиться впорядкованість* елементів: $x \prec y$, тоді і тільки тоді, коли $x = x \cap y$.

Можливі й інші інтерпретації впорядкованості:

1) як теоретико-множинне включення:

$X \subseteq Y \Leftrightarrow X = X \cap Y, X, Y$ – множини;

2) як причинний наслідок для подій (подія *х* тягне за собою подію *у*);

3) як логічне слідування для висловлювань.

Булева алгебра містить 1 та 0 як результат таких операцій:

$$1 = x \cup \overline{x};$$

$$0 = x \cap \overline{x}.$$

Тобто булева алгебра – це: $< B, \cap, \cup, \overline{\ }, 0, 1 >$.

Булева алгебра – абстрактна система. Тобто первинні символи та аксіоми не мають якогось наперед заданого змісту. Єдиним джерелом значення символу є його відношення до інших символів системи, яке виражене аксіомами. Цього достатньо, щоб здійснити формальне виведення теорем, що не достатньо, щоб зробити висновок про істинність висловлювання, що стверджується теоремою. Для цього треба знати, що означають символи, які входять у побудовану систему.

Вибір значення символів абстрактної теорії (ототожнення з конкретними об'єктами) називається інтерпретацією абстрактної теорії. *Однією з інтерпретацій булевої алгебри є алгебра множин* (але не єдиною). А саме: *В* – це $M(I)$ – сім'я всіх підмножин із множини *I*; операції мають таке ж позначення: $\cap, \cup\ \overline{\ }$; роль одиниці відіграє *I*, а нуля – $\varnothing$.

Приклад 13. Будь-яка булева алгебра є булевим кільцем з одиницею відносно операцій додавання та множення, що визначається правилами:

$$x + y = (x \cap \overline{y}) \cup (y \cap \overline{x}) = x \Delta y, x - y = x \cap y.$$

Нуль й одиниця кільця збігаються з нулем і одиницею алгебри.

Лекція 5. Елементарні булеві функції, суперпозиція функцій. Табличний спосіб визначення функцій

1. Означення булевих функцій

Означення 1. Функція $y = f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ називається булевою функцією, якщо $x_1,\ldots,x_n, y \in \{0,1\}$. Змінні, що приймають значення 0 або 1 називаються булевими змінними.

Таблиця 1 – Булеві функції однієї змінної

Позначення аргументу, функції	Значення аргументу та функції		Назва, позначення функції
x	**0**	**1**	
y_0	0	0	тотожній нуль
y_1	0	1	x
y_2	1	0	не «x», $\bar{x}$, інверсія, заперечення
y_3	1	1	тотожня 1

Таблиця 2 – Булеві функції двох аргументів

x_1	**0**	**0**	**1**	**1**	Позначення	Назва	Читання
x_2	**0**	**1**	**0**	**1**			
y_0	0	0	0	0	0	Константа 0 (тотожній нуль; завжди хибно)	Нуль (будь-яке 0)
y_1	0	0	0	1	$x_1 \wedge x_2, x_1x_2$ $\left(x_1 \& x_2; x_1 \cap x_2\right)$	Кон'юнкція (збіг, добуток, переріз, логічне «*і*»)	x_1 і x_2 (x_1 та x_2; і x_1 і x_2)
y_2	0	0	1	0	$x_1 \leftarrow x_2$ $\left(x_1 \supset x_2;\right.$ $\left.x_1 \setminus x_2\right)$	Заперечення імплікації (збіг з забороною; антизбіг; заборона)	x_1, але не x_2
y_3	0	0	1	1	x_1	Повторення (ствердження, домінція) першого аргумента	Як x_1
y_4	0	1	0	0	$x_2 \leftarrow x_1$ $\left(x_1 \not\subset x_2; x_2 \setminus x_1\right)$	Заперечення оберненої імплікації	Не x_1, але x_2

x_1 / x_2	0 / 0	0 / 1	1 / 0	1 / 1	**Позначення**	**Назва**	**Читання**
y_5	0	1	0	1	x_2	Повторення (ствердження, домінація) другого аргументу	Як x_2
y_6	0	1	1	0	$x_1 + x_2$ $\left(x_1 \nabla x_2; x_1 \otimes x_2\right)$	Сума за модулем 2 (додавання за модулем 2, нерівнозначність, антиеквівалентність)	x_1 не як x_2 (або x_1, або x_2)
y_7	0	1	1	1	$x_1 \vee x_2$ $\left(x_1 + x_2, x_1 \cup x_2\right)$	Диз'юнкція (поділ, логічна сума, збірка)	x_1 або x_2 (x_1 або хоча б x_2)
y_8	1	0	0	0	$x_1 \downarrow x_2$ $\left(x_1 \bar{\nabla} x_2;\right.$ $\left.x_1 o x_2\right)$	Стрілка Пірса (функція Вебба; заперечення диз'юнкції, логічне «не-або»)	Ні x_1, ні x_2
y_9	1	0	0	1	$x_1 \sim x_2;$ $x_1 \equiv x_2;$ $x_1 \leftrightarrow x_2)$	Еквіваленція (різнозначність, еквівалентність, взаємозалежність)	x_1 як x_2 (x_1, якщо і тільки якщо x_2; x_1 тоді і тільки тоді коли x_2)
y_{10}	1	0	1	0	$\overline{x_2}$ $(x_2'; \sim x_2, \rceil x_2$	Заперечення (інверсія) другого аргументу (доповнення до другої змінної)	Не x_2
y_{11}	1	0	1	1	$x_2 \to x_1$ $\left(x_1 \subset x_2;\right.$ $\left.x_1 < x_2\right)$	Обернена імплікація (обернений поділ з забороною; обернена селекція)	Якщо x_2, то x_1 (x_1 або не x_2)
y_{12}	1	1	0	0	$\overline{x_1}$ $(x_1'; \sim x_1, \rceil x_1$	Заперечення (інверсія) першого аргументу (доповнення до першої змінної)	Не x_1

x_1	0	0	1	1	**Позначення**	**Назва**	**Читання**
x_2	0	1	0	1			
y_{13}	1	1	0	1	$x_1 \to x_2$ $(x_1 \supset x_2; x_1 > x_2)$	Імплікація (поділ з забороною; слідування; селекція)	Якщо x_1, то x_2 (не x_1 або x_2)
y_{14}	1	1	1	0	$x_1 \rfloor x_2$ $(x_1/x_2;\ x_1 \overline{\wedge} x_2;\ x_1 \overline{\&} x_2)$	Штрих Шеффера (заперечення кон'юнкції, несумісність, логічне «не-і»	Не x_1 або не x_2
y_{15}	1	1	1	1	1	Константа 1 (тотожня одиниця, завжди істинно)	Одиниця (будь-яке 1)

Зауважимо, що в таблиці 2 перше наведене позначення функцій є найбільш вживаним (вони наведені до дужок, в яких є й інші позначення, що використовуються).

Функції однієї змінної (їх 4), а також $x_1 \vee x_2$ (диз'юнкція), $x_1 \wedge x_2$ (кон'юнкція), $x_1 \to x_2$ (імплікація), $x_1 + x_2$ (додавання за модулем 2) та $x_1 | x_2$ (штрих Шефера) називають *елементарними.*

Вирази, що в табл. 1, 2 стоять в стовпці «позначення», називають *логічними формулами:* ($\overline{x}, x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \to x_2, x_1 \sim x_2$ тощо), або *формулами алгебри логіки, формулами булевої алгебри.*

Підстановка замість змінної іншої формули в булевій функції називається *суперпозицією булевих функцій.*

Приклад 1. $y = x_1 \vee x_2;\quad x_2 = x_3 \downarrow x_4,\quad x_4 = x_1 \wedge x_2,\quad x_3 = \overline{x_1}.$ Можна утворити суперпропозиції $y = x_1 \vee (x_3 \downarrow x_4);$ $y = x_1 \vee (x_3 \downarrow (x_1 \wedge x_2));$ $y = x_1 \vee (\overline{x_1} \downarrow (x_1 \wedge x_2)).$

Очевидно, що кожна формула (тобто суперпозиція) виражає булеву функцію.

Дві функції (формули) вважаються *рівносильними* (тотожніми), якщо при будь-яких значеннях однакових аргументів ці функції (формули) приймають однакові значення. Це можна перевірити за таблицями основних функцій. Тотожні формули з'єднують знаком рівності. Булеві функції називають *логічними операціями*.

Приклад 2. 1) $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$; 2) $\overline{(x \wedge y) \vee \overline{z}} = \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{z}$.

Порівнюючи таблиці булевих функцій бачимо, що:

$$x_1 x_2 = \overline{x_1 | x_2}; \quad (1) \qquad x_1 | x_2 = \overline{x_1 x_2}; \quad (5)$$

$$x_1 \leftarrow x_2 = \overline{x_1 \to x_2}; \quad (2) \qquad x_1 \to x_2 = \overline{x_1 \leftarrow x_2}; \quad (6)$$

$$x_1 + x_2 = \overline{x_1 \sim x_2}; \quad (3) \qquad x_1 \sim x_2 = \overline{x_1 + x_2}; \quad (7)$$

$$x_1 \vee x_2 = \overline{x_1 \downarrow x_2}; \quad (4) \qquad x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}. \quad (8)$$

Тобто будь-яка з шістнадцяти функцій двох змінних виражається через *сукупність шести функцій*, що містять заперечення $\overline{x}$ та будь-яку з кожної пари: $\{y_0, y_{15}\}$; $\{y_1, y_{14}\}$; $\{y_2, y_{13}\}$; $\{y_6, y_9\}$; $\{y_7, y_8\}$. Приклад такої сукупності: 0, $\overline{x}$, $x_1 x_2$, $x_1 \vee x_2$, $x_1 \sim x_2$, $x_1 \to x_2$.

Така сукупність *надлишкова*, оскільки можна показати:

$$x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2; \quad (9)$$

$$x_1 \leftrightarrow x_2 = \left(x_1 \vee \overline{x_2}\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2\right). \quad (10)$$

Це легко перевірити (див. табл. 1, 2).

Таблиця 1 – Доведення, що $x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$

Формула	Значення аргументів та формул			
x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
$\overline{x_1}$	1	1	0	0
$\overline{x_1} \vee x_2$	1	1	0	1
$x_1 \to x_2$	1	1	0	1

Тобто комплект із шести функцій скорочується *до чотирьох:* 0, $\bar{x}$, $x_1 x_2$, $x_1 \vee x_2$. Можна довести, що множина всіх булевих функцій разом з операціями $\bar{\ }$, $\wedge$, $\vee$ утворює булеву алгебру. Зазначимо, що для цих функцій *справедливі аналоги формул,* які розглянуті для операцій $\bar{\ }$, $\cup$, $\cap$ для множин, якщо замість доповнення множини поставити заперечення булевої функції, замість $\cup$ – $\vee$, $\cap$ – $\wedge$, $\varnothing$ – 0, I – 1 та однакові множини замінити однаковими булевими змінними.

Зокрема справедливі *правила де Моргана:*

$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}; \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}.$$

Таблиця 2 – Доведення, що $x_1 \sim x_2 = \left(x_1 \vee \overline{x_2}\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2\right)$

Формула	Значення аргументів і формул			
x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
$\overline{x_2}$	1	0	1	0
$x_1 \vee \overline{x_2}$	1	0	1	1
$\overline{x_1}$	1	1	0	0
$\overline{x_1} \vee x_2$	1	1	0	1
$\left(x_1 \vee \overline{x_2}\right)\left(\overline{x_1} \vee x_2\right)$	1	0	0	1
$x_1 \sim x_1$	1	0	0	1

Таким чином, всі булеві функції виражаються через 0, $\bar{x}$, $x \vee y$ або через 0, $\bar{x}$, $x \wedge y$.

Більш того, для запису будь-якої булевої функції *достатньо однієї функції.* Це може бути *стріка Пірса, або штрих Шефера,* оскільки мають місце такі формули, які легко перевірити за таблицями:

$$\bar{x} = x \downarrow x = x | x;$$

$$x_1 \wedge x_2 = \left(x_1 | x_2\right) | \left(x_1 | x_2\right);$$

$$x_1 \vee x_1 = \left(x_1 \downarrow x_2\right) \downarrow \left(x_1 \downarrow x_2\right).$$

У формулах, що містять $\bar{\ }$, $\vee$, $\wedge$, *вводять спрощення запису*, вважаючи операцію $\wedge$ старшою, тобто такою, що виконується раніше.

Як і для формул алгебри множин для формул алгебри логіки справедливий принцип двоїстості: з пари рівносильних формул можна отримати пару двоїстих рівносильних формул замінивши: $\wedge$ на $\vee$, 0 на 1 і навпаки.

Формула (або функція) рівносильна своїй двоїстій називається *самодвоїстою.*

Лекція 6. Канонічні форми булевих функцій, способи побудови канонічних форм. Алгебра Жегалкіна, способи побудови поліномів Жегалкіна

1. Канонічні форми булевих функцій

Означення 1. Диз'юктивна нормальна форма (ДНФ) – це диз'юнкція скінченної кількості різних членів, кожний з яких є кон'юнкцією певних змінних або їх заперечень, взятих в кон'юнкції не більше разу.

Приклад 1. $x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_4} \vee \overline{x_2} x_3 \overline{x_4}$ – це ДНФ.

Означення 2. Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ) – це кон'юнкція скінченної кількості різних членів, кожний з яких є диз'юнкція певних змінних або їх заперечень, що входять в цей член (диз'юнкцію) не більше одного разу.

Приклад 2. $\left(x_1 \vee \overline{x_2}\right)\left(x_1 \vee x_3\right)\left(x_2 \vee x_3\right)\left(x_1 \vee \overline{x_4}\right)$ – це КНФ.

Алгоритм приведення формули до ДНФ (КНФ)

1. Якщо формула містить інші операції крім $\vee$, $\wedge$, $\bar{\ }$, то вони за допомогою формул (1)–(10) виражаються через ці операції.

2. За законами де Моргана формула перетворюється до вигляду, в якому заперечення застосовується до окремих змінних.

3. За дистрибутивністю:

$$x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z); \, (x \vee y)z = xz \vee yz,$$

формула зводиться до кон'юнкції диз'юнкцій (до диз'юнкції кон'юнкцій).

4. На основі: а) ідемпотентності; б) закону логічного протиріччя; в) закону виключеного третього – спрощуються вирази:

а) $xx = x; \, x \vee x = x;$

б) $x\overline{x} = 0;$

в) $x \vee \overline{x} = 1.$

5. Застосовуємо при необхідності дії з 0 та 1 ($0 \vee x = x;$ $1 \wedge x = x$), а також асоціативність та комутативність операцій $\wedge$ та $\vee$.

Приклад 3. Перетворимо формулу до ДНФ:

$$x_1 \sim (x_2 \to x_3) = x_1 \sim \left(\overline{x_2} \vee x_3\right).$$

Розв'язок. Скористаємося (9) та (10) лекції 5:

$$x_1 \sim \left(\overline{x_2} \vee x_3\right) =$$

$$= \left(x_1 \vee \overline{\overline{x_2} \vee x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\right) = \left(x_1 \vee \overline{\overline{x_2}}\,\overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\right). \qquad (1)$$

Перетворимо цю формулу в ДНФ. За дистрибутивністю:

$$y = \left(x_1\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\right)\right) \vee \left(x_2\overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\right) = \left(x_1\overline{x_1} \vee x_1\overline{x_2} \vee x_1x_3\right) \vee$$

$$\vee\left(x_2\overline{x_3}\,\overline{x_1} \vee x_2\overline{x_3}\,\overline{x_2} \vee x_3x_2\overline{x_3}\right) = 0 \vee x_1\overline{x_2} \vee x_1x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_2x_3\overline{x_2} \vee$$

$$\vee x_2x_3\overline{x_3} = x_1\overline{x_2} \vee x_1x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}. \qquad (2)$$

Це ДНФ. Формулу (1) можна перетворити в КНФ: за дистрибутивністю:

$$x_1 \vee x_2\overline{x_3} = (x_1 \vee x_2)\left(x_1 \vee \overline{x_3}\right);$$

з цього і з (1) остаточно:

$$y = (x_1 \vee x_2)\left(x_1 \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\right). \qquad (3)$$

Отримано КНФ.

2. Досконалі нормальні форми

Означення 3. Якщо в кожному члені ДНФ (КНФ) представлені всі змінні (в прямому x_i чи в інверсному $\overline{x_i}$ вигляді), то ця форма називається досконалою (ДДНФ; ДКНФ – відповідно).

Можна довести, що якщо булева функція не є тотожня 0 (або 1), то вона має одну і тільки одну ДДНФ (ДКНФ).

Алгоритм побудови ДДНФ (ДКНФ) з ДНФ (КНФ)

1. Якщо деякий член α ДНФ (КНФ) не містить змінної x, вона вводиться на основі закону виключенного третього і властивості кон'юнкції $x \vee \overline{x} = 1, \alpha 1 = \alpha,$ а саме: $\alpha = \alpha\left(x \vee \overline{x}\right) = \alpha x \vee \alpha \overline{x}$ (для КНФ – на основі закону логічного протиріччя $x\overline{x} = 0$ та властивості диз'юнкції $\alpha \vee 0 = \alpha,$ а саме: $\alpha \vee x\overline{x} = (\alpha \vee x)\left(\alpha \vee \overline{x}\right)$.

2. Робиться спрощення одержаних формул (при необхідності) за ідемпотентністю: $\alpha \vee \alpha = \alpha; \alpha\alpha = \alpha.$

Приклад 4. Побудуємо ДДНФ для ДНФ, що задана формулою:

$$y = x_1\overline{x_2} \vee x_1 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}.$$

Розв'язок.

$$y = x_1\overline{x_2}\left(x_3 \vee \overline{x_3}\right) \vee x_1 x_3\left(x_2 \vee \overline{x_2}\right) \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} = x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3 \vee$$
$$\vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} = x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}.$$

Це – ДДНФ.

Приклад 5. Побудуємо ДКНФ для КНФ, що задана формулою:

$$y=(x_1\vee x_2)\left(x_1\vee\overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee x_3\right).$$

Розв'язок.

$$y=\left((x_1\vee x_2)\vee x_3\overline{x_3}\right)\left(x_1\vee\overline{x_3}\vee x_2\overline{x_2}\right)\left(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee x_3\right)=$$

$$=\left((x_1\vee x_2)\vee x_3\right)\left((x_1\vee x_2)\vee\overline{x_3}\right)\left(x_1\vee\overline{x_3}\vee x_2\right)\left(x_1\vee\overline{x_3}\vee\overline{x_2}\right)\wedge$$

$$\wedge\left(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee x_3\right)=(x_1\vee x_2\vee x_3)\left(x_1\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3}\right)\left(x_1\vee x_2\vee\overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee x_3\right).$$

Означення 4. Для змінних $x_1,x_2,\ldots,x_n$ формула $\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_n$, де $\tilde{x}_i$ це або x_i або $\overline{x_i}$, називається конституентою одиниці, а формула $\tilde{x}_1\vee\tilde{x}_2\vee\ldots\vee\tilde{x}_n$ – конституентою нуля.

Очевидно, що конституєнта одиниці обертається в одиницю тільки на одному наборі змінних, коли $\tilde{x}_i=x_i=1$, $\tilde{x}_j=\overline{x_j}=1\left(x_j=0\right)$.

Приклад 6. Конституєнта одиниці $x_1\overline{x_2}x_3=1$, коли $x_1=1$, $x_2=0$; $x_3=1$.

Конституєнта нуля обертається в нуль, тільки на одному наборі змінних, коли $\tilde{x}_i=x_i=0$; $\tilde{x}_j=\overline{x_j}=0\left(x_j=1\right)$.

Приклад 7. Конституєнта нуля, $x_1\vee\overline{x_2}\vee x_3=0$, коли $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=0$.

ДДНФ є диз'юнкцією конституент одиниці, тому ця формула *дорівнює* 1 тільки *на тих наборах* змінних $x_1,x_2,\ldots,x_n$, *що обертають на* 1 ці *конституенти*. На інших наборах ця формула *дорівнює* 0.

Аналогічно ДКНФ є кон’юнкцією конституент нуля, тому ця формула обертається в нуль тільки на тих наборах змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що обертають на нуль ці конституенти. На інших наборах ця формула обертається на одиницю.

Очевидно, що справедливі й обернені твердження. Це дає можливість записати будь-яку булеву функцію, що задана таблицею, у вигляді ДДНФ (ДКНФ). Для цього записують диз’юнкцію (відповідно кон’юнкцію) конституент одиниці (нуля), тих наборів значень змінних, на яких функція приймає значення одиниці (нулю).

Приклад 8. Функція y задана таблицею 3.

Таблиця 3 – Задання функції для прикладу 10

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
y	0	0	1	0	1	1	0	1

ДДНФ має вигляд:

$$y = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

ДКНФ має вигляд:

$$y = \left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)\left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)\left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\right).$$

3. Алгебра та багаточлени Жегалкіна

Іншу вживану алгебру булевих функцій можна побудувати, взявши операції:

– додавання за модулем 2: $x + y$;

– кон’юнкцію $x \wedge y$.

Ця алгебра носить назву *алгебри Жегалкіна*, який її запропонував. Кон’юнкція вважається старшою за $x + y$.

Властивості цієї алгебри:

– комутативність: $x + y = y + x; xy = yx;$

– асоціативність: $x + \left(y + z\right) = \left(x + y\right) + z; x\left(yz\right) = \left(xy\right)z;$

– дистрибутивність кон’юнкції відносно додавання за модулем 2:

$$x\left(y+z\right)=xy+xz;$$

– дії з константами: $1x=x\wedge 1=x;$ $0x=x\wedge 0=0;$ $x+0=x.$

Перевіримо дистрибутивність (табл. 4).

Таблиця 4 – Перевірка дистрибутивності

x	***y***	***z***	***y*+*z***	***x*(*y*+*z*)**	***xy***	***xz***	***xy*+*xz***
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0

Бачимо, що стовбець $x\left(y+z\right)$ у таблиці збігається зі стовбцем $xy+xz$, що і треба було довести.

Інші властивості, якщо вони не очевидні, доводяться аналогічно.

Зауваження 1. Дистрибутивності додавання за модулем два відносно кон’юнкції в алгебрі Жегалкіна не має, тобто: $xy+z\neq xz+yz$. Це перевіряється за допомогою таблиць істиності.

В алгебрі Жегалкіна справедливі також:

– закон приведення подібних членів при додаванні за модулем 2:

$$x+x=0;$$

– закон ідемпотентності для кон’юнкції:

$$xx=x.$$

Два останні співвідношення обумовлюють те, що в цій алгебрі не з’являється коефіцієнти при змінних та «показники степеня» кон’юнкції.

Мають місце співвідношення:

$$\bar{x} = 1 + x; \tag{4}$$

$$x \vee y = x + y + xy; \tag{5}$$

$$x + y = x\bar{y} \vee \bar{x}y. \tag{6}$$

Перевіримо їх. Результати перевірки представлено в таблиці 5–7.

Таблиця 5 – Перевірка (1)

x	$\bar{x}$	$1 + x$
0	1	1
1	0	0

Таблиця 6 – Перевірка співвідношення (2)

x	y	$x + y$	xy	$x + y + xy$	$x \vee y$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1

Таблиця 7 – Перевірка співвідношення (3)

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{y}$	$x\bar{y}$	$x\bar{y} \vee \bar{x}y$	$x + y$
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0

Формули (4), (5) дають перехід від булевої алгебри (можливо з правилом де Моргана) до алгебри Жегалкіна. Співвідношення (6) задає перехід від алгебри Жегалкіна до булевої алгебри.

Приклад 9. Перейти від формули $f = \bar{x}(x \vee y)$ до формули алгебри Жегалкіна для тієї ж функції.

Маємо

$$f = (x+1)(x+y+xy) = (x+1)x + (1+x)y + (1+x)xy =$$

$$=1x+xx+1y+xy+\left(1x+xx\right)y=x+x+y+xy+\left(x+x\right)y=0+y+$$

$$+xy+0y=y+xy.$$

Приклад 10. Перетворимо формулу $\varphi=x+y+xy$ в формулу булевої алгебри.

Маємо

$$\varphi=\left(x+y\right)+xy=\left(x\bar{y}\vee\bar{x}y\right)+xy=\left(x\bar{y}\vee\bar{x}y\right)\overline{xy}\vee\overline{x\bar{y}\vee\bar{x}y}xy.$$

(далі формулу можна спростити). По-іншому перехід можна зробити, скориставшись дистрибутивністю:

$$\varphi=x\left(1+y\right)+y=x\bar{y}+y=\overline{x\bar{y}}y\vee x\bar{y}\,\bar{y}=\overline{x\bar{y}}y\vee x\bar{y}=$$

$$=\left(\bar{x}\vee\bar{\bar{y}}\right)y\vee x\bar{y}=\left(\bar{x}\vee y\right)y\vee x\bar{y}=$$

$$=\bar{x}y\vee yy\vee x\bar{y}=\bar{x}y\vee y\vee x\bar{y}=y\left(\bar{x}\vee 1\right)\vee x\bar{y}=y\vee x\bar{y}.$$

Через операції алгебри Жегалкіна можна представити всі інші булеві функції; зокрема:

$$x\to y=1+x+xy; \tag{4}$$

$$x\sim y=1+x+y; \tag{5}$$

$$x\leftarrow y=x+xy; \tag{6}$$

$$x|y=1+xy; \tag{7}$$

$$x\downarrow y=1+x+y+xy. \tag{8}$$

Доведення цих співвідношень – у табл. 8–12.

Таблиця 8 – Доведення (4)

x	***y***	***xy***	**1+*x***	**1+*x*+*xy***	***x*→*y***
0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

Таблиця 9 – Доведення (5)

x	y	$1+x$	$1+x+y$	$x\sim y$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Таблиця 10 – Доведення (6)

x	y	xy	$x+xy$	$x\leftarrow y$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Таблиця 11 – Доведення (7)

x	y	xy	$1+xy$	$x\vert y$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Таблиця 12 – Доведення (8)

x	y	$1+x$	$1+x+y$	xy	$1+x+y+xy$	$x\downarrow y$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0

4. Канонічні багаточлени Жегалкіна

Будь-яка булева функція може бути приведена до канонічного багаточлену Жегалкіна, тобто до такого, який не містить числових коефіцієнтів (крім 1) та містить всі змінні тільки в першому степені (відносно операції кон'юнкції).

Дійсно, будь-яку булеву функцію можна привести до досконалої нормальної форми. Далі скористатися формулами (1) та (2).

Після розкриття дужок в отриманому алгебраїчному виразі спростимо $x+x=0$, $xx=x$, отримаємо канонічний багаточлен.

Очевидно, що таке представлення завжди можливе та єдине (з точністю до порядку розташування членів).

Приклад 11. 1) $\overline{xy}=1+xy$.

2) $\bar{x}\vee\bar{y}=(1+x)\vee(1+y)=1+x+1+y+(1+x)(1+y)=$

$=x+y+(1+x+y+xy)=x+y+1+x+y+xy=1+xy$

3) $\overline{x\vee y}=1+(x\vee y)=1+(x+y+xy)=1+x+y+xy$.

4) $\bar{x}\,\bar{y}=(1+x)(1+y)=1+x+y+xy$.

Переваги алгебри Жегалкіна:

– арифметизація логіки;

– використання досвіду перетворення звичайних алгебраїчних виразів.

Недоліки алгебри Жегалкіна:

– складність формул;

– ріст складності формул при збільшенні кількості змінних, що ускладнює ручні перетворення.

При перетвореннях на комп'ютері недоліки алгебри Жегалкіна послаблюються.

Приклад 12. Перетворимо $\varphi=x\vee y\vee\bar{z}$.

Маємо

$$\varphi=x\vee y\vee(1+z)=(x+y+xy)\vee(1+z)=x+y+xy+1+z+$$

$$+(x+y+xy)(1+z)=\underline{x}+\underline{y}+\underline{\underline{xy}}+1+z+\underline{x}+\underline{y}+\underline{\underline{xy}}+xz+yz+xyz=$$

$$=1+z+xz+yz+xyz.$$

Лекція 7. Замкнені класи булевих функцій. Функціональна повнота систем булевих функцій. Застосування булевих функцій до логічних та релейно-контактних схем

1. Замкнені класи булевих функцій

Позначимо множину всіх булевих функцій n змінних через P_2. Тобто $P_2 = \left\{ y = f\left(x_1,\ldots,x_n\right); x_i, y \in \left\{0,1\right\}, i = 1,2,\ldots,n \right\}$. Нехай $m \subset P_2$.

Означення 1. Замиканням m називається множина всіх булевих функцій, що можна представити у вигляді формул, використовуючи функції тільки з множини m. Позначають замикання $[m]$.

Приклад 1. 1. $\left[P_2\right] = P_2$. 2. $m = \left\{1, x_1 + x_2\right\}$. $\left[m\right] = L$, де L – множина канонічних многочленів Жегалкіна, що не містять кон'юнкції змінних. 3. $m = \left\{\overline{x}\right\}$ $\left[m\right] = \left\{x, \overline{x}\right\}$.

Означення 2. Множина m називається замкненою (ще кажуть «функціонально замкненою»), якщо $\left[m\right] = m$.

Замкнену множину ще називають *замкненим класом*.

Є п'ять найважливіших замкнених класів булевих функцій.

Класом K_0 булевих функцій $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, що *зберігають константу* 0, називається та їх множина, для елементів якої виконується умова:

$$f_i\left(0,0,\ldots,0\right) = 0,$$

тобто, якщо всі змінні – нулі, то і значення функції – нуль.

Приклад 2. $x_1 \vee x_2 \in K_0$, $x_1 \wedge x_2 \in K_0$, $x_1 \sim x_2 \notin K_0$, $x_1 \to x_2 \notin K_0$, $x_1 + x_2 \in K_0$, $\overline{x} \notin K_0$.

Класом K_1 булевих функцій $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, що зберігають константу 1, називається та їх множина, для елементів якої виконується умова:

$$f_i\left(1,1,\ldots,1\right)=1,$$

тобто, якщо всі змінні – одиниці, то і значення функції – одиниця.

Приклад 3. $x_1 \vee x_2 \in K_1,\ x_1 \wedge x_2 \in K_1,\ x_1 \sim x_2 \in K_1,\ x_1 \to x_2 \in K_1,$ $x_1 + x_2 \notin K_1,\ \overline{x} \notin K_1.$

Класом L лінійних булевих функцій називається множина, що складається з функцій, які в алгебрі Жегалкіна представляються канонічними многочленами вигляду:

$$a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n,$$

(тобто многочлени, що не містять «добутків»), де коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_n$ є булевими змінними.

Приклад 4. $x_1 + x_2 \in L,\ x_1 \vee x_2 = x_1 x_2 + x_1 + x_2 \notin L,\ \overline{x} = 1 + x \in L.$

Класом S самодвоїстих булевих функцій називається *множина самодвоїстих булевих функцій*, тобто функцій, які задовольняють умові:

$$f_i\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\overline{f_i}\left(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n}\right)$$

для будь-яких $x_1,\ldots,x_n$.

Приклад 5. $x \in S, \overline{x} \in S, x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3 \in S$ (довести самостійно) $x_1 \vee x_2 \notin S, x_1 \wedge x_2 \notin S,\ 0 \notin S, 1 \notin S$. (Нагадаємо, що $x_1 \vee x_2$ є двоїстою до $x_1 \wedge x_2$, а 0 – до 1 і, відповідно, навпаки).

Набори $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, $\left(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n}\right)$ називають протилежними. Тобто самодвоїста функція – це булева функція, що *на всіх протилежних наборах* приймає *протилежні значення*.

Задамо на множині векторів n булевих змінних відношення передування як частковий порядок $\preccurlyeq$ так:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \preccurlyeq \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

якщо $\alpha_i \le \beta_i$, для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$.

Приклад 6. $(0,1,0,1,0,1) \preccurlyeq (1,1,0,1,0,1)$..

Класом M монотонних булевих функцій називається множина монотонних функцій, тобто функцій, що для довільних наборів змінних $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, які знаходяться у відношенні передування

$$\alpha \preccurlyeq \beta,$$

задовольняють умові: $f(\alpha) \le f(\beta)$, або іншими словами:

$$f = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \le f(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Приклад 7. $0 \in M;$ $1 \in M;$ $x \in M;$ $x_1 \vee x_2 \in M,$ $x_1 \wedge x_2 \in M,$ $x_1 \sim x_2 \notin M,$ $x_1 \to x_2 \notin M.$

Можна довести, що всі ці класи є *замкненими*.

2. Функціональна повнота систем булевих функцій

Система (множина) функцій, суперпозицією яких може бути одержана будь-яка функція з деякої множини булевих функцій, називається *функціонально повною* (повною) в множині. Якщо при цьому в системі допускаються сталі 0 та 1, то вона називається *ослаблено функціонально повною*.

Система (множина) функцій з замкненого класу m називається його *базисом*, якщо вона є повною в m, але будь-яка її власна підсистема (підмножина) не є повною в m.

Теорема про функціональну повноту (Поста-Яблонського). Щоб система $\boldsymbol{C}$ функцій була повною необхідно і достатньо, щоб вона цілком не містилася в жодному з замкнених класів K_0, K_1, L, M, S.

Теорема Поста. Кожний замкнений клас з P_2 має замкнений базис.

Друга Теорема Поста. Множина замкнених класів у P_2 є зліченою.

З теореми про функціональну повноту випливає, що кожна *повна* система булевих функцій з необхідністю і достатністю має:

– хоча б одну функцію, що не зберігає 0;
– хоча б одну функцію, що не зберігає 1;
– хоча б одну функцію, що не є лінійною;
– хоча б одну функцію, що не є монотонною;
– хоча б одну функцію, що не є самодвоїстою.

Зауважемо, що одна функція, може мати декілька з названих властивостей.

Розглянемо з цих позицій деякі функції з від 0,1 та 2 змінних (див. табл. 1). У табл. 1 плюс вказує, що відповідна функція має вказану у відповідному стовпці властивість.

Таблиця 1 – Наявність властивостей булевих функцій

Назва функції	Позначення	Властивості				
		Незбереження		несамо-двоїстість	нелінійність	немоно-тонність
		0	1			
Константа 0	0		+	+		
Константа 1	1	+		+		
Заперечення	$\overline{x}$	+	+			+
Кон’юнкція	$x_1 \wedge x_2$			+	+	
Диз’юнкція	$x_1 \vee x_2$			+	+	
Імплікація	$x_1 \to x_2$	+		+	+	+
Еквіваленція	$x_1 \sim x_2$	+		+		+
Сума за модулем 2	$x_1 + x_2$		+	+		+
Штрих Шеффера	$x_1 \mid x_2$	+	+	+	+	+
Стрілка Пірса	$x_1 \downarrow x_2$	+	+	+	+	+
Заперечення імплікації	$x_1 \leftarrow x_2$		+	+	+	+

З цих функцій можна утворити 17 базисів, з яких ми розглянули раніше:

– базис Вебба (базис Пірса): $\{\downarrow\}$;
– базис Шеффера: $\{\mid\}$;

– кон’юнктивний базис Буля $\{\wedge, \bar{\ }\}$;
– диз’юнктивний базис Буля $\{\vee, \bar{\ }\}$;
– базис Жегалкіна $\{+, \wedge, 1\}$.

Вибравши будь-яку функцію з таблиці 1 так, щоб виконувалась умова теореми про функціональну повноту, одержимо певний базис.

Приклад 8. Якщо вибрати **~**, маємо базиси:

– $\{\sim, \leftarrow\}$; - $\{\sim, \wedge, 0\}$; - $\{\sim, \vee, 0\}$; - $\{\sim, +, \wedge\}$; - $\{\sim, +, \vee\}$.

Якщо взяти $\rightarrow$, маємо базиси:

– $\{\rightarrow, 0\}$; - $\{\rightarrow, \leftarrow\}$; - $\{\rightarrow, +\}$; - $\{\rightarrow, \bar{\ }\}$.

Базисом також є: $\{\leftarrow, \bar{\ }\}$; $\{\leftarrow, 1\}$; $\{+, \vee, 1\}$.

Зауважимо, що теорема про функціональну повноту працює при довільній кількості змінних у функції.

3. Застосування булевих функцій до логічних і релейно-контактних схем

Розглянемо одну з технічних інтерпретацій булевих функцій – електричну схему, що має джерело струму, лампу, ключі, контакти реле. Ключі керуються кнопками, що мають два положення: «натиснено» (або 1), «не натиснено» (або 0).

Ключі, що в нормальному стані розімкнені (тобто такі, що замикають) позначають x_i, а ключі (контакти), що в нормальному стані замкнені (що розмикають) позначають $\overline{x_i}$.

При відповідному стані кнопок лампа може знаходитися в одному з двох станів: «горить» (1), «не горить» (0).

Стан кнопок ототожнюють зі значеннями змінних x_i, а стан лампи – зі значенням функції.

На рис. 1, 2, 3 наведені схеми, що відповідають функціям $\overline{X}, X_1 \vee X_2, X_1 \wedge X_2$ відповідно.

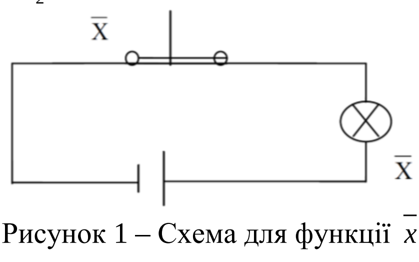


Рисунок 1 – Схема для функції $\overline{x}$

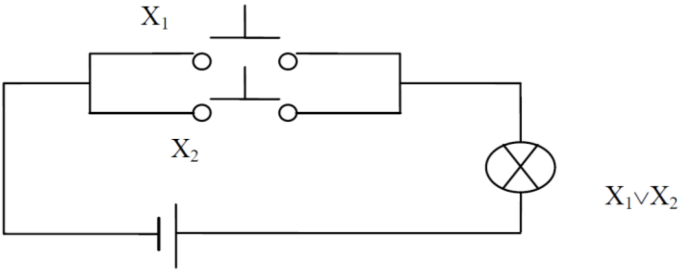


Рисунок 2 – Схема для функції $x_1 \vee x_2$

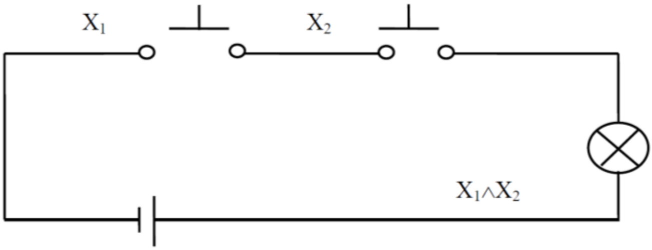


Рисунок 3 – Схема для функції $x_1 \wedge x_2$

Комбінуючи схеми рис. 1, 2, 3 (оскільки $\overline{\ \ }$, $\vee$, $\wedge$ – повна система функцій), можемо реалізувати будь-яку булеву функцію (через ДДНФ, ДКНФ).

Такі схеми називають *релейно-контактними* або просто *контактними* (контакти замикають не обов’язково за допомогою реле).

Схеми, що утворені з’єднанням контактів, які переключаються одночасно, називають *однотактними*. Така схема сама є контактом у електричному ланцюгу з джерелом струму. Такі схеми називають *двополюсниками.*

Розглядають задачу аналізу та синтезу контактної схеми.

Аналіз – побудова за схемою відповідної булевої функції, *синтез* – навпаки.

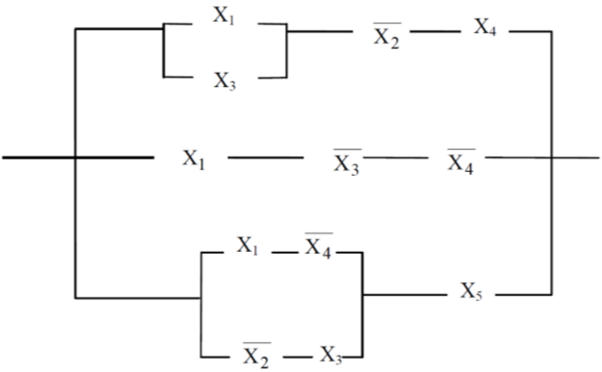


Рисунок 4 – Задана контактна схема в прикладі 1

Приклад 9. За рис. 4 побудуємо відповідну функцію:

$$y = (x_1 \vee x_3)\overline{x_2}x_4 \vee x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \left(x_1\overline{x_4} \vee \overline{x_2}x_3\right)x_5.$$

Якщо схема має не тільки паралельно-послідовні з’єднання, то виділяють всі шляхи між входом і виходом. Кожен шлях дає кон’юнкцію відповідних змінних, а вся схема – диз’юнкція цих кон’юнкцій.

Приклад 10. Побудуємо функцію за рис. 5.

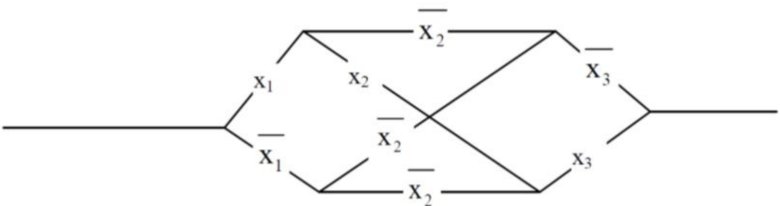


Рисунок 5 – Задана контактна схема прикладу 2

Маємо: $y = x_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}.$

Синтез (побудова схеми за функцією) може відбуватися за таблицею чи формулою. Цю функцію в обох випадках виражають через $\vee$, $\wedge$, $\overline{}$ (наприклад як КНФ, ДНФ). Потім будують схему.

Приклад 11. Для функції $y = x_1 \sim (x_2 \to x_3)$ маємо ДДНФ $y = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$.

Це дає схему на рис. 6.

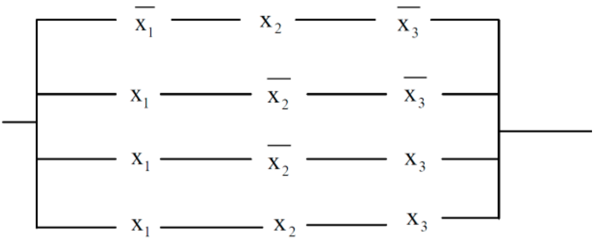


Рисунок 6 – Схема для ДДНФ з прикладу 3

Її можна спростити (див. рис. 7, 8).

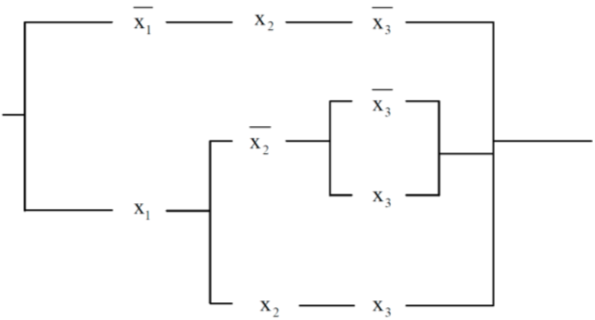


Рисунок 7 – Спрощена схема з рис. 6

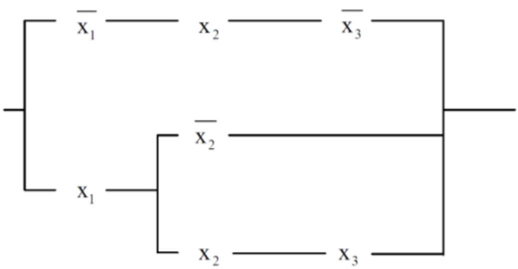


Рисунок 8 – Ще одне спрощення схеми рис. 6

Для цієї ж функції було отримано ДНФ у вигляді $y = x_1\overline{x_2} \vee x_1x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}$, яку можна представити схемою (рис. 9), або схемою (рис. 10).

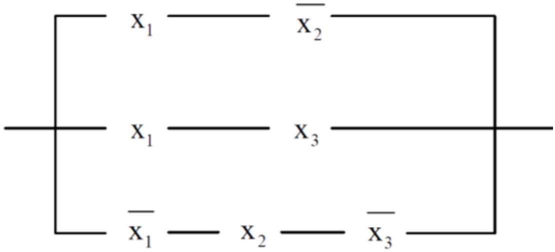


Рисунок 9 – Схема для ДНФ для функції з прикладу 3

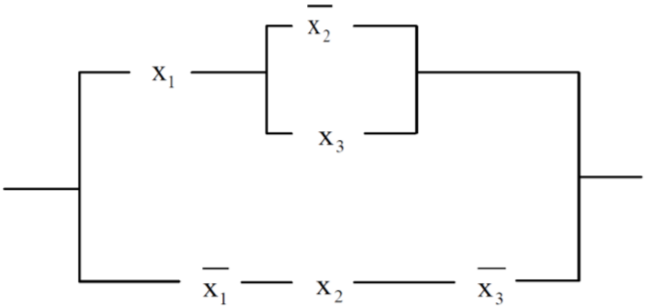


Рисунок 10 – Ще одна схема для ДНФ функції з прикладу 3

Перша (рис. 6) має 12, а остання (рис. 10) має 6 констант (реле). Існує проблема побудови простої схеми. Це зводиться до мінімізації булевих функцій.

4. Булеві матриці

Матриці, елементами яких є константи 0,1, змінні $x_1,\dots,x_n$ і булеві функції цих змінних, називають булевими матрицями.

Матрицею P беспосередніх зв'язків (примітивною матрицею з'єднання) називається квадратна таблиця, елементи головної діагоналі якої дорівнюють 1, а елементи $p_{ij} = p_{ji}$ є булевими функціями прямого з'єднання між вузлами *i* та *j*.

Приклад 12. Для схеми рис. 11 запишимо матрицю беспосередніх зв'язків.

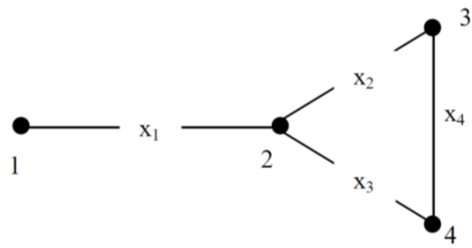


Рисунок 11 – Контактна схема

$$P=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_2 & 1 & x_4 \\ 0 & x_3 & x_4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицею Q повних зв'язків (повною матрицею з'єднань) називається матриця, елементи якої $q_{ij}=q_{ji}$ є булевими функціями, що враховують всі можливі шляхи (не замкнені, без циклів) між вузлами *i* та *j*.

Приклад 13. Для схеми рис. 11 матриця повних зв'язків Q має вигляд:

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1\left(x_2 \vee x_3x_4\right) & x_1\left(x_2x_4 \vee x_3\right) \\ x_1 & 1 & x_2 \vee x_3x_4 & x_3 \vee x_2x_4 \\ x_1\left(x_2 \vee x_3x_4\right) & x_2 \vee x_3x_4 & 1 & x_4 \vee x_2x_3 \\ x_1\left(x_2x_4 \vee x_3\right) & x_3 \vee x_2x_4 & x_4 \vee x_2x_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Добутком двох булевих матриць *A* і *B* однакового порядку *n* називається матриця С, елементи c_{ij} якої обчислюються за формулою:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j} \vee a_{i2}b_{2j} \vee \ldots \vee a_{in}b_{nj}.$$

Якщо перемножаються дві однакові матриці AA, то результат називають «квадрат А» і т. д.

$$A^n = A^{n-1}A.$$

Можна довести, що для довільної контактної схеми з k вузлами існує число $r \le k-1$, що:

$$P^r = P^{r+s} = Q,$$

де s – будь-яке натуральне число.

Тобто матрицю повних зв’язків Q можна одержати з матриці беспосередніх зв’язків P множення самої на себе, поки не отримаємо $P^r = P^{r+s}$. Число таких множень буде не більше $k-1$.

Приклад 14. Для матриць P і Q з попередніх двох прикладів (для схеми мал. 11) маємо: (перший рядок без спрощень).

$$P^2 = \begin{bmatrix} 11 \vee x_i x_1 \vee 00 \vee 00 & 1x_1 \vee 1x_1 \vee 0x_2 \vee 0x_3 & 01 \vee x_1x_2 \vee 01 \vee 0x_4 & 01 \vee x_1x_3 \vee 0x_4 \vee 01 \\ x_1 & 1 & x_2 \vee x_3x_4 & x_3 \vee x_2x_4 \\ x_1x_2 & x_2 \vee x_3x_4 & 1 & x_2x_3 \vee x_4 \\ x_1x_3 & x_3 \vee x_2x_4 & x_2x_3 \vee x_4 & 1 \end{bmatrix}$$

або

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1 & 1 & x_2 \vee x_3x_4 & x_3 \vee x_2x_4 \\ x_1x_2 & x_2 \vee x_3x_4 & 1 & x_2x_3 \vee x_4 \\ x_1x_3 & x_3 \vee x_2x_4 & x_2x_3 \vee x_4 & 1 \end{bmatrix}.$$

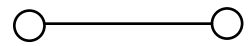
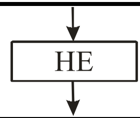
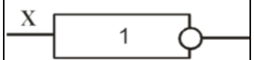
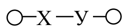
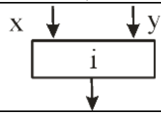
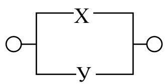
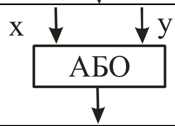
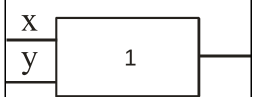
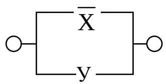
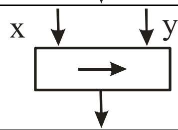
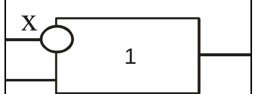
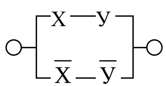
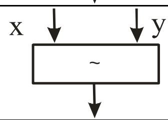
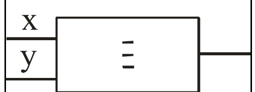
Якщо ще ряд помножимо на P, то одержимо $P^3 = Q$.

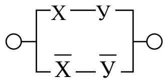
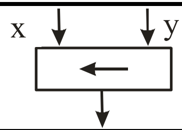
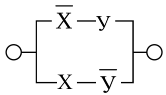
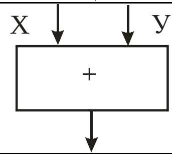
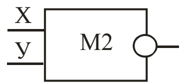
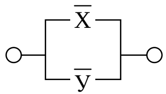
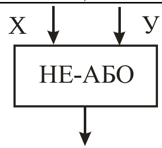
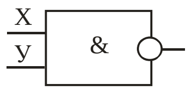
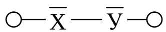
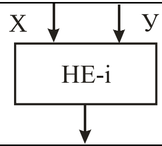
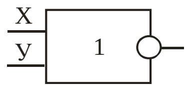
5. Логічні елементи і логічні схеми

Пристрій, що реалізує (елементарні) булеві функції називають *логічними елементами*. Входи логічного елемента – це булеві змінні, а вихід – булева функція, що реалізується елементом.

Зображення логічних елементів наведено в таблиці 1.

Таблиця 1 – Логічні елементи

Функція	Нормаль-на форма	Контактна схема для нормальної форми	Зображення елемента в логічних схемах	Назва	Графічне зображення і назва елемента за Держ. стандартом 2.743-72	
Запере-чення	$\bar{x}$			Інвертор		Запере-чення
Кон'юнкція xy; $(x\&y)$	xy			Збіг		Кон'юн-кція $x\&y$
Диз'юнкція $x\vee y$	$x\vee y$			Розподіл		Диз'юн-кція $x\vee y$
Імплікація $x\to y$	$\bar{x}\vee y$			Розподіл з забороною		Імпліка-ція $\bar{x}\vee y$
Еквівален-ція $x\sim y$	$xy\vee\bar{x}\bar{y}$			Рівнознач-ність		Еквіва-ленція $x\sim y$

Функція	Нормальна форма	Контактна схема для нормальної форми	Зображення елемента в логічних схемах	Назва	Графічне зображення і назва елемента за Держ. стандартом 2.743-72	
Заперечення імплікації $x \leftarrow y$	$x\overline{y}$			Збіг з забороною		Коімплікація $x \& \overline{y}$
Сума за модулем 2 $x + y$	$\overline{x}y \vee x\overline{y}$			Нерівнозначність		Додавання за модулем 2 $x + y$
Штрих Шеффера $x \mid y$	$\overline{x} \vee \overline{y}$			Розподіл з двома заборонами		Елемент Шеффера $\overline{x \& y}$
Стрілка Пірса $x \downarrow y$	$\overline{x}\,\overline{y}$			Збіг з двома заборонами		Елемент Вебба $\overline{x \vee y}$

Константа нуля зображується як на рис. 12, а константа одиниці схемою наведеною на рис. 13.

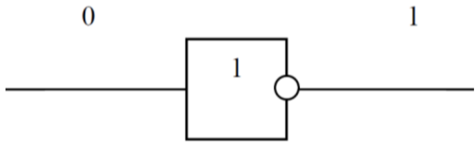


Рисунок 12 – Константа нуля

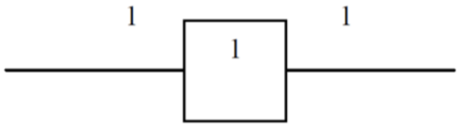


Рисунок 13 – Константа 1

Більш складні елементи графічно зображають композицією базових (на основі ДНФ, КНФ), наприклад, функція $a\bar{b} \vee \bar{c}\bar{d}$ має схему, представлену на рис. 14.

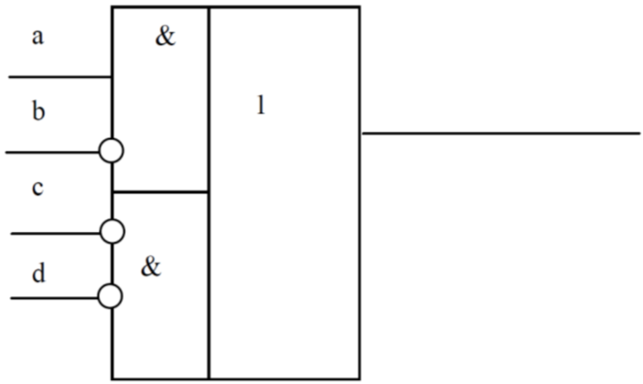


Рисунок 14 – Елемент для $a\bar{b} \vee \bar{c}\bar{d}$

Не важко записати булеву функцію за логічною схемою (перед цим функція перетворюється до необхідного базису) і навпаки по функції – скласти схему.

Оскільки одну і ту ж формулу (навіть в одному і тому ж базисі) можна задавати різними (їх називають еквівалентними) схемами, то постає задача спрощення формул (схем). Як правило, вважають простішими формули, що містять меншу кількість входжень змінних і (або) символів логічних операцій.

Розглянемо підходи до розв'язання цієї задачі в базисі $\{\vee, \wedge, \bar{\ }\}$, який часто називають булевим.

Як відомо, для переходу від табличного до аналітичного задання функцій можна скористатися ДНФ (при необхідності відповідну КНФ можна отримати за принципом двоїстості).

Лекція 8. Мінімізація булевих функцій. Карти Карно. Метод Квайна Мак-Класки. Метод Блейка-Порецького

1. Мінімальні форми та способи їх побудови

Канонічною задачею синтезу логічних схем у булевім базисі є мінімізація булевих функцій, тобто представлення їх в ДНФ, що містить найменшу сумарну кількість змінних та їх заперечень.

Такі форми називають *мінімальними*.

При цьому вважається, що на входи елементів подають як x_i, так і $\bar{x}_i$.

Формула, що представлена в ДНФ спрощується багатократним застосуванням операцій:

– склеювання $ab \vee a\bar{b} = a;$

– поглинання $a \vee ab = a,\ a \vee \bar{a}b = a \vee b,$ де a, b – позначають довільні формули.

У результаті отримуємо такий аналітичний вираз, коли подальше застосування цих формул неможливе, тобто одержуємо форму, яку називають тупиковою.

Приклад. Нехай ДДНФ задано у вигляді:

$$y = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Групуючи і склеюючи, маємо:

1) $y = \left(\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3\right) \vee \left(x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3\right) \vee x_1 x_2 x_3 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 x_3;$

2) $y = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \left(\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3\right) \vee \left(x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3\right) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2.$

Обидві тупикові форми містять по сім входжень x_i, $\overline{x}_i$. Але є кращі з точки зору мінімізації форми.

Скористаємося формулою $x \vee x = x$. Тоді можна записати для першої тупикової форми через диз'юнкцію член $\overline{x}_1 x_2 x_3$:

$$y = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee \left(x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \right) = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee x_2 x_3.$$

Якщо додати $x_1 \overline{x}_2 x_3$, маємо:

$$y = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee \left(x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \right) = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_3.$$

Кожна з цих форм має по шість входжень x_i, $\overline{x}_i$. Можна довести (наприклад, повним перебором п'яти й менше входжень), що ці останні форми є мінімальними.

Для побудови мінімальних форм розроблені спеціальні методи і символіка.

2. Багатовимірний куб

Область визначення булевих функцій від n змінних $y = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ – це вектори з n елементів 0 або 1. При $n = 3$ кожен вектор є вершиною одиничного куба в тривимірному просторі.

У загальному випадку $\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ можна розглядати як вершини n-вимірного одиничного куба (далі n-куба). Такі вершини ще називаються *логічним простором*.

Булева функція в логічному просторі відображається виділенням вершин, в яких вона приймає значення 1 (рис. 1).

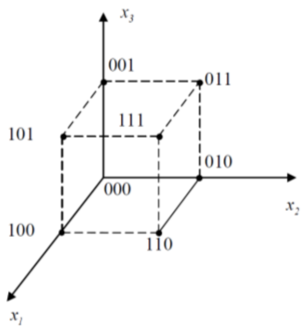


Рисунок 1 – Логічний простір для $n = 3$

Представимо функцію на цьому малюнку, що задано табл. 1, позначивши вершини, де $y = 1$.

Таблиця 1 – Задана функція

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Кожній *вершині* n-вимірного куба можна поставити у відповідність *конституенту одниці*.

Тобто відмічені вершини визначають ДДНФ для функції (рис. 2).

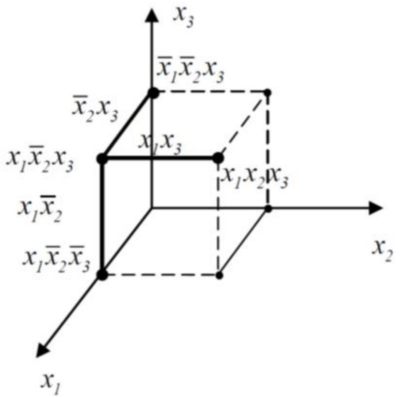


Рисунок 2 – Відображення ДДНФ, що задане табл. 1

Якщо функція не в ДДНФ, а в деякій ДНФ, то її також можна представити *елементами* n-*куба*. Нехай $f = f\left(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n\right)$. Оскільки $f = fx_i \vee f\bar{x}_i$, то f можна представити як ребро n-вимірного куба, що відрізняються тільки координатою x_i. Тобто кон'юнкції $n-1$ змінної відповідає ребро.

Аналогічно, для $f\left(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n\right)$ – кон'юнкції з $n-2$ змінних (їх заперечень) – відповідає грань *n*-вимірного з чотирьох вершин: $f\ x_i x_j$, $f\ x_i \overline{x}_j$, $f\ \overline{x}_i x_j$, $f\ \overline{x}_i \overline{x}_j$ і т. д.

Елемент *n*-куба, що має s вимірів називають *s*-кубом: вершина – 0-куб; ребро – 1-куб. Таким чином, кон'юнкція з $n-s$ змінних або їх заперечень відповідає *s*-кубу. Кажуть *s*-куб покриває всі *k*-куби для $k<s$, якщо *k*-куби є елементом *s*-куба.

Таким чином: довільна ДНФ відображається на *n*-куб сукупністю *s*-кубів, які покривають всі вершини, що відповідають конституентам одиниці (0-кубам).

Вірно й обернене: якщо деяка сукупність *s*-кубів, $s=0,1,2,\ldots,n,$ покриває множину всіх вершин, в яких функція є одиницею, то диз'юнкція відповідних цим кубам кон'юнкцій змінних, або їх заперечень є ДНФ даної функції.

Для рис. 2 $y=x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_2x_3$, для рис. 3 $y=x_1x_3 \vee x_2$.

Кажуть, що така сукупність *s*-кубів *утворює покриття функції*. Покриття, що відповідає мінімальній формі називають *мінімальним покриттям*.

Для рис. 3. $y=x_1x_3 \vee x_2$ – форма, що дає мінімальне покриття, а $y=x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$ – дає не мінімальне покриття.

Цей метод (*знаходження мінімального покриття*) точний при $n\le 3$, його можна використовувати при $n=4$, далі переваги втрачаються. Тут використовують інші методи, що розглянемо далі.

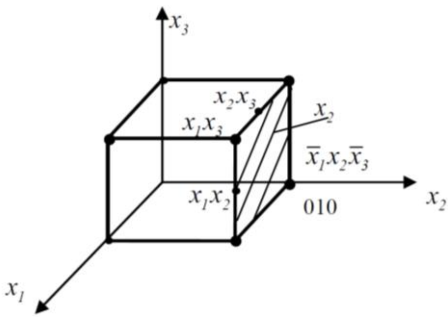


Рисунок 3 – Функція $y=x_1x_3 \vee x_2$

3. Карти Карно

Карти Карно – один з методів графічного зображення булевих функцій з метою їх мінімізації. Це спеціальним чином побудовані *таблиці відповідності*. Їх використовують, як правило, для булевих функцій 2, 3, 4 змінних.

Карти Карно будуються так: рядки і стовпці відповідають всім можливим наборам двох змінних (або однієї), набори розташовані так, що сусідні відрізняються значенням тільки однієї змінної. Відповідні клітини, що розташовані по краям також вважають сусідніми, якщо при згортанні карти в циліндр ці клітини можуть стати сусідніми.

Така побудова карт дає те, що сусідні по горизонталі чи вертикалі клітини відрізняються значенням тільки однієї змінної. Карти мають вигляд, наведений на рис. 4.

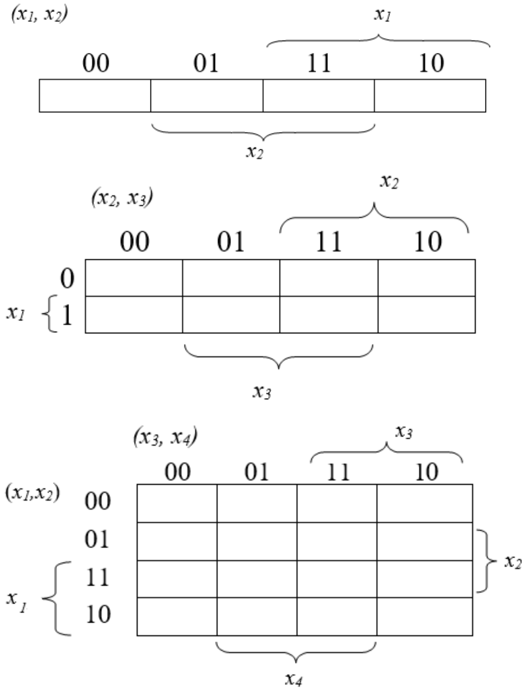


Рисунок 4 – Карти Карно для двох, трьох і чотирьох змінних

Фігурними дужками вказані рядки (стовпці), на яких змінна, написана біля дужки, приймає значення одиниці. В клітинах, що відповідають наборам, на яких функція приймає значення одиниці, пишуть 1, інші – не заповнюють.

Приклад 1. Для функції $y = x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_3\bar{x}_4$. карта Карно зображена на рис. 5.

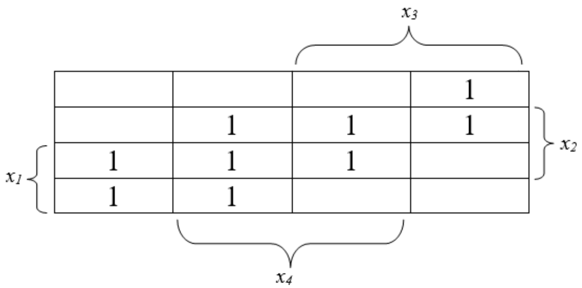


Рисунок 5 – Карта Карно для функції з прикладу 1

Очевидно, що відображення булевої функції на *n*-вимірному кубі (або *n*-кубі) і на карті Карно *взаємно-однозначно* відпо-від-ні. Всі положення, справедливі для *s*-кубів, справедливі і для карт Карно. На рис. 6 показано покриття одиниць карти, що відповідає мінімальній диз'юнктивній формі (див. приклад 1) $y = x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_3\bar{x}_4$.

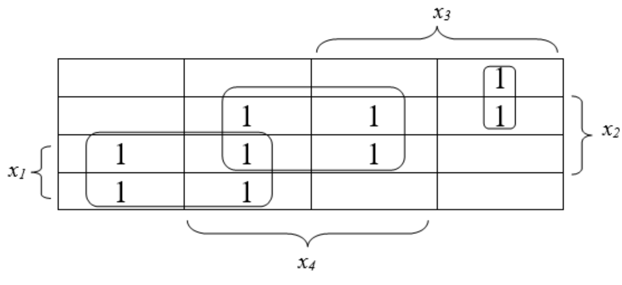


Рисунок 6 – Мінімальне покриття для функції з прикладу 1

Мінітерм к-го рангу – це член ДНФ – елементарна кон'юнкція *k* літер (змінних, або їх заперечень).

Наприклад: мінітерм другого рангу – це $x_1\overline{x}_2$; x_2x_4; x_1x_3.

Максітерм к-го рангу – це член КНФ – елементарна диз'юнкція k літер (змінних, або їх заперечень). Наприклад: максітерм третього рангу – це $x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$; $x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_5$; $\overline{x}_1 \vee x_3 \vee x_4$.

Запис мінітермів за картою Карно здійснюється так: клітини, що утворюють s-куб, дають мінітерм $(n-s)$-го рангу, в який входять ті $(n-s)$ змінні, які зберігають однакові значення на цьому s кубі, причому *значенням 1 відповідають змінні, а значенням 0 – їх заперечення*. Змінні, що не зберігають свої значення на s-кубі, в мінітерм не входять. Різні способи запису мінітермів для однієї і тієї ж функції, дають різні її представлення у вигляді ДНФ. На рис. 7–9 наведено різні покриття однієї функції, які дають різні ДНФ:

а) $y = \overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$;

б) $y = \overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_2x_3$;

в) $y = \overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_2x_3$.

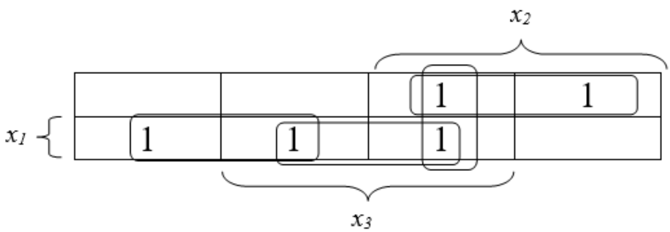


Рисунок 7 – Покриття, що дає $y = \overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$

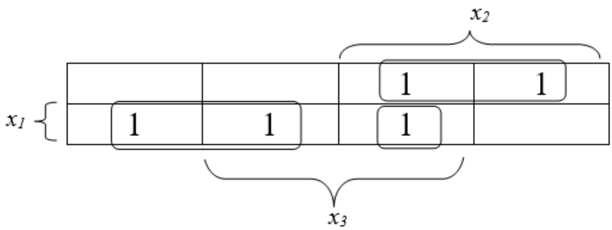


Рисунок 8 – Покриття, що дає $y = \overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_2x_3$

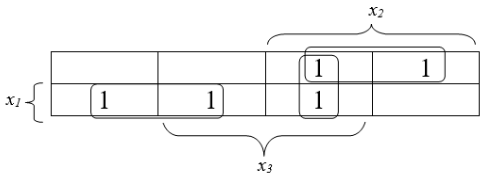


Рисунок 9 – Покриття, що дає $y = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 x_3$

Для зображення функцій 5-ти змінних використовують 2 карти Карно на 4 змінної, а для 6-ти змінних – 4 таких карти. При більшій кількості змінних карти Карно практично не використовують.

4. Комплекс кубів

Одним з аналітичних методів представлення булевих функцій з метою їх мінімізації є *комплекс кубів*.

Означення. Комплексом $K(y)$ кубів функції $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ називається об'єднання множин $K^s(y)$ всіх її s-кубів, тобто

$$K(y) = \bigcup_{s=0}^{n} K^s(y). \qquad (1)$$

Зауважимо, що в (1) можуть бути $K^s(y) = \varnothing$.

Для функції з n змінних, щоб визначити s-куб або мінітерм, використовують n символів набору $\{0,1,x\}$ (іноді кажуть «слова довжини n»). Ті змінні, що входять в мінітерм, називають зв'язаними (у «слові» вони відображаються як 1 для x_i та 0 для $\overline{x_i}$), а ті змінні, які не входять в мінітерм, називають вільними, їх позначають в «слові» через x .

Приклад 2. Для функції $f(x_1, \ldots, x_5)$ п'яти змінних, 2-куб, який відповідає мінітерму $x_1 \overline{x_2} x_4$ записується як «слово» ($10x1x$).

Зауваження. 0-куби, що відповідають конституєнтам одиниці, задаються наборами значень змінних, на яких функція дорівнює одиниці. У запису s-куба, очевидно, є s вільних змінних. Якщо всі n змінних вільні, тобто розглядається n куб, то це означає, що функція $f(x_1, \ldots, x_n)$, яка розглядається, тотожня одиниці:

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\equiv 1. \qquad (2)$$

Отже, якщо (2) не виконується, то $K^n\left(y\right)=\varnothing$.

Множина $K\left(y\right)$ s-кубів для функції $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ записується як сукупність «слів», що відповідає s-кубу, $S\in J_0^n=\left\{0,1,\ldots,n\right\}$. Як правило, «слова» розташовують в стовпцях, які заключають в фігурні дужки (дивись наступний приклад).

Приклад 3. Нехай функція представлена на тривимірному кубі (рис. 10). Запишемо комплекс кубів $K\left(y\right)=K^0\cup K^1\cup K^2$ для неї, де

$$K^0=\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix};$$

$$K^1=\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & x & 0 & x & 1 & x & 1 \\ x & 1 & x & 0 & 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & x \end{Bmatrix};$$

$$K^2=\begin{Bmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{Bmatrix}.$$

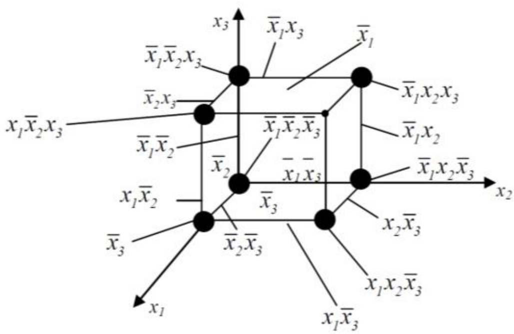


Рисунок 10 – Комплекс кубів для функції трьох змінних

Очевидно, що комплекс $K(y)$ кубів є *максимальним покриттям* функції. Якщо включити з нього всі ті s-куби, що покриваються кубами вищої вимірності, одержуємо покриття, що відповідають *тупиковим* формам.

Приклад 4. Для функції з попереднього прикладу маємо покриття *П*, що відповідає тупиковій формі функції

$$П = \begin{Bmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{Bmatrix}.$$

Це тупікова форма має вигляд $y = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$, яка є для цього прикладу і мінімальною.

4. Постановка задачі мінімізації булевих функцій

Розглянемо мінімізацію булевих функцій в булевому базисі, яка зводиться до пошуку мінімальної ДНФ, якій відповідає мінімальне покриття.

Означення. Вартістю *C* покриття називається загальна кількість літер, що входить в нормальну форму:

$$C = \sum_{s=0}^{n} q_s \left(n - s\right), \qquad (3)$$

де q_s – кількість s-кубів, що утворюють покриття даної функції n змінних.

За вартість покриття іноді приймають величину $C' = C + q$, де C обчислюється за (3), а q-загальна кількість всіх кубів у покритті.

Мінімальним називають покриття з мінімально можливою вартістю покриття.

Скороченим називають покриття, яке включає всі s-куби максимальної вимірності, але не містять жодного куба, що покривається будь-яким кубом цього покриття.

ДНФ, що відповідає скороченному покриттю називають *скороченою ДНФ,* а її мінітерми – *простими імплікантами*.

Зауваження. Для функції скорочене покриття є єдиним, але воно може бути не мінімальним (деякі куби покриваються сукупністю інших кубів).

Задача мінімізації може розв'язуватися в два кроки:

1. Шукається скорочене покриття.
2. Здійснюється перехід від скороченої ДНФ до тупикових, з яких вибирають мінімальні форми.

Тупикові форми утворюються шляхом виключення зі скороченого покриття всіх кубів (назвемо їх зайвими), без яких сукупність кубів, що залишилися ще утворює покриття функції, але при виключенні будь-якого з кубів, що залишилися, перестає бути покриттям, тобто не покриває множину всіх вершин, що відповідають одиничним значенням функції.

Очевидно, що куб скороченого покриття, який покриває вершини, які не покривають жодні інші куби, не може бути зайвим. Отже, він завжди війде в мінімальне покриття. Такий куб і імпліканту, що відповідає йому, називають екстремаллю (або суттєвою імплікантою). Вершини, що покриваються екстремаллю – називають позначеними вершинами.

Множину всіх екстремалей називають ядром покриття.

Очевидно, що при переході від скороченого покриття до мінімального виділяють ядро покриття. Якщо воно не є покриттям, то доповнюється до покриття кубами зі скороченого покриття.

Приклад 5. Розглянемо функції:
$y = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$. На рис. 11 показано її скорочене покриття $П_c$, на рис. 12–13 показані мінімальні покриття $П'_M$, $П''_M$, де:

$$П_C = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & x \end{Bmatrix}; \; П'_M = \begin{Bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & 1 & x \end{Bmatrix}; \; П''_M = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ x & 1 & x \end{Bmatrix}.$$

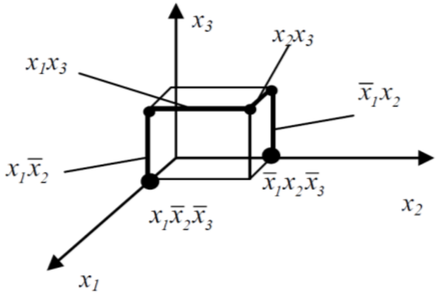


Рисунок 11 – Не мінімальне покриття функції з прикладу 5

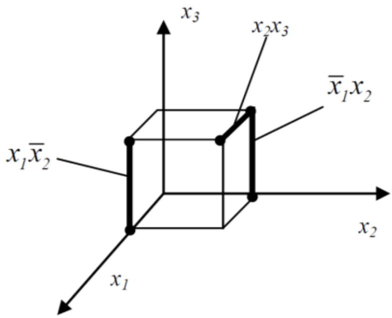


Рисунок 12 – Мінімальне покриття Π'_M для функції з прикладу 5

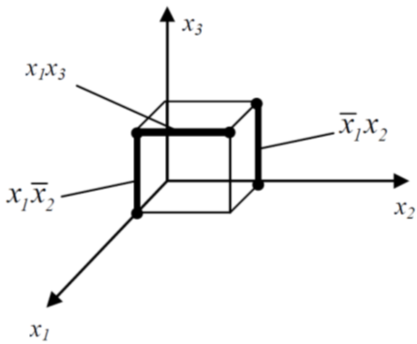


Рисунок 13 – Мінімальне покриття Π''_M для функції з прикладу 5

Скорочена форма функції має вигляд: $y = x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2$ (див. рис. 11). Екстремалями є прості імпліканти $x_1\overline{x_2}, \overline{x_1}x_2$, яким відповідають 1-куби (10*x*), (01*x*), що утворюють ядро покриття (див. рис. 11–13). Поміченими є вершини: $x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}, \overline{x_1}x_2\overline{x_3}$ або у вигляді кубів: (100), (010) (див. рис. 11).

5. Метод Квайна-Мак-Класки

Для використання цього методу функція береться у вигляді таблиці відповідності або у вигляді ДДНФ.

I етап. Отримання скороченої форми.

Це робиться за допомогою операції склеювання:

$$ax_i \vee a\overline{x_i} = a \; ax_i \vee \overline{x_i} = a.$$

Спершу склеюються 0-куби з K^0; одержуємо K^1; потім 1-куби з K^1 і т. д., поки $K^{s+1} = \varnothing$. Таким чином, отримуємо комплекс кубів:

$$K = \left\{K^0, K^1, \ldots, K^s\right\}, s \le n,$$

де n – кількість змінних булевої функції.

Щоб зменшити кількість порівнянь s-кубів на предмет можливості їх склеювання зазначимо, що склеюватися можуть s-куби, кількість одиниць в яких відрізняється точно на одиницю. Тому доцільно розбити s-куби на класи по кількості одиниць і порівнювати тільки s-куби з сусідніх класів.

Проілюструємо цей етап методу на прикладі.

Приклад. Нехай є булева функція 4-х змінних у ДДНФ:

$$y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}x_2x_3x_4 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee$$
$$\vee x_1\overline{x_2}x_3x_4 \vee x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4.$$

Запишемо множину 0-кубів, розбивши її на класи.

$$K^0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \vee & \vee & \vee & \vee & \vee & \vee & \vee & \vee \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{c|cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\} \\ \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \end{array}$$

Склеюємо 0-куби, позначаючи знаком $\vee$ ті, які покриваються 1-кубами.

$$K^1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} \vee & \vee & A & C & B & \vee & D & E & \vee \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{cc|ccccccc} 0 & x & 0 & x & 0 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 0 & 1 & 1 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x & 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{array} \right\} \\ \begin{array}{ccccccccc} \text{1-3} & \text{1-5} & \text{2-6} & \text{2-7} & \text{3-6} & \text{3-8} & \text{4-7} & \text{4-8} & \text{5-8} \end{array} \end{array}$$

Склеюємо 1-куби, позначаючи $\vee$ ті, які покриваються 2-кубами.

$$K^2 = \begin{array}{c} F \\ \left\{ \begin{array}{c} x \\ 1 \\ 0 \\ x \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{1-3} & \textit{або} & \text{1-5} \\ \text{5-8} & & \text{3-8} \end{array}$$

Повертаючись до викладу методу зазначимо, що *простим імплікантам*, очевидно, відповідають *не позначені куби*, які і утворюють множину Z простих імплікант.

II етап. Знаходження екстремалей та утворення мінімального покриття.

Для цього будується таблиця покриття. Її рядки відповідають простим імплікантам, а стовпці – елементам з K^0 (або теж саме – конституентам одиниці ДДНФ). У клітині таблиці робимо позначку, якщо проста імпліканта рядка покриває вершину стовпця.

Для прикладу, що розглядається, таблиця має вигляд таблиці 1.

Екстремалям відповідають ті рядки таблиці, які містять *єдину позначку* в деякому стовпці.

У прикладі це екстремаль ($x10x$), яка стоїть в останньому рядку. Їй відповідає мінітерм $x_2\overline{x}_3$.

Далі видаляють *рядки* з *екстремалями* та всі стовпці, в яких ці рядки містять позначки.

Отримують спрощену таблицю, на основі якої вибирають прості імпліканти, які доповнюють множину екстремалей до мінімального покриття. Це робиться, як правило, за допомогою алгебраїчного методу С. Петрика.

Таблиця 1 – Таблиця покриття для функції з прикладу

Проста імпліканта	***Z***	$\boldsymbol{K^0}$							
	x_1 x_2 x_3 x_4	**0** **1** **0** **0**	**0** **0** **1** **1**	**0** **1** **0** **1**	**1** **0** **0** **1**	**1** **1** **0** **0**	**0** **1** **1** **1**	**1** **0** **1** **1**	**1** **1** **0** **1**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	0 x 1 1		$\vee$				$\vee$		
B	0 1 x 1			$\vee$			$\vee$		
C	x 0 1 1		$\vee$					$\vee$	
D	1 0 x 1				$\vee$			$\vee$	

Продовж. табл. 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	1 x 0 1				$\vee$				$\vee$
F	x 1 0 x	$\vee$		$\vee$		$\vee$			$\vee$

У прикладі маємо таку спрощену таблицю (табл. 2).

Таблиця 2 – Спрощена таблиця для функції з прикладу

Проста імпліканта	Z_1	K_1^0			
	x_1 x_2 x_3 x_4	**0** **0** **1** **1**	**1** **0** **0** **1**	**0** **1** **1** **1**	**1** **0** **1** **1**
A	0 x 1 1	$\vee$		$\vee$	
B	0 1 x 1			$\vee$	
C	x 0 1 1	$\vee$			$\vee$
D	1 0 x 1		$\vee$		$\vee$
E	1 x 0 1		$\vee$		

Доцільно вибрати 1-куби $A:(0x11), D:(10x1)$, які разом з екстремаллю утворюють покриття, мінімальна форма якого така: $x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_3x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_4$.

На рис. 14 це покриття ілюстровано Картою Карно.

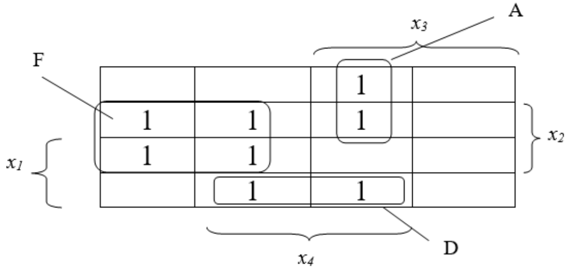


Рисунок 14 – Карти Карно з мінімальним
покриттям функції з прикладу

6. Алгебраїчний метод С. Петрика

Вибір мінімального покриття на другому етапі методу Квайна-Мак-Класки доцільно здійснювати алгебраїчним методом, що запропонував С. Петрик.

Прості імпліканти позначаються (як правило, латинськими літерами A, B, …).

За стовпцями покриття записують диз'юнкції цих простих імплікант, що позначені в стовпці, *оскільки будь-яка з цих імплікант покриває вершину*.

Покриттю функції відповідає кон'юнкція всіх записаних диз'юнкцій.

Розкриваючи дужки, спрощуються формули, переходять до ДНФ, де кожен член диз'юнкції є кон'юнкцією простих імплікант і відповідає певному тупиковому покриттю.

З усіх тупикових вибирають покриття, що має мінімальну ціну.

Для прикладу, що розглядається, маємо:

$$F\left(A\vee C\right)\left(B\vee F\right)\left(D\vee E\right)F\left(A\vee B\right)\left(C\vee D\right)\left(E\vee F\right)=$$

$$=F\left(A\vee C\right)\left(A\vee B\right)\left(D\vee E\right)\left(C\vee D\right)=$$

$$=F\left(A\vee AB\vee AC\vee BC\right)\left(CD\vee CE\vee D\vee DE\right)=$$

$$=F\left(A\vee BC\right)\left(D\vee CE\right)=ADF\vee ACEF\vee BCDF\vee BCEF.$$

Використано склеювання $F=(B\vee F)=F;\ \ F=(E\vee F)=F;$ $A\vee AB=A;\ \ A\vee AC=A;\ \ D\vee DE=D;\ \ D\vee CD=D;$ і дистрибутивність. Отже, є чотири тупикових покриття:

$$C_1=\begin{Bmatrix}0 & 1 & x\\ x & 0 & 1\\ 1 & x & 0\\ 1 & 1 & x\end{Bmatrix};\ C_2=\begin{Bmatrix}0 & x & 1 & x\\ x & 0 & x & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & x\end{Bmatrix};$$

$$C_3=\begin{Bmatrix}0 & x & 1 & x\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ x & 1 & x & 0\\ 1 & 1 & 1 & x\end{Bmatrix};\ C_4=\begin{Bmatrix}0 & x & 1 & x\\ 1 & 0 & x & 1\\ x & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & x\end{Bmatrix}.$$

Ціна їх така: $c_1=8; c_2=c_3=c_4=11$. Отже, мінімальним є перше покриття: ADF .

Лекції 9. Основні комбінаторні схеми. Правила суми та добутку. Розміщення, переставлення

1. Основні комбінаторні конфігурації. Комбінаторні схеми та задачі

У різних задачах часто потрібно вибирати з деякої сукупності об'єктів іншу, що має ті чи інші властивості, розташовувати елементи деякої сукупності в певному порядку тощо.

Приклад 1. Керівникові треба розподіляти роботи між підлеглими або механізмами. Фермерові потрібно розташовувати посіви певних сільськогосподарських культур по полях.

Область дискретної математики, яка вивчає задачі, в яких фігурує вибір комбінацій і вивчення їх властивостей, називається комбінаторикою, або комбінаторним аналізом. Є *три типи* задач комбінаторного аналізу:

1) пошук хоча б *однієї комбінації*, що має задану властивість, або доведення, що таких немає;

2) якщо таких комбінацій не одна, виникає задача *підрахунку їх кількості*;

3) якщо комбінації відрізняються одна від одної певними параметрами, виникає задача *знаходження оптимальної* в якомусь сенсі *комбінації*.

У комбінаториці розглядають різні підходи до утворення комбінацій та їх підрахунку.

Розглянемо дві з них:

– *схему розміщення елементів по комірках;*

– *урнову схему*.

У першій схемі розглядають різні можливі *розташування n об'єктів по k комірках* (табл. 1).

Таблиця 1 – Схема розміщення елементів по комірках

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="3">Комірки</th><th colspan="3">Об'єкти</th></tr>
<tr><th colspan="2">різні</th><th rowspan="2">однакові</th></tr>
<tr><th>неупоряд-ковані</th><th>упоряд-ковані</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Різні</td><td>неупорядковані</td><td>1.1</td><td>2.1</td><td>3.1</td></tr>
<tr><td>упорядковані</td><td>1.2</td><td>2.2</td><td>3.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">однакові</td><td>1.3</td><td>2.3</td><td>3.3</td></tr>
</table>

У другій схемі розглядається *вибір k об'єктів (куль) з урни з n об'єктами*. При цьому *кулі* можуть *відрізнятися або ні, вибір* куль відбувається з *повертанням* або без *повертання*, а також може розглядатися вибір як *упорядкований,* так і *неупорядкований.*

2. Правила суми та добутку

Приклад 2 Скількома способами можна вибрати з 28 кісток доміно дві кості так, щоб їх можна було прикласти одну до одної (тобто, щоб певне число очок було на обох костях).

Розв'яжемо цю задачу. Виберемо одну кость. На це є 28 способів. У семи випадках – це «дубль»: «пусто-пусто», «1-1», «2-2», «3-3», «4-4», «5-5», «6-6». У 21 випадку – це кость із двома різними числами. Для «дублів» другу кость можна вибрати шістьма способами: для дубля «а-а» – це «0-а», «1-а»,

…, «і-а», … «6-а», де $i \neq a$. Для не «дубля» другу кость можна вибрати 12 способами: для кості *«* $i-j$ *»*, це кості: *«* $i-k$ *»*, *«* $m-j$ *»*, де $m,k=0,1,\ldots,6, k\neq j; m\neq i$.

Перемноживши (кажуть, «за правилом добутку»), в першому випадку маємо $7\cdot 6=42$ комбінації, в другому – $21\cdot 12=252$.

Додавши дві ці суми (кажуть, «за правилом суми»), одержуємо 42 + 252 = 294 способи вибору пари. При цьому враховувався і порядок вибору, якщо цього не робити – отримаємо 147, удвічі менше число способів. Задача розв'язана.

Правила суми і добутку, які ми розглянули на прикладі, – інструмент при знаходженні кількості комбінацій. Розглянемо їх у загальному вигляді.

Правило суми. Якщо $\{A_i : i\in I\}$ – скінченна сім'я скінченних множин, що попарно не перерізається, то

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| = \sum_{i\in I}|A_i|.$$

Правило добутку. Якщо $\{B_i : i\in I\}$ – скінченна сім'я скінченних множин, то для декартового добутку $\underset{i\in I}{Д}|B_i|$ справедлива рівність

$$\left|\underset{i\in I}{Д} B_i\right| = \underset{i\in I}{Д}|B_i|,$$

де $\underset{i\in I}{Д}|B_i|$ – добуток кількостей елементів множин $B_i, i\in I$.

3. Означення різних комбінацій

Нехай $J_n=\{1,2,\ldots,n\}, J_n^0=J_n\cup\{0\}$.

Упорядковану (наприклад, нумерацією) множину будемо називати *кортежем*. Нагадаємо деякі означення.

Мультимножиною $G=\{g_1,\ldots,g_\eta\}$ називають сукупність об'єктів, серед яких можуть бути й однакові.

Основою $S(G)=(e_1,\ldots,e_n)$ мультимножини G називають кортеж всіх її різних елементів. Упорядковану відповідно до елементів $S(G)$ мультимножину кратностей (повторень) елемента e_i $k_G=\eta_i, i\in j_n$ називають *первинною специфікацією* мультимножини G і позначають $[G]=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$.

Мультимножину G можна задати, вказавши $S(G)$ та $[G]$, або так:

$$G=\left\{e_1^{\eta_1},e_2^{\eta_2},\ldots,e_n^{\eta_n}\right\}.$$

Приклад 3. $G=\{a^2,b^1,c^3\}=\{a,a,b,c,c,c\}$. Ця мультимножина має $S(G)=(a,b,c)$, $[G]=(2;1;3)$.

Очевидно, що якщо $G=S(G)$, то мультимножина G є множиною. У випадках, коли порядок елементів у $S(G)$ ролі не відіграє, кортеж $S(G)$ будемо розглядати як множину.

Підмультимножиною B мультимножини *A* називається мультимножина з основою $S(B)\subset S(A)$, кожен елемент якої $b\in S(B)$ справджує нерівність $k_B(b)\le k_A(b)$. Позначимо це таким же знаком $\subset$, як і для множин, $B\subset A$. Назвемо *k*-елементну підмультимножину *B* мультимножини *A* *k-вибіркою*, тобто *B* – *k-вибірка*, якщо $B\subset A, |B|=k$. *Упорядковану* *k*-вибірку будемо називати *загальним k-кортежем.* Кількість елементів у вибірці та кортежі, як правило, опускатимемо, якщо це не викликатиме плутанини. Кортежі та вибірки будемо позначати переліком їх елементів у круглих дужках. Зауважимо, що загальний кортеж із множини – це кортеж. Слово «загальний» (якщо зрозуміло, що кортеж взято з мультимножини) будемо також опускати.

Розглянемо кортеж $g\subset G$

$$g=\left(g_{i_1},\ldots,g_{i_k}\right). \qquad (1)$$

Множина переставлень без повторень із k різних елементів. Розглянемо кортежі вигляду (1) з G при умові $\eta=n=k$. Це означає, що $[G]=(1^n)$, тобто G – множина. При цьому кортежі будуть відрізнятися один від одного тільки порядком елементів, бо $\eta = k$. Такі кортежі називають *переставленнями без повторення*. Сукупність усіх таких переставлень елементів із *G* утворює множину, яку позначають $P_k(G)$ і називають *множиною переставлень без повторення* з k різних елементів множини *G*.

Множина переставлень із повтореннями з k елементів, серед яких n різних. Розглянемо кортеж вигляду (1) за умови, що $\eta = k, (n < \eta)$. Такі кортежі назвемо переставленнями з повтореннями. Сукупність усіх таких переставлень утворює множину, яку назвемо множиною переставлень із повтореннями. Позначимо її $P_{kn}(G)$.

Множина k-розміщень без повторення з n різних елементів. Нехай $\eta = n,$ тобто *G* – множина. За такої умови кортеж вигляду (1) називають *k-розміщенням* (або просто розміщенням) без повторень із *n* елементів (по *k*). Множину всіх таких розміщень називають множиною *k*-розміщень без повторень із *n* різних елементів і позначають $A_n^k(G)$.

Множина k-розміщень із (необмеженими) повтореннями з n різних елементів. Нехай *G* – мультимножина з первинною специфікацією $[G] = (k^n),$ тобто $\eta = nk,$ що означає, що кратності всіх елементів дорівнюють *k*. За таких умов кортеж вигляду (1) називають *k*-розміщенням із необмеженими (будь-якими можливими) повтореннями з *n* різних елементів (по *k*). Множину всіх таких розміщень позначають $\overline{A_n^k}(G)$ та називають множиною *k*-розміщень із (необмеженими) повтореннями.

Загальна множина k-розміщень. Нехай, як і раніше, $G = \{g_1, \ldots, g_\eta\}$ – мультимножина. Її основа – $S(G) = (e_1, \ldots, e_n)$, первинна специфікація – $[G] = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. Нехай $\eta_i = k \ \forall i \in J_n$. За таких умов кортеж вигляду (1) назвемо загальним *k*-розміщенням, а множину всіх таких кортежів – загальною множиною розміщень. Позначатимемо її $A_{\eta n}^k(G)$. Зазначимо, що в кожному загальному розміщенні g – не більше η_i елементів $e_i \forall i \in J_n$.

Лекції 10. Сполучення з повтореннями та без. Підрахунок кількості комбінацій

1. Множина сполучень

Розглянемо *k*-вибірку $g \subset G$ вигляду

$$g = \left\{ g_{i_1}, \ldots, g_{i_k} \right\}. \tag{1}$$

Множина k-сполучень без повторень. Нехай $\eta = n$, тобто G – множина. За такої умови вибірка вигляду (1) називається *k*-сполученням (або просто сполученням) без повторень із *n* елементів (по *k*). Множину всіх таких сполучень позначимо $C_n^k(G)$ і назвемо множиною сполучень без повторення.

Множина k-сполучень із (необмеженими) повтореннями. Нехай G – мультимножина з первинною специфікацією $[G] = (k^n)$, тобто $\eta = nk$, що означає, що кратності всіх елементів дорівнюють *k*. За таких умов вибірку виду (1) називають *k*-сполученням із (необмеженими) повтореннями із *n* різних елементів (по *k*). Множину всіх таких сполучень називають множиною сполучень із (необмеженими) повтореннями та позначають $\bar{C}_n^k(G)$.

Загальна множина сполучень. Нехай $G = \left\{ g_1, \ldots, g_\eta \right\}$ – мультимножина з основою $S(G) = (e_1, \ldots, e_n)$ та первинною специфікацією $[G] = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, де $\eta_i \le k \ \ \forall i \in J_n$. За таких умов вибірку вигляду (1) називають загальним сполученням із *n* різних елементів по *k*. Множину всіх таких сполучень позначають $C_{\eta n}^k(G)$ та називають загальною множиною сполучень.

Комбінаторні множини, що складаються з кортежів, називають *евклідовими*, а ті, що складаються з виборок, – *неевклідовими*. Неевклідові множини можна перетворити в евклідові, задавши на вибірках вигляду (2) деякий порядок, наприклад, так:

$$g_{i_1} \le g_{i_2} \le \ldots \le g_{i_k}.$$

Елементи евклідових комбінаторних множин – кортежі – можна розглядати як точки евклідового арифметичного простору R^k.

2. Підрахунок кількості комбінацій

Підрахуємо кількість елементів у множинах сполучень, розміщень та переставлень. Для *розміщень* маємо:

$$\left|A_n^k(G)\right| = A_n^k = n(-1)\ldots(n-k+1). \qquad (2)$$

Формула (2) випливає з правила добутку. Очевидно, що з правила добутків випливає:

$$\left|\overline{A}_n^k(G)\right| = \overline{A}_n^k = n^k. \qquad (3)$$

Для переставлень маємо:

$$\left|P_k(G)\right| = P_k = A_k^k = k(k-1)\ldots 2\cdot 1 = k! \qquad (4)$$

Формула (4) – це формула (2) при $n=k$. Добуток $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$ називають *k-факторіалом*. За означенням вважають $0!=1$.

Очевидно, що: 1) $n! = n(n-1)!$; $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Покажемо, що

$$\left|P_{kn}(G)\right| = P_{kn} = \frac{k!}{\eta_1!\eta_2!\ldots\eta_n!}. \qquad (5)$$

Формула (5) доводиться на основі (4) з урахуванням, що при $\eta_i > 1$ переставлень із повтореннями в $\eta_i!$ разів менше, ніж без повторень. Числа P_{kn} називають *поліноміальними* коефіцієнтами. Іноді їх позначають $P(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$.

Формула для кількості *сполучень* така:

$$\left|C_n^k(G)\right| = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (6)$$

Формулу (6) легко довести, врахувавши, що *сполучення – це розміщення, в якому порядок ролі не відіграє,* тобто

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Числа C_n^k називають *біноміальними* коефіцієнтами. Порівняємо формули (5) та (6). При $\eta_1 = k;\ \eta_2 = n - k;\ \eta = \eta_1 + \eta_2 = n$ вони збігаються. Тобто:

$$C_n^k = P_{n2} = P(\eta_1, \eta_2). \qquad (7)$$

Така властивість біноміальних коефіцієнтів дозволяє використовувати їх *при генеруванні k-елементних підмножин.* Нехай $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, розглянемо *k*-сполучення $g = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$. C_n^k – кількість таких *k*-елементних підмножин. Їх вибір можна робити, взявши вектор із k одиниць та $\eta - k$ нулів. Зробивши переставлення в ньому, отримуємо відповідну *k*-елементну підмножину з *A*. Вона складається з елементів, що стоять в *A* на місцях, на яких у переставленні стоять одиниці.

Підрахуємо кількість *сполучень із повтореннями* $\left|\bar{C}_n^k(G)\right| = \bar{C}_n^k$. Для цього поставимо у взаємно однозначну відповідність довільному такому сполученню переставлення з повтореннями з двох різних елементів 0 та 1. Поставимо в переставлення стільки одиниць, скільки елементів e_1 там є, потім – після одиниць – поставимо нуль, якщо e_1 немає, то нуль ставимо зразу. Аналогічно зробимо з елементами $e_2, \ldots, e_n$. Очевидно, довжина переставлення – це $k + n - 1$, бо переставлення складається з $k + n - 1$ елементів (*k* одиниць, $n - 1$ нулів, які відділяють групи одиниць (можливо, і пустих). Тобто, за (7) при $\eta_1 = k; \eta_2 = n - 1$ маємо:

$$\bar{C}_n^k = P_{k+n-1,2} = P(\eta_1, \eta_2) = C_{k+n-1}^k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}. \qquad (8)$$

Приклад 1. $G = \{a, a, b, b, c, c\}$.

$$\bar{C}_n^k(G) = \{\{a,a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,b\}, \{b,c\}, \{c,c\}\};$$

$$n = 3;\ S(G) = (a, b, c);\ k = 2;\ \bar{C}_n^k = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Формулу (8сполучення з повтореннями та сполучення без повторень. Для цього розташуємо елементи в сполученнях так, щоб *однакові йшли підряд* $\{e_1,\ldots,e_1,\ldots,e_i,\ldots\}$. Усі елементи пронумеруємо, але до нумерації *додамо* $i-1$, де i – індекс елемента e_i. Наприклад: для сполучення $\{e_1,e_1,e_2,e_2,e_2,e_3\}$ нумерація така $\{1,2,4,5,6,8\}$. Таким чином, отримаємо сполучення без повторення з $k+(n-1)$ елементів по k, де n – кількість груп (номер останньої групи), отже, ще раз отримали:

$$\overline{C}_n^k = C_{k+n-1}^k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Кількість елементів *у загальних множинах сполучень та розміщень* спробуйте підрахувати самостійно.

Лекція 11. Комбінаторні тотожності, поліноміальна формула. Формула включень та виключень, її застосування

1. Формула включень та виключень

Задача. В групі студентів першого курсу 25 чоловік. Із них у сесію п'ятірки отримали 16 студентів з програмування, 13 студентів із геометрії, 8 – з обох предметів. Скільки студентів не отримали п'ятірки ні з геометрії, ні з програмування?

Розв'язок. Розіб'ємо групу на підмножини, що не перерізаються (рис. 1).

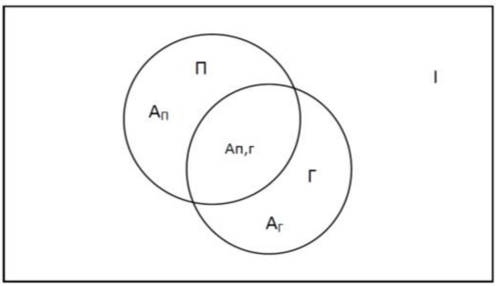


Рисунок 1 – Ілюстрація до задачі

Позначимо:

$Г$ – множина студентів, що отримали п'ятірки з геометрії;

$П$ – з програмування;

$Г \cap П$ – з обох цих предметів;

I – всю групу (універсальну множину).

Підмножини, що не перерізаються, це:

$A_П = П \setminus Г$ – множина студентів, що отримали п'ятірки тільки з програмування;

$A_Г = Г \setminus П$ – тільки з геометрії;

$A_{П,Г} = П \cap Г$ – множина тих, що отримали п'ятірки із програмування і з геометрії;

$A_{\overline{П},\overline{Г}} = I \setminus \left(П \cup Г\right) = \overline{П \cup Г}$ – множина тих, хто не отримали п'ятірки ні з програмування, ні з геометрії.

Нам дано:

$$N = |I| = 25;\ N_1 = |П| = 16;\ N_2 = |I| = 13;\ N_{1,2} = |П \cap Г| = 8.$$

Позначимо N_0 – *кількість студентів, що не мають жодної п'ятірки*.

Підрахуємо $|A_П|, |A_Г|$:

$$|A_П| = |П| - |П \cap Г| = N_1 - N_{1,2} = 16 - 8 = 8.$$

$$|A_Г| = |Г| - |П \cap Г| = N_2 - N_{1,2} = 13 - 8 = 5.$$

$$N_0 = N - |A_П| - |A_Г| - |A_{П,Г}| = 25 - 8 - 5 - 8 = 4.$$

Через $N, N_1, N_2, N_{1,2}$ величина N_0 виражається так:

$$N_0 = N - \left(N_1 - N_{1,2}\right) - \left(N_2 - N_{1,2}\right) - N_{1,2} =$$
$$= N - N_1 - N_2 + N_{1,2} = 25 - 16 - 13 + 8 = 4.$$

Задача розв'язана.

Ускладнимо задачу. Нехай екзамен із математичного аналізу на «п'ять» склали 16 студентів; матаналізу й програмування – 12; матаналізу і геометрії – 10; усі три іспити – 7 студентів. Скільки студентів за цих умов не отримали «п'ятірки» з жодного з трьох іспитів?

Розв'язок. Використаємо розв'язок першого варіанта задачі. Нехай *М* – множина студентів, які склали математичний аналіз на «5». Позначимо N_3 – кількість студентів у *М:*

$$N_3 = |M|,\ N_{1,3} = |\Pi \cap M|;\ N_{2,3} = |\Gamma \cap M|,$$

$$N_{1,2,3} = |M \cap \Pi \cap \Gamma|,\ A_{\overline{\Pi},\overline{\Gamma},\overline{M}} = \overline{\Pi \cup \Gamma \cup M}.$$

Тоді величину $N_0 = \left|A_{\overline{\Pi},\overline{\Gamma}}\right| - N_3 + N_{1,3} + N_{2,3} - N_{1,2,3}$ або підставивши $\left|A_{\overline{\Pi},\overline{\Gamma}}\right|$, маємо:

$$N_0 = N - N_1 - N_3 + N_{1,2} + N_{1,3} + N_{2,3} - N_{1,2,3} =$$
$$= 4 - 16 + 12 + 10 - 7 = 3.$$

Це і є відповідь.

Розглянута задача дозволяє сформулювати загальний принцип – формулу включень та виключень для підрахунку числа об'єктів, що не мають жодної з *n* властивостей.

Якщо *N* – загальна кількість об'єктів, N_0 – кількість об'єктів, що не мають жодної з *n* властивостей, а $N_{i_1,\ldots,i_k}$ – кількість елементів, що мають властивості $i_1,\ldots,i_k$ (а можливо, й інші), то:

$$N_0 = N - N_1 - N_2 - \ldots - N_n + N_{1,2} + N_{1,3} + \ldots + N_{n-1,n} -$$
$$- N_{1,2,3} - \ldots - N_{n-2,n-1,n} + \ldots + (-1)^n N_{1,2,\ldots,n}.$$

2. Деякі комбінаторні тотожності

Раніше виведено формулу для кількості сполучень

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1}$$

Покажемо, що виконується умова симетрії:

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{2}$$

Дійсно, $C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = C_n^k.$

Доведемо формулу додавання сполучень:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k. \qquad (3)$$

Для доведення розглянемо *k*-сполучення без повторень з елементів $g_1,\ldots,g_n$. Розіб'ємо їх на 2 класи: 1) ті, що містять g_n; 2) ті, що не містять g_n. До першого класу входять C_{n-1}^{k-1} комбінацій, що легко побачити, не враховуючи в кожному сполученні g_n – одержимо $(k-1)$-сполучення з $n-1$ елемента. Сполученнями другого класу є k-сполучення з елементів $g_1,\ldots,g_{n-1}$. Тому їх кількість C_{n-1}^k. *За правилом суми* отримуємо формулу (3), що і треба було довести.

На основі формули (3) можна скласти схему (трикутник Паскаля), яка дає біноміальні коефіцієнти C_n^i, де по вертикалі $n=1,2,3,\ldots,$ по горизонталі $i=0,1,2,\ldots$ (див. рис. 2). Рядок із номером *n* – це біноміальні коефіцієнти в розкладі бінома Ньютона. Кожен елемент трикутника – сума двох елементів із верхнього рядка, взятих справа й зліва від того, що обчислюється. Перший ряд – дві одиниці. Перший та останній елементи рядка – 1. Маємо: $C_2^1 = C_1^0 + C_1^1$; $C_3^1 = C_2^0 + C_2^1$; $C_3^2 = C_2^1 + C_2^2$ і т. д.

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
. . . .

Рисунок 2 – Трикутник Паскаля

Доведемо співвідношення:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n. \qquad (4)$$

Зазначимо, що $C_n^0 = 1$ (це випливає з (1)).

Для доведення (4) згадаємо, що k^n – число всіх *n*-розміщень із *k*-елементів, тобто 2^n можна розглядати як число всіх *n*-розміщень із двох елементів, наприклад, 0 та 1.

Таких розміщень, що містять 0 одиниць, одне, $1=C_n^0$. Що містить 1 одиницю – n; це переставлення з одиниці та $(n-1)$-го нуля. Таких розміщень, що містять i одиниць, $C_n^i=P(i,n-i)$ – кількість переставлень із n-елементів 2-х типів, одного з яких є i штук, іншого $n-i$ штук. Тобто, з одного боку, для кількості розміщень маємо формулу, що стоїть в лівій частині (4), а з іншого – 2^n, що і доводить формулу (4).

Справедлива формула, яку називають біномом Ньютона:

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^i y^{n-i}. \qquad (5)$$

Часткові випадки:

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2;$$

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.$$

Для доведення зазначимо, що в розкладенні добутку

$$(x+y)^n=\underbrace{(x+y)(x+y)...(x+y)}_{n\ \text{раз}}$$

добуток $x^i y^{n-i}$ можна отримати, взявши x з i множників $x+y$ (які вибираються довільно з n множників, що дають добуток), а елемент y – із $n-i$ множників, що залишилися. Отже, таких $\left(x^i y^{n-i}\right)$ добутків стільки, скільки способів вибору x^i, тобто C_n^i. Степінь i може змінюватися від 0 до n, отже, маємо:

$$(x+y)^n=C_n^0y^n+C_n^1xy^{n-1}+...+C_n^ix^iy^{n-i}+...+C_n^ny^0x^n,$$

що і треба було довести.

З (5) при $x=y=1$ маємо (4), а при $x=-1;\ y=1$ одержуємо:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i=0, \qquad (6)$$

або в розгорнутому вигляді:

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\ldots+(-1)^n C_n^n=0.$$

Розглянемо узагальнення біному Ньютона. Спершу 2 приклади.

Приклад 1.

$$\left(x+y+z\right)^2=\left(x+y+z\right)\left(x+y+z\right)=$$

$$=x^2+xy+xz+yx+y^2+yz+zx+zy+z^2=$$

$$=x^2+y^2+z^2+2xz+2xy+2yz=\frac{2!}{2!0!0!}x^2+\frac{2!}{0!2!0!}y^2+\frac{2!}{0!0!2!}z^2+$$

$$+\frac{2!}{1!0!1!}xz+\frac{2!}{1!1!0!}xy+\frac{2!}{0!1!1!}yz=\sum_{\substack{\forall(k_1,k_2,k_3)\\ k_1+k_2+k_3=2\\ k_i\ge 0}}\frac{2!}{k_1!k_2!k_3!}x^{k_1}y^{k_2}z^{k_3}.$$

Приклад 2. $\left(x+y+z\right)^3=\left(x+y+z\right)\left(x+y+z\right)^2=$

$$=\left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz\right)=$$

$$=x^3+xy^2+xz^2+2x^2y+2x^2z+2xyz+yx^2+y^3+$$

$$+yz^2+2xy^2+2xyz+2y^2z+x^2z+y^2z+z^3+$$

$$+2xyz+2xz^2+2yz^2=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+$$

$$+3xy^2+3y^2z+3xz^2+3yz^2+6xyz=\frac{3!}{3!0!0!}x^3+\frac{3!}{0!3!0!}y^3+\frac{3!}{0!0!3!}z^3+$$

$$+\frac{3!}{2!1!0!}x^2y+\frac{3!}{2!0!1!}x^2z+\frac{3!}{1!2!0!}xy^2+\frac{3!}{0!2!1!}y^2z+\frac{3!}{1!0!2!}xz^2+$$

$$+\frac{3!}{0!1!2!}yz^2+\frac{3!}{1!1!1!}xyz=\sum_{\substack{\forall(k_1,k_2,k_3)\\ k_1+k_2+k_3=3,\ k_i\ge 0}}\frac{3!}{k_1!k_2!k_3!}x^{k_1}y^{k_2}z^{k_3}.$$

Позначимо: $J_n=\{1,2,\ldots,n\}$. Узагальненням бінома Ньютона є *поліномальна формула:*

$$\left(x_1+x_2+\ldots+x_m\right)^n=\sum_{\substack{\forall(k_1,\ldots,k_m)\\ k_1+\ldots+k_m=n\\ k_i\ge 0\ \forall i\in J_m}}P\left(k_1,k_2,\ldots,k_m\right)x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m},\qquad(7)$$

яка доводиться простою перевіркою. Дійсно, якщо розкрити дужки, виписуючи множники x_i в порядку їх появи, то будемо мати доданки, що складаються з n множників із множини $x_1, x_2, ..., x_m$, взятих різну кількість разів (але в сумі ця кількість n). Деякі з доданків будуть подібними (якщо x_i входить однакову кількість разів (k_i) для всіх $i \in J_m$, $k_1 + ... + k_m = n$). Тому коефіцієнт при $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot ... \cdot x_m^{k_m}$ – це кількість переставлень із повтореннями з n елементів, що містять x_i $k_i \geq 0$ разів, $k_1 + ... + k_m = n$:

$$P(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}.$$

Таким чином, формула (7) доведена.

Справедливі й інші співвідношення, з яких наведемо наступні:

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}; \tag{8}$$

$$C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}. \tag{9}$$

Доведемо (8).

$$\frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} \frac{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Формула (8) доведена.

$$C_n^k C_{n-k}^{m-k} = \frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!(m-k)!(n-k-m+k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!k!(m-k)!};$$

$$C_n^m C_m^k = \frac{n!m!}{m!(n-m)!k!(m-k)!} = \frac{n!}{(n-m)!k!(n-k)!}.$$

Права частина (9) дорівнює лівій, що і треба було довести.

Лекція 12. Рекурентні співвідношення, способи розв'язання лінійних рекурентних співвідношень

1. Основні означення

Фібоначчі (італійський математик) у 1202 році сформулював таку задачу.

Пара кроликів раз у місяць дає приплід – самку та самця (2-х кроликів). Кожна пара молодих кроликів через 2 місяці після народження вже дає приплід. Вважаємо, що кролики не помирають. Скільки кроликів буде через рік, якщо вважати, що на початку року їх була одна пара?

Формалізуємо умову. Позначимо $F(n)$ – кількість пар кроликів через n місяців від початку року. Ми бачимо, що через n місяців буде $F(n-1)$ пар, які були, і ще стільки народжених пар, скільки було в кінці місяця $n-2$, тобто ще $F(n-2)$ пар. Тобто маємо співвідношення:

$$F(n)=F(n-1)+F(n-2), \qquad (1)$$

причому $F(0)=1; F(1)=2$. Зрозуміло, що в (1) $n \geq 2$.

Числа $F(n)$ називають *числами Фібоначчі*. Співвідношення вигляду (1) називається *рекурентним. Тобто рекурентні співвідношення – це такі, в яких виражають значення $f(n)$ через $f(n-1),\ldots,f(n-k)$, де n, k – цілі змінні.*

Рекурентне співвідношення вигляду:

$$f(n)=F\big(f(n-1),f(n-2),\ldots,f(n-k)\big),\ k<n \qquad (2)$$

називається рекурентним співвідношенням *порядку k.*

Загальних правил розв'язування рекурентних співвідношень не існує.

Розв'язком рекурентного співвідношення (2) називається функція $f(m)$ цілого аргументу m, яка при підстановці в (2) перетворює це співвідношення в тотожність.

Якщо рекурентне співвідношення *k*-го порядку (2) описує послідовність $\{f_n\}$, то перші *k* елементів $f(1),\ldots,f(k)$ послідовності називаються *початковими умовами*.

Якщо початкових умов не задано, рекурентне співвідношення має нескінченну множину розв'язків; якщо ж початкові умови задати, то кожне наступне $f(k+1),\ldots,f(n),\ldots$ значення в послідовності обчислюється *однозначно*.

Розв'язок рекурентного співвідношення *k*-го порядку називається *загальним*, якщо він залежить від *k* довільних сталих $C_1,\ldots,C_k$.

При фіксації значень $C_1=C_1^0,...,C_k=C_k^0$ одержимо частинний розв'язок.

Приклад 1. Рекурентне співвідношення $f(n+2)= =2f(n)-f(n+1)$ має розв'язки $f_1(n)=1^n=1;$ $f_2(n)=(-2)^n$ (перевірити підстановкою). Загальним його розв'язком є $f(n)=C_1+C_2(-2)^n$. Дійсно, підставимо $f(n)$ у рекурентне співвідношення:

$$C_1+C_2(-2)^{n+2}=2\Big(C_1+C_2(-2)^n\Big)-\Big(C_1+C_2(-2)^{n+1}\Big),$$

$$C_1+C_2(-2)^{n+2}=2C_1+2C_2(-2)^n-C_1-C_2(-2)^{n+1},$$

або, привівши подібні C_1 та перенісши в одну сторону, маємо

$$\left(-2^n\right)C_2\Big((-2)^2-2+(-2)\Big)=2^nC_2(4-4)=0,$$

що і треба було перевірити.

2. Розв'язування лінійних рекурентних співвідношень зі сталими коефіцієнтами

Лінійними рекурентними співвідношеннями зі сталими коефіцієнтами називають рекурентні співвідношення вигляду:

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \ldots + \\ + a_{k\text{-}1} f(n+1) + a_k f(n) + b, \qquad (3)$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_k$ та b – деякі задані числа.

Якщо $b \neq 0,$ то (3) називають *неоднорідним* рекурентним співвідношенням, а якщо $b = 0$ – то *однорідним.*

Теорема 1. Якщо $f_1(n)$ та $f_2(n)$ є розв'язками при $b = 0$ (3), то

$$f(n) = C_1 f_1(n) + C_2 f_2(n) \qquad (4)$$

також є розв'язком при будь-яких сталих C_1, C_2.

Доведення. Запишемо (3) при $b = 0$ у вигляді:

$$f(n+k) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(n+k-i) \qquad (5)$$

та підставимо замість $f(j)$ його вираз із (4) для всіх *j*, що фігурують у (5)

$$C_1 f_1(n+k) + C_2 f_2(n+k) = \\ = \sum_{i=1}^{k} a_i \left[C_1 f_1(n+k-i) + C_2 f_2(n+k-i) \right]. \qquad (6)$$

Оскільки $f_1(n), f_2(n)$ є розв'язками однорідного рекурентного співвідношення (3), то справедливо:

$$C_j f_j(n+k) = \sum_{i=1}^{k} a_i C_j f_j(n+k-i), \; j = 1,2. \qquad (7)$$

Додавши праві (при $j = 1, j = 2$) та ліві частини рівностей (7), маємо справедливість (6), що і треба було довести.

Зауваження. Щоб формула (4) давала загальний розв'язок при $k = 2,$ треба, щоб $\dfrac{f_1(n)}{f_2(n)} \neq C = const,$ інакше $f(n)$ – не загальний розв'язок:

$$f(n) = f_2(n)\left(C_1\frac{f_1(n)}{f_2(n)} + C_2\right) = f_2(n)(C_1C + C_2) = f_2(n)\cdot const\,.$$

Рівняння:

$$r^k = a_1r^{k-1} + a_2r^{k-2} + ... + a_{k-1}r + a_k \qquad (8)$$

називають *характеристичним* для (3) при $b = 0$.

Розглянемо випадок $k = 2$.

Теорема 2. Якщо r_1, r_2 корені квадратного характеристичного рівняння:

$$r^2 = a_1r + a_2\,, \qquad (9)$$

то рекурентне співвідношення:

$$f(n+2) = a_1f(n+1) + a_2f(n) \qquad (10)$$

має розв'язки:

а) при $r_1 \neq r_2$

$$f_1(n) = r_1^n;\ f_2(n) = r_2^n; \qquad (11)$$

б) при $r_1 = r_2 = r$

$$f_1(n) = r^n;\ \ f_2(n) = nr^n. \qquad (12)$$

Доведення. Перший випадок: $r_1 \neq r_2$. Візьмемо будь-який із коренів характеристичного рівняння *r* та підставимо $f(n) = r^n$ у (10). Маємо:

$$r^{n+2} = a_1r^{n+1} +\ a_2r^n\,,$$

або

$$r^n\left(r^2 - a_1r - a_2\right) = 0,$$

що справджується, оскільки *r* – корінь рівняння (9).

Другий випадок. Рівність коренів рівняння (9) означає, що його дискримінант дорівнює нулю:

$$D = b^2 - 4ac = a_1^2 + 4a_2 = 0,$$

тобто $a_2 = -\dfrac{a_1^2}{4}$ і рекурентне співвідношення (10) має вигляд при $a_1 = a$:

$$f(n+2) = af(n+1) - \frac{a^2}{4} f(n), \qquad (13)$$

а його характеристичне рівняння таке:

$$r^2 = ar - \frac{a^2}{4}.$$

За теоремою Вієта $2r = a;\ r^2 = \dfrac{a^2}{4}$, тобто (13) можна записати так:

$$f(n+2) = 2rf(n+1) - r^2 f(n). \qquad (14)$$

Перевіримо, що $f(n) = nr^n$ корінь (14):

$$(n+2)r^{n+2} = 2r(n+1)r^{n+1} - r^2 nr^n,$$

$$r^{n+2}\left[n+2-2(n+1)+n\right] = 0;$$

$$r^{n+2}(n+2-2n-2+n) = 0;$$

$$r^{n+2}0 = 0.$$

Тобто nr^n дійсно є коренем (10). Обидва випадки доведені.

Зауваження. Якщо задані початкові умови, то знаходять $C_1,...,C_k$.

Приклад 2. Розв'яжемо рекурентне співвідношення із задачі Фібоначчі:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2),\ f(0) = 1;\ f(1) = 2.$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$r^2 = r + 1.$$

Розв'яжемо його:

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Загальний розв'язок рекурентного співвідношення

$$f(n) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

де

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1; \\ C_1 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 2. \end{cases}$$

$$C_2 = 1 - C_1;$$

$$C_1 \left(1+\sqrt{5}\right) + \left(1 - C_1\right)\left(1-\sqrt{5}\right) = 4;$$

$$C_1 \left(1+\sqrt{5}\right) - C_1 \left(1-\sqrt{5}\right) = 4 - 1 + \sqrt{5};$$

$$C_1 \left(1+\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}\right) = 3 + \sqrt{5};$$

$$C_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}+5}{10} = 0,3\sqrt{5} + 0,5;$$

$$C_2 = 0,5 - 0,3\sqrt{5}.$$

Тоді $f(n) = \left(0,5 + 0,3\sqrt{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(0,5 - 0,3\sqrt{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$

Підставивши $n = 0,1,2,\ldots$, маємо послідовність:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, …

Таким чином, на кінець року буде 377 пар кроликів.

Зауваження. Часто послідовність чисел Фібоначчі починають так: 0, 1, 1, 2, 3, 5, …, тобто розглядають послідовність чисел Фібоначчі, що задовольняє тому ж рекурентному співвідношенню при інших початкових умовах.

Легко побачити, що розв’язок у цьому випадку має вигляд:

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Випадок розв’язування рекурентного співвідношення (3) при $k=2$, який ми розглянули, *узагальнюється* на довільне k:

– розв’язують характеристичне рівняння (8), одержують розв’язки $r_1,...,r_m$ кратності $k_1,...,k_m$ відповідно;

– записують загальний розв’язок

$$f(n)=C_{1,1}r_1^n+C_{1,2}nr_1^n+C_{1,3}n^2r_1^n+...+C_{1,k_1}n^{k_1-1}r_1^n+...+$$
$$+C_{m,1}r_m^n+C_{m,2}nr_m^n+C_{m,3}n^2r_m^n+...+C_{m,k_m}n^{k_m-1}r_m^n;$$

– якщо задані початкові умови, то знаходять сталі $C_{11},...,C_{m,k_m}$.

Розглянемо випадок, коли в (3) $b\neq 0$, тобто рекурентне співвідношення *неоднорідне.*

Теорема 3. Загальний розв’язок неоднорідного рекурентного співвідношення (3) $f_{\text{з.н}}(n)$ є сумою частинного розв’язку неоднорідного рекурентного співвідношення (3) $f_{\text{ч.н}}(n)$ та загального розв’язку однорідного рекурентного співвідношення $f_{\text{з.о}}(n)$,

$$f_{\text{з.н}}(n)=f_{\text{ч.н}}(n)+f_{\text{з.о}}(n). \qquad (15)$$

Доведення. Підставимо (15) у (3), де ліву частину перенесемо в праву; перевіримо, чи отримаємо:

$$f_{\text{з.н}}(n+k)+\sum_{i=1}^{k}a_i f_{\text{з.н}}(n+k-i)+b=0;$$

$$f_{\text{ч.н}}(n+k)+f_{\text{з.о}}(n+k)-\sum_{i=1}^{k}a_i\left(f_{\text{ч.н}}(n+k-i)+f_{\text{з.о}}(n+k-i)\right)-b=0;$$

$$f_{\text{ч.н}}(n+k)+f_{\text{з.о}}(n+k)-$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{k}a_i f_{\text{ч.н}}(n+k-i)+b\right)-\sum_{i=1}^{k}a_i f_{\text{з.о}}(n+k-i)=0\,. \qquad (16)$$

За означенням $f_{\text{ч.н}}(n)$ та $f_{\text{з.о}}(n)$ маємо:

$$f_{\text{ч.н}}(n+k)=\sum_{i=1}^{k}a_i f_{\text{ч.н}}(n+k-i)+b;$$

$$f_{\text{з.о}}(n+k)=\sum_{i=1}^{k}a_i f_{\text{з.о}}(n+k-i),$$

що в порівнянні з (16) дає тотожність $0\equiv 0$. Таким чином, формула (15) доведена.

Частинний розв'язок неоднорідного рекурентного співвідношення знаходять так. Якщо $\sum_{i=1}^{k}a_i\neq 1,$ то існує $f_{\text{ч.н}}(n)=C,$ де C визначається підстановкою в (3):

$$C=\sum_{i=1}^{k}a_i C+b;$$

звідки маємо:

$$C=\frac{b}{1-\sum_{i=1}^{k}a_i}.$$

Якщо $\sum_{i=1}^{k}a_i=1$ та $\sum_{i=1}^{k}ia_i\neq 0,$ то існує $f_{\text{ч.н}}(n)=Cn,$ де C визначається підстановкою $f_{\text{ч.н}}(n)$ в (3): $C(n+k)=C\sum_{i=1}^{k}a_i(n+k-i)+b;$ або замінивши $n+k$ на n маємо:

$$Cn = a_1C(n-1) + a_2C(n-2) + ... + a_kC(n-k) + b;$$

$$C\left(n - \sum_{i=1}^{k} a_i(n-i)\right) = b;$$

$$C\left(n - \sum_{i=1}^{k} a_i n + \sum_{i=1}^{k} a_i i\right) = b;$$

$$C\left(n - n\sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=1}^{k} a_i i\right) = b;$$

$$C\left(n - n + \sum_{i=1}^{k} i a_i\right) = b;$$

$$C = \frac{b}{\sum_{i=1}^{k} i a_i}.$$

У загальному випадку $f_{\text{ч.н}}(n)$ шукають у вигляді $f_{\text{ч.н}}(n) = Cn^m, m < k,$ підставляючи цей вираз у (3), та з умови тотожності визначають невідомі параметри порівнянням коефіцієнтів.

ГРАФИ

Лекція 13. Орієнтовані та неорієнтовані графи, способи визначення, властивості. Шляхи у графах, зв'язні графи

1. Означення графу та історична довідка

Упорядкована пара $<N,S>$ множини N з бінарним відношенням в ній $S \subset N \times N$ називається *графом Г*, тобто $Г =< N,\ S >$. N називають *носієм* графу (множиною вершин), а S *сигнатурою* графу (множиною дуг).

Графи зображають графічно: вершини – маленькими колами (іноді точками), дуги – у вигляді стрілок, що виходять з n_i та входять в n_j, якщо $\left(n_i, n_j\right) \in S,$ при цьому n_i – *початок дуги*, а n_j – *кінець дуги*.

Приклад 1. У родині троє дітей: Олена, Микола, Петро; $G = < O, M, П >, \quad \rho \subset G \times G, \quad \rho = \{< M, O >, < M, П >, < П, O >, < П, M >\}$ (рис. 1). Відношення $x \rho y$ – це відношення «*x* є братом *y*».

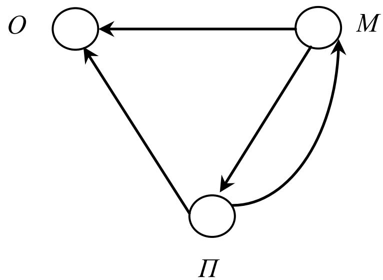


Рисунок 1 – Граф бінарного відношення «бути братом»

Часто *граф* визначають, як пару $Г = < N, E >,$ де N – множина вершин, а E – множина зв'язків (*ребер*), не розглядаючи напрямок на ребрі, якщо він не важливий.

Історія графів починається з *роботи Ейлера* 1736 р. про кенігсберські мости: чи можна здійснити прогулянку мостами міста, пройшовши по кожному раз. Якщо *a, b, c, d* позначають відокремлені одна від одної частини міста, а ребра, що зв'язують ці літери – мости, то задача зводиться до вивчення графу, який зображено на рис. 2. Тут немає стрілок на ребрах. Графи, в яких є напрямок дуг, називають орієнтованими графами (орграфами), в іншому разі – неорієнтованими.

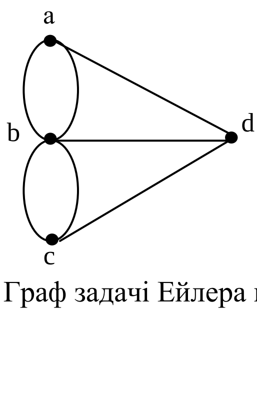


Рисунок 2 – Граф задачі Ейлера про мости

У середині минулого століття *Кірхгоф* застосував графи до аналізу електричних ланцюгів, а *Келі* досліджував графи, пов'язані зі структурою складних органічних молекул.

Теорія графів як математична дисципліна сформувалася до середини 30-х рр. XX ст. Великий внесок у розвиток її зробили *Д. Кенінг, Л. Понтрягін, А. Зиков, В. Візінг* та інші.

Перерахуємо декілька галузей науки та техніки, де зараз ефективно застосовуються графи:

– аналіз і синтез ланцюгів і систем в цілому;
– проектування та дослідження каналів зв'язку;
– побудова схем обчислювальної (комп'ютерної) техніки;
– сітьове планування і керування;
– задачі теорії дослідження операції;
– оптимізаційні задачі на транспортних сітках (максимізація потоків, маршрутизація тощо);
– моделювання різних систем певних організмів (нервова система, кровообіг тощо);
– мережа комп'ютерів.

Тільки перерахування цих застосувань теорії графів показує важливість її для проблем інформатики та кібернетики.

2. Властивості орієнтованих графів

Підграфом Γ_A графа $\Gamma = < N, S >$ називається граф $\Gamma_A = < A, S_A >,$ в який входить *лише частина* $A \subset N$ з множини N вершин графа Γ, *разом з дугами*, що їх з'єднують (можливо не всіма), $S_A \subseteq A$.

Частковим графом (*суграфом*) графа $\Gamma = < N, S >$ називається граф Γ_p, який містить *всі вершини* графа Γ та частину дуг, що їх з'єднують, $S_p \subset S$, $\Gamma_p = \left\langle N, S_p \right\rangle$.

Частиною (або частковим підграфом) графа $\Gamma = < N, S >$ називається граф $\Gamma' = < N', S' >$, якщо $N' \subset N$, $S' \subset S$.

Дуга u, що з'єднуються з вершиною v, називається *інцидентною* вершині v, а вершина v – *коінцидентною* дузі u.

Для врахування ізольованих вершин, тобто вершин, які не коінцидентні жодній дузі, розширяють поняття графа до сукупності вигляду $\Gamma =< N, S_1, S_2 >$, $S_1 \subset N$, $S_2 \subset N \times N$, де унарне відношення S_1 визначає ізольовані вершини, а бінарне S_2 – дуги.

Можна сказати, що:

– при виділенні з графа $\Gamma =< N, S_1, S_2 >$ дуг одержуємо *частковий граф* $\Gamma_p =< N, S_1, p >$ (де $p \subset S_2$) графа Γ;

– при *видаленні вершин та інцидентних їм дуг – підграф* $\Gamma_A =< A, S_1', S_2' >$, (де $A \subset N$, $S_1' \subset S_1$, $S_2' \subset S_2$) графа Γ;

– при подальшому *видаленнні дуг з підграфу* Γ_A графа Γ – *частковий підграф* графа Γ.

Ілюстрація цих понять наведена далі на рис. 3 (граф Г), на рис. 4 (його підграф), на рис. 5 (його частковий граф), на рис. 6 (його частковий підграф).

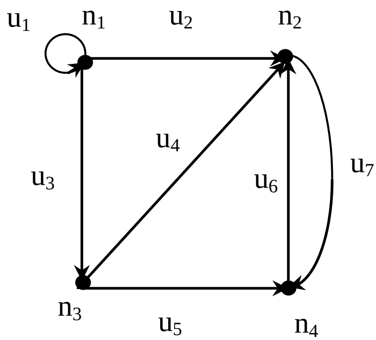


Рисунок 3 – Граф Г

Приклад 2. Нехай $\Gamma =< N, S >$ – граф, що моделює карту автомобільних доріг України. Тоді *карта* автомобільних доріг, що зв'язує населені пункти Полтавської *області – підграф* графа Γ, а карта *головних* шосейних доріг України – *частковий граф* графа Γ. Карта доріг *між райцентрами і Полтавою – частковий підграф*.

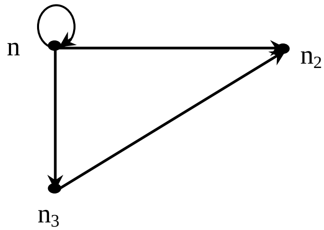


Рисунок 4 – Підграф графа Г

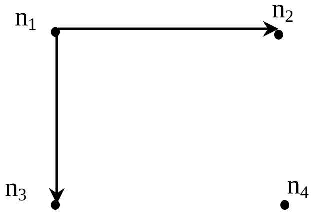


Рисунок 5 – Частковий граф графа Г

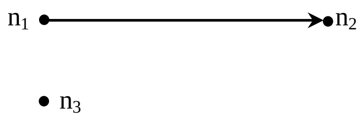


Рисунок 6 – Частина графу *Г* (частковий підграф графа *Г*)

Шляхом у графі *Г* називають таку послідовність μ дуг u_i $\mu = (u_1, \ldots, u_к)$, в якій кінець попередньої дуги збігається з початком наступної: $u_i = \left(n_{\alpha_i}, n_{\alpha_{i+1}}\right)$, $u_{i+1} = \left(n_{\alpha_{i+1}}, n_{\alpha_{i+2}}\right)$, α_i – номер вершини, $i = 1, 2, \ldots, к - 1$. Шлях можна позначати також послідовністю вершин $n_{\alpha_1}, \ldots, n_{\alpha_{k+1}}$, де $u_i = \left(n_{\alpha_i}, n_{\alpha_{i+1}}\right)$.

Приклад 3. Шляхами в графі *Г* на рис. 3 є $\mu_1 = (n_1, n_2, n_4, n_2)$;

$$\mu_2 = (n_1, n_3, n_2, n_4);$$

$$\mu_3 = ((n_1, n_2), (n_2, n_4), (n_4, n_2), (n_2, n_4)) = (n_1, n_2, n_4, n_2, n_4).$$

Довжиною шляху $\mu = (u_1, \ldots, u_k)$ називають кількість дуг *k*, що його складають. Інколи дугам приписують деяку «вагу», наприклад, довжину дуги $l(u_1)$. Тоді довжина $l(\mu)$ шляху μ – це сума довжин дуг шляху:

$$l(\mu) = \sum_{i=1}^{k} l(u_i).$$

Шлях, в якому жодна *дуга не зустрічається* двічі називається *простим*. Шлях, в якому жодна *вершина не зустрічається двічі* називається *елементарним*.

Приклад 4. Шлях μ_2 з попереднього прикладу є елементарним, шлях μ_1 – простий, шлях μ_3 не є ні простим, ні елементарним.

Контуром називається *скінчений шлях* $\mu = (n_1, ..., n_k)$, у якого *початкова* вершина збігається *з кінцевою* $n_1 = n_k$. Якщо серед вершин $n_1, ..., n_{k-1}$ немає однакових, то *контур* μ називають *елементарним*.

Приклад 5. На рис. 7 шляхи $\mu_1 = (n_1, n_3, n_5, n_2, n_1)$, $\mu_2 = (n_1, n_3, n_2, n_3, n_5, n_2, n_1)$ є контурами. Причому μ_1 – елементарний контур, а μ_2 не є елементарним контуром.

Контур (a, a), утворений *однією вершиною a* (дугою (a, a)) називається *петлею*. На рис. 3 граф Г має в вершині n_1 петлю (n_1, n_1).

Часто графи задають *матрицями суміжності та інцидентності.*

Вершини n_1, n_2 називають *суміжними*, якщо $n_1 \neq n_2$ та існує дуга (n_1, n_2).

Нехай $n_1, ..., n_к$ – вершини графа, позначимо:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \ \textit{якщо є дуга } (n_i, n_j), \\ 0, \ \textit{якщо такої дуги немає.} \end{cases}$$

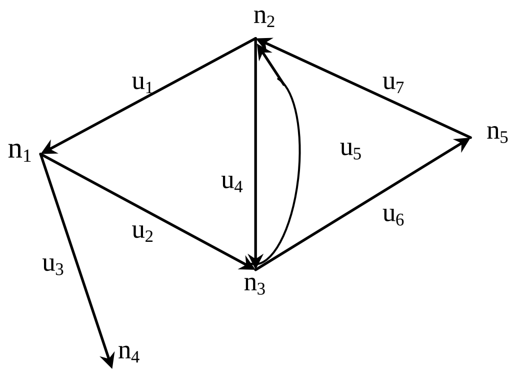


Рисунок 7 – Граф з контурами

Квадратна матриця $R=\left(r_{ij}\right)$ порядку $k\times k$ називається *матрицею суміжності.*

Приклад 6. Матриці суміжності R_1 та R_2 для графів на рис. 3 та 7 відповідно мають вигляд:

$$R_1=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix};\ R_2=\begin{pmatrix}0&0&1&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Нехай $n_1,...,n_к$ – вершини, $u_1,...,u_m$ – дуги графа $Г$ (без петель), позначимо:

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & якщо\ дуга\ u_j\ виходить\ з\ вершини\ n_i,\\ -1, & якщо\ дуга\ u_j\ входить\ в\ вершину\ n_i,\\ 0, & якщо\ дуга\ u_j\ не\ інцидентна\ вершині\ n_i.\end{cases}$$

Матрицю $P=\left(p_{ij}\right)$ порядку $k\times m$ називають *матрицею інциденцій* дуг графа *без петель.*

Приклад 7. Для графа, що заданий рис. 7, матриця інциденцій дуг має вигляд:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} j=1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ P= & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} i=1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

Граф ***з петлями*** задається двома матрицями $P^+ = \left(p_{ij}^+\right)$ і $P^- = \left(p_{ij}^-\right)$ порядку $k \times m$, що відображають інцидентність дуг і вершин. Нехай $n_1,...,n_к$ – вершини, $u_1,...,u_m$ – дуги графа Γ, позначимо:

$$p_{ij}^+ = \begin{cases} 1, \; \textit{якщо дуга } u_j \textit{ виходить з вершини } n_i, \\ 0, \; \textit{в іншому разі;} \end{cases}$$

$$p_{ij}^- = \begin{cases} 1, \; \textit{якщо дуга } u_j \textit{ входить в вершину } n_i, \\ 0, \; \textit{в іншому разі.} \end{cases}$$

Якщо граф Γ без петель, то $P = P^+ - P^-$.

Приклад 8. Побудуємо матриці інциденцій P^+ та P^- для графа, що зображений на рис. 3.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} j= 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ P^+ = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} i=1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

$$P^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Властивості неорієнтованих графів

У неорієнтованих графах поняття, введені для орієнтованих графів, замінюються на такі:

– «дуга» на *«ребро»*;
– «шлях» на *«маршрут»*;
– «контур» на *«цикл»*.

Ребро – це відрізок, що з’єднує дві вершини.

Маршрут – послідовність ребер, які одне з одним з’єднуються вершинами. Часто простий маршрут називають ланцюгом.

Цикл – маршрут, у якого початкова і кінцева вершини збігаються.

Приклад 9. Граф на рис. 8 – неорієнтований. Ребра його – це u_1, u_2, u_3, u_4.

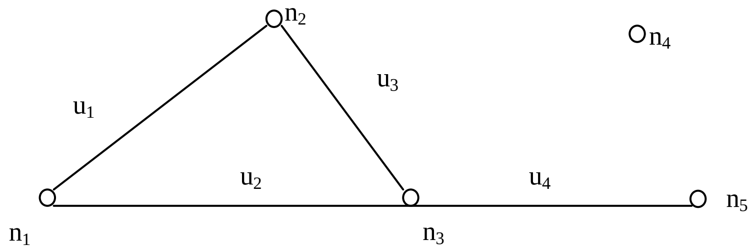


Рисунок 8 – Неорієнтований граф

Приклади маршрутів: $\mu_1 = (u_1, u_2, u_4)$; $\mu_2 = (u_3, u_1, u_2, u_4)$; $\mu_3 = (u_2, u_3, u_1) = (n_1, n_3, n_2, n_1)$. Останній з маршрутів (μ_3) є циклом.

Описати неорієнтовний граф *Г*, як зазначено раніше, можна парою $< N, E >$, де N – множина вершин, E – множина ребер. Часто більш зручним є використання матриць суміжності та інцидентності.

Вершини *x* та *y* називають *суміжними*, якщо існує ребро, що їх з'єднує, і це ребро називають *інцидентним вершинам x* та *y*.

Матриця суміжності $R=\left(r_{ij}\right)$ будується так:

$$r_{ij}=\begin{cases}1, \textit{ якщо є ребро } \left(n_i, n_j\right); \\ 0 \textit{ в іншому разі.}\end{cases}$$

Матриця інциденцій $P=\left(p_{ij}\right)$ визначається так:

$$p_{ij}=\begin{cases}1, \textit{ якщо ребро } u_j \textit{ інцидентне вершині } n_i; \\ 0 \textit{ в іншому разі.}\end{cases}$$

Приклад 10. Матриці суміжності та інцидентності для графа з рис. 8 мають вигляд:

$$R=\begin{array}{c} i=\;1\;2\;3\;4\;5 \\ \begin{pmatrix} 0&1&1&0&0 \\ 1&0&1&0&0 \\ 1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} \\ i=1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5\end{array}; \quad P=\begin{array}{c} j=\;1\;2\;3\;4 \\ \begin{pmatrix} 1&1&0&0 \\ 1&0&1&0 \\ 0&1&1&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} \\ i=1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5\end{array}$$

Зазначимо, що матриця суміжності неорієнтованого графа є симетричною відносно головної діагоналі. Для графа Γ з вершинами $n_1,...,n_к$ та ребрами $u_1,\ldots,u_m$ матриця $R=\left(r_{ij}\right)$ має порядок $k\times k$, матриця $P=\left(p_{ij}\right)$ порядок $k\times m$.

Степенем d_x вершини *x* називають кількість ребер, інцидентних вершині *x*.

Приклад 11. Граф на рис. 8 має: $d_1=2;$ $d_2=2;$ $d_3=3;$ $d_4=0;$ $d_5=1.$

Якщо $d_x=1,$ то вершину *x* називають *тупиковою*, якщо $d_x=0$ – *ізольованою*.

Не важко бачити, що *сума всіх степенів* у графі без ізольованих вершин з m ребрами дорівнює $2m$, оскільки кожне ребро інцидентне двом вершинам. Як наслідок, маємо, що в кожному графі число вершин непарного степеня – парне.

Поняття *«підграф»* і *«частинний граф»* аналогічні відповідним поняттям для орієнтованого графа.

Для неорієнтованого графа вводиться поняття *зв'язності*.

Граф називається *зв'язним*, якщо будь-які його вершини можна *з'єднати маршрутом.*

Якщо граф $Г$ не зв'язаний, то його можна розбити на такі підграфи $Г_i$, які будуть зв'язні. Такі підграфи називають *компонентами зв'язності* графа $Г$.

Для орієнтованого графа зв'язність визначають не звертаючи увагу на орієнтацію дуг. Вводиться для орграфа також поняття *сильної зв'язності*.

Орграф називається *сильно зв'язним*, якщо для *будь-яких двох вершин* x та y існує шлях, що йде з x в y $\left(x \neq y\right)$.

Приклад 12. На рис. 8. граф не зв'язаний, якщо відкинути вершину n_4, то він стає зв'язним. На рис. 9 граф не зв'язний. Він має 2 компоненти зв'язності, кожна з яких є зв'язним графом. Орграф, зображений на рис. 7, є зв'язним, але не є сильно зв'язним. На рис. 10 наведено приклад сильно зв'язного орграфу.

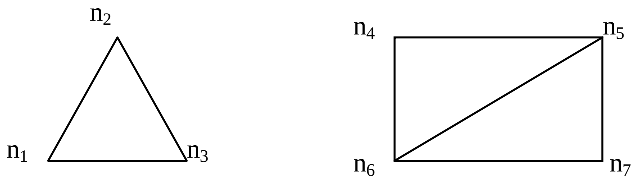


Рисунок 9 – Граф з двома компонентами зв'язності

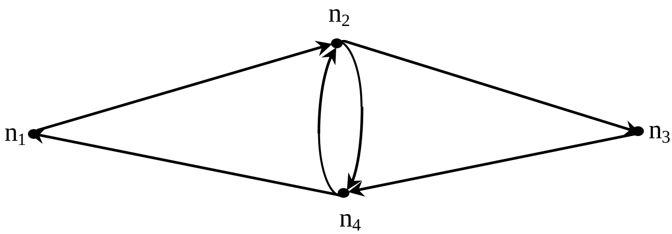


Рисунок 10 – Сильно зв'язний орграф

4. Різні типи графів

Важливим у застосуванні графів є частковий випадок неорієнтованого графу – *скінчений зв'язний неорієнтований граф D, що не має циклів, або дерево.*

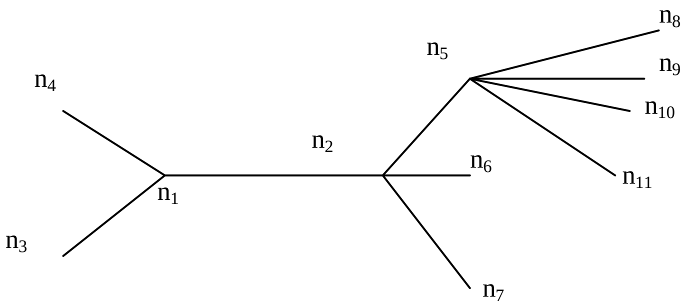


Рисунок 11 – Дерево D

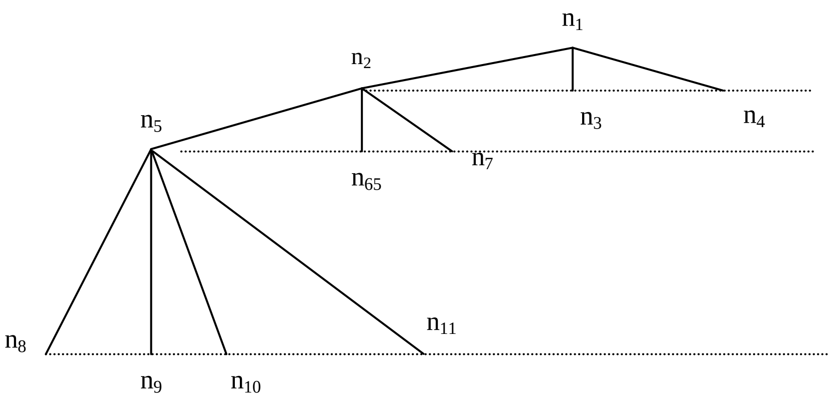


Рисунок 12 – Інший вигляд дерева D з рис. 11

Як правило, дерево будують таким чином. Вибирають деяку вершину (наприклад, у *D* на рис. 11 n_1). Далі малюють ребра інцидентні n_1. Одержують суміжні з n_1 вершини (n_2, n_3, n_4 в прикладі рис. 11). Цей процес продовжують, одержуючи все дерево (рис. 12), при цьому n_1 називають *коренем*, ланцюги з початком n_1 і кінцем в одній з вершин $n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_6, n_7, n_3, n_4$ називають *гілками*, а вершини (тупикові) $n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_6, n_7, n_3, n_4$ – *листками*.

Очевидно, що *будь-яке дерево з* m *ребрами має* $m+1$ *вершину*.

Якщо пара вершин графу з'єднана двома або більшим числом ребер (дуг), то останні називаються *паралельними*, або кратними. Кількість ребер (дуг) називають *кратністю* ребра (дуги).

Вершинам та (або) ребрам (дугам) можна приписувати (задавати) будь-яку *«вагу»* (не обов'язково різну). Один зі способів задання ваги дугам (ребрам) – це підрахування їх кратності.

Кратність відображають в спеціальних вагових матрицях, або в *матрицях інциденції (для дуг (ребер)*, проставляючи кратності відповідної дуги (ребра) замість одиниці.

Приклад 13. Для графа, зображеного на рис. 2, маємо таку матрицю інцидентності, у якій враховано кратність ребер:

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1=(a,b) & 2=(b,c) & 3=(a,d) & 4=(b,d) & 5=(c,d) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}$$

Граф без петель і кратних ребер називають *простим* або *звичайним*.

Граф без петель, але з кратними ребрами називають *мультиграфом*.

Якщо граф має і петлі, і кратні ребра, то його називають *псевдографом*.

Приклад 14. Граф у задачі Ейлера про кенігсберські мости – це мультиграф. Граф рис. 13 – це псевдограф (є паралельні ребра u_3, u_4, петля u_6).

Простий граф, в якому всі вершини з'єднані ребрами називають *повним* (див. рис. 14). Граф, якщо він повний і має n вершин, позначають F_n.

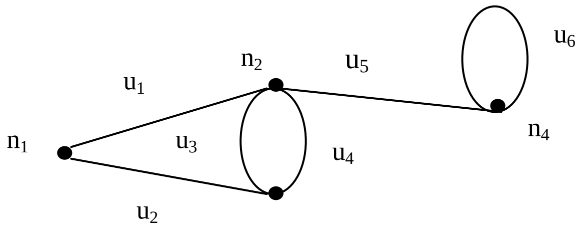


Рисунок 13 – Приклад псевдографа

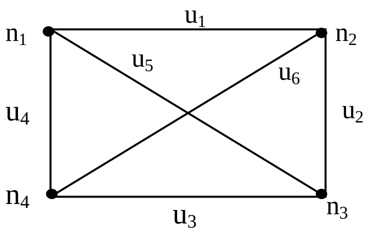


Рисунок 14 – Приклад повного графа F_4

Якщо граф простий, та його множина вершин N може бути розбита на підмножини N_1 та N_2 ($N_1 \cap N_2 = \varnothing$, $N_1 \neq \varnothing$, $N_2 \neq \varnothing$) такі, що не існує ребер, що з'єднують вершини однієї і тієї ж підмножини, то цей граф називають *дводольним* (двочастковим, біграфом).

На рис. 15 наведено приклад дводольного графа. Вершини n_1, n_2, n_3 складають множину N_1, а інші – N_2.

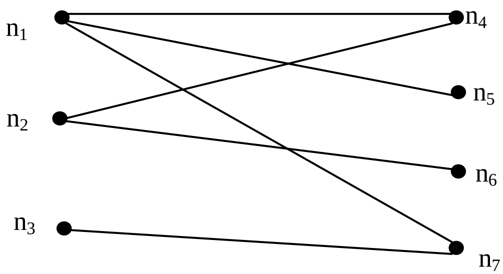


Рисунок 15 – Приклад дводольного графа

Повний дводольний граф – це дводольний граф, в якому всі вершини з N_1 з'єднані з усіма N_2.

Повний дводольний граф будемо позначати $K_{|N_1|,|N_2|}$, де N_1, N_2 підмножина множини вершин, що визначають двудольний граф.

5. Операції над графами

Об'єднанням графів $\Gamma_1 = \langle N_1, E_1 \rangle$, $\Gamma_2 = \langle N_2, E_2 \rangle$ називається граф $\Gamma = \langle N_1 \cup N_2; E_1 \cup E_2 \rangle$. Позначатимемо $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Приклади об'єднання на рис. 16, 17.

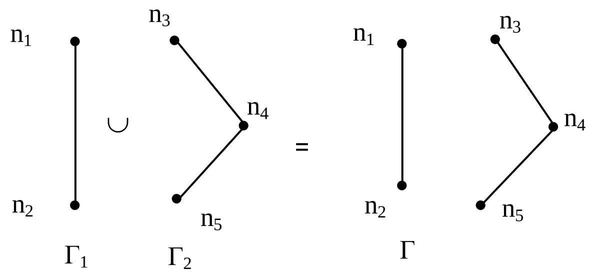


Рисунок 16 – Приклад незв'язного графа як об'єднання графів

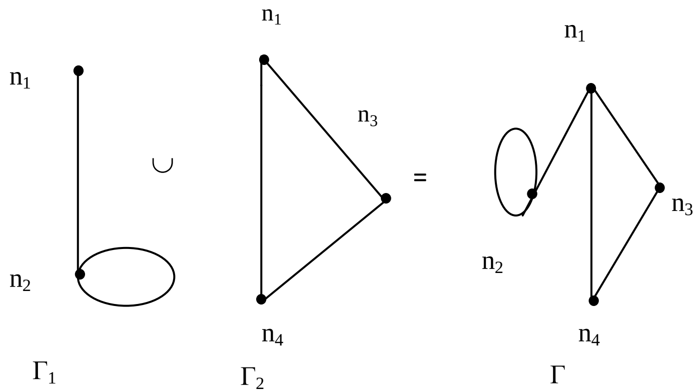


Рисунок 17 – Приклад об'єднання графів

Граф $\Gamma = \langle V, E \rangle$ називається *сумою* графів $\Gamma_1 = \langle N_1, E_1 \rangle$, $\Gamma_2 = \langle N_2, E_2 \rangle$ (позначається $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$), якщо Γ є об'єднанням графів Γ_1, Γ_2 і дводольного повного графа $K_{|A|,|B|}$, де $A = N_1 \setminus (N_1 \cap N_2)$; $B = N_2 \setminus (N_1 \cap N_2)$. Тобто $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup K_{|A|,|B|}$.

Тобто, щоб знайти суму $\Gamma_1 + \Gamma_2$, визначають об'єднання $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ і кожну вершину $n_i \in N_1$, яка не війшла в переріз $N_1 \cap N_2$, з'єднують ребром з кожною вершиною $n_j \in N_2$, яка не ввійшла в переріз $N_1 \cap N_2$ (див. рис. 18, 19).

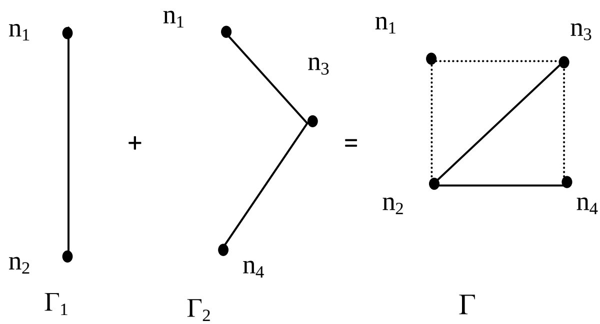


Рисунок 18 – Приклад суми (Γ_2 – неповний граф)

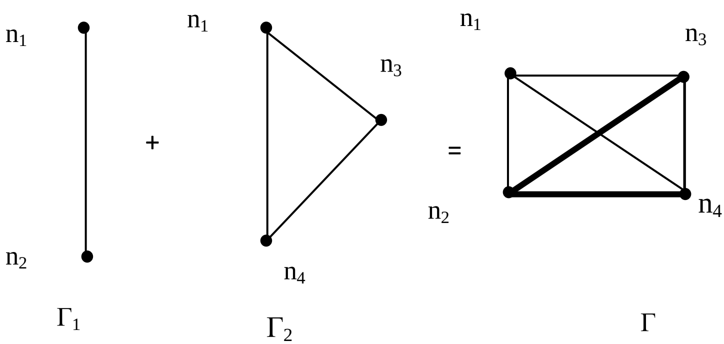


Рисунок 19 – Приклад суми повних графів

Лекція 14. Ейлерові графи. Дерева, властивості дерев. Планарні графи, необхідні та достатні умови планарності. Теорема про п'ять фарб

1. Ейлерові та гамільтонові графи

Цикл називається *ейлеровим,* якщо кожне ребро графа належить йому один раз. Зауважимо, що ейлеровий цикл – простий (бо ребро належить йому раз).

Граф, що має ейлеровий цикл, називають *ейлеровим графом* (рис. 1). На рис. 1 цикл, що *починається в вершині а складається з дуг* $u_2, u_1, u_3, u_4, u_6, u_5$.

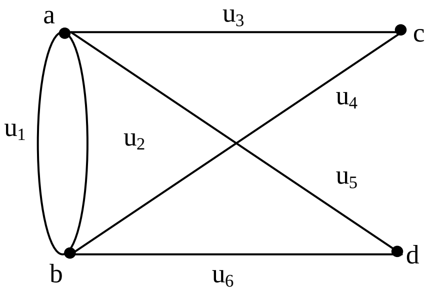


Рисунок 1 – Приклад ейлерового графа з ейлеровим циклом

Простий критерій перевірки, чи є граф ейлеровим, дає наступна теорема.

Теорема 1. Для того, щоб граф $\Gamma = \langle N, E \rangle$ був ейлеровим, необхідно і достатньо, щоб він був зв'язаним і степінь d_x кожної вершини $x \in N$ був парним: $d_x = 2n,\ n$ – натуральне.

Таким чином, розглянута раніше задача про кенігсберські мости може бути переформульована так: чи є граф цієї задачі ейлеровим. А теорема 1 дає відповідь: ні, оскільки хоч він і зв'язний, але степені всіх вершин цього графа непарні: $d_a = d_d = d_c = 3;\ d_b = 5$. Щоб обійти ділянки землі по мостам, потрібно, щоб до кожної була парна кількість мостів, і всі ділянки були зв'язані мостами.

Цикл називається гамільтонів, якщо він елементарний і проходить через *кожну* вершину графа. Зауважимо, що елементарний цикл є одночасно і простим циклом.

Граф, що містить такий цикл, називається *гамільтонів*.

На рис. 2 наведено гамільтонів граф із гамільтоновим циклом $\mu = \{(n_1, n_3), (n_3, n_5), (n_5, n_2), (n_2, n_4), (n_4, n_1)\}$.

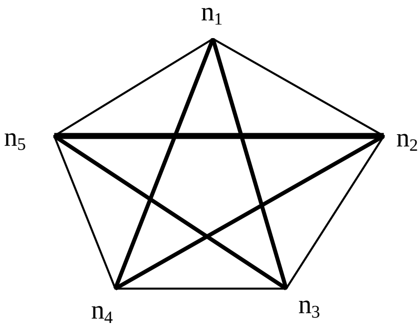


Рисунок 2 – Приклад гамільтонового графа F_5

Зі знаходженням гамільтонового циклу пов'язана відома задача про комівояжера. Відомі відстані між n містами. Треба об'їхати їх, побувавши в кожному раз і повернувшись в місто початкового перебування, мінізувавши сумарну відстань, що буде проїхана. З гамільтоновим циклом пов'язана задача про те, як вийти з лабірінту.

Наступна теорема дає *достатню умову* гамільтоновості графа.

Теорема 2 (Теорема Дірака). Якщо граф $\Gamma = \langle N, E \rangle$, $|N| \geq 3$ є зв'язним і степінь d_x кожної вершини $x \in N$ задовольняє умові

$$d_x \geq \frac{1}{2}|N|,$$

то граф є гамільтоновим.

Наслідок з теореми 2. У повному графі з кількістю вершин $|N| \geq 3$ *завжди існує гамільтонів цикл*, тобто повний граф – гамільтонів.

Ілюстрацією цього наслідку для $|N| = 5$ є рис. 2 графа F_5.

Для дослідження властивостей графа *Г*, що має цикли, зручно використовувати спеціальну матрицю, що їх описує.

Означення 1. *Цикломатичною матрицею* $C(\Gamma)$ графа *Г* називається матриця, що складається з рядків (векторів циклу) C_i, які взаємно однозначно відповідають всім *елементарним циклам* графа *Г*, а елементи c_{ij} рядка C_i означаются так:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \ \textit{якщо ребро } u_j \textit{ входить в цикл } i; \\ 0, \ \textit{в іншому разі.} \end{cases}$$

Приклад 1. Нехай задано граф, що зображено на рис. 3.

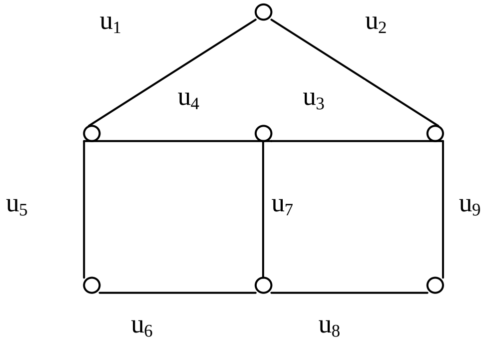


Рисунок 3 – Граф з циклами

Його елементарні цикли такі: 1-й: u_1, u_2, u_3, u_4; 2-й: u_4, u_5, u_6, u_7; 3-й: u_3, u_7, u_8, u_9; 4-й: $u_1, u_2, u_9, u_8, u_7, u_4$; 5-й: $u_3, u_9, u_8, u_6, u_5, u_4$; 6-й: $u_1, u_2, u_3, u_7, u_6, u_5$; 7-й: $u_1, u_2, u_9, u_8, u_6, u_5$. Тому цикломатична матриця цього графа має вигляд (згори матриці написані дуги u_j, а справа – цикли (позначені рядками C_i)):

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \end{array} \\
C(\Gamma)= & \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{array}
\end{array}
$$

Введемо *операцію* над рядками (далі будемо казати і над циклами) C_i матриці $C(\Gamma)$ так:

$$C_i \oplus C_j = C_k, \tag{1}$$

де операція $\oplus$ називається порозрядною сумою за модулем 2 та визначається в кожному розряді (стовпці, елементі вектора) такою таблицею:

$$0 \oplus 0 = 0;$$

$$0 \oplus 1 = 1;$$

$$1 \oplus 0 = 1;$$

$$1 \oplus 1 = 0.$$

Ця операція має властивості:

– вектор C_k, що визначається формулою (1), *визначає цикл графа Г*, отже $C_k \in C(\Gamma)$;

– $C_i \oplus C_j = C_j \oplus C_i \quad \forall C_i, C_j \in C(\Gamma)$ (*комутативність*);

– $\left(C_i \oplus C_j\right) \oplus C_k = C_i \oplus \left(C_j \oplus C_k\right) \quad \forall C_i, C_j, C_k \in C(\Gamma)$ (*асоціатівність*).

Множину всіх векторів $\{C_i \in C(\Gamma)\} = C(\Gamma)$ – векторний простір з операцією $\oplus$ – називають *простором циклів графа Г*. Нагадаємо, що він складається з елементарних циклів.

Вектор C_0 називається *лінійною комбінацією* векторів циклів $C_1, C_2, \ldots, C_n$, якщо він може бути представлений як порозрядна *сума за модулем 2* деяких $m \le n$ з цих векторів:

$$C_0 = C_{i_1} \oplus C_{i_2} \oplus \ldots \oplus C_{i_m} = \bigoplus_{j=1}^{m} C_{i_j};\ C_{i_j} \in C(\Gamma)\ \ \forall i_j \in J_n.$$

Найменша кількість векторів простору, через які можна представляти інші вектори циклів як лінійні комбінації векторів, називається *базисом простору циклів*.

Базисом циклів графа Г називається *базис простору циклів графа Г*. (Нагадаємо, що він складається з *елементарних циклів*). Вектори базису циклів ще називають *базисними циклами*.

Приклад 2. Для матриці з попереднього прикладу базисом є C_2, C_3, C_6, оскільки

$$C_1 = C_2 \oplus C_6;\ C_4 = C_2 \oplus C_3 \oplus C_6;\ C_5 = C_2 \oplus C_3;\ C_7 = C_3 \oplus C_6.$$

Базисом є також вектори C_1, C_2, C_3, бо:

$$C_4 = C_1 \oplus C_3;\ C_5 = C_2 \oplus C_3;\ C_6 = C_1 \oplus C_2;\ C_7 = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3.$$

Очевидно, що менше, ніж 3 вектори взяти не можна для утворення базису в цьому прикладі.

Кістяком називають кістяковий підграф (нагадаємо, що це теж саме, що і *частковий граф*, або суграф), *що є деревом*, тобто зв'язним графом без циклів.

Хордою кістяка *К* у зв'язному графі *Г* називають будь-яке *ребро* графа *Г*, що *не належить* кістяку *К*.

Очевидно, що якщо граф складається з *кістяка і хорди*, то він має рівно *один цикл.*

Означення 2. *Цикломатичним* числом $\nu(\Gamma)$ графа Г називають *кількість хорд* будь-якого *кістяка* в *Г*.

Приклад 3. Рис. 4 дає один з кістяків графу *Г* рис. 3. Хордами є ребра u_2, u_4, u_9, їх три, отже $\nu(\Gamma) = 3$.

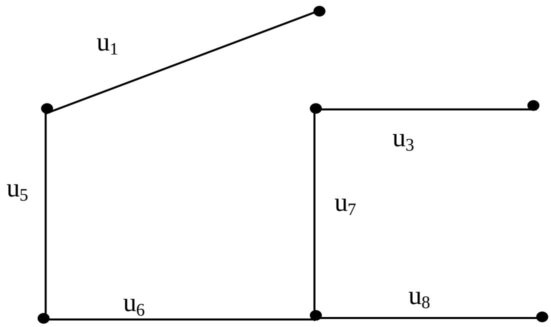


Рисунок 4 – Приклад кістяка

Лісом називається незв'язний граф, що *не містить циклів*. Тобто ліс – це граф, у якого кожна компонента зв'язності є деревом.

Як було зазаначено раніше, для дерева з n вершинами та m ребрами справедливо очевидне співвідношення:

$$n = m + 1,$$

або

$$m = n - 1.$$

Отже, для лісу з k компонентами зв'язності, кожна з яких має m_i ребер та n_i вершини, маємо:

$$m_i = n_i - 1,$$

або

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} n_i - k \ .$$

Якщо позначити n – кількість вершин, а m – кількість ребер у лісі, то остання формула набуде вигляду

$$m = n - k.$$

Якщо *зв'язний* граф Г має *n вершин* і *m ребер*, то, очевидно, кількість хорд дорівнює: $\nu = \nu(\Gamma) = m - n + 1$ (різниця кількості ребер *m* у графі та кількості ребер у дереві). Якщо ж у графі *Г k* компонент зв'язності, то:

$$\nu = \nu\left(\Gamma\right) = m - n + k = m - \left(n - k\right).$$

Отже, *цикломатичне число* визначає *міру зв'язності* графа. (Для лісу (в т. ч. дерева) $\nu = 0$, для графа з одним циклом $\nu = 1$).

Кількість векторів базису циклів графа Г та його цикломатичне число пов'язані, що визначає така теорема.

Теорема 1 (Ейлера). Кількість базисних циклів графа дорівнює його цикломатичному числу.

Кістяковим лісом називається граф, кожна компонента якого є кістяком, або ще кажуть *кістяковим деревом*.

Базисною системою циклів для даного *кістякового лісу К* графа *Г* називається множина *всіх* елементарних *циклів* графа *Г*, кожен з яких містить *тільки одну* хорду з К.

Ця система є базисом простору циклів.

Приклад 4. Для кістяка з рис. 4 базисною є система C_2, C_3, C_6. Випишемо ці рядки в матрицю $C_б\left(\Gamma\right)$, переставивши стовпці таким чином:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} u_2 & u_4 & u_9 & u_1 & u_3 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{array} & \\
C_б\left(\Gamma\right) = \left(\begin{array}{ccccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\underbrace{1 \;\; 0 \;\; 0}_{\text{хорди}} & & & \underbrace{1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0}_{\text{кістяк}} & & & & &
\end{array}\right) & \begin{array}{c} C_2 \\ C_3 \\ C_6 \end{array}
\end{array}$$

Складена таким чином матриця називається *базисною цикломатичною матрицею відносно кістяка К.*

Виконуючи $2^{\nu} - \nu - 1 = \sum_{i=0}^{\nu} C_{\nu}^{i} - C_{\nu}^{1} - C_{\nu}^{0}$ раз операцію $\oplus$ над базисними циклами, одержуємо всю множину циклів даного простору.

Властивості циклів визначають той чи інший клас графів. Розглянемо, яку властивість мають *цикли двудольних графів*.

Теорема 2. Граф є *двудольним* тоді і тільки тоді, коли *всі його цикли мають парну довжину*.

Зазначимо, що повний двудольний граф $K_{m,n}$ має $m+n$ вершин та mn ребер. Повний двудольний граф $K_{1,n}$ називають зірковим графом (зіркою) і він є деревом. Зазначимо також, що кожне *дерево є двудольним графом* (вершини з множин N_1 та N_2 є суміжним у дереві). Всі цикли дерева мають нульову довжину (їх немає).

Розглянемо *алгоритм побудови кістякового лісу* (дерева, якщо граф зв'язний) заданого неорієнтіровного графа *Г*: для цього послідовно перебираються ребра графа *Г, виключається те ребро*, яке утворює *цикл* з вже переглянутими ребрами.

Приклад 5. Побудуємо за цим алгоритмом кістяк для графа з рис. 3.

Позначаємо з u_1, сусідні u_2, u_4, u_5, вибираємо довільне (u_4), оскільке жодне з них не утворює цикла; далі можна вибрати u_3, u_7, беремо u_3; далі u_2, u_9, але u_2 не можна брати утворюється цикл, беремо u_9. Далі єдина можливість u_8. Далі – або u_7, або u_6; u_7 – не можна – утворюєтся цикл. Після u_6 можна брати u_5, але утворюється цикл. Оскільки всі ребра перебрано, то побудовано дерево, яке вийшло маршрутом через усі вершини. Маршрут простий, отже це – ланцюг (див. рис. 5).

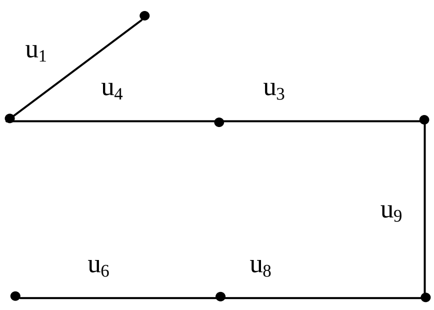


Рисунок 5 – Побудова кістяка

У зваженому графі ставлять задачу визначити кістяк (кістяковий ліс у випадку незв'язного графа), з *мінімальною загальною вагою ребер*. Таке дерево (ліс) називають мінімальним кістяком (кістяковим лісом).

Поставлена задача розв'язується наступним алгоритмом.

Алгоритм. (Жадібний алгоритм Краскала)

Упорядкуємо ребра за зростанням ваги. Далі перебираємо послідовно ребра. В дерево (ліс) включається те ребро, яке не утворює цикл з уже переглянутими.

Приклад 6. Побудуємо за цим алгоритмом мінімальний кістяк для графа з рис. 3, вважаючи, що вага ребра u_i дорівнює i, $i=1,...,9$. Результат – на рис. 6. Вага мінімального дерева, що є кістяком, дорівнює 25.

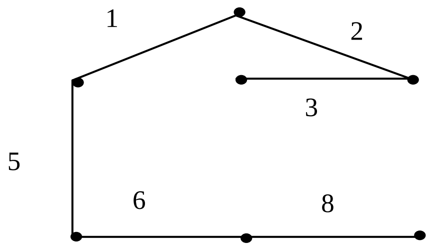


Рисунок 6 – Побудова мінімального кістяка

2. Планарність графів

Означення 3. Два графа $\Gamma_1 =< N_1, E_1 >, \Gamma_2 =< N_2, E_2 >$ називаються *ізоморфними*, якщо існує така взаємно однозначна відповідність між множинами їх вершин N_1, N_2, що вершини $n_1', n_2' \in N_1$ з'єднані ребром $(n_1', n_2') \in E_1$ в тому і тільки тому випадку, коли відповідні їм вершини $n_1'', n_2'' \in N_2$ з'єднані ребром $(n_1'', n'')_2 \in E_2$.

Приклад 7. На рис. 7 наведено чотири ізоморфних між собою графи:

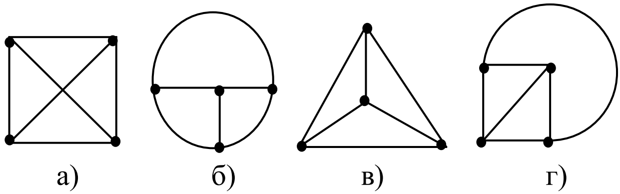


Рисунок 7 – Приклад чотирьох ізоморфних між собою графів

Означення 4. Граф називають *планарним (плоским)* якщо існує ізоморфний йому граф, який може бути намальованим на площині, так, що *ребра перетинаються тільки в вершинах.*

Приклад 8. Графи рис. 7 планарні. Графи на рис. 7 б), в) та г) намальовані без перетину ребер (крім вершин), а граф на рис. 7 а) – F_4, хоч і не такий, але ізоморфний кожному з інших.

На рис. 8 показані графи, які вже розглядалися. Їх називають *графами Понтрягіна-Куратовського,* які *не є планарними*, що доводиться в топології. Вони відіграють фундаментальну роль в теорії планарності.

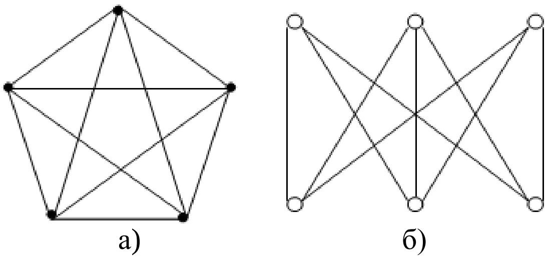
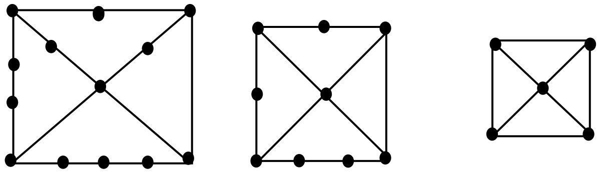


Рисунок 8 – Графи Понтрягіна-Куратовского: а) F_5; б) $K_{3,3}$

Очевидно, що граф залишається планарним, якщо деяке ребро розбити на два новою вершиною або замінити два ребра інцидентні вершині степеня 2 одним ребром, видаливши цю вершину.

Означення 5. Два графи називаються *гомеоморфними* (або ізоморфними з точністю до вершини другого степеня), якщо після видалення вершин другого степеня і заміни інцидентних цим вершинам ребер одним, вони стають ізоморфними.

Приклад 9. На рис. 9 представлені гомеоморфні графи.



а) б) в)

Рисунок 9 – Гомеоморфні графи

Критерій планарності дає таке твердження, доведене незалежно двома вченими (1927, 1930 рр.).

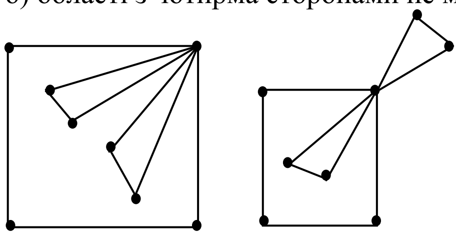
Теорема Понтрягіна-Куратовського. Граф є планарним тоді і тільки тоді, коли він не містить підграфу гомеоморфного одному з графів Понтрягіна-Куратовського ($F_5, K_{3,3}$).

Планарність суттєва, коли моделюються комунікації. Планарні графи моделюють також різні карти, з чим пов'язана так звана «проблема чотирьох фарб».

Якщо планарний граф намальовати на плошині так, що його ребра будуть перетинатися лише в вершинах, то ребра графа розбивають площину на зв'язні області – так звані «країни». Таке розбиття площини називають *планарною картою.*

Дві області (країни) називають суміжними, якщо їх межі мають хоча б одне *спільне ребро* (а не тільки спільну точку).

Зауважимо, що планарні графи можна розташовувати порізному, одержуючи різні карти. Так, на рис. 10 граф а) має область з чотирма сторонами (зовнішня по відношенню до квадрата); граф б) області з чотирма сторонами не має.



а) б)

Рисунок 10 – Два ізоморфних планарних графа з різною кількістю сторін областей

Під *розфарбуванням* планарної карти в k кольорів розуміють фарбування кожної області одним з k кольорів так, щоб жодна пара суміжних областей не була пофарбована одним кольором.

Гіпотеза Френсіса Газрі. Будь-яка планарна карта може бути розфарбована в 4 кольори.

Те, що є карти, для розфарбування яких потрібно принаймі 4 кольори, видно з рис. 11.

Те, що гіпотеза вірна, ще не доведено, але немає прикладу, що 5 фарб дійсно необхідно. Відомо, що 5 фарб достатньо для розфарбування планарної карти.

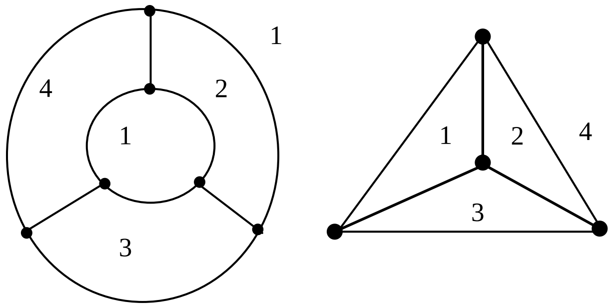


Рисунок 11 – Планарні карти з 5 та 4 областей, що розфарбовані в 4 кольори

Теорема Хівуда. Будь-яка планарна карта може бути розфарбована в 5 кольорів.

Якщо позначити кількість областей планарної карти r, n – кількість вершин, а m – кількість ребер зв'язного графа Γ, що утворює цю планарну карту, то знаменита формула Ейлера задає таке співвідношення:

$$n-m+r=2.$$

Перепишемо її у вигляді:

$$r-1=m-n+1$$

і порівняємо з формулою для цикломатичного числа $\nu(\Gamma)$ зв'язного графа. Маємо:

$$\nu(\Gamma)+1=r,$$

тобто цикломатичне число $\nu(\Gamma)$ на одиницю більше кількості r областей планарного графа Γ.

Лекція 15. Алфавіт, слова, алфавітні відображення. Автомати Мілі та Мура, способи визначення. Генерація алфавітних відображень автоматами. Еквівалентні стани та еквівалентні автомати. Мінімізація скінчених автоматів, алгоритм Ауфенкампа-Хона

1. Означення скінченного автомата

Алфавітом А називають скінчену множину елементів $\{a_i\}_{i=1}^{n}$, кожен елемент якої називають *літерою. Словом* над деяким алфавітом називають будь-яку скінченну послідовність його літер.

Приклад 1. 1) алфавіт, літери і слово будь-якої мови (української, англійської тощо); 2) алфавіт $\{0,1\}$, літера: 0 або 1, слово – довільний набір з нулів та одиниць.

Можна розглядувати *відображення*, що переводить слова алфавіту А в слова алфавіту В (В може бути тим же самим алфавітом А). Таке відображення називають *алфавітним відображенням*. Алфавіт А називають *вхідним*, а алфавіт В – *вихідним*. Сукупність слів, на якій відображення означено називається його *областю визначення*. Якщо область визначення скінченна, то відображення може бути задано *таблицею відповідності*. Алфавітне відображення ще називають алфавітним оператором.

Приклад 2. $A=\{0,1,...,9\}$ – цифри десяткової системи числення; A_{10}^2 – слова з алфавіту А довжини 2 – двозначні числа десяткової системи. $B=\{0,1\}$ – цифри двійкової системи числення, B_2^1 – слова з алфавіту В довжини 1 – однозначні числа двійкової системи числення, тобто 0 та 1. Розглянемо відображення $f: A_{10}^2 \to B_2^1$, що переводить десяткові двозначні числа в двійкові однозначні числа за правилом: парному числу ставиться у відповідність 0, непарному – 1.

Таблиця відповідності цього відображення – це табл. 1, де $a \in A$ – довільна літера з А.

При математичному моделюванні технічних систем дискретної дії (у тому числі і в першу чергу ЕОМ) широко використовується поняття скінченного автомату, яке і виникло (було введено) з метою дослідження та проектування таких систем. Систему (у найбільш загальному вигляді) можна представити як схему зображену на рис. 1, де X – вхідні, а Y – вихідні об'єкти системи (інакше кажучи – слова вхідного та вихідного алфавітів)

Таблиця 1 – Таблиця відповідності

Слова алфавіту А	**Слово алфавіту В**
a0	0
a1	1
a2	0
a3	1
a4	0
a5	1
a6	0
a7	1
a8	0
a9	1

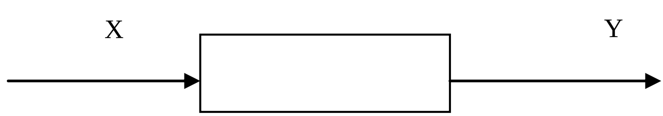


Рисунок 1 – Схема системи

Часом у *дискретних* системах вважають *лінійно упорядковану множину Т*. Як правило, $T = \{t_i\}_{i=0}^{n}$, де $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Елементи t_i множини T називають *тактовими моментами* або *такта-*

ми і часто позначають: 0,1,2,…, вважаючи $\Delta t = 1$. Вважають, що зміни величин у системі відбуваються в ці такти і відбуваються миттєво.

Крім вхідних і вихідних об'єктів системи вводяться об'єкти системи, що називають *станами.* Пояснимо необхідність цього поняття.

У кожній реальній системі вихідний об'єкт залежить від вхідного, але безпосереднього зв'язку між ними немає. Дійсно, реальна подія в момент t не може залежати від того, що в даний момент реально не існує. Події, що відбулися на вході в момент $\tau\left(\tau < t\right)$, у момент t не є реальністю. Тобто вихід у момент t не залежить від входу в момент $\tau < t$. Таким же чином, вихід у момент t не залежить від входу в момент t, оскільки вплив одного явища на інше не може бути миттєвим. Маємо протиріччя: з одного боку вихід залежить від входу, а з іншого – ні. Для розв'язування цього протиріччя *необхідно признати наявність певних об'єктів системи, що зв'язують всю передісторію входів – причин до моменту* t *– та вихід – наслідок у цей момент*. Ці об'єкти називають *станами системи*.

Крім входу, стану та виходу необхідно ввести ще два об'єкта для формалізації системи. Це *відображення (функція) виходу* та *перехідне відображення*. *Відображення виходу* обумовлене тим, що вихід визначається станом, а, отже, існує відображення з множини станів у множину значень, що приймає вихід.

Аналогічно існує зв'язок між входом і станом. Так, якщо в момент t_0 система мала стан x_0, а в момент $t_1 > t_0$ – стан x_1, то зміна стану саме в x_1, а не в деякій іншій обумовлюється дією певного закону поведінки системи. В процесі формалізації цей закон описується у вигляді відображення, яке кожному стану та кожному входу ставить у відповідність певний стан.

Це відображення (функція) залежить від двох моментів часу (як і від параметрів) і називається *перехідним*.

Однією з моделей реальних дискретних систем є скінченний автомат – автомат який має *скінченну пам'ять*.

Означення 1. Скінченним автоматом (СА) називають п'ятірку $\langle A, X, Y, \delta, \lambda \rangle$, де: A, X, Y – скінченні множини, які називають:

A – множина внутрішніх *станів* (або просто множина станів),

X – множина *вхідних сигналів* (*вхідний алфавіт*);

Y – множина *вихідних сигналів* (*вихідний алфавіт*);

а δ та λ – функції:

$\delta : A \times X \to A$ – функція *переходів*; $a(t+1) = \delta(a(t), x(t))$.

$\lambda : A \times X \to Y$ – функція *виходів*: $y(t) = \lambda(a(t), x(t))$.

Скінченні автомати розглядають у двох формах:

1) вихід СА $y(t)$ в даний такт t залежить від його стану $a(t)$ у цьому такті та значення входу $x(t)$:

$$y(t) = \lambda(a(t), x(t)). \tag{1}$$

Цю форму СА ввів Мілі, тому СА з властивістю (1) називають ***автоматом Мілі*** або СА 1-го роду;

2) вихід $y(t)$ СА в даний такт *t* залежить від його стану $a(t)$ в цьому такті і не залежить від значення входу:

$$y(t) = \lambda(a(t)). \tag{2}$$

Ці форми СА ввів Мур. Тепер СА з властивістю, що виражена в (2), називають *автоматом Мура*, або СА 2-го роду.

Функцуіонування будь-якого *дискретного автомата* $\langle A, X, Y, \delta, \lambda \rangle$ (не обов'язково СА), де елементи п'ятірки ті ж що і в означенні СА, але властивість скінченності множин A, X, Y не обов'язкова, полягає в утворенні *двох послідовностей* у дискретному часі $t = t_0, t_1, \ldots$ *при заданій послідовності вхідних сигналів* $x_0, x_1, x_2, ..., x_t, ...,$ а саме:

– *послідовність станів* $a_0, a_1, \ldots, a_t, \ldots;$

– *послідовність вихідних сигналів* $y_0, y_1, \ldots, y_t, \ldots$, де використовуються позначення $x_i = x(t_i), a_i = a(t_i), y_i = y(t_i)$.

Послідовність вхідних сигналів, що належать вхідному алфавіту, довільна, *стан* $a_0 \in A$ – задається. Послідовності $\{a_t\}, \{y_t\}$ визначаються через $\{x_i\}$ та a_0:

$$a_{t+1} = \delta(a_t, x_t),\ t = 0,1,2,\ldots; \quad (3)$$

$$y_t = \lambda(a_t, x_t),\ t = 0,1,2,\ldots. \quad (4)$$

Початкові відрізки $p = x_0 x_1 ... x_t$, $q = y_0 y_1 ... y_t$ вхідної і вихідної послідовностей можна розглядати як *слова з алфавітів X та Y***.** Позначимо X^* множину слів алфавіту *X*, а Y^* – алфавіту *Y*. Отже, слово $q \in Y^*$ однозначно визначається словом $p \in X^*$ і початковим станом *a*. Таким чином, означено *відображення* $\varphi_a : X^* \to Y^*$, яке *називають автоматним відображенням* (або *операторам, представленим в автоматі) при початковому стані a.*

Між автоматами Мілі та Мура є взаємозв'язок, який дозволяє один з них зводити до іншого.

Нехай автомат Мілі задано так:

$$a_1(t+1) = \delta_1(x(t), a_1(t)); \quad (5)$$

$$y_1(t) = \lambda_1(x(t), a_1(t)), \quad (6)$$

а автомат Мура – так:

$$a_2(t+1) = \delta_2(x(t), a_2(t)); \quad (7)$$

$$y_2(t) = \lambda_2(a_2(t)). \quad (8)$$

Введемо в автоматі Мілі новий стан $a_1'(t)$:

$$a_1'(t)=\left(x(t),a_1(t)\right). \quad (9)$$

Тоді з (6) маємо:

$$y_1(t)=\lambda_1\left(a_1'(t)\right). \quad (10)$$

З (9) та (5), при цьому одержуємо

$$a_1'(t+1)=\left(x(t+1),a_1(t+1)\right)=\left(x(t+1),\delta_1\left(x(t),a_1(t)\right)\right)=$$

$$=\delta_1'\left(x(t+1),a_1'(t)\right).$$

Співвідношення (10) означає, що з автомата Мілі отримали автомат Мура. Зворотній перехід здійснюється, якщо підставити

$$a_2(t+1)=a_2'(t). \quad (11)$$

Маємо з (9)-(11):

$$y_2(t)=\lambda_2\left(a_2(t)\right)=\lambda_2\left(a_2'(t-1)\right)=$$

$$=\lambda_2(\delta_2\left(x(t),a_2'(t)\right)=\lambda_2'\left(x(t),a_2'(t)\right).$$

Тобто з автомата Мура отримали автомат Мілі. При цьому з (11) та (7) отримуємо:

$$a_2(t+1)=a_2'(t)=\delta_2\left(x(t),a_2(t)\right).$$

Розглянемо способи представлення СА.

2. Способи задання СА

СА може бути заданий різними способами.

I. Задання СА шляхом словесного опису його функціонування. Розглянемо всі способи на прикладі.

Приклад 3. Задача про ліфт. СА представляє собою пристрій керування ліфтом в будинку з 3-х поверхів. При натисненні на будь-якому поверсі на кнопку з номером потрібного поверху ліфт скеровується на цей поверх.

II. Задання СА перерахуванням елементів множин A,X,Y та відношень між ними.

$A=\{1,2,3\}=\{a_1,a_2,a_3\}$ – номери поверхів, на яких знаходиться ліфт перед натисненням кнопки, $X=\{1,2,3\}=\{x_1,x_2,x_3\}$ – номери кнопок, $Y=\{1,2,3\}=\{y_1,y_2,y_3\}$ – номери поверхів, куди прибуде ліфт після натиснення кнопки; $a_i=i;\ \ x_i=i;\ \ y_i=i;\ \ i=1,2,3.$

Співвідношення таке: $a_0 \in A$ задано:

$$a_{i+1}=\delta(x_i,a_i)=x_i;$$

$$y_i=\lambda(x_i,a_i)=x_i.$$

Стандартними є представлення *таблицями*, графами та *матрицями*.

ІІІ. Задання СА таблицями переходів і виходів.

Таблиця переходів: рядки та стовпці відповідають станам та літерам вхідного алфавіту відповідно. На їх перетині – значення функції переходів.

Для прикладу, що розглядається, ця таблиця має вигляд табл. 2.

Таблиця 2 – Таблиця переходів задачі про ліфт

Стани a_i	**Входи x_i**		
	x_1	x_2	x_3
a_1	a_1	a_2	a_3
a_2	a_1	a_2	a_3
a_3	a_1	a_2	a_3

Таблиця виходів: рядки та стовпці відповідають станам та літерам вхідного алфавіту. На їх перетині – значення функції *виходів*.

Для задачі про ліфт ця таблиця – це табл. 3.

Таблиця 3 – Таблиця виходів задачі про ліфт

Стани a_i	**Входи x_i**		
	x_1	x_2	x_3
a_1	y_1	y_2	y_3
a_2	y_1	y_2	y_3
a_3	y_1	y_2	y_3

Обидві задачі можна об’єднувати в одну – *загальну таблицю переходів*, якщо записувати на перетині рядка та стовпця – пару чисел (наступний стан в чисельнику та літеру вихідного алфавіту).

Приклад загальної таблиці переходів для автомата $X=\{1,2,3\}$; $Y=\{1,2\}$; $A=\{0,1,2\}$ може мати вигляд табл. 4.

Таблиця 4 – Загальна таблиця переходів

Стани	Входи		
	1	2	3
0	0	1	2
	1	1	2
1	0	0	1
	2	1	1
2	2	2	1
	2	2	1

IV. Задання СА графом автомата (граф переходів і виходів).

Граф будується так: вершини – це стани; стани i та j з’єднані ребром (i,j) з вагою x, якщо значення функції переходу для пари (i,x) дорівнює $j: j=\delta(i,x)$. Для автомата Мілі приписують (в знаменнику) ще й значення функції виходу. Замість декількох паралельних дуг часто залишають одну з диз’юнкцією ваг усіх дуг.

Для задачі про ліфти маємо граф автомата, що наведено на рис. 2. Це повний орієнтований граф з трьома вершинами і всіма петлями, вершина зв’язана з іншою парами ребер (i,j) та (j,i).

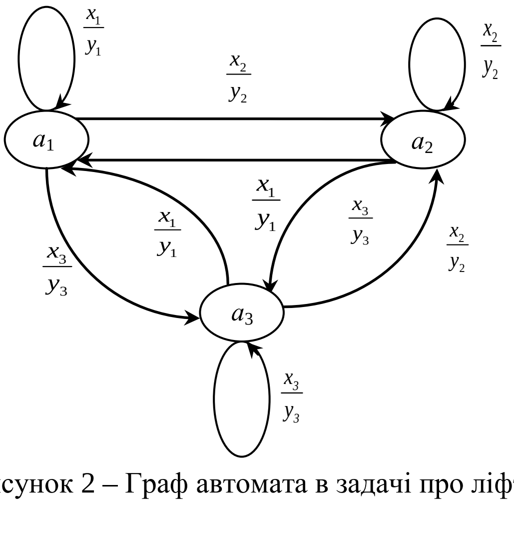


Рисунок 2 – Граф автомата в задачі про ліфт

Для автомата, заданого табл. 4 маємо такий граф, як на рис. 3.

V. Задання СА матрицею з'єднань (матрицею переходів).

Матриця з'єднань (переходів) – це квадратна матриця такого порядка, скільки станів має автомат.

На перетині рядка i та стовпця j стоїть диз'юнкція пар «вхід-вихід», що стоїть на дузі (i, j) графа автомата. Якщо дуги (i, j) немає, то відповідний елемент матриці вважають нулем.

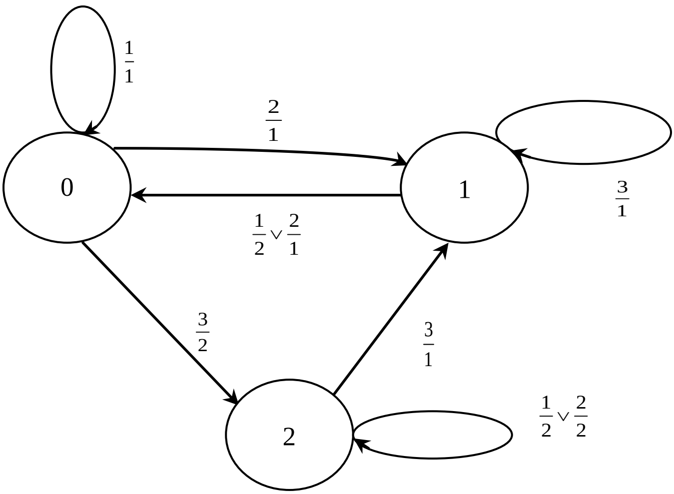


Рисунок 3 – Граф автомата заданий табл. 4

Для автоматів з графа з рис. 2 та 3 маємо відповідно матриці M_1 та M_2.

$$M_1 = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{x_1}{y_1} & \frac{x_2}{y_2} & \frac{x_3}{y_3} \\ \frac{x_1}{y_1} & \frac{x_2}{y_2} & \frac{x_3}{y_3} \\ \frac{x_1}{y_1} & \frac{x_2}{y_2} & \frac{x_3}{y_3} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \end{array}$$

$$M_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \vee \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & 0 \\ 0 & \frac{3}{1} & \frac{1}{2} \vee \frac{2}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

VI. Існує ще задання СА програмою автомата [9, т. 1, с. 57] (або як її часто називають – мікропрограмою).

3. Властивості автоматних відображень та мінімізація СА

Автоматні відображення мають властивість зберігати довжину слів та початкові відрізки. Тобто, якщо X^* та Y^* – множини слів алфавітів X і Y, то *відображення* $\varphi_a : X^* \to Y^*$ є автоматним тоді і тільки тоді, коли *довжина слова* $\varphi_a(\rho)$ дорівнює довжині слова ρ, а також $\varphi_a(\rho)$ є початковим відрізком слова $\varphi_a(\rho q)$ $\forall \rho, q \in X^*$.

Стани a *та* b двох автоматів зі спільними вхідним і вихідним алфавітом називаються *еквівалентними*, якщо однаковими є автоматні відображення $\varphi_a = \varphi_b$, де φ_a – для одного СА, φ_b – для іншого СА. (Зокрема це означення дає також еквівалентні стани одного і того ж автомата). Позначають еквівалентні стани так: $a \sim b$.

Автомати A_1 та A_2 називаються *еквівалентними*, якщо для будь-якого стану a автомата A_1 існує стан b автомата $A_2 : a \sim b$.

Автомат A_0 називається *зведеним,* якщо всі його стани попарно не *еквівалентні*.

Можна ставити задачі мінімізації скінченного автомата за тим чи іншим критерієм.

Розглянемо *мінімізацію кількості станів автомата*. Задача полягає в побудові по заданому скінченному автомату такого СА, що має *найменшу можливу кількість станів* і забезпечую ту ж відповідність між входом і виходом, що і в заданому СА.

Вважаємо, що СА є автоматом 1 роду (СА Мілі) *скрізь визначеним*. Нехай СА має *фіксований* початковий стан a_0 (тобто є *ініціальним* СА). Тоді задача мінімізації кількості станів зводиться до знаходження *зведеного* СА, що є *еквівалентним* даному.

Можна довести, що для цього класу СА *існує зведений* СА і він *єдиний*.

Найчастіше для мінімізації скрізь визначених СА застосовують алгоритм *Ауфенкампфа-Хона*. Цей алгоритм полягає в побудові послідовності спеціальних розбивань множини станів заданого СА. Розглядають розбиття множини станів на *i*-му $(i=1,2,...)$ кроці алгоритму та *об'єднують в один клас* стани a_j СА, що визначають відображення $\varphi_{a_j}: X^* \to Y^*$, які *збігаються на всіх словах* довжини не більше *i* (номер кроку алгоритму). Через скінченну кількість кроків алгоритму така послідовність розбивань *стабілізується* на певному розбитті. Це розбиття визначає відношення *еквівалентності*. Фактор-автомат по цьому відношенню є зведеним автоматом, який еквівалентний вихідному.

Назвемо *явно еквівалентними* станами такі еквівалентні стани a_i, a_j, для яких рядки в таблиці переходів і таблиці виходів однакові, або стають однаковими при заміні a_i на a_j.

Назвемо *явно відмінними* станами СА такі стани a_i, a_j, для яких *відрізняються* відповідні їм рядки в таблиці *виходів*.

Розглянемо алгоритм побудови автомату, еквівалентного заданому СА A_0, що має менше станів, ніж A_0 – *скороченого СА.*

Крок 1. *Знаходять* за таблицею виходів (або загальною таблицею переходів) *явно відмінні стани* (підмножини M_i множини станів такі, що стан з однієї з них явно відмінний від стану інших).

Крок 2. Шукають *еквівалентні* стани *серед* елементів однієї і тієї ж *множини* M_i, знаходячи *явно еквівалентні* стани. Якщо вони є – на крок 3. Якщо ні, то побудовано *скорочений* СА.

Крок 3. *Об'єднують* явно еквівалентні стани за загальною таблицею переходів, викреслюючи рядок з a_i та заміняючи скрізь в чисельниках a_i на a_j.

Крок 4. Переходять на крок 2.

Приклад 1. Нехай СА A_0 задається загальною таблицею переходів (табл. 5).

Таблиця 5 – Загальна таблиця переходів СА A_0

Стани a_i	**Входи x_i**		
	0	**1**	**2**
0	$^1\!/_1$	$^4\!/_0$	$^4\!/_1$
1	$^5\!/_0$	$^1\!/_1$	$^4\!/_1$
2	$^1\!/_0$	$^1\!/_1$	$^6\!/_1$
3	$^3\!/_1$	$^2\!/_0$	$^0\!/_1$
4	$^1\!/_1$	$^4\!/_0$	$^4\!/_1$
5	$^1\!/_0$	$^5\!/_1$	$^4\!/_1$
6	$^5\!/_0$	$^5\!/_1$	$^2\!/_1$

Візьмемо множини станів, у яких однакові рядки виходів:

$S_0 = \{0,3,4\}$; $S_1 = \{1,2,5,6\}$. Якщо розбити множину станів на S_0 та S_1, то очевидно, що будь-який стан з S_0 явно відмінний від стану з S_1. Отже, шукаємо еквівалентні стани серед станів, що належить одній і тій же множині S_0 або S_1.

Рядки для станів 0 та 4 *однакові*, отже стани явно еквівалентні. Рядок для стану 1 переходить в рядок для стану 5 (і навпаки), якщо 5 поміняти на 1, або 1 на 5. Отже, 0~4; 1~5.

Об'єднуємо еквівалентні стани, скорочуючи таблицю на стани 4 та 5. Отримуємо табл. 6.

Таблиця 6 – Скорочена загальна таблиця переходів СА A_0

Стани a_0	**Входи x_i**		
	0	**1**	**2**
0(4)	$1/1$	$0/0$	$0/1$
1(5)	$1/0$	$1/1$	$0/1$
2	$1/0$	$1/1$	$6/1$
3	$3/1$	$2/0$	$0/1$
6	$1/0$	$1/1$	$2/1$

У табл. 6 2~6, оскільки рядки для станів 2 та 6 переходять один в одного при зміні 2 на 6 (6 на 2). Отримуємо табл. 7.

Таблиця 7 – Двічі скорочена загальна таблиця переходів СА A_0

Стани a_0	**Входи x_i**		
	0	**1**	**2**
0(4)	$1/1$	$0/0$	$0/1$
1(5)	$1/0$	$1/1$	$0/1$
2(6)	$1/0$	$1/1$	$2/1$
3	$3/1$	$2/0$	$0/1$

Таблиця 3 задає скорочений автомат A_1 для СА A_0. Порівняйте графи автоматів A_0 (рис. 3) та A_1 (рис. 4).

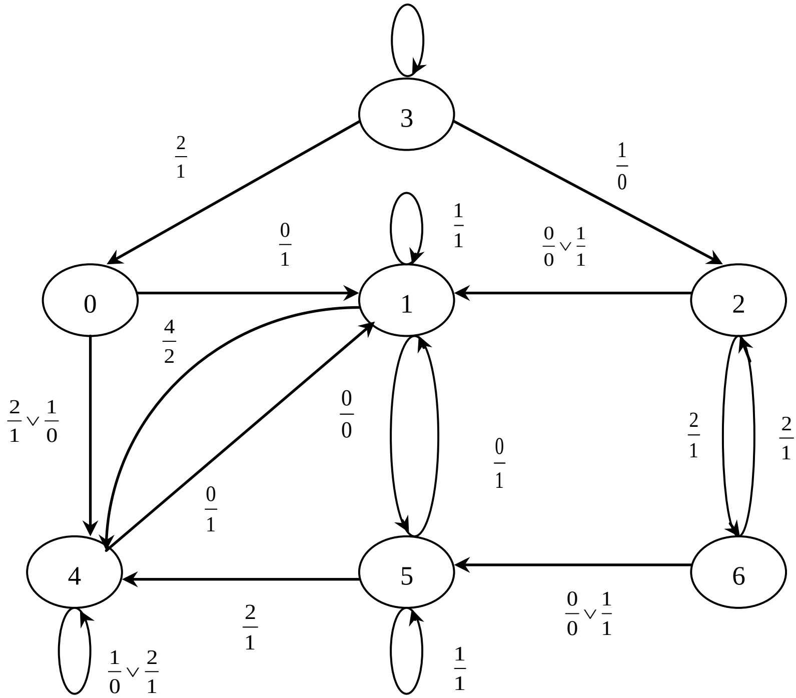


Рисунок 3 – Граф автомата A_0

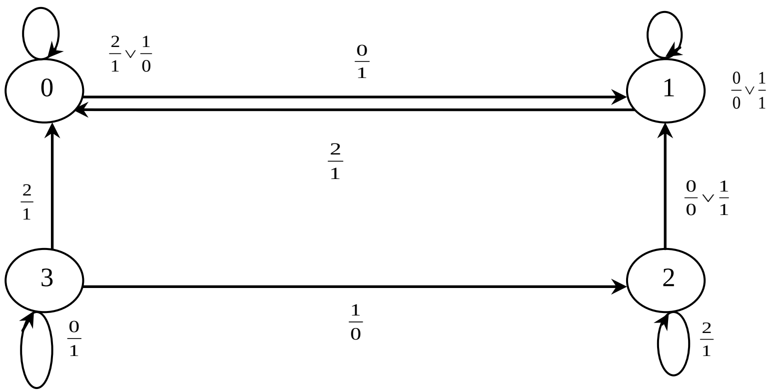


Рисунок 4 – Граф скороченого автомата A_1 для СА A_0

Для знаходження *всіх пар* еквівалентних станів процедура знаходження явно еквівалентних станів не підходить, бо *всі пари не дає*.

Якщо ж *відомі всі пари* еквівалентних станів, то на множині всіх станів А визначено відношення еквівалентності, якому відповідає розбиття $A = \left\{ S_0, S_1, ..., S_k \right\}$ на класи еквівалентності. Якщо a_i' – представники класів еквівалентності S_i, $i = 1,2,...k$, а $A' = \left\{ a_1', ..., a_k' \right\}$, то можна довести, що автомат $A_0 = \left\langle A, X, Y, \delta, \lambda \right\rangle$ та автомат $A_1 = \left\langle A', X, Y, \delta, \lambda \right\rangle$ еквівалентні, причому A_1 має *мінімально можливу* (серед еквівалентних автоматів) кількість $\left| A' \right| = k$ станів.

Розглянемо розбиття множини станів А на класи еквівалентності. Воно ґрунтується на послідовному *переборі пар* станів і *виключення* тих з них, що *не є еквівалентними*. Пари $\left(a_i, a_i \right)$ є еквівалентні і тому не розглядаються. Складається (на основі загальної таблиці переходів) таблиця, яку називають *таблицею пар станів*.

Явно відмінні стани не є еквівалентними, тому в таблицю пар вони *не включаються*. Для кожної пари станів відводиться рядок, для кожного входу – стовпець. На перетині рядка пари станів i, j і стовпця x ставиться пара станів, в які *переходить* автомат з пари станів i, j при вхідному впливі x (при цьому порядок станів у записі пари ролі не відіграє). *Пари*, що виключаються, *позначаються* (наприклад, *V*).

Далі випадок ілюструємо прикладом. Нехай маємо СА A_0, що задано загальною таблицею переходів (табл. 8).

Аналізуючи табл. 8, бачимо, що станам з множин $S' = \left\{ 0,2,4,6,7 \right\}$ та $S'' = \left\{ 1,3,5,8 \right\}$ відповідають однакові рядки таблиці виходів. Тому в таблицю пар станів (табл. 9) заносять тільки пари станів з однієї з множин S', S'', як такі, що не є явно відмінними. Всього таких пар $C_5^2 + C_4^2 = 16$.

Таблиця 8 – Загальна таблиця переходів СА A_0

Стани a_i	Входи x_i		
	0	**1**	**2**
0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{4}{0}$
1	$\frac{0}{0}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{1}$
2	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{4}{0}$
3	$\frac{2}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$
4	$\frac{5}{1}$	$\frac{3}{0}$	$\frac{2}{0}$
5	$\frac{7}{0}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{5}{1}$
6	$\frac{5}{1}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{7}{0}$
7	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{0}$	$\frac{6}{0}$
8	$\frac{6}{0}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{6}{1}$

Таблиця 9 – Таблиця пар станів автомата

Пари	Входи x_i		
	0	**1**	**2**
0,2	1,1	1,1	4,4
V_3 0,4	1,5w	1,3	4,2=2,4
V_3 0,6	1,5w	1,1	4,7
0,7	1,3	1,3	4,6
1,3	0,2	3,1=1,3	3,1=1,3
V_2 1,5	0,7	3,8w	3,5
V1 1,8	0,6	3,8	3,6w
V3 2,4	1,5w	1,3	4,2=2,4
V3 2,6	1,5w	1,1	4,7
2,7	1,3	1,3	4,6

Пари	**Входи x_i**		
	0	**1**	**2**
V_2 3,5	2,7	1,8w	1,5
V_1 3,8	2,6	1,8	1,6w
4,6	5,5	3,1=1,3	2,7
V_3 4,7	5,3=3,5w	3,3	2,6
V_1 5,8	7,6=6,7	8,8	5,6w
V_3 6,7	5,3=3,5w	1,3	7,6=6,7

Виключення пар враховує таку властивість еквівалентних станів: якщо два стани a_i та a_j – еквівалентні, то еквівалентними є і стани a_{i+1}, a_{j+1}

$$a_{i+1} = \delta\left(a_i, x\right),$$

$$a_{j+1} = \delta\left(a_j, x\right),$$

в які автомат переходить (зі станів a_i, a_j відповідно) під довільним вхідним впливом *x*.

Це означає, що на першому кроці *необхідно позначити ті пари,* що хоч при одному вхідному впливі x_i переходять у пари, які складаються з *різних* станів і *відсутні* в першому стовпці (стовпці пар) таблиці. (Позначки V_1 в табл. 5 це пари $\{1,8\}$, $\{3,8\}$, $\{5,8\}$, бо вони при $x_i = 2$ переходять у пари $\{3,6\}$, $\{1,6\}$, $\{5,6\}$ відповідно, яких немає в стовпці пар. Позначимо їх *w*.

Оскільки позначені знаком V_1 пари не можуть бути еквівалентними, то на наступному кроці позначають V_2 всі ті пари, що хоч при одному вхідному впливі x_i переходять в пари, що позначені V_1 і т. д.

На другому кроці в прикладі (табл. 5) позначили V_2 пари $\{1,5\}$, $\{3,5\}$, на третьому кроці – $V_3 - \{0,4\}$, $\{0,6\}$, $\{2,4\}$, $\{2,6\}$, $\{4,7\}$, $\{6,7\}$. На цьому процес позначення закінчився.

Еквівалентними є *невідмічені* пари: $\{0,2\}$, $\{0,7\}$, $\{1,3\}$, $\{2,7\}$, $\{4,6\}$. Оскільки 0~2, 2~7, то такі класи еквівалентності $S_0=\{0,2,7\}$, $S_1=\{1,3\}$, $S_2=\{4,6\}$. Стани, що не ввійшли в S_0,S_1,S_2, утворюють одноелементні класи еквівалентності: $S_3=\{5\};S_4=\{8\}$. Позначивши a_i представника класу S_i, одержимо мінімальну (за кількістю станів) форму представлення автомата, яка задається табл. 6, що є загальною таблицею переходів.

Таблиця 10 – Мінімальна форма СА, що заданий табл. 4

Стани a_i	Входи x_i		
	0	1	2
a_0	$\frac{a_1}{1}$	$\frac{a_1}{0}$	$\frac{a_2}{0}$
a_1	$\frac{a_0}{0}$	$\frac{a_1}{1}$	$\frac{a_1}{1}$
a_2	$\frac{a_3}{1}$	$\frac{a_1}{0}$	$\frac{a_0}{0}$
a_3	$\frac{a_0}{0}$	$\frac{a_4}{1}$	$\frac{a_3}{1}$
a_4	$\frac{a_2}{0}$	$\frac{a_4}{1}$	$\frac{a_2}{1}$

Лекції 16. Числення висловлювань. Побудова таблиць для пропозиційних форм. Аксіоматичні теорії. Концепція алгоритмів. Нормальні алгоритми Маркова. Машина Тюрінга, еквівалентність різних алгоритмічних систем

1. Висловлення

Означення 1. Висловленням будемо називати твердження, відносно якого можна сказати, що воно істинне або хибне.

Позначимо x_1, x_2 – два висловлення, $x_1 = 1$ – істинне; $x_2 = 0$ – хибне.

Приклад 1. x_1 – «Я піду в університет»; x_2 – «Я зустріну друга», $\overline{x_1}$ – «Я не піду в університет»; $x_1 \vee x_2$ – «Я піду в університет або зустріну друга»; $x_1 \wedge x_2$ – «Я піду в університет та зустріну друга».

Висловлення можна розглядати як двійкові змінні, зв'язки «не», «або», «і (та)» – як операції заперечення, $\vee$, $\wedge$ відповідно. Використовують також зв'язки: «якщо … то» та «якщо і тільки якщо (тоді і тільки тоді, коли)».

Цим зв'язкам відповідають операції: *імплікація* $x_1 \to x_2$ та *еквіваленція* $x_1 \sim x_2$ відповідно з таблицями істиності, наведеними в табл. 1.

Таблиця 1 – Таблиці істиності імплікації та еквіваленції

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$	$x_1 \sim x_2$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Приклад 2. Якщо x_1, x_2 – з прикладу 8, то:

1) $x_1 \to x_2$ – це: «*Якщо* я піду в університет, *то* зустріну друга»;

2) $x_1 \sim x_2$ – це: «Я піду в університет *тоді і тільки тоді, коли* зустріну друга».

Складне висловлення можна представити з простих та зв'язок: «*Якщо* тиск мастила на кульку клапана більше від зусилля його пружини (x_1), *то* мастило відкриває клапан (x_2) *та* частково перетікає з нагнітальної порожнини до впускної (x_3)», маємо формулу $x_1 \to x_2 x_3$.

2. Предикати

Означення 2. Предикат – це логічна функція $P(x)$, яка приймає одне з двох значень $\{0,1\}$ (або $\{T,F\}$), а x – вибирається з деякої множини об'єктів M: $P(x) \in \{0,1\}$, $x \in M$.

Приклад 3. $P(x)$ – «x – відмінник», x належить множині студентів групи 201СТ університету. Тоді P(Іваненененко) – це «Іваненко – відмінник» – це висловлення може бути істинним чи хибним.

У загальному вигляді предикат – це функція n змінних $x_1,\ldots,x_n$, що приймають значення з однієї чи різних множин. Її записують $P(x_1,\ldots,x_n)$ і називають n-місним предикатом.

Приклад 4. «x – парне число» – одномісний предикат; «x та y – брати» – двомісний предикат; «x та y – батьки z» – тримісний предикат.

Якщо аргументи $x_1,\ldots,x_n$ – заміщені конкретними значеннями (об'єктами), то предикат стає *висловленням,* яке розглядають як *нуль-місний предикат*.

Оскільки предикати приймають значення 0 або 1, їх, як булеві змінні, можна зв'язувати логічними операціями, одержуючи формули, що визначають більш складні предикати.

Приклад 5. Якщо $P(x)$ означає «x – студент», $Q(x)$ – «x – хлопець», $R(x)$ – «x навчається в університеті», то $P(x)\wedge Q(x)$ – «x – студент-хлопець», $P(x)\wedge R(x)$ – «x – студент університету», $Q(x)\wedge R(x)$ – «x – хлопець, що навчається в університеті», $P(x)\wedge Q(x)\wedge R(x)$ – «x – хлопець-студент, що навчається в університеті» (а в університеті навчаються хлопці, що і не є студентами – на підготовчих курсах абітурієнтів). Очевидно, якщо P – множина студентів, Q – множина хлопців, R – множина тих, хто навчається в університеті, то предикат $P(x)\wedge Q(x)\wedge R(x)$ відповідає перерізу $P\cap Q\cap R$. Тобто є тісний зв'язок між логікою предикатів та операціями над множинами.

3. Закон виключеного третього

Розглядаючи висловлювання як двійкові змінні, звичайно вважають, що вони задовольняють закон виключеного третього: кожне висловлювання може бути істинним або хибним (третього не може бути).

Істинність певного висловлювання в повсякденному житті встановлюється на основі аналізу його змісту.

Приклад 6. Висловлювання «Київ – столиця України» – істинне, «100 < 10» – хибне. Але й тут істинність відносна (був період, коли Харків був столицею України, якщо 100 – це запис у двійковій системі, тобто $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4_{10}$ «$4_{10} < 10_{10}$» – істинне.

Логіка висловлювань відволікається від конкретного змісту і відповідальність за їх тлумачення покладає на осіб, що компетентні у відповідній галузі. Вона дає тільки загальні методи аналізу складних висловлювань та принципи логічних міркувань і доведень.

4. Сентенціональні зв'язки

Сентенціональні зв'язки – це слова «не», «і (та)», «або», «якщо ... то», «якщо і тільки якщо» та їх синоніми. Їм відповідають логічні операції: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція. Звичайно висловлювання позначають великими літерами, для операцій використовують ті ж позначення, що і в алгебрі логіки. Таблиці відповідності в логіці висловлювань називають *таблицями істинності.* Для вказаних п'яти зв'язок вони мають вигляд табл. 2, 3:

Таблиця 2 – Таблиця істиності

A	0	0	1	1
B	0	1	0	1
AB	0	0	0	1
$A \vee B$	0	1	1	1
$A \to B$	1	1	0	1
$A \sim B$	1	0	0	1

Таблиця 3 – Заперечення

A	0	1
$\bar{A}$	1	0

Кажуть, що в імплікації *A→B, A – посилка (антецедант)*, а *B – наслідок (консеквент)* і що еквіваленція *A~B* означає логічний зв'язок у так званих *біумовних реченнях (твердженнях).*

5. Формули та підстановки

Складний вираз, що складається з простих тверджень (висловлювань), які пов'язані сентенціональними зв'язками, можна представляти у символічній формі, одержимо *висловлювальну формулу*. На кожному наборі значень істинності літер (змінних) формула приймає значення 0 (хибність) або 1 (істинність), тобто формулу логіки висловлювань можна розглядати як булеву функцію.

Приклад 7. «*Якщо* застосувати сталеві конструкції (P), *то* маса зменшується (Q) і вартість збільшується (R). Сталеві конструкції *не* застосовуються (P), а маса зменшується (Q)». Відповідна формула: $(P \to QR)PQ$, вона має таку таблицю істинності (табл. 4).

Таблиця 4 – Таблиця для прикладу 7

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
QR	0	0	0	1	0	0	0	1
$P \to QR$	1	1	1	1	0	0	0	1
$\bar{P}$	1	1	1	1	0	0	0	0
$\bar{P}Q$	0	0	1	1	0	0	0	0
$(P \to QR)\bar{P}Q$	0	0	1	1	0	0	0	0

Це висловлювання істинне на двох наборах P, Q, R: (0, 1, 0) і (0, 1, 1):

1) сталеві конструкції не застосовуються, маса зменшується, вартість зменшується;

2) сталеві конструкції не застосовуються, маса зменшується, вартість не зменшується.

Означення формули в численні висловлювань рекурсивне:

1) змінні висловлювання є формулами;

2) якщо A, B – формули, то AB, $A \vee B$, $A \to B$, $A \sim B$, $\bar{A}$ – також формули.

Приклад 8. Q, P, R – формули; QR, $P \to QR$, $\bar{P}$, $\bar{P}Q$, $(P \to QR)\bar{P}Q$ – формули (крім останньої вони називаються *частинами результуючої формули*).

Можна робити *підстановку* у формулу, замінюючи одну й ту ж саму літеру одним висловлюванням: $P \to QR$: P – «Іде дощ»; Q – «$2+2=4$», R – «Крокодили червоні». $P \to QR$ – «Якщо іде дощ, то $2+2=4$ і крокодили червоні». Істинність цього висловлювання визначається лише таблицею істинності. Так, на наборі $P=0$; $Q=\square 0$; $R=1$ одержуємо істинне висловлювання: «Якщо дощ не іде, то $2+2\neq 4$ і крокодили не червоні».

6. Тавтології

Тавтологією називають формулу, яка тотожна одиниці (на будь-якому наборі), якщо формула тотожна нулю, її називають протиріччям.

Приклад 9. «Якщо застосовувати нову технологію (P), то якість продукції поліпшиться (Q). При поліпшенні якості продукції (Q) її збут збільшиться (R). Нова технологія застосована (P). Отже, збут продукції збільшиться (R)». Формула $(P \to Q)(Q \to R)P \to R$.

Таблиця 5 – Таблиця для прикладу 9

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
$P \to Q$	1	1	1	1	0	0	1	1
$Q \to R$	1	1	0	1	1	1	0	1
$(P \to Q)(Q \to R)$	1	1	0	1	0	0	0	1
$(P \to Q)(Q \to R)P$	0	0	0	0	0	0	0	1
$(P \to Q)(Q \to R)P \to R$	1	1	1	1	1	1	1	1

Для позначення тавтологій використовують знак $\models$.

Таким чином, $\models (P \to Q)(Q \to R)P \to R$.

7. Закони логіки висловлювань

Підстановки в тавтології дають тавтології. Тобто *тавтології* можна розглядати як деякі логічно істинні схеми міркувань, тому вони відіграють роль *законів (теорем) логіки висловлювань*, що дають метод побудови логічно істинних міркувань. Їх нескінченно багато. Найчастіше використовують такі:

1. $\models P \to P$ (закон тотожності);

2. $\models P \vee \overline{P}$ (закон виключеного третього);

3. $\models \overline{P\overline{P}}$ (закон протиріччя);

4. $\models \overline{\overline{P}} \sim P$ (закон подвійного заперечення);

5. $\models P \to (Q \to P)$ (додавання посилки анцедента; *verum ex quodlibet* – істина з будь-чого);

6. $\models \overline{P} \to (P \to Q)$ (*ex falso quodlibet* – із хибного будь-що);

7. $\models (P \to Q)P \to Q$ (закон відокремлення; *modus ponens*);

8. $\models (P \to Q)\overline{Q} \to \overline{P}$ (*modus tollens*);

9. $\models (P \to Q)(Q \to P) \to (P \to R)$ (закон силогізму);

10. $\models (P \to Q) \to (\overline{Q} \to \overline{P})$ (закон контрапозиції).

Кожен із законів відображає деяку схему доведення.

Приклад 10. *Modus tollens* використовується при доведенні від супротивного: бажаючи довести істинність P, приймають P хибним і показують, що P імплікує Q, про яке відомо, що воно хибне ($\overline{Q}$ – істинне). Звідси роблять висновок, що P – істинне.

8. Рівносильність

Дві формули називають *рівносильними*, якщо вони на *всіх* однакових наборах значень змінних, що входять у них, приймають однакові значення.

Позначають так: $A \Leftrightarrow B,$ тобто формула A рівносильна формулі B.

Легко побачити, що рівносильність – це відношення *еквівалентності*: воно рефлексивне ($A \Leftrightarrow A$); симетричне (якщо $A \Leftrightarrow B,$ то $B \Leftrightarrow A$); транзитивне (якщо $A \Leftrightarrow B,$ $B \Leftrightarrow C,$ то $A \Leftrightarrow C$). Тому рівносильність називають ще *логічною еквівалентністю*.

Рівносильність формул логіки висловлювань випливає з тотожності відповідних формул алгебри логіки.

Приклад 11. $\overline{A \vee B} \Rightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}, \ \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$ тощо.

Між відношенням рівносильності й еквіваленцією існує такий зв'язок: якщо $A \Leftrightarrow B,$ то $\models A \sim B,$ і навпаки, якщо *A~B* – тавтологія, то *A* та *B* − рівносильні. Справедливість цього твердження випливає безпосередньо з означення рівносильності і таблиці істинності для еквіваленції. Тобто тавтологію можна одержати, замінивши ⇔ на ~.

9. Логічний наслідок

Кажуть, що формула *B* є логічним наслідком формули *A*, і пишуть $A \Leftrightarrow B,$ якщо *B* істинне на всіх наборах значень змінних, для яких *A* істинне.

Легко перевірити, що $A \Rightarrow B$ тоді і тільки тоді, коли $\models A \to B.$

Дійсно, з визначення імплікації одержуємо табл. 6.

Таблиця 6 – Імплікація

A	B	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Тобто, якщо $A \to B$ – тавтологія, то з $A=1$ завжди випливає: $B=1.$ Навпаки, якщо $A \Rightarrow B,$ то виключається (за означенням логічного наслідку набір $A=1, B=0$), тобто $A \to B$ істинне на всіх наборах значень змінних, отже, $A \to B$ – тавтологія.

Логічний наслідок $A \Rightarrow B$ означає, що *з істинності A випливає істинність B*, але *якщо A – хибне, то відносно B нічого стверджувати на можна.*

Це відношення узагальнюється на сукупність висловлювань: *B* є логічним наслідком висловлювань $A_1, A_2, \ldots, A_m,$ якщо з істинності *всіх висловлювань* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ випливає істинність *B*. Із визначення кон'юнкції можна зробити висновок, що це зводиться до співвідношення $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow B,$ необхідною і достатньою умовою якої є тавтологія $\models A_1, A_2, \ldots, A_m \to B.$

Приклад 12. Дані висловлювання $(A \to B)(C \to D)$, $BD \to E$, $\bar{E}$. Необхідно встановити, чи є висловлювання $\bar{A} \vee \bar{C}$ їх логічним наслідком.

Це зводиться до доведення тавтології:

$$\models ((A \to B)(C \to D))(BD \to E)\bar{E} \to (\bar{A} \vee \bar{C}).$$

Доведемо її методом «від супротивного». Вважатимемо, що $\bar{A} \vee \bar{C}$ хибне (A і C – істинне) ($\bar{A} \vee \bar{C} = \overline{AC} = 0$, $AC = 1$, $A = 1$, $C = 1$) при істинних значеннях усіх посилок. Тоді з першої посилки $(A \to B)(C \to D) = 1$, $A \to B = 1$; $C \to D = 1$ ($A = 1$, $A \to B = 1$, отже, $B = 1$; аналогічно $D = 1$). $B = 1$, $D = 1$, отже, з $BD \to E = 1$ випливає $E = 1$, що протирічить третій посилці $\bar{E} = 1$, що і доводить дану тавтологію.

Між *логічним наслідком і логічною еквівалентністю є зв'язок*, що випливає зі співвідношення

$$A \sim B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A).$$

Тобто |=A~B тоді і тільки тоді, коли $\models A \to B$ та $\models B \to A$.

Логічний наслідок є *відношенням порядку*: воно рефлексивне $(A \Rightarrow A)$; транзитивне (якщо $A \Rightarrow B$; $B \Rightarrow C$, то $A \Rightarrow C$), антисиметричне (з $A \Rightarrow B$ та $B \Rightarrow A$ випливає $A \Leftrightarrow B$).

10. Правила виведення

Формальна теорія виведення ставить своєю головною задачею утворення з деякої сукупності вихідних тавтологій нових формул, які також є тавтологіями. Ця задача розв'язується за допомогою правил виведення:

1) якщо A – тавтологія, то, замінюючи в ній деяку літеру X скрізь, де вона входить, довільною формулою B, одержуємо також тавтологію (*правило підстановки*). Воно очевидне;

2) якщо A і $A \to B$ – тавтологія, то B – також тавтологія (*правило висновку*). Справедливість випливає з означення тавтології та імплікації.

Формула називається *вивідною в численні висловлювань*, якщо вона може бути одержана зі скінченної сукупності вихідних формул шляхом скінченної кількості застосувань правил виведення.

Доведено, що існують скінченні сукупності тавтологій (*аксіом числення висловлювань*), із яких виводяться будь-які тавтології. Це розв'язує так звану *проблему повноти числення висловлювань*. Одна із систем аксіом така:

1. $A \to (B \to A)$.
2. $((A \to B) \to A) \to A$.
3. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$.
4. $AB \to A$.
5. $AB \to B$.
6. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to BC))$.
7. $A \to (A \vee B)$.
8. $B \to (A \vee B)$.
9. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$.
10. $(A \sim B) \to (A \to B)$.
11. $(A \sim B) \to (B \to A)$.
12. $(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \to B))$.
13. $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$.
14. $A \to \overline{\overline{A}}$;
15. $\overline{\overline{A}} \to A$.

Складність виведення з аксіом за допомогою основних правил зумовлює розроблення спеціальних правил, що скорочує багаторазове використання основних правил.

11. Дедуктивний метод

Більш простий і короткий спосіб виведення ґрунтується на *теоремі дедукції:* якщо формула B є логічним наслідком формул $A_1, A_2, \ldots, A_m$, тобто $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow B$, то $\models A_1 \to (A_2 \to (\ldots \to (A_m \to B)\ldots))$.

При цьому кажуть, що формула *B* *вивідна* з формул $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

Доведення. Логічний наслідок $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow B$ означає, що $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow B,$ що виконується тоді і тільки тоді, коли $\models A_1, A_2, \ldots, A_m \to B.$ Перевіримо цю тавтологію, скориставшись табл. 7:

$$A_1 A_2 \ldots A_m \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{A_1 A_2 \ldots A_m} \vee B \Leftrightarrow \overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee \ldots \vee \overline{A_m} \vee B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\overline{A_1} \vee \ldots \vee \overline{A_{m-1}}\right) \vee \left(\overline{A_m} \vee B\right) \Leftrightarrow \overline{A} \vee \ldots \vee \overline{A_{m-1}} \vee \left(A_m \to B\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_1 \to \left(A_2 \to \left(\ldots \to \left(A_m \to B\right)\ldots\right)\right).$$

Таблиця 7 – Таблиці, що використовуються в доведенні

A	B	$A \to B$	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Оскільки вихідна формула – тавтологія, то і весь ланцюг рівносильних (і остання) – також, що і треба було довести.

Значення теореми дедукції в тому, що *логічний наслідок B* із сукупності *посилок* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *може бути представлено тавтологією вигляду*

$$= A_1 A_2 \ldots A_p \to \left(A_{p+1} \to \ldots \left(A_m \to B\right)\ldots\right).$$

Справедливе й *обернене твердження*: якщо є тавтологія, що містить ланцюжок імплікацій типу: $\left(A_1 \to \left(A_2 \to \ldots \left(A_{p+1} \to \ldots \to \left(A_m \to B\right)\ldots\right)\right)\right)$, то вона може бути представлена еквівалентною формулою: $\models A_1 A_2 \ldots A_p \to$ $\to \left(A_{p+1} \to \ldots \to \left(A_m \to B\right)\ldots\right)$, якій відповідає співвідношення $A_1 A_2 \ldots A_p \Rightarrow \left(A_{p+1} \to \ldots \to \left(A_m \to B\right)\ldots\right).$

Із теореми дедукції та означення логічного наслідку випливають такі твердження:

1) $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow A_i \quad (i = 1,2,\ldots,m)$, тобто будь-яка із сукупності посилань є логічним наслідком цієї сукупності;

2) якщо $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow B_j \quad (j = 1,2,\ldots,n)$ і $B_1, B_2, \ldots, B_n \Rightarrow B$, то $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow B$.

За допомогою цих правил можна представити доведення того, що формула B є логічним наслідком формул $A_1, A_2, \ldots, A_m$ у вигляді *ланцюжка формул*, останньою з яких є B. Проміжні формули $B_1, B_2, \ldots, B_n$ одержуються на основі відомих логічних законів, аксіом та еквівалентностей. На основі теореми дедукції тавтології, що використовуються, та результуюче співвідношення перетворюються до потрібної форми.

Приклад 13. Покажемо, що

$$(A \vee B) \to C, C \to (D \vee E), E \to F, \overline{D}\,\overline{F} \Rightarrow \overline{A}.$$

Із першої пари посилань на основі закону силогізму $(A' \to B') \wedge (B' \to C') \to (A' \to C')$ одержуємо $(A \vee B) \to (D \vee E)$, з посилки $\overline{D}\,\overline{F}$ одержуємо $\overline{D}$ і $\overline{F}$. Із посилки $E \to F$ і $\overline{F}$ виводимо $\overline{E}$ (за *modus tollens*). Із $\overline{D}$ і $\overline{E}$ одержуємо $\overline{D}\,\overline{E} \Leftrightarrow \overline{D \wedge E}$. Це разом із $(A \vee B) \to (D \vee E)$, на основі *modus tollens* дає $\overline{A \vee B}$; $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A}\,\overline{B}$, що дає $\overline{A}$.

Можна скласти таку схему (див. рис. 1).

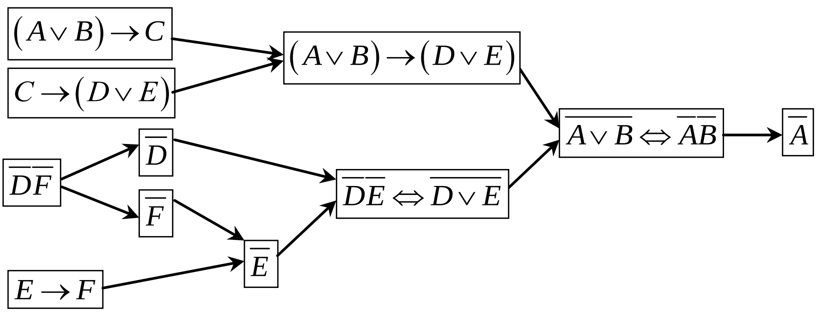


Рисунок 1 – Схема доведення

Якщо як логічний наслідок виводяться $A \wedge \overline{A},$ то це свідчить про *протиріччя* посилок (із них виводиться як істинне висловлювання, так і хибне одночасно).

12. Зв'язок висловлювань та предикатів

Як відомо, логіка висловлювань цікавиться тільки логічним зв'язком між реченнями. Логіка предикатів цікавиться і структурою речень (зв'язком того про що (кого) йдеться в реченні з тим, що про нього кажуть). Мова логіки предикатів пристосована до вираження зв'язків між різними поняттями та твердженнями.

Дамо інше (більш узагальнене) означення предикатів.

Означення 3. Предикатом $P(x_1,\ldots,x_n)$ називають двозначну логічну функцію, аргументами якої $(x_1,\ldots,x_n)$ є об'єкти з множини їх визначення $X_1,\ldots,X_n$ – відповідно. Число n називають місністю предиката, а $P(x_1,\ldots,x_n)$ – n-місним предикатом. Аргументи називають предметними змінними, конкретні значення аргументів – предметними сталими. Предметні змінні та предметні сталі разом називають термами.

Підстановка замість предметної змінної предметної сталої називається *заміщенням.* При заміщенні однієї змінної предикат стає на одиницю меншої *місності*. Якщо всі змінні заміщені, n-місний предикат стає 0-місним, тобто висловлюванням.

Приклад 14. Тримісний предикат $P(x_1,x_2,x_3)=$ «x_1 є сума x_2 і x_3». Підставимо $x_1=4.$ Маємо двомісний предикат $P(4,x_2,x_3)=$ «4 є сума x_2 і x_3». Якщо підставимо $x_2=1,$ маємо одномісний предикат $P(4,1,x_3)=$ «4 є сума 1 і x_3». При $x_3=3$ маємо істинне висловлювання, при $x_3\neq 3$ – хибне висловлювання.

13. Квантори

Операції, за допомогою яких виражають відношення загальності та існування, називають *кванторами*.

Нехай $P(x)$ – предикат, що визначений на $M, (x \in M)$. Твердження, що всі $x \in M$ мають властивість $P(x)$ записується за допомогою знака ∀, який називають *квантором загальності*, у вигляді: $\forall x P(x)$, що читається: «для всіх *x*, *P* від *x*».

Твердження, що існує хоча б один об'єкт $x \in M$, що має властивість $P(x)$, записується за допомогою знака ∃, який називають *квантором існування*, у вигляді: $\exists x P(x)$, що читається: «існує таке *x*, що *P* від *x*». Вирази: $\forall x P(x)$, $\exists x P(x)$ не залежать від змінної *x*, хоч вона там і присутня. *Квантори зв'язують змінну*, перетворюючи одномісний предикат на висловлювання, *n*-місний предикат на $(n-1)$-місний.

Приклад 15. $P(x) =$ «*x* – парне число». Тоді $\forall x P(x)$ – хибне висловлювання, $\exists x P(x)$ – істинне висловлювання.

Застосовувати квантори можна по одному до однієї змінної. Якщо до *n*-місного предикату застосувати *k* кванторів, він стає $(n-k)$-місним, при $n-k$ – висловлюванням. Змінні, до яких застосовані квантори, називають *зв'язаними*, інші – вільними.

Приклад 16. З двомісного предикату $P(x,y)$ одержуємо: одномісні: $\forall x P(x,y)$, $\forall y P(x,y)$, $\exists x P(x,y)$, $\exists y P(x,y)$; висловлювання: $\forall x \forall y P(x,y)$, $\forall x \exists y P(x,y)$, $\exists x \exists y P(x,y)$ тощо.

Порядок одноіменних кванторів не має значення. Але різнойменні квантори не можна змінювати місцями.

Так $\forall x \forall y P(x,y)$ еквівалентне $\forall y \forall x P(x,y)$. Але $\forall x \exists y P(x,y)$ та $\forall y \exists x P(x,y)$ – різні.

Приклад 17. $P(x,y) =$ «*x* ділить *y*». $\forall x \exists y P(x,y) =$ «для всіх *x* існує *y*, таке, що х ділить *y*». $\exists y \forall x P(x,y) =$ «існує таке *y*, що для всіх *x*, *x* ділить *y*». Перше – істинне, друге – хибне.

Квантор зв'язує змінну в області своєї дії, яка позначається дужками (береться в дужки), якщо це не один предикат, а сукупність предикатів, пов'язаних логічними операціями.

Вирази, які можна утворити застосуванням до предикатів сентенціональних зв'язок і кванторів, називають *формулами логіки предикатів.*

Змінна називається: *вільною* у формулі, якщо хоча б на одне її входження не поширюється дія кванторів; зв'язаною, якщо вона зв'язана хоча б одним квантором.

Приклад 18. У формулі $\exists y\forall x\big(P(x,y)\to\forall zQ(z)\big)$ всі змінні зв'язані, а у формулі $\exists y\forall x\big(P(x,y)\vee\exists yQ(x,y)\big)\vee R(x)$ змінні *x*, *y* одночасно є зв'язаними і вільним.

14. Символізація мови

Сучасна логіка предикатів має універсальні методи обґрунтування правильних висновків. Першим етапом в доведенні є символізація вихідних положень (посилок). Це зводиться до перекладу деяких тверджень на символічну мову логіки предикатів. Розглянемо це на прикладі.

Приклад 19. «Деякі студенти виконали всі завдання. Жоден студент не виконував курсових робіт. Отже, жодне завдання не було курсовою роботою».

У першому реченні маємо одномісні предикати-властивості: $P(x)=$«*x* – студент», $Q(y)=$«*y* – завдання» та двомісний предикат $R(x,y)=$«*x* виконав *y*».

Формула, що відповідає першому реченню, буде: $\exists x\big(P(x)\wedge A(x)\big)$, де $A(x)$ – складне висловлювання, що характеризує $P(x)$, а саме: «виконали всі завдання». $A(x)=\forall y\big(Q(y)\to R(x,y)\big)$ – «для всякого *y*, якщо *y* – завдання, то *x* виконали *y*», тобто: «виконали всі завдання». Таким чином першому реченню відповідає формула: $\exists x\big(P(x)\wedge\forall yQ(y)\to R(x,y)\big)$.

Друге речення: позначимо $S(y)=$«*y* – курсова робота». Маємо $\forall x\big(P(x)\to B(x)\big)$, де $B(x)$ – складне висловлювання «не виконували курсових робіт»: $B(x)=\forall y\Big(S(y)\to\overline{R(x,y)}\Big)$.

Маємо для другого речення: $\forall x\left(P(x)\to\forall y\left(S(y)\to\overline{R(x,y)}\right)\right)$.

Речення: «жодне завдання не є курсовою роботою»: $\forall x\left(Q(x)\to\overline{S(x)}\right)$.

Отже,

$$\exists x\left(P(x)\wedge\forall y\left(Q(y)\to R(x,y)\right)\right)\wedge\forall x\left(P(x)\to\forall y\left(S(y)\to\overline{R(x,y)}\right)\right)\to$$

$$\to\forall x\left(Q(x)\to\overline{S(x)}\right).$$

Приклад 20. Дамо символічне означення бінарного відношення еквівалентності.

Нехай $P(x,y)$ – двомісний предикат, що означає бінарне відношення $x,y\in M$. Тоді:

– рефлексивність: $\forall xP(x,x)$;

– симетричність: $\forall x\forall y\left(P(x,y)\to P(y,x)\right)$;

– транзитивність: $\forall x\forall y\forall z\left(P(x,y)\wedge P(y,z)\to P(x,z)\right)$.

Тоді еквівалентність:

$$\forall xP(x,x)\wedge\forall x\forall y\left(P(x,y)\to P(y,x)\right)\wedge$$

$$\wedge\forall x\forall y\forall z\left(P(x,y)\wedge P(y,z)\to P(x,z)\right).$$

15. Оціночна процедура

Істинне значення формули в логіці предикатів можна встановити за допомогою *оціночної процедури*, яка є визначенням значень предикатів, що входять в дану формулу, шляхом заміщення вільних змінних предметними константами з множини визначення змінних. Далі використовують властивості сентенціональних зв’язок, кванторів тощо. Розглянемо приклад.

Приклад 21. Розглянемо формулу:

$$\forall x\left(P(x,y,z)\to\exists yQ(x,y)\right)\vee Q(x,y)\wedge\overline{S},$$

де предикати задані на двоелементній множині $\{a,b\}$ таблицями відповідності табл. 8, 9:

Таблиця 8 – Предикат *P*

x	a	a	b	b	a	a	b	b
y	a	b	a	b	a	b	a	b
z	a	a	a	a	b	b	b	b
$P(x,y,z)$	0	1	0	0	1	0	1	1

Таблиця 9 – Предикат Q

x	a	a	b	b
y	a	b	a	b
$Q(x,y)$	0	0	0	1

Нехай $S=0,\ x=b,\ y=a,\ z=a.$ Підставляючи це в формулу, маємо:

$$\forall x\big(P(x,a,a)\to \exists yQ(x,y)\big)\vee Q(b,a)\wedge 1.$$

Згідно з таблицею відповідності $Q(b,a)=0.$ Формула спрощується до

$$\forall x\big(P(x,a,a)\to \exists yQ(x,y)\big).$$

Це висловлювання, для встановлення, чи істинне воно, чи хибне, треба з'ясувати, чи є одномісний предикат $P(x,a,a)\to \exists yQ(x,y)$ істинним для всіх значень x. Відповідна таблиця має вигляд табл. 10.

Таблиця 10 – Перевірка істиності предиката

x	$P(x,a,a)$	$\exists yQ(x,y)$	$P(x,a,a)\to \exists yQ(x,y)$
a	0	0	1
b	0	1	1

$\exists yQ(a,y)=0,$ оскільки $Q(a,a)=0,$ $Q(a,b)=0$ – тотожно хибні висловлювання; $\exists yQ(b,y)=1,$ оскільки $\exists y=b,$ що $Q(b,b)=1.$ Отже, $\forall x\big(P(x,a,a)\to \exists yQ(x,y)\big)=1.$ Аналогічно можна визначити значення вихідної формули для інших заміщень. Розглянута процедура трудомістка. Особливо, коли потрібно знайти значення формули на всіх можливих наборах.

Особливу цікавість викликають формули, що приймають значення «істинно» при всіх заміщеннях змінних.

16. Загальнозначущість

Означення 4. Формули логіки предикатів, які приймають значення 1 («істинно») при кожному заміщенні вільних змінних і предикатів, називають загальнозначущими.

Позначаються вони як і тавтології $\models A,$ тобто A – загальнозначуща формула.

Для доведення загальнозначущості формул використовується апарат логіки висловлювань, доповнений теоремами для виразів, що містять квантори. Наведемо деякі з них.

1) нехай $Q(x)$ – формула, вільна від змінної y, тоді:

а) $\models \forall x Q(x) \rightarrow Q(y);$

б) $\models Q(y) \rightarrow \exists x Q(x).$

2) нехай R – формула, що не містить вільних входжень змінної $x,$ $Q(x)$ – деяка формула, тоді:

а) якщо $\models R \rightarrow Q(x),$ то $\models R \rightarrow \forall x Q(x);$

б) якщо $\models Q(x) \rightarrow R,$ то $\models \exists x Q(x) \rightarrow R.$

3) $\models Q(x),$ тоді і тільки тоді, коли $\models \forall x Q(x)$ (наслідок з теорем 1), 2)).

На основі цих теорем будуються правила виводу логіки предикатів, які разом з правилами числення висловлювань (правило підстановки, правило висновку, теорема дедукції та інші) використовуються для доведення логічних наслідків.

Правило універсальної конкретизації (УК): з формули $\forall x Q(x),$ яка виводиться для $y,$ виводиться $Q(y)$ підстановкою в $Q(x)$ замість x змінної y (теорема 1а).

Правило універсального узагальнення (УУ): якщо $Q(x)$ – наслідок посилок, жодна з яких не має вільних входжень x, то з нього виводиться $\forall x Q(x)$ (теорема 2а).

Правило екзистенціальної конкретизації (ЕК): дозволяє перейти від $\exists xP(x)$ до $P(\alpha)$, де α – невідомий, але цілком визначений елемент такий, що якщо $\exists xP(x)$ – істинно, то $P(\alpha)$ також істинно.

Правило екзистенціального узагальнення (ЕУ): дозволяє перейти від $P(\alpha)$ до $\exists xP(x)$, тобто, якщо існує таке α, що якщо $P(\alpha)$ – істинно, то істинно і $\exists xP(x)$.

Останні два правила – аналог для попередніх для квантора ∃.

У логіку предикатів переносяться всі тавтології з логіки висловлювань, зокрема співвідношення:

– $\models A \sim B$ тоді і тільки тоді, коли $A \Leftrightarrow B$;

– $\models A \to B$ тоді і тільки тоді, коли $A \Rightarrow B$.

17. Доведення логічного висновку

Виходячи з поняття загальнозначущості, можна дати таке *означення логічного висновку в логіці предикатів:* формула *B* є логічним висновком формул $A_1, A_2, \ldots, A_m$, тобто: $A_1, A_2, \ldots, A_m \Rightarrow B$, якщо для кожної множини визначення і для кожного заміщення змінних у формулах $A_1, \ldots, A_m$ у цій множині, формула *B* – істинна при умові, що всі A_i – істинні. При цьому для всіх вільних входжень деякої змінної *x* в будь-які A_i вибирається одне й те ж значення з множини визначення, тобто таке *x* розглядають як сталу.

Приклад 22. Розглянемо формулу з одного з попередніх прикладів (приклад 19), де посилки:

$$\exists x\Big(P(x) \wedge \forall y\big(Q(y) \to R(x,y)\big)\Big), \forall x\Big(P(x) \to \forall y\big(S(y) \to \overline{R(x,y)}\big)\Big),$$

а висновок:

$$\forall x\big(Q(x) \to S(x)\big).$$

Процес доведення представлено на діаграмі (див. рис. 2).

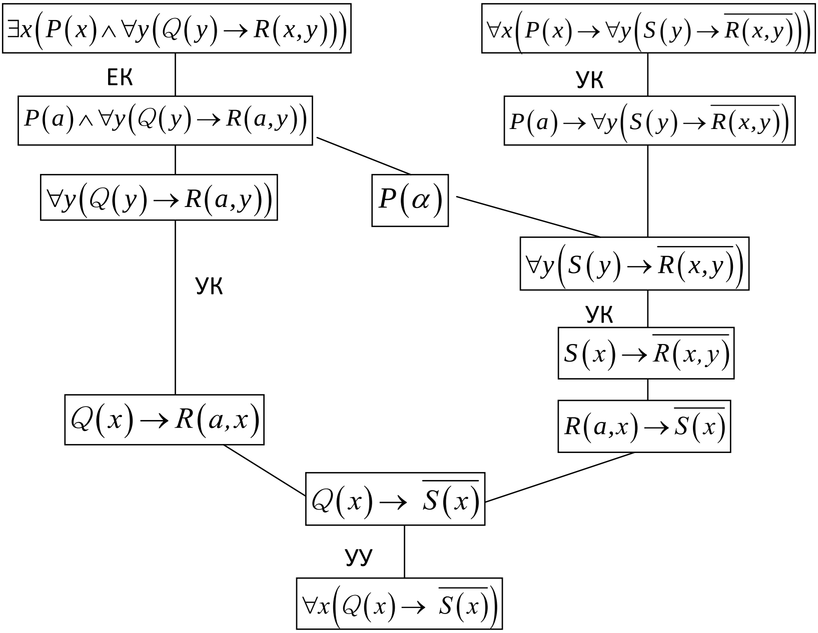


Рисунок 2 – Діаграма виводу висновку з посилок

18. Означення числення

Числення – це формальний апарат оперування зі знаками та знакосполученнями певного виду, який використовується при точному описанні задач та їх розв’язків.

Прикладами числень є:

– правила виконання арифметичних операцій;
– диференційне числення;
– інтегральне числення;
– числення висловлювань;
– числення предикатів.

Іншими словами *числення* – це система, що задає множину шляхом означення вихідних елементів (*аксіом*) і *правил виводу*, кожне з яких описує спосіб побудови нових елементів з вихідних та вже побудованих.

Важливою характеристикою числень є *непротирічність.*

Непротирічністю аксіоматичної теорії називається її властивість, що з її аксіом не випливає (не виводиться застосуванням правил виводу) протиріччя, тобто два твердження, одне з яких є запереченням іншого.

Числення висловлювань є непротирічною аксіоматичною теорією.

Повнотою системи аксіом А називається та властивість множини формул А, що будь-яка формула *f*, або її заперечення, є логічним наслідком множини А.

Числення предикатів – загальна назва для логічних числень. Логічні закони, які доводяться в них, формулюються в тій чи іншій логічній мові, яка містить квантори та символи для предикатів.

За мовою числення предикатів класифікують на числення 1-го та більш високих порядків. Мова числення предикатів 1-го порядку відрізняється тим, що в її формулах квантори використовуються тільки з предметними змінними, але не з предикатними чи функціональними змінними.

Числення предикатів 1-го порядку визначається заданням мови логіки предикатів 1-го порядку, аксіом і правил виводу.

Терм *t* називається вільним для змінної x у формулі *f*, якщо ніяке вільне входження *x* у *f* не знаходиться в області дії деякого квантора загальності $\forall y$ або існування $\exists y$, де y – *змінна, що входить в t.*

В якості аксіом класичного числення предикатів 1-го порядку беруть:

1) всі формули першого порядку, що мають вигляд схем *аксіом числення висловлень,* де формули, що входять в ці схеми – це довільні формули 1-го порядку;

2) всі формули вигляду

$$\forall x F(x) \supset F(t);$$

$$F(t) \supset \exists x F(x),$$

де $F(x)$ – формула 1-го порядку;

t – терм, вільний для *x* у $F(x)$.

Правила виводу такі:

1) з *F* та $F \supset G$ виводиться *G*;

2) якщо F не містить вільних входжень змінної x, то із $F \supset G$ виводиться $F \supset \forall xG$, а з $G \supset F$ виводиться $\exists xG \supset F$.

Числення предикатів 1-го порядку є непротирічним і повним (семантично).

Це числення є базисом для побудови прикладних числень з метою формалізації різних розділів математики.

19. Концепція алгоритму

Термін «алгоритм» (лат. *algorithmi*) походить від імені узбецького математика 9 століття Аль-Хорезмі.

Як правило, під *алгоритмом* розуміють сукупність правил, що визначає ефективну процедуру розв'язування будь-якої задачі з деякого заданого класу задач.

Виходячи з потреб практики: вивчення та реалізація алгоритмів на обчислювальній техніці (комп'ютерах), поняття алгоритму призвело до розробки великої кількості так званих *алгоритмічних мов*.

При цьому алгоритм трактується як текст, записаний на певній алгоритмічній мові.

20. Нормальні алгоритми Маркова

Розглянемо поняття «алгоритму в алфавіті *словарного алгоритму*». Кажуть, що задано *алгоритм в алфавіті А*, який застосовується до слова p і перетворює його в слово q, якщо починаючи зі слова p, виконуючи задані правила, отримують слово q, на якому процес перетворення згідно з заданими правилами обривається (закінчується).

Множина слів, до яких може бути застосовано даний алгоритм, називається областю його *застосування.*

Два алгоритми в деякому алфавіті називають *еквівалентними,* якщо області їх застосування збігаються і результати перетворення ними будь-якого слова (з області застосування) також збігаються.

Одне важливе уточнення поняття алгоритму дав радянський вчений Марков. Він дав норми (правила) застосування підстановок у словарних алгоритмах. Тому поняття алгоритму за Марковим, яке включає ці вказівки про порядок застосування підстановок, називають *нормальним алгоритмом Маркова.*

Означення:

1) задається алфавіт А;

2) задаються правила підстановки слів з літер алфавіту А замість інших таких слів. Позначимо таке правило $W_1 \to W_2$. Тобто частина слова (слово) W_1 заміняється словом W_2). Вважаємо, що символ $\to \notin A$;

3) фіксуємо порядок застосування цих підстановок;

4) виходячи з заданого (довільного) слова W з літер алфавіту А, перебираючи задані підстановки, знаходять першу підстановку (нехай це: $W_1 \to W_2$), в якій зустрілася ліва частина W_1, що входить в W;

5) ця підстановка використовується для перетворення W в інше слово $\tilde{W}$, в якому замість першого входження W_1 підставляється W_2;

6) далі процес повторюється (переходимо на пункт 4), виходячи зі слова $W = \tilde{W}$, поки не здійсниться його зупинка. Зупинка відбувається в таких двох ситуаціях:

- підстановкою одержується таке слово, що жодна з лівих частин заданих підстановок в нього не входить (і отже не може бути застосована);
- при отриманні слова використана остання підстановка.

Якщо після скінченної кількості кроків процес завершиться, то вважають, що алгоритм може бути застосовано до початкового слова W

Приклад 22. Задамо алфавіт $A = \{1, +\}$ з двох символів і підстановки:

1) $+ \to \Lambda;$

2) $1 \to 1,$

де Λ позначає порожнє слово.

Перетворимо заданим алгоритмом слово 11 + 11 + 1 + 111. Одержимо послідовно такі слова:

1111 + 1 + 111;
11111 + 111;
11111111;
11111111.

Робота алгоритму завершилася, оскільки застосовано останню підстановку, яка перетворила слово з восьми одиниць в це ж слово, замінивши першу одиницю на одиницю.

Якщо сказати про змістовну інтерпретацію алгоритму, то він перетворює суму натуральних чисел, представлених відповідною кількістю одиниць, в їх суму, яка має таке ж представлення. Тобто цей алгоритм реалізує додавання.

Самостійно рекомендується перевірити, що, якщо замінити систему підстановок цього алгоритму на таку:

1) $1+\to -+1$;

2) $+1\to 1$;

3) $1\to 1$.

то отримаємо алгоритм, еквівалентний вихідному.

На основі поняття нормального алгоритму сформульовано *принцип нормалізації,* в якому стверджується, що будь-яка *обчислювана* функція може бути задана за допомогою деякого нормального алгоритму. Цей принцип підтверджується теоремами, що доводять еквівалентність поняття нормального алгоритму іншим уточненням поняття алгоритму, зокрема машині Тьюрінга, яку розглянемо далі.

Принцип нормалізації – це аналог тези Черча в теорії числових обчислювальних функцій.

За допомогою поняття нормального алгоритму була доведена алгоритмічна нерозв'язність ряду математичних проблем.

21. Машина Тьюрінга

Розглянемо математичну модель пристрою, що породжує обчислювальні процеси й одержала назву за прізвищем англійського математика Тьюрінга (1912–1954), який запропонував її для теоретичного уточнення поняття алгоритму з метою подальшого дослідження цього поняття.

Аналогічну модель машини незалежно від Тьюрінга увів американський математик Пост (1897–1954).

Розглянемо схему машини Тьюрінга (див. рис. 3). Вона складається з 1) нескінченної в обидва боки стрічки, яка має комірки; 2) головки *Г*, що оглядає комірку стрічки, 3) пристрій керування ПК; 4) програми, що визначає закон функціонування машини.

Кожна машина Тьюрінга має:

– фіксований скінчений алфавіт X зовнішніх символів;
– скінчену множину A внутрішніх станів.

Машина Тьюрінга функціонує в дискретному часі.

У кожен момент часу *повний стан* машини визначається:

– внутрішнім станом;
– заповненням стрічки;
– коміркою, яку оглядає головка.

Заповнення стрічки визначається тим, що в кожній комірці записано деякий символ з алфавіту *X*, причому в *X* існує порожній символ Λ, який заповнює всі, крім скінченної кількості, комірки.

Стан машини в наступний момент часу однозначно визначається станом у даний момент часу та програмою.

Програма машини кожній парі (x,a), де $a \in A$ – внутрішній стан; $x \in X$ – зовнішній символ, який записано в комірці, що оглядає головка, ставить у відповідність трійку (x',a',z), де $a' \in A,\ x' \in X$, а $z \in \{П,Л,М\}$.

Символ a' означає новий внутрішній стан x' – символ, який записується в комірку, яку оглядає головка, а z – вказує напрям руху головки. Коли $z = Л$ – вліво, $z = П$ – вправо, якщо ж $z = M$, то головка лишається на місці.

У множині внутрішніх станів А є стани, які називають початковим та заключеним.

У початковий момент часу внутрішній стан є початковим станом, а головка оглядає найлівіший непорожній символ, що записано на стрічці.

Машина працює, змінюючи заповнення стрічки, поки не потрапить в заключний стан.

Результатом роботи машини називають скінченне заповнення стрічки.

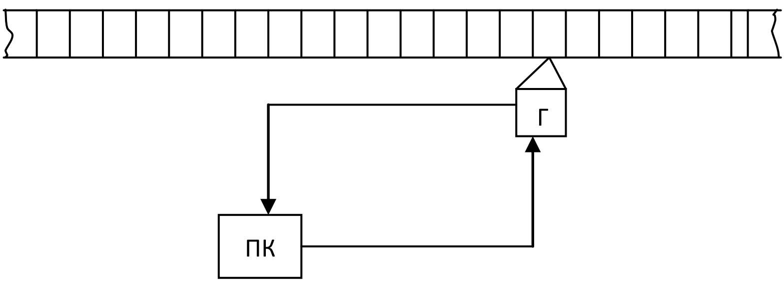


Рисунок 3 – Схема машини Тьюрінга

Програму дії машини Тьюрінга зручно записувати у вигляді функціональної схеми.

Вона аналогічна загальній таблиці переходів скінченного автомата.

Рядкам функціональної схеми відповідають символи зовнішнього алфавіту X, де Λ – порожній символ, а стовпцям – внутрішні стани, де S_1 – початковий стан, а S^* – заключний стан.

У кожній клітині для пари $(x,a), a \in A, x \in X;$ записується відповідна трійка $(x',z,a'), x' \in X, z = \{П, Л, М\}, a' \in A.$

Приклад 23. Розглянемо машину Тьюрінга, що реалізує алгоритм додавання натуральних чисел, представлених відповідною кількістю одиниць, записаних на стрічці підряд без пропусків і з'єднаних знаком +. Результатом є заповнення стрічки відповідною кількістю одиниць (див. табл. 11).

Таблиця 11 – Задання машини Тьюрінга

Вхідні символи	**Внутрішні стани**		
	S_1	S_2	S_3
1	$\Lambda ПS_3$	$1Лs_2$	$1Пs_3$
Λ	$\Lambda Пs_1$	$\Lambda Пs_1$	$1Ms_2$
+	$\Lambda Пs^*$	$+Лs_2$	$+Пs_3$

Нехай перед початком роботи машини на стрічці було вихідне слово 11 + 111 + 1. Початковий стан s_1 – оглядається крайня ліва клітина, де є символ цього слова. Далі маємо таке, де символ, що оглядається головкою, підкреслено:

$$(1,s_1) \to (\Lambda, П, s_3), \underline{1}+111+1;$$

$$(1,s_3) \to (1, П, s_3); \underline{1}+111+1; (+,s_3) \to (+, П, s_3),$$

$$1+\underline{1}11+1; (1,s_3) \to (1, П, s_3), 1+1\underline{1}1+1; (1,s_3) \to (1, П, s_3), 1+11\underline{1}+1;$$

$$(1,s_3) \to (1, П, s_3); 1+111\underline{+}1; (+,s_3) \to (+, П, s_3), 1+111+\underline{1};$$

$$(1,s_3) \to (1, П, s_3); 1+111+1\underline{\Lambda} (\Lambda, s_3) \to (1, M, s_2); 1+111+1\underline{1};$$

одиниця з лівого числа добавлена до одиниці правого числа, головка починає рухатись вліво;

$$(1,s_2)\to(1,Л,s_2);1+111+1\underline{1};(1,s_2)\to(1,Л,s_2),1+111\underline{+}11;$$

$$(+,s_2)\to(+,Л,s_2);$$

$$1+11\underline{1}+11;(1,s_2)\to(1,Л,s_2),1+1\underline{1}1+11;(1,s_2)\to(1,Л,s_2),$$

$$\underline{1}+111+11;(1,s_2)\to(1,Л,s_2),\underline{Λ}1+111+11;(Λ,s_2)\to(Λ,Л,s_1)$$

головка починає рухатись вправо, дійшовши до порожнього, символу $Λ$ зліва; $\underline{1}+111+11;(1,s_1)\to(Λ,П,s_3),$ знову ліва одиниця стирається; $\underline{+}111+11,(+,s_3)\to(+,П,s_3),+\underline{1}11+11.$ Далі процес повторюється, друга одиниця стерта в лівому доданку переноситься в правий, головка, дійшовши до правого краю слова, починає рухатись вліво, доходить до лівого краю слова

$$\underline{+}111+111;(+,s_2)\to(+,Л,s_2),\underline{Λ}+111+111;$$

$$(Λ,s_2)\to(Λ,П,s_1),\underline{+}111+111;(+,s_1)\to(Λ,П,s^*),\underline{1}11+111,$$

одержали заключний стан s^*, робота машини припиняється. До правого числа додане ліве. Щоб зробити ще одне додавання, треба стан машини змінити на початковий s_1 (головка знаходиться в крайньому положенні, отримаємо 111111.

Розглянута машина Тьюрінга є спеціалізованою під кожен окремий алгоритм.

Якщо узагальнити це поняття, записавши програму на стрічку, як і вхідні дані, то отримаємо так звану універсальну машину Тьюрінга. Тоді алгоритм можна розуміти як процес, який може бути реалізовано на машині Тьюрінга. Це є ще одним точним означенням алгоритму поряд з нормальними алгоритмами Маркова.

22. Алгоритмічно нерозв'язні проблеми

Маючи точне означення алгоритму, можна ставити питання: чи існує та чи інша стандартна форма алгоритму (машина Тьюрінга, нормальний алгоритм Маркова, інші), що розв'язує певний клас задач.

Для певних класів задач відповідь негативна:

– не має розв'язків у радикалах алгебраїчних рівнянь степеня вище четвертого;

– не можлива трисекція кута циркулем та лінійкою;

Ці відповіді отримані в спеціальних розділах математики.

Теорія алгоритмів ставить більш загальні проблеми. В її рамках отримана негативна відповідь на питання: чи можна для будь-яких двох формул *A, B* у логічному численні з'ясувати, існує чи ні дедуктивний ланцюжок, що веде від *A* до *B*.

Алгоритмічна нерозв'язність проблеми – це значить не існує *єдиного алгоритму* для розв'язку проблеми в цілому. Але це не означає не існування таких алгоритмів для певних більш вузьких класів задач цієї проблеми.

Так, не зважаючи, що алгоритмічно нерозв'язна проблема розпізнавання виводимості, по суті, вся математика є дедуктивною, тобто як головним методом доведення в ній є виведення теорем з деякої сукупності аксіом.

Зауваження 1. Не треба плутати не розв'язані ще проблеми з тими, для яких доведена їх алгоритмічна нерозв'язність.

Зауваження 2. З практичної точки зору цікава розв'язність проблеми за реальний час на машині, що має реальні ресурси (зокрема обсяг пам'яті).

Зауваження 3. І для алгоритмічно нерозв'язних проблем можна побудувати алгоритми, які з точністю, що задовольняє практику, розв'язують ці проблеми.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ДЖЕРЕЛ

Основні

1. Балога С. І. Дискретна математика : навч. посіб. / С. І. Балога. – Ужгород : ПП «АУТДОР-ШАРК», 2021. – 124 с.
2. Бардачов Ю. М. Дискретна математика / Ю. М. Бардачов, Н. Л. Соколова, В. Є. Ходаков. – Київ : Вища шк., 2002. – 287 с.
3. Боднарчук Ю. В. Основи дискретної математики (для студентів-інформатиків) / Ю. В. Боднарчук, Б. В. Олійник. – Київ : Нац. унів. «Києво-Могилянська Академія». 2007. – 138 с.
4. Бондаренко М. Ф. Комп'ютерна дискретна математика : підручник / М. Ф. Бондаренко Н. В. Білоус, А. Г. Руткас. – Харків : Компанія СМІТ, 2008. – 480 с.
5. Борисенко О. А. Дискретна математика : підручник. – Суми : ВТД «Університетська книга», 2007. – 255 с.
6. Гавриленко С. Ю. Теорія цифрових автоматів та формальних мов. Вступний курс : навч. посіб. / С. Ю. Гавриленко, А. М. Клименко, Н. Ю. Любченко та ін. – Харків : НТУ «ХПІ», 2011. – 176 с.
7. Денисова Т. В. Дискретна математика : метод. рек. до самостійної роботи з теми «Теорія множин і відношень» для студентів галузі знань 12 «Інформаційні технології» першого (бакалаврського) рівня / уклад. Т. В. Денисова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2021. – 80 с.
8. Ємець О. О. Дискретна математика : навч. посіб. / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова. – 2-ге вид., допов. – Полтава : ПУСКУ, 2009. – 287 с.
9. Капітонова Ю. В. Основи дискретної математики : підручник / Ю. В. Капітонова, С. Л. Кривий, О. А. Летичевський та ін. – Київ : Наук. думка, 2002. – 580 с.
10. Коцовський В. М. Основи дискретної математики : навч. посіб. Ужгород : ПП «АУТДОР- ШАРК», 2020. – 128 с.
11. Ліхоузова Т. А. Дискретна математика. Практикум : навч. посібник для студ. спеціальностей 121 «Інженерія програмного забезпечення», 126 «Інформаційні системи та техно-

логії» / Т. А. Ліхоузова; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 62 с.
12. Матвієнко М. П. Дискретна математика : навч. посіб. / М. П. Матвієнко. – Київ : Ліра-К, 2016. – 348 с.
13. Нікольський Ю. В. Дискретна математика / Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина. – Київ : Видавнича група BHV, 2007. – 368 с.
14. Олійник Л. О. «Дискретна математика» : навч. посіб. / Л. О. Олійник. – 2015. – 256 с.
15. Порубльов І. М. Дискретна математика : навч. посіб. для студентів 1 курсу бакалаврату галузі знань «Інформаційні технології» та споріднених / І. М. Порубльов. – Черкаси : Видавець ФОП Гордієнко Є. І., 2018. – 220 с.
16. Темнікова О. Л. Дискретна математика: Конспект лекцій : навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика», освітньої програми «Наука про дані та математичне моделювання» / О. Л. Темнікова. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – Ч. 1. – 154 с.
17. Трохимчук Р. М. Дискретна математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – Київ : ДП «Видавничий дім «Персонал», 2010. – 528 с.
18. Трохимчук Р. М. Збірник задач з теорії множин і відношень / Р. М. Трохимчук. – 2-е видання, перероб. і допов. – Київ : РВЦ «КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ», 2000. – 80 с.
19. Чорней Р. К. Методичні матеріали щодо забезпечення самостійної роботи студентів з дисципліни «Основи дискретної математики» (для бакалаврів) / Р. К. Чорней. – Київ : МАУП, 2008. – 34 с.
20. Ямненко Р. Є. Дискретна математика / Р. Є. Ямненко. – Київ : Четверта хвиля, 2010. – 104 с.

Додаткові

21. Борута І. В. Тренажер «Відношення. Область визначення, область значень, граф, матриця відповідності, переріз за елементами» дистанційного навчального курсу «Дискретна математика» [Електронний ресурс] / І. В. Борута, Т. О. Парфьонова // Комп'ютерні науки і прикладна математика (КНіПМ-2021) : матеріали наук.-практ. семінару. Випуск 6. / за ред. Ємця О. О. – Полтава : Кафедра ММСІ ПУЕТ, 2021

– Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/10408. – Назва з екрана.
22. Бурко А. О. Створення тренажеру дистанційного навчального курсу «Дискретна математика» з теми «Алгебра Жегалкіна, способи побудови поліномів Жегалкіна» [Електронний ресурс] / А. О. Бурко // Комп'ютерні науки і прикладна математика (КНіПМ-2021) : матеріали наук.-практ. семінару. Випуск 6. / за ред. Ємця О. О. – Полтава : Кафедра ММСІ ПУЕТ, 2021 – Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/10409. – Назва з екрана.
23. Ємець О. О Дискретна математика. Контрольні тести: Множини. Відношення. Булеві функції. Графи / О. О. Ємець, Т. В. Чілікіна. – Полтава : ПолтНТУ, 2002. – 29 с.
24. Ємець О. О. Конспект лекцій із дисципліни «Дискретна математика». Частина 1 : «Множини та відношення» для студентів спеціальностей «Інформатика», «Прикладна математика» / О. О. Ємець. – Полтава : ПолтНТУ, 2003. – 41 с.
25. Ємець О. О. Конспект лекцій із дисципліни «Дискретна математика». Частина 3: «Комбінаторика» для студентів спеціальностей «Прикладна математика», «Інформатика» / О. О. Ємець. – Полтава : ПолтНТУ, 2003. – 31 с.
26. Стасюк Ю. В. Про розробку тренажера для дистанційного навчального курсу «Дискретна математика» з обчислення булевих функцій [Електронний ресурс] / Ю. В. Стасюк, Т. О. Парфьонова // Інформатика та системні науки (ІСН-2017) : матеріали VIII Всеукр. наук.-практ. конф. (м. Полтава, 16–18 березня 2017 р.) / за ред. О. О. Ємця. – Полтава : ПУЕТ, 2017. – С. 255–258. – Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/5651. – Назва з екрана.
27. Стрелковська І. В. Практичні заняття з дискретної математики. Теорія множин, математична логіка, графи, теорія чисел, алгебраїчні структури: методичні вказівки для самостійного розв'язування індивідуальних домашніх завдань для студентів технічних спеціальностей / І. В. Стрелковська, А. Г. Буслаєв, В. М. Вишневська, О. М. Харсун, Л. Л. Кольцова. – Одеса, 2008.
28. Шабоян А. Т. Тренажер «Матриці суміжності для неорієнтованих графів без петель» [Електронний ресурс] /

А. Т. Шабоян, Є. М. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Комп'ютерні науки і прикладна математика (КНіПМ-2020) : матеріали наук.-практ. семінару. Випуск 5 / за ред. Ємця О. О. – Полтава : Кафедра ММСІ ПУЕТ, 2020. – С. 17–21. – Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/8269. – Назва з екрана.

29. Шабоян А. Т. Тренажер «Матриці суміжності для орієнтованих графів без петель» [Електронний ресурс] / А. Т. Шабоян, Є. М. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Комп'ютерні науки і прикладна математика (КНіПМ-2020) : матеріали наук.-практ. семінару. Випуск 5 / за ред. Ємця О. О. – Полтава : Кафедра ММСІ ПУЕТ, 2020. – С. 52–55. – Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/8905. – Назва з екрана.
30. Шарапов О. Д. Дискретний аналіз / О. Д. Шарапов, Д. Є. Семьонов, В. Д. Дербянцев. – Київ : КНЕУ, 2002. – 126 с.
31. Шевченко Г. В. Дискретна математика : навч.-метод. посіб. / Г. В. Шевченко. – Київ : ДУТ, 2015. – 158 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Критерії підсумкового контролю результатів навчання студента з дисципліни «Дискретна математика»

Оцінка за шкалою ЄКТС*	Оцінка за бальною шкалою, що використовується в ПУЕТ	Оцінка за 4-баловою шкалою
F	1–34	2 – незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни
FX	35–59	2 – незадовільно з можливим повторним складанням іспиту
E D	60–65 66–70	3 – задовільно
C B	71–78 79–85	4 – добре
A	86–100	5 – відмінно

Додаток Б

Розподіл балів, що отримають студенти за результатами вивчення дисципліни «Дискретна математика»

Назва модулів, теми	Вид навчальної роботи	Кількість балів
Модуль 1. Теорія множин	Усі види	51
Модуль 2. Булеві функції	Усі види	49
Разом за семестр		100
Модуль 3. Комбінаторика	Усі види	51
Модуль 4. Теорія графів та скінченних автоматів, алгоритмів та математична логіка	Усі види	49
Разом за семестр		100

Рейтинг студента за дисципліною – напівсума балів за семестри, заокруглена до цілого балу.

Додаток В

Система нарахування балів за видами навчальної роботи

Вид діяльності	**Максимальна кількість балів за вид**
Частина 1	
1. Аудиторна (лекції та практичні) Відвідування занять 1 частини (при дистанційному навчанні – тестування) (20 балів)	20
Модуль 1. Теорія множин Правильна відповідь при опитуванні (2 бали за відповідь, 3 відповіді за 1 модуль) 6 балів. 2. Самостійна робота Виконання розрахунково-графічного завдання з ч. 1 модуля 1: - за виконання в термін (8 балів); - за виконання з порушенням в тиждень (7 балів); - за виконання з порушенням більше тижня (5 балів). 3. Модульний контроль. МКР (підсумкове тестування) (7 балів)	21
Модуль 2. Булеві функції Правильна відповідь при опитуванні (2 бали за відповідь, 2 відповіді за 2 модуль) 4 бали. 2. Самостійна робота Виконання розрахунково-графічного завдання з ч. 1 модуля 2: - за виконання в термін (8 балів); - за виконання з порушенням в тиждень (7 балів); - за виконання з порушенням більше тижня (5 балів). 3. Модульний контроль. МКР (підсумкове тестування) (7 балів)	19
Поточне оцінювання	60
Екзамен	40
Разом (частина 1)	**100**
Частина 2	
1. Аудиторна (лекції та практичні) Відвідування занять 2 частини (при дистанційному навчанні – тестування) (20 балів)	20

Продовж. системи нарахування балів за видами навчальної роботи

Вид діяльності	Максимальна кількість балів за вид
Модуль 3. Комбінаторика Правильна відповідь при опитуванні (2 бали за відповідь, 3 відповіді за 3 модуль) 6 балів. 2. Самостійна робота Виконання розрахунково-графічного завдання з ч. 2 модуля 3: - за виконання в термін (8 балів); - за виконання з порушенням в тиждень (7 балів); - за виконання з порушенням більше тижня (5 балів). 3. Модульний контроль. МКР (підсумкове тестування) (7 балів)	21
Модуль 4. Теорія графів, скінчених автоматів, алгоритмів та математична логіка Правильна відповідь при опитуванні (2 бали за відповідь, 2 відповіді за 4 модуль) 4 бали. 2. Самостійна робота Виконання розрахунково-графічного завдання з ч. 2 модуля 4: - за виконання в термін (8 балів); - за виконання з порушенням в тиждень (7 балів); - за виконання з порушенням більше тижня (5 балів). 3. Модульний контроль. МКР (підсумкове тестування) (7 балів)	19
Поточне оцінювання	60
Екзамен	40
Разом (частина 2)	**100**

Якщо студент хоче підвищити кількість балів, що одержана в семестрі (від 0 до 100 балів), шляхом здачі іспиту, то підсумкова оцінка одержується як семестрова оцінка з множником 0,6 плюс бали, отримані на іспиті (11–40). Якщо в семестрі отримана більша сума балів, ніж отримана після іспиту, то виставляється більша з двох кількостей балів.

Додаток Г

Система нарахування додаткових балів за видами робіт з вивчення дисципліни «Дискретна математика»

Форма роботи	**Вид роботи**	**Бали (1 робота)**
Навчальна	1. Участь в предметних олімпіадах: • університетських • міжвузівських • всеукраїнських • міжнародних	5 10 15 30
	2. Участь в конкурсах на кращого знавця дисципліни: • університетських • міжвузівських • всеукраїнських • міжнародних	5 10 15 30
	3. Виконання індивідуальних навчально-дослідних завдань підвищеної складності	10
	4. Відпрацювання пропущеного заняття (лекції, практичного, лабораторного заняття)	1
Науково-дослідна	1. Участь в наукових гуртках	1
	2. Участь в конкурсах студентських робіт: • університетських • міжвузівських • всеукраїнських • міжнародних	5 10 15 30
	3. Участь в наукових студентських конференціях: • університетських • міжвузівських • всеукраїнських • міжнародних	5 10 15 30

Примітка: Додаткові бали додаються до основних. При перевищенні 100 балів сума вважається рівною 100 балам (рейтинг може бути і більше 100 балів).

Додаток Д

Система нарахування штрафних балів за видами робіт з вивчення дисципліни «Дискретна математика»

Форма роботи	Вид порушень	Бали
Навчальна, самостійна, індивідуально-консультативна робота студента	Порушення термінів виконання РГР: - до 5 днів - 6 днів і більше	–20 % балів –40 % балів за РГР

Примітка. РГР, виконане в повному обсязі з порушенням термінів більше 5 днів, зараховується як виконане з виставленням мінімальної кількості балів (60 %), тобто штраф може зменшити оцінку тільки до мінімальної. Відсоток штрафних балів розраховується від кількості балів за виконану частину РГР.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ЄМЕЦЬ Олег Олексійович
ПАРФЬОНОВА Тетяна Олександрівна

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Редагування *Л. М. Діденко*
Дизайн обкладинки *О. Г. Оріхівська*
Комп'ютерне верстання *О. С. Корніліч*

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 16,4.
Зам. № 269/2046.

Видавець і виготовлювач
Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«Полтавський університет економіки і торгівлі»,
к. 115, вул. Коваля, 3, м. Полтава, 36014; ☎(0532) 50-24-81

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видав продукції ДК № 3827 від 08.07.2010 р.