**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**Національний технічний університет України**

**«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**

# ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА. Частина 1.

## Основи дискретної математики.

## ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського*

*як навчальний посібник для студентів,*

*які навчаються за спеціальністю 113 «Прикладна математика»,*

*освітньою програмою «Наука про дані та математичне моделювання»*

Київ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2023

Рецензенти: *Романкевич В.О.*, д-р техн. наук., проф., професор кафедри системного програмування і спеціалізованих комп'ютерних систем ФПМ

Відповідальний редактор *Тарасенко-Клятченко О.В.,* канд. техн. наук, доц., доцент кафедри системного програмування і спеціалізованих комп'ютерних систем ФПМ

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 27.04.2023р.)*

*за поданням Вченої ради факультету прикладної математики (протокол № 8 від 27.03.2023 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

*Темнікова Олена Леонідівна*

*Тавров Данило Юрійович*

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА. Частина 1. Основи дискретної математики.

ПРАКТИКУМ

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА. Частина 1. Основи дискретної математики. ПРАКТИКУМ [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика», освітньої програми «Наука про дані та математичне моделювання» / О. Л. Темнікова, Д. Ю. Тавров; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 2,28 Мбайт). — Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. — 121 с.

Навчальний посібник розроблено для оволодіння студентами, які навчаються за спеціальністю 113 «Прикладна математика», освітньою програмою «Наука про дані та математичне моделювання» факультету прикладної математики КПІ ім. Ігоря Сікорського, практичними навичками з кредитного модуля «Дискретна математика. Частина 1». Даний практикум з основ дискретної математики містить основні теоретичні відомості та практичні прийоми розв'язання задач із теорії множин, відношень та відображень; побудови діаграм Гассе та дослідження решіток; основ теорії графів.

© О. Л.Темнікова, Д. Ю. Тавров, 2023

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

## ЗМІСТ

# ВСТУП

Навчальне видання призначено для студентів, які вивчають дисципліну «Дискретна математика» з циклу загальної підготовки навчального плану спеціальності 113 «Прикладна математика», і є базовою в навчанні за освітньо-професійною програмою «Наука про дані та математичне моделювання», що спрямована на розроблення і використання нових інформаційних технологій, моделювання складних систем, систем штучного інтелекту, і для вирішення інших задач професійної діяльності.

Дисципліна «Дискретна математика» складається з двох кредитних модулів. Цей практикум розглядає теми й приклади, що належать до кредитного модуля «Дискретна математика. Частина 1. Основи дискретної математики». Модуль розраховано на 36 академічних годин лекційних та 36 академічних годин практичних занять; вивчається на факультеті прикладної математики в 1 семестрі; складається з трьох розділів: теорія множин і відношень, решітки, основи теорії графів.

Метою вивчення кредитного модуля «Дискретна математика. Частина 1» є засвоєння основних понять і методів, потрібних для опанування дальших дисциплін спеціальності «113 Прикладна математика», формування світогляду на дискретну математику як на фундаментальну науку, формування в студентів здатностей моделювати процеси за допомогою дискретних математичних об’єктів та визначати властивості дискретних математичних структур.

Предметом вивчення кредитного модуля є такі об’єкти, як множини, відношення, графи, решітки; їхні властивості й взаємовідношення.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми, студенти після засвоєння кредитного модуля «Дискретна математика. Частина 1» мають продемонструвати знання основних понять теорії множин, відношень і графів; уміння визначення властивостей дискретних структур та їх аналізу; навички алгебричних перетворень виразів алгебри множин; досвід побудови діаграм Гассе та визначення основних характеристик графів.

У цьому практикумі розглядаються основні теоретичні відомості та практичні прийоми розв’язання задач із теорії множин, відношень, відображень та графів; увагу привернуто дослідженню різних видів відношень, решіток.

Кожній темі відповідає глава у практикумі; перед завданнями наведено короткі теоретичні відомості; приклад, що демонструє виконання та оформлення розв’язання задач за даною темою; наприкінці кожного розділу — відповіді й розв’язання деяких завдань. Практикум містить список рекомендованої літератури і додатоки: із теоретичними відомостями про потужність множин; методичними вказівками щодо виконання перевірочних комплексних контрольних робіт і списком контрольних запитань та тестових завдань до кожної теми, які допомагають закрепити та поглибити розуміння матеріалу.

Це видання оновлює і значно розширює практикум із дисципліни «Дискретна математика» для студентів спеціальності 113 «Прикладна математика» / О. Л. Темнікова [Електронне видання] – К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. Видання має стати в пригоді під час проведення практичних занять, для підготовки до ректорського контролю та вступних іспитів на навчання за програмами магістерської підготовки.

# 1. МНОЖИНИ

## 1.1. Змістовна теорія множин

***<u>Теоретичні відомості</u>***

*Множина S* є будь-яке зібрання визначених і розрізнюваних між собою об'єктів нашої інтуїції або інтелекту, мислиме як єдине ціле. Ці об'єкти називають *елементами* множини. Множина *повністю визначається своїми елементами.*

Про елементи говорять, що вони належать множині, і записують це так: $x \in A$ (читають: «$x$ належить множині $A$», або «$x$ є елементом множини $A$»). Запис $x \notin A$ означає, що x не належить множині $A$.

Елементи деякої множини самі можуть бути множинами. Наприклад, множина $A = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}\}$ є множина з трьох елементів ($|A| = 3$), а саме: $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$ і $\{5, 6\}$. Множини $B = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ і $C = \{1, 2, 3\}$ — різні множини, оскільки елементами першого є $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, і тоді $|B| = 2$, а елементами другого є 1, 2 і 3, відтак $|C| = 3$. Множини $D = \{\{1, 2\}\}$ і $G = \{1, 2\}$ також різні, оскільки перша — одноелементна множина, що має єдиним своїм елементом $\{1, 2\}$, а друга має своїми елементами 1 і 2.

Якщо $A$ і $B$ є множини, то кажуть, що *$A$ включена в $B$*, якщо кожен елемент множини $A$ є також елементом множини $B$ (символічний запис: $A \subseteq B$ або $B \supseteq A$). У цьому випадку кажуть, що множина *$A$ є підмножиною множини $B$*. Множина *$A$ строго включена в $B$*, або *$B$ строго включає $A$*, або $A$ є ***власна*** *підмножина $B$*, якщо $A \subseteq B$ і $A \neq B$ (символічно: $A \subset B$).

Із принципу об'ємності витікає, що може бути тільки одна множина, що не має елементів. Цю множину називають *порожньою* і позначають її символом $\varnothing$. Порожня множина є підмножина будь-якої множини.

Кожна множина $A \neq \varnothing$ має, принаймні, дві різні підмножини: саму $A$ і $\varnothing$, тобто $A \subseteq A$ і $\varnothing \subseteq A$. Крім того, кожний елемент множини $A$ визначає деяку підмножину множини $A$: якщо $a \in A$, то $\{a\} \subseteq A$.

Множину всіх підмножин множини $A$ називають *множиною-степенем або булеаном* множини $A$ і позначають через $\wp(A)$. Для скінченної множини $A$, що складається з $n$ елементів, $\wp(A)$ містить $2^n$ елементів.

Підкреслімо відмінність між відношеннями належності та включення: якщо $B \subseteq A$, то $B \in \wp(A)$, а якщо $a \in A$, то $\{a\} \subseteq A$ і $\{a\} \in \wp(A)$.

**Операції над множинами**

***Об'єднання*** множин $A$ і $B$ (позначають через $A \cup B$) є множина всіх елементів, які є елементами множин $A$ або $B$, тобто $A \cup B = \{x \mid x \in A$ або $x \in B\}$. Наприклад: $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

***Перетин*** множин $A$ і $B$ (позначають через $A \cap B$) є множина всіх елементів, які є елементами обох множин $A$ і $B$, тобто $A \cap B = \{x \mid x \in A$ і $x \in B\}$. Наприклад: $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 4\} = \{1, 3\}$.

Для будь-якої пари множин $A$ і $B$ мають місце такі включення:

$\varnothing \subseteq A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.

Дві множини $A$ і $B$ називають ***неперетинними*** (або диз'юнктними), якщо $A \cap B = \varnothing$, і перетинними, якщо $A \cap B \neq \varnothing$. Систему множин називають розчленованою, якщо будь-яка пара її різних елементів є неперетинною.

***Розбиттям*** множини $X$ будемо називати таку розчленовану систему $U$ непорожніх і різних підмножин множини $X$, де кожен елемент множини $X$ є в той же час елементом деякого (отже, в точності одного) елемента системи $U$.

Наприклад, $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$ є одне з можливих варіантів розбиття множини $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; інша з можливостей – $\{\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$ і т.д. Кількість варіантів розбиття визначається числами Белла.

*Абсолютне доповнення* множини $A$ (позначають через $\bar{A}$, або $A'$, або $\neg A$) — це множина всіх елементів, що не є елементами множини $A$: $\{x \mid x \notin A\}$.

*Відносне доповнення* множини $B$ до множини $A$ — це множина $A \cap B'$; його зазвичай позначають через $A \backslash B$ (іноді $A–B$), що читається як «$A$ мінус $B$».

Отже $A \backslash B = A \cap B'$ є скорочення для $\{x \in A \mid x \notin B\}$, тобто це множина тих елементів множини $A$, які не є елементами множини $B$.

Наприклад: $\{1, 2, 3\} \setminus \{1, 3, 4\} = \{2\}$, а $\{1, 3, 4\} \setminus \{1, 2, 3\} = \{4\}$

***Симетрична різниця*** множин $A$ і $B$, яку позначають через $A + B$ (використовують також позначення $A \Delta B$ або $A \div B$), визначається так: $x \in A + B$ тоді й тільки тоді, коли $x$ належить точно одній із множин $A$ і $B$:

$A + B = \{x \mid (x \in A$ і $x \notin B)$ або $(x \notin A$ і $x \in B)\}$.

Із визначення випливає, що $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Ця операція є:

- комутативна: $A + B = B + A$;
- асоціативна: $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- дистрибутивна відносно перетину: $(A + B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C)$.

Крім того, $A + A = \varnothing$ і $A + \varnothing = A$.

Наприклад: $\{1, 2, 3\} + \{1, 3, 4\} = \{2, 4\}$.

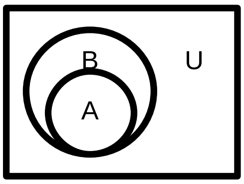
Якщо всі множини, які розглядають під час деякого міркування, є підмножинами деякої множини ***U***, то цю множину ***U*** називають *універсальною* або *універсумом* (для цього міркування). Тоді абсолютне доповнення множини $A$ можна розглядати як $U \setminus A$.

Для графічної ілюстрації відношень, які можуть мати місце між підмножинами деякої універсальної множини ***U***, використовують так звані діаграми Венна (круги Ейлера)[1] — схематичні зображення множин у вигляді точкових множин. Універсальну множину ***U*** зображують як множину точок деякого прямокутника, а його підмножину $A$ — у вигляді круга або деякої іншої простої області всередині цього прямокутника.

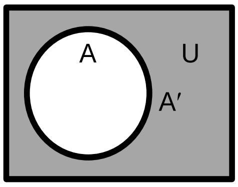
---

[1] ***Джон Венн*** (John Venn, 1834–1923) *– англійський логік і філософ. Основною областю зацікавленості Джона Венна була логіка. Венн розширив математичну логіку Буля, але найбільше відомий за свій схематичний спосіб подання множин.*

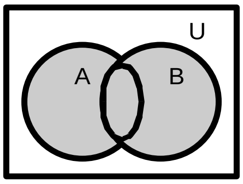
***Леона́рд Е́йлер, правильніше О́йлер*** (Leonhard Euler, 1707–1783) *– швейцарський математик і фізик. Ейлера вважають найвидатнішим математиком 18-го століття, а, можливо, навіть усіх часів. Він також є одним із найбільш плідних — збірка всіх його творів зайняла б 60—80 томів. Ейлер здійснив важливі відкриття в таких різних галузях математики, як математичний аналіз та теорія графів. Ейлер відомий також завдяки своїм роботам в оптиці, астрономії, механіці, інших прикладних науках.*



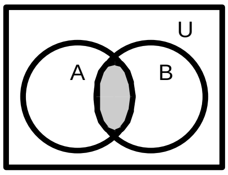

Відношення включення: $A \subseteq B, A \cap B = A$




Абсолютне доповнення: $A'$




Об’єднання множин $A \cup B$




Перетин множин $A \cap B$

Доведення тверджень або теорем за допомогою діаграм Венна не є легітимним доведенням з огляду на те, що рисунки не вичерпують усіх можливих взаємозв’язків між множинами.

***Приклад 1.*** Довести, що $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq B' \cup C$.

*Доведення*. Доведімо, що якщо $A \cap B \subseteq C$, то $A \subseteq B' \cup C$.

Для кожного $a \in A$ маємо або $a \in B$, або $a \in B'$. Якщо $a \in B$, то $a \in A \cap B$, а оскільки $A \cap B \subseteq C$, то $a \in C$. Отже $a \in B' \cup C$. Якщо $a \notin B$, то $a \in B'$. Тоді $a \in B' \cup C$. Отже, кожен елемент $a \in A$ належить і $B' \cup C$, тобто $A \subseteq B' \cup C$.

Доведімо тепер, що якщо $A \subseteq B' \cup C$, то $A \cap B \subseteq C$.

Нехай кожен елемент $a \in A$ належить також $B' \cup C$, тобто $a \in B' \cup C$. Тоді або $a \in B'$, або $a \in C$. Якщо кожний елемент $a \in B'$, то $a \notin B$, і $A \cap B = \varnothing$, а оскільки $\varnothing$ включено в будь-яку множину, то $\varnothing \subseteq C$, тому $A \cap B \subseteq C$. Якщо $a \notin B'$, то $a \in C$ і деякі $a \in B$. Тоді $A \cap B \neq \varnothing$, і якщо $a \in B$, то $a \in C$, і з цього випливає, що $A \cap B \subseteq C$.

Ми довели, що якщо $A \cap B \subseteq C$, то $A \subseteq B' \cup C$, а також, що якщо $A \subseteq B' \cup C$, то $A \cap B \subseteq C$.

Отже, $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq B' \cup C$.

**Завдання 1.1.1.** Чи виконуються співвідношення?

***1)*** $2 \in \{1, 2, 3\}$,

***2)*** $\{2\} \in \{ \{1\}, \{2\} \}$,

***3)*** $\{1, 2\} \in \{ \{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$,

***4)*** $\{1, 2\} \subseteq \{ \{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$,

***5)*** $2 \in \{ \{1\}, \{2\} \}$,

***6)*** $\{2\} \subseteq \{ \{1\}, \{2\} \}$.

**Завдання 1.1.2.** Визначити:

***1)*** $A \cap \varnothing$

***2)*** $A \cup \varnothing$

***3)*** $A \backslash \varnothing$

***4)*** $A \backslash A$

***5)*** $\varnothing \backslash A$

***6)*** $\varnothing \cap \{\varnothing\}$

***7)*** $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$

***8)*** $\{ \varnothing, \{\varnothing\} \} \backslash \varnothing$

***9)*** $\{ \varnothing, \{\varnothing\} \} \backslash \{\varnothing\}$

***10)*** $\{ \varnothing, \{\varnothing\} \} \backslash \{ \{\varnothing\} \}$

***11)*** $A + A$

***12)*** $A + \bar{A}$

***13)*** $A + \varnothing$

***14)*** $A + \boldsymbol{U}$

***15)*** $\bar{A} + \boldsymbol{U}$

***16)*** $\varnothing + \boldsymbol{U}$

**Завдання 1.1.3.** Довести виконуваність співвідношень змістовної теорії множин (символ $\Leftrightarrow$ означає «еквівалентно», символ $\Rightarrow$ означає «випливає»):

***1)*** $A \cap B \subseteq C'$ і $A \cup C \subseteq B \Rightarrow A \cap C = \varnothing$;

***2)*** $A \subseteq B$ і $C \subseteq D \Rightarrow A \backslash D \subseteq B \backslash C$;

***3)*** $A \backslash C \subseteq (A/B) \cup (B/C)$;

***4)*** $(A \backslash B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$;

***5)*** $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$;

***6)*** $A \cup B' = \boldsymbol{U} \Leftrightarrow B \subseteq A$.

**Завдання 1.1.4.** Показати в змістовній теорії множин, що операція симетричної різниці:

комутативна $A + B = B + A$,

асоціативна $(A + B) + C = A + (B + C)$,

дистрибутивна щодо перетину $(A + B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C)$.

*Чому дистрибутивність щодо об'єднання не виконується?*

*Також показати, що* $(A \cap B) + C \neq (A + C) \cap (B + C)$.

## 1.2. Алгебра множин

***Теоретичні відомості***

Визначмо *алгебру множин* як четвірку: $< M, \cup, \cap, ' >$, де $M$ — множина-ступінь універсальної множини $\boldsymbol{U}$**,** а множина операцій складається з операцій об'єднання ($\cup$), перетину ($\cap$) і доповнення ($'$) множини до множини $\boldsymbol{U}$.

У **змістовній теорії множин** за допомогою відношення **належності** елементів множини можна довести таку **теорему**.

**Теорема змістовної теорії множин.** Для будь-яких підмножин $A$, $B$ і $C$ деякого універсуму $\boldsymbol{U}$ тотожностями є такі рівності:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ | $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ | Асоціативність |
| 2) | $A \cup B = B \cup A$ | $A \cap B = B \cap A$ | Комутативність |
| 3) | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | Дистрибутивність |
| 4) | $A \cup \varnothing = A$ | $A \cap \boldsymbol{U} = A$ | Обмеження |
| 5) | $A \cup A' = \boldsymbol{U}$ — виключення третього | $A \cap A' = \varnothing$ — непротиріччя (протиріччя) | Логічні закони |

Із цих тотожностей можна вивести будь-яку теорему алгебри множин, уже без використання поняття належності. Тобто для алгебри множин теорема змістовної теорії множин виступає як аксіома алгебри множин.

**Теорема алгебри множин.** Для довільних підмножин $A$ і $B$ деякої універсальної множини $\boldsymbol{U}$ справедливі такі твердження:

6) якщо для будь-якого $A$ виконується $A \cup B = A$, то $B = \varnothing$,

якщо для будь-якого $A$ виконується $A \cap B = A$, то $B = \boldsymbol{U}$**;**

7) якщо $A \cup B = \boldsymbol{U}$ і $A \cap B = \varnothing$, то $B = A'$;

8) $A'' = A$ : інволюція*;*

9) $\varnothing' = \boldsymbol{U},\quad \boldsymbol{U}' = \varnothing$;

10) $A \cup A = A,\quad A \cap A = A$ : закони ідемпотентності;

11) $A \cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U},\quad A \cap \varnothing = \varnothing$ : властивості $\boldsymbol{U}$ та $\varnothing$;

12) $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$ : закони поглинання (абсорбції);

13) $(A \cup B)' = A' \cap B',\quad (A \cap B)' = A' \cup B'$: закони де Моргана.

Наслідки з теореми:

14) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A,\quad (A \cup B) \cap (A \cup B') = A$: склеювання;

15) $A \cup (A' \cap B) = A \cup B,\quad A \cap (A' \cup B) = A \cap B$: поглинання доповнення.

Пріоритет виконання операцій: *доповнення* — найвищий, *перетин та об'єднання* — наступний, однаковий один до одного. Операції різниці та симетричної різниці не є алгебричними, пріоритет не встановлюється, використовуються для скорочення записів:

$A \backslash B = A \cap B'$;  $A + B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

***Приклад 2.*** Спростити вираз $(A' \cap B' \cap C)' \cap (A' \cap B)' \cap (A' \cap C)$. Завдання перевіряє знання аксіом і теорем алгебри множин.

*Розв'язання.* $(A' \cap B' \cap C)' \cap (A' \cap B)' \cap (A' \cap C)$ = *за законом де Моргана й асоціативним законом*

$= (A' \cap B' \cap C)' \cap (A \cup B') \cap A' \cap C$ = *за законом поглинання доповнення*

$= (A' \cap B' \cap C)' \cap B' \cap A' \cap C$ = *комутативний і асоціативний закон*

$= (A' \cap B' \cap C)' \cap (A' \cap B' \cap C)$ = *за законом протиріччя* $A \cap A' = \emptyset$

$= \emptyset$.

**Завдання 1.2.1.** Визначити, чому дорівнює вираз алгебри множин:

***1)*** $A \backslash (A \backslash B)$

***2)*** $A \cap (B \backslash A)$

***3)*** $A + \emptyset$

***4)*** $A + A$

***5)*** $A + \mathbf{U}$

***6)*** $A + A'$

***7)*** $A + (A + B)$

**Завдання 1.2.2.** Довести в алгебрі множин:

***1)*** $(A + B)' = A' + B$

***2)*** $A' + B' = A + B$

***3)*** $(A' + B')' + B = A'$

**Завдання 1.2.3.** Довести алгебрично за умови $A \subseteq B$:

***1)*** $A' \cap B' = B'$

***2)*** $A \cap B' = \emptyset$

***3)*** $A' \cup B = \mathbf{U}$

***4)*** $A' \cup B' = \mathrm{A}'$

**Завдання 1.2.4.** Спростити вирази в алгебрі множин:

***1)*** $(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B)$

***2)*** $(A \cap B')' \cup B$

***3)*** $(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (B' \cup C')$

***4)*** $(A \cap B \cap C \cap D) \cup (A' \cap C) \cup (B \cap C) \cup (C \cap D)$

***5)*** $(A \cap B \cap C \cap D') \cup (A' \cap C) \cup (B' \cap C) \cup (D \cap C)$

***6)*** $D \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C \cap D) \cup (B \cap C \cap D) \cup (C \cap D) \cup A$

***7)*** $((((A' \cup B)' \cup A')' \cup B')' \cup C')' \cup C$

***8)*** $((A \cap B)' \cap (A' \cap B'))'$

***9)*** $((B \cap C') \cap (B \cap A')') \cup (A' \cup C)$

***10)*** $((A' \cup B)' \cap (A \cup B'))'$

***11)*** $(A \backslash B)' \backslash ((A' \cup B)' \cup (A \cup B'))$

***12)*** $(A \cap B) \cup (B \cap \varnothing) \cup (A \cap \boldsymbol{U})$

***13)*** $(A \cup B) \cap (B \cup \varnothing) \cap (A \cup \boldsymbol{U})$

**Завдання 1.2.5.** Визначити алгебрично, чому дорівнює вираз:

***1)*** $A \cap B + A$

***2)*** $A' \cap B + B$

***3)*** $A \cap B' + A$

***4)*** $A \cap B' + B$

***5)*** $A' \cap B + A$

***6)*** $A \cup B' + B$

***7)*** $A + A \cup B$

***8)*** $(A' + B')' + A \cap B$

***9)*** $(A' \cap B')' + A' + B'$

***10)*** $A \cap B + A + B$

***11)*** $(A' + B)' + B$

***12)*** $B \cap C \cap (B' + C')$

***13)*** $B' + (A \cap C) + B$

***14)*** $(A' + B) \cap (A + B')$

***15)*** $(B + C') + (B + C)$

***16)*** $A \cup B + A' + B'$

**Відповіді до розділу 1**

**1.1.1. Відповідь НІ — 3, 5, 6.**

**1.1.2.**

***1)*** $\varnothing$

***2)*** $A$

***3)*** $A$

***4)*** $\varnothing$

***5)*** $\varnothing$

***6)*** $\varnothing$

***7)*** $\{\varnothing\}$

***8)*** $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

***9)*** $\{\{\varnothing\}\}$

***10)*** $\{\varnothing\}$

***11)*** $\varnothing$

***12)*** $\mathbf{U}$

***13)*** $A$

***14)*** $\bar{A}$

***15)*** $A$

***16)*** $\mathbf{U}$

**1.1.3.**

**1)** $A \cap B \subseteq C'$ і $A \cup C \subseteq B \Rightarrow A \cap C = \varnothing$

*Якщо* $A \cup C \subseteq B$, *то* $A \subseteq B$ *і* $C \subseteq B$. *Через це* $A \cap B = A$ *і за умовою* $\subseteq C'$. *Якщо* $A \subseteq C'$, *то елементи* $A$ *не можуть мати спільних із* $C$, *що є* $A \cap C = \varnothing$.

**2)** $A \subseteq B$ і $C \subseteq D \Rightarrow A\backslash D \subseteq B\backslash C$

$x \in A\backslash D \Rightarrow x \in A$ *і* $x \in D' \Rightarrow x \in B$ *(за умовою* $A \subseteq B$*) і* $x \in C'$ *(за умовою* $C \subseteq D \Rightarrow D' \subseteq C'$*)* $\Rightarrow x \in B\backslash C \Rightarrow A\backslash D \subseteq B\backslash C$.

**3)** $A\backslash C \subseteq (A/B) \cup (B/C)$

$$x \in A\backslash C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in C' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A & \left[\begin{array}{l} x \in B \\ x \in B' \end{array}\right. \\ x \in C' & \left[\begin{array}{l} x \in B \\ x \in B' \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \text{ і } x \in B' \\ x \in B \text{ і } x \in C' \end{array}\right. \Rightarrow x \in (A/B) \cup (B/C)$$

**4)** $(A\backslash B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

*Загальний підхід:*

$x \in A \Rightarrow x \in (A\backslash B) \cup (A \cap B)$. *Через те, що* $A \cap B$, *випливає* $B \Rightarrow B \subseteq A$.

**5)** $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$

*Треба розписати, наприклад,* $(A \cap B) \cup C$*:*

$x\in (A \cap B) \cup C \Rightarrow x\in A \cap B$ *або* $x\in C \Rightarrow (x\in A$ *і* $x\in B)$ *або* $x\in C \Rightarrow$ *розподілімо — переставмо дужки* $\Rightarrow (x\in A$ *або* $x\in C)$ *і* $(x\in B$ *або* $x\in C) \Rightarrow x\in (A \cup C) \cap (B \cup C)$*. З іншого боку,* $x\in A \cap (B \cup C) \Rightarrow A \cup C = A$*, а це є властивістю* $C \subseteq A$*.*

**7)** $A \cup B' = \mathbf{U} \Leftrightarrow B \subseteq A$

*а)* $A\cup B' = \mathbf{U} \Rightarrow B \subseteq A$

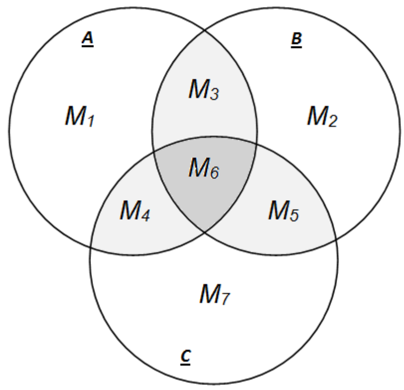
*Від супротивного. Якщо не виконується* $B \subseteq A$*, то знайдеться такий x, що в B входить (*$x\in B$*), але A не належить.*

*Такий x не може належати* $A \cup B'$*, то тоді* $A \cup B'$ *не буде давати* $\mathbf{U}$*.*

*б)* $B \subseteq A \Rightarrow A\cup B' = \mathbf{U}$

$B \subseteq A \Rightarrow A' \subseteq B' \Rightarrow$ Якщо брати до уваги, що $A \cup A' = \mathbf{U}$ — уже дорівнює $\mathbf{U}$, *а* $A' \subseteq B'$*, тобто* $A\cup A' \subseteq A \cup B'$*, то* $A \cup B' = \mathbf{U}$ *(теж дорівнює* $\mathbf{U}$*).*

**1.1.4.** *Вказівка:* для ілюстрації доведення твердження можна скористуватися діаграмами Венна загальної композиції взаємовідношення трьох множин *A*, *B*, *C* з позначеними областями елементів $M_i$.




Для демонстрації того, що твердження не виконується, достатньо навести контрприклад.

**1.2.1.**

***1)*** $A\backslash(A\backslash B) = A \cap (A \cap B')' = A \cap (A' \cup B) = A \cap B$

***2)*** $A \cap (B\backslash A) = A \cap (B \cap A') = \varnothing$

***3)*** $A + \varnothing = (A \cup \varnothing)\backslash(A \cap \varnothing) = A\backslash\varnothing = A \cap \varnothing' = A \cap \mathbf{U} = A$

***4)*** $A + A = (A \cup A)\backslash(A \cap A) = A\backslash A = A \cap A' = \varnothing$

***5)*** $A + \boldsymbol{U} = (A \cup \boldsymbol{U}) \backslash (A \cap \boldsymbol{U}) = \boldsymbol{U} \backslash A = \boldsymbol{U} \cap A' = A'$

***6)*** $A + A' = (A \cup A') \backslash (A \cap A') = \boldsymbol{U} \backslash \varnothing = \boldsymbol{U} \cap \varnothing' = \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}$

***7)*** $A + (A + B) = (A + A) + B = \varnothing + B = B$

**1.2.2.**

***1)*** $(A + B)' = ((A \cup B) \backslash (A \cap B))' = ((A \cup B) \cap (A \cap B)')' = (A \cup B)' \cup (A \cap B) = (A' \cap B') \cup (A \cap B) = (A' \backslash B) \cup (B \cap A'') = (A' \backslash B) \cup (B \backslash A') = A' + B$

***2)*** $A + B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cap B') \cup (B \cap A')$

***3)*** $(A' + B')' + B = (A + B)' + B = A + B' + B = A + \boldsymbol{U} = A'$

*А*бо $= A' + B + B = A' + \varnothing = A'$.

**1.2.3.** З умови $A \subseteq B$ слідує $A \cap B = A$, $A \cup B = B$.

***1)*** $A' \cap B' = (A \cup B)' = B'$

***2)*** $A \cap B' = A \cap B) \cap B' = A \cap \varnothing = \varnothing$

***3)*** $A' \cup B = A' \cup (A \cup B) = \boldsymbol{U} \cup B = \boldsymbol{U}$

***4)*** $A' \cup B' = (A \cap B)' = A'$

**1.2.4.**

***1)*** $A \cup B$

***2)*** $A' \cup B$

***3)*** $\boldsymbol{U}$

***4)*** $C \cap (A' \cup B \cup \mathrm{D})$

***5)*** $C$

***6)*** $\mathrm{A} \cup \mathrm{D}$ *(можна розв'язати усно через закон поглинання)*

***7)*** $C$ *(можна розв'язати усно через закон де Моргана)*

***8)*** $A \cup B$

***9)*** $A' \cup B \cup C$

***10)*** $A' \cup B$

***11)*** $A' \cap B$

***12)*** $A$

***13)*** $B$

**1.2.5.**

***1)*** $A \cap B + A = ((A \cap B) \cup A) \setminus ((A \cap B) \cap A) = A \setminus (A \cap B) =$

$A \cap (A \cap B)' = A \cap (A' \cup B') = A \cap B'$

***2)*** $A \cap B$ за аналогією з 1

***3)*** $A \cap B$ за аналогією з 1

***4)*** $A \cap B' + B = ((A \cap B') \cup B) \setminus ((A \cap B') \cap B)) = (A \cap B') \cup B) \setminus \varnothing =$

$A \cup B$

***5)*** $A \cup B$ за аналогією з 4

***6)*** $A \cup B' + B = ((A \cup B') \cup B) \setminus ((A \cup B') \cap B) = \boldsymbol{U} \setminus (A \cap B) = A' \cup B'$

***7)*** $A + A \cup B = (A \cup (A \cup B) \setminus (A \cap (A \cup B)) = (A \cup B) \setminus A =$

$(A \cup B) \cap A' = A' \cap B$

***8)*** $(A' + B')' + A \cap B = (A + B)' + A \cap B = A + B' + A \cap B = (4') =$

$A + A \cup B' = (7) = A' \cap B'$

***9)*** $(A' \cap B')' + A' + B' = A \cup B + A + B = (7) = A' \cap B + B = (2) = A \cap B$

***10)*** $A \cap B + A + B = (1) = A \cap B' + B = (4) = A \cup B$

***11)*** $(A' + B)' + B = A + B + B = A + \varnothing = A$

***12)*** $B \cap C \cap (B' + C') = B \cap C \cap (B + C) = B \cap \underline{C \cap (B \cup C)} \cap (B \cap C)' =$

$B \cap \underline{C \cap (B' \cup C')} = B \cap C \cap B' = \varnothing$

***13)*** $B' + (A \cap C) + B = \boldsymbol{U} + (A \cap C) = ((A \cap C) \cup \boldsymbol{U}) \setminus (A \cap C) \cap \boldsymbol{U}) =$

$\boldsymbol{U} \setminus (A \cap C) = (A \cap C)' = A' \cup C'$

***14)*** $(A' + B) \cap (A + B') = (A + B)' \cap (A + B)' = (A + B)' =$

$((A \cup B) \setminus (A \cap B))' = ((A \cup B) \cap (A \cap B)')' = (A \cup B)' \cup (A \cap B) =$

$(A' \cap B') \cup (A \cap B) = A \equiv B = (A + B)'$

***15)*** $(B + C') + (B + C) = (B + C)' + (B + C) = \boldsymbol{U}$

***16)*** $A \cup B + A' + B' = A \cup B + A + B = (7) = A' \cap B + B = (2) = A \cap B$

# 2. ТЕОРІЯ ВІДНОШЕНЬ

## 2.1. Властивості відношень

***<u>Теоретичні відомості</u>***

*Декартовим добутком множин* $X$ і $Y$ називають множину всіх упорядкованих пар $<x, y>$ таких, що $x \in X$ і $y \in Y$.

*Бінарне відношення* є підмножина декартового добутку двох множин. Елементи бінарного відношення позначають як $<x, y> \in \rho$ або $x\rho y$.

Способи задавання відношень:

- перелік елементів;
- через властивість (двомісний предикат для бінарного відношення);
- графік (на декартовій площині для упорядкованих множин $X$ і $Y$);
- граф (на квадраті множини, тобто $X = Y$):

  якщо задано відношення $x\rho y$, $x, y \in X$, то елементи множини $X$ можна зображати точками на площині, а упорядковану пару — лінією (дугою) зі стрілкою, **направленою від** $x$ **до** $y$ (*що відповідає елементу відношення* $<x, y>$);
- матричний спосіб:

  відношення можна подати як таблицю (матрицю), елементи якої дорівнюють ***1*** *на перетині рядка x та стовпчика y*, якщо між елементами є відношення $\boldsymbol{x\rho y}$, $x, y \in X$, *тобто* $<x, y> \in \rho$, та **0** — у протилежному випадку.

**<u>Операції</u>**

*Перетином* відношень $\alpha$ і $\beta$ називають відношення, визначуване перетином відповідних множин.

Приклад. Нехай $\alpha$: «$x \geq y$», $\beta$: «$x > y$». Тоді перетин $\alpha \cap \beta$ — *відношення* «$x > y$».

*Об'єднання* відношень утворюється об’єднанням відповідних множин.

*Наприклад,* нехай $\alpha$: «$x > y$», $\beta$: «$x = y$», тоді їх об’єднання є $\alpha \cup \beta$: «$x \geq y$».

*Включення відношень*: $\alpha$ включено в $\beta$, якщо множина пар $<x, y> \in \alpha$ міститься й у відношенні $\beta$, тобто $\alpha \subseteq \beta$, якщо для кожного $<x, y> \in \alpha$ виконується $<x, y> \in \beta$.

*Доповненням бінарного відношення $\rho$ між елементами $x \in A$ і $y \in B$ вважається множина $\rho' = (A \times B) \backslash \rho$, яка теж є відношенням.*

Над відношеннями можна здійснювати особливі, притаманні тільки відношенням, операції.

Якщо $\alpha$ — відношення на $M$, то *зворотне* відношення $\alpha^{-1}$ визначається так: $x\alpha y$ *, то* $y\alpha^{-1} x$*. Тобто* $\alpha^{-1} \subseteq Y \times X$ при $\alpha \subseteq X \times Y$ *(елементи в парах треба поміняти місцями).*

*Наприклад*, якщо $\alpha$: «$x > y$», $x, y \in \boldsymbol{R}$, то зворотне йому відношення $\alpha^{-1}$: «$y > x$», або «$x < y$». Якщо $\alpha$: «$x$ сестра $y$», де $x$ — *жінки*, $y$ — *чоловіки*, то зворотне відношення $\alpha^{-1}$ : «$y$ брат $x$».

Відношення $\alpha$ і $\beta$ можуть утворювати добуток або композицію відношень $\alpha\beta$, яке саме є відношенням: $x\ \alpha\beta\, z$, $x, z \in$ M, якщо існує такий елемент $y \in M$, що $x\alpha y$ і $y\beta z$. Композиція відношень не комутативна в загальному випадку (за визначенням), але асоціативна.

*Наприклад,* $\alpha$: «$x$ — мати $y$» $\beta$: «$y$ батько z». Тоді існує таке $b$, що *ab і bc, тобто «a* — мати *b»* і «*b* — батько *c*». Тоді композиція цих відношень: «*a* — бабуся *c*».

**<u>Властивості відношень</u>**

Розглядатимемо відношення, задані на множині $X$, тобто $x\rho y \subseteq X \times X$, де $x,y \in X$.

Відношення $\rho$ на множині $X$ називають **рефлексивним**, якщо для будь-яких $x \in X$ виконується $x\rho x$. Якщо для всіх $x \in X$ не виконується $x\rho x$, то відношення називають **антирефлексивним**.

*Наприклад,* відношення рівності є рефлексивним. Відношення $x \geq y$, де $x, y \in R$, є рефлексивним, оскільки $x \geq x$. Відношення $x > y$, де $x, y \in R$ — антирефлексивне, оскільки для жодного числа не здійсненно $x > x$.

Відношення $\rho$ на множині $X$ називають **симетричним**, якщо для будь-яких $x \in X, y \in X$, з $x\rho y$ *слідує* $y\rho x$. Іншими словами, відношення симетрично, якщо всякчас, коли виконується $x\rho y$, *виконується і* $y\rho x$.

*Наприклад,* із того, що «*x* родич *y*», витікає, що «*y* родич *x*», — відношення симетричне. Відношення «*x* — сестра *y*», визначене на множині всіх людей, несиметричне: можливо, що *y* є братом *x*. Проте те ж відношення, визначене на множині жінок, є симетричним.

Відношення $\rho$ на множині $X$ називають **антисиметричним**, якщо для будь-яких $x, y \in X$, із того, що $x\rho y$ і $y\rho x$, слідує $x = y$.

*Наприклад,* відношення $x \leq y$ антисиметричне: із того, що $x \leq y$ і $y \leq x$, випливає, що $x = y$, тобто це один і той же елемент.

Якщо для будь-яких $x, y \in X$ із того, що $x\rho y$, випливає, що не виконується $y\rho x$, то відношення називають **асиметричним**.

*Наприклад,* відношення «*x* предок *y*» і «*y* нащадок *x*» асиметричні, до того ж друге є зворотним до першого.

Відношення строгого порядку $x < y$ є асиметричним: якщо виконується $x < y$, то не виконується $y < x$.

Відношення $\rho$ називають **транзитивним**, якщо з того, що $x\rho y$ і $y\rho z$, слідує $x\rho z$. Для транзитивного відношення виконується $\rho^2 \subseteq \rho$.

*Наприклад,* відношення строгого порядку $x < y$ є транзитивним, адже якщо виконується $x < y$ та $y < z$, то виконується $x < z$. Транзитивним також є відношення $x \geq y$, або $x = y$. Відношення *«x — родич y»* не є транзитивним, тому що може бути *«x — родич y»* та *«y — родич z»,* де *x* та *z* — родичі *y* з різних боків, а самі *x* та *z* не є родичами один до одного.

Тепер ми можемо навести визначення ще однієї операції над відношеннями — транзитивного замикання.

**Транзитивним замиканням** відношення $\rho$ на $X$ називають найменше за включенням транзитивне відношення $\rho_{тр}$, що містить відношення $\rho$ як підмножину ($\rho_{тр}$ — найменше транзитивне розширення $\rho$): $\rho \subseteq \rho_{тр}$. Якщо існує транзитивне відношення $\gamma$ та $\rho \subseteq \gamma$ , то $\rho_{тр} \subseteq \gamma$. Транзитивне відношення збігається зі своїм транзитивним замиканням: $\rho = \rho_{тр}$.

***Приклад 1***. Задано відношення на множині X={1, 2, 3}:
$\alpha$={<1,2>, <1,3>, <2,3>} і $\beta$={<2,2>, <1,3>, <2,1>, <3,1>}.
Композицією (добутком) двох заданих відношень буде відношення
$\alpha\beta$={<1, 2>, <1, 1>, <2, 1>}.
Властивості відношень:
$\alpha$ - антирефлексивне, асиметричне, транзитивне;
$\beta$ - жодна властивість (навіть і анти-) не виконується;
$\alpha\beta$ - симетричне (транзитивності немає, тому що відсутня пара <2, 2>). Відношення $\varphi$={<1, 2>, <1, 1>, <2, 1>, <2, 2>} буде транзитивним замикання до відношення $\alpha\beta$.

***Дослідити властивості бінарних відношень, визначених на заданій множині X.***

***Приклад 2.*** Відношення задано на **R**: $x\rho y \Leftrightarrow y = |x|$ не є рефлексивним (для від'ємних чисел не виконується $x\rho x$), не є антирефлексивним через додатні числа, для яких виконується $x\rho x$, є антисиметричним, тому що відношення для додатних чисел є рівність, а для від'ємних не виконується умова симетричності, і транзитивним.

***Приклад 3.*** Відношення, яке задано на множині {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}: $x\rho y \Leftrightarrow y/x$ ($x$ ділить $y$) має властивості рефлексивності ($x$ ділить $x$), антисиметричності (якщо $y$ ділить $x$, а $x$ ділить $y$, тобто $x$=$y$) і транзитивним (якщо $y$ ділить $x$ і $z$ ділить $y$, то $z$ ділить $x$).

**Завдання 2.1.1.** Довести для відношень α, β та γ, які задано на одній множині $X$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***1)*** | $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ | ***4)*** | $(\alpha \cup \beta)\gamma = \alpha\gamma \cup \beta\gamma$ |
| ***2)*** | $\alpha \cup \alpha = \alpha$ | ***5)*** | $(\alpha \cap \beta)\gamma \subseteq \alpha\gamma \cap \beta\gamma$ |
| ***3)*** | $\alpha \cap \alpha = \alpha$ | ***6)*** | $\gamma(\alpha \cup \beta) = \gamma\alpha \cup \gamma\beta$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***7)*** | $\gamma\,(\alpha \cap \beta) \subseteq \gamma\,\alpha \cap \gamma\,\beta$ | ***10)*** | $(\alpha \cap \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cap \beta^{-1}$ |
| ***8)*** | $(\alpha\,\beta)\,\gamma = \alpha\,(\beta\,\gamma)$ | ***11)*** | $(\alpha\ \beta)^{-1} = \beta^{-1}\,\alpha^{-1}$ |
| ***9)*** | $(\alpha \cup \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cup \beta^{-1}$ | ***12)*** | $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ |

**Завдання 2.1.2.** Визначити властивості бінарних відношень.

***1)*** Відношення xρy ⇔ xy > 1 визначено на множині R;

***2)*** Відношення xρy ⇔ x ≤ y + 1 визначено на множині R;

***3)*** Відношення xρy ⇔ НСД(x, y) ≠ 1 визначено на множині N;

***4)*** Відношення xρy ⇔ НСД(x, y) = x визначено на множині N;

***5)*** Відношення xρy ⇔ 3/(x + y) визначено на множині Z;

***6)*** Відношення xρy ⇔ (x)mod4 < (y)mod4 визначено на множині N (операція (x)mod4 – обчислення залишку від ділення x на 4);

***7)*** Відношення xρy ⇔ xy ≥ 0 визначено на множині R;

***8)*** Відношення xρy ⇔ xy < 0 визначено на множині R;

***9)*** Відношення xρy ⇔ 120/(x − y) = k ∈ Z, для всіх x≠ y визначено на множині X = {1, 2, 3, 5, 6, 15, 30};

***10)*** Відношення xρy ⇔ 120/(x +y) = k ∈ Z, визначено на множині X = {1, 2, 3, 5, 6, 15, 30};

***11)*** Відношення xρy ⇔ |x − 2y| = k∈ N визначено на множині X = {2, 2.5, 3, 3.5, 5, 5.5, 8, 8.5};

***12)*** Відношення xρy ⇔ |2x − 3y|/ 4 = k∈ N визначено на множині X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8};

***13)*** Відношення xρy ⇔ |2x − y| / 3 = k∈ N визначено на множині X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

## 2.2. Відношення еквівалентності

***Теоретичні відомості***

Відношення, яке має властивості рефлексивності, симетричності й транзитивності, називають відношенням **еквівалентності**.

Нехай на множині $X$ задано відношення еквівалентності $\rho$. Тоді підмножину $A \subseteq X$ називають **класом еквівалентності за відношенням** $\rho$**,** якщо для будь-яких елементів $x, y \in A$ виконується відношення $x\rho y$.

Можна побудувати класи еквівалентності в такий спосіб. Виберімо елемент $a_1$, що належить $X$, і утворімо підмножину $A_1 \subseteq X$ з $a_1$ і всіх елементів, еквівалентних $a_1$ (таких $a_i$, для яких буде виконуватися $a_1\rho\, a_i$). Це буде клас еквівалентності $A_1$. Далі виберімо елемент $a_2 \in X$ і утворімо клас $A_2$, що складається зі всіх елементів, еквівалентних $a_2$, і т.д. Дістанемо систему класів $A_1$, $A_2$, ..., таку, що будь-який елемент $a_i \in X$ входить тільки в один клас, об'єднання всіх класів $A_1 \cup A_2 \cup ...$ утворює $X$, і для будь-яких $i, j$ $A_i \cap A_j = \varnothing$, тобто множина класів еквівалентності утворює розбиття множини $X$.

Можна дати конструктивне визначення відношення еквівалентності: відношення $\rho$ на множині $X$ називають еквівалентністю, якщо існує розбиття $X$ на підмножини $\{A_1, A_2,..., A_n\}$ таке, що відношення $x\rho y$ *виконується тоді й тільки тоді, якщо* $x$ і $y$ належать одній і тій самій підмножині.

Позначатимемо клас еквівалентності, породжений елементом $a \in X$, через $[a]$, якщо $a \in [a]$. Тоді, якщо $a\rho b$, *то* $[a] = [b]$.

Множину класів еквівалентності множини $X$ за відношенням $\rho$ називають фактор-множиною множини $X$ за відношенням $\rho$ і позначають $[X / \rho]$.

***Визначити, чи є відношення відношенням еквівалентності. Якщо так, знайти фактор-множину [X/ρ] та побудувати граф.***

***Приклад 4.*** Нехай відношення $\rho$ визначено на множині $\mathbf{Z}$: $x\rho y \Leftrightarrow x \equiv y$ $(mod\ 3)$. Це відношення порівнянності за модулем 3, яке означає, що різниця цілих чисел $x - y$ ділиться на 3 без залишку. Будемо позначати це так: $x\rho y \Leftrightarrow (x-y)/3 = k \in \boldsymbol{Z}$.

*Розв'язання*. З'ясуймо, які властивості має відношення. Нехай $x, y \in \boldsymbol{Z}$.

1. Рефлексивність: $x\rho x \Leftrightarrow (x - x)/3 = 0/3 = 0$. $0 \in \boldsymbol{Z}$, Тому відношення рефлексивне.

2. Симетричність: $x\rho y \Rightarrow y\rho x$, тобто, якщо $x\rho y$, то $y\rho x$.

Нехай $(x - y)/3 = k \in \boldsymbol{Z}$. Тоді $y\rho x \Leftrightarrow (y - x)/3 = -(x - y)/3 = -k \in \boldsymbol{Z}$. Отже, умова симетричності виконується.

3. Транзитивність: $x\rho y$ і $y\rho z \Rightarrow x\rho z$.

Нехай $(x - y)/3 = k_1 \in \boldsymbol{Z}$, тобто $x - y = 3k_1$, і $(y - z)/3 = k_2 \in \boldsymbol{Z}$, тобто $y - z = 3k_2$. Розв'яжімо цю систему рівнянь, додавши їх: $x - y + y - z = 3(k_1 + k_2)$, тобто $x - z = 3(k_1 + k_2) = k_3 \in \boldsymbol{Z}$. Властивість транзитивності виконується.

Відношення $x \equiv y$ ($mod$ 3) є відношенням еквівалентності.

Знайдімо його фактор-множину $[\boldsymbol{Z}/\rho]$.

Довільне число $x$ можна записати як $3q + r$, $0 \le r < 3$, де $q$ — частка, $r$ — залишок від ділення числа $x$ на 3. В одному й тому ж класі еквівалентності опиняться всі числа, що дають при діленні на 3 однакове число $r$ у залишку. Ми отримаємо три класи еквівалентності:

$[0] = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$; $[1] = \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}$; $[2] = \{2, 5, 8, 11, 14, \ldots\}$.

Кожен клас можна охарактеризувати одним представником цього класу, і в даному випадку найзручніше вибрати за такого представника залишок $r$. Отже, фактор-множина відношення $x \equiv y$ ($mod$ 3) буде $[\boldsymbol{Z}/\rho] = \{[0], [1], [2]\}$.

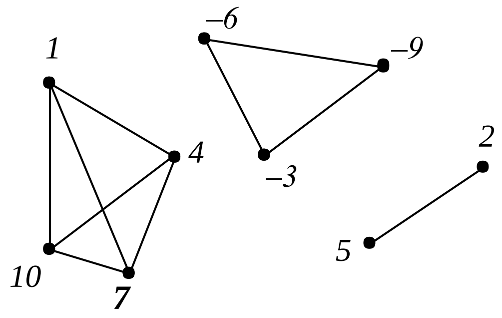
Нехай для даного відношення задано деяку підмножину $X$ множини цілих чисел: $X = \{-3, -6, -9, 1, 2, 4, 5, 7, 10\}$: $x\rho y \Leftrightarrow (x - y)/3 = k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Побудуймо матрицю відношення $\rho$ на цій множини.

| X *Y* | –3 | –6 | –9 | 1 | 2 | 4 | 5 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| –3 | *1* | *1* | *1* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* |
| –6 | *1* | *1* | *1* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* |
| –9 | *1* | *1* | *1* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* |
| 1 | *0* | *0* | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *1* | *1* |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | *0* | *0* | *0* | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *0* |
| 4 | *0* | *0* | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *1* | *1* |
| 5 | *0* | *0* | *0* | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *0* |
| 7 | *0* | *0* | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *1* | *1* |
| 10 | *0* | *0* | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *1* | *1* |

За матрицею відношення можна ще раз перевірити його властивості. Діагональні елементи матриці дорівнюють 1, що свідчить про те, що відношення рефлексивне. Матриця симетрична відносно головної діагоналі, отже, відношення симетричне. Транзитивність також можна перевірити за матрицею відношення. Якщо для всіх пар *<x, y>, <y, z>* виконується також *<x, z>*, то відношення транзитивне. Наприклад, на перетині рядка й стовпця <1, 4> стоїть 1, і на перетині <4, 7> стоїть 1. Перевірмо перетин рядка й стовпця <1, 7>: тут також стоїть 1. Отже, для цих пар виконується властивість транзитивності. Для перевірки транзитивності відношення потрібно дослідити всі пари *<x, y>, <y, z>* і *<x, z>*.

Побудуймо граф відношення. Елементи заданої множини є вершинами графу. Матриця відношення визначає, які вершини графу зв’язані одна з одною (це матриця суміжності графу). За першим рядком матриці знаходимо, що вершина –3 зв’язана сама з собою та з вершинами –6, –9. З’єднуємо ці вершини дугами (на малюнку петлі, що поєднують вершини самі з собою, можна не зображати). Елемент –6 також зв’язаний з елементами –3 і –9, тому проведімо дугу з вершини –6 у вершину –9. Третій рядок матриці вказує, що елемент – 9 зв’язаний з –3 і –6. Елементи –3, –6, –9 не поєднані більше з жодними іншими вершинами, тобто вони утворюють один клас еквівалентності. Аналогічно побудуємо всі інші зв’язки між вершинами. У результаті дістанемо незв’язаний неорієнтований граф (див. рисунок), який складається з трьох зв’язних компонентів, кожен із яких відповідає одному класу еквівалентності.




*Граф відношення $x \equiv y$ (mod 3).*

Отже класи еквівалентності на заданій множині такі: {–3, –6, –9} {2, 5}, {1, 4, 7, 10}. Усередині кожного класу будь-які два елементи перебувають у відношенні $x \equiv y \pmod 3$ один до одного: різниця між ними ділиться на 3 без залишку. Між елементами різних класів це відношення не виконується. Кожний клас еквівалентності характеризується залишком від ділення різниці $x - y$ на 3: у класі еквівалентності {–3, –6, –9} залишок дорівнює 0, у класі {2, 5} залишок дорівнює 1, у класі {1, 4, 7, 10} залишок дорівнює 2. Фактор-множина $[X/\rho] = \{[0], [1], [2]\}$.

***Приклад 5.*** Відношення визначено на множині $\boldsymbol{R}$: $x\rho y \Leftrightarrow x - y \in \boldsymbol{Z}$.

*Розв'язання*. Нехай $x, y \in \boldsymbol{R}$. Визначимо властивості відношення $x\rho y \Leftrightarrow x - y \in \boldsymbol{Z}$.

1) Рефлексивність: $x - x = 0 \in \boldsymbol{Z}$. Відношення рефлексивне.

2) Симетричність: якщо $x - y = k \in Z$, то $y - x = -(x - y) = -k \in \boldsymbol{Z}$. Відношення симетричне.

3) Транзитивність: якщо $x - y = k_1 \in Z$ і $y - z = k_2 \in Z$, то $(x - y) + (y - z) = x - y + y - z = x - z = k_1 + k_2 = k_3 \in \boldsymbol{Z}$. Відношення транзитивне.

Це відношення є відношенням еквівалентності. Знайдімо його фактор–множину. Різниця двох дійсних чисел буде дорівнювати цілому числу тільки тоді, коли їхні дробові частини будуть однакові. Отже, кожен клас еквівалентності буде відповідати одному дійсному числу з інтервалу [0; 1). Наприклад, множина натуральних чисел із дробовою частиною 0 — це один клас еквівалентності: $[0] = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$; усі дійсні числа з дробовою частиною .01 — інший клас еквівалентності: $[0.01] = \{0.01; 1.01; 2.01; 3.01; \ldots\}$; клас $[0.12] = \{0.12; 1.12; 2.12; \ldots\}$, і т.д. Фактор-множина $[\boldsymbol{R}/\rho] = [0; 1)$.

**Завдання 2.2.1.** Довести для бінарного відношення $\alpha$:

***1)*** якщо $\alpha$ не рефлексивне та симетричне, то воно не транзитивне;

***2)*** якщо $\alpha$ рефлексивне та транзитивне, то $\alpha \cap \alpha^{-1}$ є відношенням еквівалентності;

***3)*** якщо $\alpha$ рефлексивне та транзитивне, то $\alpha \cup \alpha^{-1}$ є відношенням еквівалентності;

***4)*** якщо $\alpha$ симетричне та антисиметричне, то воно транзитивне. А чи буде воно відношенням еквівалентності?

***5)*** якщо $\alpha$ симетричне на всій множині та транзитивне, то воно рефлексивне. А чи буде воно відношенням еквівалентності?

**Завдання 2.2.2.** Дослідити відношення еквівалентності: побудувати граф, визначити класи еквівалентності, фактор-множину.

***1)*** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow (x)mod4 = (y)mod4$ визначено на множині $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$.

***2)*** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow |x - y|/4 = k,\ k \in \boldsymbol{N}$ визначено на множині $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$.

***3)*** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow$ *«x та y мають однакову кількість дільників»* визначено на множині $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

***4)*** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow (x^2 - y^2)/5 = k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ визначено на множині $\{5, 7, 9, 10, 13, 15, 18, 19, 20\}$.

***5)*** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow (x^2 - y^2)/4 = k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ визначено на множині $\{5, 8, 9, 12, 13, 16, 18, 19, 20\}$.

***6)*** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow (x^2 - y^2)/8 = k \in \boldsymbol{Z}$ визначено на множині $\{7, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 21\}$.

***7)*** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow |(x^2 - y^2)/6 = k \in \boldsymbol{N}$ визначено на множині {6, 9, 10, 12, 15, 18, 19, 20}.

***8)*** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow |x - y| = k \in \boldsymbol{N}$ визначено на множині $X$ = {2, 2.5, 3, 3.5, 5, 5.5, 8, 8.5}.

***9)*** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow <a,b>\rho<c,d> \Leftrightarrow [(ad = bc \text{ і } b\neq 0, d\neq 0)]$ визначено на множині $N\times N$.

***10)*** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow <a,b>\rho<c,d> \Leftrightarrow a + d = b + c$ визначено на множині $N\times N$.

**Завдання 2.2.3.** З точністю до ізоморфізму за допомогою графів створити всі можливі відношення еквівалентності на множині з шести елементів такі, що відповідна фактор-множина складається з двох класів.

**Відповіді до розділу 2**

**2.1.2.**

***1)*** симетричне;

***2)*** рефлексивне;

***3)*** симетричне;

***4)*** рефлексивне, антисиметричне, транзитивне;

***5)*** антирефлексивне, симетричне;

***6)*** антирефлексивне, асиметричне, транзитивне;

***7)*** рефлексивне, симетричне;

***8)*** антирефлексивне, симетричне;

***9)*** антирефлексивне , симетричне;

***10)*** рефлексивне, симетричне (*транзитивність не виконується: з <1,5> і <5,15> не слідує <1,15>*);

***11)*** транзитивне;

***12)*** жодної властивості;

***13)*** симетричне.

**2.2.2.**

**1)** $[X/\rho]=\{[4], [1], [2], [3]\}$;

**2)** $[X/\rho]=\{[4], [1], [2], [3]\}$;

**3)** $[X/\rho]=\{[1], [2], [4], [6], [12]\}$;

**4)** $[X/\rho]=\{[5], [7], [9]\}$;

**5)** $[X/\rho]=\{[5], [8]\}$;

**6)** $[X/\rho]=\{[18], [7], [10]\}$;

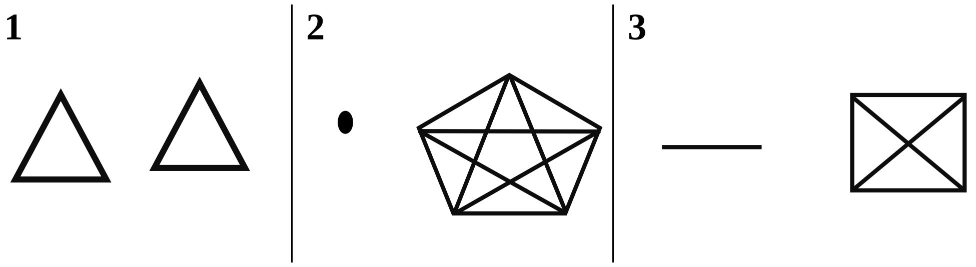
**7)** $[X/\rho]=\{[6], [9], [10], [19]\}$;

**8)** $[X/\rho]=\{[2], [2.5]\}$;

**9)** $[X/\rho]= Q^+$;

**10)** $[X/\rho]=Z$.

**2.2.3.**



# 3. ВІДОБРАЖЕННЯ. ФУНКЦІЇ

## ***<u>Теоретичні відомості</u>***

Між множинами $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{F}$ визначено **відповідність** $\mathbf{Г}$, якщо задано деяку довільну підмножину декартового добутку $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. Множину $\boldsymbol{E}$ називають *областю визначення*, $\boldsymbol{F}$ — *областю значень* відповідності $\mathbf{Р}$.

Відповідність, зворотну $\mathbf{Г}$, позначмо $\mathbf{Г}^{-1}$, де $\boldsymbol{F}$ — область визначення, $\boldsymbol{E}$ — область значень $\mathbf{Г}^{-1}$.

*Відображенням* множини $\boldsymbol{E}$ на множину $\boldsymbol{F}$ називають таку відповідність, яка кожному елементу $x \in \boldsymbol{E}$ зіставляє принаймні один елемент $y \in \boldsymbol{F}$. Тоді елемент $y$ називають *образом* елемента $x$, а $x$ — *прообразом* елемента $y$, або *змінною*, або *аргументом*. Відображення $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$ позначатимемо $f$: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, де $f$ — ім’я відображення**.**

Відображення $\boldsymbol{E}$ на $\boldsymbol{F}$ називають *сюр’єктивним*, або *сюр’єкцією*, або *накладенням,* якщо будь-який елемент $y \in \boldsymbol{F}$ є образ принаймні одного елемента $x \in \boldsymbol{E}$, тобто $y \in \boldsymbol{F}\ \exists\ x \in \boldsymbol{E}$ ($y = \mathbf{Г}(x)$). Умова $\forall y \in \boldsymbol{F}\ |\mathbf{Г}^{-1}\{y\}| \geq 1$ характеризує сюр’єкцію.

Відображення $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$ називають **ін’єкцією**, або *вкладенням,* якщо кожен елемент $y \in \boldsymbol{F}$ є образ тільки одного елемента $x \in \boldsymbol{E}$**,** або взагалі не має прообразу. Умова $\forall y \in \boldsymbol{F}\ |\mathbf{Г}^{-1}\{y\}| \leq 1$ характеризує ін’єкцію.

Якщо відображення є одночасно і сюр’єкцією, і ін’єкцією, то його називають *бієктивним відображенням*, або *бієкцією*.

У цьому випадку кожен елемент $\boldsymbol{F}$ є образом деякого, і до того ж єдиного, елемента з $\boldsymbol{E}$, і кожен образ має тільки один прообраз: $\forall y \in \boldsymbol{F}\ |\mathbf{Г}^{-1}\{\mathrm{y}\}| = 1$.

Відповідність, за якої кожному $x \in \boldsymbol{E}$ зіставляється один і тільки один елемент $y \in \boldsymbol{F}$, називають *функціональною відповідністю*, або *функцією*.

Для функціонального відображення виконується умова: $\forall x \in \boldsymbol{E}\ |\mathbf{Г}\{x\}| = 1$. Іншими словами, функція — це відповідність або відображення, за якого два різні елементи не мають однакових перших координат, тобто якщо $<x, y>, <x, z> \in f$, то $y = z$. Якщо функціональна відповідність не є відображенням, тобто в $\boldsymbol{E}$ існують елементи, що не мають образу в $\boldsymbol{F}$, то її називають *частково визначеною функцією*. Функціональне відображення є повністю визначеною функцією, або просто *функцією*.

Функціональна бієкція $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ встановлює таке відображення, за якого кожен елемент з $\boldsymbol{E}$ має єдиний образ в $\boldsymbol{F}$, а кожен елемент з $\boldsymbol{F}$ має єдиний прообраз у $\boldsymbol{E}$, тому функціональну бієкцію називають *взаємно однозначною відповідністю.*

Функціональне відображення $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, яке є сюр'єкція, можливо тільки в тому випадку, якщо кількість елементів в $\boldsymbol{E}$ не менша від кількості елементів в $\boldsymbol{F}$, тобто $|E| \geq |F|$. Для функціональної ін'єкції, навпаки, повинно виконуватися співвідношення $|E| \leq |F|$.

Нехай задано три множини $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{G}$, і задано відображення $f$: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, $g$: $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$. Тоді **композицією** відображень $g \circ f$: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{G}$ називають відображення $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{G}$, яке визначають формулою $g \circ f = g(f(x))$.

Композиція відображень асоціативна, тобто якщо $g$, $h$ — відображення $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}$ в $\boldsymbol{G}$ і $\boldsymbol{G}$ в $\boldsymbol{H}$ відповідно, то $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, що записують як $h \circ g \circ f$.

Композиція відображень не комутативна.

Якщо $f$ і $g$ — функціональні відображення , або просто відображення, або сюр'єкції, або ін'єкції, або бієкції, то можна довести низку теорем про властивості композиції цих відображень. Ці властивості відображено в таблиці, де символами позначено: В — відображення, С — сюр'єкція, І — ін'єкція, Б — бієкція.

| $g \circ f$ | $g:$ В | С | І | Б |
|---|---|---|---|---|
| $f:$ В | В | В | В | В |
| С | В | С | В | С |
| І | В | В | І | І |
| Б | В | С | І | Б |

***Приклад 1.*** Побудувати композицію відображень $g \circ f;$ визначити, чи є вона ін'єктивною, сюр'єктивною або бієктивною.

$f$: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R} \Leftrightarrow y = x - 1$; $g$: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R} \Leftrightarrow y = e^{2x}$.

Композиція функцій $g \circ f$: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R} \Leftrightarrow y = e^{2(x-1)}$ не є сюр'єкцією, оскільки немає жодного елемента $x \in \boldsymbol{R}$, для якого $y = 0$ є образ. Композиція функцій є ін'єкцією, оскільки кожний елемент $y \in \boldsymbol{R}$ є образ тільки одного елемента $x \in \boldsymbol{R}$, або взагалі не має прообразу. Отже, відповідно до теореми про композиції, $g \circ f$: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R} \Leftrightarrow y = e^{2(x-1)}$ — ін'єкція.

**Завдання 3.1.1.** Дослідити, чи є відображення ін'єктивним, сюр'єктивним чи бієктивним, або ж просто відображенням. Чи є воно функціональним?

***1)*** $f$: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{Z}$, $y = [x]$;

***2)*** $f$: $\boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{R}^+$, $y = |x|^2 + 12$;

***3)*** $f$: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{N}$, $y = [x^2]$;

***4)*** $f$: $\boldsymbol{R} \rightarrow \{0,1\}$, $y = [x] \; mod \; 2$;

***5)*** $f$: $\boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{R}^+$, $y = |x|^2$;

***6)*** $f$: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{Z}$, $y = 4[x] + 5$;

***7)*** $f$: $\boldsymbol{Z} \rightarrow \boldsymbol{Z}$, $y = 4x + 5$;

***8)*** $f$: $\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{Z}$, $y = [17x^3]$;

***9)*** $f$: $\boldsymbol{Z} \rightarrow \boldsymbol{N}$, $y = |x|$;

***10)*** $f$: $\boldsymbol{N} \rightarrow \boldsymbol{N}$, $y = x^2$ ;

***11)*** $f$: $\mathbf{N} \to \{\mathbf{0, 1}\}$, $y = (x + 7)^2 \; mod \; 2$;

***12)*** $f$: $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ $y = 11x + 2$;

***13)*** $f$: $\mathbf{Q} \to \mathbf{Z}$, $y = [x^7 + 14] - 2$;

***14)*** $f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $y = \sqrt{x} + 3$;

***15)*** $f$: $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $y = x^2 + \sqrt[3]{x+2}$;

***16)*** $f$: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ $y = 11x + 2$.

## Відповіді до розділу 3

### 3.1.1.

**1)** *сюр'єкція;*

**2)** *відображення;*

**3)** *сюр'єкція;*

**4)** *сюр'єкція;*

**5)** *сюр'єкція;*

**6)** *відображення;*

**7)** *ін'єкція;*

**8)** *сюр'єкція;*

**9)** *сюр'єкція;*

**10)** *ін'єкція;*

**11)** *сюр'єкція;*

**12)** *бієкція;*

**13)** *сюр'єкція;*

**14)** *ін'єкція;*

**15)** *ін'єкція;*

**16)** *ін'єкція.*

# 4. ВІДНОШЕННЯ ПОРЯДКУ

***<u>Теоретичні відомості</u>***

Відношення на множині $P$, що задовольняє властивості *рефлексивності*, *антисиметричності* , *транзитивності* називають **відношенням порядку**.

Непорожня множина $P$, на якій задано бінарне відношення порядку, називають *частково упорядкованою* і позначають як двійку $< P, \leq >$. Елементи упорядкованої множини $a, b \in P$ називають *порівнянними* елементами, якщо $a \leq b$ або $b \leq a$. Інакше їх називають *непорівнянними*. У частково упорядкованій множині є як порівнянні, так і непорівнянні елементи.

Якщо $x \leq y$ і $x \neq y$, то відношення називають відношенням *строгого порядку* і позначають через $x < y$. Відношення строгого порядку є *антирефлексивним, асиметричним* і *транзитивним.*

Упорядковану множину $<P, \leq >$, у якій для всіх $x, y \in P$ виконується $x \leq y$ або $y \leq x$, називають *лінійно упорядкованою,* або *ланцюгом*. У ланцюзі кожні два довільні елементи порівнянні, і в ньому немає непорівнянних елементів. Упорядковану множину, у якій усі елементи непорівнянні, іноді називають *антиланцюгом*. Прикладом антиланцюга є відношення $x=y$, де $x_1 \| x_2 \| ... \| x_n$.

**Приклади упорядкованих множин:**

1. Відношення включення $x \subseteq y$, тобто «$X$ — підмножина $Y$», задане на множині всіх підмножин деякої множини $U$, є відношення часткового порядку. Справді, це відношення рефлексивне: $x \subseteq x$, антисиметричне: якщо $x \subseteq y$ і $y \subseteq x$, то $x = y$, і транзитивне: якщо $x \subseteq y$ і $y \subseteq z$, то $x \subseteq z$. Нехай задано множину $A = \{a, b, c\}$. Множина-ступінь $<\wp(A), \subseteq >$ є частково упорядкована множина. Підмножина $\varnothing \subseteq \{a\} \subseteq \{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$ є максимальним ланцюгом в $<\wp(A), \subseteq >$. Підмножина $\varnothing \subseteq \{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$ також є ланцюгом, але не максимальним.

2. На числових множинах **N**, **Z**, **Q**, **R** задано відношення порядку $\leq$ (менше або дорівнює), $<$ (менше), $\geq$ (більше або дорівнює), $>$ (більше). Ці відношення є

відношеннями лінійного порядку, тому ці множини, а також будь-які їхні підмножини, є ланцюгами. Наприклад, множина $\{1, 2, 3, 4\}$ — ланцюг.

3. На множині цілих додатних чисел $\mathbf{Z}^+$ можна задати відношення порядку таке, що $x \le y$ означає: «$x$ ділиться на $y$». Його можна визначити як $x / y = k$, де $k \in \mathbf{N}$. Це відношення рефлексивне: $x / x = 1$, і $1 \in \mathbf{N}$; антисиметричне: якщо $x / y = k$ *і* $y / x = k$, то $x / y = y / x$, — звідси $x = y$; транзитивне: якщо $x / y = k_1$ і $y / z = k_2$, то $x / z = k_3$, де $k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{N}$. Справді, якщо $x = k_1 y$ і $y = k_2 z$, то $x = k_1 k_2 z$, тобто $x = k_3 z$, де $k_3 = k_1 k_2$. Цілком очевидно, що не будь-які два цілі числа $x, y \in \mathbf{Z}^+$ перебувають у відношенні порядку «х ділиться на у», отже, це відношення часткового порядку. Тому множина $\mathbf{Z}^+$ є лінійно упорядкованою множиною за відношенням $\le$ (менше або дорівнює), і є частково упорядкованою за відношенням «$x$ ділиться на $y$».

4. Приклади антиланцюгів: $x = y$; $x/y$ на множині $X = \{2, 3, 5\}$.

Якщо в $P$ існує єдиний елемент $a \in P$ такий, що $\forall x \in P$ $(a \le x)$, то $a$ називають **найменшим елементом** у-множини.

Якщо в $P$ існує єдиний елемент $b \in P$ такий, що $\forall x \in P$ $(x \le b)$, то $b$ називають **найбільшим елементом**.

**Мінімальним** елементом $P$ називають такий елемент $a \in P$, що для жодного $x \in P$ не виконується умова $x \le a$.

**Максимальним** елементом $P$ називають такий елемент $b \in P$, що для жодного $x \in P$ не виконується умова $b \le x$.

Граф відношення порядку, побудований за його матрицею, міститиме велике число транзитивно замикаючих дуг. Для відношення порядку зазвичай будують діаграма Гассе[2], яка базується на понятті *відношення покриваності*.

В упорядкованій множині з відношенням порядку $\le$ елемент $b$ *покриває* $a$, якщо $a < b$, і не існує такого елементу $x$, щоб $a < x < b$.

[2] **Гельмут Га́ссе** (1898 – 1979) — німецький математик. Вніс фундаментальний внесок утеорію алгебри чисел, теорію полів, відомі роботи з діофантової геометрії.

Вочевидь, відношення покриваності має такі властивості: антирефлексивність, асиметричність, і в жодному разі в ньому не виконується транзитивність. Відношення покриваності є пімножиною відношення порядку (включення відношень), зображає транзитивне скорочення орієнтованого графу.

*Наприклад*, нехай відношення $x < y$ задано на множині {1, 2, 3}. Множина упорядкованих пар, що складає відношення, така: {<1, 2>, <1, 3>, <2, 3>}. Підмножина {<1, 2>, <2, 3>} відповідає відношенню покриваності: 2 покриває 1, а 3 покриває 2. Якщо на цій множині взяти відношення $x \leq y$, то дістанемо множину упорядкованих пар {<1, 2>, <1, 3>, <2, 3>, <1, 1>, <3, 3>, <2, 2>}. Але відношенню покриваності буде відповідати така ж сама підмножина, що й у попередньому випадку: {<1, 2>, <2, 3>} (це підкреслює антирефлексивність відношення покриваності).

Тоді упорядковану множину можна зобразити як граф знизу догори: якщо елемент $b$ покриває елемент $a$, то він розташовується вище за елемент $a$ і з'єднується з ним прямою (тому зазвичай такий граф зображують без стрілок). У результаті дістають граф, який називають *діаграмою у-множини*, або *діаграмою Гассе*. Граф відношення покриваності не містить транзитивно замикаючих дуг і петель, що відображають рефлексивність відношення, тому діаграму $P$ можна дістати з орієнтованого графа відношення порядку $x \leq y$, де $x, y \in P$, видаленням петель і транзитивно замикаючих дуг.

Якщо два елементи $a, b \in P$ перебувають у відношенні порядку $a \leq b$, то на діаграмі існує шлях з $a$ в $b$. Отже будь-яка скінченна у-множина з точністю до ізоморфізму визначається своєю діаграмою.

Елемент $u$ називають *нижньою гранню (мінорантою)* елементів $a$ і $b$, якщо $u \leq a$ і $u \leq b$. Елемент $v$ називають *верхньою гранню (мажорантою)* елементів $a$ і $b$, якщо $a \leq v$ і $b \leq v$.

У двох елементів може бути декілька нижніх і верхніх граней, що добре видно на діаграмах Гассе: це всі елементи, розташовані нижче (для верхніх граней — вище) за обидва елементи.

Елемент $x$ називають **найбільшою нижньою гранню** (*точною нижньою гранню*) елементів $a$ і $b$, якщо він є їхньою нижньою гранню, і для будь-якої нижньої грані $u$ виконується $u \le x$. Позначають $x = inf\,(a, b)$ $(infimum(a, b))$.

Елемент $y$ називають **найменшою верхньою гранню** (*точною верхньою гранню*) елементів $a$ і $b$, якщо він є верхньою гранню $a$ і $b$, і для будь-якої верхньої грані $v$ виконується $y \le v$. Позначають $y = sup(a, b)$ $(supremum(a, b))$.

Упорядковані множини, у яких для кожних двох елементів існує точна верхня й точна нижня грані, називають *решітками*.

***Визначити, чи є відношення відношенням порядку (строгого порядку). Знайти мінімальний і максимальний елементи; знайти, де це можливо, найменший і найбільший елементи. Побудувати діаграму Гассе. Чи є ця множина решіткою?***

***Приклад 1.***

На множині $X = \{-5, -3, -2, 0, 1, 2, 4, 5, 6\}$ задано відношення $\rho$: $|x| < |y|$.

*Розв'язання.* Визначмо, які властивості має це відношення.

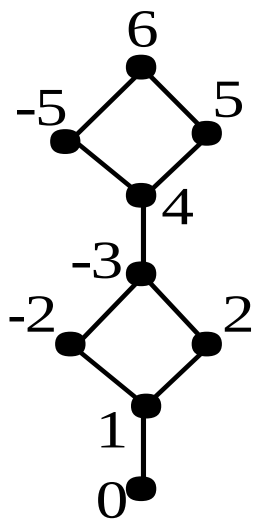
Відношення антирефлексивне, бо не виконується $|x| < |x|$ для жодного $x$.

Якщо $|x| < |y|$, то $|y| > |x|$, отже, відношення асиметричне.

Якщо $|x| < |y|$ і $|y| < |z|$, то $|x| < |z|$, отже, відношення транзитивне. Звідси випливає, що відношення $|x| < |y|$ є відношенням строгого порядку.

Побудуймо матрицю відношення.

| $x \setminus y$ | –5 | –3 | –2 | 0 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| –5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| –3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| –2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |




Множина $X = \{-5, -3, -2, 0, 1, 2, 4, 5, 6\}$ із заданим на ній відношенням строгого порядку $|x| < |y|$ є частково упорядкована множина, оскільки в ній є елементи, що є непорівнянними за відношенням $\rho$. Це елементи –2 та 2 ($-2 \neq 2$ та $|-2| = |2|$) і –5, 5. Оскільки $|1| < |-2| < |-3|$ і $|1| < |2| < |-3|$, то $inf\{-2, 2\} = 1$, $sup\{-2, 2\} = -3$. Аналогічно і для –5, 5: $inf\{-5, 5\} = 4$, $sup\{-5, 5\} = 6$.

На множині $X = \{-5, -3, -2, 0, 1, 2, 4, 5, 6\}$ елемент 6 є найбільшим і максимальним, а 0 — найменшим і мінімальним елементом. Ця множина є решіткою. Її діаграму Гассе наведено на рисунку.

Граф відношення порядку, побудований за його матрицею, буде мати велику кількість транзитивно замикаючих дуг. Тому він матиме занадто складний вигляд. Для відношення порядку зазвичай будують діаграму Гассе, яка зображає *відношення покриття*.

У упорядкованій множині із відношенням порядку $\leq$ елемент $b$ *покриває* $a$, якщо $a \leq b$, і не існує такого елементу $x$, що $a \leq x \leq b$. Отже граф відношення покриття не має транзитивно замикаючих дуг. Щоб дістати діаграму Гассе, граф покриття зображають так, щоб для будь-яких двох елементів таких, що $a \leq b$, елемент $a$ був нижче елемента $b$, а елементи, що є непорівнянними, розташовувалися на одному рівні.

Матрицю відношення покриття можна дістати з матриці відношення порядку в такий спосіб. У стовпчику, що відповідає елементу 0, нема жодної 1, отже, цей елемент не покриває жодного іншого елемента. У рядку, що відповідає елементу 0, усі елементи (крім діагонального) дорівнюють 1, отже, він «менший» від усіх елементів, тобто є найменшим елементом. Знаходимо найближчий елемент, більший від 0: це елемент 1 — у стовпці, що відповідає 1, стоїть тільки одна одиниця, тобто елемент 1 покриває 0. Залишаємо цю одиницю в матриці та викреслюємо всі інші одиниці в рядку, що помічений символом 0.

Починаємо побудову діаграми Гассе з елемента 0 знизу вгору (див. рисунок).

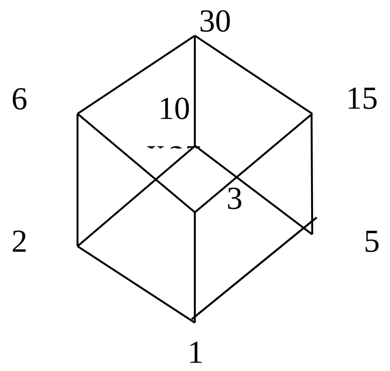
Знайдімо елемент, що покриває 1. Для цього в рядку, що помічений символом 1, знайдімо такі одиничні елементи, щоб у відповідних ним стовпцях більше не було одиниць. Таких стовпців два: вони відповідають елементам –2 та 2. Ці елементі є непорівнянними, і обидва покривають 1. На діаграмі Гассе зображуємо ці елементи на одному рівні та поєднуємо їх дугами з елементом 1.

Продовжуючи цей процес, побудуємо матрицю покриття, за якою неважко буде побудувати діаграму Гассе.

| $x \setminus y$ | –5 | –3 | –2 | 0 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| –5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| –3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| –2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Якщо на цій же множині $X = \{-5, -3, -2, 0, 1, 2, 4, 5, 6\}$ задати відношення $\rho$: $|x| \leq |y|$, то відношення буде мати властивості транзитивності та рефлексивності, а антисиметричність буде виконуватися не завжди: $|2| \leq |-2|$ і $|-2| \leq |2|$, але $|2| \neq |-2|$. [ДТ1]Це відношення на цій множині породжує відношення квазипорядку.

На множині $X = \{-5, -3, 0, 1, 2, 4, 6\}$ відношення $\rho$: $|x| \leq |y|$ задає нестрогий порядок, множина упорядкована лінійно (ланцюг).



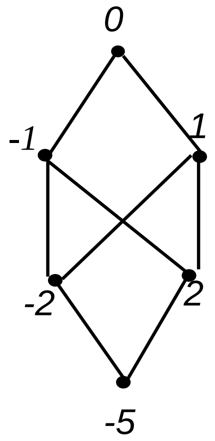

***Приклад 2.*** Відношення, що задане на множині {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}: $x\rho y \Leftrightarrow y/x$ ($x$ ділить $y$) має властивості рефлексивності ($x$ ділить $x$), антисиметричності (якщо $y$ ділить $x$, а $x$ ділить $y$, тобто $x = y$) і транзитивним (якщо $y$ ділить $x$ і $z$ ділить $y$, то $z$ ділить $x$) і, отже, є відношенням нестрогого порядку *(приклад 2 з розділу 2)*.

Ця множина упорядкована частково, через непорівнянні елементи (наприклад, 2 не ділить 3, а 3 не ділить 2), є решіткою. Упорядковану множину можна зобразити графічно, використовуючи відношення покриваності (домінування): якщо виконується $x\rho y$, і не існує $z$ такого, щоб виконувалося $x\rho z$ і $z\rho y$, то $y$ покриває (домінує над) $x$, що відповідає вертикальному відрізку $xy$, де $x$ розташовується «нижче» від $y$. У такий спосіб (діаграма Гассе) перемальовується граф відношення без рефлексивних петель і транзитивних дуг, використовуючи тільки відношення домінування.

Мінімальний елемент (він же найменший) є 1, максимальний (найбільший) є 30.

***Приклад 3. Квазипорядок.*** Розгляньмо відношення $|x| > |y|$ на множині $X$= { –5, –2, 0, 1, 3, 4}. Відношення має на цій множині такі властивості: антирефлексивність, асиметричність і транзитивність. Це відношення строгого порядку, множина упорядкована лінійно від елемента –5 (мінімальний, найменший) до 0 (максимальний, найбільший) знизу догори в міру зростання абсолютного значення числа, тобто утворюється ланцюг, решітка.

Візьмімо те ж саме відношення на множині $X$={–5, –2, –1, 0, 1, 3, 4}. Властивості зберігаються, відношення строгого порядку, решітка, але вже не буде ланцюга — «1» і «–1» є непорівнянні, множина упорядкована частково. У цій множині мінімальні/максимальні та найменші/найбільші елементи такі самі.




На множині $X$={–5, –2, –1, 0, 1, 2} те ж саме відношення |x| > |y| зберігає властивості відношення строгого порядку, мах/міn (найбільший/найменший) — такі самі, як у попередніх прикладах. Множина упорядкована частково, але вона не утворює решітки: для елементів –1 і 1 нижніми гранями буде множина {2, –2, –5}, але обрати з них точну нижню грань — неможливо, бо 2 і –2 є непорівнянними.

Аналогічно не існує точної верхньої грані для елементів 2 і –2. Ці приклади демонструють, що упорядковану множину і її властивості справді визначає пара $< P, \leq >$.

На множині $X$={–5, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4} розгляньмо відношення $|x|\geq|y|$. Відношення є рефлексивним, транзитивним. Але чи виконується властивість антисиметричності? Чи завжди з $|x|\geq|y|$ та $|y|\geq|x|$ слідує $x=y$? У нас $|1| \geq |-1|$ та $|-1| \geq| 1|$, але при цьому $-1 \neq 1$, тобто умова антисиметричності не виконується. Відношення не є відношенням порядку.

Відношенням **квазипорядку** (позначмо його ⊲) на множині $S$ називають відношення, яке задовольняє умови:

рефлексивність — $x \lhd x$, **Р1**

транзитивність — якщо $x \lhd y$ і $y \lhd z$, то $x \lhd z$, **Р3**

але не обов’язково антисиметричнісь **Р2**.

Пару $<S, \lhd>$ називають квазиупорядкованою (псевдоупорядкованою) множиною.

Будь-яку квазиупорядковану множину можна перетворити в упорядковану через уведення класів еквівалентності (елементи, для яаких виконується $x\lhd y$ і $y\lhd x$, і при цьому $x \neq y$, кладуть еквівалентними). Множина класів еквівалентності утворює у-множину.

Повернімося до розгляду прикладу, із якого починали розгляд обставин виникнення квазипорядків (зрозуміло, що такі псевдопорядки з’являються на деяких множинах за відношень, які допускають сюр’єкцію множини $X$ на деяку множину, що є результатом функції-міри відношення: модулі, синуси-косинуси, залишки від ділення тощо).

Класи еквівалентності на множині $X=\{-5, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ для відношення $|x|\geq|y|$ будуть такі: $\{-5\}$, $\{4\}$, $\{3\}$, $\{2, -2\}$, $\{1, -1\}$, $\{0\}$, які утворюють ланцюг від класу $\{-5\}$ до $\{0\}$. Для нового відношення — «множини упорядковані за зростанням чисел з однаковим модулем» — у нас решітка, найменший (мінімальний) елемент — $\{-5\}$, найбільший (максимальний) — $\{0\}$.

**Завдання 4.1.** Визначити, чи є відношення відношенням порядку (строгого порядку)? Знайти мінімальний і максимальний елементи; знайти, де це можливо, найменший і найбільший елементи. Побудувати діаграму Гассе. Чи є ця множина решіткою?

**1)** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow x/y$ ($y$ — дільник $x$), визначене на множині $X = \{1, 2, 3, 5, 6, 15, 30\}$.

**2)** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow x/y$ ($y$ — дільник $x$), визначене на множині $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 15\}$.

**3)** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow x/y$ ($y$ — дільник $x$), визначене на множині $X = \{1, 2, 3, 6, 12, 16, 18\}$.

**4)** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow y/x$ ($y$ ділиться на $x$), визначене на множині $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 15\}$.

**5)** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow y/x$ ($y$ ділиться на $x$), визначене на множині $X = \{1, 2, 3, 6, 9, 10, 12, 16, 18\}$.

**6)** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow (x)\text{mod}4 < (y)\text{mod}4$, визначене на множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ (операція $(x)\text{mod}4$ — обчислення залишку від ділення $x$ на 4).

**7)** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow (x)\text{mod}5 \geq (y)\text{mod}5$, визначене на множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ (операція $(x)\text{mod}5$ — обчислення залишку від ділення $x$ на 5).

**8)** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow (x)\text{mod}3 > (y)\text{mod}3$, визначене на множині $X = \{1, 2, 3,4,5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (операція $(x)\text{mod}3$ — обчислення залишку від ділення $x$ на 3).

**9)** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow x$ ділиться на $y$ із залишком 1 (тобто $x = ky + 1$, де $k$ — ціле число), визначене на множині $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 11, 12, 13\}$.

**10)** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow x \subset y$, визначене на множині $X = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{\{a, b, c\}\}\}$.

**11)** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow x$ кратне $y$, визначене на множині $X = \{88, 65, 55, 52, 39, 26, 13, 11\}$.

**12)** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow \{x^2 + 9 \le y^2 + 9\}$, визначене на множині $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$.

**13)** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow$ «кількість дільників $x$ більше, ніж кількість дільників $y$», визначене на множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

**14)** Відношення $x\rho y \Leftrightarrow$ «кількість дільників $x$ не більше, ніж кількість дільників $y$», визначене на множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

**Відповіді до розділу 4**

**4.1.**

***1)*** відношення нестрогого порядку, множина упорядкована частково, решітка;

***2)*** відношення нестрогого порядку, множина упорядкована частково;

***3)*** відношення нестрогого порядку, множина упорядкована частково;

***4)*** відношення нестрогого порядку, множина упорядкована частково;

***5)*** відношення нестрогого порядку, множина упорядкована частково;

***6)*** відношення строгого порядку, множина упорядкована частково;

***7)*** квазипорядок *(не для всіх елементів множини виконується властивість антисиметричності)*;

***8)*** відношення строгого порядку, множина упорядкована частково;

***9)*** не є відношенням порядку;

***10)*** відношення строгого порядку, множина упорядкована частково;

***11)*** відношення нестрогого порядку, множина упорядкована частково;

***12)*** відношення нестрогого порядку, ланцюг, решітка;

***13)*** відношення строгого порядку, множина упорядкована частково;

***14)*** квазипорядок (*не для всіх елементів множини виконується властивість антисиметричності*).

# 5. РЕШІТКИ

## ***<u>Теоретичні відомості</u>***

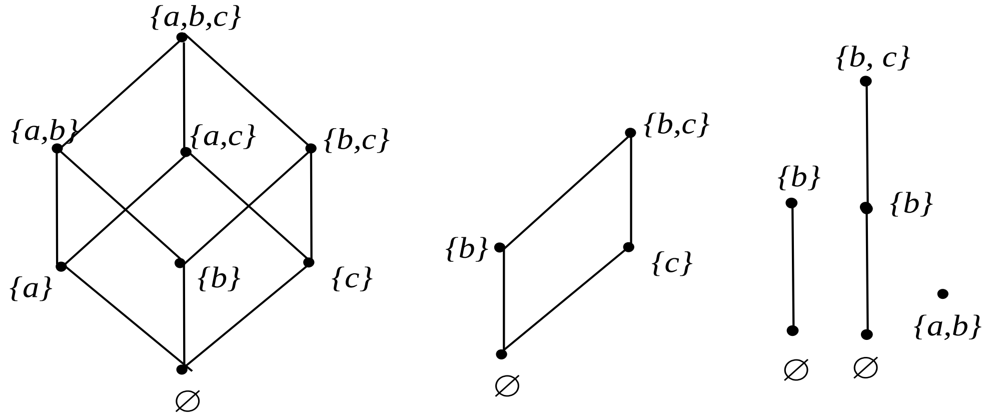
*Решіткою* називають у-множину $L$, у якій будь-які два елементи $x$ і $y$ мають точну нижню грань, яку називають *перетином* (позначають як $x \wedge y$), і точну верхню грань, яку називають *об'єднанням* (позначають як $x \vee y$).

Будь-який ланцюг є решіткою, у якій перетин $x \wedge y$ дорівнює меншому, а об'єднання $x \vee y$ — більшому з елементів $x$, $y$.

*Підрешіткою* решітки $L$ називають підмножину $X \subset L$ таку, що якщо $a \in X$, $b \in X$, то $a \wedge b \in X$ і $a \vee b \in X$.

Порожня підмножина і будь-яка одноелементна підмножина є підрешітками. Підрешітка решітки сама є решіткою з тими ж операціями об'єднання й перетину. Узагалі, якщо $a \leq b$ в решітці $L$, то (замкнутий) інтервал $[a, b]$, що складається з усіх елементів $x \in L$, які задовольняють умову $a \leq x \leq b$, завжди буде підрешіткою. Для ланцюга та його елементів $a$, $b$ таких, що $a \leq b$, можна визначити поняття напіввідкритих інтервалів: $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ і $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$, а також відкритий інтервал $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$. Якщо ці множини непорожні, то вони також є підрешітками.

*Наприклад,* у решітці, яку зображено на рисунку, підмножина $Y=\{\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$ є підрешіткою. Справді, $\{b\} \in Y$, $\{c\} \in Y$, $\{b\} \wedge \{c\} = \varnothing \in Y$, $\{b\} \vee \{c\} = \{b, c\} \in Y$, $\{b\} \vee \{b, c\} = \{b, c\} \in Y$, перетин $\{b\} \wedge \{\text{a}, c\} = \{b\} \in Y$ і т. д. Ця підмножина утворює підрешітку $[\varnothing, \{b, c\}]$. Підмножина $Z = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c\}\}$ не є підрешіткою тому, що $\{a, b\} \vee \{\text{a}, c\} = \{a, b, c\} \notin Z$. Ця підмножина не є також і інтервалом. Підрешітками будуть також усі ланцюги, наприклад: $\{\varnothing, \{b\}\}$, $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, $\{\varnothing, \{b\}, \{b, c\}\}$, і т.д., а також усі елементи решітки.




*Опуклою* підмножиною в у-множині $P$ називають підмножину, яка разом із будь-якими своїми елементами $a$ і $b$, де $a \le b$, містить увесь інтервал $[a, b]$.

На рисунку підмножина $\{\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$ є опукла, а підмножина $\{\varnothing, \{b\}, \{b, c\}\}$ — ні. Підмножина $S$ решітки $L$ є опуклою підрешіткою, якщо для будь-яких $a, b \in S$ $[a \wedge b, a \vee b] \subset S$.

**Решітку можна визначити як алгебричну систему**: $L = <P,\vee,\wedge, \le>$, із двома бінарними операціями $\vee$ і $\wedge$, і відношенням порядку $\le$ , заданими на множині $P$. Решітчасті операції $\vee$ і $\wedge$ мають важливі властивості алгебри.

В у-множині для операцій перетину та об'єднання виконуються (за визначених у них виразах) такі закони:

$x \wedge x = x, \quad x \vee x = x$ **L1**

$x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x$ **L2**

$x \wedge (y \wedge z) = (x\wedge y) \wedge z$ **L3**

$x \vee (y \vee z) = (x\vee y) \vee z$

$x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x$ **L4**

Крім того, нерівність $x \le y$ рівносильна кожній із умов:

$x \wedge y = x$ і $x \vee y = y$ (*умови сумісності*). **L5**

У будь-яких решітках мають місце такі нерівності *дистрибутивності:*

$$x \wedge (y \vee z) \ge (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad (1)$$

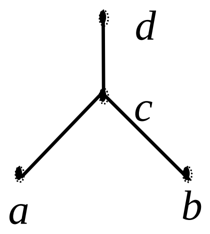
$$x \vee (y \wedge z) \le (x \vee y) \wedge (x \vee z). \qquad (1')$$

Елементи будь-яких решіток задовольняють *нерівності модулярності*: якщо $\mathbf{x \le z}$, то $x \vee (y \wedge z) \le (x \vee y) \wedge z$, (2)

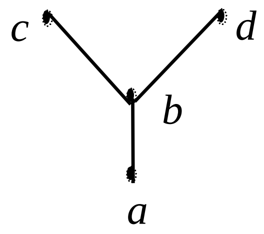
$\mathbf{z \leq x} \qquad x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee z. \qquad (2')$

Систему з одною бінарною ідемпотентною, комутативною й асоціативною операцією називають *напіврешіткою*. У-множина $P$, у якій будь-які два елементи мають перетин, є напіврешіткою щодо бінарної операції $\wedge$. Такі напіврешітки називають $\wedge$-напіврешітками, або *нижніми напіврешітками*. У-множина $P$, у якій будь-які два елементи мають об'єднання, є напіврешіткою щодо бінарної операції $\vee$. Такі напіврешітки називають $\vee$-напіврешітками, або *верхніми напіврешітками*.

На рисунку нижче наведено діаграми верхньої й нижньої напіврешіток. В у-множині $P_1$ будь-які два елементи мають об'єднання, однак елементи $a$ і $b$ не мають перетину, тому $P_1$ є верхньою напіврешіткою; в у-множині $P_2$ будь-які два елементи мають перетин, проте елементи $c$ і $d$ не мають об'єднання, тому це нижня напіврешітка.



*Верхня напіврешітка* $P_1$



*Нижня напіврешітка* $P_2$

Можна виділити решітки, що мають додаткові властивості, і визначити типи решіток, згідно з цими властивостями. Так, наприклад, для будь-яких решіток виконуються нерівності дистрибутивності (1) і (1′), проте існують і такі, для яких здійснення строга рівність.

Решітку називають *дистрибутивною*, якщо в ній для всіх $x, y, z$ виконується тотожність:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \qquad \mathbf{L6}$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z). \qquad \mathbf{L6'}$$

Якщо в решітках для всіх елементів виконується тотожність **L6,** то виконується тотожність **L6′** і навпаки.

Будь-який ланцюг є дистрибутивною решіткою.

Решітку називають *модулярною*, якщо в ній виконується модулярний закон: якщо $x \le z$, то $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. **L7**

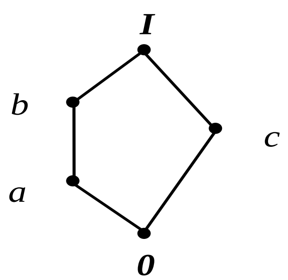
Варто відмітити, що за принципом двоїстості, якщо $z \le x$, то $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$, що збігається з **L7,** тобто закон модулярності є самоподвійним.

Модулярний закон можна дістати з **L6′**, якщо $x \le z$[3]. Отже модулярний закон має місце в будь-яких дистрибутивних решітках.

Звідси випливає, що *якщо решітка дистрибутивна, то вона й модулярна*.

*І навпаки — у такому прочитанні: якщо решітка немодулярна, то вона недистрибутивна*.

**Приклади.**




$N_5$

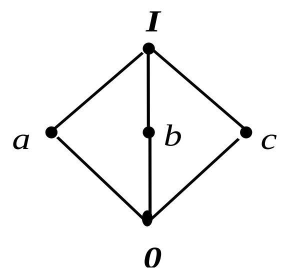
1. Розгляньмо решітку $N_5$ («*пентагон*»). Доведімо, що вона немодулярна. Усі ланцюги в решітках — дистрибутивні, отже для будь-яких двох елементів, що лежать на одному ланцюзі, умова модулярності виконується. Візьмімо елементи $a \le b$ та елемент $c$, який не лежить із ними на одному ланцюзі. Перевірмо здійсненність властивості **L7**: $a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b$. Дістанемо: $a \vee (c \wedge b) = a \vee \mathbf{0} = a$, $(a \vee c) \wedge b = \boldsymbol{I} \wedge b = b$. Оскільки $a \neq b$, то закон модулярності не виконується. Розглянтмо, чи задовольняється властивість дистрибутивності: $a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge (a \vee b)$, але $a \vee \mathbf{0} \neq \boldsymbol{I} \wedge b$, отже, решітка $N_5$ недистрибутивна.

---

[3] $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) =$ (за умови $x \le z$) $= (x \vee y) \wedge z$;
$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) =$ (за умови $z \le x$) $= (x \wedge y) \vee z$.

Звідси слідує висновок: *якщо решітка немодулярна, то вона недистрибутивна*.

2. Розгляньмо решітку $M_3$ («*діамант*»). Усі ланцюги $\{\boldsymbol{0}, a, \boldsymbol{I}\}$, $\{\boldsymbol{0}, b, \boldsymbol{I}\}$, $\{\boldsymbol{0}, c, \boldsymbol{I}\}$ — дистрибутивні, отже, вони модулярні. Візьмімо три елементи, які не лежать на одному ланцюзі: $a \le \boldsymbol{I}$ і $c$[4]. Умова модулярності для них виконується: $a \vee (c \wedge \boldsymbol{I}) = (a \vee c) \wedge \boldsymbol{I}$, оскільки $a \vee c = \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{I}$, тобто $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$.



$M_3$

Неважко переконатися в тому, що умова модулярності в $M_3$ виконуватиметься для будь-яких трьох елементів, два з яких упорядковані, і, отже, решітка $M_3$ модулярна.

Перевірмо виконання властивості дистрибутивності для елементів $a$, $b$, $c$ (решта всіх інших трійок елементів у цій решітці — дистрибутивні): $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Рівність нездійсненна, оскільки $a \vee (b \wedge c) = a \vee \mathbf{0} = a$, але $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$, і $a \neq \boldsymbol{I}$. Відзначмо, що здійсненна тільки нерівність дистрибутивності: $a \le \boldsymbol{I}$. Отже, решітка $M_3$ модулярна, але не дистрибутивна. Усі елементи $a$, $b$, $c$ непорівнянні, отже, для них не визначений закон модулярності, але дистрибутивний закон повинен виконуватися для всіх елементів, зокрема для $a$, $b$, $c$.

Звідси слідує висновок: *решітка може бути модулярною, але недистрибутивною*.

*Доповненням* елемента $x$ у решітках з $\mathbf{0}$ і $\boldsymbol{I}$ називають елемент $y$ такий, що $x \wedge y = \mathbf{0}$ і $x \vee y = \boldsymbol{I}$. Доповнення $x$ позначатимемо через $x'$.

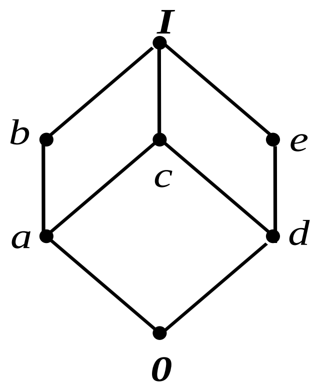
Решітку $L$ називають *решіткою з доповненнями*, якщо всі її елементи мають доповнення.

Решітку $L$ називають *решіткою з відносними доповненнями*, якщо кожен її замкнутий інтервал є решіткою з доповненнями.

[4] Групи з трьох елементів, де два непорівнянні один з одним, але обидва порівнянні з третім, називають «дистрибутивними трійками», які завжди відповідають законам дистрибутивності й модулярності.

Даючи визначення підрешітки, ми визначили замкнутий інтервал $[a, b]$ решітки як інтервал, що складається з усіх елементів $x \in L$ таких, що $a \le x \le b$. Такий інтервал решітки завжди буде підрешіткою. Елемент $x'$ є відносним доповненням елемента $x \in [a, b]$, якщо $x \wedge x' = a$ і $x \vee x' = b$.

*Наприклад,* решітка $N_5$ — немодулярна решітка з доповненнями: доповненням $\boldsymbol{0}$ є $\boldsymbol{I}$, доповненням $a$ — $c$, доповненням $b$ — $c$, $c$ має два доповнення: $a$ і $b$. Однак, це решітка без відносних доповнень: в інтервалі $[0, b]$ елемент $a$ не має доповнення. Решітка $M_3$ є підрешіткою з доповненнями.




$N_7$

Зображена на рисунку решітка $N_7$ — решітка без доповнень: елемент $c$ не має доповнення.

Для дистрибутивних решіток має місце така теорема:

Якщо в дистрибутивній решітці для фіксованого $c$

$$c \vee x = c \vee y \text{ і } c \wedge x = c \wedge y, \text{ то } x = y.$$

*Відповідно до цієї теореми, у будь-якому замкнутому інтервалі [a, b] дистрибутивної решітки елемент c може мати щонайбільше одне відносне доповнення.*

Будь-яка модулярна решітка з доповненнями є решіткою з відносними доповненнями.

*Булевими* решітками називають дистрибутивні решітки з доповненнями.

У булевих решітках будь-який елемент $x$ має одне й тільки одне доповнення $x'$. До того ж:

$x \wedge x' = \mathbf{0}$; $x \vee x' = \boldsymbol{I}$; **L8**

$(x')' = x$; (*інволюція*) **L9**

$(x \wedge y)' = x' \vee y'$; $(x \vee y)' = x' \wedge y'$. (*закони де Моргана*) **L10**

Оскільки доповнення в булевих решітках єдині, її можна розглядати як *алгебру.*

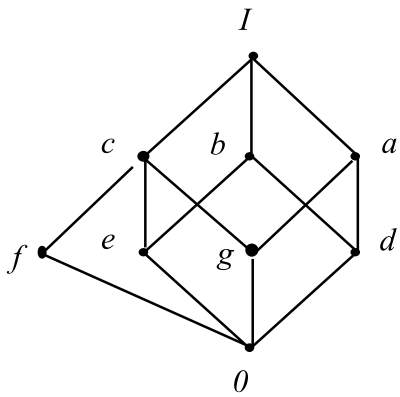
*Булевою алгеброю* $B = \langle L, \vee, \wedge, ', \mathbf{0}, \boldsymbol{I} \rangle$ називають алгебру з двома бінарними операціями, однією унарною операцією $'$ і двома нульарними операціями **0** і ***I***, що задовольняють умови **L1 – L10**.

Підрешітку решітки, що містить разом із будь-яким елементом *a* всі елементи *x* такі, що $x \le a$, називають *ідеалом решітки*, а підрешітку, що містить усі елементи *x* такі, що $a < x$ або $a||x$, називають *дуальним ідеалом решітки*. Ідеал не може бути порожнім, а дуальний — усією решіткою. Ідеал визначається для кожного елемента *a* решітки в єдиний спосіб, а двоїстий — до нього (може бути декілька варіантів; не всі елементи *x* такі, що $a < x$ або $a||x$, входять до двоїстого ідеалу — вони можуть не мати перетину).

Якщо ідеал і дуальний ідеал в об'єднанні утворюють усю решітку, то ідеал і дуальний ідеал називають відповідно *примарним ідеалом* та *дуальним примарним ідеалом* (*примарною парою*).

***Приклад 1.***

Дослідімо решітку, зображену на рисунку.




Для доведення модулярності потрібно взяти два елементи *x, z* такі, що $x \le z$, і третій елемент *y*, що є непорівнянним з *x, z* *(усі три обрані елементи не повинні належати ланцюгу або дистрибутивній трійці),* і перевірити умову модулярності: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. Візьмімо $x=f, y=d, z=c$:

$f \vee (d \wedge c) = f \vee 0 = f$, $(f \vee d) \wedge c = I \wedge c = c$; $f \neq c$, отже, решітка немодулярна, а також і не дистрибутивна, не булева.

Побудуймо таблиці перетинів та об'єднань елементів решітки.

Ці операції є комутативними, отже матриці будуть квадратовими й симетричними відносно головної діагоналі. Об'єднання (перетин) пари елементів є точна верхня (нижня) грань. Через закон ідемпотентності ($x \vee x = x$, *x* ∧ *x* = *x*) на діагоналі розташовуються самі елементи решіток. За об’єднання (перетину) будь-якого *x* з одиницею (нулем) решітки дістаємо елемент, що позначає одиницю (нуль) решітки, а за об’єднання (перетину) *x* із нулем (одиницею) — сам елемент.

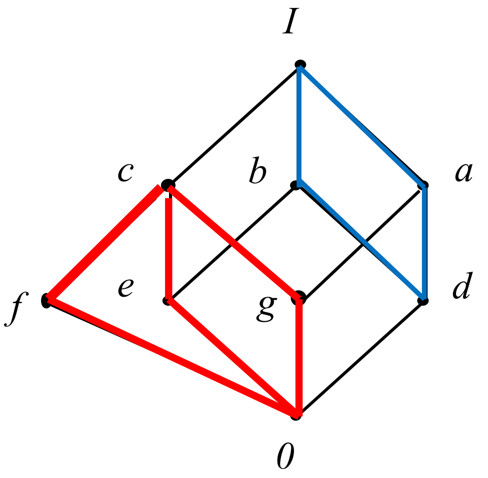
| ∨ | **0** | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **I** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | *0* | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* | *g* | *I* |
| **a** | *a* | *a* | *I* | *I* | *a* | *I* | *I* | *a* | *I* |
| **b** | *b* | *I* | *b* | *I* | *b* | *b* | *I* | *I* | *I* |
| **c** | *c* | *I* | *I* | *c* | *I* | *c* | *c* | *c* | *I* |
| **d** | *d* | *a* | *b* | *I* | *d* | *b* | *I* | *a* | *I* |
| **e** | *e* | *I* | *b* | *c* | *b* | *e* | *c* | *c* | *I* |
| **f** | *f* | *I* | *I* | *c* | *I* | *c* | *f* | *c* | *I* |
| **g** | *g* | *a* | *I* | *c* | *a* | *c* | *c* | *g* | *I* |
| **I** | *I* | *I* | *I* | *I* | *I* | *I* | *I* | *I* | *I* |

| ∧ | **0** | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **I** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* |
| **a** | *0* | *a* | *d* | *g* | *d* | *0* | *0* | *g* | *a* |
| **b** | *0* | *d* | *b* | *e* | *d* | *e* | *0* | *0* | *b* |
| **c** | *0* | *g* | *e* | *c* | *0* | *e* | *f* | *g* | *c* |
| **d** | *0* | *d* | *d* | *0* | *d* | *0* | *0* | *0* | *d* |
| **e** | *0* | *0* | *e* | *e* | *0* | *e* | *0* | *0* | *e* |
| **f** | *0* | *0* | *0* | *f* | *0* | *0* | *f* | *0* | *f* |
| **g** | *0* | *g* | *0* | *g* | *0* | *0* | *0* | *g* | *g* |
| **I** | *0* | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* | *g* | *I* |

Знайдімо доповнення в решітці. Доповненням елемента *x* решітки називають такий елемент *x’*, для якого виконується *x*∧*x’* = *0*, *x*∨*x’*=*I*. У загальному випадку доповнень для *x* може бути декілька або не бути зовсім. Для одиниці (нуля) решітки доповненням є нуль (одиниця) решітки.

| **x** | **0** | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **I** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **x′** | I | e, f | g, f | d | c, f | a | b, a, d | b | 0 |
| ***x∨x′*** | *I* | *I* | *I* | *I* | *I* | *I* | *I* | *I* | *I* |
| ***x∧x′*** | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* |

Усі елементи решітки мають доповнення. Наявність у деяких елементів декількох доповнень свідчить про недистрибутивність.



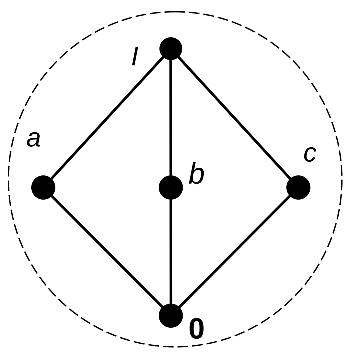

Це немодулярна недистрибутивна решітка з доповненнями, але без відносних доповнень (наприклад, замкнений інтервал [*f*, *c*, *I*] є опуклою підрешіткою без доповнень).

Визначмо ідеали. Для зручності зведімо інформацію про ідеали до таблиці.

| *елемент x* | $J_x$ | $D_x$ *(не єдиний варіант)* |
|---|---|---|
| *0* | *{0}* | *{d, b, a, I} або…* |
| *a* | *[0,a ] = {0, d, g, a }* | *{e, c, b, I} або…* |
| *b* | *[0, b] = {0, e, d, b}* | *{g, c, a, I} або…* |
| *c* | ***[0, c] = {0, f, e, g, c}*** | ***{d, b, a, I}*** |
| *d* | *[0, d] = {0,d}* | *{f, c, I} або…* |
| *e* | *[0, e] = {0, e}* | *{d, b, a, I} або…* |
| *f* | *[0, f] = {0, f}* | *{d, b, a, I} або…* |
| *g* | *[0, g] = {0, g}* | *{d, b, a, I} або…* |
| *I* | ***[0, I] = L — уся решітка*** | ***ø*** |

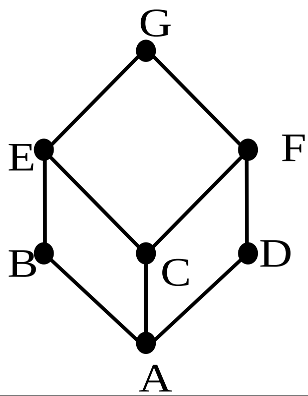
Примарних пар ідеалів у решітці дві: для елемента c і для I. Примарний ідеал і примарний дуальний ідеал хоча б один раз завжди визначається, він існує для одиниці решітки: ідеал — уся решітка, дуальний — порожня множина. Такий ідеал можна назвати тривіальним.

***Приклад 2.*** Розгляньмо модулярний недистрибутивний «діамант».




Усі елементи мають доповнення: 0 і I — протилежні, а елементи a, b, c — попарно один до одного. Через те, що решітка модулярна та з доповненнями, то вона є решіткою з відносними доповненнями. Наявність декількох доповнень в одного елемента підтверджує недистрибутивність.

З елементів $a$, $b$, $c$ принаймні два належать або $\boldsymbol{J}$, або $\boldsymbol{D}$. Припустімо, $a, b \in \boldsymbol{J}$. Якщо $a \in \boldsymbol{J}$, то будь-який елемент $x \le a$ також належить $\boldsymbol{J}$, тобто $\mathbf{0} \in \boldsymbol{J}$. Разом з $a$, $b$ їх об'єднання належить $\boldsymbol{J}$, тобто $a \vee b = \boldsymbol{I} \in \boldsymbol{J}$. З іншого боку, елемент $c \in \boldsymbol{J}$, оскільки $c \le \boldsymbol{I}$. Отже існує тільки один примарний ідеал, що збігається з усією решіткою (тривіальна пара).




***Приклад 3.***

Решітку задано на рисунку. Результати операцій об'єднання та перетину надано в таблиці.

| $\vee$ | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | A | B | C | D | E | F | G |
| B | B | B | E | G | E | G | G |
| C | C | E | C | F | E | F | G |
| D | D | G | F | D | G | F | G |
| E | E | E | E | G | E | G | G |
| F | F | G | F | F | G | F | G |
| G | G | G | G | G | G | G | G |

| $\wedge$ | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | A | A | A | A | A | A | A |
| B | A | B | A | A | B | A | B |
| C | A | A | C | A | C | C | C |
| D | A | A | A | D | A | D | D |
| E | A | B | C | A | E | C | E |
| F | A | A | C | D | C | F | F |
| G | A | B | C | D | E | F | G |

Перевірмо модулярність. Усі елементи, що лежать у ланцюгах, задовольняють умову модулярності. Візьмімо елементи B ≤ E, і D. $B \vee (D \wedge E) = B \vee A = B$. $(B \vee D) \wedge E = G \wedge E = E$. $B \ne E$, отже, решітка немодулярна. Оскільки вона немодулярна, то вона недистрибутивна.

Знайдімо доповнення в решітці.

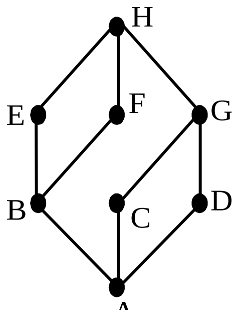
| x | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x′ | G | D, F | – | B, E | D, F | B, E | A |
| x∨x′ | G | G | – | G | G | G | G |
| x∧x′ | A | A | – | A | A | A | A |

Наша решітка — без доповнень, бо елемент C не має доповнення; небулева.

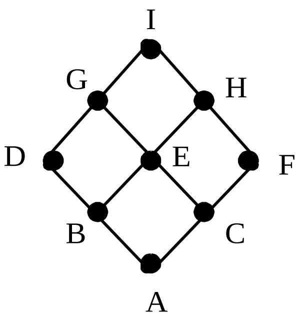
**Завдання 5.1.**

***Для зображених решіток скласти таблиці об'єднань та перетинів елементів. Знайти модулярні, дистрибутивні решітки, решітки з доповненнями, булеві решітки. Для решіток із доповненнями побудувати таблицю доповнень.***

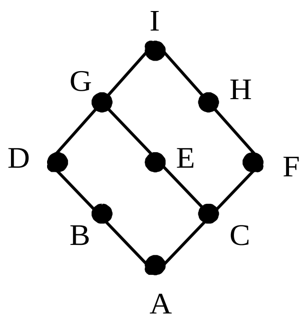
***Визначити ідеали та двоїсті ідеали, знайти серед них примарні пари. Навести приклади підрешіток, як опуклих, так і ні.***



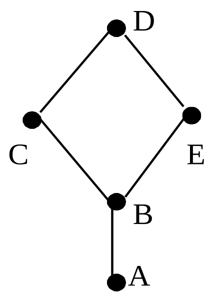

**1)**



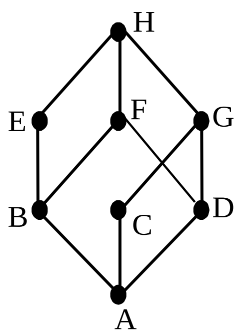

**2)**



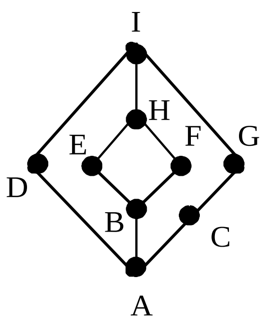

**3)**



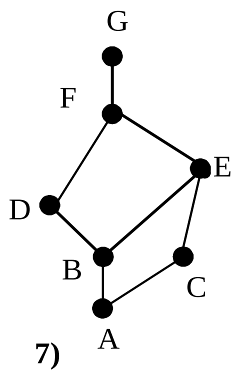

**4)**




**5)**




**6)**




**7)**

## Відповіді до розділу 5

**5.1.**

***1)*** решітка не є модулярною, не є дистрибутивною, із доповненнями, без відносних доповнень, не булева;

***2)*** решітка модулярна, дистрибутивна, без доповнень, не булева;

***3)*** решітка не є модулярною, не є дистрибутивною, без доповнень, не булева;

***4)*** решітка модулярна, дистрибутивна, без доповнень, не булева;

***5)*** решітка не є модулярною, не є дистрибутивною, із доповненнями, без відносних доповнень, не булева;

***6)*** решітка не є модулярною, не є дистрибутивною, із доповненнями, без відносних доповнень, не булева;

***7)*** решітка модулярна, дистрибутивна, без доповнень, не булева.

# 6. ВІДОБРАЖЕННЯ УПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН І РЕШІТОК

## 6.1. Відображення упорядкованих множин

***<u>Теоретичні відомості</u>***

Функцію $\varphi$: $P \to Q$, задану на у-множині $P$, і що набуває значеню в у-множині $Q$, називають *такою, що зберігає порядок*, або *ізотонною*, якщо з $x \le y$ випливає, що $\varphi(x) \le \varphi(y)$. (1)

Наприклад, якщо $P = \{1, 2, 3\}$ така, що $1 \le 2 \le 3$, і $Q = \{a, b, c\}$ така, що $a \le b \le c$, то відображення $\varphi(1)=a$, $\varphi(2)=b$, $\varphi(3)=c$ є ізотонною функцією.

Ізотонну функцію, що допускає ізотонну зворотну функцію, називають *$\varphi$-ізоморфізмом*. Ізоморфізмом є взаємно однозначна відповідність між двома у-множинами, що задовольняє умову (1) й умову (1'):

*із $\varphi(x) \le \varphi(y)$ випливає, що $x \le y$.* (1')

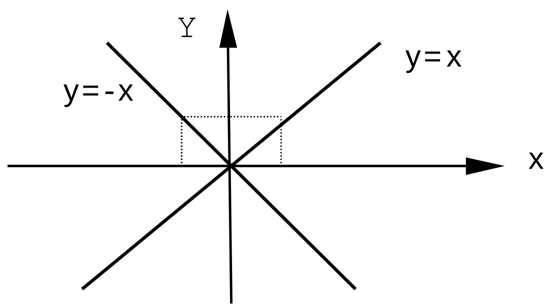
Функціяю φ: $P \to Q$ називають *антиізотонною* (*антитонною*), якщо: з $x \le y$ випливає, що $\varphi(\mathrm{x}) \ge \varphi(\mathrm{y})$, (2)

а взаємно однозначну відповідність, що задовольняє умову (2) і (2'):

із $\varphi(\mathrm{x}) \le \varphi(\mathrm{y})$ слідує $x \ge y$ (2')

називають *дуальним ізоморфізмом.*

*Наприклад,*

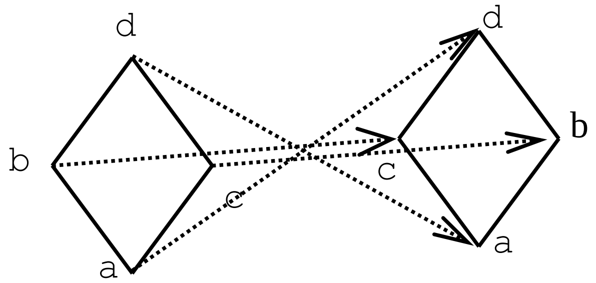



*Автоморфізм і дуальний автоморфізм*

На рисунку вище пряма $y = x$ є автоморфізм $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, який є тотожним відображенням. Пряма $y = -x$ є дуальний автоморфізм; це відображення бієктивне й антитонне: якщо $x_1 \leq x_2$, то $y_1 \geq y_2$.

У-множину, дуально ізоморфну саму собі, називають *самодвоїстою*. У самодвоїстій множині для будь-якого $x$ образ φ(φ (x)) образу φ(x) дорівнює $x$: φ(φ (x)) = $x$. Такі самодвоїсті (дуальні) автоморфізми називають *інволюціями*.

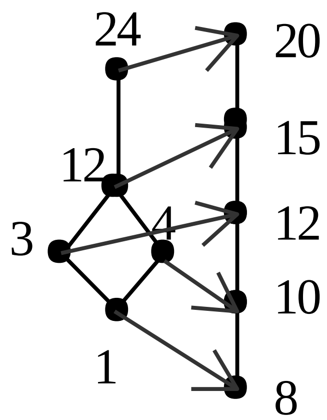
*Наприклад,*




Множина, зображена на рисунку, є самодвоїстою. Справді, відображення $\varphi(a) = d$, $\varphi(b) = c$, $\varphi(c) = b$, $\varphi(d) = a$ є дуальним автоморфізмом. Повторне застосування цього відображення дає ті ж самі елементи, тобто $E$. Виконується властивість самодвоїстості: $\varphi(\varphi(x)) = x$.

***Приклад 1.*** На множинах $A$ та $B$ задано відношення порядку $\rho_1$ та $\rho_2$ відповідно, і задано відображення $f(a) = b$, де $a \in A$, $b \in B$. Визначити, чи є воно ізотонним, ізоморфізмом або автоморфізмом.

Для розв’язання потрібно побудувати для обох упорядкованих множин $A$ та $B$ діаграми Гассе і відображення $f$ так, як вказано в умові.




На множинах $A = \{1, 3, 4, 12, 24\}$ з відношенням порядку $\rho_1$: $\{x$ — дільник $y\}$; $B = \{8, 10, 12, 15, 20\}$ з відношенням порядку $\rho_2$: $x < y$ задано відображення $A \to B$: $f(a_i) = b_i$.

Перевірмо, чи є відображення $f$: $A \to B$ ізотонним. Ізотонне відображення зберігає порядок: для всіх $x, y \in A$, якщо $x \leq y$, то $f(x) \leq f(y)$.

Задано образи функції $f$: $A \to B$.

$f(1) = 8 = b_1$, $f(4) = 10 = b_2$, $f(3) = 12 = b_3$, $f(12) = 15 = b_4$, $f(24) = 20 = b_5$.

Множина $A$ є решітка, у якій можна виділити два ланцюги.

Для ланцюга $1 \le 3 \le 12 \le 24$ відображення $f$ зберігає порядок, оскільки $8 < 12 < 15 < 20$, тобто $f(1) \le f(3) \le f(12) \le f(24)$.

Для ланцюга $1 \le 4 \le 12 \le 24$ відображення $f$ також зберігає порядок, оскільки $8 < 10 < 15 < 20$, тобто $f(1) \le f(4) \le f(12) \le f(24)$.

Отже, відображення ізотонне. Однак, відображення не є ізоморфізмом, оскільки зворотне відображення $f^{-1}$ не зберігає порядку: для значень $f(4) \le f(3)$ $(10 \le 12)$ прообрази 3, 4 є непорівнянними.

Отже відображення $f$ ізотонне, але не є ізоморфізмом.

***Завдання 6.1.*** На множинах $A$ та $B$ задано відношення порядку $\rho_1$ та $\rho_2$ відповідно і задано відображення $f(a) = b$, де $a \in A$, $b \in B$. Визначити, чи є воно ізотонним, ізоморфізмом або автоморфізмом.

**1)** $A = \{2, 3, 6, 12, 24\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$; $f(2)=1$; $f(3)=1$; $f(6)=5$; $f(12)=10$; $f(24)=30$; $\rho_1=\rho_2$: {$x$ — дільник $y$};

**2)** $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$; $f(a_i)=a_{((i+2) \bmod 4)}$; $\rho_1=\rho_2$: $\forall \le j$ $a_i \le a_j$;

**3)** $A = \{1, 3, 4, 12, 24\}$, $B = \{2, 6, 8, 24, 48\}$; $f(x) = 2x$; $\rho_1$: {$x$ — дільник $y$}; $\rho_2$: $x < y$;

**4)** $A = \{6, 7, 14, 15, 35\}$, $B = \{0, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $f(x) = x \bmod 6$; $\rho_1$: $x \le y$, $\rho_2$: $|x| < |y|$;

**5)** $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{2, 1, 0, -1, -2\}$; $f(x) = -x$; $\rho_1$: $x \le y$; $\rho_2$: $x > y$;

**6)** $A = \{25, 20, 15, 10, 5\}$, $B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$; $f(x) = x/5$; $\rho_1 = \rho_2$: $x \ge y$;

**7)** $A = \{64, 8, 4, 2, 1\}$, $B = \{0, 81, 9, 3, 1\}$; $f(a_i) = a_{4-i}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$; $\rho_1 = \rho_2$: {$x$ ділиться на $y$};

**8)** $A = \{2, -3, 4, 6, -7, 8\}$, $B = \{4, 9, 16, 36, 49, 64\}$; $f(x) = x^2$; $\rho_1$: $x$ $|x| \le |y|$, $\rho_2$: $x \le y$;

**9)** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$; $f(x) = 2^x$; $\rho_1 = \rho_2$: $x < y$;

**10)** $A = \{0, 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 1\}$, $B = \{0, 6, 15/2, 10, 15, 20, 30\}$; $f(x) = 30x$; $\rho_1$: $x^2 \le y^2$, $\rho_2$: $x \le y$.

## 6.2. Відображення решіток. Морфізми

***Теоретичні відомості***

Ізотонне відображення $\varphi: L \to M$ решітки $L$ в решітку $M$ називають:

$\vee$-**гомоморфізмом**, якщо

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y) \quad \forall x, y \in L \qquad (1),$$

$\wedge$-**гомоморфізмом**, якщо

$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y) \quad \forall x, y \in L \qquad (1')$$

і просто **гомоморфізмом (морфізмом)**, якщо виконується (1) і (1').

Отже гомоморфізм решіток — це функціональне ізотонне відображення, що зберігає решітчасті операції, тобто таке, що переводить об’єднання в об’єднання, а перетин — у перетин.

Гомоморфізм називають:

*ізоморфізмом*, якщо він є взаємно однозначною відповідністю (бієкція);

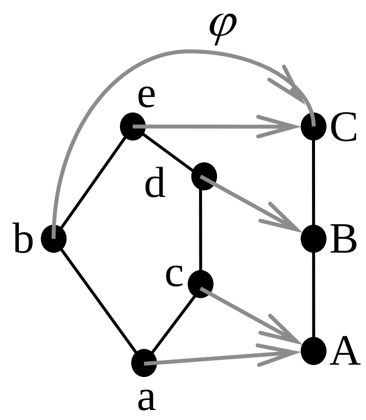
*накладенням* або *епіморфізмом*, якщо він відображає $L$ на $M$, тобто якщо відображення $\varphi: L \to M$ є сюр’єкцією;

*вкладенням,* або *мономорфізмом*, якщо різні елементи $L$ відображаються в різні елементи $M$ (однозначна відповідність), тобто відображення $\varphi: L \to M$ є ін’єкцією;

*ендоморфізмом*, якщо $L = M$;

*автоморфізмом*, якщо $L = M$ і це є ізоморфізм.

***Приклад 2.***




Розгляньмо відображення φ множини $L = \{a, b, c, d, e\}$ на множину $M = \{A, B, C\}$. Перевірмо, чи є воно ізотонним. Розгляньмо всі ланцюги максимальної довжини та їхні образи.

$a \le b \le e$:

$\varphi(a) = A, \varphi(b) = C, A \le C$ — виконується,

$\varphi(b) = C, \varphi(e) = C, C \le C$ — виконується,

$a \le c \le d \le e$:

$a \le c, \varphi(a) = A, \varphi(c) = A, A \le A$ — виконується,

$c \le d, \varphi(c)=A, \varphi(d)=B, A \le B$ — виконується,

$d \le e, \varphi(d) = B, \varphi(e)=C, B \le C$ — виконується,

$b \le e, \varphi(b) = C, \varphi(e)=C, C \le C$ — виконується.

Відображення φ є ізотонним.

Перевірмо, чи є воно гомоморфизмом.

**За ізотонного відображення гомоморфізм у ланцюгах зберігається. Тому для перевірки на виконуваність формул для ∨- та ∧- гомоморфізмів розглядають тільки непорівнянні пари елементів.**

Справді, якщо $a \le b$, то $a \wedge b = a, a \vee b = b$, і за ізотонного відображення $\varphi(a) \le \varphi(b)$, також виконується $\varphi(a) \wedge \varphi(b) = \varphi(a), \varphi(a) \vee \varphi(b) = \varphi(b)$.

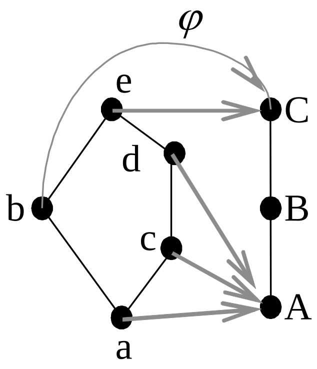
Спочатку перевірмо, чи є воно ∨-гомоморфизмом.

$\varphi(b \vee c) = \varphi(e) = C; \varphi(b) \vee \varphi(c) = C \vee A = C$ — виконується,

$\varphi(b \vee d) = \varphi(e) = C; \varphi(b) \vee \varphi(d) = C \vee B = C$ — виконується.

Відображення φ є ∨-гомоморфізмом. Проте воно не є ∧-гомоморфізмом, оскільки $\varphi(b \wedge d) = \varphi(a) = A$, але $\varphi(b) \wedge \varphi(d) = C \wedge B = B$, тобто властивість збереження ∧ не виконується. Тому відображення φ не є гомоморфізмом. Оскільки φ зберігає операцію ∨, то це є ∨-гомоморфізм.

***Приклад 3.***




Розгляньмо інше відображення φ множини $L = \{a, b, c, d, e\}$ на множину $M = \{A, B, C\}$. Перевірмо, чи є воно ізотонним.

$a \le b \le e$:

$\varphi(a) = A$, $\varphi(b) = C$, $A \le C$ — виконується,

$\varphi(b) = C$, $\varphi(e) = C$, $C \le C$ — виконується,

$a \le c \le d \le e$:

$a \le c$, $\varphi(a) = A$, $\varphi(c) = A$, $A \le A$ — виконується,

$c \le d$, $\varphi(c)=A$, $\varphi(d)=A$, $A \le A$ — виконується,

$d \le e$, $\varphi(d) = A$, $\varphi(e)=C$, $A \le C$ — виконується,

$b \le e$, $\varphi(b) = C$, $\varphi(e)=C$, $C \le C$ — виконується.

Відображення φ є ізотонним.

Перевірмо, чи є воно гомоморфізмом.

Спочатку перевірмо, чи є воно $\vee$-гомоморфізмом.

$\varphi(b \vee c) = \varphi(e) = C$; $\varphi(b) \vee \varphi(c) = C \vee A = C$ — виконується,

$\varphi(b \vee d) = \varphi(e) = C$; $\varphi(b) \vee \varphi(d) = C \vee A = C$ — виконується.

Відображення φ є $\vee$-гомоморфізмом.

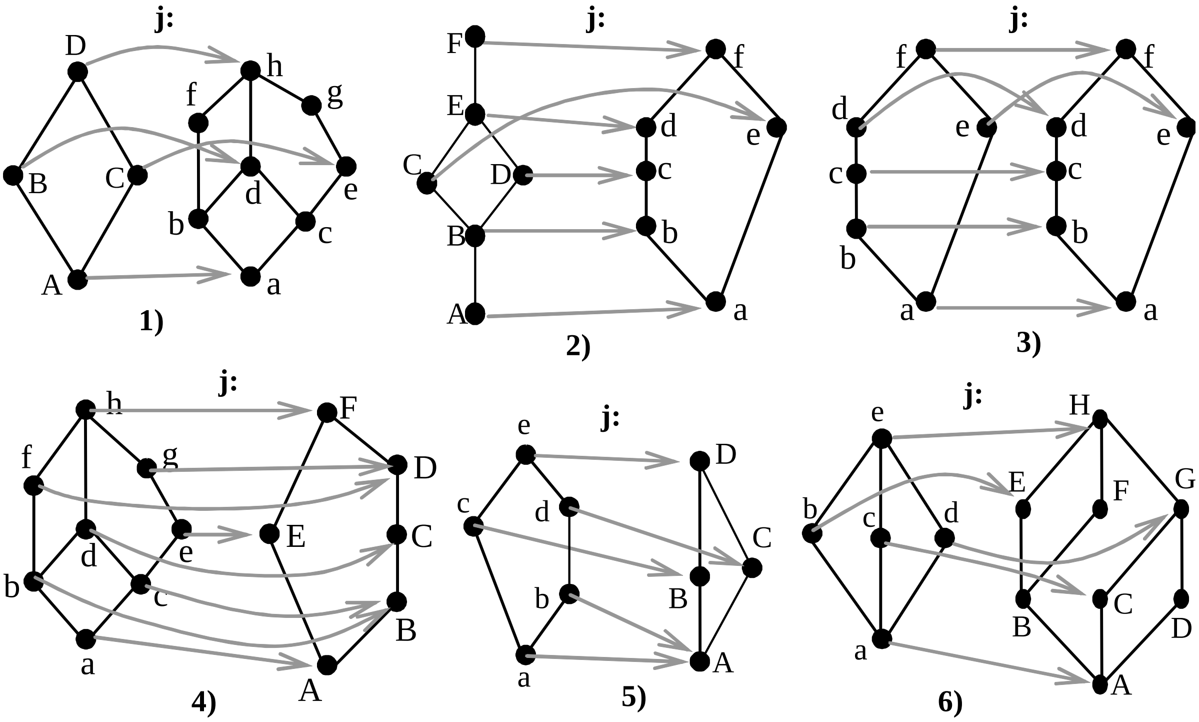
Перевіримо на $\wedge$-гомоморфізмом.

$\varphi(b \wedge d) = \varphi(a) = A$; $\varphi(b) \wedge \varphi(d) = C \wedge A = A$ – виконується,

$\varphi(b \wedge c) = \varphi(a) = A$; $\varphi(b) \wedge \varphi(c) = C \wedge A = A$ – виконується.

Відображення φ є $\wedge$-гомоморфізмом. Отже, це є морфізм.

**Завдання 6.2.** Які з відображень є: ізотонними; $\vee$-гомоморфізмом; $\wedge$-гомоморфізмом; гомоморфізмом; ізоморфізмом; епіморфізмом; мономорфізмом; ендоморфізмом; автоморфізмом.




**Відповіді до розділу 6**

**6.1.**

| | |
|---|---|
| 1) ізотонне; | 6) ізоморфізм; |
| 2) не є ізотонним; | 7) дуальний ізоморфізм; |
| 3) ізотонне; | 8) ізотонне; |
| 4) ізотонне; | 9) ізоморфізм |
| 5) ізоморфізм; | 10) ізоморфізм. |

**6.2.**

1) $\vee$ – гомоморфізм;

2) відображення не є ізотонним, не гомоморфізм;

3) автоморфізм;

4) відображення не є ізотонним, не гомоморфізм;

5) $\wedge$– гомоморфізм;

6) не гомоморфізм.

# 7. ГРАФИ

## 7.1. Дослідження неорієнтованих графів

***<u>Теоретичні відомості</u>***

*Неорієнтованим графом* $G = (V, E)$ називають об’єкт, заданий парою множин $(V, E)$, де $V$ — множина *вершин*, $E \subseteq V \times V$ — множина *ребер*.

Неорієнтований граф задає два відношення між своїми елементами: відношення суміжності і відношення інцидентності. ***Суміжність*** — відношення між вершинами: дві вершини називають суміжними, якщо їх з’єднує ребро. Це відношення — звичайне бінарне відношення на множині $V$, яке для простого графа можна задати квадратовою бінарною (тобто складається з нулів та одиниць) матрицею суміжності $A(G) = (a_{ij})$, яку визначають так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j) \in E, \\ 0, & (\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j) \notin E. \end{cases}$$

Відношення суміжності в неорієнтованому графі завжди симетричне, оскільки порядок вершин у парі $(v_i, v_j)$ не є важливий. Наявність рефлексивності й транзитивності залежить від конкретних властивостей графа.

***Інцидентність*** — це відношення між вершинами й ребрами: ребро інцидентне кожній із вершин, які воно з’єднує. Його задають матрицею інцидентності $C$, у якій рядки позначають іменами вершин, а стовпці — іменами ребер графа. Матрицю інцидентності графа визначають як $(n \times m)$ матрицю $C\,(G) = (c_{ij})$, у якій

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ вершина } v_i \text{ інцидентна ребру } e_j, \\ 0, \text{ вершина } v_i \text{ інцидентна ребру } e_j. \end{cases}$$

Це прямокутова бінарна матриця, у якій число рядків дорівнює числу вершин графа $n$, а число стовпців — числу ребер $m$.

Число ребер, інцидентних вершині $v_i$ графа (орграфа, мультиграфа), називають степенем цієї вершини і позначають $deg\,(v_i)$. Степінь вершини можна визначити за матрицями інцидентності й суміжності. Ступінь вершини $v_i$

дорівнює числу одиниць в $i$-му рядку матриці інцидентності або матриці суміжності.

Сума ступенів усіх вершин дорівнює подвоєному числу ребер, оскільки кожне ребро бере участь у степенях двох вершин, тобто рахується в цій сумі двічі. Оскільки ця сума парна, то й число вершин із непарними степенями теж парне.

*Шлях* $P_i$ в неорієнтованому графі — це послідовність ребер $(v_{i0}, v_{i1})$, $(v_{i1}, v_{i2})$, ..., $(v_{i,n-1}, v_{in})$ така, що будь-які два сусідні ребра різні й мають спільну інцидентну їм вершину. Вершину $v_{i0}$ називають *початком* шляху, вершину $v_{in}$ — *кінцем* шляху.

Шлях можна задати також послідовністю вершин, не вказуючи ребер, наприклад: $v_{i0}$, $v_{i1}$, $v_{i2}$, ..., $v_{i,n-1}$, $v_{in}$. Число ребер на шляху $P$ називають його *довжиною.*

Очевидно, що якщо в неорієнтованому графі існує шлях з $v_{i0}$ в $v_{in}$, то існує шлях з $v_{in}$ в $v_{i0}$, — це той же шлях, пройдений у зворотному напрямку.

Шлях називають *циклічним*, або просто *циклом*, якщо $v_{i0} = v_{in}$. Цикл називають *простим*, якщо будь-яка вершина графа фігурує в ньому не більше одного разу. Цикл називають *повним*, якщо в нього входять усі вершини графа.

Одне й те ж ребро може бути на шляху декілька разів. Шлях називають *ланцюгом*, якщо кожне ребро міститься в ньому не більше одного разу, і *простим ланцюгом* (або простим шляхом), якщо будь-яка вершина графа міститься в ньому не більше, ніж один раз. Простий ланцюг — це ланцюг, який не перетинає сам себе.

Вершини $v_i$ і $v_j$ називають *зв'язаними*, якщо існує шлях із початком в $v_i$ і кінцем у $v_j$. У цьому випадку кажуть також, що вершина $v_j$ *досяжна* з вершини $v_i$. Кожна вершина за визначенням пов'язана сама з собою шляхом нульової довжини.

Неорієнтований граф називають *зв'язним*, якщо всі його вершини зв'язані між собою.

Зв'язаність — це бінарне відношення на множині вершин. Воно рефлексивне (кожна вершина зв'язана сама з собою за визначенням), симетричне (для кожного шляху є зворотний шлях) і транзитивне. Транзитивність означає, що якщо є шлях із $v_i$ в $v_j$ і шлях з $v_j$ в $v_k$, то є шлях із $v_i$ в $v_k$. Це очевидно: щоб дістати такий шлях, достатньо до послідовності ребер, що веде з $v_i$ в $v_j$, приписати праворуч послідовність ребер, що веде з $v_j$ в $v_k$.

Отже відношення зв'язаності є відношенням еквівалентності на множині вершин графа $G$ і розбиває цю множину на неперетинні підмножини — класи еквівалентності. Усі вершини одного класу пов'язані між собою, вершини з різних класів між собою не пов'язані. Максимальний зв'язний підграф графа $G$ називають *компонентою зв'язності* графа $G$.

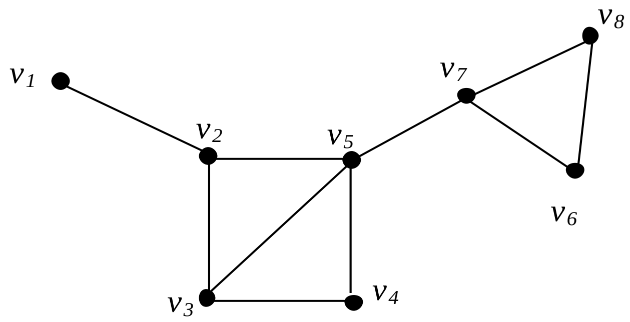
Зв'язний граф складається з однієї компоненти зв'язності.

Якщо дві вершини зв'язані між собою, то існує простий ланцюг, що зв'язує їх.

Вершину графа називають *точкою зчленування*, якщо її видалення збільшує число зв'язних компонент графа. Граф називають *роздільним,* якщо він містить хоча б одну точку зчленування, і *нероздільним*, якщо він не містить таких точок. Максимальні нероздільні підграфи графа називають його *блоками*. Ребро між точками зчленування — *міст* або *перешийок.*

Вершина $v_i$ є точкою зчленування зв'язного графа $G$ тоді й тільки тоді, коли існують такі вершини $v_j$ і $v_k$, відмінні від $v_i$, що будь-який шлях між ними проходить через $v_i$.

*Наприклад,* у графі $G$ на рисунку вершини $v_5$, $v_2$, $v_7$ — точки зчленування, ребро ($v_5$, $v_7$) — перешийок.




*Точки зчленування в неорієнтованому графі*

В неорієнтованому графі *відстанню* $d(v_i, v_j)$ між вершинами $v_i$ і $v_j$ називають мінімальну з довжин простих ланцюгів, що зв'язують ці вершини.

Оскільки за визначенням кожна вершина зв'язана сама з собою, то $d(v_i, v_i)=0$.

Відстань $d(v_i, v_i)$ задовольняє аксіоми метрики:

$d(v_i, v_j) \geq 0$, причому $d(v_i, v_i) = 0$, якщо й тільки якщо $v_i = v_j$;

$d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$;

$d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) \geq d(v_i, v_k)$ (нерівність трикутника).

*Діаметром* $d(G)$ графа $G$ називають максимальну з відстаней між його вершинами: $d(G)= \max\limits_{v_i, v_j \in G} d(v_i, v_j)$. *Максимальним віддаленням* від вершини $v_i$ називають величину $r(v_i)= \max\limits_{v_j \in G} d(v_i, v_j)$. Вершину $v$ називають *центром* графа $G$, якщо $r(v)$ мінімальне серед з-поміж інших вершин графа: $r(v)= \min\limits_{v_i \in G} r(v_i)$. Максимальне видалення $r(v)$ від центра $v$ називають *радіусом* графа $G$ і позначають як $r(G)$. Вершини з максимальним віддаленням $r(v)$, що збігається зі значенням діаметра, називають *периферіями*.

*Ейлеровим обходом*, або *Ейлеровим циклом*, в неорієнтованому графі називають цикл, який містить усі ребра графа точно по одному разу. Граф називають *Ейлеровим*, якщо в ньому існує Ейлерів обхід.

Не кожен граф є Ейлеревим. Неодмінні й достатні умови існування Ейлерового обходу сформульовано в такій теоремі.

**Теорема** (Л. Ейлер, 1736 р.). Неорієнтований граф є Ейлеровим тоді й тільки тоді, коли він зв’язний, і всі степені його вершин парні.

Цикл в неорієнтованому графі називають *гамільтоновим*, якщо він містить усі вершини графа точно по одному разу. Граф називають *гамільтоновим*, якщо в ньому існує гамільтонів цикл.

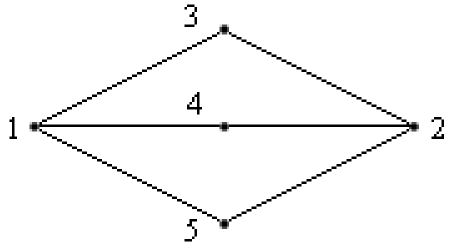
Задача знаходження гамільтонового циклу, яку сформулював англійський математик Гамільтон[5], за всієї схожості з задачею про Ейлерів обхід, виявляється набагато складнішою. Прості критерії існування гамільтонового циклу невідомі. У той же час інтерес до її розв’язання великий, оскільки вона має природну прикладну інтерпретацію. Якщо розглядати граф як транспортну мережу, вершини якої — міста, а ребра — шляхи між містами, то задача про гамільтонів цикл виявляється окремим випадком відомої «задачі про комівояжера»: об’їхати всі міста, побувавши в кожному точно один раз, і повернутися в початкове місто.

Неодмінні умови існування гамільтонових графів поки не знайдено.

[5] Сер **Ві́льям Ро́вен (1806–1865)** — ірландський та один з найліпших світових математиків XX століття. Зробив внески в алгебру, теорію диференціальних рівнянь, фізику, астрономію, оптику, дінамику.

Легко бачити, що повні графи — гамільтонові, а однозв'язні графи не є гамільтоновими. Будь-який граф, що містить точку зчленування, є однозв'язний, тобто графи з точками зчленування, перешийками — не гамільтонові.

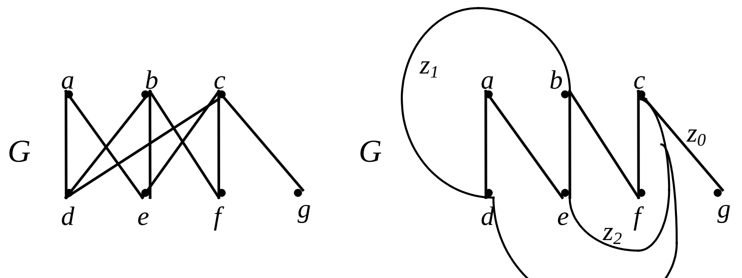
*Тета-графом* називають граф, що містить дві вершини степеня 3, з'єднані трьома простими ланцюгами, що попарно не перетинаються, довжиною не менше двох:




*Якщо двозв'язний граф містить тета-граф, то він не гамільтонів.*

Граф називають *планарним*, якщо його можна нарисувати на площині так, що його ребра перетинаються тільки у вершинах графа. Граф називають *пласким*, якщо його вже укладено на площині так, що жодні два його ребра не перетинаються в точках, відмінних від вершин графа.

На рисунку а) показано планарний граф, зображений так, що його ребра перетинаються, а на рисунку б) — той же граф без перетинів ребер, тобто плаский граф.



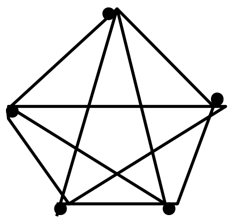

*а)* *б)*

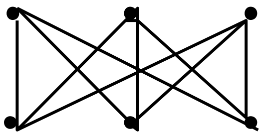
Розгляньмо теорему, яка встановлює так звану *нерівність Ейлера — умову,* за якої граф є пласким.

**Теорема.** У простому планарному графі з $n$ вершинами, $m$ ребрами та $r$ гранями[ДТ2] $\boldsymbol{m \leq 3n - 6}$.

Відомі два непласкі графи, які мають найменше число вершин і не є планарними.

Граф $K_5$ — це простий повний граф, що є зіркою, вписаною в п'ятикутник. Він має 5 вершин і 10 ребер, тобто $3n - 6 = 9$, тому нерівність Ейлера $10 \leq 3n - 6$ не виконано. За теоремою граф $K_5$ не є планарний.



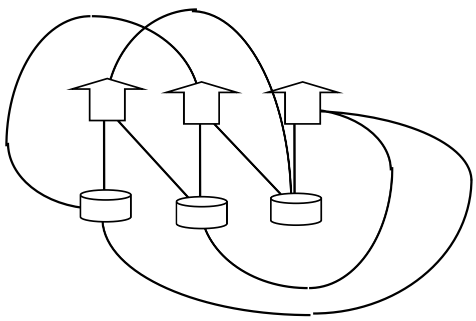


$K_5$ $K_{3,3}$

*Неплаські графи*

Очевидно, що будь-який граф, що містить як підграф граф $K_5$, обов'язково буде неплаский.

Інший граф, який не містить графа $K_5$ і є непланарний, — це повний *дводольний* граф $K_{3,3}$. У *дводольних графах* множину вершин розбито на дві неперетинні підмножини, які називають *долями.* Такі графи виникають у задачах про з'єднання $n$ будинків і $m$ пунктів обслуговування за допомогою комунікацій. Наприклад, дослідження планарності графа $K_{3,3}$ потрібне в задачі «про три будинки і три криниці», у якій жителі будинків хотіли б ходити по воду до криниць так, щоб ніколи не зустрічати жодного зі своїх сусідів. Очевидно, для того, щоб їхнє бажання було виконано, потрібно, щоб їхні шляхи ніколи не перетиналися. Для цього граф, що сполучає «будинки» й «криниці», повинен бути пласкии. Проте граф $K_{3,3}$ — непланарний, отже бажання жителів нездійсненне.



$K_{3,3}$

Здається, що для графа $K_{3,3}$ $m = 9$, $n = 6$, тобто нерівність Ейлера виконується. Проте, він не є планарний.

Це приклад того, що умова $m \leq 3n - 6$ не є достатньою умовою планарності.

***Розфарбування графа***

Розбиття площині на неперетинні області називають *картою*. Області на карті називають *сусідніми*, якщо вони мають спільну межу. Задача полягає в розфарбуванні карти так, щоб жодні дві сусідні області не було зафарбовано в один колір.

*Розфарбуванням графа* називають таке приписування кольорів (натуральних чисел) його вершинам, що жодні дві суміжні вершини не дістають однакового кольору. Найменше можливе число кольорів у розфарбуванні графа

G називають *хроматичним числом* і позначають через $\chi(G)$. Множину вершин, що розфарбована в один колір, називають *однокольоровим класом*, і вона є незалежною (тобто будь-які дві вершини з одного класу не є суміжними).

Спосіб явного вираження хроматичного числа через інваріанти графа невідомий, відомі тільки деякі оцінки, наприклад, $\chi(G) \leq \max deg\ u + 1$.

Хоча ефективного методу визначення $\chi$ не знайдено, існують цілком ефективні алгоритми розфарбовування графів.

На основі хроматичного числа можна сформулювати ще одну властивість **планарності:** $\boldsymbol{\chi(G) \leq 4}$.

***Приклад 1***. Побудуймо матрицю відстаней для графа, зображеного на рисунку вище.

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ | $\boldsymbol{r(v_i)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 4 | 3 | 4 | **4** |
| $v_2$ | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | **3** |
| $v_3$ | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | **3** |
| $v_4$ | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 3 | 2 | 3 | **3** |
| $v_5$ | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | **2** |
| $v_6$ | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 0 | 1 | 1 | **4** |
| $v_7$ | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | **3** |
| $v_8$ | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | **4** |

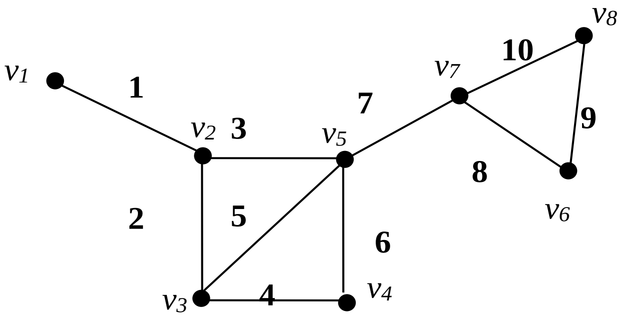
Знаходимо максимальні віддалення та визначаємо діаметр $d=4$ та радіус графа $r=2$; відповідно центр — $v_5$, а периферії — $v_1$, $v_6$, $v_8$.

Побудуймо для графа матриці суміжності та інцедентності та визначмо степені вершин.

| ***A*** | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ | ***deg*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** |
| $v_2$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | **3** |
| $v_3$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | **3** |
| $v_4$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | **2** |
| $v_5$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | **4** |
| $v_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | **2** |
| $v_7$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | **3** |
| $v_8$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | **2** |

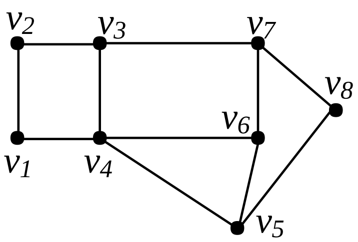
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***deg*** | **1** | **3** | **3** | **2** | **4** | **2** | **3** | **2** | ***20*** |

Для побудови матриці інцедентності треба пойменувати ребра.




| ***A*** | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* | ***deg*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** |
| $v_2$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **3** |
| $v_3$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **3** |
| $v_4$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | **2** |
| $v_5$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | **4** |
| $v_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | **2** |
| $v_7$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | **3** |
| $v_8$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | **2** |

***Приклад 2.*** Для графа *G* побудувати матрицю суміжності, визначити степені вершин. Знайти діаметр графа, радіус графа, центри графа, Ейлерів обхід та гамільтонів цикл.




Суміжність — це відношення, яке для неорієнтованого графа є симетричним (тобто матриця повинна бути симетричною відносно головної діагоналі), антирефлексивним (на головній діагоналі розташовано нулі), яке означає наявність ребра між двома вершинами. На перетині рядку *x* і стовпчика *y* ставлять 1, якщо є ребро між вершинами *x* та *y* (воно ж є ребром між *y* та *x*). Якщо ребра не має, то ставлять 0.

Степінь вершини графа (позначається deg, наприклад, deg($v_7$)=3) — кількість ребер, інцидентних (суміжних) цій вершині. Його можна підрахувати окремо за рисунком:

| вершина | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| степінь | 2 | 2 | 3 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 |

Для перевірки – **сума степенів (у нашому випадку це 22) повинна дорівнювати подвійній сумі ребер графа (2*11=22). Із цього слідує, що кількість непарних значень степенів повинна бути парною** (у прикладі чотири вершини мають непарне значення степенів).

Із визначення поняття степеня вершини зрозуміло, що **степінь вершини дорівнює кількості одиниць (виконуваності відношення суміжності) у відповідному рядку або стовпчику матриці суміжності.** Значення, розраховані різними способами, мають збігатися.

Матриця суміжності і степенів вершин графа G (deg):

| вершини | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ | deg($v_i$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | **2** |
| $v_2$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **2** |
| $v_3$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | **3** |
| $v_4$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | **4** |
| $v_5$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | **3** |
| $v_6$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **3** |
| $v_7$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | **3** |
| $v_8$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | **2** |
| deg | **2** | **2** | **3** | **4** | **3** | **3** | **3** | **2** | *22* |

Для визначення діаметра та радіуса графа зручно побудувати матрицю відстаней та знайти за нею максимальні віддалення вершин. **Діаметр графа — це максимальна відстань у графі, радіус — мінімальне з максимальних віддалень (максимальне віддалення вершини *r*($v_i$) — максимальне з**

**можливих відстаней від заданої вершини до інших — *max* $d(v_i, v_j)$, для всіх $v_j \in G$).**

**Відстанню називають мінімальну довжину шляху між двома вершинами**. На діагоналі в матриці відстаней розташовано нулі, для неорієнтованого графа матриця відстаней симетрична відносно головної діагоналі.

**Діаметр, радіус і центри в неорієнтованому графі існують завжди. Якщо всі відстані в графі однакові, то діаметр дорівнює радіусу.**

Для розв’язання цієї задачі потрібно побудувати матрицю відстаней, знайти максимум у кожному рядку — це й буде максимальне віддалення вершини. Максимальне значення з них — це діаметр, мінімальне — радіус.

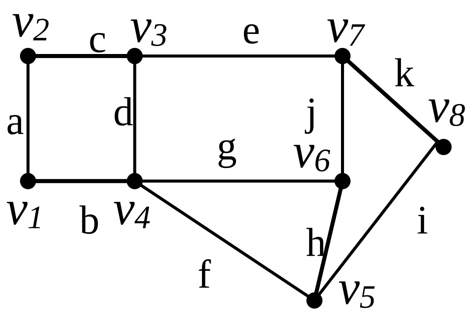
Матриця відстаней, на підставі якої визначають діаметр ($d$) та радіус ($r$):

| вершини | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ | $r(v_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | **3** |
| $v_2$ | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | **3** |
| $v_3$ | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | **2** |
| $v_4$ | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | **2** |
| $v_5$ | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | **3** |
| $v_6$ | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | **3** |
| $v_7$ | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | **3** |
| $v_8$ | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | **3** |

Отже діаметр графу $d(G) = max\ d(v_i, v_j) = 3$, а радіус $r(G) = min\ d(v_i, v_j) = 2$ для всіх $v_i, v_j \in G$. Центрами графа $G$ є вершини: $v_3$ та $v_4$. Периферіями є вершини, максимальне віддалення яких збігається зі значенням діаметра — у цьому графі всі, окрім центрів, є периферіями. У загальному випадку можуть бути й нейтральні вершини, а можуть бути всі центри й одночасно периферії (якщо $d(G)= r(G)$).

Побудуймо матрицю інцидентностей. Інцидентність — це відношення між вершинами й ребрами: ребро інцидентне кожній із вершин, які воно з'єднує. Воно задається матрицею інцидентності *C*, у якій рядки позначають іменами вершин, а стовпці — іменами ребер графа.

Для цього пойменуймо ребра. За загальноприйнятими правилами, ребра йменують так*: від першої вершини першим є ребро, що з'єднує першу вершину з вершиною з меншим номером, потім друге ребро — з більшим, і т.д. Потім нумерацію продовжуємо від другої вершини — від меншого номеру до більшого, і т.д.*




| C | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* | *g* | *h* | *i* | *j* | *k* | ***deg($v_i$)*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ***2*** |
| $v_2$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ***2*** |
| $v_3$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ***3*** |
| $v_4$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | ***4*** |
| $v_5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | ***3*** |
| $v_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | ***3*** |
| $v_7$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | ***3*** |
| $v_8$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | ***2*** |

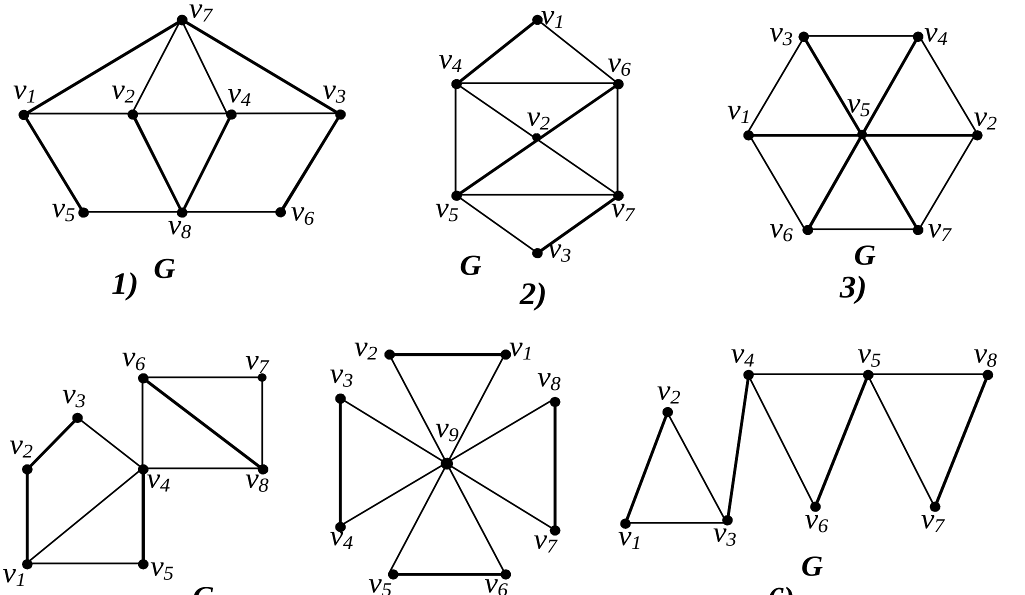
Матриця є бінарна, містить 0 (не інцидентне) та 1 (інцидентне); у кожному стовпчику точно дві одиниці — кожне ребро з'єднує дві вершини. Кількість одиниць у рядку — кількість ребер, що інцидентні відповідній вершині, це і є степінь вершини ***deg(v<sub></sub>)***; збігається з даними, дістаними за матрицею суміжності; сума степеней 22 дорівнює подвійній кількісті ребер (11). Матриці суміжності та інцидентності дають однакове розуміння будови графа, підходять для задавання графа при машинному обчисленні.

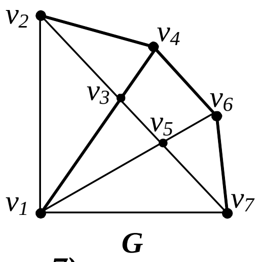
Перевірмо існування Ейлерових обходів у графі $G$. У цьому графі існує 4 вершини з непарним степенем: $v_3$, $v_5$, $v_6$, $v_7$. Отже, за теоремою Ейлера, у цьому графі немає Ейлерового обходу.

Існування гамільтонових циклів можна перевірити методом перебору. Гамільтонів обхід, наприклад, — $v_1, v_2, v_3, v_7, v_8, v_5, v_6, v_4$ .

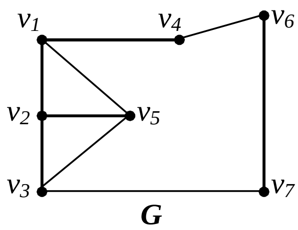
**Завдання 7.1.1.**

Дослідити неорієновані графи: побудувати матриці суміжності та інцидентності, визначити степені вершин. Знайти діаметр графа, радіус графа, центри й периферії графа (через матрицю відстаней і максимальні віддалення). Знайти Ейлерів обхід та гамільтонів цикл, якщо існують, або пояснити неможливість визначення.

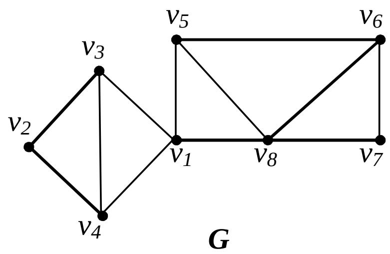





7)




8)




9)

## 7.2. Дослідження орграфів. Процедура Кеніга

***Теоретичні відомості***

*Орієнтованим графом* (*орграфом*) називають граф $D = (V, E)$, де $V$ — множина *вершин*, $E \subseteq V \times V$ — множина *орієнтованих ребер*, або *дуг*.

В орієнтованому графі упорядкована пара $(v_i, v_j) \in V \times V$ вказує напрямок дуги: від вершини $v_i$ до вершини $v_j$. Вона має початок (вершину $v_i$, із якої дуга виходить) і кінець (вершину $v_j$, у яку вона заходить).

Для орграфа його бінарна матриця суміжності $A$ в загальному випадку несиметрична: елемент $a_{ij} = 1$, якщо й тільки якщо існує дуга $e = (v_i, v_j)$. Число одиниць у цій матриці дорівнює числу дуг графа.

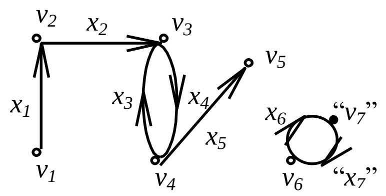
Поняття інцидентності для орграфів зберігається (у порівнянні з неорієнтованими графами), проте в матриці інцидентності $C$ розрізняють початок і кінець дуги.

Матрицею інцидентності орграфа $D$ називаються $(n \times m)$ матрицю $C(D) = (c_{ij})$, у якій

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } v_i \text{ є кінцем дуги } e_j, \\ -1, \text{ якщо вершина } v_i \text{ є початком дуги } e_j, \\ 0, \text{ якщо вершина } v_i \text{ не інцидентна дузі } e_j. \end{cases}$$

***Приклад***.

У кожному стовпці матриці інцидентності міститься точно дві одиниці: 1 і –1. Вершина $v_6$ з прикладу на рисунку має петлю. Щоб відобразити її в матриці інцидентності, вводять додаткову фіктивну вершину $v_7$, і петля ділиться на дві дуги: $x_6$ і $x_7$ .




*D*

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\
C(D)=\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} & \begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

*Орграф і його матриця інцидентності*

Потреба враховувати орієнтацію дуг в орграфі призводить до розщеплення поняття «степінь вершини» на дві частини. *Напівстепенем заходу* $deg^{+}$ $(v_i)$ вершини $v_i$ називають число дуг, що входять в $v_i$ ; *напівстепенем виходу* $deg^{-}$ $(v_i)$ — число дуг, що виходять із неї. Напівстепінь виходу $v_i$ дорівнює числу одиниць в $i$-му рядку матриці суміжності, напівстепінь заходу $v_i$ — числу одиниць в $i$-му стовпці матриці суміжності. Напівстепені заходу й виходу легко визначають і за матрицею інцидентності: сума додатних одиниць в $i$-му рядку визначає напівстепені заходу вершини $v_i$, а від'ємних — виходу. Загальна сума дає степінь вершини: $deg\,(v_i) = deg^{+}(v_i) + deg^{-}(v_i)$.

*Шлях* $P_i$ в орієнтованому графі — це послідовність дуг $(v_{i\,0}, v_{i\,1})$, $(v_{i\,1}, v_{i\,2})$, ..., $(v_{in-1}, v_{in})$ така, що кінець будь-якої дуги збігається з початком наступної. Вершину $v_{i0}$ називається *початком* шляху, вершину $v_{in}$ — *кінцем* шляху. Інше позначення шляху — послідовність вершин $v_0, v_1, ..., v_{n-1}, v_n$, які з'єднують дуги в напрямку стрілок.

Поняття циклу, ланцюга, простого ланцюга, довжини шляху й циклу без змін переносяться з теорії неорієнтованих графів на орграфи.

Інші поняття, і, перш за все, зв'язність і досяжність, істотно змінюються для орграфів.

Вершина $v_j$ *досяжна* з вершини $v_i$, якщо існує шлях із початком в $v_i$ і кінцем в $v_j$ . За визначенням вважаємо, що будь-яка вершина досяжна з себе самої.

Якщо вершина $v_j$ досяжна з вершини $v_i$ , то існує простий шлях із $v_i$ в $v_j$ .

Для мереж комунікацій існує така прозора інтерпретація: якщо деяка особа має можливість відправити повідомлення іншій особі через ланцюжок посередників, то зможе це зробити так, що жоден посередник не передасть це повідомлення двічі.

*Напівшлях* в орієнтованому графі — це послідовність ребер така, що будь-які два сусідні ребра різні і мають спільну інцидентну їм вершину. Інакше кажучи, напівшлях — це шлях, який проходить без урахування орієнтації ребер. Кажуть, що вершини $u$ і $v$ в орграфі *з'єднувані*, якщо $v$ можна досягти з $u$, не обов'язково дотримуючись напрямку в дугах, тобто якщо між ними існує напівшлях.

Відношення досяжності між вершинами в орграфі несиметричне: якщо $v_j$ досяжна з $v_i$ , то $v_i$ не є обов'язково досяжна з $v_j$ . Однак напівшлях з $v_j$ в $v_i$ у цьому випадку існує завжди. Можливий випадок, коли між вершинами немає шляху ні в одну, ні в іншу сторону, але існує напівшлях.

У зв'язку з несиметричністю відношення досяжності, відстань між двома вершинами орграфа $d\ (u,\ v)$ не задовольняє всіх аксіом метрики. Зокрема, воно не обов'язково симетричне: у загальному випадку $d\ (u, v) \neq d\ (v,\ u)$. За відсутності шляху між двома вершинами відстань вважають або невизначеною, або нескінченною. Нерівність трикутника має місце в тому випадку, коли вершина $v$ досяжна з $u$, і $w$ досяжна з $v$.

***Види зв'язності орграфів***

В орграфа існують різні види зв'язності, які описує таке визначення.

1. Орграф $D = (V,\ E)$ називають *сильно зв'язаним*, або *сильним*, якщо будь-які дві його вершини досяжні одна з одної (тобто якщо між ними існують шляхи в обидві сторони).

Якщо мережа комунікацій сильно зв'язана, то кожна особа може передати повідомлення будь-якій іншій особі.

2. Орграф називають *односторонньо зв'язаним*, або *одностороннім*, якщо для будь-якої пари вершин хоча б одна досяжна з іншої, тобто якщо існує шлях між ними хоча б в одну сторону.

Мережа комунікацій є односторонньо зв'язаною, якщо для кожної пари її членів принаймні один може послати повідомлення іншому.

3. Орграф називають *слабко зв'язаним*, або *слабким,* якщо кожна пара вершин з’єднувана, тобто якщо між будь-якою парою вершин існує напівшлях.

4. Орграф називають *незв’язаним*, якщо між деякою парою вершин немає напівшляху (тобто якщо він не є слабко зв’язаним).

Ці чотири властивості упорядковано за включенням: граф, що має одну з цих властивостей, має всі властивості, які в цьому визначенні «нижчі» від нього. Так, сильно зв’язаний граф має властивості 2–4 тощо.

***Критерії зв’язності***

Перевірка сильної, слабкої або односторонньої зв’язності шляхом безпосереднього використання визначень може виявитися дуже трудомісткою, оскільки в орграфі з $n$ вершинами існує $n(n–1)/2$ пар вершин. Наведімо критерії належності до кожного з трьох класів орграфів: сильних, односторонніх і слабких.

У сильно зв’язаного графа будь-яка вершина $v_i$ входить принаймні в один цикл, утворений шляхами з $v_i$ в деяку іншу вершину $v_j$, і назад із $v_j$ в $v_i$. Цикли, що проходять через $v_i$ та інші вершини графа, необов’язково всі різні. Зокрема, сильно зв’язаний граф, що містить $n$ вершин, може являти собою один простий цикл, що проходить через усі вершини.

*Орграф сильно зв’язаний тоді й тільки тоді, коли в ньому існує повний цикл, тобто цикл, що проходить через усі вершини.*

*Орграф D односторонньо зв’язаний тоді й тільки тоді, коли в ньому існує повний шлях.*

*Орграф D слабко зв’язаний тоді й тільки тоді, коли в ньому існує повний напівшлях.*

Для ілюстрації цієї теореми зауважимо, що орграф $D_3$ є слабко зв’язаний, оскільки послідовність вершин $u$, $v$, $w$, $x$ утворює повний напівшлях. Окрім того, він не є одностороннім, адже в ньому не існує повного шляху. Граф $D_9$ є слабко зв’язаним й одностороннім.

***Дослідження орграфів за допомогою матриць***

Значну частину інформації щодо орграфа $D$ можна подати в зручній формі, використовуючи матриці. Визначмо такі операції над матрицями. Нехай $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ — дві матриці $n \times n$ . Тоді

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ — поелементне додавання матриць $A$ і $B$,

$A \times B = (a_{ij} \times b_{ij})$ — поелементний добуток $A$ і $B$,

$AB = (c_{ij})$, де $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, — добуток $A$ і $B$.

Транспонованою матрицею $A'$ до матриці $A$ є матриця ( $a'_{ij}$ ), у якій $a'_{ij} = a_{ji}$.

Визначмо булеве перетворення $B : N \rightarrow \{0,1\}$ так:

$$B(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Тоді перетворення $B(A)$ для матриці $A = (a_{ij})$ означає, що елемент $(i, j)$ в $B(A)$ дорівнює $B(a_{ij})$. наприклад:

$$B\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

У результаті отримуємо бінарну матрицю.

Позначатимемо через ***I*** діагональну одиничну матрицю (матрицю, у якій на головній діагоналі стоять одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю), і через ***J*** — одиничну матрицю, у якій *усі* елементи дорівнюють одиниці.

Матрицю суміжності $A$ ($D$) орграфа $D$ можна використовувати для підрахунку кількості різних шляхів у $D$. Сама матриця $A$ задає ребра $D$, тобто шляхи довжини 1. Виявляється, що матриця $A^l$ ($l$-ий степінь $A$) задає число шляхів довжини $l$. ***Елемент (i, j) =*** $c_{ij}^{(l)}$ ***матриці*** $\boldsymbol{A^l}$ ***орграфа D дорівнює числу шляхів довжини l з*** $v_i$ ***в*** $v_j$ ***.***

***Матриця відстаней***

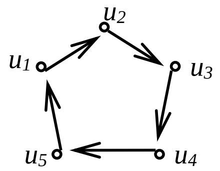
Нова матриця, яка є корисною для розгляду орграфів, — *матриця відстаней* $(d_{ij})$, де $d_{ij}$ — відстань від $u_i$ до $u_j$, яку визначають як довжину найкоротшого шляху з $u_i$ в $u_j$ (величину $d_{ij}$ не визначено, якщо шляху з $u_i$ в $u_j$ немає).

Нехай орграф $D$ має матрицю суміжності $A$ і матрицю відстаней $(d_{ij})$. Тоді, якщо величину $d_{ij}$, $i \neq j$ визначену, то вона дорівнює найменшому $k$, для якого елемент $(i, j)$ в $A^k$ не дорівнює 0.

*Матрицю досяжності* $R(D)=(r_{ij})$ визначають так:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & u_j \text{ досяжна з } u_i, \\ 0, & u_j \text{ не досяжна з } u_i. \end{cases}$$

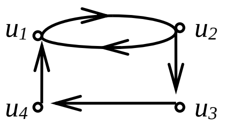
Будь-яка вершина досяжна сама з себе, тому $r_{ii} = 1$ для всіх $i$ . На рисунку подано матриці суміжності, відстаней і досяжності для деяких орграфів.



$D_3$

$$A(D_3) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$R(D_3) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (d_{ij}) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



$D_4$

$$A(D_4) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(d_{ij}) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad R(D_4) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

*Матриці відстаней і досяжності для орграфів*

За наступною теоремою можна із застосуванням матриці досяжності визначити зв'язність орграфа.

***Теорема.*** Нехай орграф $D$ має матрицю досяжності $R$ і матрицю суміжності $A$. Тоді

1) $D$ сильно зв'язний тоді й тільки тоді, коли $R = \boldsymbol{J}$ ;

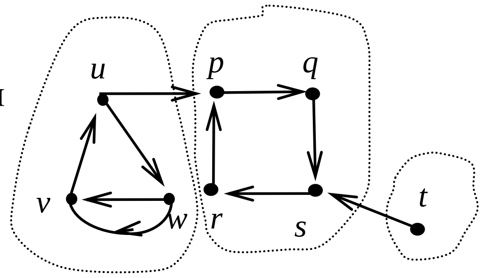
2) $D$ односторонньо зв'язний тоді й тільки тоді, коли $B\,(\,R + R'\,) = \boldsymbol{J}$ ;

3) $D$ слабо зв'язний тоді й тільки тоді, коли $B\,[(\,\boldsymbol{I} + A + A'\,)^{n-1}\,] = \boldsymbol{J}$ , де $\boldsymbol{J}$ — одинична матриця.

***Сильні компоненти і вершинна база***

Сукупність вершин $B$ орграфа $D$ називають його *вершинною базою* (або базою вершин), якщо кожна вершина, яка не входить у $B$, досяжна з деякої вершини в $B$, і множина $B$ є мінімальна. Тут *мінімальність B* означає, що з жодної власної підмножини $B$ не можна досягти всіх вершин $D$, що залишилися.

Для *прикладу* розгляньмо орграф.




Знайдімо вершинну базу з найменшим числом елементів, виходячи з її визначення. Вершина $t$ не має вхідних дуг, тому ми повинні включити її в вершинну базу. Вершини $u$, $v$, $w$ недосяжні з $p$, $q$, $r$, $s$, але кожна з них досяжна одна для одної, тому одна з них повинна входити в будь-яку з вершинних баз. Отже, вершинну базу можна дістати додаванням до $t$ або $u$, або $v$, або $w$. Із множини $\{t, u, q\}$ також можна досягти всі інші вершини, але вона не є вершинною базою, оскільки підмножина $\{t, u\}$ вже має потрібну властивість. Насправді множини $\{t, u\}$, $\{t, v\}$ і $\{t, w\}$ утворюють усі вершинні бази. Як видно, усі вони мають однакове число вершин, і це не випадково. Отже пошук вершинної бази з найменшим числом елементів закінчується відразу, щойно знаходимо довільну вершинну базу.

Розгляньмо процедуру знаходження всіх вершинних баз цього орграфа. Більшість результатів із пошуку вершинних баз належить Кенігу[6]. Щоб описати процедуру Кеніга, уведімо деякі попередні визначення й тези.

1) Максимальний сильно зв’язаний підграф орграфа $D$ називають *сильно зв’язаною компонентою* $D$ (*сильною компонентою зв’язності, сильною компонентою*).

2) В орграфі $D = (V, E)$ кожна вершина $u$ входить в одну й тільки одну сильну компоненту.

3) Орграф $D^*$, який називають *конденсацією* графа $D$, будують так. Нехай $K_1, K_2, \ldots, K_p$ — сильні компоненти $D$. Тоді вибираємо множину вершин $V(D^*) = \{K_1, K_2, \ldots, K_p\}$, і проводимо дугу від $K_i$ до $K_j$ тоді й тільки тоді, коли $i \neq j$, і для деяких вершин $u \in K_i$ і $v \in K_j$ в $D$ є хоча б одна дуга з $u$ в $v$.

4) Конденсація $D^*$ орграфа $D$ не має циклів.

5) Оскільки новий орграф $D^*$, що є конденсацією вихідного орграфа $D$, не містить циклів, він буде мати легко визначувану єдину вершину базу $B^*$, і з неї

[6] ***Денеш Кеніг*** (1884–1944) — угорський математик, який написав першу книгу з теорії графів. Його авторству належать чимало цікавих теорем із теорії графів (дводольні графи містять цикли тільки парної довжини; граф двокольоровий тоді й тільки тоді, коли він не містить непарних простих циклів).

буде легко дістати всі вершинні бази орграфа *D*: в орграфі без циклів *D* існує єдина вершинна база, що складається з усіх вершин, які не мають вхідних дуг.

6) Нехай *B** — єдина вершинна база конденсації *D** орграфа *D*. Тоді вершинними базами в *D* слугують такі множини *B*, які містять по одній вершині з кожної сильної компоненти *D*, що належить *B**.

7) Будь-які дві вершинні бази орграфа містять однакове число вершин.

Із цих тверджень випливає процедура (Кеніга) знаходження множини вершинних баз орграфа.

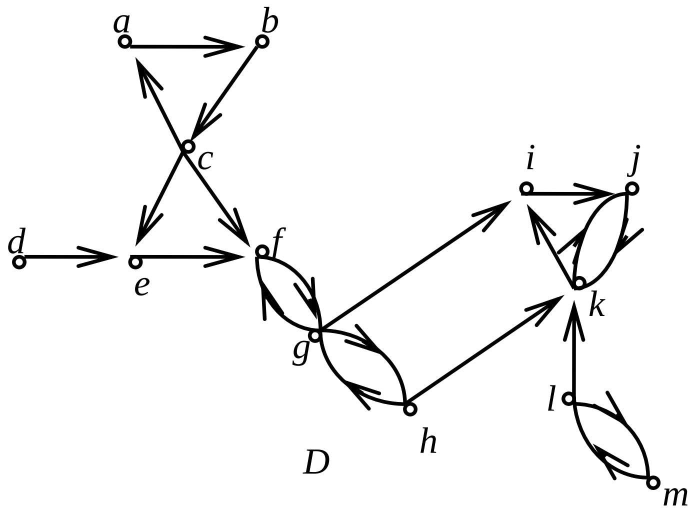
1. Знаходять усі сильні компоненти орграфа *D*.

2. Будують конденсацію *D** орграфа *D*.

3. Знаходять множину вершин орграфа конденсації *B**, що складається з вершин, у які не входить жодна дуга (вершинна база *B** конденсації графа *D**).

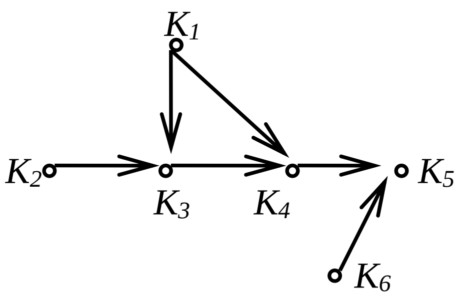
4. Із кожної сильної компоненти, що входить в *B**, вибирають по одній вершині. Ця множина й є вершинна база *B* орграфа *D*.

***Приклад 3.*** Розгляньмо цю процедуру для орграфа, зображеного на рисунку:




Сильні компоненти:

| | |
|---|---|
| $\{a,b,c\}$ | $K_1$ |
| $\{d\}$ | $K_2$ |
| $\{e\}$ | $K_3$ |
| $\{f,g,h\}$ | $K_4$ |
| $\{i,j,k\}$ | $K_5$ |
| $\{l,m\}$ | $K_6$ |




Вершинна база $B^*$ в $D^*$:
$\{K_1,K_2,K_6\}$

*Орграф, його конденсація і вершинна база*

Знайдімо всі сильні компоненти цього орграфа. Він містить шість сильних компонент (множини вершин, що входять до них, вказано на рисунку). Будуємо конденсацію $D^*$ графа $D$. Як вершини $D^*$ вибираємо всі сильні компоненти $K_1$ - $K_6$ і з’єднуємо їх дугами. У конденсації $D^*$ знайдеться, наприклад, дуга з $K_3$ в $K_4$, оскільки в орграфі $D$ є дуга $(e, f)$. Аналогічно в $D^*$ знайдеться дуга з $K_4$ в $K_5$, оскільки в $D$ є дуга з $g$ в $i$. Є й інша дуга $(h, k)$ з вершини в $K_4$ до вершини в $K_5$, проте в конденсацію графа включають тільки одну з них.

Тепер знайдімо вершинну базу в $D^*$. Компоненти $K_1$, $K_2$ і $K_6$ не мають вхідних дуг; вони утворюють множину $B^* = \{K_1, K_2, K_6\}$, із якої досяжна кожна інша вершина в $D^*$. Отже $B^* = \{K_1, K_2, K_6\}$ є вершинною базою для конденсації $D^*$. Далі, якщо взяти по одному елементу з кожної сильної компоненти $K_1$, $K_2$, $K_6$, то дістанемо вершинну базу для $D$. Наприклад, множина $B = \{a, d, l\}$ дає таку вершинну базу. Інша вершинна база задається множиною $\{a, d, m\}$. Із $B^*$ виходять й інші вершинні бази: $\{b, d, l\}$, $\{b, d, m\}$, $\{c, d, l\}$, $\{c, d, m\}$.

Ми бачимо, що в $D^*$ завжди є єдина вершинна база $B^*$, що складається, як у цьому прикладі, з усіх вершин, які не мають вхідних дуг. У свою чергу, кожну вершину базу в $D$ можна дістати з бази в $D^*$, вибираючи по одній вершині з кожної сильної компоненти в $D$, що входить у $B^*$. Отже дістані вершинні бази складають множину всіх вершинних баз.

***Використання матриці досяжності для знаходження сильних компонент орграфа***

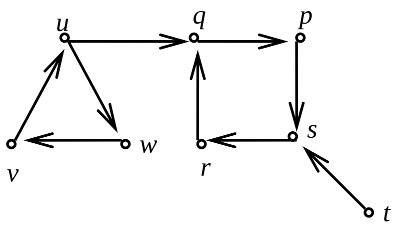
***Теорема.*** Нехай орграф $D$ має матрицю досяжності $R=(r_{ij})$ і $R^2 = (s_{ij})$. Тоді:

1) сильна компонента, що містить вершину $u_i$, визначається одиничними елементами в $i$-му рядку (або стовпці) поелементного добутку $R \times R'$, де $R'$ — матриця, транспонована до $R$;

2) число вершин у сильній компоненті, що містить $u_i$, так само є $s_{ii}$.

***Приклад 4.*** Для зображеного орграфа $D$ наведено матриці $R$, $R \times R'$ і $R^2$. Поелементний добуток $R \times R'$ є клітинно-діагональною матрицею. Кожна клітина відповідає одній сильній компоненті. Ми можемо знайти сильні компоненти, переглядаючи матрицю за рядками. Наприклад, рядок, що відповідає вершині $u$ в матриці $R \times R'$, визначає сильну компоненту $\{u, v, w\}$. Елемент $(u, u)$ в матриці $R^2$, а саме 3, дає число елементів у цій сильній компоненті. Аналогічно можна знайти інші сильні компоненти.

$$
R=R(D)=\begin{array}{c}
\\ u\\ v\\ w\\ p\\ q\\ r\\ s\\ t
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} u & v & w & p & q & r & s & t \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



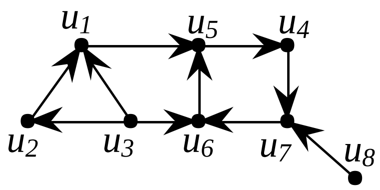

$$
R\times R'=\begin{array}{c}
\\ u\\ v\\ w\\ p\\ q\\ r\\ s\\ t
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} u & v & w & p & q & r & s & t \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Сильні
компоненти
$\{u, v, w\}$
$\{p, q, r, s\}$
$\{t\}$

$$
R^2=\begin{array}{c}
\\ u\\ v\\ w\\ p\\ q\\ r\\ s\\ t
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} u & v & w & p & q & r & s & t \end{array}\\
\begin{pmatrix}
3 & 3 & 3 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0\\
3 & 3 & 3 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0\\
3 & 3 & 3 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0\\
0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

*Сильні компоненти орграфа, що визначаються за матрицею досяжності*

***Приклад 5.*** Для заданого орграфа $D$ знайти: матрицю суміжності $A(D)$; усі шляхи довжини 2 і 3; матрицю досяжності $R(D)$; сильні компоненти орграфа $D$; конденсацію графа $D^*$, вершинну базу $B^*$; вершинну базу орграфа $D$; матрицю відстаней $(d_{ij})$; матрицю інцидентності $I(D)$.




1) Знайдімо матрицю суміжності та за її допомогою визначмо число шляхів довжини 2, 3, що ведуть з $u_i$ в $u_j$. Знайдімо напівстепені вершин.

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{cccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{array} \\
A(D) = \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{deg^-(u_i)} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{array} \\
\mathbf{deg^+(u_i)} & \begin{array}{cccccccc} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{array} \quad \mathbf{10}
\end{array}
$$

За матрицею суміжності можна визначити напівстепені виходу та заходу. Напівстепені заходу $deg^+(u_i)$ — кількості одиниць (суміжних вершин) у відповідних стовпчиках; напівстепені виходу $deg^-(u_i)$ — кількості одиниць (суміжних вершин — за направленням стрілки) у відповідних рядках; сума напівстепеней заходу та виходу вершини — це степінь вершини. Якщо скласти всі значення напівстепеней заходу, то дістанемо число, що дорівнює кількості дуг. Таке ж саме число ми дістанемо, склавши напівстепені виходу. Це число не є подвійною кількістю дуг, як у випадку з неорієнтованим графом, тому що вхідні та вихідні дуги ми рахуємо окремо.

$$A^2 = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}; \quad \mathrm{A}^3 = \begin{array}{c} \\ \mathrm{u}_1 \\ \mathrm{u}_2 \\ \mathrm{u}_3 \\ \mathrm{u}_4 \\ \mathrm{u}_5 \\ \mathrm{u}_6 \\ \mathrm{u}_7 \\ \mathrm{u}_8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & \mathrm{u}_3 & \mathrm{u}_4 & \mathrm{u}_5 & \mathrm{u}_6 & \mathrm{u}_7 & \mathrm{u}_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Знайдімо в $D$ усі шляхи довжини 2. Оскільки елемент (1, 4) матриці $A^2$ дорівнює 1, у $D$ існує шлях довжини 2 з $u_1$ в $u_4$. Це шлях $u_1$, $u_5$, $u_4$. Елемент (2, 5) матриці $A^2$ дорівнює 1, отже в $D$ існує шлях довжини 2 з $u_2$ в $u_5$ — $u_2$, $u_1$, $u_5$. Елемент (3, 5) матриці $A^2$ дорівнює 2, отже в $D$ існують 2 шляхи довжини 2 з $u_3$ в $u_5$. Це є $u_3$, $u_1$, $u_5$ і $u_3$, $u_6$, $u_5$. Аналогічно знаходять такі шляхи довжини 2: з $u_3$ в $u_1$ — $u_3$, $u_2$, $u_1$; з $u_4$ в $u_6$ — $u_4$, $u_7$, $u_6$; з $u_5$ в $u_7$ — $u_5$, $u_4$, $u_7$; з $u_6$ в $u_4$ — $u_6$, $u_5$, $u_4$; з $u_7$ в $u_5$ — $u_7$, $u_6$, $u_5$; з $u_8$ в $u_6$ — $u_8$, $u_7$, $u_6$.

Знайдемо в $D$ шляхи довжини 3. Елемент (1, 7) матриці $A^3$ дорівнює 1, отже в $D$ існує шлях довжини 3 з $u_1$ в $u_7$ — $u_1$, $u_5$, $u_4$, $u_7$. Елемент (2, 4) матриці $A^3$ дорівнює 1, отже в $D$ існує шлях довжини 3 з $u_2$ в $u_4$ — $u_2$, $u_1$, $u_5$, $u_4$. Елемент (3, 4) матриці $A^3$ дорівнює 2, отже в $D$ існують 2 шляхи довжини 3 з $u_3$ в $u_4$ — $u_3$, $u_4$, $u_5$, $u_4$ та $u_3$, $u_6$, $u_5$, $u_4$. Аналогічно знаходять інші шляхи довжини 3. А саме: з $u_3$ в $u_5$ — $u_3$, $u_2$, $u_1$, $u_5$; з $u_4$ в $u_5$ — $u_4$, $u_7$, $u_6$, $u_5$; з $u_5$ в $u_6$ — $u_5$, $u_4$, $u_7$, $u_6$; з $u_6$ в $u_7$ — $u_6$, $u_5$, $u_4$, $u_7$; з $u_7$ в $u_4$ — $u_7$, $u_6$, $u_5$, $u_4$; з $u_8$ в $u_5$ — $u_8$, $u_7$, $u_6$, $u_5$.

2) Матрицю досяжності $R(D)$ можна побудувати так. Нехай $A$ — матриця суміжності і $R$ — матриця досяжності орграфа $D$ з $n$ вершинами. Тоді:

$$R = B(\boldsymbol{I} + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}) = B[(\boldsymbol{I} + A)^{n-1}],$$

де $n$ — кількість вершин, $\boldsymbol{I}$ — одинична діагональна матриця, $B$ — булеве відображення. Булеве відображення для деякої матриці $X$ задають так: якщо $x_{ij} \neq 0$, то $B(x_{ij}) = 1$; якщо $x_{ij} = 0$, то $B(x_{ij}) = 0$.

$$I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 8 & 6 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$R(D) = B[I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1} = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

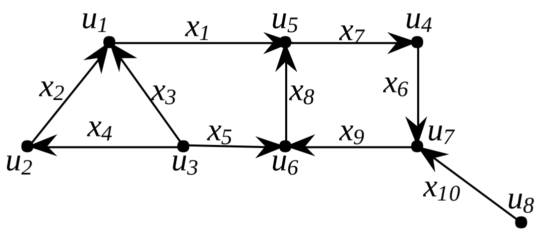
3) Побудуймо матрицю відстаней ($d_{ij}$) орграфа $D$ за матрицею суміжності $A$. Якщо величина $d_{ij}$ для $i \neq j$ визначена, то вона дорівнює найменшому значенню $k$, для якого елемент $(i, j)$ у матриці $B(A^k)$ дорівнює 1, де $B$ — булеве відображення. Матрицю відстаней формуємо послідовно за степенями матриці суміжності. Діагональні елементи в матриці відстаней дорівнюють нулю, оскільки кожна вершина досяжна сама для себе шляхом довжини 0.

Із матриці суміжності $A$ виписуємо всі шляхи довжини 1 — це елементи $d_{ij}$ = 1. Із матриці $A^2$ у клітинки матриці відстаней, що залишилися порожніми, записуємо всі шляхи довжини 2 — це елементи $d_{ij}$ = 2. Тепер у матрицю відстаней буде внесено всі відстані довжини 0 (на діагоналі), 1, 2, і деякі клітинки залишаться порожніми. Ці клітинки будуть послідовно заповнюватись числами 3, 4, …, 7 за матрицями $A^3$, $A^4$,…, $A^7$.

Клітинки матриці відстаней, що залишаться порожніми після цього процесу, заповнюємо символом ∞ — для цих вершин відстань не визначена.

$$
(d_{ij}) = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & \infty & \infty & 2 & 1 & 4 & 3 & \infty \\
1 & 0 & \infty & 3 & 2 & 5 & 4 & \infty \\
1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 4 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 0 & 3 & 2 & 1 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 3 & 2 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 2 & 1 & 0 & 3 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 3 & 2 & 1 & 0 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 4 & 3 & 2 & 1 & 0
\end{pmatrix} \end{array}
$$

4) Побудова матриці інцидентності. Позначмо дуги, як показано на рисунку. Елемент матриці інцидентностей $(i,\ j)$ дорівнює –1, якщо дуга $x_j$ виходить із вершини $u_i$, дорівнює 1, якщо дуга $x_j$ входить у вершину $u_i$, і дорівнює 0, якщо дуга $x_j$ не є інцидентна вершині $u_i$.

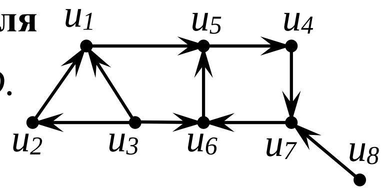



Матриця інциденцій

$$
I(D) = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix} \end{array}
\quad
\begin{array}{cc} \deg^{+} & \deg^{-} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}
$$

За матрицею інцидентності можна визначити напівстепені виходу та заходу. Напівстепені заходу $deg^{+}(u_i)$ — кількості одиниць рядку; напівстепені виходу $deg^{-}(u_i)$ — кількості від'ємних одиниць (*зауважую, кількості, а не додавання!*) у відповідних рядках. Кожен стовпчик матриці інцидентності орієнтованого графа містить точно дві одиниці — від'ємну та додатну, тому що дуга тільки з однієї вершини виходить, а в другу входить.

**Використаймо матрицю досяжності для виявлення сильних компонент** орграфа $D$. Обчислімо матрицю $R \times R'$. Ця матриця має блоково-діагональний вигляд. Кожний блок матриці визначає сильну компоненту. За нашою матрицею знаходимо, що вершина $u_1$ складає одну сильну компоненту. Аналогічно, вершини $u_2$ та $u_3$, яким відповідають одиниці на головній діагоналі матриці $R \times R'$, також є сильними компонентами. Вершини $u_4, u_5, u_6, u_7$ складають одну сильну компоненту, бо їм відповідає один блок у матриці $R \times R'$. Вершина $u_8$ — ще одна сильна компонента.

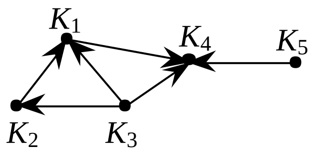



Елемент $(u_i, u_i)$ у матриці $R^2$ показує число елементів у тій сильній компоненті, у яку входить вершина $u_i$ (матриці дивіться нижче).

Уведімо позначення для сильних компонент і побудуймо **граф конденсації** $D^*$ орграфа $D$:

Сильні компоненти:

| | |
|---|---|
| $\{u_1\}$ | $K_1$ |
| $\{u_2\}$ | $K_2$ |
| $\{u_3\}$ | $K_3$ |
| $\{u_4, u_5, u_6, u_7\}$ | $K_4$ |
| $\{u_8\}$ | $K_5$ |



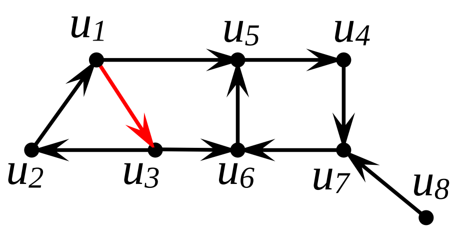

Граф конденсації $D^*$

Вершинна база у $D^*$: $B^* = \{K_3, K_5\}$

У вершинну базу орграфа $D$ має увійти по одній вершині з сильних компонент $K_3$, $K_5$. Оскільки кожна з компонент містить тільки одну вершину, то в орграфі $D$ існує єдина вершинна база $B = \{u_3, u_8\}$. Граф є слабкий ($u_3$ і $u_8$ — взаємно не досяжні).

$$
R\times R' = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
R^2 = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 \\
3 & 2 & 1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

***Приклад 6.*** Змінімо напрямок дуги $u_3$–$u_1$ на попередньому рисунку. У нас з'явиться ще один цикл — $u_1$–$u_2$–$u_3$.

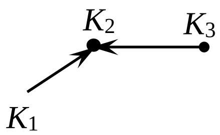



Сильні компоненти:

$\{u_1$, u$_2$, $u_3\}$ $K_1$

$\{u_4, u_5, u_6, u_7\}$ $K_2$

$\{u_8\}$ $K_3$



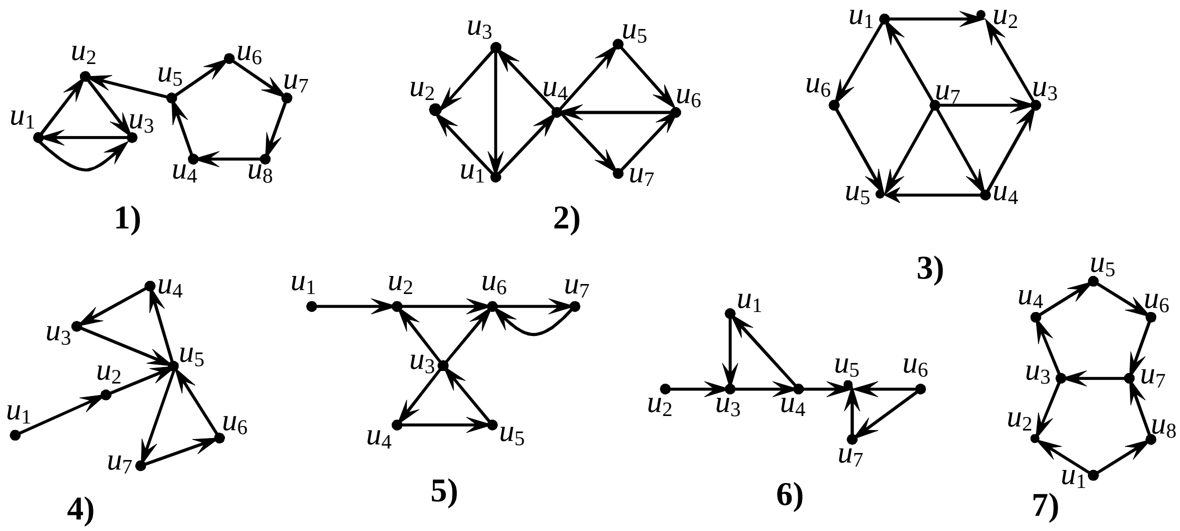

Граф конденсації $D^*$

Вершинна база у $D^*$: $B^* = \{K_1, K_3\}$

У вершинну базу орграфа $D$ має увійти по одній вершині з сильних компонент $K_1$, $K_3$: вершинна база $B = \{u_3, u_8\}$. Вона не є єдина, адже $K_1$ містить три компоненти: або ще так $\{u_2, u_8\}$, або ще так $\{u_1, u_8\}$. Граф — слабкий.

**Завдання 7.2.1.**

Дослідити орграфи: знайти матриці суміжності $A(D)$; усі шляхи довжини 2 і 3; матриці відстаней $(d_{ij})$; матриці інцидентності $I(D)$; матриці досяжності $R(D)$; сильні компоненти орграфа $D$; конденсацію графа $D^*$, вершинну базу $B^*$; вершинну базу орграфа $D$.



1) 2) 3) 4) 5) 6) 7)

## Відповіді до розділу 7

**7.1.1.** Ейлерові — 2 та 5; гамільтонові — 1, 2, 3, 7, 8;

| | | |
|---|---|---|
| ***1)*** $d = 3, r = 2$; | ***4)*** $d = 4, r = 2$; | ***7)*** $d = 2, r = 2$; |
| ***2)*** $d = 3, r = 2$; | ***5)*** $d = 2, r = 1$; | ***8)*** $d = 3, r = 3$; |
| ***3)*** $d = 2, r = 1$; | ***6)*** $d = 4, r = 2$; | ***9)*** $d = 4, r = 2$. |

**7.2.1.**

1) односторонній

Сильні компоненти:

$\{u_1, u_2, u_3\}$ $K_1$

$\{u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ $K_2$

$K_1 \longleftarrow K_2$

Вершинна база в $D^*$: $B^* = \{K_2\}$

2) односторонній

Сильні компоненти:

$\{u_1, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ $K_1$

$\{u_2\}$ $K_2$

$K_2 \longleftarrow K_1$

Граф конденсації $D^*$

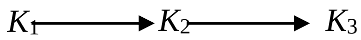
Вершинна база в $D^*$: $B^* = \{K_1\}$

3) слабкий — між вершинами $u_5$ і $u_2$ існує тільки напівшлях; сильні компоненти збігаються з вершинами; рисунок графа конденсації $D^*$ — із рисунком самого графа; вершинна база в $D^*$: $B^* = \{K_7\}$, відповідно, вершинна база в $D$: $B = \{u_7\}$.

4) односторонній

Сильні компоненти:

| | |
|---|---|
| $\{u_1\}$ | $K_1$ |
| $\{u_2\}$ | $K_2$ |
| $\{u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ | $K_3$ |



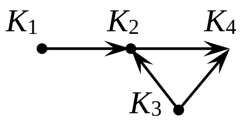

Граф конденсації $D^*$

Вершинна база в $D^*$: $B^* = \{K_1\}$

5) слабкий

Сильні компоненти:

| | |
|---|---|
| $\{u_1\}$ | $K_1$ |
| $\{u_2\}$ | $K_2$ |
| $\{u_3, u_4, u_5\}$ | $K_3$ |
| $\{u_6, u_7\}$ | $K_4$ |



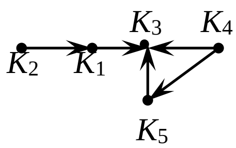

Граф конденсації $D^*$

Вершинна база в $D^*$: $B^* = \{K_1, K_3\}$

6) слабкий

Сильні компоненти:

| | |
|---|---|
| $\{u_1, u_3, u_4\}$ | $K_1$ |
| $\{u_2\}$ | $K_2$ |
| $\{u_5\}$ | $K_3$ |
| $\{u_6\}$ | $K_4$ |
| $\{u_7\}$ | $K_5$ |



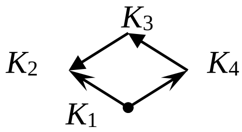

Граф конденсації $D^*$

Вершинна база в $D^*$: $B^* = \{K_2, K_4\}$

7) односторонній

Сильні компоненти:

| | |
|---|---|
| $\{u_1\}$ | $K_1$ |
| $\{u_2\}$ | $K_2$ |
| $\{u_3, u_4, u_5, u_6, u_8\}$ | $K_3$ |
| $\{u_7\}$ | $K_4$ |




Граф конденсації $D^*$

Вершинна база в $D^*$: $B^* = \{K_1\}$

# ДОДАТОК 1. ПОТУЖНІСТЬ МНОЖИН

Поняття потужності множин пов'язано з оцінкою числа елементів у ній. У скінченній множині кількість елементів можна перерахувати. Число елементів у множині $X$ позначають зазвичай як $|X|$. Наприклад, якщо $X = \{a, b, c\}$, то $|X| = 3$. Якщо дві множини мають однакову кількість елементів, то між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність. Тоді всі скінченні множини, що мають однакову кількість елементів, будуть еквівалентні за числом елементів у них і утворять один клас еквівалентності. Цей клас еквівалентності можна позначити цілим натуральним числом, що визначає кількість елементів у множинах. Усі одноелементні множини утворять один клас еквівалентності, двоелементні — другий, і так далі. Кожному натуральному числу відповідає клас еквівалентності, що об'єднує всі скінченні множини з числом елементів, рівним даному числу.

Відношення еквівалентності, яке визначає взаємно однозначна відповідність елементів двох множин, називають ***рівнопотужністю,*** а клас еквівалентності рівнопотужних множин називають ***потужністю*** цих множин.

Потужність множині $X$ позначають $card\ X$. Число елементів скінченної множини також називають потужністю, тоді $cardX = |X|$.

Порівняння нескінченних множин можливо завдяки властивостям функціональних відображень. Із визначення ін'єкції слідує, що ін'єкція з множини $E$ в множину $F$ можлива тільки в тому випадку, якщо кількість елементів в $E$ не більша від кількості елементів в $F$: $|E| \leq |F|$ (для скінченних множин). Причому, якщо не існує ін'єкції з $F$ в $E$, то ця нерівність перетворюється в строгу нерівність $|E| < |F|$. Якщо ж існує ін'єкція з $F$ в $E$, причому вона не обов'язково збігається зі зворотним відображенням для ін'єкції $E \to F$, то це можливо тільки тоді, коли кількість елементів у них збігається, тобто $|E| = |F|$, а в цьому випадку можна знайти і взаємно однозначну відповідність між $E$ і $F$, тобто це — бієкція.

Аналогічно, якщо існує сюр'єкція з $E$ на $F$ така, що один образ в $F$ має декілька прообразів в $E$, то кількість елементів в $E$ строго більша від кількості елементів в $F$, тобто $|E| > |F|$.

Ці властивості узагальнюються для випадку нескінченних множин такою теоремою.

**Теорема** (**Кантора–Бернштейна**[7]–Цермело)

Нехай $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{F}$ — дві довільні нескінченні множини. Тоді:

а) існує ін'єкція з $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$ чи існує ін'єкція з $\boldsymbol{F}$ в $\boldsymbol{E}$ (одне не виключає іншого);

б) якщо існують ін'єкції $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$, то існує бієкція з $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$.

Іншими словами, якщо множина $\boldsymbol{E}$ рівнопотужна деякій підмножині множини $\boldsymbol{F}$, а множина $\boldsymbol{F}$ рівнопотужна деякій підмножині множини $\boldsymbol{E}$, то $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{F}$ рівнопотужні.

Клас еквівалентності рівнопотужних множин називають *потужністю*, або **кардинальним числом**. **Класи** еквівалентності рівнопотужних скінченних множин є скінченними кардинальними числами. Ці числа за визначенням є натуральними числами, відповідними кількості елементів у скінченній множині. Потужність порожньої множини дорівнює нулю: card $(\varnothing) = 0$. Потужність нескінченної множини називають **трансфінітним кардинальним числом**, або просто **трансфінітним числом**. Отже множина *кардинальних чисел — це фактор-множина рівнопотужних множин, яка являє собою об'єднання множини натуральних і трансфінітних чисел.*

*Потужністю зліченної множини називають потужність множини натуральних чисел* **N**. **Зліченною** називають будь-яку множину $X$, що рівнопотужна множині **N**. Потужність зліченної множини позначають кардинальним трансфінітним числом $\aleph_0$ (читається: **алеф-нуль**)[8].

---

[7] Кантор сформулював цю теорему без доведення в 1883 році, пообіцявши повернутися до неї пізніше, однак, не виконав цієї обіцянки. Перші доведення теореми було дано Шредером (1896) і Бернштейном (1897).
[8] Можна зустріти інше позначення потужності зліченної множини: card **N** = ν.

Потужність зліченної множини $\aleph_0$ є найменшим трансфінітним кардинальним числом. Це означає, що будь-яка нескінченна множина $\boldsymbol{E}$ має принаймні одну зліченну частину (тобто зліченну підмножину).

Можна довести низку теорем про зліченні множини: множини цілих чисел **Z** (або її частини, від'ємні чи додатні), парні або непарні **Z**, **N**; додатні або від'ємні, або просто всі раціональні **Q** — це все приклади зліченних множин.

**Для будь-якого скінченного числа $m \geq 1$ виконується рівність:**

$$m \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \text{ і } \aleph_0^m = \aleph_0.$$

**Якщо $\alpha$ і $\beta$ — кардинальні числа такі, що $\alpha \neq 0$ і $\beta \neq 0$, і якщо принаймні одне з них трансфінітне, то сума $\alpha + \beta$ й добуток $\alpha \cdot \beta$ дорівнюють найбільшому з них, тобто $\alpha + \beta = max\{\alpha, \beta\}$, $\alpha \cdot \beta = max\{\alpha, \beta\}$.**

**Теорема (Кантора).** Якою б не була множина $\boldsymbol{E}$, множина її підмножин має потужність, строго більшу від потужності $\boldsymbol{E}$.

Ця теорема показує, що послідовність трансфінітних кардинальних чисел не обмежена.

*Яке б не було кардинальне число $\alpha$, $2^{\alpha} > \alpha$.*

Зокрема, $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Звідси випливає, що існують незліченні множини.

**Теорема (Кантора).** *Множина дійсних чисел з інтервалу (0, 1) незліченна.*

Потужність множини (0, 1) називають *потужністю континууму*. Потужність континууму позначають символом $\boldsymbol{C}$.

**Потужність континууму — це потужність множини дійсних чисел R,** тобто $card\ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{C}$, бо існує бієкція $(0, 1) \to \boldsymbol{R}$, наприклад, $x \to log\ x/(1 - x)$.

Можна довести, що множина алгебричних дійсних чисел зліченна. Дійсні числа, які не є алгебричними, називають **трансцендентними** (трансцендентними є числа $e$ і $\pi$). Оскільки множина алгебричних чисел зліченна, а множина дійсних чисел незліченна, то існують трансцендентні числа, і навіть «більшість» дійсних чисел трансцендентна.

**Теорема.** Мають місце рівності: $m \cdot C = \aleph_0 \cdot C = C \cdot C = C^m = C^{\aleph_0} = C$, де $m \geq 1$ — ціле.

**Узагальнена континуум-гіпотеза** полягає в припущенні про те, що для будь-якого кардинального числа $\alpha$ кардинальне число $2^{a}$ безпосередньо слідує за $\alpha$.

Звідси слідує, що послідовність кардинальних чисел не є обмеженою: $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \ldots$

Звідси випливає, що не існує найбільшого трансфінітного числа.

Спроби довести континуум-гіпотезу як теорему були безуспішні, а в 1963 М. П. Коен довів, що континуум-гіпотеза нерозв'язна — її неможливо ні довести, ні спростувати, можна лише прийняти її або протилежне їй твердження як аксіому.

## Контрольні запитання й тестові завдання:

1. Відношення рівнопотужності множин. Його властивості. Потужність множин. Кардинальні числа.
2. Потужність скінченної множини. Знайти потужність об'єднання трьох скінченних множин.
3. Визначення кардинального числа. Теорема Кантора-Бернштейна.
4. Зліченна множина. Основні теореми про зліченні множини. Найменше трансфінітне число.
5. Кардинальна арифметика. Сума, добуток, степінь кардинальних чисел.
6. Основні співвідношення кардинальної арифметики.
7. Теорема (Кантора) про потужність множини всіх підмножин нескінченної множини.
8. Потужність континууму.
9. Континуум-гіпотеза. Узагальнена континуум-гіпотеза.
10. Якщо між множинами можна встановити сюр'єкцію / ін'єкцію, яка буде відповідність потужностей цих множин?
11. Для яких множин власна підмножина рівнопотужна самій множині?

12. Визначити потужність множин:

*a) дійсних чисел* ***R,***

*b) раціональних чисел* ***Q,***

*c) парних натуральних чисел* ***N,***

*d) цілих чисел* ***Z,***

*e) комплексних чисел,*

*f) множини {a, b, c, d},*

*g) множини {{a, b}, {c, d}}.*

# ДОДАТОК 2

## Методичні вказівки до виконання

## КОМПЛЕКСНИХ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

з кредитного модуля: Дискретна математика. Частина 1.
Основи дискретної математики
для студентів спеціальності 113 «Прикладна математика»,
освітньо-професійної програми «Наука про дані та математичне моделювання»

Метою викладання кредитного модуля «Дискретна математика. Частина 1» є оволодіння основними поняттями і методами, потрібними для вивчення наступних дисциплін спеціальності, формування світогляду на дискретну математику як на фундаментальну науку, що призначена для формалізації знань, у тому числі математичних наук.

Закріплення здобутих знань із кредитного модуля «Дискретна математика. Частина 1» перевіряє комплексна контрольна робота (ККР). ККР містить 60 завдань, однакових за структурою, кожне з яких складається з трьох запитань, сформованих за різними темами. Усі завдання різняться. ККР перевіряє залишкові знання за дисципліною, але розв’язання задач потребує вміння застосовувати інтегровані знання всього програмного матеріалу дисципліни, що дає змогу студентам продемонструвати саме вміння використовувати набуті знання для розв’язання практично спрямованих завдань.

Під час ККР використання довідкової літератури, обладнання, приладів, матеріалів, комп’ютерних програм тощо не передбачено.

Максимальна кількість балів, яка нараховується за виконання окремого питання контрольного завдання (КЗ), є визначена і враховує ступінь його важливості та рівень складності: перше запитання КЗ оцінюється в 30 балів, друге — 40 балів, третє — 30 балів.

**Перше запитання** КЗ перевіряє знання аксіом і теорем алгебри множин. У задачі потрібно спростити вираз алгебри множин.

Наприклад,

$(A' \cup B' \cup C)' \cap (A' \cap B)' \cap (A' \cap C) =$

за законом де Моргана й асоціативним

$= (A \cap B \cap C') \cap (A \cup B') \cap A' \cap C =$ за законом поглинання доповнення

$= (A \cap B \cap C') \cap B' \cap A' \cap C =$ за законом поглинання доповнення

$= (A \cap C') \cap A' \cap B' \cap C =$

за закономи поглинання доповнення та комутативним

$= C' \cap A' \cap B' \cap C =$ за законом протиріччя $C \cap C' = \varnothing$

$= \varnothing \cap A' \cap B' =$ за законом обмеження $\varnothing \cap A = \varnothing$

$= \varnothing$.

У **другому запитанні** потрібно визначити властивості бінарного відношення.

Бінарне відношення — це підмножина декартового добутку двох множин. Якщо бінарне відношення задано на множині $X$, то це означає, що відношення є підмножиною декартового добутку множини $X$ самої на себе. Тільки тоді ми можемо говорити про деякі властивості відношення.

Бінарне відношення називають рефлексивним, якщо для кожного $x$ з області визначення виконується $x\rho x$, антирефлексивним, якщо для жодного $x$ не виконується.

Відношення симетричне, якщо для всіх елементів з виконання $x\rho y$ слідує виконання $y\rho x$, асиметричне, якщо не виконується $y\rho x$, і антисиметричне, якщо з виконання $x\rho y$ і $y\rho x$ слідує $x = y$.

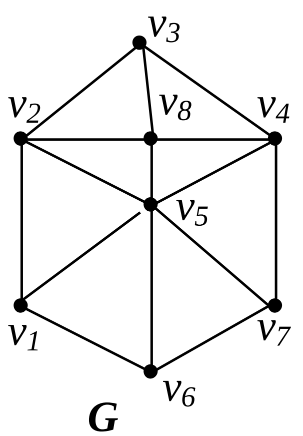
Відношення транзитивне, якщо з $x\rho y$ і $y\rho z$ слідує $x\rho z$.

Наприклад, розгляньмо бінарне відношення, яке задано на множині **N** і має такий вигляд: $x\rho y \Leftrightarrow$ НСД$(x, y) \neq 1$ (НСД — найбільший спільний дільник).

| № | Назва властивості | |
|---|---|---|
| 1 | рефлексивність | ні, тому що 1ρ1 не виконується |
| 2 | антирефлексивність | ні, тому що $x\rho x$ виконується для всіх, крім 1 |
| 3 | симетричність | так, тому що НСД($x$, $y$) = НСД($y$, $x$) |
| 4 | антисиметричність | ні, тому що виконується умова симетричності |
| 5 | асиметричність | ні, тому що виконується умова симетричності |
| 6 | транзитивність | ні, контрприклад: 3ρ6 та 6ρ2 виконуються, а 3ρ2 — не виконується, тобто НСД(3, 2) саме дорівнює 1. |

**Третє запитання** присвячено актуальній практичній проблемі дослідження неорієнтованих графів.

Розгляньмо приклад. Нехай задано граф $G$:




***G***

Побудувати матрицю суміжності, визначити степені вершин. Побудувати матрицю відстаней та визначити діаметр і радіус графа.

Перша частина запитання — побудова матриці суміжності та обчислення степенів вершин.

Суміжність — це відношення для неорієнтованого графа симетричне (тобто матриця повина бути симетричною відносно головної діагоналі), антирефлексивне (на головній диагоналі розташовано нулі), яке означає наявність ребра між двома вершинами. На перетині рядку $x$ і стовпчика $y$

ставлять 1, якщо існує ребро між вершинами $x$ та $y$ (воно ж є ребром між $y$ та $x$). Якщо ребра немає, то ставлять 0.

Степінь вершини графа (позначають як deg, наприклад, deg($V_7$) = 3) — кількість ребер, інцидентних (суміжних) відповідній вершині. Її можна підрахувати окремо за рисунком:

| вершина | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $V_4$ | $V_5$ | $V_6$ | $V_7$ | $V_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| степень | 3 | 4 | 3 | 4 | 6 | 3 | 3 | 4 |

Для перевірки — сума степенів (у нашому випадку це 30) дорівнює подвійній сумі ребер графа (2 ·1 5=30). Із цього слідує, що кількість непарних значень степенів повинна бути парною (у прикладі чотири вершини мають непарне значення степенів).

Із визначення поняття степеня вершини зрозуміло, що степінь вершини дорівнює кількості одиниць (виконуваності відношення суміжності) у відповідному рядку або стовпчику матриці суміжності. Значення, розраховані різними способами, мають збігатися.

Матриця суміжності й степені вершин графа $G$ (deg — відповідь можна надати в іншій формі):

| *Номери вершин* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | ***deg*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | **3** |
| *2* | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | **4** |
| *3* | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | **3** |
| *4* | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | **4** |
| *5* | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **6** |
| *6* | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | **3** |
| *7* | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | **3** |
| *8* | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | **4** |
| ***deg*** | ***3*** | ***4*** | ***3*** | ***4*** | ***6*** | ***3*** | ***3*** | ***4*** | |

Друга частина запитання — побудувати матрицю відстаней та визначити діаметр і радіус графа.

Відстанню називають мінімальну довжину шляху між двома вершинами. На діагоналі в матриці відстаней розташовано нулі, для неорієнтованого графа матриця відстаней симетрична відносно головної діагоналі.

Діаметр графа — це максимальна відстань у графі, радіус — мінімальне з максимальних віддалень (максимальне віддалення вершини — максимальна з можливих відстаней від заданої вершини до інших). Діаметр, радіус і центри в неорієнтованому графі існують завжди. Якщо всі відстані в графі однакові, то діаметр дорівнює радіусу. Для розв'язання цієї задачі треба побудувати матрицю відстаней, знайти max у кожному рядку — це й буде максимальне віддалення вершини. Максимальне значення з них — це діаметр, мінімальне з них — радіус.

Матриця відстаней, на підставі якої визначають діаметр ($d$) та радіус ($r$):

| *Номери вершин* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *Максимальне віддалення вершини-max у рядку* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| *2* | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| *3* | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 |
| *4* | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| *5* | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| *6* | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *7* | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 |
| *8* | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 |

Максимальне значення максимального віддалення дорівнює 3, тобто це діаметр, а мінімальне значення максимального віддалення — 2, це і є значення радіуса.

## КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

з кредитного модуля Дискретна математика. Частина 1.

Основи дискретної математики

Комплексна контрольна робота оцінюється за шкалою 100 балів. Кожне контрольне завдання ККР містить три запитання. Відповіді на **перше та третє запитання оцінюються в 30 балів, на друге — в 40 балів.**

Кожне питання оцінюється відповідно до системи оцінювання так.

**За першим запитанням** «Спростити вираз алгебри множин»:

25–30 — відповідь правильна, розв'язок лаконічний і правильний;

20–24 — відповідь правильна, розв'язок отримано неоптимальним шляхом;

15–19 — допущено помилки в розв'язку або в остаточній відповіді;

10–14 — розв'язок не доведено до кінця, але деякі кроки були правильними;

1–9 — розв'язку не має, зроблено деякі спрощення.

Для **другого запитання** «Визначити властивості бінарного відношення» для зручності формування відповіді надається таблиця, у якій перелічено основні шість властивостей бінарних відношень. Знімається по 5 балів за кожну неправильну відповідь. Додатково від 1 до 10 оцінюється повнота пояснень щодо визначення властивостей конкретного відношення:

8–10 — повне змістовне пояснення й опис властивостей;

5–7 — пояснення не зовсім обґрунтовано, але відповіді правильні:

2–4 — пояснення містять помилкові судження;

0–1 — відсутні пояснення.

У **третьому запитанні,** присвяченому дослідженню неорієнтованих графів, оцінюється:

1–10 балів — побудова матриці суміжності;

до 5 балів — за правильно підраховані степені вершин;

1–10 балів — за матрицю відстані;

1–5 балів — за визначення діаметра ійрадіуса неорієнтованого графа.

**Сума балів переводиться в оцінки згідно з таблицею.**

| Кількість балів за виконання ККР | Оцінка за університетською шкалою |
|---|---|
| 100……….95 | Відмінно |
| 94……..…85 | Дуже добре |
| 84……..…75 | Добре |
| 74……..…65 | Задовільно |
| 64………..60 | Достатньо |
| 59……..…0 | Незадовільно |

**Використання довідкової літератури, обладнання, приладів, матеріалів, комп’ютерних програм тощо, для користування під час виконання контрольної роботи** не передбачено.

## ДОДАТОК 3.
## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

### Контрольні запитання й тестові завдання до розділу 1: МНОЖИНИ

1.1. Канторівське визначення множини. Що стоїть за термінами визначеність і розрізнюваність?

1.2. Поняття належності елемента множині.

1.3. Способи задавання множин. Поняття предиката.

1.4. Поняття універсуму й порожньої множини.

1.5. Множина-степінь. Кількість елементів у множині-степені. Записати множину-степень $\wp(A)$ множини $A = \{a, b, c\}$.

1.6. Операції над множинами.

1.7. Розбиття множин. Записати всі можливі розбиття множини $A = \{a, b, c\}$.

1.8. Поняття включення множини в множину (строге й нестроге). Власна підмножина.

1.9. Діаграми Венна. Чому діаграми Венна не можна застосувати для доведення теорем?

1.10. Показати відмінність між поняттями належності множин і включення на прикладах (відмітити виконання відношення ТАК/НІ):

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $\in$ | $\{a, b, c\}$ |
| $\{a\}$ | $\in$ | $\{a, b, c\}$ |
| $a$ | $\subseteq$ | $\{a, b, \{a\}\}$ |
| $\{a\}$ | $\subseteq$ | $\{a, b, \{a\}\}$ |
| $a$ | $\in$ | $\{a, b, \{a\}\}$ |
| $\{a, b\}$ | $\subseteq$ | $\{a, b, c\}$ |
| $\{a, b\}$ | $\subset$ | $\{a, b, c\}$ |
| $\{a, b\}$ | $\in$ | $\wp(A)$ |
| $\{a\}$ | $\subseteq$ | $\wp(A)$ |

1.11. Доведіть у теорії належності:

a) $(A' \cup B) \cap (B' \cup C) \subset (A' \cup C)$;

b) $((A \setminus C) \cup (B \setminus A)) \subset (A \cup B)$.

1.12. Алгебра множин. Аксіоми й теореми теорії множин.

1.13. Навести деякі закони алгебри множин: поглинання, склеювання, ідемпотентності, інволюції, де Моргана. Навести всі схеми закону поглинання доповнення. Поняття двоїстості.

1.14. Яке місце аксіом алгебри множин в теорії належності?

1.15. Записати алгебричні відповідності в операціях алгебри множин: $A + B$, $A \setminus B$.

1.16. Який пріоритет операцій встановлено в алгебрі множин?

1.17. Розширити закон де Моргана на три множини.

1.18. Показати алгебрично виконання закону асоціативності для операції симетричної різниці: $A + (B + C) = (A + B) + C$.

1.19. Дописати рівність та дати назву закону або операції:

a) $(A \cap B)' =$

b) $A \setminus B =$

c) $A \cup (B \cap C) =$

d) $A \cup (B' \cup A) =$

1.20. Довести тотожності алгебрично:

a) $(A \cup B) + (C \cup D) = B + C$, якщо $A \cap B = D$, $C \cap D = A$;

b) $(A \setminus (B \setminus C)) \setminus ((A \setminus B) \setminus C) = A \cap C$;

c) $(A \setminus B) + (B \setminus A) = A + B$;

d) $P \setminus Q = A \cap C$, якщо $P = A \setminus (B \setminus C)$, $Q = (A \setminus B) \setminus C$;

e) $(A \cup B) + (C \cup D) = A + B + C + D$, якщо $A \cap B = C \cap D$;

f) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

g) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) + (A \setminus B)$;

h) $(A \setminus (B \setminus C)) \setminus ((A \setminus B) \setminus C) = A \cap C$,

i) $(A' \cup B) + (B' \cup A) = (A \cap B) + (A \cup B)$;

j) $(A + (A \setminus B)) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B) = \varnothing$.

## Контрольні запитання й тестові завдання до розділу 2:
## ТЕОРІЯ ВІДНОШЕНЬ

2.1. Декартовий добуток множин. Властивості декартового добутку. Записати декартовий добуток множин $\{a, b\}\times\{b, c\}$. Що відрізняє операцію декартового добутку від інших операцій над множинами?

2.2. Поняття бінарного відношення. Область визначення й область значень відношень. *N*-арні відношення.

2.3. Способи задавання відношення: предикати, матриці, графи, графіки.

2.4. Операції над відношеннями. Перетин, об'єднання, добуток, доповнення відношення. Обернені відношення. Транзитивне замикання відношень.

2.5. Властивості відношень на множині *X*: рефлексивність, антирефлексивність, симетричність, асиметричність, антисиметричність, транзитивність.

2.6. Які властивості мають відношення включення множин (строге, нестроге), відношення рівнопотужності, відношення покриваності, відношення суміжності й досяжності для орієнтованих і неорієнтованих графів?

2.7. Відношення еквівалентності, рівності. Класи віднімань за модулем *n*.

2.8. Розбиття множин. Класи еквівалентності. Фактор-множина.

2.9. Який вигляд має граф відношення еквівалентності?

2.10. Перерахувати властивості відношень: еквівалентності, толерантності, порядку, покриваності, квазипорядку.

2.11. Навести приклад і не симетричного, і не асиметричного, і не антисиметричного відношення (переліком пар).

2.12. Чи може відношення бути одночасно симетричним і антисиметричним?

2.13. Чи буде відношення транзитивним, якщо воно симетричне й антирефлексивне?

2.14. Чи буде відношення транзитивним, якщо воно симетричне й антисиметричне одночасно? Що це за відношення?

2.15. Як перевірити властивості відношення, якщо його задано матрицею/графом?

2.16. Як виконати операції над відношеннями, якщо їх задано матрицею/графом?

2.17. На множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ відношення задано переліком пар {<1,1>, <2,3>, <3,4>, <2,4>}. Скласти матрицю відношення, побудувати граф. Визначити властивості відношення.

2.18. Визначити назви властивостей відношення $\rho$:

a) $x\rho x$;

b) $x\rho y \Rightarrow y\rho x$;

c) $x\rho y$ *і* $y\rho z \Rightarrow x\rho z$;

d) $x\rho y$ *і* $y\rho x \Rightarrow x = y$.

2.19. Задано розбиття множини {0, 1, 2, 3, 4, 5}: {{0}, {1, 3, 5}, {2, 4}}. Побудувати відповідне цьому розбиттю відношення еквівалентності, побудувати граф та визначити фактор-множину.

2.20. Якщо відношення симетричне, то матриця бінарного відношення буде симетрична відносно головної діагоналі. А якщо відношення асиметричне (або антисиметричне: до речі, яка відмінність притаманна матрицям асиметричного й антисиметричного відношень?), чи буде виконуватися інвертність значень матриці відносно головної діагоналі?

## Контрольні запитання й тестові завдання до розділу 3: ВІДОБРАЖЕННЯ. ФУНКЦІЇ

3.1. Відповідності й відображення. Види відображень.

3.2. Визначення функції. Часткові функції. Види функціональних відображень.

3.3. Композиція відображень. Властивості композиції відображень.

3.4. У якому випадку існує обернена функція?

3.5. Властивості композиції відображень — навести таблицю на 16 композицій.

3.6. Кардинальний степінь множин. Знайти степінь $A^B$, де $A=\{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$.

3.7. Скільки існує функцій із множини $A$, що складається з $m$ елементів, у множину $B$, що складається з $n$ елементів?

3.8. За яких $m$ та $n$ існує взаємно однозначна відповідність між $A$ і $B$?

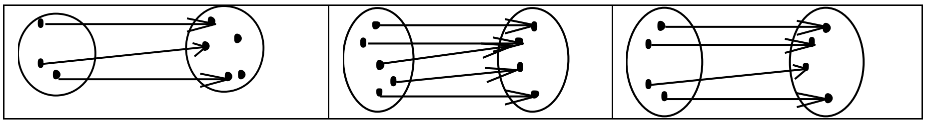
3.9. Скільки існує взаємно однозначних функцій з $A$ в $B$?

3.10. Нехай $f$ — функція. За яких умов $f^{-1}$ є функцією?

3.11. Нехай $f$ і $g$ — функції. За яких умов $f \circ g$ є взаємно однозначною функцією?

3.12. Визначити кількість функціональних відображень між двома множинами.

3.13. Визначити тип відображення:



## Контрольні запитання й тестові завдання до розділу 4: ВІДНОШЕННЯ ПОРЯДКУ

4.1. Відношення порядку. Властивості. Типи порядків. Строгий порядок. Частковий порядок. Лінійний порядок. Непорівнянні елементи, антиланцюг.

4.2. Найменший (найбільший) елемент, мінімальні (максимальні) елементи.

4.3. Відношення покриваності (домінування). Його властивості. Діаграми Гассе. Чим відрізняється діаграма Гассе від графа відношення?

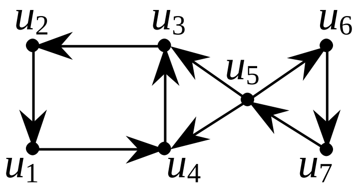
4.4. Відношення квазипорядку (передпорядку). Упорядковування квазиупорядкованої множини.

4.5. Намалювати:

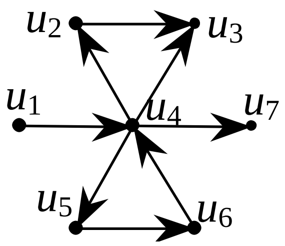
a) усі можливі упорядковані множини на **двох елементах**. Вказати, які з них самоподвійні, які ізоморфні;
b) усі **неізоморфні** упорядковані множини на **трьох елементах**. Вказати, які з них самоподвійні;
c) усі **неізоморфні** упорядковані множини на **чотирьох елементах**. Вказати, які з них самоподвійні, які є решітками.

4.6. На заданих квазиупорядкованих множинах визначити класи еквівалентності:

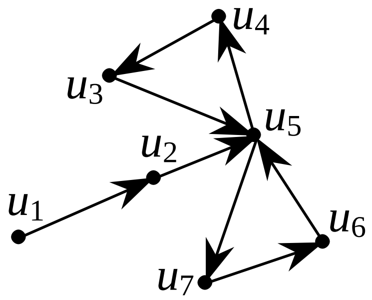
a)




b)

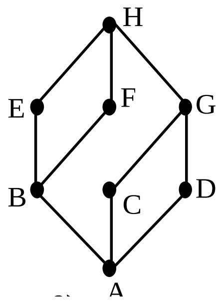


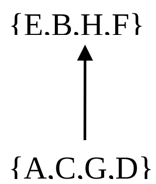

c)



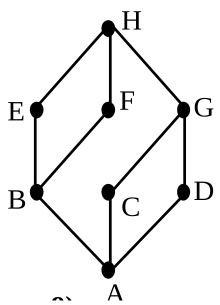

4.7. На заданих множинах визначити квазипорядок так, щоб він відповідав заданому розбиттю на класи еквівалентності (тобто встановити направлення стрілок на графі у відповідності сформованим класам):

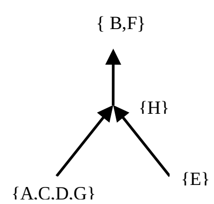
a)



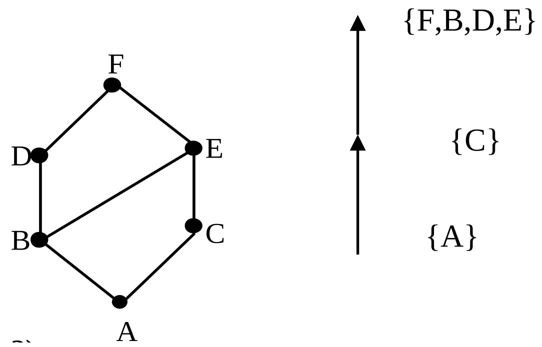




b)



c)




**Контрольні запитання й тестові завдання до розділу 5: РЕШІТКИ**

5.1. Визначення верхньої (нижньої) грані елементів у-множини. Визначення точної верхньої (нижньої) грані двох елементів у-множини.

5.2. Визначення решітки, підрешітки, напіврешіткі. Опуклі підрешітки. Визначення замкненого інтервалу.

5.3. Система аксіом, що визначає решітки.

5.4. Властивості решіток: дистрибутивність, модулярність — нерівності й тотожності.

5.5. Доповнення елементів у решітках. Решітки з доповненнями, з відносними доповненнями.

5.6. Булеві решітки. Аксіоми булевої решітки.

5.7. Ідеали, дуальні ідеали, примарні ідеали.

5.8. Ланцюги та дистрибутивні трійки — показати, що вони є дистрибутивними й модулярними.

5.9. Решітки М3 («діамант») і N5 («пентагон») — їхні властивості.

5.10. Намалювати всі неізоморфні решітки на 4-х, на 5-ти і на 6-ти елементах. Вказати, які з них самодвоїсті. Намалювати булеві решітки на 2-х, 4-х та 8-х елементах. Чи будуть вони самодвоїстими?

5.11. Який зв’язок існує між дистрибутивністю і модулярністю в решітках?

5.12. Навести формулу закону сумісності решіток.

5.13. Навести приклад (намалювати) решітки:

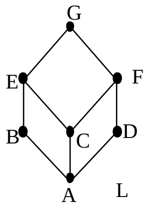
a) дистрибутивної без доповнень;
b) недистрибутивної й модулярної;
c) дистрибутивної, модулярної, але не булевої;
d) недистрибутивної з доповненнями;
e) модулярної, але недистрибутивної решітки з доповненнями.

5.14. Навести приклад діаграми Гассе, що має 0 і 1 множини, але не є решіткою (не кожна пара елементів має точні верхні чи нижні грані).

5.15. Відповісти на запитання:

a) якщо решітка недистрибутивна, то що можна визначити про модулярність?
b) якщо решітка модулярна, то що можна визначити про дистрибутивність?
c) якщо решітка модулярна і з доповненнями, який висновок про відносні доповнення можна зробити?
d) якщо решітка немодулярна і з доповненнями, який висновок про відносні доповнення можна зробити?
e) скільки доповнень може бути в дистрибутивній решітці?
f) якщо в решітці елемент має декілька доповнень, то який висновок можна зробити?
g) якщо решітка дистрибутивна і з доповненнями, то які ще властивості будуть виконуватися, і як називають такий клас решіток?
h) якщо решітка дистрибутивна, то чи буде вона модулярною?
i) якщо решітка немодулярна, то чи буде вона дистрибутивною?
j) якщо решітка недистрибутивна, то чи буде вона немодулярною?
k) якщо решітка немодулярна, то чи буде вона недистрибутивною?

5.16. Для решітки $L$, зображеної на рисунку, визначити результати операцій та властивості (модулярність, дистрибутивність):

| | | | |
|---|---|---|---|
|  | $E \vee D=$ | $(D \wedge B) \vee E =$ | $E' =$ |
| | $B \vee C =$ | $B \vee (C \wedge D) =$ | $D' =$ |
| | $B \wedge F =$ | $(B \vee C) \wedge (B \vee D) =$ | $A' =$ |
| | $\mathrm{Inf}(L) =$ | $B \vee (C \wedge B) =$ | $\mathrm{Inf}(B, C) =$ |
| | $\mathrm{Sup}(L) =$ | $D \wedge (B \vee E) =$ | $\mathrm{Sup}(B, C) =$ |

## Контрольні запитання й тестові завдання до розділу 6:
## ВІДОБРАЖЕННЯ УПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН І РЕШІТОК

6.1. Ізотонні й антитонні відображення у-множин. Показати, як зберігається транзитивність за ізотонного відображення у-множин.

6.2. Ізоморфізм і двоїстість у-множин. Самодвоїсті множини.

6.3. Навести приклади відображення (намалювати відображення діаграм Гассе для у-множин):

a) ізотонне, але не ізоморфізм;

b) ізоморфізм, але не автоморфізм;

c) автоморфізм.

6.4. Відображення решіток. Гомоморфізм решіток. Види гомоморфізмів.

6.5. Показати гомоморфізм у ланцюгах за ізотонного відображення решіток.

6.6. Навести приклади відображення (намалювати відображення решіток):

a) ізотонне, але не $\wedge$- чи $\vee$- гомоморфізм;

b) $\wedge$-гомоморфізм;

c) $\vee$-гомоморфізм;

d) ізоморфізм, але не автоморфізм;

e) автоморфізм;

f) ендоморфізм;

g) епіморфізм;

h) мономорфізм;

i) просто гомоморфізм (без виконання пп. d–h).

**Контрольні запитання й тестові завдання до розділу 7: ГРАФИ**

7.1. Основні поняття для неорієнтованих графів. Матриця суміжності. Матриця інцидентності. Визначення степенів вершин.

7.2. Частина графа. Підграф. Повний граф. Порожній граф. Зірка вершини графа. Кліка. Максимальні й мінімальні підграфи.

7.3. Діаметр, радіус, центри й периферії графа.

7.4. Ейлерів обхід графа. Гамільтонів цикл.

7.5. Планарні й пласкі графи. Дослідження планарності графів. Формула Ейлера. Непланарні графи.

7.6. Розфарбування графів. Хроматичне число. Розфарбування дводольних графів, дерев, плоских графів. Гіпотеза 4-х фарб.

7.7. Визначення орієнтованого графа. Частина орграфа. Підграф. Напівзірки заходу і витоку вершин орграфу.

7.8. Основні поняття для орієнтованих графів. Матриці суміжності, інцидентності.

7.9. Досяжність в орграфі. Типи зв’язності орграфів.

7.10. Побудова матриці відстаней орграфа.

7.11. Критерії зв’язності орграфів. Дослідження зв’язності орграфів за допомогою матриці досяжності.

7.12. Поняття вершинної бази, компоненти сильної зв’язності, конденсації орграфів. Процедура Кеніга знаходження вершинної бази орграфів.

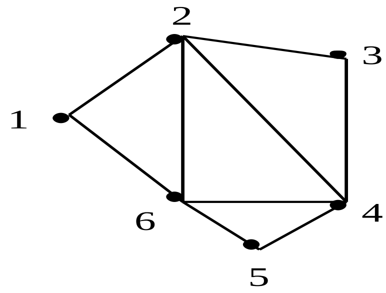
7.13. Використання матриці досяжності для знаходження сильних компонент орграфа.

7.14. Ациклічні графи. Топологічне сортування.

7.15. Дерева. Орієнтовані дерева. Збалансовані дерева.

7.16. Графи й бінарні відношення. Ізоморфізм графів. Мультиграф. Дводольні графи.

7.17. Проаналізувати неорієнтований граф:

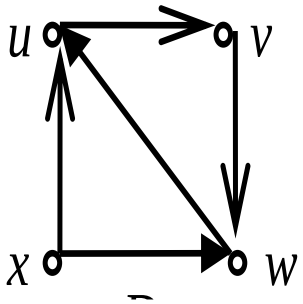



*Визначити діаметр і радіус графа.*

*Чи є граф пласким?*

*Чи є він Ейлеровим, Гамільтоновим? Пояснити.*

7.18. Проаналізувати орграф:




*Визначити всі прості шляхи з **x** в **w**.*

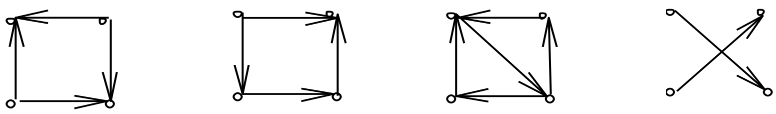
*Визначити відстань між **u** і **x**, між и і **w.***

*Побудувати граф конденсації.*

*Визначити вершинну базу графа.*

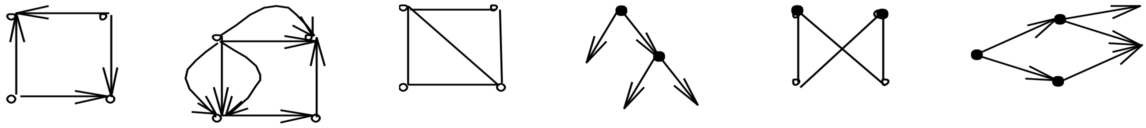
*Визначити тип зв'язності графа.*

7.19. Вказати тип зв'язності й вершинну базу для графів, зображених на рисунку:



7.20. Встановити характерну відповідність між типом графа і рисунком:

*неорієнтований, орієнтований, мультиграф, дерево, ациклічний, дводольний;*



## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА


1. Бардачов Ю.М. Дискретна математика: підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів / Ю. М. Бардачов, Н. А. Соколова, В. Є. Ходаков ; за ред. В.Є. Ходакова. - Київ : Вища школа, 2008. – 383 с.
2. Бондарчук Ю.В. Основи дискретної математики: навчальний посібник / Ю.В. Боднарчук, Б.В. Олійник ; Національний університет "Києво-Могилянська академія". - Київ: Києво-Могилянська академія, 2009. – 159 с.
3. Висоцька В.А. Дискретна математика: практикум (збірник задач з дискретної математики): навчальний посібник / В.А. Висоцька, В.В. Литвин, О.В. Лозинська; Міністерство освіти і науки України, Національний університет "Львівська політехніка". - Львів: "Новий світ-2000", 2020. – 575с.
4. Журавчак Л.М. Дискретна математика для програмістів :навчальний посібник / Л.М. Журавчак, Н.І. Мельникова, П.В. Сердюк ; Міністерство освіти і науки України, Національний університет "Львівська політехніка". - Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2019.- 417 с.
5. Журавчак Л.М. Практикум з комп’ютерної дискретної математики: навчальний посібник / Л.М. Журавчак, Н.І. Мельникова, П.В. Сердюк ; Міністерство освіти і науки України, Національний університет "Львівська політехніка". - Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2020.- 313 с.
6. Нікольський Ю.В. Дискретна математика: підручник / Ю.В. Нікольський, В.В. Пасічник, Ю.М. Щербина; за науковою редакцією В.В. Пасічника ; Міністерство освіти і науки України. - Львів: Видавництво "Магнолія-2006", 2021. – 431 с.
7. Основи дискретної математики: підручник / Ю. В. Капітонова [та ін.]; НАН України, Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова, Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем, Міністерство освіти і науки України, НТУУ "КПІ". - Київ: Наукова Думка, 2002. - 579 с.
8. Темнікова О.Л. Дискретна математика: Конспект лекцій (Частина 1) [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна

математика», освітньої програми «Наука про дані та математичне моделювання» / О.Л.Темнікова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,97 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 154 с.

9. Темнікова О.Л. Дискретна математика: практикум з дисципліни «Дискретна математика» для студентів спеціальності 113 «Прикладна математика» / О.Л.Темнікова [Електронне видання] – К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 88 с.