В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей,
О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

Київ
ТВіМС
2011

УДК 514.74 (075.8)
ББК 22.143+22.151

Рецензенти:

М. В. Працьовитий, д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Національний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова)
П. В. Задерей, д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Київський національний університет технологій та дизайну)
Ю. В. Боднарчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Національний університет «Києво-Могилянська академія»)

Гриф надано Міністерством освіти та науки, молоді та спорту України
(Лист № 1/11-3542 від 11.05.2011)

Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.

ISBN 966–8725–05–0

Посібник охоплює матеріал з лінійної алгебри та аналітичної геометрії за програмами підготовки бакалаврів технічних спеціальностей НТУУ «КПІ». Систематизовані теоретичні відомості супроводжуються великою кількістю задач, прикладів, рисунків та схем і ілюструються прикладами економічного та технічного характеру. Основна змістовна частина доповнюється тестом для самоконтролю, екзаменаційними питаннями, історичними відомостями.

Для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 514.74 (075.8)
ББК 22.143+22.151

ISBN 966–8725–05–0

Зміст

Передмова

Навчальний посібник «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» створено колективом авторів кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ «КПІ» на основі лекцій, які читали автори для студентів університету різних спеціальностей протягом багатьох років, а також матеріалів однойменного дистанційного курсу, створеного в межах виконання Пілотного проекту «**Дистанційне навчання для підготовки бакалаврів за напрямом 7.0913 «Метрологія та вимірювальна техніка**». Цей посібник є складовою *навчально-методичного комплексу*, який містить навчальний посібник, практикум, збірник типових розрахункових робіт, збірник тестових завдань.

Посібник охоплює матеріал з лінійної алгебри та аналітичної геометрії відповідно до програми підготовки бакалаврів інженерно-технічних спеціальностей НТУУ «КПІ» за темами: матриці та визначники; системи лінійних алгебричних рівнянь; векторна алгебра та лінійні простори; комплексні числа; геометрія прямої і площини; криві та поверхні 2-го порядку.

Посібник містить ретельно відібрані і систематизовані теоретичні поняття, широкий набір практичних навчальних прикладів, задач для самостійного розв'язання, рисунків, схем тощо.

Застосування відповідних математичних понять окремо проілюстровано на широкому спектрі прикладів економічного та технічного змісту.

Матеріал посібника викладено на двох рівнях: *базовому* і *розширеному*. *Базовий* рівень містить означення, формулювання теорем, коментарі до них; методи розв'язання задач, проілюстровані прикладами; застосування математичних понять і методів. *Розширений* рівень доповнює базовий уточненими формулюваннями, додатковими фактами, доведеннями теорем, які наведені у тексті дрібним шрифтом і не є обов'язковими. Крім того, посібник містить:

— *тест для самоконтролю*;

— *перелік екзаменаційних питань*;

— *історичні відомості*;

— *список використаної і рекомендованої літератури.*

Сподіваємось, що цей навчальний посібник буде корисним як для студентів очної, заочної та дистанційної форм навчання НТУУ «КПІ», так і для студентів інших навчальних закладів природничого та педагогічного напрямів.

Основні позначення

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел
$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел
$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел
$a \in X$ — елемент a належить множині X
$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — $a_1 + a_2 + ... + a_n$
$k = \overline{1, n}$ — число k набуває послідовні натуральні значення від 1 до n включно
$(a_{ij})_{m \times n}$ — матриця розміром $m \times n$ з елементами $a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$
E_n — одинична матриця порядку n
$O_{m \times n}$ — нульова матриця
$\vec{x}$ — матриця-стовпець
$\overleftarrow{x}$ — матриця-рядок
A^{T} — транспонована до A матриця
A^* — приєднана до A матриця
A^{-1} — обернена до A матриця
$\det A, \left|A\right|$ — визначник (детермінант) матриці A
M_{ij} — доповняльний мінор елемента a_{ij}
A_{ij} — алгебричне доповнення елемента a_{ij}
$\operatorname{rang} A$ — ранг матриці A
$\tilde{A}$ — розширена матриця
$\overline{a}, \overline{AB}$ — вектор
$\overline{0}$ — нульовий вектор
$\left|\overline{a}\right|, \left|\overline{AB}\right|$ — довжина вектора
$\overline{a}^0$ — орт вектора $\overline{a}$
$\overline{a} \parallel \overline{b}$ — колінеарність векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$
$\overline{a} \perp \overline{b}$ — ортогональність векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$
$(\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$ — кут між векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$
$\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ — вектори ортонормованого базису
$(\overline{a}, \overline{b})$ — скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$
$[\overline{a}, \overline{b}]$ — векторний добуток вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$

$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ — мішаний добуток векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$
$\operatorname{Re} z$ — дійсна частина комплексного числа z
$\operatorname{Im} z$ — уявна частина комплексного числа z
$\left|z\right|$ — модуль комплексного числа z
$\operatorname{Arg} z$ — аргумент комплексного числа z
$\arg z$ — головне значення аргумента комплексного числа z
$L_1 \parallel L_2$ — пряма L_1 паралельна прямій L_2
$L_1 \perp L_2$ — пряма L_1 перпендикулярна до прямої L_2
$L(M_0;\overline{s})$ — пряма L, що проходить через точку M_0 паралельно вектору $\overline{s}$
$\hat{A}$ — лінійний оператор

1

Методи й моделі лінійної алгебри

1. Матриці

1.1. Основні поняття[*]

Означення 1.1. *Матрицею* A *розміром* $m \times n$ називають прямокутну таблицю чисел (*елементів матриці*)

$$a_{ij},\ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n},$$

розташованих у m рядках та n стовпцях, і позначають[**]

$$A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \boxed{a_{mj}} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow \boxed{i\text{-й рядок}} \\ \uparrow \\ \boxed{j\text{-й стовпець}} \end{array}$$

Елемент a_{ij} матриці розташовано в i-му рядку і j-му стовпці.

Матрицю розміром 1×1, яка містить один елемент, ототожнюють з цим елементом.

i-*й рядок* (*завдовжки* n) матриці $A_{m\times n}$ позначають $\overleftarrow{a}_i$, j-*й стовпець* (*заввишки* m) матриці A позначають $\vec{a}_j$.

Матрицю можна вважати рядком стовпців або стовпцем рядків:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix}.$$

---

[*] Застосування матриць розглянуто у п. 5.1.

[**] Матриці зазвичай позначають великими літерами латинки і беруть у круглі $(\ \ )$, квадратні $[\ \ ]$ або подвійні $\|\ \ \|$ дужки.

Приклад 1.1. Випишімо у матриці $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ розміром 2×3 всі її елементи, рядки та стовпці.

❍ Матриця A розміром 2×3 має 6 елементів, 2 рядки і 3 стовпці:

$$a_{11}=1, a_{12}=2, a_{13}=3, a_{21}=4, a_{22}=5, a_{23}=6;$$

$$\overleftarrow{a}_1=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix},\quad \overleftarrow{a}_2=\begin{pmatrix}4&5&6\end{pmatrix};$$

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \vec{a}_2=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}, \vec{a}_3=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}. \bullet$$

1.2. Типи матриць

1. Матрицю розміром $m\times n,$ усі елементи якої дорівнюють нулю, називають *нульовою матрицею* і позначають $O_{m\times n}$.

2. Якщо $m=n,$ то матрицю A називають *квадратною матрицею порядку* n. Набір елементів $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ утворює *головну діагональ*, а набір $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ — *побічну діагональ* (рис. 1.1).

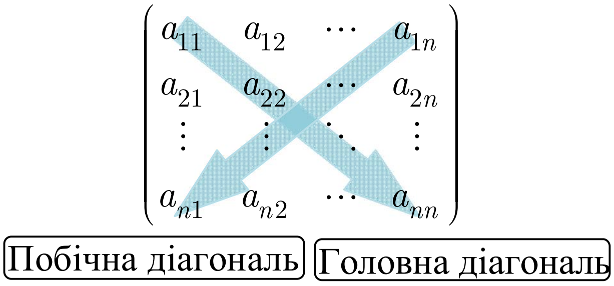


Рис. 1.1

3. Квадратну матрицю, всі елементи якої нижче (вище) від головної діагоналі дорівнюють нулю, називають *верхньою* (*нижньою*) *трикутною матрицею* (рис. 1.2).

4. Квадратну матрицю, всі елементи якої, крім, можливо, елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називають *діагональною матрицею* (рис. 1.3).

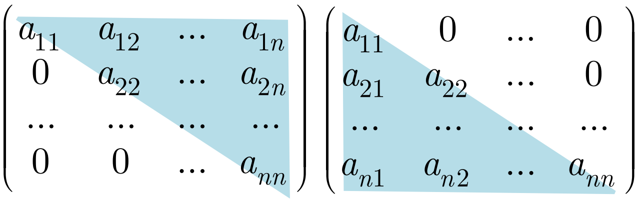


Рис. 1.2

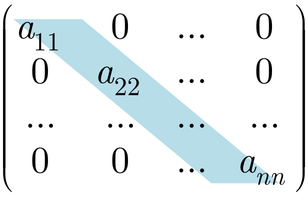


Рис. 1.3

5. Діагональну матрицю порядку $n,$ усі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, називають *одиничною матрицею* і позначають E_n.

Приміром,

$$\boxed{E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.}$$

6. Матрицю розміром $1 \times n$ називають *матрицею-рядком* (*рядком*) завдовжки n.

7. Матрицю розміром $m \times 1$ називають *матрицею-стовпцем* (*стовпцем*) заввишки m.

1.3. Лінійні дії над стовпцями (рядками) матриці

Лінійними діями над об'єктами називають додавання об'єктів та множення об'єкта на число.

Нехай задано два стовпці

$$\vec{x} = \left(x_i\right)_m = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \left(y_i\right)_m = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Два стовпці $\vec{x}$ та $\vec{y}$ називають *рівними*, якщо вони мають однакову висоту і рівні відповідні елементи[*], тобто

$$\vec{x} \overset{\text{def}}{=} \vec{y} \Leftrightarrow x_i = y_i, i = \overline{1, m} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_m = y_m. \end{cases}$$

Сумою двох *стовпців* $\vec{x}$ та $\vec{y}$ заввишки m називають стовпець $\vec{x} + \vec{y}$ заввишки m, кожен елемент якого дорівнює сумі відповідних елементів стовпців-доданків:

$$\vec{x} + \vec{y} \overset{\text{def}}{=} \left(x_i + y_i\right)_m \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_m + y_m \end{pmatrix}.$$

Добутком стовпця $\vec{x}$ заввишки m *на дійсне число* α називають стовпець $\alpha\vec{x}$ заввишки m, кожен елемент якого дорівнює відповідному елементу стовпця $\vec{x}$, помноженому на це число:

$$\alpha\vec{x} \overset{\text{def}}{=} \left(\alpha x_i\right)_m \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \dots \\ \alpha x_m \end{pmatrix}.$$

Під *різницею* стовпців $\vec{x}$ та $\vec{y}$ однакової висоти розуміють стовпець

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y}),$$

де стовпець $(-\vec{y}) = (-1)\vec{y}$ *протилежний* для $\vec{y}$ стовпець.

---

[*] Відповідні елементи — елементи, які розташовані на тих самих місцях.

Означення 1.2. *Лінійною комбінацією стовпців* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ заввишки m з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ називають стовпець (рис. 1.4)

$$\boxed{\vec{y} \overset{\text{def}}{=} \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_n\vec{x}_n.}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{m2} \end{pmatrix} + ... + \alpha_n \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \dots \\ x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рис. 1.4

Так само запроваджують поняття рівності рядків, дій додавання та множення рядка на число, лінійної комбінації рядків.

1.4. Лінійні дії над матрицями

Розгляньмо матриці $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ та $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$.

Означення 1.3. Матриці A та B називають *рівними,* якщо вони однакового розміру і мають рівні відповідні елементи, тобто

$$\boxed{A = B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.}$$

Означення 1.4. *Сумою матриць*[*] A та B розміром $m \times n$ називають матрицю $A + B$ розміром $m \times n$, кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць-доданків, тобто

$$\boxed{A + B \overset{\text{def}}{=} \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m\times n}.}$$

Означення 1.5. *Добутком матриці* A розміром $m \times n$ *на* дійсне *число* α називають матрицю αA розміром $m \times n$, кожен елемент якої дорівнює добуткові відповідного елемента матриці A на число α, тобто

$$\boxed{\alpha A \overset{\text{def}}{=} \left(\alpha a_{ij}\right)_{m\times n}.}$$

Під *різницею матриць* A та B однакового розміру розуміють матрицю

$$A - B \overset{\text{def}}{=} A + (-B) = \left(a_{ij} - b_{ij}\right)_{m\times n},$$

де матриця $(-B) = (-1)B$ — *протилежна* для B матриця.

Під лінійною комбінацією матриць однакового розміру A та B з коефіцієнтами α та β розуміють матрицю $\alpha A + \beta B$.

---

[*] Застосування додавання матриць подано у п. 5.2.

Приклад 1.2. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ знайдімо матриці: $A + B, 2A, A - B$.

❍ Матриці A та B мають однакові розміри 2×3. Отже, їх можна додавати і віднімати:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+0 & 3+1 \\ 4+2 & 5+(-3) & 6+4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix};$$

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 5 & 2\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix};$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-(-1) & 2-0 & 3-1 \\ 4-2 & 5-(-3) & 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}. \bullet$$

Твердження 1.1 (*властивості лінійних дій над матрицями*). Для довільних матриць $A_{m\times n}, B_{m\times n}, C_{m\times n}$ та чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ правдиві тотожності:

① $A + B = B + A$ (*комутативність додавання матриць*);

② $A + (B + C) = (A + B) + C$ (*асоціативність додавання матриць*);

③ $A + O_{m\times n} = A$ (*властивість нульової матриці*);

④ $A + (-A) = O_{m\times n}$ (*властивість протилежної матриці*);

⑤ $1 \cdot A = A$;

⑥ $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ (*дистрибутивність множення матриці на число щодо додавання чисел*);

⑦ $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ (*дистрибутивність множення матриці на число щодо додавання матриць*);

⑧ $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha\beta) \cdot A$ (*асоціативність множення матриці на число*).

1.5. Множення, транспонування і обернення матриць

Множення матриць[*]

Матрицю A називають *узгодженою* з матрицею B, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B («довжина» матриці A дорівнює «висоті» матриці B).

---

[*] Застосування множення матриць подано у п. 5.3.

Добуток матриць запроваджують лише для узгоджених матриць.

Добутком рядка $\overleftarrow{x} = \left(x_j\right)_n$ завдовжки n *на стовпець* $\vec{y} = \left(y_i\right)_n$ заввишки n називають число, яке дорівнює сумі добутків елементів рядка на відповідні елементи стовпця, тобто

$$\boxed{\overleftarrow{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.}$$

Означення 1.6. *Добутком матриці* $A_{m\times l}$ *на матрицю* $B_{l\times n}$ називають матрицю $C = AB$ розміром $m \times n$, кожний елемент c_{ij} якої дорівнює добуткові i-го рядка матриці A на j-й стовпець матриці B (рис. 1.5)[**], тобто

$$\boxed{C_{m\times n} = A_{m\times l} \cdot B_{l\times n} = \left(c_{ij}\right)_{m\times n} \overset{\text{def}}{=} \left(\overleftarrow{a}_i \cdot \vec{b}_j\right)_{m\times n}.}$$

Отже,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{il}b_{lj}, \ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

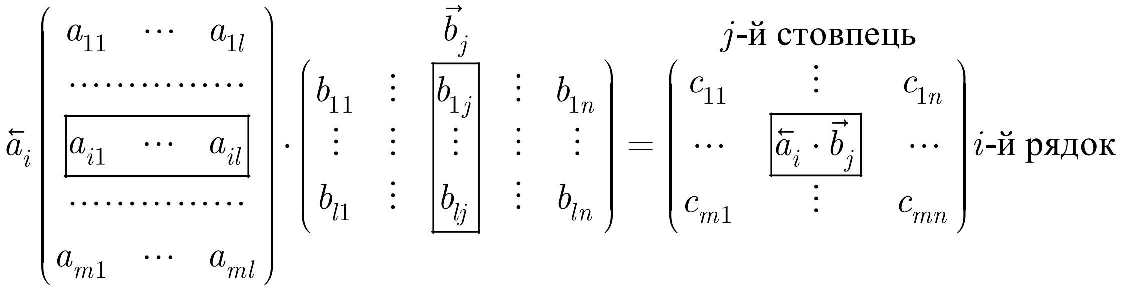


Рис. 1.5

Приклад 1.3. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ знайдімо: 1) $\overleftarrow{a}_1 \cdot \vec{b}_1$; 2) AB та BA.

❍ 1. Рядок $\overleftarrow{a}_1$ завдовжки 3 та стовпець $\vec{b}_1$ заввишки 3 узгоджені. Отже,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 = 36.$$

2. Матриця A розміром 2×3 узгоджена з матрицею B розміром 3×3. Отже, існує їхній добуток — матриця AB розміром 2×3.

[**] Обґрунтування слушності запровадженого множення наведено у п. 6.1.

$$AB=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&2&3\end{matrix}}\\ \begin{matrix}1&0&-1\end{matrix}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\begin{matrix}3\\6\\7\end{matrix}&\boxed{\begin{matrix}4\\0\\1\end{matrix}}&\begin{matrix}5\\-2\\8\end{matrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{array}{c|c|c}1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7&\boxed{1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1}&1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8\\ 1\cdot3+0\cdot6+(-1)\cdot7&1\cdot4+0\cdot0+(-1)\cdot1&1\cdot5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot8\end{array}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}36&7&25\\-4&3&-3\end{pmatrix}.$$

Множення матриць зручно записувати за схемою Фалька (рис. 1.6):

$$\begin{array}{c|ccc}&\vec{b}_1&\vec{b}_2&\vec{b}_3\\ \hline \overleftarrow{a}_1&\overleftarrow{a}_1\cdot\vec{b}_1&\overleftarrow{a}_1\cdot\vec{b}_2&\overleftarrow{a}_1\cdot\vec{b}_3\\ \overleftarrow{a}_2&\overleftarrow{a}_2\cdot\vec{b}_1&\overleftarrow{a}_2\cdot\vec{b}_2&\overleftarrow{a}_2\cdot\vec{b}_3\end{array}\Rightarrow\begin{array}{ccc|ccc}&&&3&4&5\\&&&6&0&-2\\&&&7&1&8\\ \hline 1&2&3&36&7&25\\1&0&-1&-4&3&-3\end{array}$$

Рис. 1.6

Матриця B розміром 3×3 не узгоджена з матрицею A розміром 2×3. Отже, добутку BA не існує.●

Зауваження 1.1. Множення матриць не комутативне! Тобто, якщо існує добуток AB, то може не існувати добуток BA, але, навіть, коли існують обидва,— вони можуть бути нерівними. Приміром,

$$\left.\begin{aligned}AB&=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\\ BA&=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\Rightarrow AB\neq BA.$$

Добуток ненульових матриць може бути нульовою матрицею!

Якщо матриці A та B справджують співвідношення $AB=BA$, то їх називають *переставними* (комутівними). З узгодженості матриць випливає, що переставними можуть бути лише квадратні матриці.

Одинична матриця E_n та нульова матриця O_n порядку n переставні з будь-якою квадратною матрицею того ж порядку:

$$AE_n=E_nA=A;$$

$$O_nA=AO_n=O_n.$$

Твердження 1.2 *(властивості множення матриць).* Для довільних матриць A, B, C та числа $\lambda \in \mathbb{R}$ правдиві тотожності:

① $A_{m\times n} \cdot (B_{n\times l} \cdot C_{l\times p}) = (A \cdot B) \cdot C$ (*асоціативність множення матриць*);

② $C_{l\times m} \cdot (A_{m\times n} + B_{m\times n}) = C \cdot A + C \cdot B,$
$(A_{m\times n} + B_{m\times n}) \cdot C_{n\times l} = A \cdot C + B \cdot C$ (*дистрибутивність множення матриць щодо додавання матриць*);

③ $\lambda(A_{m\times n} \cdot B_{n\times l}) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$ (*асоціативність множення матриць щодо множення на число*);

④ $A_{m\times n} \cdot E_n = E_m \cdot A_{m\times n} = A$ (*властивість одиничної матриці*);

⑤ $A_{m\times n} \cdot O_{n\times l} = O_{m\times l}$; $O_{l\times m} \cdot A_{m\times n} = O_{l\times n}$ (*властивість нульової матриці*).

Матрицю A можна помножити саму на себе тоді й лише тоді, коли вона квадратна. Натуральний степінь k квадратної матриці A розуміють як

$$\boxed{A^k = \underbrace{AA\ldots A}_{k\text{ разів}}.}$$

Якщо

$$f(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0,$$

то *многочленом* $f(A)$ *від матриці* A (*матричним многочленом*) називають вираз

$$\boxed{f(A) \overset{\text{def}}{=} a_k A^k + \ldots + a_1 A + a_0 E_n \quad (A^0_{n\times n} \overset{\text{def}}{=} E_n).}$$

Транспонування матриць

Заміну рядків матриці на її стовпці, а стовпців — на рядки, називають *транспонуванням* матриці і позначають

$$\boxed{\overleftarrow{x} \xrightarrow{\mathrm{T}} \vec{x}, \quad \vec{x} \xrightarrow{\mathrm{T}} \overleftarrow{x}.}$$

Означення 1.7. Матрицю розміром $n \times m$, яку одержують з матриці A розміром $m \times n$ транспонуванням стовпців (рядків), називають *транспонованою матрицею* до A і позначають A^{T}.

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} — & (\vec{a}_1)^{\mathrm{T}} & — \\ — & (\vec{a}_2)^{\mathrm{T}} & — \\ & \vdots & \\ — & (\vec{a}_n)^{\mathrm{T}} & — \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.4. Транспонуймо матриці $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ та $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

❍ $\vec{x}^{\mathrm{T}} = \overleftarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Отже, після транспонування стовпці (рядки) матриці A розміром 2×3 перетворились на рядки (стовпці) матриці A^{T} розміром 3×2. ●

Твердження 1.3 (*властивості транспонування матриць*). Для будь-яких матриць A, B та дійсного числа α правдиві тотожності:

① $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$;

② $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;

③ $(\alpha A)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}}$;

④ $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.

Матрицю A називають *симетричною*, якщо $A^{\mathrm{T}} = A$, і *кососиметричною*, якщо $A^{\mathrm{T}} = -A$.

Добуток $C = AA^{\mathrm{T}}$ будь-якої матриці на транспоновану до неї матрицю є симетричною матрицею, оскільки

$$C^{\mathrm{T}} = (AA^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = AA^{\mathrm{T}} = C.$$

Обернення матриць

Ділення для матриць не запроваджують, але для квадратних матриць можна побудувати аналог ділення — множення на обернену матрицю.

Означення 1.8. *Оберненою матрицею* до квадратної матриці A порядку n називають матрицю A^{-1} таку, що

$$\boxed{A^{-1}A = AA^{-1} = E_n.}$$

Матрицю A, для якої існує обернена матриця, називають *оборотною*.

З означення випливає, що матриці A та A^{-1} взаємообернені й переставні.

Оскільки $E_n E_n = E_n$, то $\left(E_n\right)^{-1} = E_n$.

З'ясування умови оборотності матриці і знаходження оберненої матриці потребує вивчення таких важливих числових характеристик матриці, як визначник і ранг матриці.

Твердження 1.4 (*властивості обернення матриць*).
① Якщо обернена матриця існує, то вона єдина.
Для будь-яких оборотних матриць A та B правдиві тотожності:
② $(A^{-1})^{-1} = A$;
③ $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}, k = 0, 1, 2, \ldots$;
④ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
⑤ $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

► ① Нехай матриці A_1^{-1}, A_2^{-1} обернені до $A_{n\times n}$. Тоді

$$A_1^{-1} = A_1^{-1}E_n = A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = (A_1^{-1}A)A_2^{-1} = E_nA_2^{-1} = A_2^{-1}.$$

② Властивість випливає з означення.

③ $$(A^{-1})^kA^k = (A^{-1})^{k-1}(A^{-1}A)A^{k-1} = (A^{-1})^{k-1}A^{k-1} = \ldots. =$$
$$= A^{-1}A = E_n \Rightarrow (A^{-1})^k = (A^k)^{-1}.$$

④ $$E_n = AA^{-1} = AE_nA^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = (AB)(B^{-1}A^{-1}),$$
$$E_n = (B^{-1}A^{-1})(AB) \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

⑤ $$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n \Rightarrow (AA^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1}A)^{\mathrm{T}} = (E_n)^{\mathrm{T}} = E_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}} = E_n \Rightarrow (A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}.$$ ◄

2. Визначники

2.1. Індуктивне означення визначника*

Розгляньмо довільну квадратну** матрицю n-го порядку $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$.

З кожною такою матрицею зв'яжімо цілком певну числову характеристику — її визначник.

Означення 2.1. *Визначником* (*детермінантом*) матриці A називають число $|A| = \det A$, яке обчислюють за правилом:

1) якщо $n = 1$, то

$$\boxed{|a_{11}| = a_{11}.}$$

2) якщо $n > 1$, то

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k},}$$

---

[*] Інші, еквівалентні, означення визначника подано у п. 6.3.

[**] Визначник для неквадратної матриці не означують.

де M_{1k} — визначник матриці порядку $(n-1)$, яку одержимо з матриці A викреслюванням 1-го рядка та k-го стовпця.

Визначник матриці, одержаної викреслюванням з матриці A i-го рядка та j-го стовпця, називають *доповняльним мінором* M_{ij} *елемента* a_{ij}.

Отже, визначник матриці з одного елемента дорівнює самому елементу; визначник матриці порядку n означують через визначники матриць порядку $(n-1)$.

Формули обчислення визначників матриць 2-го та 3-го порядку

Для $n=2$ використовують схему (рис. 2.1):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} = a_{11}\left|a_{22}\right| - a_{12}\left|a_{21}\right| =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

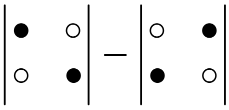


Рис. 2.1

Для $n=3$ використовують схему — *правило Саррюса* (рис. 2.2):

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = a_{11}\left(-1\right)^{2}M_{11} + a_{12}\left(-1\right)^{3}M_{12} + a_{13}\left(-1\right)^{4}M_{13}. \tag{2.1}$$

Знайдімо доповняльні мінори і підставмо їх у рівність (2.1)

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

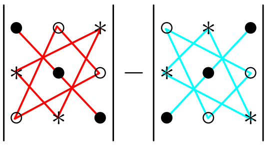


Рис. 2.2

Можна показати, що визначник матриці порядку n — це число, що дорівнює сумі добутків з n елементів матриці, взятих по одному з кожного рядка та кожного стовпця матриці з певним знаком.

2.2. Розкладання визначника за будь-яким рядком (стовпцем)

Надалі під елементами, рядками та стовпцями визначника розумітимемо елементи, рядки та стовпці відповідної матриці.

Природно виникає питання — чи не можна для обчислення визначника скористатись елементами і відповідними їм доповняльними мінорами не 1-го, а довільного рядка чи стовпця?

Теорема 2.1. Для кожної квадратної матриці A n-го порядку для довільного i $(1 \le i \le n)$ правдива формула, яку називають *розкладом визначника за i-м рядком*:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik},}$$

та для довільного j $(1 \le j \le n)$ — формула, яку називають *розкладом визначника за j-м стовпцем*:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}.}$$

Число

$$\boxed{A_{ij} \overset{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

називають *алгебричним доповненням елемента* a_{ij}.

Приклад 2.1.

❍ 1. Розкладімо визначник за рядком з літер:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ a & b & c \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = a(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + b(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + c(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Розкладімо визначник за стовпцем з літер:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & 4 & b \\ -3 & -5 & c \end{vmatrix} = a(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + b(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + c(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}. \bullet$$

2.3. Властивості визначника

Визначники мають низку важливих властивостей, які допомагають ефективно їх обчислювати та застосовувати для прикладних задач.

Твердження 2.2 *(властивості визначника).*

① (*Рівноправність рядків та стовпців*). Транспонування матриці не змінює її визначника:

$$\det A = \det A^{\mathrm{T}}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

② (*Лінійність*). Якщо стовпець (рядок) визначника є сумою двох стовпців (рядків), то визначник дорівнює сумі двох відповідних визначників:

$$\det(...,\vec{a}+\vec{b},...) = \det(...,\vec{a},...) + \det(...,\vec{b},...);$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

③ (*Однорідність*). Спільний множник стовпця (рядка) можна виносити за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \det(kA_n) = k^n \det A.$$

④ (*Антисиметричність*). Якщо переставити два стовпці (рядки) визначника, то він змінить знак:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

⑤ (*Умови рівності нулеві визначника*). Визначник матриці дорівнює нулеві, якщо матриця містить:
1) нульовий стовпець (рядок);
2) два однакові стовпці (рядки);
3) пропорційні стовпці (рядки):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

⑥ (*Теорема анулювання*). Сума добутків елементів стовпця (рядка) визначника на алгебричні доповнення відповідних елементів іншого стовпця (рядка) дорівнює нулю:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0, j \neq k,}$$

Так $a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} = 0$, але $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = \det A_{2\times 2}$.

⑦ Визначник не зміниться, якщо до будь-якого стовпця (рядка) додати інший стовпець (рядок), помножений на деяке число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

⑧ Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добуткові визначників цих матриць:

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B.}$$

Приклад 2.2. Обчислімо визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

❍ $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1+3 \\ 2 & -1 & 2+(-1) \\ -1 & 2 & -1+2 \end{vmatrix} =$$

використаємо властивість 2

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$ ●

використаємо властивість 5

2.4. Обчислення визначника за допомогою елементарних перетворень

Означення 2.2. *Елементарними перетвореннями матриці*[*] називають:
1) переставляння стовпців (рядків);
2) множення стовпця (рядка) на число, відмінне від нуля;
3) додавання до стовпця (рядка) іншого стовпця (рядка), помноженого на деяке число.

Матриці A та B називають *еквівалентними*, якщо одну з них одержано з іншої скінченною кількістю елементарних перетворень, і позначають $A \sim B$.

Метод зведення визначника до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень полягає в перетворенні визначника до вигляду, коли всі елементи, розташовані по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Твердження 2.3.

① Переставлення стовпців (рядків) змінює знак визначника.

② Помноження стовпця (рядка) на число, відмінне від нуля, помножує визначник на це число (однорідність).

③ Додавання до стовпця (рядка) іншого стовпця (рядка), помноженого на деяке число, не змінює визначника.

④ Визначник матриці не зміниться, якщо до будь-якого стовпця (рядка) додати лінійну комбінацію решти стовпців (рядків).

---

[*] З елементарними перетвореннями матриці пов'язані матриці елементарних перетворень (п. 6.4).

Твердження 2.4. Визначник верхньої (нижньої) трикутної матриці дорівнює добуткові діагональних елементів.

Наслідок із твердження 2.4. Визначник одиничної матриці E_n дорівнює одиниці.

Схема методу зведення визначника до трикутного вигляду

Розгляньмо визначник $\Delta_n = \det A$ матриці A порядку n.

1. Якщо всі елементи 1-го стовпця визначника дорівнюють нулю, то $\det A = 0$.

2. Нехай $a_{11} \neq 0$ (якщо це не так, то переставленням рядків цього можна досягнути). Додають 1-й рядок, помножений на коефіцієнт $\left(-\dfrac{a_{s1}}{a_{11}}\right)$ до s-го рядка, $s = \overline{2,n}$:

$$\det A = \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{:c:} \overleftarrow{b}_s \leftarrow \overleftarrow{a}_s + \left(-\dfrac{a_{s1}}{a_{11}}\right)\overleftarrow{a}_1, s = \overline{2,n} \end{array} =$$

$$= \left|\begin{array}{c:cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hdashline 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c:c} a_{11} & \dots \\ \hdashline 0 & \Delta_{n-1} \end{array}\right|,$$

де

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}, i = \overline{2,n}, j = \overline{2,n}.$$

3. Для визначника Δ_{n-1} повторюють пп. 1 і 2.

Приклад 2.3. Обчислімо зведенням до трикутного вигляду визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 5 & -7 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

❍ $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 5 & -7 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{:c:} \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - 4\overleftarrow{a}_1 \\ \\ \overleftarrow{a}_4 \leftarrow \overleftarrow{a}_4 - 5\overleftarrow{a}_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{:c:} \\ \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_3 - 2\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{a}_4 \leftarrow \overleftarrow{a}_4 + 2\overleftarrow{a}_2 \end{array} =$$

На першому кроці від 2-го рядка відняли 1-й, помножений на 4, та від 4-го рядка відняли 1-й, помножений на 5

$$=\left|\begin{array}{cccc}1&-1&0&0\\0&1&3&1\\0&0&-2&-8\\0&0&4&2\end{array}\right|\left|\begin{array}{c}\\ \\ \\ \overleftarrow{a}_4\leftarrow\overleftarrow{a}_4+2\overleftarrow{a}_3\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cccc}1&-1&0&0\\0&1&3&1\\0&0&-2&-8\\0&0&0&-14\end{array}\right|=$$

Визначник трикутної матриці дорівнює добуткові діагональних елементів

$$=1\cdot1\cdot(-2)(-14)=28.\bullet$$

2.5. Знаходження оберненої матриці за допомогою визначників*

З'ясуймо тепер умову оборотності квадратної матриці A порядку n, тобто існування такої матриці A^{-1}, що

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E_n.$$

Означення 2.3. Квадратну матрицю називають *невиродженою*, якщо її визначник відмінний від нуля.

Теорема 2.5 ***(критерій оборотності матриці).*** Матриця оборотна тоді й лише тоді, коли вона невироджена.

▶ $\boxed{\Rightarrow}$ Доведімо, що якщо матриця оборотна, то вона невироджена.

З означення оборотної матриці та властивості визначника 8 випливає, що

$$AA^{-1}=E_n\Rightarrow|A||A^{-1}|=|E_n|=1\Rightarrow|A|\neq0,$$

тобто матриця A невироджена.

$\boxed{\Leftarrow}$ Покажімо тепер, що якщо матриця невироджена, то вона оборотна.

Доведімо, що

$$AA^{*}=|A|E_n,$$

де

$$A^{*}=\left(A_{ij}\right)_{n\times n}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}A_{11}&\dots&A_{n1}\\\dots&\dots&\dots\\A_{1n}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix},$$

$A_{ij}, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}$, — алгебричні доповнення елементів матриці A.

Із властивості визначника 6 та теореми 2.1 випливає, що

$$\overleftarrow{a}_i\cdot\vec{a}_j^{*}=\begin{pmatrix}a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A_{j1}\\A_{j2}\\\dots\\A_{jn}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}0,&i\neq j,\\|A|,&i=j.\end{cases}$$

---

[*] Застосування обернення матриць подано у п. 5.4.

Отже, $AA^* = \left|A\right|E_n$. Так само доводиться, що $A^*A = \left|A\right|E_n$. Тобто

$$A\left(\frac{1}{\left|A\right|}A^*\right) = \left(\frac{1}{\left|A\right|}A^*\right)A = E_n \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\left|A\right|}A^*.◄$$

Матрицю $A^* = \left(A_{ij}\right)^{\mathrm{T}}_{n\times n}$ називають *приєднаною до матриці* $A_{n\times n}$.

На теоремі 2.5 ґрунтується *метод приєднаної матриці* знаходження оберненої матриці.

Схема методу приєднаної матриці

Крок 1. Обчислюють визначник матриці A.

Крок 2. Якщо $\det A = 0$, то оберненої до A матриці не існує.

Якщо $\det A \neq 0$, то будують приєднану до A матрицю

$$A^* = \left(A_{ij}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Крок 3. Обернену до A матрицю знаходять за формулою

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\left|A\right|}A^*.}$$

Приміром, для невиродженої матриці 2-го порядку $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ маємо

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\left|A\right|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.}$$

Зауваження 2.1.

1. Правильність обчислень перевіряють умовою

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E_n.$$

2. Оскільки метод приєднаної матриці потребує обчислення великої кількості визначників, то його застосовують частіше для теоретичних міркувань й обернення матриць 2-го та 3-го порядків.

Приклад 2.4. Знайдімо методом приєднаної матриці обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$.

❍ *Крок 1.* Обчислюємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Крок 2. Оскільки матриця A невироджена, то вона оборотна. Отже, будуємо приєднану до A матрицю, обчислюючи алгебричні доповнення до всіх її елементів:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Крок 3. Знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Справді,

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \bullet$$

2.6. Розв’язування матричних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Розгляньмо рівняння щодо матриці X

$$AX = B,$$

де A та B — відомі матриці розміром $n \times n$ та $n \times l$ відповідно.

Розв’язком цього рівняння (якщо він існує) є матриця X розміром $n \times l$.

Якщо матриця A оборотна, то існує єдиний розв’язок матричного рівняння

$$X = A^{-1}B.$$

Справді, помножуючи зліва рівняння на матрицю A^{-1}, маємо

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow E_nX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Матричне рівняння

$$XA = B$$

з оборотною матрицею A має розв’язок

$$X = BA^{-1}.$$

3. Ранг матриці

3.1. Основні поняття

Виберімо в матриці $A_{m\times n}$ k рядків та k стовпців $(1 \le k \le \min(m,n))$.

Означення 3.1. Матрицю, утворену з елементів матриці A, які розташовані на перетині вибраних k рядків та k стовпців, називають *підматрицею k-го порядку* матриці A і позначають A_k.

Приміром, однією з підматриць 2-го порядку для матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

є матриця $A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Якщо $s = \min(m,n)$, то матриця A має підматриці порядків $1, 2, \ldots, s$, серед яких можуть бути вироджені й невироджені.

Означення 3.2. *Рангом* матриці A називають найбільший з порядків її невироджених підматриць і позначають $\operatorname{rang} A$.

Ранг нульової матриці вважають рівним нулю.

Якщо $\operatorname{rang} A = r > 0$, то це означає, що матриця A містить принаймні одну невироджену підматрицю порядку r, але будь-яка підматриця порядку, більшого ніж r (якщо вона існує), вироджена. Невироджені підматриці порядку r матриці називають *базисними підматрицями*, а рядки і стовпці, що утворюють такі підматриці, називають *базисними рядками* і *стовпцями*.

Приклад 3.1. Знайдімо ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

❍ Усі матриці 3-го порядку вироджені. Серед підматриць 2-го порядку є невироджена підматриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \ne 0.$$

Отже, $\operatorname{rang} A = 2$. Базисна підматриця утворена елементами, які стоять на перетині 1-го та 3-го рядків з 1-м та 3-м стовпцями матриці A. ●

Установімо зв’язок між рангом матриці та лінійною залежністю її стовпців (рядків).

Означення 3.3. *Система* стовпців $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ однакової висоти *лінійно незалежна,* якщо з рівності

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_s\vec{a}_s = \vec{0}$$

випливає

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_s = 0.$$

Система стовпців $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ однакової висоти *лінійно залежна*, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$, нерівні одночасно нулю, що

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_s\vec{a}_s = \vec{0}.$$

Можна показати, що стовпці $\vec{e}_i, i = \overline{1, n}$, одиничної матриці E_n лінійно незалежні і будь-який стовпець $\vec{a}$ заввишки n є лінійною комбінацією стовпців одиничної матриці. Коефіцієнтами лінійної комбінації є елементи стовпця $\vec{a}$:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + ... + a_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + ... + a_n\vec{e}_n.$$

3.2. Умови лінійної залежності та незалежності стовпців (рядків)

Теорема 3.1 (*критерій лінійної залежності стовпців* (*рядків*)). Система з $s > 1$ стовпців (рядків) лінійно залежна тоді й лише тоді, коли хоча б один із стовпців (рядків) є лінійною комбінацією решти стовпців (рядків).

► $\boxed{\Rightarrow}$ Нехай система стовпців $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ лінійно залежна. Тоді правдива рівність

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_s\vec{a}_s = \vec{0},$$

у якій не всі коефіцієнти дорівнюють нулю. Припустімо, що саме $\alpha_1 \neq 0$, тоді цю рівність можна переписати так:

$$\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 - ... - \frac{\alpha_s}{\alpha_1}\vec{a}_s.$$

Отже, стовпець $\vec{a}_1$ лінійно виражається через решту стовпців.

$\boxed{\Leftarrow}$ Якщо один із стовпців (нехай для визначеності це $\vec{a}_1$) є лінійною комбінацією решти стовпців, тобто

$$\vec{a}_1 = \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_s\vec{a}_s,$$

то

$$\vec{a}_1 + (-\alpha_2)\vec{a}_2 + ... + (-\alpha_s)\vec{a}_s = \vec{0},$$

де принаймні коефіцієнт при $\vec{a}_1$ відмінний від нуля.

Отже, система векторів $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_s$ лінійно залежна.◄

Теорема 3.2. Базисні стовпці (рядки) матриці A лінійно незалежні. Кожний стовпець (рядок) матриці A є лінійною комбінацією її базисних стовпців (рядків).

Наслідок із теореми 3.2. Найбільша кількість лінійно незалежних рядків матриці дорівнює найбільшій кількості лінійно незалежних стовпців.

Для квадратної матриці A порядку n можна сформулювати умову лінійної залежності її стовпців (рядків), використовуючи її визначник.

Твердження 3.3 (*критерій виродженості матриці*). Квадратна матриця A n-го порядку вироджена тоді й лише тоді, коли її стовпці (рядки) лінійно залежні.

Наслідки із твердження 3.3.

① Визначник квадратної матриці A n-го порядку дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли її ранг менше за n, тобто

$$\boxed{\det A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A < n.}$$

② Визначник квадратної матриці A n-го порядку відмінний від нуля тоді й лише тоді, коли її стовпці (рядки) лінійно незалежні, тобто

$$\boxed{\det A \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A = n.}$$

③ Стовпці $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ заввишки n лінійно залежні (лінійно незалежні) тоді й лише тоді, коли визначник матриці, утвореної стовпцями $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$, дорівнює нулю (відмінний від нуля).

3.3. Знаходження рангу матриці за допомогою елементарних перетворень

Ненульовий елемент рядка з найменшим номером називають *лідером рядка*.

Означення 3.4. Матрицю називають *східчастою*, якщо вона справджує умови:
1) нульові рядки матриці (якщо вони є) розташовані нижче від ненульових;
2) номери стовпців, які місять лідери рядків, зростають.

Друга умова означає, що всі елементи, які розташовані вліво і вниз від лідера рядка східчастої матриці нульові.

Матриці на рис. 3.1 та 3.2 східчасті (чорними квадратиками ■ позначено лідери, зірочками $*$ — довільні елементи), а на рис. 3.3 матриця несхідчаста (номери лідерів не зростають).

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \end{pmatrix}$$

Рис. 3.1

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ \cline{2-3} 0 & 0 & \multicolumn{1}{c|}{0} & \blacksquare & * & * & * \\ \cline{4-4} 0 & 0 & 0 & \multicolumn{1}{c|}{0} & \blacksquare & * & * \\ \cline{5-7} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Рис. 3.2

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \end{pmatrix}$$

Рис. 3.3

Верхня трикутна матриця є окремим випадком східчастої матриці.

Будь-яку матрицю елементарними перетвореннями можна перетворити до східчастого вигляду.

Означення 3.5. Східчасту матрицю називають *зведеною*, якщо всі лідери рядків дорівнюють одиниці, а над лідерами стоять нулі (рис. 3.4).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.4

Будь-яку матрицю за допомогою елементарних перетворень рядків і можливого відкидання нульових рядків можна перетворити до зведеного східчастого вигляду.

Алгоритм перетворення матриці до східчастого вигляду (метод Ґауса)

1. Якщо матриця нульова, то зупиняються — матриця вже має східчастий вигляд.

2. Якщо матриця $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ще не має східчастого вигляду, то знаходять 1-й зліва стовпець з лідером. Переставляючи рядки, переміщують рядок, який містить цей лідер, угору:

$$A \sim B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & b_{2k_1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{mk_1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Додаючи до всіх рядків, які розташовані нижче, цей рядок, помножений на відповідні коефіцієнти, дістають під лідером нулі:

$$B \left| \begin{array}{c} \overleftarrow{c}_i \leftarrow \overleftarrow{b}_i - \dfrac{b_{ik_1}}{b_{1k_1}} \overleftarrow{b}_1, \\ i = \overline{2,m} \end{array} \right| \sim \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \dots & \dots & b_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{2,k_1+1} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{m,k_1+1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & b_{1k_1} & \dots \\ 0 & \vec{0} & C \end{pmatrix}.$$

4. Повторюють кроки 1–3 для решти рядків (*прямий хід методу Ґауса*).

Твердження 3.4 (*властивості рангу матриці*).

① Ранг матриці дорівнює найбільшій кількості лінійно незалежних рядків (стовпців) матриці.

② Ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків.

③ Транспонування матриці, елементарні перетворення матриці та видалення нульових рядків (стовпців) матриці не змінюють її рангу.

④ Ранги еквівалентних матриць рівні.

Ранг матриці методом Ґауса (за допомогою елементарних перетворень) знаходять за схемою:

1. Матрицю за допомогою елементарних перетворень зводять до східчастого вигляду.

2. Кількість ненульових рядків у східчастому вигляді матриці дорівнює рангу матриці.

Приклад 3.2. Знайдімо методом Ґауса ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3&5\\1&-5&1&-3\\2&-1&5&6\end{pmatrix}.$$

❍ Перетворюємо матрицю A до східчастого вигляду:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3&5\\1&-5&1&-3\\2&-1&5&6\end{pmatrix}\left|\begin{array}{l}\\ \overleftarrow{a}_2\leftarrow\overleftarrow{a}_2-\overleftarrow{a}_1\\ \overleftarrow{a}_3\leftarrow\overleftarrow{a}_3-2\overleftarrow{a}_1\end{array}\right|\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&3&5\\0&-6&-2&-8\\0&-3&-1&-4\end{pmatrix}\left|\begin{array}{l}\\ \\ \overleftarrow{a}_3\leftarrow\overleftarrow{a}_3-\frac{1}{2}\overleftarrow{a}_2\end{array}\right|\sim\begin{pmatrix}1&1&3&5\\0&-6&-2&-8\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Східчастий вигляд матриці A містить два ненульові рядки. Отже, на підставі твердження 3.4 маємо $\operatorname{rang} A=2$. ●

3.4. Знаходження оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень

Алгоритм перетворення матриці до зведеного східчастого вигляду (метод Ґауса — Йордана)

1. Зводять матрицю до східчастого вигляду (прямий хід методу Ґауса).

2. Відкидають нульові рядки (це вже не є елементарним перетворенням):

$$B=\begin{pmatrix}0&\ldots&0&b_{1k_1}&\ldots&\ldots&&&&&b_{1k_r}&\\0&\ldots&0&0&\ldots&0&b_{2k_2}&\ldots&&&&\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ddots&\ldots&\\0&\ldots&0&0&\ldots&0&0&\ldots&0&&b_{rk_r}&\ldots\end{pmatrix}.$$

3. Ділячи останній рядок на його лідера, одержують 1.

4. Додаючи до решти рядків новий останній рядок, помножений на відповідні коефіцієнти, дістають нулі над одиницею:

$$B\left|\begin{array}{l} \overleftarrow{c}_i \leftarrow \overleftarrow{b}_i - \dfrac{b_{ik_r}}{b_{rk_r}} \\ \overleftarrow{c}_r \leftarrow \dfrac{\overleftarrow{b}_r}{b_{rk_r}} \end{array}\right| \sim C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & c_{1,k_r-1} & 0 & c_{1,k_r+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & c_{r-1,k_r-1} & 0 & \dots & \dots \\ \cline{1-3} 0 & \dots & 0 & 1 & c_{r,k_r+1} & \dots \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} D & \vec{0} & \dots \\ \hline \overleftarrow{0} & 1 & \dots \end{array}\right).$$

5. Повторюють пп. 1–4 для решти рядків (*зворотний хід методу Ґауса*).

Після r кроків одержимо зведену східчасту матрицю

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c|c|c} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots \end{array}\right).$$

Процедуру перетворення матриці до зведеного східчастого вигляду, що поєднує в собі прямий хід методу Ґауса, можливе відкидання нульових рядків та зворотний хід методу Ґауса, називають *методом Ґауса — Йордана*.

Будь-яку квадратну матрицю n-го порядку з лінійно незалежними рядками елементарними перетвореннями її рядків можна перетворити на одиничну матрицю E_n.

Нехай A — квадратна матриця порядку n. Дописуючи праворуч від неї одиничну матрицю E_n, дістанемо матрицю $\left(A \mid E_n\right)$ розміром $n \times 2n$, яку називають *розширеною матрицею*.

Схема знаходження оберненої матриці методом Ґауса — Йордана

Крок 1. Утворюють розширену матрицю $\left(A \mid E_n\right)$.

Крок 2. Застосовують до матриці $\left(A \mid E_n\right)$ прямий хід методу Ґауса. Матрицю A зводять до східчастого вигляду, водночас перетворюючи і праву частину розширеної матриці.

Крок 3. Якщо матриця Z — східчаста форма матриці A — міститиме нульові рядки, то висновують про необоротність матриці A. Якщо матриця Z не має нульових рядків, то матриця A — оборотна, і матрицю Z вже зворотним ходом методу Ґауса перетворюють на одиничну матрицю E_n. Тим самим розширену матрицю перетворюють до зведеного східчастого вигляду:

$$\left(A \mid E_n\right) \sim \ldots \sim \left(E_n \mid A^{-1}\right).$$

Крок 4. Виписують матрицю A^{-1} — праву частину розширеної матриці.

Зауваження 3.1. Знаходити матрицю, обернену до матриці A, можна і перетворенням матриці $\left(\dfrac{A}{E_n}\right)$. При цьому всі перетворення провадять лише зі стовпцями.

Приклад 3.3. Знайдімо методом Ґауса — Йордана матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$.

❍ *Крок 1.* Утворюємо розширену матрицю:

$$\left(A \mid E_3\right) = B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Крок 2. Зводимо розширену матрицю елементарними перетвореннями рядків до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left|\begin{array}{l} \\ \overleftarrow{b}_2 \leftarrow \overleftarrow{b}_2 - 2\overleftarrow{b}_1 \\ \overleftarrow{b}_3 \leftarrow \overleftarrow{b}_3 - \frac{5}{2}\overleftarrow{b}_1 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -5/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \left|\begin{array}{l} \\ \\ \overleftarrow{b}_3 \leftarrow \overleftarrow{b}_3 - \frac{1}{2}\overleftarrow{b}_2 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right) \left|\begin{array}{l} \overleftarrow{b}_1 \leftarrow \overleftarrow{b}_1 - 2\overleftarrow{b}_3 \\ \\ \overleftarrow{b}_3 \leftarrow 2\overleftarrow{b}_3 \end{array}\right| \sim \ldots$$

Крок 3. Східчаста матриця не містить нульових рядків. Отже, матриця A оборотна. Застосовуємо зворотний хід методу Ґауса:

$$\ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right) \left|\begin{array}{l} \overleftarrow{b}_1 \leftarrow \overleftarrow{b}_1 + 3\overleftarrow{b}_2 \\ \\ \\ \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right) \left|\begin{array}{l} \overleftarrow{b}_1 \leftarrow \frac{1}{2}\overleftarrow{b}_1 \\ \\ \\ \end{array}\right| \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Крок 4. Виписуємо обернену матрицю

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \bullet$$

4. Системи лінійних алгебричних рівнянь

4.1. Основні поняття*

Рівняння щодо невідомих $x_1, x_2, \ldots,\ x_n$ вигляду

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b}$$

називають *лінійним алгебричним*. Задані числа $a_i, i = \overline{1,n}$, називають *коефіцієнтами* рівняння, а число b — *вільним членом* рівняння.

Система m *лінійних алгебричних рівнянь* (СЛАР) з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ має вигляд

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}} \tag{4.1}$$

Перший індекс коефіцієнта $a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, при змінній вказує на номер рівняння, а другий — на номер невідомої, при якій стоїть цей коефіцієнт.

Зіставмо системі (4.1) дві матриці: *матрицю системи*

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(\vec{a}_j\right)_n$$

і *розширену матрицю системи*

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = \left(\vec{a}_j \mid \vec{b}\right)_n,$$

де $\vec{b} = \left(b_i\right)_m$ — *стовпець вільних членів*.

Тоді систему (4.1) можна записати у вигляді:

1) *матричному*

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{b}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix};$$

2) *векторному*

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} x_j\vec{a}_j = \vec{b}} \Leftrightarrow x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

де $\vec{x} = \left(x_j\right)_n$ — *стовпець невідомих*.

---

[*] Застосування СЛАР розглянуто у п. 5.5. Геометричний зміст СЛАР — у п. 6.2.

Означення 4.1. *Розв'язком системи* (4.1) називають набір n значень невідомих $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$, підставлення яких у всі рівняння системи перетворює їх на тотожності. Розв'язок системи записують як стовпець $\vec{c} = (c_j)_n$.

Система може:

1) мати один розв'язок, приміром:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1; \end{cases}$$

2) мати безліч розв'язків, приміром:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0; \end{cases}$$

3) не мати жодного розв'язку, приміром:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Означення 4.2. Систему лінійних алгебричних рівнянь називають *сумісною* (*розв'язною*), якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною* (*нерозв'язною*), якщо вона не має розв'язків. Сумісну систему називають *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має більше як один розв'язок.

Дві системи називають *рівносильними*, якщо кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої, і навпаки. Усі несумісні системи вважають рівносильними.

Означення 4.3. Систему лінійних алгебричних рівнянь називають *однорідною*, якщо вільні члени всіх рівнянь нульові, і *неоднорідною*, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

Означення 4.4. Будь-який розв'язок системи називають її *частинним розв'язком*. Множину всіх частинних розв'язків називають *загальним розв'язком* системи.

4.2. Формули Крамера

Розгляньмо СЛАР у матричній формі

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{4.2}$$

із квадратною матрицею A n-го порядку, і нехай $\operatorname{rang} A = n$, тобто $\left|A\right| \neq 0$ — матриця A оборотна.

Помножуючи обидві частини рівності (4.2) на A^{-1}, одержимо розв'язок СЛАР (4.1) і матричного рівняння (4.2), якому вона еквівалентна:

$$A^{-1}A\vec{x}=A^{-1}\vec{b};$$
$$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}.$$

У цьому полягає *матричний метод* розв’язання СЛАР.

Ураховуючи формулу для оберненої матриці (теорема 2.5), дістанемо:

$$\begin{pmatrix} | \\ \vec{x} \\ | \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}A^{*}\begin{pmatrix} | \\ \vec{b} \\ | \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} | \\ A^{*}\vec{b} \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{|A|}\left(A_{11}b_1+A_{21}b_2+\ldots+A_{n1}b_n\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{|A|}\left(A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\ldots+A_{nn}b_n\right) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_j=\frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n}b_iA_{ij}=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} | & & \overset{j}{|} & & | \\ \vec{a}_1 & \ldots & \vec{b} & \ldots & \vec{a}_n \\ | & & | & & | \end{vmatrix},\ j=\overline{1,n}.$$

Одержані формули є розгорнутим записом *формул Крамера*:

$$\boxed{x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta},j=\overline{1,n},} \qquad (4.3)$$

де Δ_j — визначник матриці, одержаної з матриці A заміною j-го стовпця на стовпець вільних членів; а Δ — визначник матриці A.

Зауваження 4.1. Формули Крамера практично застосовують до систем 2×2 та 3×3. Для більших систем вони мають переважно теоретичне значення і у практичних обчисленнях їх застосовують рідко.

Приклад 4.1. Розв’яжімо за формулами Крамера СЛАР:

$$\begin{cases} x+4y=-10, \\ 3x-y=9. \end{cases}$$

❍Запишімо матрицю системи і стовпець вільних членів:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix} -10 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

За формулами Крамера (4.3) (Δ_x відповідає Δ_1, а Δ_y відповідає Δ_2)

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-13\neq 0;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 9 & -1 \end{vmatrix}=-26;\ \Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}=39;$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-26}{-13}=2;\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{39}{-13}=-3.$$

Відповідь: $x=2,y=-3.$●

4.3. Дослідження і розв'язання загальних систем лінійних алгебричних рівнянь

Елементарними перетвореннями СЛАР називають:

1) переставляння рівнянь;

2) множення обох частин якого-небудь рівняння на число, відмінне від нуля;

3) додавання до рівняння іншого рівняння, помноженого на деяке число.

Елементарні перетворення СЛАР призводять до відповідних елементарних перетворень рядків матриці та розширеної матриці системи.

Системи лінійних алгебричних рівнянь, одержані одна з одної елементарними перетвореннями, називають *еквівалентними.* Еквівалентні СЛАР рівносильні.

Розв'язати систему — це означає:

1) з'ясувати, чи є система сумісною або несумісною;

2) якщо система сумісна, то знайти множину її розв'язків.

Розгляньмо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

і розширену матрицю

$$\tilde{A} = \left(A \mid \vec{b} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

СЛАР

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Теорема 4.1 *(Кронекера — Капеллі).* Система лінійних алгебричних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ із розширеною матрицею $\tilde{A} = (A \mid \vec{b})$ сумісна тоді й лише тоді, коли ранг матриці системи A дорівнює рангу розширеної матриці системи $\tilde{A}$, тобто

$$\boxed{\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A}.}$$

▶ Запишімо систему $A\vec{x} = \vec{b}$ у векторному вигляді:

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}. \tag{4.4}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Якщо існує розв'язок системи, то запис (4.4) означає, що стовпець вільних членів є лінійною комбінацією стовпців матриці системи. Отже, приписування стовпця вільних членів не збільшує загальної кількості лінійно незалежних стовпців, і $\operatorname{rang} \tilde{A} = \operatorname{rang} A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай $\operatorname{rang} \tilde{A} = \operatorname{rang} A = r$. Тоді базисна підматриця матриці A буде базисною і в матриці $\tilde{A}$. Переставленням рівнянь та перенумеровуванням змінних завжди можна досягнути, щоб базисна підматриця розташувалась у верхньому лівому кутку матриці.

За теоремою 3.2 стовпець вільних членів є лінійною комбінацією базисних стовпців:

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_r\vec{a}_r = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1r}c_r = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mr}c_r = b_m. \end{cases}$$

Упорядкований набір n чисел $c_1, c_2, .., c_r, 0, \ldots, 0$ перетворює кожне з рівнянь заданої системи на тотожність. Отже, система сумісна.◄

Наслідки з теореми 4.1.

① Якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв’язок.

② Якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, але менший за кількість невідомих, то система має безліч розв’язків.

Можливі випадки кількості розв’язків СЛАР показано на рис. 4.1.

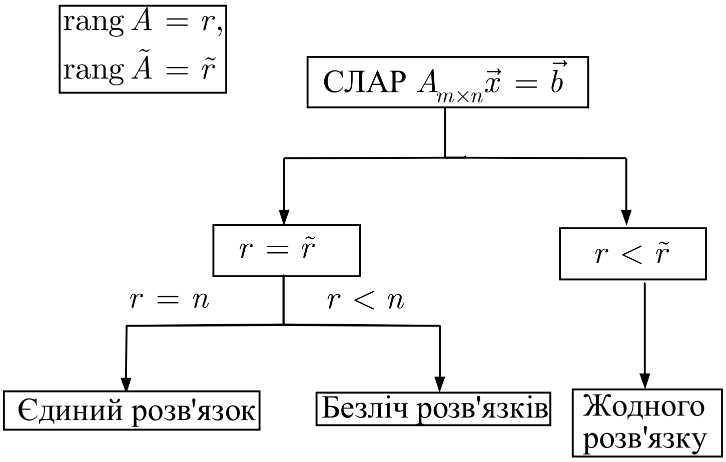


Рис. 4.1

Алгоритм розв’язування СЛАР методом Ґауса — Йордана

Крок 1. Записують розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Крок 2. Зводять розширену матрицю до східчастого вигляду (прямий хід методу Ґауса):

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
\alpha_{1,k_1} & \dots & \dots & & & & & & & & \beta_1 \\
0 & \dots & 0 & \alpha_{2,k_2} & \dots & & & & & & \beta_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & & & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & \alpha_{r,k_r} & \dots & \dots & \beta_r \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & & 0 & \beta_{r+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 & \beta_m
\end{array}\right)$$

Крок 3. Досліджують систему на сумісність (теорема Кронекера — Капеллі).

Якщо хоча б один з вільних членів $\beta_i, i = \overline{r+1, m}$, відмінний від нуля, то система несумісна.

Якщо ж $\beta_i = 0, i = \overline{r+1, m}$, то система сумісна.

Крок 4. У разі сумісності перетворюють східчасту матрицю до зведеного східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
1 & \dots & \dots & 0 & & & & 0 & & & \delta_1 \\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & & & 0 & & & \delta_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & & & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & 1 & \dots & \dots & \delta_r
\end{array}\right).$$

Крок 5. Знаходять розв'язки одержаної системи. Можливі два випадки:

1) кількість змінних дорівнює рангу матриці системи $(n = r)$:

$$\begin{cases} x_1 = \delta_1, \\ x_2 = \delta_2, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \delta_n; \end{cases}$$

2) кількість змінних n більша від кількості рівнянь r $(n > r)$.

Змінні, які відповідають лідерам рядків, називають *базисними*, а решту змінних — *вільними*. Отже, $x_1, x_2, \dots, x_r$ — базисні змінні, $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ — вільні змінні.

Вільним змінним надають довільних значень $C_1, \dots, C_{n-r}$ і виражають через них базисні змінні.

$$\begin{cases} x_1 = \delta_1 - \gamma_{1,r+1}C_1 - \dots - \gamma_{1,n}C_{n-r}, \\ x_2 = \delta_2 - \gamma_{2,r+1}C_1 - \dots - \gamma_{2,n}C_{n-r}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = \delta_r - \gamma_{r,r+1}C_1 - \dots - \gamma_{r,n}C_{n-r}, \\ x_{r+j} = C_j, j = \overline{1, n-r}. \end{cases}$$

Крок 6. Записують загальний розв’язок системи у векторному вигляді:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} \delta_1-\sum\limits_{j=1}^{n-r}\gamma_{1,r+j}C_j \\ \ldots \\ \delta_r-\sum\limits_{j=1}^{n-r}\gamma_{r,r+j}C_j \\ C_1 \\ \ldots \\ C_{n-r} \end{pmatrix}=\vec{d}+C_1\vec{e}_1+\ldots+C_{n-r}\vec{e}_{n-r},$$

де

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \ldots \\ \delta_r \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}=\vec{d};\quad \begin{pmatrix} -\gamma_{1,r+1} \\ \ldots \\ -\gamma_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}=\vec{e}_1;\ldots;\begin{pmatrix} -\gamma_{1,n} \\ \ldots \\ -\gamma_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}=\vec{e}_{n-r}.$$

Приклад 4.2. Дослідімо на сумісність і знайдімо загальний розв’язок системи

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=1, \\ 2x_1+4x_2-x_3-x_5=2. \end{cases}$$

❍ *Крок 1.* Записуємо розширену матрицю системи:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Крок 2. Зводимо елементарними перетвореннями рядків розширену матрицю до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \overleftarrow{a}_2\leftarrow\overleftarrow{a}_2-2\overleftarrow{a}_1 \end{array}\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

Крок 3. Оскільки $\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}\tilde{A}=2$ (східчастий вигляд як матриці системи A, так і розширеної матриці системи $\tilde{A}$ містить два ненульові рядки), то система сумісна.

Крок 4. Продовжуючи перетворення, зводимо матрицю до зведеного східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \overleftarrow{a}_1\leftarrow\overleftarrow{a}_1+\frac{1}{3}\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{a}_2\leftarrow-\frac{1}{3}\overleftarrow{a}_2 \end{array}\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 0 & -1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Крок 5. Отже, x_1 та x_3 — базисні змінні, а $x_2 = C_1, x_4 = C_2, x_5 = C_3$ — вільні змінні, яким надано довільних значень $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Виписуємо систему, яка відповідає перетвореній розширеній матриці, і виражаємо з неї базисні змінні:

$$\begin{cases} x_1 + 2C_1 - \frac{1}{3}C_2 = 1, \\ x_3 - \frac{2}{3}C_2 + C_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2C_1 + \frac{1}{3}C_2, \\ x_3 = \frac{2}{3}C_2 - C_3. \end{cases}$$

Крок 6. Записуємо загальний розв'язок системи:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - 2C_1 + \frac{1}{3}C_2 \\ C_1 \\ \frac{2}{3}C_2 - C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}. \bullet$$

4.4. Дослідження однорідних СЛАР

Розгляньмо ненульову (тобто не всі коефіцієнти рівнянь дорівнюють нулю) однорідну СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}.$$

Твердження 4.2 (*властивості однорідної СЛАР*).

① Однорідна СЛАР завжди сумісна (вона зажди має нульовий розв'язок $\vec{x} = \vec{0}$).

② Сума розв'язків однорідної СЛАР також є її розв'язком.

③ Добуток розв'язку однорідної СЛАР на будь-яке число також є розв'язком системи.

④ Будь-яка лінійна комбінація розв'язків однорідної СЛАР є розв'язком цієї системи.

Оскільки однорідна СЛАР завжди сумісна, то слушно поставити питання про умови існування ненульових розв'язків.

Твердження 4.3. Якщо ранг матриці $A_{m\times n}$ однорідної СЛАР дорівнює r, то система має $n - r$ лінійно незалежних (а, отже, ненульових) розв'язків.

Означення 4.5. Будь-яку сукупність з $n-r$ лінійно незалежних розв'язків однорідної СЛАР називають *фундаментальною системою розв'язків* (ФСР).

Дослідження однорідних СЛАР ілюструє схема на рис. 4.2.

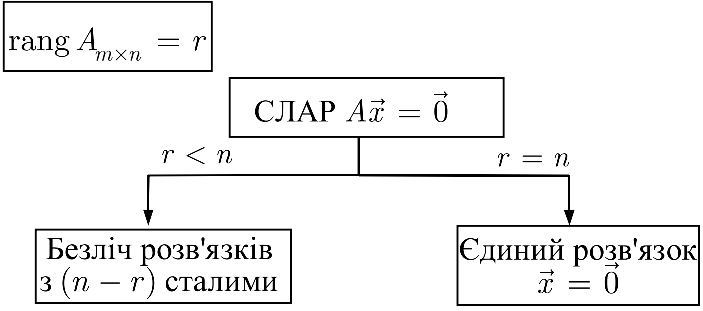


Рис. 4.2

Теорема 4.4 (*про структуру загального розв'язку однорідної СЛАР*). Якщо $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-r}\}$ — ФСР однорідної СЛАР, то загальний розв'язок цієї системи є лінійною комбінацією розв'язків $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-r}$:

$$\vec{x}_{\text{заг. одн}} = C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2 + \ldots + C_{n-r}\vec{e}_{n-r}.$$

Приклад 4.3. Знайдімо фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - x_5 = 0. \end{cases}$$

❍ Розв'яжімо систему методом Ґауса — Йордана. Для однорідної системи замість розширеної матриці можна перетворювати саму матрицю системи (сумісність системи гарантовано).

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - \overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_3 - 2\overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{a}_4 \leftarrow \overleftarrow{a}_4 - 4\overleftarrow{a}_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overleftarrow{a}_2 \leftarrow -\overleftarrow{a}_3 \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overleftarrow{a}_1 \leftarrow \overleftarrow{a}_1 + 2\overleftarrow{a}_2 \\ \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow \overleftarrow{a}_3 - 5\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{a}_4 \leftarrow \overleftarrow{a}_4 - 4\overleftarrow{a}_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc}1 & 0 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5\\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \overleftarrow{a}_3 \leftarrow -\frac{1}{8}\overleftarrow{a}_3\\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc}1 & 0 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 5/8\\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5\end{array}\right)\begin{array}{l}\overleftarrow{a}_1 \leftarrow \overleftarrow{a}_1 - 3\overleftarrow{a}_3\\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - \overleftarrow{a}_3\\ \\ \overleftarrow{a}_4 \leftarrow \overleftarrow{a}_4 + 8\overleftarrow{a}_3\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc}1 & 0 & 0 & 1/2 & -7/8\\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -5/8\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 5/8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Отже, $\operatorname{rang} A = r = 3$; x_1, x_2, x_3 — базисні змінні, $x_4 = C_1, x_5 = C_2$ — вільні змінні, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Перетворена матриця відповідає системі:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}C_1 - \frac{7}{8}C_2 = 0,\\ x_2 + \frac{1}{2}C_1 - \frac{5}{8}C_2 = 0,\\ x_3 - \frac{1}{2}C_1 + \frac{5}{8}C_2 = 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}C_1 + \frac{7}{8}C_2,\\ x_2 = -\frac{1}{2}C_1 + \frac{5}{8}C_2,\\ x_3 = \frac{1}{2}C_1 - \frac{5}{8}C_2.\end{cases}$$

Отже, загальний розв'язок

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}C_1 + \frac{7}{8}C_2\\ -\frac{1}{2}C_1 + \frac{5}{8}C_2\\ \frac{1}{2}C_1 - \frac{5}{8}C_2\\ C_1\\ C_2\end{pmatrix} = C_1\underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} + C_2\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{7}{8}\\ \frac{5}{8}\\ -\frac{5}{8}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}_{\vec{e}_2} = C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2.$$

Фундаментальна система розв'язків: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. ●

4.5. Дослідження неоднорідних систем лінійних алгебричних рівнянь

Розгляньмо неоднорідну СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,\end{cases} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}, \vec{b} \neq \vec{0}, \qquad (4.5)$$

і відповідну їй однорідну СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}.$$

Умову сумісності системи (4.5) виражає теорема 4.1.

Теорема 4.5 *(про структуру загального розв'язку неоднорідної СЛАР).* Загальний розв'язок неоднорідної СЛАР дорівнює сумі загального розв'язку відповідної однорідної СЛАР і деякого частинного розв'язку неоднорідної СЛАР:

$$\boxed{\vec{x}_{\text{заг. неодн}} = \vec{x}_{\text{заг. одн}} + \vec{x}_{\text{част. неодн}}.}$$

Приклад 4.4. Продемонструймо на загальному розв'язкові системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 2 \end{cases}$$

теорему про структуру загального розв'язку неоднорідної СЛАР (користуючись результатом прикладу 4.2).

❍ Перепишімо загальний розв'язок заданої системи:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - 2C_1 + \frac{1}{3}C_2 \\ C_1 \\ \frac{2}{3}C_2 - C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{частинний} \\ \textit{розв'язок} \\ \textit{неоднорідної} \\ \textit{СЛАР}}} + \underbrace{C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\textit{загальний розв'язок однорідної СЛАР}}. \bullet$$

4.6. Розв'язування матричних рівнянь методом Ґауса — Йордана

Розгляньмо рівняння щодо матриці X

$$AX = B,$$

де A та B — відомі матриці розміром $m \times n$ та $m \times l$. Тоді розв'язком цього рівняння є матриця X розміром $n \times l$:

$$X = \left(\vec{x}_j\right)_l, j = \overline{1, l}.$$

З означення добутку матриць випливає, що

$$A\left(\vec{x}_j\right)_l = \left(\vec{b}_j\right)_l \Leftrightarrow A\vec{x}_j = \vec{b}_j, j = \overline{1, l}.$$

З'ясувати розв'язність і розв'язати рівняння $AX = B$ можна, застосовуючи метод Ґауса — Йордана до матриці $\left(A \mid B\right)$.

Зауваження 4.2. Матричне рівняння доцільніше розв'язувати методом Ґауса і для оборотної матриці A. І лише у разі, коли треба розв'язати низку рівнянь з однією і тією самою оборотною матрицею A, а стовпці вільних членів не відомі наперед, ефективніший метод оберненої матриці.

Приклад 4.5. Розв'яжімо методом Ґауса — Йордана матричне рівняння $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

❍Записуємо розширену матрицю і зводимо її елементарними перетвореннями рядків до східчастого вигляду:

$$C = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \overleftarrow{c}_2 \leftarrow \overleftarrow{c}_2 - 2\overleftarrow{c}_1 \\ \overleftarrow{c}_3 \leftarrow \overleftarrow{c}_3 - 3\overleftarrow{c}_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 & 4 \end{array}\right) \overleftarrow{c}_2 \leftarrow -\tfrac{1}{3}\overleftarrow{c}_2 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \overleftarrow{c}_1 \leftarrow \overleftarrow{c}_1 - 2\overleftarrow{c}_2 \\ \\ \overleftarrow{c}_3 \leftarrow \overleftarrow{c}_3 + 3\overleftarrow{c}_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots$$

Оскільки, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A \mid B)$, то матричне рівняння розв'язне. Продовжуємо елементарні перетворення:

$$\underset{\overleftarrow{c}_3 \leftarrow \frac{1}{2}\overleftarrow{c}_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \overleftarrow{c}_1 = \overleftarrow{c}_1 + \overleftarrow{c}_3 \\ \overleftarrow{c}_2 = \overleftarrow{c}_2 - \overleftarrow{c}_3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 3/2 & -3/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \bullet$$

5. Застосування лінійної алгебри

5.1. Матриці в моделюванні мереж (матричний запис)

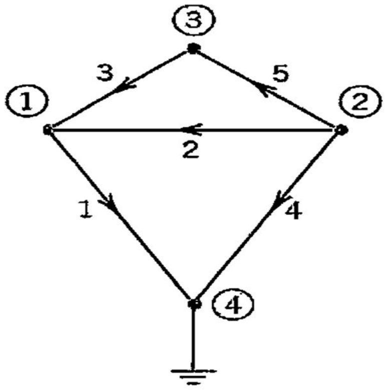


Рис. 5.1

Матриці використовують для опису електричних мереж, потоків на шляхах, виробничих процесів тощо.

Мережу, зображену на рис. 5.1, складає 5 гілок або ребер (з’єднань, занумерованих $1,2,...,5$) та 4 вузли (точок, де дві або більше гілки сполучаються) з одним заземленим вузлом (на кожній гілці стрілкою вказано напрям).

Мережу описують за допомогою «вузлової інцидентної матриці» $A=\left(a_{ij}\right)_{4\times 5}$, де

$$a_{ij}=\begin{cases}+1, \text{якщо гілка } j \text{ виходить з вузла } \boxed{i},\\ -1, \text{якщо гілка } j \text{ входить у вузол } \boxed{i},\\ \ \ 0, \text{якщо гілка } j \text{ не зв'язана з вузлом } \boxed{i}.\end{cases}$$

А саме:

$$\begin{array}{c} \text{гілка} \\ \text{вузол ①} \\ \text{вузол ②} \\ \text{вузол ③} \\ \text{вузол ④} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

5.2. Цифрова фотографія (додавання матриць)

Усі зображення, які можна побачити в мережі Інтернет, створені або опрацьовані за допомогою комп’ютера (одержані, приміром, з цифрового фотоапарата або відскановані) і збережені в цифровому форматі, мають тисячі або й, навіть, мільйони маленьких квадратиків, які називають пікселами. Піксели одержують поділянням будь-якого зображення сіткою. Комп’ютер може змінювати яскравість кожного піксела сітки.

Приміром, літеру Г на рис. 5.2 зображено за допомогою 9 пікселів у сітці 3×3. Розгляньмо чотири відтінки: білий, світло-сірий, темно-сірий та чорний і занумеруймо їх як $0,1,2,3$ відповідно (рис. 5.3).

Запишімо матрицю, яка відповідає цифровій фотографії літери Г, кожний елемент якої відповідає використаному відтінку:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Щоб збільшити контрастність фотографії (темно-сірий відтінок літери перетворити на чорний (тобто збільшити на 1), а світло-сірий відтінок тла на білий (тобто зменшити на 1)) (рис. 5.4), до матриці фотографії A треба додати матрицю $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

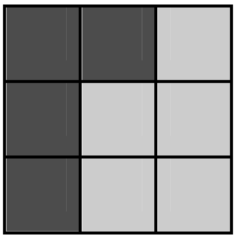


Рис. 5.2

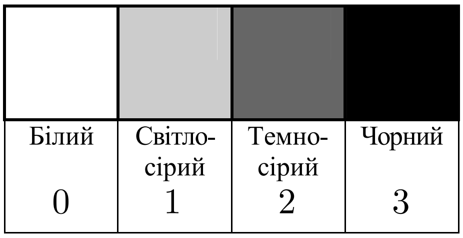


Рис. 5.3

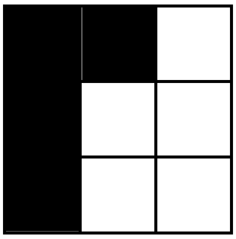


Рис. 5.4

5.3. Випуск продукції (множення матриць)

Розгляньмо підприємство, яке випускає продукцію трьох видів P_1, P_2, P_3 і використовує сировину двох типів S_1 та S_2. Норми витрат сировини характеризує матриця

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

де кожний елемент $a_{ij}, i = 1,2,3, j = 1,2,$ вказує, скільки одиниць сировини j-го типу витрачають на виробництво одиниці продукції i-го виду.

План випуску продукції задано матрицею-рядком

$$\overleftarrow{c} = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix},$$

вартість одиниці кожного типу сировини — матрицею-стовпцем $\vec{b} = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Знайдімо витрати сировини, потрібної для планового випуску продукції, та загальну вартість сировини.

Витрати сировини 1-го типу складають

$$S_1 = 2 \cdot 100 + 5 \cdot 80 + 1 \cdot 130 = 730,$$

а 2-го типу

$$S_2 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 80 + 4 \cdot 130 = 980.$$

Це означає, що матриця-рядок витрат сировини

$$S = \overleftarrow{c}A = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix}.$$

Тоді сумарна вартість сировини

$$Q = S\vec{b} = \begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = 730 \cdot 30 + 980 \cdot 50 = 70900.$$

Сумарну вартість сировини можна обчислити і по-іншому: спочатку знаходимо матрицю вартостей сировини на одиницю продукції

$$R = A\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix},$$

а потім загальну вартість сировини

$$Q = \overleftarrow{c}R = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} = 70900.$$

5.4. Кодування і розкодування повідомлень (множення й обернення матриць)

Розгляньмо простий спосіб закодувати повідомлення. Кожній літері латинки зіставляють її номер: $A = 1, B = 2, ..., Z = 26$, прогалину кодують як 0. Приміром, числовий еквівалент слова $MATH$ є $13, 1, 20, 8$. Числовий еквівалент повідомлення потім перетворюють на матрицю, записуючи числа у стовпці. Нарешті, помножуючи матрицю повідомлення на невироджену (отже, й оборотну) матрицю A, кодують повідомлення. За допомогою оберненої матриці A^{-1} можна розкодувати повідомлення.

Закодуймо повідомлення $MATH$.

1. Записуємо повідомлення за допомогою чисел

$$13, 1, 20, 8.$$

2. Записуємо матрицю по стовпцях і формуємо квадратну матрицю (у разі, якщо не вистачає чисел для формування квадратної матриці, заповнюють числове повідомлення наприкінці нулями):

$$P = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Помножуємо будь-яку невироджену матрицю, скажімо матрицю $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, на матрицю P. Дістаємо криптограму

$$C = AP = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 & -64 \\ 43 & 92 \end{pmatrix}.$$

4. Отже, закодоване повідомлення має вигляд

$$-29, 43, -64, 92.$$

Розкодуймо одержане повідомлення.

1. Обертаючи кодувальну матрицю $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, дістаємо розкодувальну матрицю $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Множачи розкодувальну матрицю A^{-1} на закодовану матрицю C, дістаємо матрицю повідомлення:

$$P = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -29 & -64 \\ 43 & 92 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Записуємо початкове числове повідомлення

$$13, 1, 20, 8$$

і його літерний оригінал

$$MATH.$$

5.5. Мережевий потік

Системи лінійних алгебричних рівнянь природно виникають під час вивчення потоку деякої величини через мережу. Приміром, це можуть бути потоки автотранспорту в міських транспортних мережах, або потоки електричного струму в енергетичних мережах, або потоки певного товару від постачальника до споживача у торгівельних мережах. Системи рівнянь, за допомогою яких вивчають реальні мережі, можуть містити до сотень, тисяч або й мільйонів рівнянь та невідомих.

Мережу складають множина вузлів і множина гілок, які сполучають усі або деякі вузли. Приміром, перехрестя вулиць – це вузол, вулиці — гілки. На кожній гілці вказують напрям потоку, а його величину позначають деякою невідомою.

У задачах на мережевий потік припускають, що:

1) загальний вхідний потік в мережі дорівнює загальному вихідному потоку з мережі;

2) загальний вхідний потік у вузлі дорівнює загальному вихідному потоку з вузла.

Так, на рис. 5.5 зображено, що 30 одиниць надходить до вузла через гілку і x_1 та x_2 одиниць виходить з вузла через інші гілки. Оскільки потік «зберігається» в кожному вузлі, то

$$x_1 + x_2 = 30.$$

Задача мережевого аналізу полягає у визначення величини потоку в кожній гілці, за певних умов, приміром, якщо відомі вхідні та вихідні потоки.

Для прикладу розгляньмо електричну схему, що містить чотири резистори і два джерела напруги (рис. 5.6).

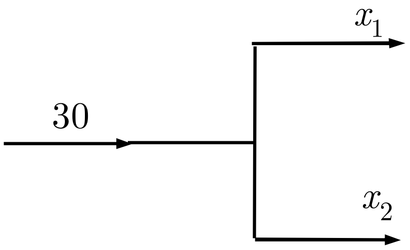


Рис. 5.5

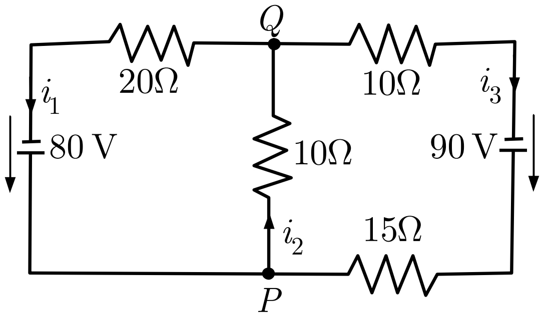


Рис. 5.6

Напрями струмів i_1, i_2 та i_3 вказано на кожній ділянці кола стрілками. Струми можна визначити, застосовуючи омів закон

$$\text{Напруга} = \text{струм} \times \text{опір}$$

та два кірхгофових закони:

1) у будь-якій точці кола сума вхідних струмів дорівнює сумі вихідних струмів (кірхгофів закон струмів).

2) у будь-якій петлі сума всіх падінь напруги дорівнює ЕРС (кірхгофів закон напруг).

Застосуємо закони Ома і Кірхгофа до розглядуваного кола:

вузол $P : i_1 - i_2 + i_3 = 0;$

вузол $Q : -i_1 + i_2 - i_3 = 0;$

права петля: $10i_2 + 25i_3 = 90;$

ліва петля: $20i_1 + 10i_2 = 80.$

Бачимо, що рівняння для вузлів P та Q пропорційні, отже, залишаючи лише одне з цих рівнянь, маємо систему:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0, \\ 10i_2 + 25i_3 = 90, \\ 20i_1 + 10i_2 = 80. \end{cases}$$

Її можна розв'язати або методом Ґауса — Йордана, або за правилом Крамера: $i_1 = 2\,\mathrm{A}, i_2 = 4\,\mathrm{A}, i_3 = 2\,\mathrm{A}$.

6. Обґрунтування й узагальнення понять лінійної алгебри

6.1. Обґрунтування слушності запровадженого множення матриць

Перехід від змінних x_1, x_2 до змінних y_1, y_2 за співвідношеннями

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

називають *лінійним перетворенням* змінних x_1, x_2 з матрицею $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Під добутком двох лінійних перетворень розуміють послідовне застосування цих перетворень. Так, якщо до перетворення

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

з матрицею A застосувати лінійне перетворення

$$\begin{cases} z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2, \\ z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{cases}$$

з матрицею $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ та змінні z_1 і z_2 виразити через x_1 і x_2, то перше перетворення буде помножене на друге. Результатом такого послідовного застосування перетворень (добутком перетворень) будуть співвідношення:

$$\begin{cases} z_1 = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})x_2, \\ z_2 = (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})x_2. \end{cases}$$

Творець матричної алгебри Артур Келі «природно» вирішив вважати матрицю добутку лінійних перетворень добутком їхніх матриць (справа запишімо матрицю першого перетворення:

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця у правій частині цієї рівності відповідає означенню 1.6, що й «виправдовує» саме таке означення добутку двох матриць.

Більш того, самі лінійні перетворення, якщо позначити

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

можна записати так:

$$\vec{y} = A\vec{x}, \qquad \vec{z} = B\vec{y}, \qquad \vec{z} = B \cdot A\vec{x} = (BA)\vec{x}.$$

6.2. Геометричний зміст систем лінійних алгебричних рівнянь

Систему із двох рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

і її розв’язки можна витлумачити геометрично, якщо розглядати рівняння системи як рівняння двох прямих на площині (п. 15.3).

Можливі випадки:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$ система має єдиний розв’язок — дві прямі перетинаються у певній точці, координати якої і є розв’язком системи (рис. 6.1);

2) $\Delta = 0$ і $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ або $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$ система не має жодного розв’язку — прямі паралельні й не зливаються (рис. 6.2);

3) $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0,$ система має безліч розв’язків — прямі зливаються одна з одною (рис. 6.3).

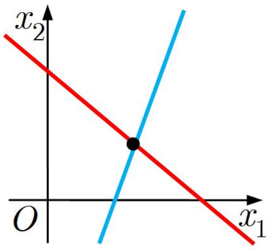


Рис. 6.1

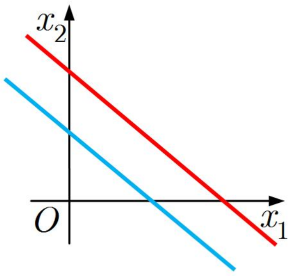


Рис. 6.2

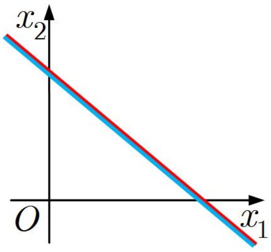
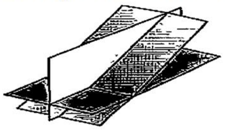


Рис. 6.3

Ураховуючи, що лінійне рівняння у просторі задає площину (п. 15.2), систему із трьох лінійних алгебричних рівнянь із трьома невідомими

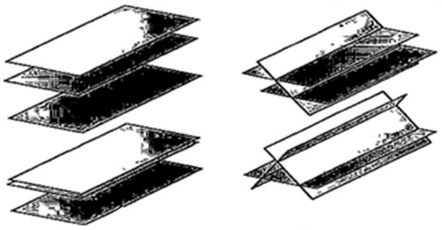
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

та її розв’язки можна витлумачити геометрично (рис. 6.4, 6.5, 6.6).



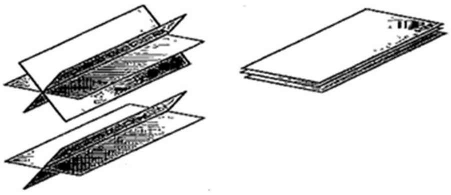
Єдиний розв’язок

Рис. 6.4



Жодного розв’язку

Рис. 6.5



Безліч розв’язків

Рис. 6.6

6.3. Еквівалентні означення визначника

Означення визначника через його елементи

Переставленням з n елементів називають будь-яку впорядковану сукупність цих елементів.

Інверсією називають таке розміщення двох чисел у переставленні, коли більше число стоїть ліворуч від меншого. Для того щоб визначити кількість інверсій у переставленні, треба підрахувати кількість інверсій, які утворює кожне число з наступними числами, і результати додати. Приміром, у переставленні

$$2,3,5,1,4$$

кількість інверсій

$$\sigma(2,3,5,1,4) = 1 + 1 + 2 + 0 = 4.$$

Розгляньмо квадратну матрицю n-го порядку $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$.

Визначником квадратної матриці A n-го порядку називають число, яке дорівнює сумі всіляких добутків n елементів визначника, взятих по одному з кожного рядка і кожного стовпця. Знаки таких добутків визначають за правилом: якщо елементи в кожному добутку розміщено так, що перші індекси розміщено у зростаючому порядку, а другі утворюють яке-небудь переставлення з n чисел, то за парної кількості інверсій у переставленні з других індексів добуток беруть зі знаком плюс, а в разі непарної кількості інверсій — зі знаком мінус:

$$\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} (-1)^{\sigma(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A.$$

Означення визначника як функції його стовпців

Із властивостей визначника й того, що $\det E_n = 1$, випливає, що *визначником* матриці $A = \left(\vec{a}_i\right)_n$ можна назвати функцію стовпців

$$f(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \left|A\right|,$$

яка має властивості:

1) лінійності;
2) однорідності;
3) антисиметричності;
4) $\left|E_n\right| = 1$.

6.4. Матриці елементарних перетворень

З елементарними перетвореннями матриці позв'язані квадратні матриці певного вигляду, які називають *матрицями елементарних перетворень*:

1) переставленню i-го рядка з j-м відповідає матриця $E^{\overleftarrow{i} \leftrightarrow \overleftarrow{j}}$, одержана з одиничної матриці E_n переставленням i-го рядка з j-м;

2) множенню i-го рядка на число α, відмінне від нуля, відповідає матриця $E^{\alpha\overleftarrow{i}}$, одержана з матриці E_n помноженням i-го рядка на число α;

3) додаванню до i-го рядка j-го рядка, помноженого на число α, відповідає матриця $E^{\overleftarrow{i}+\alpha\overleftarrow{j}}$, одержана з матриці E_n додаванням до i-го рядка j-го рядка, помноженого на число α.

Помноження матриці на матрицю $E^{\overleftarrow{i}\leftrightarrow\overleftarrow{j}}$ зліва змінює рядки з номерами i та j, приміром:

$$E^{\overleftarrow{1}\leftrightarrow\overleftarrow{2}}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & d\\ a & b\end{pmatrix}.$$

Помноження матриці на матрицю $E^{\alpha\overleftarrow{i}}$ зліва помножує i-й рядок матриці на число α, приміром:

$$E^{\alpha\overleftarrow{1}}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a & \alpha b\\ c & d\end{pmatrix};$$

$$E^{\alpha\overleftarrow{2}}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ \alpha c & \alpha d\end{pmatrix}.$$

Помноження матриці на матрицю $E^{\overleftarrow{i}+\alpha\overleftarrow{j}}$ зліва додає до i-го рядка j-й рядок, помножений на число α, приміром:

$$E^{\overleftarrow{1}+\alpha\overleftarrow{2}}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+\alpha c & b+\alpha d\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Ураховуючи вплив елементарних перетворень матриці на її визначник, дістаємо

$$\left|E^{\varphi}\right|=\begin{cases}-1, & E^{\varphi}=E^{\overleftarrow{i}\leftrightarrow\overleftarrow{j}},\\ \alpha, & E^{\varphi}=E^{\alpha\overleftarrow{i}},\\ 1, & E^{\varphi}=E^{\overleftarrow{i}+\alpha\overleftarrow{j}}.\end{cases}$$

Твердження 6.1. Матриці елементарних перетворень оборотні. Обернені до них матриці також є матрицями елементарних перетворень.

►Справді, для кожного типу перетворень маємо:

1) $E^{\overleftarrow{i}\leftrightarrow\overleftarrow{j}}E^{\overleftarrow{i}\leftrightarrow\overleftarrow{j}}=E_n\Rightarrow\exists(E^{\overleftarrow{i}\leftrightarrow\overleftarrow{j}})^{-1}=E^{\overleftarrow{i}\leftrightarrow\overleftarrow{j}};$

2) $E^{\alpha\overleftarrow{i}}E^{\alpha^{-1}\overleftarrow{i}}=E^{\alpha^{-1}\overleftarrow{i}}E^{\alpha\overleftarrow{i}}=E_n\Rightarrow\exists\left(E^{\alpha\overleftarrow{i}}\right)^{-1}=E^{\alpha^{-1}\overleftarrow{i}}\ \forall\alpha\neq0;$

3) $E^{\overleftarrow{i}+\alpha\overleftarrow{j}}E^{\overleftarrow{i}-\alpha\overleftarrow{j}}=E^{\overleftarrow{i}-\alpha\overleftarrow{j}}E^{\overleftarrow{i}+\alpha\overleftarrow{j}}=E_n\Rightarrow\exists\left(E^{\overleftarrow{i}+\alpha\overleftarrow{j}}\right)^{-1}=E^{\overleftarrow{i}-\alpha\overleftarrow{j}}\ \forall\alpha\neq0.$◄

Опишемо процес обернення матриці за допомогою матриць елементарних перетворень.

Розгляньмо невироджену квадратну матрицю A n-го порядку і послідовність $E^{\varphi_1},E^{\varphi_2},...,E^{\varphi_m}$ елементарних перетворень рядків, які зводять матрицю A до одиничної матриці E_n, тобто

$$E^{\varphi_m}E^{\varphi_{m-1}}...E^{\varphi_1}A=E_n.$$

Помножуючи цю рівність на матрицю A^{-1} праворуч, дістаємо

$$E^{\varphi_m}E^{\varphi_{m-1}}...E^{\varphi_1}E_n = A^{-1}.$$

Звідки

$$A^{-1} = E^{\varphi_m}E^{\varphi_{m-1}}...E^{\varphi_1}; \quad A = (E^{\varphi_1})^{-1}...(E^{\varphi_m})^{-1}.$$

Інакше кажучи, ті самі перетворення, що зводять матрицю A до одиничної матриці E_n зводять матрицю E_n до оберненої матриці A^{-1}. Власне це й обґрунтовує метод елементарних перетворень (Ґауса — Йордана) обернення матриці.

У разі виродженої матриці A, на якомусь кроці елементарних перетворень дістанемо повністю нульовий рядок або нульовий стовпець і, звісно, одержати елементарними перетвореннями одиничну з неї не можна.

Тобто з невиродженої матриці елементарними перетвореннями можна одержати лише невироджену матрицю, а з виродженої — лише вироджену. Крім того, будь-яку невироджену матрицю можна зобразити як добуток елементарних матриць.

Твердження 6.2. Визначник добутку узгоджених квадратних матриць дорівнює добуткові визначників цих матриць:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

►Покажемо, що для будь-якого елементарного перетворення φ_1 виконано рівність

$$\det(E^{\varphi_1}A) = \det E^{\varphi_1} \cdot \det A.$$

Якщо φ_1 — елементарне перетворення 1-го типу, то

$$\det E^{\varphi_1} = -1, \det(E^{\varphi_1}A) = -\det A \Rightarrow \det(E^{\varphi_1}A) = \det E^{\varphi_1} \cdot \det A.$$

Якщо φ_1 — елементарне перетворення 2-го типу, то

$$\det E^{\varphi_1} = \alpha, \det(E^{\varphi_1}A) = \alpha \det A \Rightarrow \det(E^{\varphi_1}A) = \det E^{\varphi_1} \cdot \det A.$$

Якщо φ_1 — елементарне перетворення 3-го типу, то

$$\det E^{\varphi_1} = 1, \det(E^{\varphi_1}A) = \det A \Rightarrow \det(E^{\varphi_1}A) = \det E^{\varphi_1} \cdot \det A.$$

Якщо матриця A невироджена, то існує сукупність елементарних матриць $E^{\varphi_1},...,E^{\varphi_m}$:

$$A = E^{\varphi_1}E^{\varphi_2}....E^{\varphi_m}E_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det A = \det E^{\varphi_1} \cdot \det E^{\varphi_2}...\det E^{\varphi_m}.$$

Тоді

$$\det(AB) =$$

$$= \det(E^{\varphi_1}E^{\varphi_2}...E^{\varphi_m}B) = \det E^{\varphi_1} \cdot \det E^{\varphi_2}...\det E^{\varphi_m} \cdot \det B =$$

$$= \det A \cdot \det B.$$

Якщо матриця A вироджена, то на кроці s зведення її до одиничної дістанемо матрицю C з нульовим рядком. Отже,

$$A = E^{\varphi_s}....E^{\varphi_1}C.$$

Матриця CB також містить нульовий рядок, і $\det(CB) = 0$. Отже,

$$\det(AB) = \det(E^{\varphi_s} \ldots . E^{\varphi_1} CB) =$$
$$= \det E^{\varphi_s} \ldots \det E^{\varphi_1} \cdot \det(CB) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 = \det(AB) = 0 \cdot \det B = \det A \cdot \det B. \blacktriangleleft$$

2

Методи й моделі векторної алгебри

7. Вектори

7.1. Основні поняття

Розгляньмо впорядковану пару точок A та B простору. Ця пара визначає напрямлений відрізок (точка A є першою, точка B — другою), напрям якого на рисунку вказують стрілкою (рис. 7.1).

Означення 7.1. *Вектором*[*] у геометрії (*геометричним вектором*) називають напрямлений відрізок. Першу точку напрямленого відрізка називають *початком* вектора, а другу — *кінцем* вектора.

Вектор з початком у точці A і кінцем у точці B позначають як $\overline{AB}$. Якщо вказівка на точки несуттєва, то застосовують простіші позначення — однією малою літерою латинки з рискою зверху: $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$.

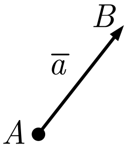


Рис. 7.1

Якщо початок і кінець вектора збігаються, то вектор називають *нульовим* і позначають через $\overline{0}$.

Довжиною вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ називають довжину відрізка AB і позначають як $|\overline{a}|, |\overline{AB}|$. Довжина нульового вектора (і лише його) дорівнює нулю. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називають *одиничним*.

Колінеарність та компланарність векторів

Означення 7.2. Вектори називають *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих (рис. 7.2 та 7.3).

---

[*] Приклади застосувань векторів подано в п. 12.1. Узагальнення поняття вектора — в п. 13.1, 13.3.

Колінеарність векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ позначають як $\overline{a} \parallel \overline{b}$. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому векторові.

Колінеарні ненульові вектори можуть бути *однаково напрямленими* (позначають $\uparrow\uparrow$) (див. рис. 7.2) або *протилежно напрямленими* (позначають $\uparrow\downarrow$) (див. рис. 7.3).

Означення 7.3. Вектори, які лежать в одній або паралельних площинах, називають *компланарними* (рис. 7.4).

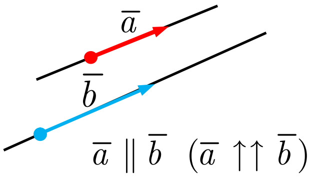


Рис. 7.2

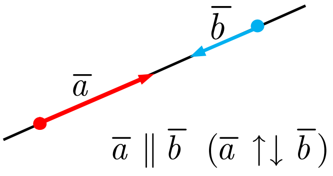


Рис. 7.3

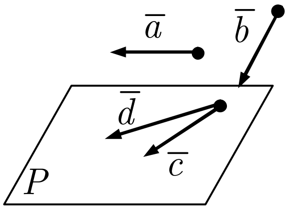


Рис. 7.4

Рівність векторів. Відкладання вектора від точки

Означення 7.4. Два вектори називають *рівними*, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають рівні довжини (рис. 7.5).

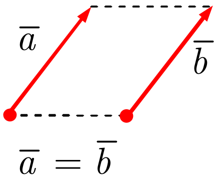


Рис. 7.5

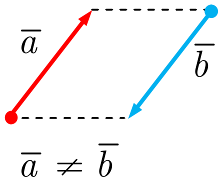


Рис. 7.6

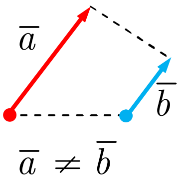


Рис. 7.7

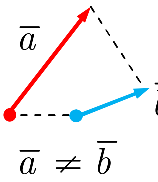


Рис. 7.8

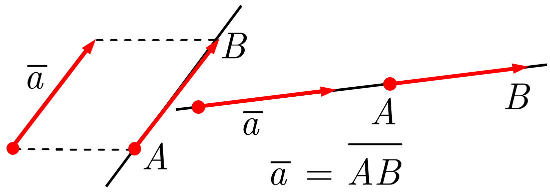


Рис. 7.9

Усі три умови є значущими: колінеарні, протилежно напрямлені вектори рівної довжини зображено на рис. 7.6; колінеарні, однаково напрямлені вектори різної довжини зображено на рис. 7.7; неколінеарні вектори зображено на рис. 7.8.

З означення випливає, що від будь-якої точки можна *відкласти* вектор, що дорівнює заданому векторові (рис. 7.9).

Геометричні вектори з таким означенням рівності ще називають *вільними*[*].

---

[*] Про інші типи векторів див. у п. 13.3.

7.2. Лінійні дії над векторами

Нехай задано два вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$. Візьмімо деяку точку O і відкладімо від неї вектор $\overline{OA}$, що дорівнює вектору $\overline{a}$. Від одержаної точки A відкладімо вектор $\overline{AB}$, що дорівнює вектору $\overline{b}$ (рис. 7.10).

Означення 7.5. *Сумою** векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називають вектор $\overline{a}+\overline{b}$, який напрямлений від початку вектора $\overline{a}$ до кінця вектора $\overline{b}$, якщо відкласти вектор $\overline{b}$ від кінця вектора $\overline{a}$:

$$\boxed{\overline{a}+\overline{b} \overset{\text{def}}{=} \overline{OB}.}$$

Таке правило додавання векторів називають *правилом трикутника*.

Сума векторів не залежить від вибору точки відкладання. Справді, якщо взяти іншу точку O_1 і відкласти вектори $\overline{O_1A_1} = \overline{a}$ та $\overline{A_1B_1} = \overline{b}$, то дістанемо вектор $\overline{O_1B_1} = \overline{OB}$ (рис. 7.11).

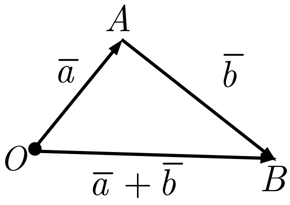


Рис. 7.10

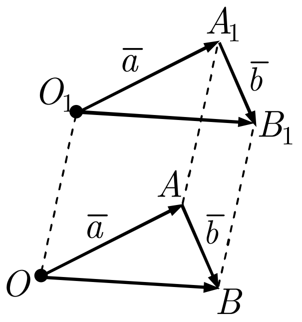


Рис. 7.11

Якщо відкласти вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ від спільної точки O і побудувати на них як на сторонах паралелограм, то сумою $\overline{a}+\overline{b}$ цих векторів є вектор $\overline{OB}$ (*правило паралелограма*) (рис. 7.12).

Сумою скінченної кількості n векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ є вектор $\overline{OA_n}$, який замикає ламану $OA_1...A_n$ (*правило замикача*) (рис. 7.13).

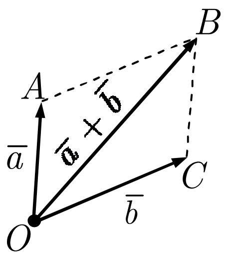


Рис. 7.12

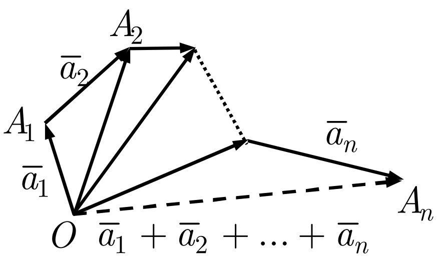


Рис. 7.13

---

* Приклад застосування подано в п. 12.2.

Означення 7.6. *Добутком вектора* $\overline{a} \neq \overline{0}$ *на* дійсне *число* $\lambda \neq 0$ називають вектор $\lambda\overline{a}$, довжина якого дорівнює $|\lambda||\overline{a}|$, і який однаково напрямлений з вектором $\overline{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежно напрямлений з вектором $\overline{a}$, якщо $\lambda < 0$ (рис. 7.14).

Якщо $\lambda = 0$ або $\overline{a} = \overline{0}$, то вважають, що $\lambda\overline{a} = \overline{0}$.

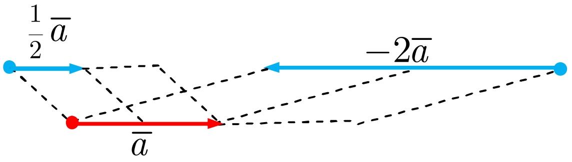


Рис. 7.14

Вектор, колінеарний заданому вектору $\overline{a}$, рівний йому за довжиною і протилежно напрямлений (отже, вектор $(-1)\overline{a}$), називають *протилежним вектором* для вектора $\overline{a}$ і позначають так:

$$-\overline{a} \overset{\text{def}}{=} (-1)\overline{a}.$$

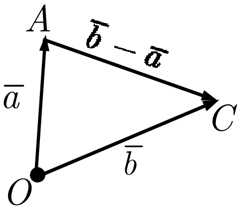


Рис. 7.15

Під *різницею векторів* $\overline{b} - \overline{a}$ розуміють суму векторів $\overline{b}$ та $-\overline{a}$ (рис. 7.15) тобто

$$\overline{b} - \overline{a} \overset{\text{def}}{=} \overline{b} + (-\overline{a}) = \overline{b} + (-1)\overline{a}.$$

Твердження 7.1 (*властивості лінійних дій над векторами*). Для довільних векторів $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$ і чисел $\lambda \in \mathbb{R}$ та $\mu \in \mathbb{R}$ правдиві тотожності:

① $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (*комутативність додавання векторів*) (рис. 7.16).

② $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ (*асоціативність додавання векторів*) (рис. 7.17).

③ Існує (єдиний) нульовий вектор $\overline{0}$, такий що $\overline{0} + \overline{a} = \overline{a}$ (*властивість нульового вектора*).

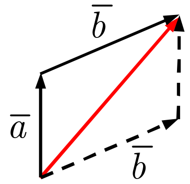
④ Існує (єдиний) *вектор* $(-\overline{a})$ такий, що $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$ (*властивість протилежного вектора*).

⑤ $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$.

⑥ $\lambda \cdot (\mu \cdot \overline{a}) = (\lambda\mu) \cdot \overline{a}$ (*асоціативність множення вектора на число*).

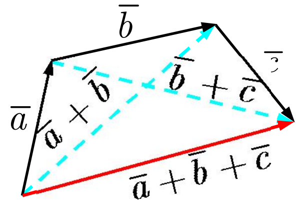
⑦ $(\lambda + \mu) \cdot \overline{a} = \lambda \cdot \overline{a} + \mu \cdot \overline{a}$ (*дистрибутивність множення вектора на число щодо додавання чисел*).

⑧ $\lambda \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = \lambda \cdot \overline{a} + \lambda \cdot \overline{b}$ (*дистрибутивність множення вектора на число щодо додавання векторів*).



$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$

Рис. 7.16



$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$

Рис. 7.17

Зауваження 7.1. Властивості лінійних дій над векторами 1–8 дозволяють виконувати звичні перетворення в лінійних діях над векторами: міняти доданки місцями, брати вирази в дужки, групувати, виносити за дужки як скалярні, так і векторні спільні множники.

Множина геометричних векторів з означеними лінійними діями над векторами є *векторним* (геометричним) *простором**.

Під векторним (лінійним) простором $\mathbb{V}$ розуміють множину, на якій означено додавання елементів і множення елемента на дійсне число, що мають властивості 1–8 із твердження 7.1.

Твердження 7.2 (*критерій колінеарності векторів*). Вектори $\overline{a}\neq\overline{0}$ та $\overline{b}$ колінеарні тоді й лише тоді, коли існує таке число λ, що $\overline{b}=\lambda\overline{a}$, тобто

$$\overline{a}\parallel\overline{b}\Leftrightarrow\overline{b}=\lambda\overline{a},\ \ \overline{a}\neq\overline{0}.$$

Під часткою $\dfrac{\overline{a}}{\lambda}$, де $\lambda\neq 0$, розуміють вектор $\dfrac{1}{\lambda}\overline{a}$.

Ортом вектора $\overline{a}$ називають одиничний вектор однаково напрямлений з вектором $\overline{a}$ і позначають $\overline{a}^0$. Отже,

$$\boxed{\overline{a}^0=\frac{1}{|\overline{a}|}\overline{a},\quad \overline{a}=|\overline{a}|\overline{a}^0.}$$

Приклад 7.1. У трикутнику ABC проведено медіани $\overline{AD},\overline{BE}$ та $\overline{CF}$ (рис. 7.18). Доведімо, що $\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}=\overline{0}$.

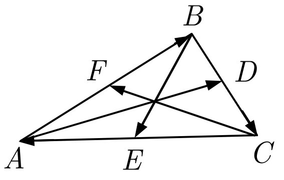


Рис. 7.18

❍ За означенням лінійних дій над векторами маємо:

$$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC};$$
$$\overline{BE}=\overline{BC}+\overline{CE}=\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{CA};$$
$$\overline{CF}=\overline{CA}+\overline{AF}=\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{AB}.$$

---

* Абстрактні лінійні простори розглянуто у п. 13.5.

Отже,

$$\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}=\frac{3}{2}\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}\right)=\frac{3}{2}\cdot\overline{0}=\overline{0}.●$$

Приклад 7.2. З’ясуймо, на яке число треба помножити одиничний вектор $\overline{a}$, щоб одержати вектор $\overline{m}$, який справджує умови $\overline{m}\uparrow\downarrow\overline{a},\left|\overline{m}\right|=3$.

❍ Оскільки вектори $\overline{a}$ та $\overline{m}$ колінеарні і протилежно напрямлені, то $\overline{m}=\lambda\overline{a},\lambda<0$. Тоді

$$\left|\overline{m}\right|=\left|\lambda\overline{a}\right|=\left|\lambda\right|\left|\overline{a}\right|=-\lambda\cdot1=-\lambda=3\Leftrightarrow\lambda=-3.●$$

7.3. Лінійна залежність та лінійна незалежність векторів

Означення 7.7. *Лінійною комбінацією векторів* $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_n$ з коефіцієнтами $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ називають вектор

$$\boxed{\overline{x}=\alpha_1\overline{a}_1+\alpha_2\overline{a}_2+...+\alpha_n\overline{a}_n.}$$

При цьому кажуть, що вектор $\overline{x}$ *лінійно виражається через вектори* $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_n$ (його *розкладено за векторами* $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_n$).

Означення 7.8. *Систему* векторів $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_s$ називають *лінійно незалежною*, якщо з рівності

$$\boxed{\alpha_1\overline{a}_1+\alpha_2\overline{a}_2+...+\alpha_s\overline{a}_s=\overline{0}}$$

випливає, що

$$\boxed{\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_s=0.}$$

Систему векторів $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_s$ називають *лінійно залежною*, якщо існують такі числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$, які не дорівнюють одночасно нулю, що

$$\boxed{\alpha_1\overline{a}_1+\alpha_2\overline{a}_2+...+\alpha_s\overline{a}_s=\overline{0}.}$$

З означення випливає, що порожня система векторів — лінійно незалежна.

Теорема 7.3(*критерій лінійної залежності векторів*). Вектори $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_n$ лінійно залежні тоді й лише тоді, коли хоча б один з векторів лінійно виражається через решту.

Наслідки з теореми 7.3.

① Один вектор лінійно залежний (незалежний) тоді й лише тоді, коли він нульовий (ненульовий).

② Система із двох векторів лінійно залежна (незалежна) тоді й лише тоді, коли вони колінеарні (неколінеарні).

③ Система із трьох векторів лінійно залежна (незалежна) тоді й лише тоді, коли вони компланарні (некомпланарні).

7.4. Геометричне тлумачення лінійної залежності

Розгляньмо таку задачу: скільки і яких векторів на прямій, на площині й у просторі треба задати, щоб через них лінійно виразити будь-який вектор на прямій, на площині й у просторі?

Твердження 7.4.

① На прямій L існує ненульовий вектор $\overline{e}$. Будь-який вектор $\overline{a}$, колінеарний ненульовому вектору $\overline{e}$, можна єдиним чином лінійно виразити через цей вектор (рис. 7.19):

$$\boxed{\overline{a} = x\overline{e}.}$$

② На площині існують два неколінеарні вектори $\overline{e}_1$ та $\overline{e}_2$. Будь-який вектор $\overline{a}$, компланарний з векторами $\overline{e}_1$ та $\overline{e}_2$, єдиним чином лінійно виражається через них (рис. 7.20):

$$\boxed{\overline{a} = x_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2.}$$

③ У просторі існують три некомпланарні вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ та $\overline{e}_3$. Будь-який вектор $\overline{a}$ простору єдиним чином лінійно виражається через некомпланарні вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ та $\overline{e}_3$ (рис. 7.21):

$$\boxed{\overline{a} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3.}$$

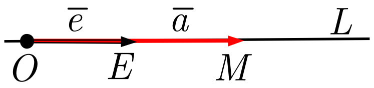


Рис. 7.19

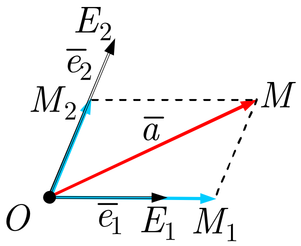


Рис. 7.20

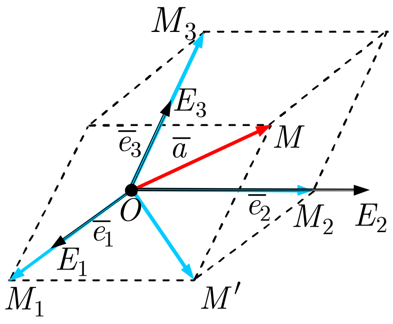


Рис. 7.21

▶ ① Розгляньмо на прямій L дві різні точки O та E (див. рис. 7.19). Отже, на прямій L існує ненульовий вектор $\overline{e} = \overline{OE}$, що утворює лінійно незалежну систему (наслідок 1 з теореми 7.3).

Відкладімо вектор $\overline{a}$ від точки O (рис. 7.19): $\overline{a} = \overline{OM}$.

Тоді з означення добутку вектора на число випливає, що

$$\overline{a} = x\overline{e},$$

де

$$x = \begin{cases} \dfrac{\left|\overline{OM}\right|}{\left|\overline{OE}\right|}, & \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{e}, \\ 0, & M = O, \\ -\dfrac{\left|\overline{OM}\right|}{\left|\overline{OE}\right|}, & \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{e}. \end{cases}$$

② Розгляньмо на площині три точки O, E_1, та E_2, що не лежать на одній прямій (рис. 7.20). Отже, на площині існує два неколінеарних вектори $\overline{e}_1 = \overline{OE_1}$ та $\overline{e}_2 = \overline{OE_2}$, що утворюють лінійно незалежну систему $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ (наслідок 2 з теореми 7.3).

Відкладімо вектор $\overline{a}$ від точки O: $\overline{a} = \overline{OM}$.

Завдяки компланарності векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{a}$ точки O, E_1, E_2, M лежать в одній площині.

Нехай точка M_1 — проекція точки M на пряму OE_1 паралельно прямій OE_2 та M_2 — проекція точки M на пряму OE_2 паралельно прямій OE_1. Тоді

$$\overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2}.$$

Вектор $\overline{a}_{\overline{e}_1} = \overline{OM_1} \parallel \overline{e}_1$, отже, за твердженням 7.4.1,

$$\exists! x_1 : \overline{a}_{\overline{e}_1} = x_1 \overline{e}_1.$$

Вектор $\overline{a}_{\overline{e}_2} = \overline{OM_2} \parallel \overline{e}_2$, отже,

$$\exists! x_2 : \overline{a}_{\overline{e}_2} = x_2 \overline{e}_2.$$

Тому

$$\overline{a} = x_1 \overline{e}_1 + x_2 \overline{e}_2. \blacktriangleleft$$

Наслідки із твердження 7.4.

① На прямій, на площині й у просторі існують лінійно незалежні системи відповідно з одного, двох і трьох векторів.

② На прямій, на площині й у просторі будь-які системи відповідно із двох, трьох та чотирьох (і більше) векторів лінійно залежні.

7.5. Базис*

Означення 7.9. *Базисом* векторного простору $\mathbb{V}$ називають будь-яку лінійно незалежну систему з найбільшою можливою кількістю векторів. Вектори, які утворюють базис простору, називають *базисними*. Кількість векторів базису простору називають його *вимірністю*.

---

[*] Про базис абстрактного лінійного простору див. п. 13.6.

Теорема 7.5.

① Базис на прямій $L = \mathbb{V}^1$ (геометричному просторі вимірності 1) утворює будь-який ненульовий вектор $\overline{e}$. Будь-який вектор $\overline{x}$, паралельний прямій L, лінійно виражається єдиним чином через цей вектор:

$$\boxed{\overline{x} = x\overline{e}.}$$

② Базис на площині $P = \mathbb{V}^2$ (геометричному просторі вимірності 2) утворює будь-яка впорядкована пара неколінеарних векторів $\overline{e}_1$ та $\overline{e}_2$. Будь-який вектор, паралельний площині P, єдиним чином лінійно виражається через вектори базису $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$:

$$\boxed{\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2.}$$

③ Базисом у просторі $\mathbb{V}^3$ (геометричному просторі вимірності 3) є будь-яка впорядкована трійка некомпланарних векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ та $\overline{e}_3$. Будь-який вектор простору єдиним чином лінійно виражається через вектори базису $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$:

$$\boxed{\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3.}$$

8. Координати

8.1. Координати вектора*

Виберімо у просторі $\mathbb{V}^3$ базис $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ і розгляньмо вектор $\overline{x} \in \mathbb{V}^3$.

Означення 8.1. Співвідношення

$$\boxed{\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3}$$

називають *розкладом вектора $\overline{x}$ за базисом* $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$. Числа x_1, x_2, x_3 називають *координатами вектора $\overline{x}$ у базисі* $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$.

Координати вектора у фіксованому базисі утворюють координатний стовпець вектора. Тому замість розкладу вектора можна записати

$$\boxed{\overline{x} = \vec{x}_{\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}}.}$$

Координати вектора відрізняються в різних базисах, і лише нульовий вектор має нульові координати в будь-якому базисі.

---

[*] Приклад застосування подано у п. 12.3.

Для довільного базису $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ правдиві розклади:

$$\begin{aligned}\overline{e}_1 &= 1\overline{e}_1 + 0\overline{e}_2 + 0\overline{e}_3,\\ \overline{e}_2 &= 0\overline{e}_1 + 1\overline{e}_2 + 0\overline{e}_3,\\ \overline{e}_3 &= 0\overline{e}_1 + 0\overline{e}_2 + 1\overline{e}_3.\end{aligned}$$

Отже, базисні вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ завжди мають у базисі $\left\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\right\}$ координатні стовпці

$$\boxed{\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}}.}$$

Твердження 8.1. Система векторів лінійно залежна тоді й лише тоді, коли лінійно залежна система їхніх координатних стовпців у фіксованому базисі.

Теорема 8.2. Нехай $\overline{x} = \vec{x}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}}, \overline{y} = \vec{y}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}}$.

① Рівні вектори мають рівні координати:

$$\boxed{\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}}.}$$

② Лінійним діям над векторами відповідають лінійні дії над їхніми координатами:

$$\boxed{\overline{x} + \overline{y} = \begin{pmatrix}x_1 + y_1\\x_2 + y_2\\x_3 + y_3\end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}}; \quad \lambda\overline{x} = \begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\\\lambda x_3\end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}}.}$$

③ Вектори колінеарні тоді й лише тоді, коли їхні координати пропорційні.

$$\boxed{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \overline{x} \parallel \overline{y} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}.}$$

► ① Нехай

$$\begin{aligned}\overline{x} &= x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3,\\ \overline{y} &= y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3.\end{aligned}$$

З рівності векторів $\overline{x} = \overline{y}$ випливає, що

$$x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3 = y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_1 - y_1)\overline{e}_1 + (x_2 - y_2)\overline{e}_2 + (x_3 - y_3)\overline{e}_3 = \overline{0}.$$

З лінійної незалежності системи векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ маємо

$$x_1 - y_1 = 0, x_2 - y_2 = 0, x_3 - y_3 = 0.$$

② Підставляємо замість векторів їх розклади за базисом $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ і використовуємо властивості лінійних дій над векторами:

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3) + (y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3) =$$
$$= (x_1 + y_1)\overline{e}_1 + (x_2 + y_2)\overline{e}_2 + (x_3 + y_3)\overline{e}_3;$$
$$\lambda\overline{x} = \lambda(x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3) = (\lambda x_1)\overline{e}_1 + (\lambda x_2)\overline{e}_2 + (\lambda x_3)\overline{e}_3. \blacktriangleleft$$

Запровадження базису лінійного простору дозволяє лінійні дії над векторами звести до лінійних дій над числами — їхніми координатами в цьому базисі.

Приклад 8.1. Задано вектори: $\overline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}}, \overline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}}.$ Покажімо, що система векторів $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ утворює базис у двовимірному просторі і знайдімо координати вектора $\overline{c}$ в базисі $\{\overline{a}, \overline{b}\}$.

❍ Вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ неколінеарні, оскільки $\dfrac{4}{3} \neq \dfrac{-2}{5}$. Отже, систему векторів $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ можна взяти за базис у просторі $\mathbb{V}^2$ всіх двовимірних векторів.

Щоб знайти координати вектора $\overline{c}$ в базисі $\{\overline{a}, \overline{b}\}$, треба розв'язати векторне рівняння, яке є векторним записом СЛАР:

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow x\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 1, \\ -2x + 5y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Отже, $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\{\overline{a}, \overline{b}\}}$. ●

Приклад 8.2. Задано вектори $\overline{a} = 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 - \overline{e}_3, \overline{b} = \overline{e}_2 + 4\overline{e}_3$. Знайдімо координати векторів $\overline{a} + \overline{b}, 2\overline{a}$ та $2\overline{a} - \overline{b}$.

❍ Записуємо координати векторів

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}}.$$

Тоді

$$\overline{a}+\overline{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix};\ 2\overline{a}=2\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix};$$

$$2\overline{a}-\overline{b}=\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\-6\end{pmatrix}.\ ●$$

8.2. n-вимірний арифметичний простір*

Упорядковану сукупність n чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ називають n-*вимірним арифметичним вектором* і записують як стовпець $\vec{x}=\left(x_i\right)_n$ або рядок $\overleftarrow{x}=(x_i)_n$.

Рівність арифметичних векторів і лінійні дії над арифметичними векторами означують як рівність стовпців (рядків) і відповідні дії зі стовпцями (рядками):

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{x}\overset{\text{def}}{=}\vec{y}\Leftrightarrow x_i=y_i, i=\overline{1,n};\\ \vec{x}+\vec{y}\overset{\text{def}}{=}\left(x_i+y_i\right)_n;\\ \alpha\vec{x}\overset{\text{def}}{=}\left(\alpha x_i\right)_n.\end{gathered}}$$

Означення 8.2. Множину всіх n-вимірних арифметичних векторів з означеними лінійними діями над ними називають n-*вимірним арифметичним простором* і позначають як $\mathbb{R}^n$.

Твердження 8.3.

① Система n-вимірних арифметичних векторів

$$\boxed{\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\cdots\\0\end{pmatrix},\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\cdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\vec{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\cdots\\1\end{pmatrix}}$$

лінійно незалежна.

② Будь-яка система з $(n+1)$ і більше n-вимірних арифметичних векторів лінійно залежна.

③ Будь-який n-вимірний арифметичний вектор $\vec{x}$ єдиним чином лінійно виражається через вектори $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$.

---

[*] Приклади застосувань подано в п. 12.6.

Система арифметичних векторів $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ утворює базис (його називають *природним*) у просторі $\mathbb{R}^n$. Рівність

$$\boxed{\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n}$$

називають *розкладом вектора* $\vec{x}$ за базисом $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$, а числа $x_1,\ldots,x_n$ — його *координатами* в цьому базисі.

8.3. Прямокутна декартова система координат*

Система координат на прямій

Нехай задано довільну пряму L. Виберімо на ній дві різні точки A та B. Напрямлений відрізок $\overline{AB}$ задає один із двох можливих напрямів на прямій — орієнтує пряму і визначає вектор $\overline{s} = \overline{AB}$. Уважатимо заданий напрям додатним і позначмо його стрілкою (рис. 8.1).

Пряму L, на якій задано *додатний напрям* (яку зорієнтовано) за допомогою вектора s називають *віссю* і позначають $L(\overline{s})$. Вектор $\overline{s}$ називають *напрямним вектором осі*.

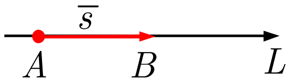


Рис. 8.1

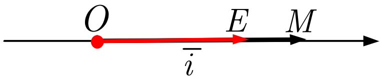


Рис. 8.2

Зафіксуймо на прямій точку O — початок координат — і виберімо за базис ненульовий одиничний вектор $\overline{i} = \overline{OE}$ (рис. 8.2). Кажуть, що на прямій задано *систему координат* Oi. Разом з тим пряма, зорієнтована вектором $\overline{i}$, є віссю.

Розгляньмо довільну точку M на прямій і розкладімо вектор $\overline{OM}$ за базисом $\{\overline{i}\}$:

$$\overline{OM} = x\overline{i}.$$

Означення 8.3. *Координатою точки* M у системі називають координату x вектора $\overline{OM}$ у базисі $\{\overline{i}\}$ і записують

$$\boxed{M = M(x).}$$

Ставлячи у відповідність кожній точці її координату, дістаємо взаємно однозначну відповідність між всіма точками прямої і множиною дійсних чисел. Пряму, на якій задано деяку систему координат, називають *числовою віссю* Ox. Початкова точка O має нульову координату; на одній із двох півосей, на які точка O розбиває числову вісь, координати всіх точок додатні, на другій — від'ємні: маємо *додатну* та *від'ємну* півосі (рис. 8.3).

Рис. 8.3

---

[*] Приклад застосування подано у п. 12.7. Загальну декартову систему координат розглянуто в п. 13.4.

Прямокутна декартова система координат на площині

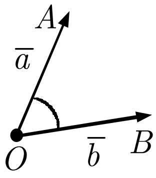


Рис. 8.4

Розгляньмо два ненульові вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$. Відкладімо їх від спільного початку — точки O: $\overline{a} = \overline{OA}, \overline{b} = \overline{OB}$ (рис. 8.4).

Кутом між векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$ вважають величину кута AOB:

$$\boxed{\angle AOB = (\widehat{\overline{a},\overline{b}}).}$$

Очевидно, що

$$0 \le (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) \le \pi.$$

Якщо один або обидва вектори нульові, то кут між ними невизначений.

Кут між однаково напрямленими векторами дорівнює 0; між протилежно напрямленими — π. Якщо кут між ненульовими векторами дорівнює $\frac{\pi}{2}$, то їх називають *перпендикулярними*.

Під кутом між вектором і віссю розуміють кут між вектором і напрямним вектором осі.

Зафіксуймо на площині (у просторі) точку O і розгляньмо довільну точку M.

Означення 8.4. *Радіусом-вектором* точки M (щодо точки O) називають вектор $\overline{r}_M = \overline{OM}$ (рис. 8.5).

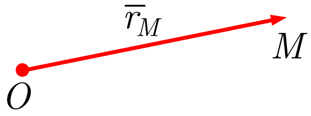


Рис. 8.5

Зауваження 8.1. Якщо на площині вибрано деякий базис, то точці M можна поставити у відповідність упорядковану пару — координати її радіуса-вектора.

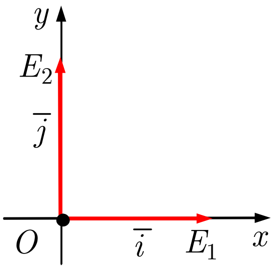


Рис. 8.6

Виберімо за базис векторів площини пару перпендикулярних одиничних векторів (рис 8.6):

$$\overline{i} = \overline{OE_1} \text{ та } \overline{j} = \overline{OE_2}.$$

У цьому разі кажуть, що на площині задано *прямокутну декартову систему координат* (ПДСК) Oij. Точку O називають *початком координат*. Осі, що проходять через початок координат з напрямними векторами $\overline{i}$ та $\overline{j}$, називають *осями координат*: першу — *віссю абсцис* Ox, другу — *віссю ординат* Oy. Площину, на якій задано систему координат, називають *координатною площиною* Oxy.

Розгляньмо довільну точку M на площині і розкладімо її радіус-вектор $\overline{r}_M = \overline{OM}$ за базисом $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ (рис. 8.7):

$$\overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{OM_y} = x\overline{i} + y\overline{j}.$$

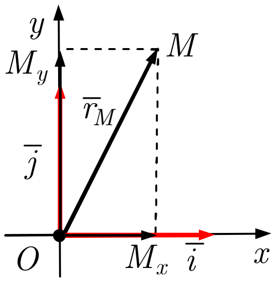


Рис. 8.7

Означення 8.5. *Координатами* точки M у ПДСК Oij називають координати її радіуса-вектора $\overline{r}_M$ у базисі $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ і записують

$$\boxed{M = M(x;y).}$$

Першу координату називають *абсцисою*, другу — *ординатою*.

Координатні осі розбивають площину на чотири частини, які називають *координатними чвертями* (*квадрантами*). Кожній чверті відповідає певна комбінація знаків координат (рис. 8.8).

Розгляньмо лінії, які мають у ПДСК найпростіший вигляд,— їх ще називають *координатними лініями*.

Координатними лініями, тобто лініями з найпростішими рівняннями у ПДСК, є вертикальні прямі $x = a, a \in \mathbb{R}$, та горизонтальні прямі $y = b, b \in \mathbb{R}$ (рис. 8.9).

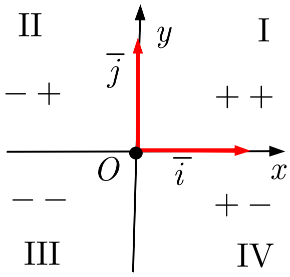


Рис. 8.8

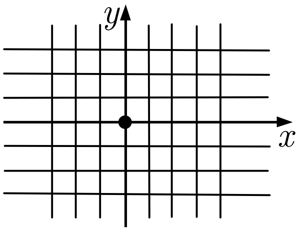


Рис. 8.9

Прямокутна декартова система координат у просторі

Зафіксуймо у просторі точку O і виберімо за базис трійку взаємно перпендикулярних одиничних векторів (рис. 8.10):

$$\overline{i} = \overline{OE_1},\ \overline{j} = \overline{OE_2} \text{ та } \overline{k} = \overline{OE_3}.$$

У цьому разі кажуть, що у просторі задано *прямокутну декартову систему координат* $Oijk$ ($Oxyz$). Точку O називають *початком координат*. Осі, що проходять через початок координат з напрямними векторами $\overline{i}, \overline{j}$ та $\overline{k}$, називають *осями координат*: першу — *віссю абсцис* Ox, другу — *віссю ординат* Oy, третю — *віссю аплікат* Oz. Площини, що проходять через осі координат, називають *координатними площинами*, відповідно Oxy, Oxz та Oyz.

Координатні площини розбивають простір на вісім частин — *октантів*, які нумерують як на рис. 8.11 (у першому октанті — всі три координати додатні,...).

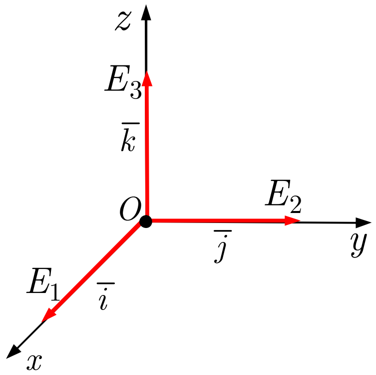


Рис. 8.10

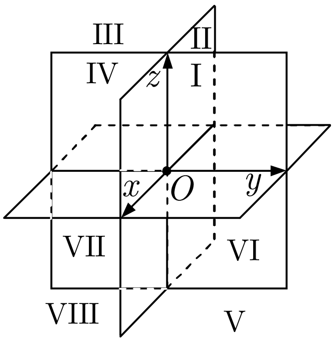


Рис. 8.11

Розгляньмо довільну точку M у просторі і розкладімо її радіус-вектор $\overline{r}_M = \overline{OM}$ за базисом $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ (рис. 8.12):

$$\overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{OM_y} + \overline{OM_z} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}.$$

Означення 8.6. *Координатами* точки M у ПДСК $Oijk$ називають координати її радіуса-вектора $\overline{r}_M$ у базисі $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ і записують

$$\boxed{M = M(x; y; z).}$$

Першу координату називають *абсцисою*, другу — *ординатою*, третю — *аплікатою*.

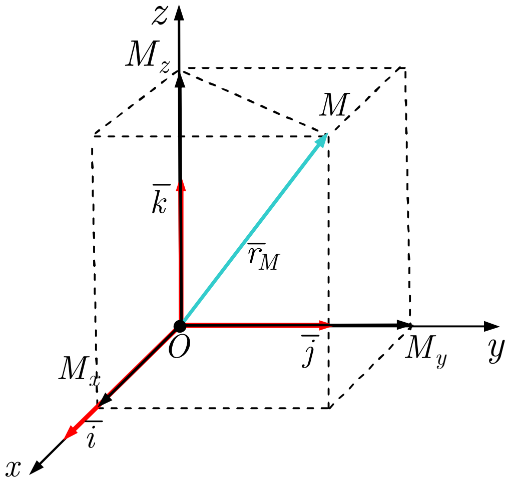


Рис. 8.12

8.4. Найпростіші задачі аналітичної геометрії

Координати вектора

Нехай у ПДСК $Oxyz$ задано дві точки $A(x_A;y_A;z_A)$ та $B(x_B;y_B;z_B)$. З означення координат точки і теореми 8.2 маємо (рис. 8.13):

$$\overline{AB} = \overline{r}_B - \overline{r}_A = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

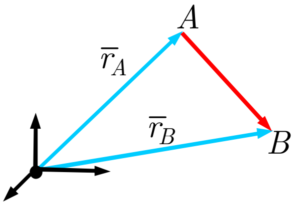


Рис. 8.13

Висновок. Щоб знайти координати вектора, треба від координат його кінця відняти координати початку.

Це ж правило правдиве й для просторів вимірності 1 та 2 — на прямій і на площині відповідно.

Поділ відрізка в заданому відношенні*

Кажуть, що точка M поділяє відрізок A_1A_2 у відношенні $\lambda \neq -1$, якщо виконано співвідношення

$$\overline{A_1M} = \lambda\overline{MA_2}.$$

Нехай точка $M(x;y;z)$ поділяє відрізок A_1A_2, який з'єднує точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$ та $A_2(x_2;y_2;z_2)$, у відношенні λ (рис. 8.14). Розгляньмо вектори $\overline{A_1M}$ та $\overline{MA_2}$.

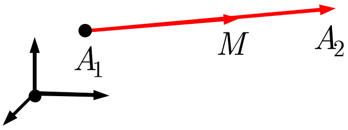


Рис. 8.14

Оскільки

$$\overline{A_1M} = \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix}; \ \overline{MA_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \\ z_2 - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_2 - x) \\ \lambda(y_2 - y) \\ \lambda(z_2 - z) \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

---

[*] Приклад застосування подано у п. 12.4.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y); \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\lambda)x = (x_1 + \lambda x_2); \\ (1+\lambda)y = (y_1 + \lambda y_2); \\ (1+\lambda)z = (z_1 + \lambda z_2). \end{cases}$$

Якщо $\lambda = -1$, то $A_1M + MA_2 = 0$, тобто $A_1A_2 = 0$ (маємо випадок виродженого відрізка — немає що ділити).

Отже, для ненульового відрізка, якщо $\lambda \neq -1$, маємо

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.} \qquad (8.1)$$

Зауваження 8.3.

1. Якщо $\lambda = 0$, то це означає, що точки A_1 та M збігаються (рис. 8.15).

2. Якщо $\lambda > 0$, то точка M лежить усередині відрізка A_1A_2 (рис. 8.15).

3. Якщо $\lambda < 0$, то точка M лежить ззовні відрізка A_1A_2 і кажуть, що вона поділяє відрізок зовнішнім чином (рис. 8.15).

4. Якщо $\lambda = 1$, точка M є серединою відрізка A_1A_2 (рис. 8.15).

Отже, координати середини відрізка A_1A_2 знаходять за формулами:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}.} \qquad (8.2)$$

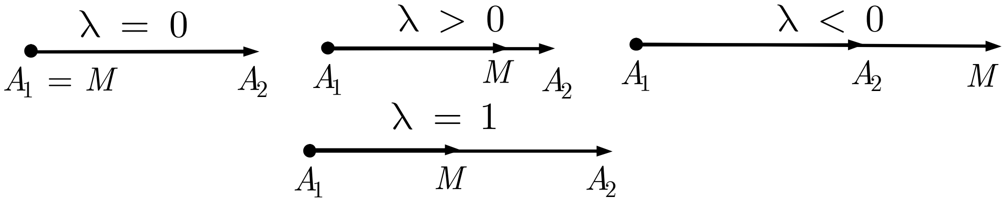


Рис. 8.15

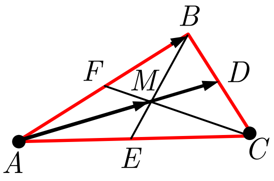


Рис. 8.16

Приклад 8.2. Знайдімо координати вектора $\overline{AB}$, середини відрізка BC і точки перетину медіан M трикутника ABC з вершинами $A(2;1;3)$, $B(4;3;4), C(8;-1;4)$ (рис. 8.16).

❍ Координати вектора $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 3-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Середина відрізка BC точка D має координати:

$$\left.\begin{aligned} x_D &= \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4+8}{2} = 6;\\ y_D &= \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3-1}{2} = 1;\\ z_D &= \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{4+4}{2} = 4. \end{aligned}\right\} \Rightarrow D(6;1;4).$$

Точка M поділяє відрізок AD у відношенні $\lambda = 2$. Отже, точка M має координати:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + 2x_D}{1+2} = \frac{2+2\cdot 6}{3} = \frac{14}{3};\\ y_M &= \frac{y_A + 2y_D}{1+2} = \frac{1+2\cdot 1}{3} = 1;\\ z_M &= \frac{z_A + 2z_D}{1+2} = \frac{3+2\cdot 4}{3} = \frac{11}{3}. \end{aligned}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{14}{3};1;\frac{11}{3}\right).\bullet$$

9. Скалярне множення геометричних векторів

9.1. Проекція вектора на вісь

Ортогональною проекцією точки M простору (площини) на пряму L називають точку M' перетину прямої із площиною (прямою), що проходить через точку M перпендикулярно до прямої L (рис. 9.1, рис. 9.2).

Нехай задано вісь L з напрямним вектором $\overline{s}$. Розгляньмо вектор $\overline{a} = \overline{AB}$. Ортогональними проекціями точок A та B на вісь L є відповідно точки A' та B' (рис. 9.3).

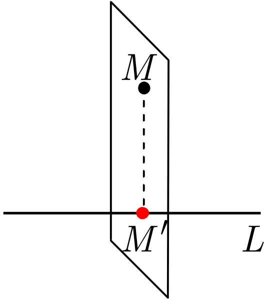


Рис. 9.1

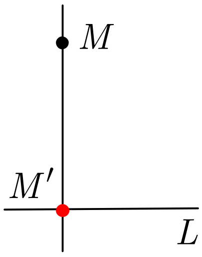


Рис. 9.2

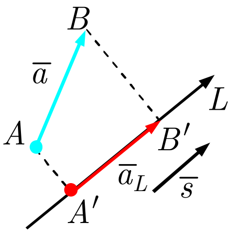


Рис. 9.3

Векторною проекцією вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ *на вісь* $L \parallel \overline{s}$ називають вектор

$$\boxed{\overline{a}_L = \overline{A'B'}.}$$

Означення 9.1. *Проекцією* (*скалярною проекцію*) вектора $\overline{a}=\overline{AB}$ *на вісь* L з напрямним вектором $\overline{s}$ називають число

$$\boxed{\operatorname{pr}_L\overline{a}=\operatorname{pr}_{\overline{s}}\overline{a}=\lambda,}$$

таке, що

$$\overline{A'B'}=\lambda\overline{s}^0,\overline{s}^0=\frac{\overline{s}}{\left|\overline{s}\right|}.$$

Число $\operatorname{pr}_{\overline{s}}\overline{a}$ називають ще проекцією вектора $\overline{a}$ на напрям вектора $\overline{s}$, причому:

$$\operatorname{pr}_{\overline{s}}\overline{a}=\begin{cases}\left|\overline{A'B'}\right|, & \text{якщо } \overline{s}\uparrow\uparrow\overline{A'B'},\\ 0, & (\widehat{\overline{s},\overline{A'B'}})=\dfrac{\pi}{2},\\ -\left|\overline{A'B'}\right|, & \text{якщо } \overline{s}\uparrow\downarrow\overline{A'B'}.\end{cases}$$

Твердження 9.1 (*властивості проекції вектора*).

① Проекція вектора $\overline{a}$ на вісь $L(\overline{s})$ дорівнює добуткові довжини вектора $\overline{a}$ на косинус кута між вектором $\overline{a}$ та віссю (рис. 9.4):

$$\boxed{\operatorname{pr}_L\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cos(\widehat{\overline{a},L})=\left|\overline{a}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{s}}).}$$

② Рівні вектори мають рівні проекції на одну й ту саму вісь:

$$\boxed{\overline{a}=\overline{b}\Leftrightarrow\operatorname{pr}_L\overline{a}=\operatorname{pr}_L\overline{b}.}$$

③ Проекція суми векторів на довільну вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь (рис. 9.5):

$$\boxed{\operatorname{pr}_L(\overline{a}+\overline{b})=\operatorname{pr}_L\overline{a}+\operatorname{pr}_L\overline{b}.}$$

④ Якщо помножити вектор на число, то проекція вектора на вісь теж помножиться на це число (рис. 9.6):

$$\boxed{\operatorname{pr}_L(\lambda\overline{a})=\lambda\operatorname{pr}_L\overline{a}.}$$

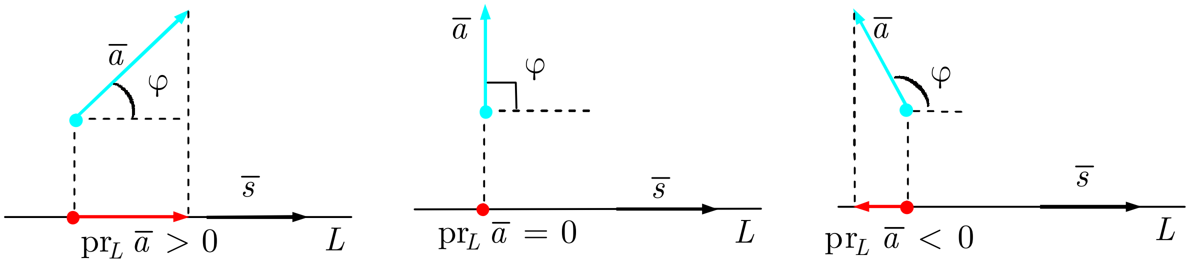


Рис.9.4

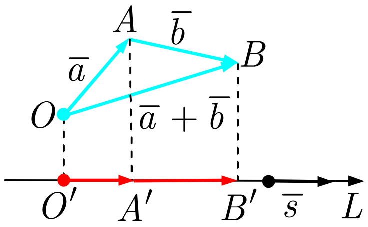


Рис. 9.5

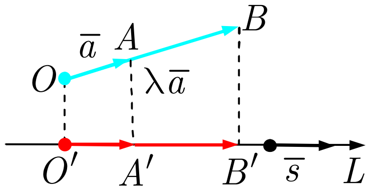


Рис. 9.6

▶ ① Якщо $\varphi = (\widehat{\bar a, \bar s}) < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{pr}_L \bar a = \left|\bar a\right| \cos\varphi$.

Якщо $\varphi = (\widehat{\bar a, \bar s}) = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{pr}_L \bar a = 0 = \left|\bar a\right| \cos\varphi$.

Якщо $\varphi = (\widehat{\bar a, \bar s}) > \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{pr}_L \bar a = -\left|\bar a\right| \cos(\pi - \varphi) = \left|\bar a\right| \cos\varphi$.

② Справді, якщо $\bar a = \bar b$, то $\left|\bar a\right| = \left|\bar b\right|$ та $(\widehat{\bar a, L}) = (\widehat{\bar b, L})$, звідси із властивості 1 випливає, що $\operatorname{pr}_L \bar a = \operatorname{pr}_L \bar b$.

② Утворімо ламану OAB з ланками $\overline{OA} = \bar a$ та $\overline{AB} = \bar b$ (рис. 9.5). Спроектувавши точки O, A, B на вісь $L(\bar s)$, дістанемо точки O', A', B'.

Нехай $\lambda = \operatorname{pr}_L \bar a$ та $\mu = \operatorname{pr}_L \bar b$. Тоді $\overline{O'A'} = \lambda \bar s^0, \overline{A'B'} = \mu \bar s^0$. Звідси

$$\overline{O'B'} = (\lambda + \mu)\bar s,$$

але ця рівність означає, що $\lambda + \mu$ є проекцією вектора $\overline{OB} = \bar a + \bar b$. Тобто

$$\operatorname{pr}_L(\bar a + \bar b) = \operatorname{pr}_L \bar a + \operatorname{pr}_L \bar b.$$

③ У разі $\lambda = 0$ властивість очевидна — проекція нуль-вектора дорівнює нулю.

Нехай вектор $\bar a = \overline{AB}$ утворює з віссю L кут α і нехай $\lambda > 0$. Тоді вектор $\lambda \bar a$ утворює з віссю L той самий кут α, а вектор $(-\lambda \bar a)$ — кут $(\pi - \alpha)$. Тоді із властивості 1 випливає, що

$$\operatorname{pr}_L(\lambda \bar a) = \left|\lambda \overline{AB}\right| \cos\alpha = \lambda \left|\overline{AB}\right| \cos\alpha = \lambda \operatorname{pr}_L \bar a;$$
$$\operatorname{pr}_L(-\lambda \bar a) = \left|-\lambda \overline{AB}\right| \cos(\pi - \alpha) = -\lambda \left|\overline{AB}\right| \cos\alpha = -\lambda \operatorname{pr}_L \bar a. \blacktriangleleft$$

Наслідок із твердження 9.2. Лінійним діям над векторами відповідають такі самі лінійні дії над проекціями цих векторів на довільну вісь.

9.2. Скалярний добуток двох векторів

Означення 9.2. *Скалярним добутком*[*] двох *векторів* $\bar a$ та $\bar b$ називають число, що дорівнює добуткові довжин цих векторів на косинус кута між ними і позначають

$$\boxed{(\bar a, \bar b) \overset{\text{def}}{=} \left|\bar a\right| \left|\bar b\right| \cos(\widehat{\bar a, \bar b}).}$$

---

[*] Приклад простору зі скалярним добутком (евклідового простору) подано в п. 13.7.

Якщо хоча б один з векторів нульовий, то кут не визначений, і скалярний добуток вважають рівним нулю.

Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ позначають ще як $\overline{a}\cdot\overline{b}$.

Вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називають *ортогональними*, якщо $(\overline{a},\overline{b})=0$ і позначають $\overline{a}\perp\overline{b}$. Нульовий вектор є ортогональним (і його можна вважати перпендикулярним) до будь-якого вектора.

З означення 9.2 скалярного добутку і твердження 9.1 випливає, що

$$\boxed{(\overline{a},\overline{b})=\left|\overline{a}\right|\operatorname{pr}_{\overline{a}}\overline{b}=\left|\overline{b}\right|\operatorname{pr}_{\overline{b}}\overline{a}.}$$

Твердження 9.2 (*властивості скалярного множення*). Для будь-яких векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ та будь-яких дійсних чисел α та β:

① $(\overline{a},\overline{b})=(\overline{b},\overline{a})$ (*комутативність скалярного множення*);

② $(\alpha\overline{a},\beta\overline{b})=\alpha\beta(\overline{a},\overline{b})$ (*однорідність скалярного множення*);

③ $\left.\begin{array}{l}(\overline{a}+\overline{b},\overline{c})=(\overline{a},\overline{c})+(\overline{b},\overline{c}),\\ (\overline{a},\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a},\overline{b})+(\overline{a},\overline{c}).\end{array}\right\}$ (*дистрибутивність скалярного множення*);

④ $(\overline{a},\overline{a})=\left|\overline{a}\right|^2\ge 0,(\overline{a},\overline{a})=0\Leftrightarrow\overline{a}=\overline{0}$ (*додатна визначеність скалярного добутку*).

Наслідки із твердження 9.2.

① Завдяки властивостям скалярного добутку лінійні комбінації векторів можна перемножувати скалярно як лінійні многочлени.

② Правдива формула для довжини вектора:

$$\boxed{\left|\overline{a}\right|=\sqrt{(\overline{a},\overline{a})}.}$$

Приклад 9.1. Знаючи, що $\left|\overline{a}\right|=2,\left|\overline{b}\right|=5,(\widehat{\overline{a},\overline{b}})=\dfrac{\pi}{3}$, обчислімо: 1) $(\overline{a},\overline{b})$; 2) $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|$; 3) $\operatorname{pr}_{\overline{b}}\overline{a}$; 4) $\operatorname{pr}_{\overline{b}}(2\overline{a}+3\overline{b})$.

❍ 1. $(\overline{a},\overline{b})=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}})=2\cdot 5\cos\dfrac{\pi}{3}=5.$

2. Використовуючи властивості лінійності та комутативності скалярного добутку, маємо:

$$\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=\sqrt{(\overline{a}+\overline{b},\overline{a}+\overline{b})}=\sqrt{(\overline{a},\overline{a})+(\overline{b},\overline{a})+(\overline{a},\overline{b})+(\overline{b},\overline{b})}=$$
$$=\sqrt{\left|\overline{a}\right|^2+2(\overline{a},\overline{b})+\left|\overline{b}\right|^2}=\sqrt{2^2+2\cdot 5+5^2}=\sqrt{39}.$$

3. $\operatorname{pr}_{\overline{b}}\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}})=2\cos\dfrac{\pi}{3}=1.$

4. $\operatorname{pr}_{\overline{b}}(2\overline{a}+3\overline{b})=2\operatorname{pr}_{\overline{b}}\overline{a}+3\operatorname{pr}_{\overline{b}}\overline{b}=2\cdot 1+3\cdot 5=17.$●

Зауваження 9.1.
1. Скалярний добуток двох векторів є числом — об’єктом іншої природи ніж множники.
2. Рівність $(\overline{x},\overline{y}) = 0$ виконано не лише для $\overline{x} = \overline{0}$ або $\overline{y} = \overline{0}$, а й для ненульових перпендикулярних векторів.
3. Можна запровадити лише «скалярний квадрат» вектора: $\overline{x}^2 = (\overline{x},\overline{x})$. Не існує скалярного добутку трьох і більше векторів.

Скалярний добуток в ортонормованому базисі

Означення 9.3. Базис називають *ортонормованим*, якщо його вектори попарно ортогональні і мають одиничну довжину.

З означення випливає, що вектори ортонормованого базису

$$\overline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}}, \overline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}}, \overline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}}$$

справджують таку таблицю скалярного множення:

$(,)$	$\overline{i}$	$\overline{j}$	$\overline{k}$
$\overline{i}$	1	0	0
$\overline{j}$	0	1	0
$\overline{k}$	0	0	1

.

Нехай задано координати векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ в ортонормованому базисі $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$:

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_{\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}};$$

$$\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}_{\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}}.$$

За властивостями скалярного добутку маємо

$$\begin{gathered} (\overline{a},\overline{b}) = (a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}, b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}) = \\ = a_xb_x(\overline{i},\overline{i}) + a_yb_y(\overline{j},\overline{j}) + a_zb_z(\overline{k},\overline{k}) + \\ +(a_xb_y + a_yb_x)(\overline{i},\overline{j}) + (a_xb_z + a_zb_x)(\overline{i},\overline{k}) + \\ +(a_yb_z + a_zb_y)(\overline{j},\overline{k}). \end{gathered}$$

З таблиці скалярного множення випливає, що

$$\boxed{(\overline{a},\overline{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \overleftarrow{a}\cdot\vec{b}.}$$

Тоді довжину вектора $\overline{a}$ зі стовпцем координат $\vec{a}$ в ортонормованому базисі можна знайти за формулою:

$$\boxed{\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}.}$$

Приклад 9.2. Знайдімо $(\overline{a},\overline{b}), \left|\overline{a}\right|, \operatorname{pr}_{\overline{a}}\overline{b}$ для векторів $\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

❍ $$(\overline{a},\overline{b}) = \overleftarrow{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\cdot 3 + (-1)\cdot 1 + 5\cdot 1 = 10;$$

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{30};$$

$$\operatorname{pr}_{\overline{a}}\overline{b} = \frac{(\overline{a},\overline{b})}{\left|\overline{a}\right|} = \frac{10}{\sqrt{30}}.\bullet$$

9.3. Напрямні косинуси вектора*

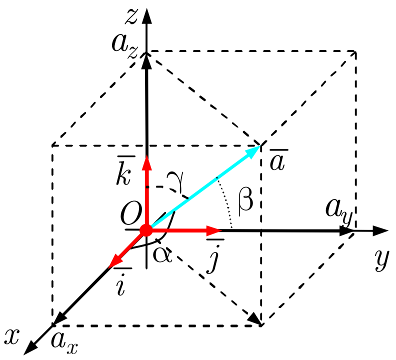


Рис. 9.7

Розгляньмо ПДСК з ортонормованим базисом $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$ (рис. 9.7) і вектор

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_{\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}}.$$

Помножмо вектор $\overline{a}$ скалярно послідовно на вектори $\overline{i},\overline{j}$ та $\overline{k}$ і врахуймо означення скалярного добутку та проекції вектора на напрям:

$$\begin{aligned}
(\overline{a},\overline{i}) &= \left|\overline{a}\right|\left|\overline{i}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{i}}) = \left|\overline{a}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{i}}) = \operatorname{pr}_{\overline{i}}\overline{a} = a_x;\\
(\overline{a},\overline{j}) &= \left|\overline{a}\right|\left|\overline{j}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{j}}) = \left|\overline{a}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{j}}) = \operatorname{pr}_{\overline{j}}\overline{a} = a_y;\\
(\overline{a},\overline{k}) &= \left|\overline{a}\right|\left|\overline{k}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{k}}) = \left|\overline{a}\right|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{k}}) = \operatorname{pr}_{\overline{k}}\overline{a} = a_z.
\end{aligned}$$

Твердження 9.3. Координати вектора в ортонормованому базисі дорівнюють проекціям вектора на координатні осі.

Якщо вектор утворює гострий (тупий) кут з координатною віссю, то його відповідна координата додатна (від'ємна).

---

[*] Приклад застосування подано в п. 12.5.

Числа

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos(\widehat{\overline{a},\overline{i}}) = \frac{(\overline{a},\overline{i})}{|\overline{a}|} = \frac{a_x}{|\overline{a}|},\\ \cos\beta &= \cos(\widehat{\overline{a},\overline{j}}) = \frac{(\overline{a},\overline{j})}{|\overline{a}|} = \frac{a_y}{|\overline{a}|},\\ \cos\gamma &= \cos(\widehat{\overline{a},\overline{k}}) = \frac{(\overline{a},\overline{k})}{|\overline{a}|} = \frac{a_z}{|\overline{a}|}\end{aligned}} \qquad (9.1)$$

називають *напрямними косинусами* вектора $\overline{a}$.

Орт $\overline{a}^0$ вектора $\overline{a}$ має координати:

$$\overline{a}^0 = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_x}{|\overline{a}|} \\ \dfrac{a_y}{|\overline{a}|} \\ \dfrac{a_z}{|\overline{a}|} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}}.$$

Ураховуючи формули (9.1), одержимо співвідношення

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}{|\overline{a}|^2} = 1.}$$

Приклад 9.3. Для вектора $\overline{a} = \overline{i} + \sqrt{2}\overline{j} - \overline{k}$ знайдімо напрямні косинуси і координати його орту.

❍ $\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, |\overline{a}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = 2;$

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{2}\overline{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}. \bullet$$

9.4. Застосування скалярного добутку

Довжина вектора

$$\boxed{\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(\overline{a},\overline{a})}.}$$

Довжина відрізка

$$\boxed{\left|AB\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.}$$

Кут між ненульовими векторами

$$\boxed{\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \frac{(\overline{a},\overline{b})}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|};}$$

$$\boxed{(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \arccos\frac{(\overline{a},\overline{b})}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|}.}$$

Проекція вектора

$$\boxed{\mathrm{pr}_{\overline{a}}\,\overline{b} = \frac{(\overline{a},\overline{b})}{\left|\overline{a}\right|}.}$$

Критерій перпендикулярності векторів

Скалярний добуток векторів дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли вектори перпендикулярні.

$$\boxed{(\overline{a},\overline{b}) = 0 \Leftrightarrow (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \frac{\pi}{2}.}$$

Робота сталої сили

Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно з положення B у положення C під дією сталої сили $\overline{F}$, що утворює кут φ з вектором переміщенням $\overline{s} = \overline{BC}$ (рис. 9.8).

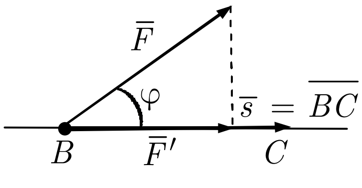


Рис. 9.8

Роботу сили $\overline{F}$ під час переміщення $\overline{s}$ обчислюють за формулою

$$\boxed{A = \left|\overline{F}\right|\cos\varphi \cdot \left|\overline{s}\right| = (\overline{F},\overline{s}).}$$

10. Векторне множення векторів

10.1. Орієнтація в геометричних просторах

Щоб запровадити орієнтацію на прямій, площині, просторі треба скористатись певними фізичними міркуваннями.

Приміром, на прямій, зображеній на рисунку горизонтальною лінією, можна вибрати напрям «зліва направо» і назвати його додатним напрямом («додатною орієнтацією»). Однак, треба розуміти, що фіксація цього напряму залежить від того, з якого боку дивитись на рисунок, якщо перевернути його «догори ногами», то додатний напрям перейде у від'ємний. На вертикальних прямих за додатний вважають зазвичай напрям знизу догори (рис. 10.1).

Орієнтацію площини вважаємо *додатною*, якщо «найкоротший поворот» від першого вектора до другого відбувається проти руху годинникової стрілки, у противному разі — *від'ємною* (рис. 10.2).

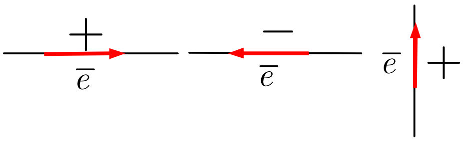


Рис. 10.1

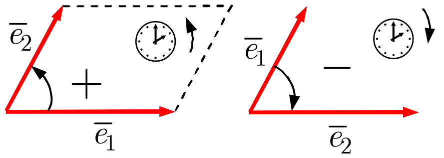


Рис. 10.2

Надалі, розглядаючи системи координат, припускатимемо, що базисні вектори задають додатну орієнтацію.

1. У просторі $\mathbb{V}^1$ — на прямій — фіксують який-небудь базис $\{\overline{e}\}, \overline{e} \neq \overline{0}$. Усі базиси $\{\lambda\overline{e}\}, \lambda > 0$, вважаємо додатними, а базиси $\{\lambda\overline{e}\}, \lambda < 0,$ — від'ємними. Якщо цей простір зображуємо горизонтальною прямою, то додатним напрямом на ній вважатимемо напрям зліва направо (див. рис. 10.1).

2. У просторі $\mathbb{V}^2$ — на площині — базис $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ задає додатну орієнтацію, якщо найкоротший перехід від $\overline{e}_1$ до $\overline{e}_2$ відбувається проти руху годинникової стрілки, і ліву (від'ємну), коли за рухом годинникової стрілки (лише тому, що ми так домовились) (див. рис. 10.2).

3. У просторі $\mathbb{V}^3$ базис $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ задає праву орієнтацією, яку вважатимемо додатною, якщо найкоротший перехід від вектора $\overline{e}_1$ до вектора $\overline{e}_2$ відбувається проти руху годинникової стрілки, коли дивитись на них з кінця вектора $\overline{e}_3$, а від'ємною — ліву, де найкоротший перехід відбувається за рухом годинникової стрілки (рис. 10.3). Вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ правого базису утворюють *праву трійку*, а вектори лівого базису — *ліву трійку* (на рис. 10.4 вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ лівої руки утворюють ліву трійку, а вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ правої руки — праву трійку).

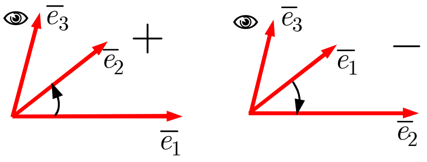


Рис. 10.3

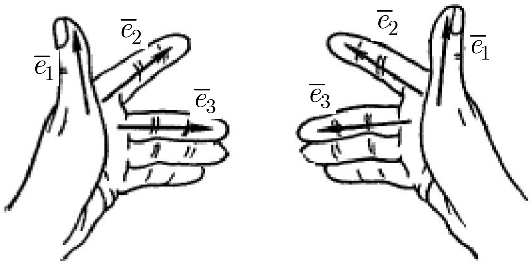


Рис. 10.4

10.2. Векторний добуток векторів

Означення 10.1. *Векторним добутком векторів* $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називають вектор $\overline{c}$, який:

1) перпендикулярний до векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$;

2) завдовжки дорівнює добуткові довжин векторів на синус кута між ними:

$$\boxed{|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin(\widehat{\overline{a},\overline{b}});}$$

3) напрямлений так, що вектори $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ утворюють праву трійку (рис. 10.5).

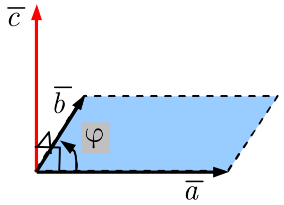


Рис. 10.5

Векторний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ позначають $[\overline{a},\overline{b}]$ або $\overline{a}\times\overline{b}$.

Векторний добуток колінеарних векторів вважають рівним нульовому вектору, зокрема

$$\boxed{[\overline{a},\overline{a}] = \overline{0}.}$$

Зауваження 10.1.

1. Векторний добуток $[\overline{a},\overline{b}]$ неколінеарних векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ перпендикулярний до площини, що визначається векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

2. Довжина вектора $[\overline{a},\overline{b}]$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$ (рис. 10.5).

Твердження 10.1 (*властивості векторного множення*). Для будь-яких трьох векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ і дійсних чисел α та β:

① $[\overline{a},\overline{b}] = -[\overline{b},\overline{a}]$ (*антикомутативність векторного множення*);

② $[\alpha\overline{a},\beta\overline{b}] = \alpha\beta[\overline{a},\overline{b}]$ (*однорідність векторного множення*);

③ $\left.\begin{array}{l}[\overline{a}+\overline{b},\overline{c}] = [\overline{a},\overline{c}]+[\overline{b},\overline{c}],\\ [\overline{a},\overline{b}+\overline{c}] = [\overline{a},\overline{b}]+[\overline{a},\overline{c}]\end{array}\right\}$ (*дистрибутивність векторного множення*).

Приклад 10.1. Знайдімо довжину вектора $[2\overline{a}-3\overline{b},3\overline{a}+4\overline{b}]$, якщо

$$\left|\overline{a}\right|=2,\ \left|\overline{b}\right|=5,\ \widehat{(\overline{a},\overline{b})}=\frac{\pi}{6}.$$

❍Скористаймося властивостями дистрибутивності, однорідності та антикомутативності векторного добутку:

$$\left|[2\overline{a}-3\overline{b},3\overline{a}+4\overline{b}]\right|=\left|[2\overline{a},3\overline{a}]+[-3\overline{b},3\overline{a}]+[2\overline{a},4\overline{b}]+[-3\overline{b},4\overline{b}]\right|=$$

$$=\left|-9[\overline{b},\overline{a}]+8[\overline{a},\overline{b}]\right|=\left|9[\overline{a},\overline{b}]+8[\overline{a},\overline{b}]\right|=\left|17[\overline{a},\overline{b}]\right|=$$

$$=17\left|[\overline{a},b]\right|=17\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\widehat{(\overline{a},\overline{b})}=17\cdot 2\cdot 5\sin\frac{\pi}{6}=85.●$$

Зауваження 10.2.

1. На відміну від скалярного добутку векторів векторний добуток — антикомутативний.

2. Рівняння $[\overline{a},\overline{x}]=\overline{b},\overline{a}\neq\overline{0}$, або не має розв'язків, або має їх нескінченно багато. А рівняння $[\overline{a},\overline{x}]=\overline{a}$ розв'язків не має.

3. Рівність $[\overline{x},\overline{y}]=\overline{0}$ виконується не лише для нульових векторів, а й для ненульових колінеарних векторів.

4. Оскільки $[\overline{a},\overline{a}]=\overline{0}$, то векторний степінь не розглядають.

5. Векторний добуток, взагалі кажучи, не асоціативний, тобто

$$[[\overline{x},\overline{y}],\overline{z}]\neq[\overline{x},[\overline{y},\overline{z}]].$$

Векторний добуток в ортонормованому базисі

Нехай задано правий ортонормований базис $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$. Із властивостей векторного добутку випливає, що таблиця векторного множення координатних ортів виглядає так (першим вибирається рядок):

$[,]$	$\overline{i}$	$\overline{j}$	$\overline{k}$
$\overline{i}$	$\overline{0}$	$\overline{k}$	$-\overline{j}$
$\overline{j}$	$-\overline{k}$	$\overline{0}$	$\overline{i}$
$\overline{k}$	$\overline{j}$	$-\overline{i}$	$\overline{0}$

.

Нехай задано вектори

$$\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}\ \text{та}\ \overline{b}=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}.$$

Перемножмо їх векторно, враховуючи властивості векторного добутку та ортонормованість базису:

$$\begin{aligned}
[\overline{a},\overline{b}] &= [a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}, b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}] = \\
&= a_x b_x[\overline{i},\overline{i}] + a_x b_y[\overline{i},\overline{j}] + a_x b_z[\overline{i},\overline{k}] + \\
&+ a_y b_x[\overline{j},\overline{i}] + a_y b_y[\overline{j},\overline{j}] + a_y b_z[\overline{j},\overline{k}] + \\
&+ a_z b_x[\overline{k},\overline{i}] + a_z b_y[\overline{k},\overline{j}] + a_z b_z[\overline{k},\overline{k}] = \\
&= \overline{0} + a_x b_y\overline{k} - a_x b_z\overline{j} - a_y b_x\overline{k} + \overline{0} + a_y b_z\overline{i} + a_z b_x\overline{j} - a_z b_y\overline{i} + \overline{0} = \\
&= (a_y b_z - a_z b_y)\overline{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\overline{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\overline{k}.
\end{aligned}$$

Далі врахуємо вирази для визначників 2-го порядку та означення визначника:

$$\boxed{[\overline{a},\overline{b}]} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\overline{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\overline{k} = \boxed{\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}.$$

Приклад 10.2. Обчислімо векторний добуток векторів

$$\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k} \text{ та } \overline{b} = 4\overline{i} + 5\overline{j} + 6\overline{k}.$$

$$○\,[\overline{a},\overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3\overline{i} + 6\overline{j} - 3\overline{k}.●$$

10.3. Застосування векторного добутку

Площа паралелограма*

Розгляньмо паралелограм і трикутник, побудований на неколінеарних векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$, і висоту на сторону, що збігається з вектором $\overline{a}$.

$$\boxed{S_{\varparallelogram} = \left|[\overline{a},\overline{b}]\right|.}$$

Площа трикутника

$$\boxed{S_{\triangle} = \frac{1}{2}\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|.}$$

Висота паралелограма (трикутника)

$$\boxed{h = \left|\text{pr}_{[\overline{a},\overline{b}]}\overline{b}\right| = \frac{\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|}{\left|\overline{a}\right|}.}$$

---

* Площу паралелограма, побудованого на плоских векторах $\overline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ та $\overline{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$, знаходять за формулою $S_{\varparallelogram} = \left|\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right|$.

Критерій колінеарності векторів

Два вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ колінеарні тоді й лише тоді, коли їхній векторний добуток є нульовим вектором, тобто

$$\boxed{\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow [\overline{a},\overline{b}\,] = \overline{0}.}$$

Момент інерції сили щодо точки[*]

Нехай $\overline{F} = \overline{AB}$ — вектор сили, прикладеної до точки A (рис. 10.6). *Моментом* $\overline{M}$ *сили* $\overline{F}$ *щодо точки* O називають вектор

$$\boxed{\overline{M}_O(\overline{F}) = [\overline{OA},\overline{F}].}$$

Довжина моменту $\left|\overline{M}\right|$ не залежить від точки A прикладання сили $\overline{F}$ на її лінії дії L. Справді,

$$\left|\overline{M}\right| = \left|[\overline{OA},\overline{F}]\right| = \left|\overline{F}\right|h,$$

де $h = OC$ — перпендикуляр до L. Величина h від точки A не залежить.

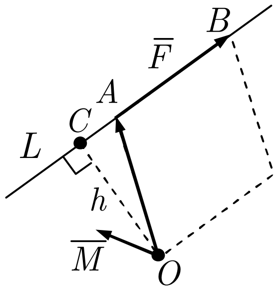


Рис. 10.6

10.4. Мішаний добуток трьох векторів

Означення 10.2. *Мішаним* (*векторно-скалярним*) *добутком векторів* $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ називають число — скалярний добуток векторного добутку векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ на вектор $\overline{c}$ і позначають:

$$\boxed{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \overset{\text{def}}{=} ([\overline{a},\overline{b}\,],\overline{c}).}$$

У просторі $\mathbb{V}^3$ кожна трійка некомпланарних векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$, прикладених до однієї точки, визначає паралелепіпед (рис. 10.7), ребрами якого є ці вектори.

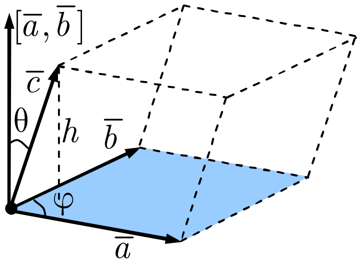


Рис. 10.7

Твердження 10.2.

① Модуль мішаного добутку $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$.

② Мішаний добуток $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ додатний, якщо трійка $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ права, і від'ємний, якщо вона ліва.

③ Мішаний добуток векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ дорівнює нулю, якщо вектори $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ компланарні.

---

[*] Приклади інших фізичних застосувань векторного добутку подано в п. 12.8.

► ① З означення мішаного добутку випливає, що

$$\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right| = \left|[\overline{a},\overline{b}]\right|\left|\overline{c}\right|\cos\theta = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\varphi\cdot\left|\overline{c}\right|\cos\theta.$$

Проте, об’єм паралелепіпеда дорівнює добуткові площі основи $\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\varphi$ на висоту $\left|\overline{c}\right|\cos\theta$.

② Знак мішаного добутку збігається зі знаком $\cos\theta$, і тому мішаний добуток додатний, якщо трійка $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ права, і від’ємний, якщо ліва.

③ Якщо хоча б один з векторів нульовий, то властивість очевидна.

Нехай тепер жоден з векторів-співмножників не нульовий. Тоді $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 0$, коли $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (а, отже, вектор $\overline{c}$ лежить у площині векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$) або $[\overline{a},\overline{b}] = \overline{0}$, (а, отже, вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ — колінеарні, тобто вектори $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ — компланарні). ◄

Твердження 10.3 (*властивості мішаного добутку*). Для будь-яких векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ і дійсних чисел α та β правдиві тотожності:

① $([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}) = (\overline{a},[\overline{b},\overline{c}])$, тобто у мішаному добутку знаки векторного та скалярного добутків можна міняти місцями, що дозволяє позначати мішаний добуток як $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$;

② $([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}) = ([\overline{c},\overline{a}],\overline{b}) = ([\overline{b},\overline{c}],\overline{a})$, тобто циклічне переставляння співмножників не змінює мішаного добутку;

③ $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = -(\overline{b},\overline{a},\overline{c}) = -(\overline{c},\overline{b},\overline{a}) = -(\overline{a},\overline{c},\overline{b})$, тобто переставляння двох співмножників змінює знак мішаного добутку:

④ $(\alpha\overline{a}_1 + \beta\overline{a}_2,\overline{b},\overline{c}) = \alpha(\overline{a}_1,\overline{b},\overline{c}) + \beta(\overline{a}_2,\overline{b},\overline{c})$, тобто мішаний добуток лінійний за будь-яким множником.

► ① Властивість очевидна, якщо вектори $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ — компланарні. Нехай вони не компланарні. Тоді із симетричності скалярного добутку випливає, що

$$(\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]) = ([\overline{b},\overline{c}],\overline{a}).$$

Трійки $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ та $\overline{b},\overline{c},\overline{a}$ однойменні (обидві праві або обидві ліві); а із твердження 10.2 випливає, що

$$([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}) = (\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]).$$

② Випливає із властивості 1) та симетричності скалярного добутку:

$$\begin{aligned}(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) &= ([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}) = (\overline{c},[\overline{a},\overline{b}]) = \\ &= (\overline{c},\overline{a},\overline{b}) = ([\overline{c},\overline{a}],\overline{b}]) = (\overline{b},[\overline{c},\overline{a}]) = \\ &= (\overline{b},\overline{c},\overline{a}).\end{aligned}$$

③ Випливає із властивостей 1), 2) та антикомутативності векторного добутку:

$$\begin{aligned}(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) &= ([\overline{a},\overline{b}],\overline{c}) = -([\overline{b},\overline{a}],\overline{c}) = \\ &= -(\overline{b},\overline{a},\overline{c}) = -(\overline{c},\overline{b},\overline{a}) = -(\overline{a},\overline{c},\overline{b}).\end{aligned}$$

④ Випливає із властивостей лінійності та однорідності скалярного добутку:

$$(\alpha\overline{a}_1+\beta\overline{a}_2,\overline{b},\overline{c})=(\alpha\overline{a}_1+\beta\overline{a}_2,[\overline{b},\overline{c}])=\alpha(\overline{a}_1,[\overline{b},\overline{c}])+\beta(\overline{a}_2,[\overline{b},\overline{c}])=$$
$$=\alpha(\overline{a}_1,\overline{b},\overline{c})+\beta(\overline{a}_2,\overline{b},\overline{c}).$$

Лінійність за другим і третім співмножником випливає із властивості 2 мішаного добутку. ◄

Мішаний добуток в ортонормованому базисі

Нехай задано вектори

$$\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k},\overline{b}=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}\text{ та }\overline{c}=c_x\overline{i}+c_y\overline{j}+c_z\overline{k}.$$

Знайдімо їх мішаний добуток, використовуючи вираз через координати векторів для векторного та скалярного добутків:

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=([\overline{a},b],\overline{c})=$$
$$=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\overline{k},c_x\overline{i}+c_y\overline{j}+c_z\overline{k}\right)=$$
$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Отже,

$$\boxed{(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.}$$

10.5. Застосування мішаного добутку

Об'єм паралелепіпеда

Розгляньмо паралелепіпед (трикутну піраміду), побудований на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ і висоту, опущену на грань, яку утворено векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

$$\boxed{V_{\text{пар}}=\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|.}$$

Об'єм трикутної піраміди

$$\boxed{V_{\text{пір}}=\frac{1}{6}\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|.}$$

Висота паралелепіпеда (трикутної піраміди)

$$\boxed{h=\left|\operatorname{pr}_{[\overline{a},\overline{b}]}\overline{c}\right|=\frac{\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|}{\left|[a,\overline{b}]\right|}.}$$

Критерій компланарності векторів

Мішаний добуток векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ дорівнює нулю, тоді й лише тоді, коли вектори $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$ компланарні:

$$\boxed{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a},\overline{b},\overline{c} - \text{ компланарні.}}$$

Взаємна орієнтація векторів

Для будь-яких некомпланарних векторів $\overline{a},\overline{b}$ та $\overline{c}$:

1) якщо $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) > 0$, то вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ утворюють праву трійку;

2) якщо $(\overline{a},b,\overline{c}) < 0$, то вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ утворюють ліву трійку.

11. Комплексні числа

11.1. Основні поняття

Означення 11.1. *Комплексним числом* z називають упорядковану пару $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ дійсних чисел x і y, тобто

$$\boxed{z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.}$$

Перший елемент пари x називають *дійсною частиною*, а другий елемент — *уявною частиною* комплексного числа z і позначають

$$\boxed{x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.}$$

Дії над комплексними числами

Розгляньмо два комплексні числа $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ та $z_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Означення 11.2. Два комплексні числа z_1 і z_2 називають *рівними*, якщо рівні їхні дійсні та уявні частини, тобто

$$\boxed{z_1 = z_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}}$$

Означення 11.3. *Сумою* двох комплексних чисел z_1 і z_2 називають комплексне число

$$\boxed{z_1 + z_2 \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.}$$

Означення 11.4. *Добутком* двох комплексних чисел z_1 і z_2 називають комплексне число

$$\boxed{z_1 z_2 \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix}.}$$

Множину всіх комплексних чисел з означеними рівністю, додаванням та множенням називають *множиною комплексних чисел* і позначають $\mathbb{C}$.

Оскільки

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то комплексні числа вигляду $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$, ототожнюють з дійсними числами і записують $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x, x \in \mathbb{R}$. Отже,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Зауваження 11.1.

1. Множина дійсних чисел є підмножиною множини комплексних чисел $(\mathbb{R} \subset \mathbb{C})$. Отже, правдиві включення[*]

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.}$$

2. Поняття нерівності для комплексних чисел існує лише як заперечення рівності, тобто $z_1 \neq z_2$ означає, що число z_1 не дорівнює числу z_2. Поняття «більше» та «менше» для комплексних чисел не означують, тобто множина комплексних чисел $\mathbb{C}$, на відміну від множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, *не впорядкована.*

Розгляньмо добуток дійсного числа $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ на комплексне число $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Маємо

$$\alpha z = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}.$$

---

[*] Подальше поширення числових множин розглянуто в п. 13.9.

Отже, означення лінійних дій над комплексними числами збігається з означенням дій над двовимірними арифметичними векторами (для додавання це випливає з означення).

Протилежним для комплексного числа z називають число

$$\boxed{-z \overset{\text{def}}{=} (-1)z = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.}$$

Під *різницею* комплексних чисел $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ та $z_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ розуміють комплексне число

$$\boxed{z_1 - z_2 \overset{\text{def}}{=} z_1 + (-1)z_2 = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}.}$$

Будь-яке комплексне число можна записати як

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}.$$

Уявною одиницею називають комплексне число

$$\boxed{i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

З означення множення комплексних чисел випливає, що

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1,$$

тобто комплексне число i є розв’язком рівняння $z^2 + 1 = 0$ і $\boxed{i^2 = -1.}$

Твердження 11.1 (*властивості додавання і множення комплексних чисел*). Для будь-яких комплексних чисел z, z_1, z_2, z_3 правдиві тотожності:

① $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (*комутативність додавання*);

② $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (*асоціативність додавання*);

③ $z + 0 = z$ (*існування нуля*);

④ існує єдине комплексне число $(-z)$ таке, що $z + (-z) = 0$ (*існування протилежного числа*);

⑤ $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (*комутативність множення*);

⑥ $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (*асоціативність множення*);

⑦ $1 \cdot z = z$ (*існування одиниці*);

⑧ якщо $z \neq 0$, то існує єдине комплексне число z^{-1}, що $zz^{-1} = 1$ (*існування оберненого числа*);

⑨ $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ (*дистрибутивність множення щодо додавання*).

Зауваження 11.2. Зміст попередніх розділів — дії над матрицями, обчислення визначників, теорія систем лінійних алгебричних рівнянь та лінійної залежності векторів — залишається правдивим, якщо елементи матриць, визначників, коефіцієнти та розв'язки СЛАР, координати векторів вважати комплексними числами.

11.2. Алгебрична форма комплексного числа

Означення 11.5. *Алгебричною формою* комплексного числа $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ називають вираз

$$\boxed{z = x + iy,}$$

де $x = \operatorname{Re} z$ — дійсна частина комплексного числа x; $y = \operatorname{Im} z$ — уявна частина комплексного числа z; i — уявна одиниця, причому

$$\boxed{i^2 = -1.}$$

Дії над комплексними числами в алгебричній формі

Розгляньмо комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$.

З означень дій над комплексними числами і алгебричної форми комплексного числа випливає, що:

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 = z_2 \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2; \end{cases} \\ z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \\ z_1 - z_2 &= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2); \\ z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}}$$

Зауваження 11.3. Арифметичні дії над комплексними числами можна проводити як з алгебричними виразами, враховуючи, що $i^2 = -1$.

Піднесення комплексного числа z до натурального степеня n розглядають як множення числа z на себе n разів:

$$\boxed{z^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n}.}$$

Ділення комплексних чисел

Комплексне число $x - iy$ називають *спряженим* до числа $z = x + iy$ і позначають

$$\boxed{\overline{z} \overset{\text{def}}{=} x - iy.}$$

Маємо

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = (x^2+y^2)+0i = x^2+y^2 \in \mathbb{R},$$

$$z\overline{z} \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0.$$

Для будь-якого комплексного числа $z = x+iy \neq 0$ існує *обернене*. Справді, помножуючи рівність

$$z^{-1}z = 1$$

на $\overline{z}$, дістаємо

$$z^{-1}z\overline{z} = \overline{z} \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z\overline{z}}\overline{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Під *часткою комплексних чисел* $z_1 = x_1+iy_1$ та $z_2 = x_2+iy_2 \neq 0$ розуміють комплексне число

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} \overset{\text{def}}{=} z_1\left(z_2\right)^{-1} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Приклад 11.1. Знайдімо суму, різницю, добуток та частку комплексних чисел $z_1 = 2+3i$ та $z_2 = -1+2i$.

❍ Ураховуючи формули для дій над комплексними числами в алгебричній формі і зауваження 11.3, маємо:

$$z_1+z_2 = 2+3i+(-1+2i) = 1+5i;$$

$$z_1-z_2 = 2+3i-(-1+2i) = 3+i;$$

$$z_1z_2 = (2+3i)(-1+2i) = \underbrace{-2-3i+4i+6i^2}_{\text{ураховуємо, що } i^2=-1} = -2+i-6 = -8+i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \underbrace{\frac{2+3i}{-1+2i} = \frac{(2+3i)(-1-2i)}{(-1)^2+(2)^2}}_{\text{домножуємо чисельник і знаменник дробу на спряжене число до знаменника}} = \frac{-2-3i-4i-6i^2}{1+4} = \frac{4-7i}{5} = \frac{4}{5}-\frac{7}{5}i. \bullet$$

11.3. Геометричне зображення комплексних чисел

Комплексне число $z = x+iy$ зображують на площині Oxy точкою $M(x;y)$ або радіусом-вектором $\overline{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (рис. 11.1, 11.2).

Існує взаємно однозначна відповідність між комплексними числами $z = x+iy, x, y \in \mathbb{R}$, і точками площини Oxy. При цьому:

площину, точки якої ототожнюють з комплексними числами, називають *комплексною площиною*;

вісь абсцис називають *дійсною віссю* (на ній лежать дійсні числа $z = x$); вісь ординат називають *уявною віссю* (на ній лежать уявні числа $z = iy$).

Якщо число z зображують точкою $(x;y)$, то числа $\overline{z}, -z$ і $-\overline{z}$ зображують відповідно точками $(x;-y), (-x;-y)$ і $(-x;y)$ (рис. 11.3).

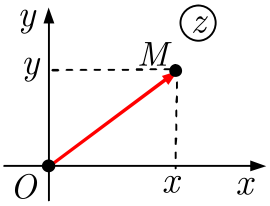


Рис. 11.1

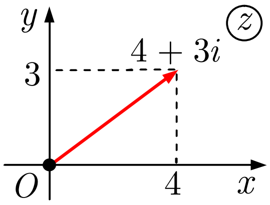


Рис. 11.2

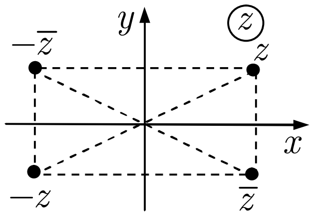


Рис. 11.3

Додаванню та відніманню комплексних чисел відповідає додавання та віднімання відповідних їм радіусів-векторів (рис. 11.4).

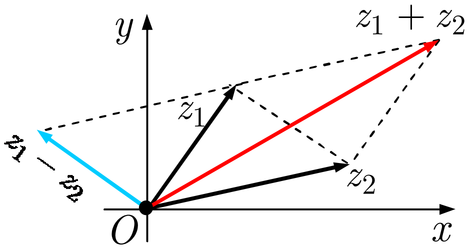


Рис. 11.4

11.4. Полярна система координат

Нехай на площині задано точку O, яку називають *полюсом*, одиничний вектор $\overline{i}$, орієнтацію (проти годинникової стрілки). Промінь Op, який орієнтований вектором $\overline{i}$, називають *полярною віссю* (рис. 11.5).

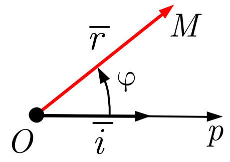


Рис. 11.5

Положення точки M, відмінної від полюса O, на площині задають довжиною її радіуса-вектора $\rho = \left|\overline{r}\right|$ і кутом φ між полярною віссю і променем OM. Кут φ вважають додатним, якщо його відраховують від полярної осі проти ходу годинникової стрілки, і від'ємним, якщо його відраховують за годинниковою стрілкою.

Полярними координатами точки M називають упорядковану пару чисел

$$\boxed{(\rho, \varphi)}$$

і записують $M(\rho;\varphi)$. Координату $\rho > 0$ називають *полярним радіусом*, координату φ — *полярним кутом*. Для полюса — точки O : $\rho = 0$, а полярний кут можна брати довільний.

Полярні координати однозначно визначають точку на площині, а кожній точці площини відповідає нескінченна кількість пар ρ та φ. У цих парах ρ те саме, а полярні кути φ відрізняються один від одного на число, кратне 2π, тобто

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi,$$

де φ_0 справджує умову

$$-\pi < \varphi_0 \le \pi.$$

Його називають *головним значенням* полярного кута (інколи беруть $\varphi_0 \in [0;2\pi)$).

Якщо скористатися головним значенням полярного кута, то відповідність між упорядкованими парами дійсних чисел $(\rho;\varphi_0)$ і точками площини буде взаємно однозначною (крім точки 0, де $\rho = 0$, а φ_0 — довільний).

Нехай на площині задано полярну систему координат. Прямокутні декартові координати x, y називають *узгодженими* з полярними координатами ρ, φ (рис. 11.6), якщо:

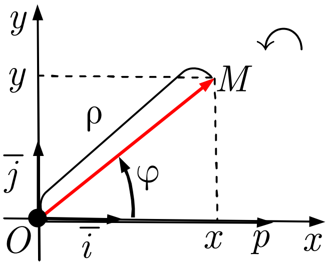


Рис. 11.6

1) базис $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ задає вибрану орієнтацію площини;
2) полюс O є початком координат ПДСК;
3) промінь Op є додатною піввіссю осі абсцис.

Якщо x, y — прямокутні координати, узгоджені з полярними координатами ρ, φ, то декартові координати виражаються через полярні співвідношеннями:

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}} \tag{11.1}$$

а полярні через декартові — співвідношеннями:

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi : \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}}$$

Зауважмо, що

$$\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2.}$$

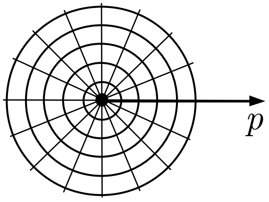


Рис. 11.7

Координатними лініями в полярній системі координат є кола з центром у полюсі і радіусом R, що мають рівняння $\rho = R$, та промені, які виходять з полюса і мають рівняння $\varphi = \alpha$ (рис. 11.7).

11.5. Тригонометрична форма комплексних чисел

Розгляньмо комплексне число $z \neq 0$, яке зображує точка $M \neq O$ із полярними координатами (ρ, φ).

Означення 11.6. Полярний радіус ρ називають *модулем* комплексного числа z і позначають

$$\boxed{|z| \overset{\text{def}}{=} \rho = \sqrt{x^2 + y^2},}$$

полярний кут φ називають *аргументом комплексного числа* z і позначають

$$\boxed{\operatorname{Arg} z \overset{\text{def}}{=} \varphi.}$$

Головним значенням аргументу комплексного числа $z \neq 0$ називають число

$$\boxed{\arg z = \varphi_0 \in (-\pi; \pi].}$$

Отже,

$$\boxed{\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.}$$

Зауваження 11.4.
1. Поняття модуля комплексного числа узгоджене з поняттям модуля дійсного числа:

$$|x + 0i| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|.$$

2. $\boxed{z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.}$

3. Аргумент комплексного числа $z = 0$ невизначений (тобто можна брати будь-який), а модуль дорівнює нулю.
4. Головне значення аргумента можна знайти за формулою

$$\boxed{\arg z = \begin{cases} -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x < 0, y < 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x < 0, y > 0. \end{cases}}$$

Нехай точка, що зображує комплексне число $z = x + iy$, має полярні координати $(\rho; \varphi)$. Тоді, враховуючи співвідношення (11.1), маємо

$$z = x + iy = \rho \cos \varphi + i\rho \sin \varphi, \rho \geq 0.$$

Означення 11.7. *Тригонометричною формою* комплексного числа $z \neq 0$ називають вираз

$$\boxed{z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),}$$

де $\rho = |z|$ — модуль комплексного числа z; $\varphi = \operatorname{Arg} z$ — аргумент комплексного числа z.

Приклад 11.2. Зобразімо числа $z_1 = 1 + i$ та $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ на комплексній площині і запишімо їх у тригонометричній формі.

❍ Маємо

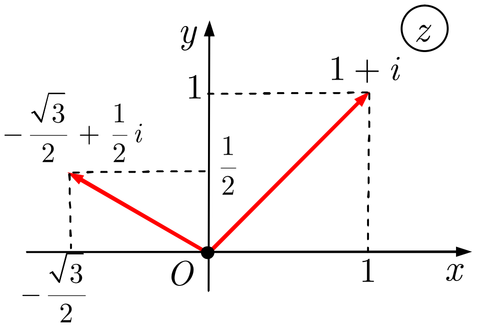


Рис. 11.8

$$x_1 = \operatorname{Re} z_1 = 1, y_1 = \operatorname{Im} z_1 = 1;$$

$$x_2 = \operatorname{Re} z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, y_2 = \operatorname{Im} z_2 = \frac{1}{2}.$$

Число z_1 зображує точка $(1;1)$, а число z_2 — точка $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ (або відповідні радіуси вектори) (рис. 11.8).

Знаходимо модулі чисел z_1 і z_2:

$$\rho_1 = |z_1| = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$\rho_2 = |z_2| = \sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

Знаходимо аргументи чисел z_1 і z_2, ураховуючи, що число z_1 розташоване у 1-й чверті, а число z_2 — у 2-й чверті:

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4};$$

$$\varphi_2 = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y_2}{x_2} = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Записуємо числа у тригонометричній формі:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \qquad z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}. \bullet$$

Дії над комплексними числами у тригонометричній формі

Розгляньмо комплексні числа

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1);$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

З означень дій над комплексними числами і тригонометричної форми комплексного числа випливає, що:

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 &= z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2, \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \\ z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}}$$

► Доведімо формулу множення:

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)] =$$
$$= \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].◄$$

Наслідком формули множення комплексних чисел є формула піднесення комплексного числа до натурального степеня, яку називають *муавровою формулою*

$$z^n = \left[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (11.2)$$

►Доведімо формулу Муавра методом математичної індукції.

Очевидно, що формула правдива для $n = 0$ та $n = 1$:

$$(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^0 = 1 = \rho^0(\cos 0 + i\sin 0) = 1;$$
$$(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^1 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Припустімо, що вона правдива для $n = k \in \mathbb{N}$:

$$(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^k = \rho^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi),$$

і при цьому припущенні доведімо її для $n = k + 1$:

$$(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{k+1} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^k =$$
$$= \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\rho^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi) =$$
$$= \rho^{k+1}(\cos k\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\sin k\varphi + i(\sin\varphi\cos k\varphi + \cos\varphi\sin k\varphi)) =$$
$$= \rho^{k+1}(\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi).$$

Згідно із принципом математичної індукції формула Муавра правдива для будь-якого натурального n. ◄

Приклад 11.3. Знайдімо $z_1 z_2, \dfrac{z_1}{z_2}, (z_1)^{10}$ для комплексних чисел

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ та } z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}.$$

❍ Маємо:

$$z_1 z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot 1\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cdot 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{1\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right);$$

$$(z_1)^{10} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 32\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right) = 32i. \bullet$$

Корінь з комплексного числа

Комплексне число w називають *коренем n-го степеня* з комплексного числа, якщо

$$w^n = z, \quad w = \sqrt[n]{z}, n \in \mathbb{N}.$$

Для будь-якого $z \neq 0$ корінь $\sqrt[n]{z}$ має n різних значень. Справді, підставляючи

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

у формулу (11.2), дістаємо

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

З рівності комплексних чисел випливає рівність їхніх модулів, а аргументи чисел відрізняються на $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Отже, маємо співвідношення:

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}. \qquad (11.3)$$

Отже, модулі всіх коренів n-го степеня із z однакові, а аргументи відрізняються на $\frac{2\pi k}{n}$. Точки на комплексній площині, що відповідають різним значенням кореня n-го степеня з комплексного числа $z \neq 0$, розташовані у вершинах правильного n-кутника, вписаного в коло радіусом $\sqrt[n]{\rho}$ з центром у точці $w = 0$ (рис. 11.9).

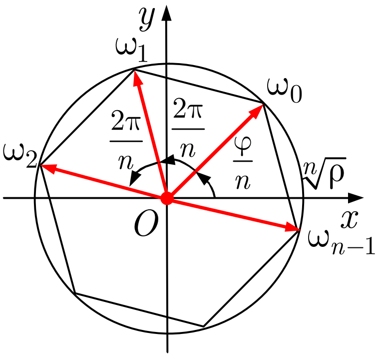


Рис. 11.9

Надаючи у співвідношенні (11.3) числу k значень $0, 1, 2, \ldots, n-1$, одержимо n різних комплексних чисел

$$\boxed{\begin{gathered}\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), \\ k = \overline{0, n-1}.\end{gathered}}$$

Приклад 11.4. Знайдімо всі значення $\sqrt[5]{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$ і побудуймо їх на комплексній площині.

❍ Ураховуючи результат прикладу 11.2, маємо

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}.$$

Тоді

$$\omega_k = \sqrt[5]{z} = \cos\left(\frac{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{5}\right), k = \overline{0, 4};$$

$$\omega_0 = \cos\frac{5\pi}{30} + i\sin\frac{5\pi}{30}; \quad \omega_1 = \cos\frac{17\pi}{30} + i\sin\frac{17\pi}{30};$$

$$\omega_2 = \cos\frac{29\pi}{30} + i\sin\frac{29\pi}{30}; \ \omega_3 = \cos\frac{41\pi}{30} + i\sin\frac{41\pi}{30};$$

$$\omega_4 = \cos\frac{53\pi}{30} + i\sin\frac{53\pi}{30}.$$

Зображуємо значення $\sqrt[5]{z}$ (рис. 11.10) — усі вони розташовані на колі радіусом 1 і променях

$$\varphi_0 = \frac{5\pi}{30}, \varphi_1 = \frac{17\pi}{30}, \varphi_2 = \frac{29\pi}{30}, \varphi_3 = \frac{41\pi}{30}, \varphi_4 = \frac{53\pi}{30}.$$ ●

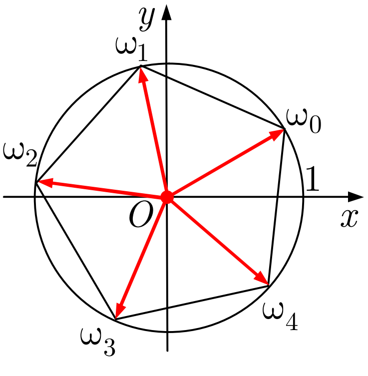


Рис. 11.10

Важливий випадок добування кореня n-го степеня з одиниці. З рівності

$$1 = \cos 0 + i\sin 0$$

випливає, що

$$\boxed{\sqrt[n]{1} = \varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, k = \overline{0, n-1}.}$$

На комплексній площині корені n-го степеня з одиниці розташовані на колі одиничного радіуса і поділяють його на n рівних дуг; однією з точок поділу є число 1. Тобто «недійсні» корені n-го степеня з одиниці розташовані симетрично щодо дійсної осі — попарно спряжені.

11.6. Комплексні числа в показниковій формі*

Ейлерова формула, що встановлює зв'язок між показниковою і тригонометричними функціями,

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \varphi \in \mathbb{R},}$$

дає змогу записувати комплексні числа ще й у показниковій формі:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Leftrightarrow z = \rho e^{i\varphi}, \rho = \left|z\right|, \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Якщо покласти в ейлеровій формулі $\varphi = \pi$, то дістанемо цікаву рівність

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0,}$$

яка містить 5 визначних сталих $0, 1, \pi, e, i$ і символізує єдність усієї математики.

Означення 11.8. *Показниковою формою* комплексного числа $z \neq 0$ називають вираз

$$\boxed{z = \rho e^{i\varphi},}$$

де $\rho = \left|z\right|$ — модуль комплексного числа z; $\varphi = \operatorname{Arg} z$ — аргумент комплексного числа z.

Подамо формули для дій з комплексними числами $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ в показниковій формі:

$$\boxed{\begin{aligned}
z_1 &= z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2, \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};\\
z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};\\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};\\
z_1^n &= \rho_1^n e^{in\varphi_1}, n \in \mathbb{N};\\
\sqrt[n]{z_1} &= \sqrt[n]{\rho_1} e^{i\frac{\varphi_1+2\pi k}{n}}, k = \overline{0, n-1}, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}}$$

---

[*] Приклад застосування подано в п. 12.9.

12. Застосування векторної алгебри

12.1. Векторна алгебра в картинках

На картинках показано: хлопчик, що використовує вектори (рис. 12.1); сила $\overline{F}$, яку можна розкласти як $\overline{F} = F_x\overline{i} + F_y\overline{j}$ (рис. 12.2); фізичні схеми обчислення роботи матеріальної точки (рис. 12.3); момент сили (рис. 12.4).

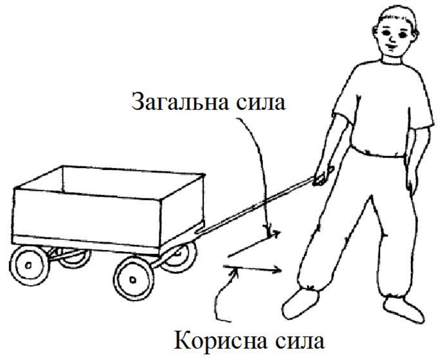


Рис. 12.1.

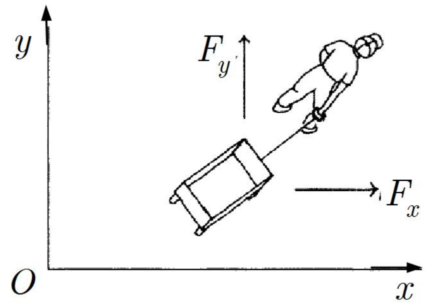


Рис. 12.2

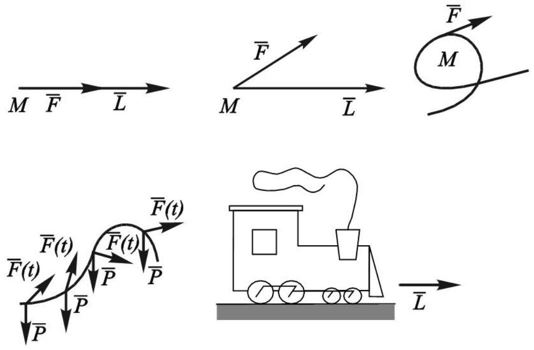


Рис. 12.3

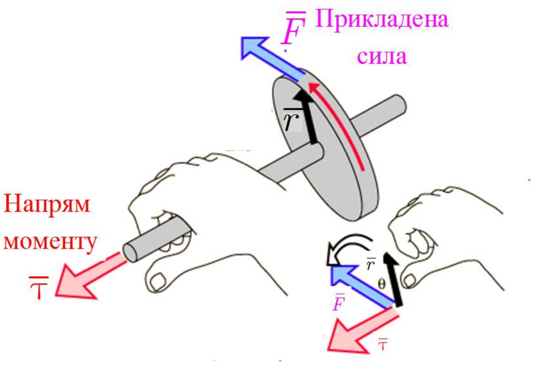


Рис. 12.4

12.2. Вибір точки опору гойдалки (додавання векторів)

Двоє людей різної маси гойдаються на гойдалці (рис. 12.5). Де треба розташувати опору гойдалки, щоб ніхто не переважував?

❍Змоделюємо цю задачу (рис. 12.6). Об’єктом дослідження є розташування місця опори гойдалки, на якій сидять двоє людей різної маси. Вважатимемо гойдалку недеформовним стрижнем, що розташований на точковій опорі, до кінців якого прикладено сили ваги першої і другої людини. Треба знайти рівнодійну цих сил, що й дозволить визначити шукану реакцію опори.

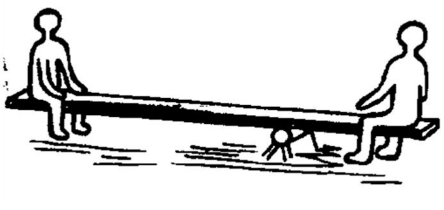


Рис. 12.5

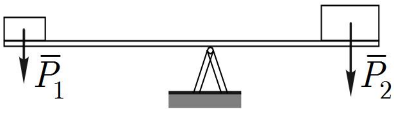


Рис. 12.6

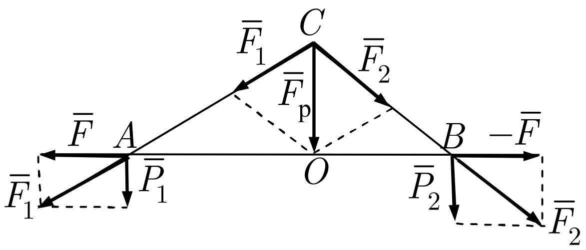


Рис. 12.7

Розгляньмо математичну модель. Нехай відрізок AB є недеформовним стрижнем (рис. 12.7). До кінців відрізка прикладено вектори $\overline{P}_1$ та $\overline{P}_2$, що відповідають силам ваги тих, хто гойдається. Знайдімо точку перетину прямої, уздовж якої діє рівнодійна, з відрізком AB.

Розглядувані вектори за фізичним змістом задачі є ковзними векторами (п. 13.3), тому їх не можна звести до спільного початку. Але рівнодійна сил $\overline{P}_1$ та $\overline{P}_2$ існує. Доповнимо задану систему векторів вектором $\overline{F}$, прикладеним до точки A, і який лежить на прямій AB, а також вектором $-\overline{F}$, прикладеним до точки B. Сума векторів $\overline{F}$ та $-\overline{F}$ дорівнює нулю, тому нова система векторів рівносильна вихідній. Але

$$\left.\begin{aligned}\overline{F}_1 &= \overline{P}_1+\overline{F},\\ \overline{F}_2 &= \overline{P}_2-\overline{F}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \overline{P}_1+\overline{P}_2=\overline{F}_1+\overline{F}_2=\overline{F}_\text{р}.$$

Переміщуючи вектори $\overline{F}_1$ та $\overline{F}_2$ уздовж відповідних прямих їх дії, дістанемо у перетині точку C. З геометричних міркувань випливає, що $\overline{F}_\text{р} \parallel \overline{P}_1 \parallel \overline{P}_2$.

Тому $\left|\overline{F}_\text{р}\right| = \left|\overline{P}_1\right| + \left|\overline{P}_2\right|$. За фізичним змістом реакція опори $\overline{R} = -\overline{F}_\text{р}$ і прикладена вона до точки перетину AB з OC. ●

12.3. Комп'ютерне моделювання кольорів (розкладання вектора за базисом)

Кольори на моніторі комп'ютера зазвичай ґрунтуються на так званій ЧЗС (RGB) кольоровій моделі. Їх створено накладанням основних кольорів: червоного (Ч), зеленого (З) та синього (С) (англійською відповідно: R — red, G — green, B — blue).

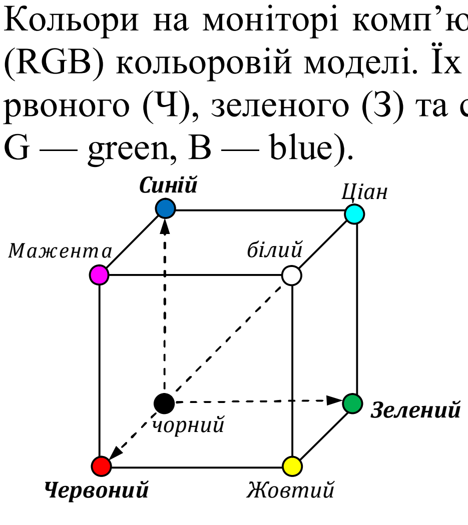


Рис. 12.8

Змоделюємо це, вибираючи основні кольори за вектори ортонормованого базису (рис. 12.8):

$$\overline{r} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \overline{g} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \overline{b} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

чистий червоний	*чистий зелений*	*чистий синій*

Інші кольори формують лінійною комбінацію $\overline{r}, \overline{g}$ та $\overline{b}$, використовуючи коефіцієнти $0 \le c_i \le 1, i = 1,2,3$; ці коефіцієнти виражають частку кожного чистого кольору в суміші. Множина всіх кольорових векторів формують ЧЗС-простір або ЧЗС-кольоровий куб.

Кожен кольоровий вектор $\overline{c}$ цього куба лінійно виражається через вектори $\overline{r}, \overline{g}, \overline{b}$:

$$\overline{c} = c_1\overline{r} + c_2\overline{g} + c_3\overline{b} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}.$$

Як зазначено на рис. 12.8, вершини куба представляють чисті основні кольори разом з важливими кольорами такими, як: чорний, білий, мажента, ціан та жовтий. Вектори, напрямлені вздовж діагоналі від чорного до білого кольору, представляють відтінки сірого кольору.

12.4. Координати центра мас системи матеріальних точок (поділ відрізка в заданому співвідношенні)

Нехай задано n матеріальних точок $M_1, ..., M_n$, у яких зосереджено маси $m_1, ..., m_n$. Знайдімо центр мас системи точок.

❍ Розв'язання цієї задачі ґрунтується на двох фізичних припущеннях:

1. Центр мас системи із двох точок M_1 та M_2 з масами m_1 та m_2 розташований на відрізку M_1M_2 і поділяє його у відношенні $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$.

2. Центр мас системи точок $M_1, M_2, ..., M_n$ з масами $m_1, m_2, ..., m_n$ збігається з центром мас системи із двох точок, одна з яких розташована в центрі мас системи точок $M_1, M_2, ..., M_{n-1}$ і має масу $m_1 + m_2 + ... + m_{n-1}$, а друга — точка M_n з масою m_n.

Усі проміжні викладки проведімо лише для абсциси. Із припущення 1 та формули (8.1) випливає, що абсциса центра мас системи із двох точок

$$x = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1}x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}.$$

Припущення 2 дозволяє тепер знайти абсцису центра мас трьох точок:

$$x = \frac{\dfrac{x_1 + \frac{m_2}{m_1} x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} + \dfrac{m_3}{m_1 + m_2} x_3}{1 + \dfrac{m_3}{m_1 + m_2}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

За допомогою методу математичної індукції доводять, що координати центра мас системи з n точок можна знайти за формулами:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; z = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \bullet$$

12.5. Підвісний блок (напрямні косинуси)

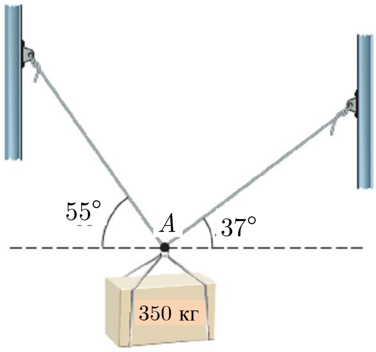


Рис. 12.9

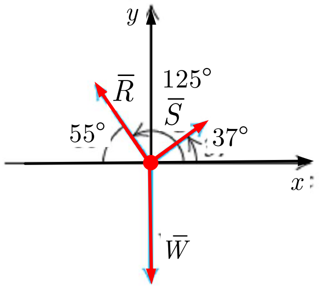


Рис. 12.10

Блок з вантажем завважки 350 кг підчеплено за допомогою двох тросів (рис. 12.9). У точці A, де діють три сили: $\overline{W}$, яка тягне блок донизу, $\overline{R}$ та $\overline{S}$, що напрямлені догори і зовні. Знайти натяг обох тросів.

❍Відкладімо на силовій діаграмі усі вектори від початку (рис. 12.10). Задля рівноваги рівнодійна всіх сил

$$\overline{F} = \overline{R} + \overline{S} + \overline{W}.$$

Виразімо кожен вектор через довжину і їхні напрямні косинуси:

$$\overline{R} = \left|\overline{R}\right|(\overline{\imath}\cos 125^\circ + \overline{\jmath}\sin 125^\circ),$$
$$\overline{S} = \left|S\right|(\overline{\imath}\cos 37^\circ + \overline{\jmath}\sin 37^\circ),$$
$$\overline{W} = \left|\overline{W}\right|(\overline{\imath}\cos 270^\circ + \overline{\jmath}\sin 270^\circ) = -350\overline{\jmath}.$$

Підставляючи вирази для $\overline{R}, \overline{S}$ та $\overline{W}$ у рівняння сил, дістаємо:

$$\left(\left|\overline{R}\right|\cos 125^\circ + \left|\overline{S}\right|\cos 37^\circ\right)\overline{\imath} + \left(\left|\overline{R}\right|\sin 125^\circ + \left|\overline{S}\right|\sin 37^\circ - 350\right)\overline{\jmath} = \overline{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\overline{R}\right|\cos 125^\circ + \left|\overline{S}\right|\cos 37^\circ = 0, \\ \left|\overline{R}\right|\sin 125^\circ + \left|\overline{S}\right|\sin 37^\circ - 350 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\overline{R}\right| \approx 280, \\ \left|\overline{S}\right| \approx 201. \end{cases}$$

Отже, натяги тросів становлять 280 кг та 201 кг.●

12.6. Застосування багатовимірних просторів

Електричні кола

Певний пристрій сконструйовано так, щоб на вході він одержав чотири вхідних напруги і продукував на виході три напруги у відповідь. Вхідні напруги можна розглядати як вектори простору $\mathbb{R}^4$, а вихідні — як вектори простору $\mathbb{R}^3$. Тому можна вважати, що розглядуваний пристрій перетворює кожен вхідний вектор $\vec{v} = (v_1;v_2;v_3;v_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$ у деякий вихідний вектор $\vec{w} = (w_1;w_2;w_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$.

Графічні зображення

Один зі способів створення кольорових зображень на комп’ютерному моніторі є приписування кожному пікселу (адресованої точки на моніторі) трьох чисел, що описують колір, насиченість і яскравість точки. Тому кольорове зображення повністю можна описати множиною п’ятивимірних векторів $\vec{v} = (x;y;h;s;b)^{\mathrm{T}}$, де x, y є екранними координатами точки, а h, s та b — кольором, насиченістю та яскравістю відповідно.

Механічні системи

Припустімо шість частинок рухаються вздовж однієї з координатних ліній так, що в момент t вони мають координати $x_1, x_2, ..., x_6$ і швидкості $v_1, v_2, ..., v_6$ відповідно. Цю інформацію можна зобразити 13-вимірним вектором

$$\vec{v} = (x_1;...;x_6;v_1;...;v_6;t)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{13}.$$

Цей вектор називають станом системи частинок у момент t.

12.7. Система супутникової навігації (система координат)

Основні відомості

Система глобального позиціонування (англ. *Global Positioning System,*GPS) — сукупність супутників, обладнаних радіочастотним приймально-передавальним обладнанням та запущених на замовлення міністерства оборони США,— використовують для визначення розташування об’єкта на поверхні Землі під час наведення ракет на ціль та координації пересування підрозділів авіаційного, морського і наземного базування.

Військове відомство США дозволило цивільним користувачам використовувати систему з меншою точністю. На тепер, окрім приймачів спеціального призначення випускаються прилади, вмонтовані в наручні годинники, мобільні телефони, ручні радіостанції, за допомогою яких можна орієнтуватись на місцевості. Їх використовують альпіністи, рятівники, туристи.

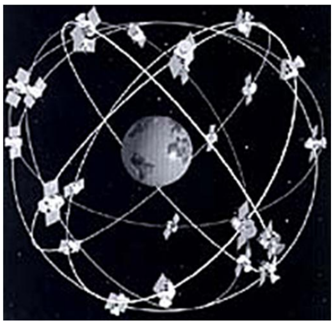


Рис. 12.11

Основою системи є навігаційні супутники, які рухаються навколо Землі по шістьох орбітальних траєкторіях (по чотири супутники в кожній), на висоті 20180 км. Хоча 24 супутники (рис. 12.11) забезпечують повноцінне функціонування системи в будь-якій точці земної кулі, але вони не завжди можуть забезпечити впевнене приймання і точний розрахунок позиції. Щоб збільшити точність позиціонування у разі збоїв, загальна кількість супутників на орбіті дещо більша — 31 супутник на грудень 2008 року.

Принцип дії

Приймач GPS обчислює власне положення, вимірюючи час, коли було послано сигнал з GPS супутників. Кожен супутник постійно надсилає повідомлення, у якому міститься інформація про час відправлення повідомлення, точку орбіти супутника, з якої було надіслано повідомлення, та загальний стан системи і наближені дані орбіт усіх інших супутників угрупування системи GPS. Ці сигнали поширюються зі швидкістю світла.

Приймач використовує час одержання повідомлення для обчислення віддалі до супутника, виходячи з якої шляхом застосування геометричних і тригонометричних рівнянь обчислюється положення приймача. Одержані координати набувають більш наочної форми, такої як широта та довгота, або положення на карті, та відображається користувачеві.

Оскільки обчислення положення супутника потребує знати час з високою точністю (а мати скрізь надточні годинники неможливо), необхідно одержувати інформацію з чотирьох або більше супутників. Інакше кажучи, приймач GPS використовує чотири параметри для обчислення чотирьох невідомих: трьох координат x, y, z і t.

Інколи можна обійтись меншою кількістю супутників. Якщо заздалегідь відома одна змінна (приміром, висота над рівнем моря човна в океані дорівнює нулю), приймач може обчислити положення, використовуючи дані з трьох супутників. Також на практиці приймачі використовують різну допоміжну інформацію для обчислення положення об’єкта з меншою точністю в умовах відсутності чотирьох супутників.

12.8. Застосування комплексних чисел до опису коливань

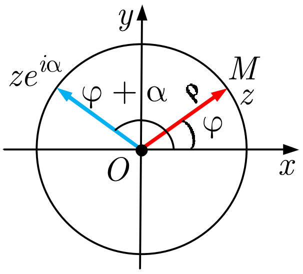


Рис. 12.13

Можна показати, що множення комплексного числа $z = \rho e^{i\varphi}$, що зображується вектором $\overline{OM}$, на число $z_0 = e^{i\alpha}$ еквівалентне повертанню вектора $\overline{OM}$ на кут α (рис. 12.13):

$$\rho e^{i\varphi}e^{i\alpha} = \rho e^{i(\varphi+\alpha)}.$$

Функцію

$$U(t) = Me^{i(\omega t+\alpha)} = M\cos(\omega t+\alpha) + iM\sin(\omega t+\alpha) \quad (M > 0, \omega > 0)$$

ефективно використовують для дослідження і опису гармонічних коливань. Оскільки величина $U(t)$ має модуль M і аргумент $\omega t + \alpha$, тобто її можна зобразити вектором сталої довжини, який рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω.

Розгляньмо, приміром, накладання коливань однакової частоти. Нехай треба додати два коливання

$$u_1(t) = M_1\sin(\omega t+\alpha_1) \text{ та } u_2(t) = M_2\sin(\omega t+\alpha_2).$$

Запроваджуємо комплексні величини

$$U_1(t) = M_1e^{i(\omega t+\alpha_1)} \text{ та } U_2(t) = M_2e^{i(\omega t+\alpha_2)},$$

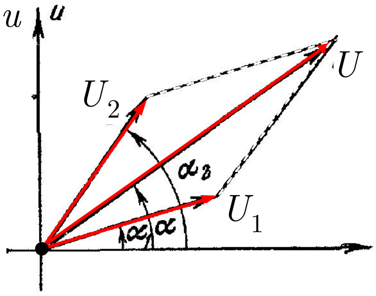


Рис. 12.14

у яких u_1 та u_2 — уявні частини. Вектори $U_1(t)$ та $U_2(t)$ рівномірно обертаються з кутовою швидкістю ω; отже, і вектор $U_1(t) + U_2(t)$ рівномірно обертається з тією самою швидкістю і його можна записати так само. Щоб знайти M та α, досить розглянути картинку в момент $t = 0$ (рис. 12.14). З неї, проектуючи на осі координат, дістаємо систему рівнянь для визначення M та α:

$$M\cos\alpha = M_1\cos\alpha_1 + M_2\cos\alpha_2;$$
$$M\sin\alpha = M_1\sin\alpha_1 + M_2\sin\alpha_2.$$

Беручи уявну частину від $U(t)$, остаточно маємо

$$u_1(t) + u_2(t) = M\sin(\omega t+\alpha).$$

Перевага показникової форми комплексного числа перед тригонометричною формою особливо виявляється під час диференціювання:

$$\frac{dU}{dt} = i\omega Me^{i(\omega t+\alpha)} = i\omega U.$$

Після диференціювання дістаємо вектор, який так само рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω, але який випереджає U на кут $\frac{\pi}{2}$ і має модуль, в ω разів більший.

13. Обґрунтування й узагальнення понять векторної алгебри

13.1. Скалярні, векторні і тензорні величини

Величини, які можна цілком визначити лише їхнім числовим значенням, називають *скалярними,* приміром, довжина лінії, об’єм тіла, маса, робота, температура тощо. Їх характеризують числами (скалярами), які знаходять порівнянням значення величини з вибраним еталоном, узятим за одиницю виміру.

Щоб величина була справжнім скаляром, треба щоб вона не залежала від вибору системи координат. Приміром, температура — справжній скаляр, координата x нерухомої точки — не є скаляром, оскільки залежить від напряму осі.

Векторними величинами називають такі, які визначаються не лише їхнім числовим значенням, але й напрямом у просторі, як, приміром, сила, швидкість, прискорення тощо. Їх характеризують векторами.

Зручним геометричним зображенням вектора є напрямлений відрізок. І хоча означення 7.1 фактично ототожнює ці поняття, варто пам’ятати, що вектор і напрямлений відрізок різняться як людина і її фотографія.

Існують вектори, напрям яких залежить від орієнтації базису простору. Причому, зміна орієнтації базису приводить до заміни вектора на протилежний.

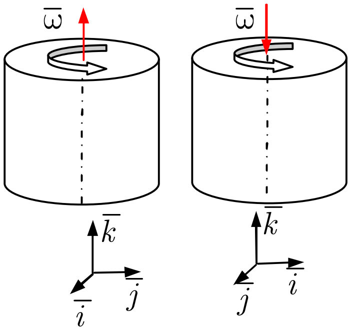


Рис. 13.1

Такі вектори називають *псевдовекторами* (аксіальними векторами) на відміну від «справжніх» векторів, напрям яких не залежить від орієнтації базису. Приміром, під час поступального руху твердого тіла вектор швидкості за своїм фізичним змістом не залежить від вибору орієнтації базису і тому є справжнім вектором. Вектор кутової швидкості $\overline{\omega}$ під час обертального руху тіла, який відкладають від осі обертання і довжина якого дорівнює значенню швидкості, є псевдовектором, оскільки його напрям залежить від орієнтації базису (рис. 13.1).

З означення векторного добутку випливає, що векторний добуток двох справжніх векторів є псевдовектором. Отже, момент сили — це псевдовектор. Векторний добуток справжнього вектора на псевдовектор є справжнім вектором, а двох псевдовекторів — псевдовектором. Справжній вектор $\overline{v}$ лінійної швидкості будь-якої точки M під час обертального руху зв’язаний із псевдовектором $\overline{\omega}$ формулою $\overline{v} = [\overline{\omega}, \overline{OM}]$, якщо точку O довільно вибрано на осі обертання.

Не всі величини, що мають числове значення і напрям, обов’язково є векторами. Приміром, повертанню твердого тіла навколо певної нерухомої осі можна приписати як числове значення (кут повороту), так і напрям (напрям осі). Однак два таких повороти не додаються за правилом паралелограма. Це можна побачити, коли осі перпендикулярні одна до одної і кути повороту дорівнюють $\frac{\pi}{2}$ (рис. 13.2, 13.3). Для цих повертань не виконується закон комутативності додавання. Отже, повороти на певний кут не можна схарактеризувати векторами.

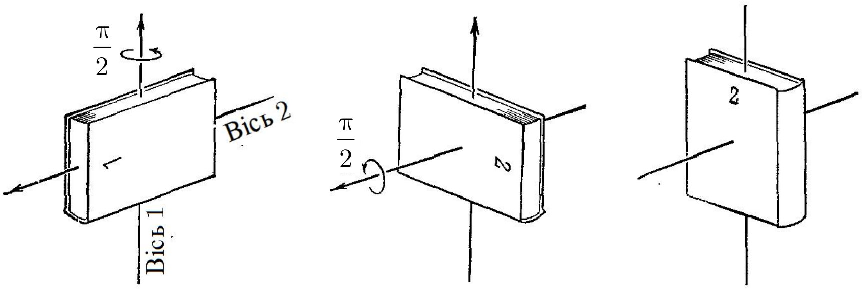


Рис. 13.2

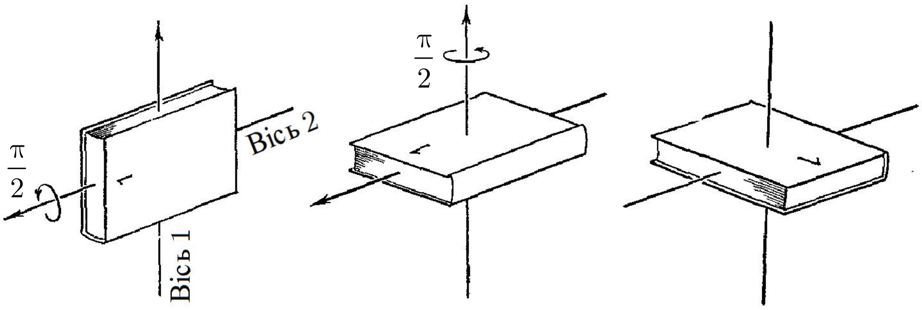


Рис. 13.3

Скалярні й векторні величини не вичерпують усіх можливих варіантів. Приміром, властивості кристалічних тіл передавати тепло і деформуватися під дією навантаження вдається описати складнішими *тензорними* величинами.

13.2. Вектори у фізиці

Векторна система позначень є важливою складовою математичної мови. Вона має дві важливі переваги:

1. Формулювання фізичних законів у векторній формі не залежить від вибору осей координат. Векторна система позначень є мовою, у якій формулювання мають фізичний зміст, навіть без запровадження систем координат.

2. Векторна система позначень є компактною. Більшість фізичних законів виражається через векторні величини у простій формі, яка втрачається, якщо виразити їх через проекції цих величин у деякій системі координат.

Щоб фізичну величину можна було виразити вектором, вона має справджувати дві умови:

1) для неї має виконуватись правило паралелограма для додавання;

2) її модуль і напрям не повинні залежати від системи координат.

13.3. Зв’язані, ковзні та вільні вектори

З означення 7.4 випливає, що рівні вектори можна переносити паралельно самім собі (таке перенесення не змінює їхніх довжин і напрямів). Однак не завжди такі перенесення допустимі.

Приміром, $\overline{v}$ — швидкість частинки води гірського водоспаду в який-небудь момент (рис. 13.4). Навряд чи можна стверджувати, що швидкість потоку в будь-якій іншій точці буде така сама. За фізичним змістом цей вектор не можна переносити в іншу точку простору. Такі вектори називають *зв'язаними*.

Якщо ж $\overline{v}$ — швидкість тросу, що рівномірно підіймає вантаж (рис. 13.5), то перенесення цього вектора вздовж прямої дії сили натягу цілком можливе. Такі вектори називають *ковзними*.

Якщо, нарешті, $\overline{v}$ — швидкість кабіни ліфта (рис. 13.6), то вектор можна перенести в будь-яку її точку. Такі вектори називають *вільними*.

Рис. 13.4

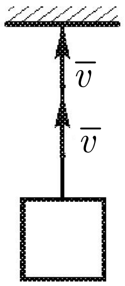


Рис. 13.5

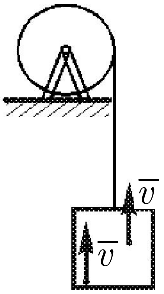


Рис. 13.6

13.4. Загальна декартова система координат

Декартову систему координат можна розглядати і не для ортонормованих базисів.

Декартова система координат на площині

Виберімо за базис векторів площини пару неколінеарних векторів (рис 13.7):

$$\overline{e}_1 = \overline{OE}1 \text{ та } \overline{e}_2 = \overline{OE}_2 .$$

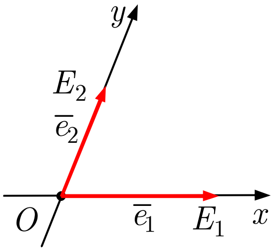


Рис. 13.7

У цьому разі кажуть, що на площині задано *декартову систему координат* Oe_1e_2. Точку O називають *початком координат*. Осі, що проходять через початок координат з напрямними векторами $\overline{e}_1$ та $\overline{e}_2$ називають *осями координат*: першу — *віссю абсцис* Ox, другу — *віссю ординат* Oy. Площину на якій задано систему координат називають *координатною площиною* Oxy.

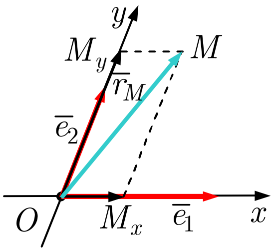


Рис. 13.8

Розгляньмо довільну точку M на площині і розкладімо її радіус-вектор $\overline{r}_M = \overline{OM}$ за базисом $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ (рис. 13.8):

$$\overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{OM_y} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2.$$

Координатами точки M у декартовій системі координат називають координати її радіуса-вектора $\overline{r}_M$ у базисі $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ і пишуть $M = M(x; y)$.

Першу координату називають *абсцисою*, другу — *ординатою*.

Декартова система координат у просторі

Зафіксуймо у просторі точку O й виберімо за базис трійку некомпланарних векторів:

$$\overline{e}_1 = \overline{OE}1,\ \overline{e}_2 = \overline{OE_2} \text{ та } \overline{e}_3 = \overline{OE}3.$$

У цьому разі кажуть, що у просторі задано *декартову систему координат* $Oe_1e_2e_3$. Точку O називають *початком координат*. Осі, що проходять через початок координат з напрямними векторами $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ та $\overline{e}_3$ називають *осями координат*: першу — *віссю абсцис* Ox, другу — *віссю ординат* Oy, третю — *віссю аплікат* Oz. Площини, що проходять через осі координат, називають *координатними площинами*, відповідно Oxy, Oxz та Oyz. Координатні площини розбивають простір на вісім частин — *октантів*.

Розгляньмо довільну точку M у просторі і розкладімо її радіус-вектор $\overline{r}_M = \overline{OM}$ за базисом $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ (рис. 13.9):

$$\overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{OM_y} + \overline{OM_z} = \\ = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + z\overline{e}_3.$$

Координатами точки M у декартовій системі координат $Oe_1e_2e_3$ називають координати її радіуса-вектора $\overline{r}_M$ у базисі $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ і записують

$$M = M(x;y;z).$$

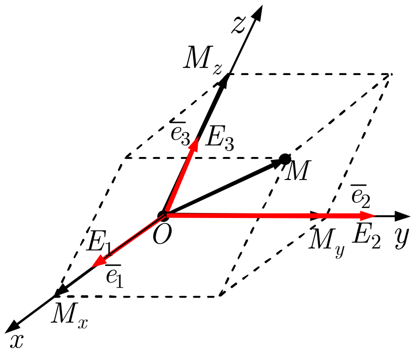


Рис. 13.9

Першу координату називають *абсцисою*, другу — *ординатою*, третю — *аплікатою*.

13.5. Абстрактні лінійні простори

У курсах математичного аналізу та лінійної алгебри доводиться мати справу з об’єктами розмаїтої природи — дійсними та комплексними числами, геометричними та арифметичними векторами, матрицями. Для кожного з таких об’єктів установлені дії додавання об’єктів та множення їх на число. Ці дії, попри відмінності в їх означенні, у природі об’єктів, над якими вони виконуються, мають істотні спільні властивості. Вивчення спільних властивостей об’єктів та абстрагування від конкретної природи цих об’єктів приводить до поняття лінійного простору.

Означення 13.1. Множину $\mathbb{V}$ називають *лінійним* ($\Leftrightarrow$ *векторним*) *простором*, якщо:

1) є правило, згідно з яким кожним двом елементам $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ з $\mathbb{V}$ відповідає третій елемент із $\mathbb{V}$, який називають *сумою* $\overline{v}_1$ та $\overline{v}_2$ і позначають $\overline{v}_1 \oplus \overline{v}_2$:

$\forall \overline{v}_1, \overline{v}_2 \in \mathbb{V} \Rightarrow \overline{v}_1 \oplus \overline{v}_2 \in \mathbb{V};$

2) є правило, згідно з яким кожному елементу $\overline{v} \in \mathbb{V}$ і будь-якому числу $\alpha \in \mathbb{R}$ відповідає елемент із $\mathbb{V}$, який називають *добутком елемента* $\overline{v}$ *на число* α і позначають $\alpha \odot \overline{v}$:

$\forall \overline{v} \in \mathbb{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \odot \overline{v} \in \mathbb{V};$

3) запроваджені операції справджують певні умови — аксіоми лінійного простору.

$\forall \overline{v}, \overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3 \in \mathbb{V},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

I. $\overline{v}_1 \oplus \overline{v}_2 = \overline{v}_2 \oplus \overline{v}_1$.

II. $(\overline{v}_1 \oplus \overline{v}_2) \oplus \overline{v}_3 = \overline{v}_1 \oplus (\overline{v}_2 \oplus \overline{v}_3)$.

III. $\exists \overline{0} \in \mathbb{V} : \overline{v} \oplus \overline{0} = \overline{0} \oplus \overline{v} = \overline{v}$. Елемент $\overline{0}$ називають *нульовим*.

IV. $\exists(\ominus \overline{v}) : \overline{v} \oplus (\ominus \overline{v}) = \overline{0}$. Елемент $(\ominus \overline{v})$ називають *протилежним* $\overline{v}$.

V. $\alpha \odot (\overline{v}_1 \oplus \overline{v}_2) = (\alpha \odot \overline{v}_1) \oplus (\alpha \odot \overline{v}_2)$.

VI. $(\alpha + \beta) \odot \overline{v} = (\alpha \odot \overline{v}) \oplus (\beta \odot \overline{v})$.

VII. $(\alpha\beta) \odot \overline{v} = \alpha \odot (\beta \odot \overline{v})$.

VIII. $1 \odot \overline{v} = \overline{v}$.

Елементи лінійного простору $\mathbb{V}$ називають *векторами* (незалежно від їх природи).

Дія додавання векторів — комутативна (I), асоціативна (II), для неї існує нейтральний елемент — нуль-вектор $\overline{0}$ (III) та симетричний елемент — протилежний вектор (IV).

Дія множення вектора на число — дистрибутивна щодо додавання векторів (V), дистрибутивна щодо додавання чисел (VI), асоціативна (VII), для неї існує нейтральний елемент — 1 (VIII).

Вектор $\overline{v}_1 \oplus (\ominus \overline{v}_2)$ називають *різницею векторів* $\overline{v}_1$ та $\overline{v}_2$ і позначають $\overline{v}_1 \ominus \overline{v}_2$.

Наслідки з аксіом I.— VIII.

1. Існує лише один нульовий вектор.

2. Існує лише один протилежний вектор $(\ominus \overline{v}) = (-1) \odot \overline{v}$.

3. $\forall \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{V}$ рівняння $\overline{u} \oplus \overline{x} = \overline{v}$ має єдиний розв'язок $\overline{x} = \overline{v} \ominus \overline{u}$.

4. $\forall \overline{v} \in \mathbb{V} : 0 \odot \overline{v} = 0$.

5. $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \odot \overline{0} = \overline{0}$.

6. Сума будь-якої кількості векторів не залежить від порядку доданків і способу розставляння дужок.

Приклади лінійних просторів

1. Сукупність вільних векторів із запровадженими лінійними діями над векторами.

2. Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$.

3. Сукупність упорядкованих наборів $(x_1; x_2; ...; x_n)$ з n дійсних чисел, якщо рівність наборів, додавання та множення набору на число означити поелементно.

4. Сукупність матриць $\mathbb{R}^{m \times n}$ розміру $m \times n$ з означеними діями додавання матриць та множення матриці на число. Зокрема, сукупність матриць-рядків завдовжки n — $\mathbb{R}^{1 \times n}$ та матриць-стовпців заввишки n — $\mathbb{R}^{n \times 1}$.

Для того щоб з'ясувати, чи є деяка множина лінійним простором щодо запроваджених на ній дій додавання і множення елемента на число, треба перевірити виконання аксіом I — VIII лінійного простору.

Приклад 13.1. Перевірмо, чи є лінійним простором множина додатних чисел P, якщо під додаванням векторів $(\oplus)$ розуміти множення чисел, а під множенням вектора на число α $(\odot)$ — піднесення його до степеня α: $\overline{x} \oplus \overline{y} = xy$; $\alpha \odot \overline{x} = x^{\alpha}$.

❍ Перевіряємо виконання аксіом I—VIII:

$\overline{x} \oplus \overline{y} = xy \in P$:

I. $\overline{x} \oplus \overline{y} = xy = yx = \overline{y} \oplus \overline{x}$.

II. $(\overline{x} \oplus \overline{y}) \oplus \overline{z} = xyz = x(yz) = \overline{x} \oplus (\overline{y} \oplus \overline{z})$.

III. $\exists \overline{0} = 1 : \overline{x} \oplus \overline{0} = x \cdot 1 = \overline{x}$.

IV. $\exists (\ominus \overline{x}) = \dfrac{1}{x} : \overline{x} \oplus (\ominus \overline{x}) = x \cdot \dfrac{1}{x} = 1 = \overline{0}$.

$\alpha \odot \overline{x} = x^{\alpha} \in P$:

V. $\alpha \odot (\overline{x} \oplus \overline{y}) = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} = (\alpha \odot \overline{x}) \oplus (\alpha \odot \overline{y})$.

VI. $(\alpha + \beta) \odot \overline{x} = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} x^{\beta} = (\alpha \odot \overline{x}) \oplus (\beta \odot \overline{y})$.

VII. $\alpha \odot (\beta \odot \overline{x}) = (x^{\beta})^{\alpha} = x^{\alpha\beta} = (\alpha\beta) \odot \overline{x}$.

VIII. $1 \odot \overline{x} = x^{1} = \overline{x}$.

Отже, P є лінійним простором. Розгляньмо будь-який «ненульовий елемент» цього простору $a \neq 1$:

$$\forall x \in P \, \exists \alpha = \log_a x : x = \alpha \odot a = a^{\log_a x}.$$

13.6. Базис лінійного простору

Нехай $\mathbb{V}$ — довільний лінійний простір, що містить не лише нульовий вектор. Це означає, що в ньому є хоча б один ненульовий вектор, а, отже, існує лінійно незалежна система принаймні з одного вектора. Можливі два випадки:

1) у просторі міститься скінченна кількість лінійно незалежних векторів;
2) у просторі міститься нескінченна кількість лінійно незалежних векторів.

Означення 13.2. *Базисом* лінійного простору називають будь-яку лінійно незалежну систему з найбільшою можливою кількістю векторів. Кількість векторів базису простору називають його *вимірністю*.

Лінійний простір називають *скінченновимірним* (позначають $\mathbb{V}^n$), якщо він має базис із скінченної кількості векторів (а саме n) та *нескінченновимірним*, якщо в ньому існує будь-яка кількість лінійно незалежних векторів.

Приклади базисів

У кожному лінійному просторі можна вказати скільки завгодно базисів, але при цьому всі базиси простору містять однакову кількість векторів.

1. «Стандартний» базис простору $\mathbb{R}^n$ n-вимірних арифметичних векторів утворюють вектори

$$\overline{e}_j = (0,\ldots,0,\underset{j}{1},0,\ldots,0), j = \overline{1,n}.$$

2. Базис простору $\mathbb{R}^{2\times 2}$ квадратних матриць порядку 2 утворюють матриці:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, цей простір — чотиривимірний.

3. Базис простору розв'язків однорідної системи

$$A_{m\times n}\vec{x} = \vec{0},$$

що має ненульові розв'язки, утворює її ФСР. Вимірність цього лінійного простору дорівнює кількості елементів ФСР, тобто $n - r$, де r — ранг матриці однорідної системи, а n — кількість невідомих.

13.7. Евклідові простори

Означення 13.3. Лінійний простір $\mathbb{E}$ називають *евклідовим*, якщо кожній парі векторів $\overline{x}, \overline{y}$ з $\mathbb{E}$ поставлено у відповідність дійсне число $(\overline{x}, \overline{y})$, яке називають *скалярним добутком*, що справджує аксіоми:

I. $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{y}, \overline{x})$ (*симетричність*).

II. $(\alpha\overline{x}, \overline{y}) = \alpha(\overline{x}, \overline{y})$ (*однорідність за першим співмножником*).

III. $(\overline{x} + \overline{y}, \overline{z}) = (\overline{x}, \overline{z}) + (\overline{y}, \overline{z})$ (*лінійність за першим співмножником*).

IV. $(\overline{x}, \overline{x}) = \left|\overline{x}\right|^2 \geq 0, (\overline{x}, \overline{x}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$ (*додатна визначеність*).

Простір $\mathbb{R}^n$ n-вимірних арифметичних векторів стає евклідовим, якщо для векторів

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n,$$
$$\overline{y} = y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + \ldots + y_n\overline{e}_n$$

означити скалярний добуток формулою

$$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \Leftrightarrow (\overline{x}, \overline{y}) = \overleftarrow{x} \cdot \vec{y} = \overleftarrow{y} \cdot \vec{x}.$$

Означення 13.4. *Нормою* (*довжиною*) вектора $\overline{x} \in \mathbb{E}$ називають число

$$\boxed{\left\|\overline{x}\right\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})}.}$$

Із формули для скалярного добутку одержимо формулу для норми вектора $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\left\|\overline{x}\right\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots + (x_n)^2}.}$$

Запроваджене таким чином поняття норми вектора узагальнює поняття довжини вектора у просторі $\mathbb{R}^3$.

Твердження 13.1. Якщо $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{E}, \lambda \in \mathbb{R}$, то:

① $\left\|\overline{x}\right\| \geq 0, \left\|\overline{x}\right\| = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$;

② $\left\|\lambda\overline{x}\right\| = \left|\lambda\right|\left\|\overline{x}\right\|$;

③ $\left|(\overline{x}, \overline{y})\right| \leq \left\|\overline{x}\right\|\left\|\overline{y}\right\|$;

④ $\left\|\overline{x} + \overline{y}\right\| \leq \left\|\overline{x}\right\| + \left\|\overline{y}\right\|$.

▶ ② $\left\|\lambda\bar{x}\right\| = \sqrt{(\lambda\bar{x},\lambda\bar{x})} = \sqrt{\lambda^2(\bar{x},\bar{x})} = \left|\lambda\right|\sqrt{(\bar{x},\bar{x})} = \left|\lambda\right|\left\|\bar{x}\right\|$.

③ Якщо $\bar{x} = \bar{0}$, то нерівність виконано. Нехай $\bar{x} \neq \bar{0}$. Якщо $\bar{x},\bar{y}$ — лінійно залежні, тобто $\exists\lambda : \bar{y} = \lambda\bar{x}$, то

$$\left|(\bar{x},\lambda\bar{x})\right| = \left|\lambda\right|\left\|\bar{x}\right\|^2; \left\|\bar{x}\right\|\left\|\lambda\bar{x}\right\| = \left|\lambda\right|\left\|\bar{x}\right\|^2.$$

Нехай тепер, $\bar{x},\bar{y}$ — лінійно незалежні. Тоді, $\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R} : \alpha\bar{x} - \beta\bar{y} \neq \bar{0}$, зокрема і для $\alpha = \left\|\bar{y}\right\|, \beta = \left\|\bar{x}\right\|$. Розглянемо

$$0 < (\left\|\bar{y}\right\|\bar{x} - \left\|\bar{x}\right\|\bar{y}, \left\|\bar{y}\right\|\bar{x} - \left\|\bar{x}\right\|\bar{y}) = 2\left\|\bar{x}\right\|^2\left\|\bar{y}\right\|^2 - 2\left\|\bar{x}\right\|\left\|\bar{y}\right\|(\bar{x},\bar{y}) \Rightarrow$$
$$(\bar{x},\bar{y}) < \left\|\bar{x}\right\|\left\|\bar{y}\right\|; \qquad (\bar{x},-\bar{y}) < \left\|\bar{x}\right\|\left\|-\bar{y}\right\|;$$
$$-(\bar{x},\bar{y}) < \left\|\bar{x}\right\|\left\|\bar{y}\right\| \Rightarrow \left|(\bar{x},\bar{y})\right| < \left\|\bar{x}\right\|\left\|\bar{y}\right\|.$$

Цю нерівність називають *нерівністю Коші — Буняковського.*

④ $\left\|\bar{x}+\bar{y}\right\|^2 - (\left\|\bar{x}\right\| + \left\|\bar{y}\right\|)^2 =$

$$= (\bar{x}+\bar{y},\bar{x}+\bar{y}) - (\left\|\bar{x}\right\| + \left\|\bar{y}\right\|)^2 = 2((\bar{x},\bar{y}) - \left\|\bar{x}\right\|\left\|\bar{y}\right\|) \leq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\|\bar{x}+\bar{y}\right\| \leq \left\|\bar{x}\right\| + \left\|\bar{y}\right\|.$$

Цю нерівність називають *нерівністю трикутника*. ◀

Для ортогональних векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ (векторів для яких $(\bar{x},\bar{y}) = 0$) правдива «Піфагорова теорема»:

$$\boxed{\left\|\bar{x}+\bar{y}\right\|^2 = \left\|\bar{x}\right\|^2 + \left\|\bar{y}\right\|^2.}$$

Кутом між ненульовими векторами $\bar{x},\bar{y} \in \mathbb{E}$ називають число

$$\boxed{\widehat{(\bar{x},\bar{y})} = \arccos\frac{(\bar{x},\bar{y})}{\left\|\bar{x}\right\|\left\|\bar{y}\right\|}.}$$

Теорема 13.2. Будь-яка ортонормована система з n векторів утворює ортонормований базис простору $\mathbb{E}^n$.

▶ Доведімо лінійну незалежність системи. Помножмо рівність

$$\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{x}_n = 0$$

скалярно на $\bar{x}_j, j = \overline{1,n}$. Ураховуючи попарну ортогональність векторів, одержимо:

$$\lambda_j(\bar{x}_j,\bar{x}_j) = 0, j = \overline{1,n}.$$

Оскільки то що й означає лінійну незалежність системи векторів $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$.

Отже, за означенням вона утворює базис вимірного простору $\mathbb{E}^n$. ◀

Виявляється, що будь-яку лінійно незалежну систему з векторів можна перетворити на ортонормований базис евклідового простору $\mathbb{E}^n$.

13.8. Стереографічна проекція

Побудуймо ще одне зображення множини комплексних чисел, навіть поповненої нескінченно віддаленою точкою Розгляньмо сферу, яка торкається комплексної площини в точці (рис. 13.10). Позначмо через точку сфери, діаметрально

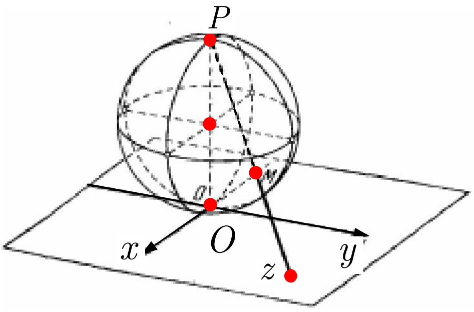


Рис. 13.10

протилежну точці Кожній точці комплексної площини поставмо у відповідність точку — точку перетину сфери з відрізком, що з'єднує точки та Самій точці відповідає нескінченно віддалена точка.

Така відповідність між точками розширеної комплексної площини (доповненої точкою є взаємно однозначною, її називають *стереографічною проекцією*, а сферу — *сферою Рімана*.

13.9. Подальше поширення числових множин

Для системи комплексних чисел — точок площини — можна означити додавання та множення так, щоб вона містила систему дійсних чисел. Хоча платою за це була втрата впорядкованості.

Виявляється, що не можна означити додавання і множення точок тривимірного простору, щоб сукупність точок стала числовою системою, що містить у собі систему комплексних чисел чи хоча б систему дійсних чисел.

Оскільки додавання комплексних чисел еквівалентне додаванню радіусів-векторів на площині, природно поставити питання: чи можна за деяких n так означити множення векторів у щоб щодо цього множення і звичайного додавання векторів побудований простір виявився числовою системою, що містить у собі систему дійсних чисел.

Можна показати, що така побудова можлива, наприклад, для при цьому втрачається комутативність множення. Одержимо систему *кватерніонів* — чисел вигляду

$$x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k,$$

де $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ — координати кватерніона; i, j, k — цілком реальні одиниці, зв'язані співвідношеннями:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Дійсною частиною кватерніона називають число — скаляр, а уявною — вектор

$$\tilde{x} = x_1 i + x_2 j + x_3 k\,.$$

Історично так і відбулося — вектори ввійшли в математику і фізику саме як спрощення кватерніонів.

Цікаво перемножуються уявні кватерніони:

$$\tilde{x}\tilde{y} = -(\tilde{x}, \tilde{y}) + [\tilde{x}, \tilde{y}],$$

де — скалярний, а — векторний добуток «векторів» та $\tilde{y}$.

Подальше поширення чисел можливо для — одержимо систему октав — чисел Келі. Для них вже порушено асоціативність множення.

3

Методи й моделі аналітичної геометрії

14. Рівняння ліній і поверхонь

14.1. Вступ до аналітичної геометрії

В аналітичній геометрії геометричні об'єкти вивчають за допомогою методів алгебри і математичного аналізу. Таке вивчення ґрунтується на методі координат, за якого положення точки на прямій, площині чи у просторі описують відповідно одним, двома або трьома числами — координатами цієї точки, а кожній кривій (поверхні) відповідає одне або кілька рівнянь, які зв'язують координати будь-якої точки, що їм належить.

Дві основні задачі аналітичної геометрії формулюють так:

1) знаючи геометричні властивості кривої (поверхні), знайти її рівняння;

2) знаючи рівняння кривої (поверхні), вивчити її форму і властивості.

14.2. Лінії на площині

Рівняння лінії у прямокутній декартовій системі координат

Виберімо ПДСК на площині і розгляньмо деяку лінію L.

Означення 14.1. *Рівнянням лінії* L у заданій ПДСК називають рівняння

$$\boxed{F(x,y) = 0,}$$

яке справджують координати x, y усіх точок цієї лінії й лише вони.

Зокрема, рівняння лінії може мати вигляд

$$\boxed{y = f(x).}$$

Отже, в аналітичній геометрії, на відміну від елементарної геометрії, під *лінією* розуміють множину точок (ще кажуть — *геометричне місце точок*), координати яких справджують рівняння $F(x,y)=0$. Рівняння $F(x,y)=0$ означує поверхню.

Приміром, коло з центром у точці O і радіусом R можна розглядати як множину точок, віддалених від точки O на віддаль R. Це означає, що для будь-якої точки M, що лежить на колі, $\left|MO\right|=R$. Якщо ж точка M' не лежить на колі, то $\left|M'O\right|\neq R$ (рис. 14.1).

Щоб дістати рівняння деякої лінії L (рис. 14.2), треба виразити геометричне означення (характерну властивість) лінії через координати її довільної точки лінії.

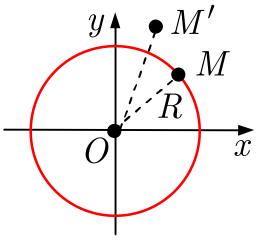


Рис. 14.1

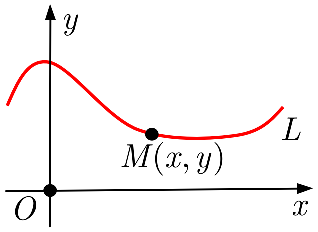


Рис. 14.2

Приклад 14.1. Виведімо у ПДСК рівняння еліпса — кривої із властивістю: сума віддалей від довільної точки еліпса до двох фіксованих точок, які називають фокусами еліпса, є сталою, що дорівнює $2a$, більшою, ніж віддаль між фокусами $2c$.

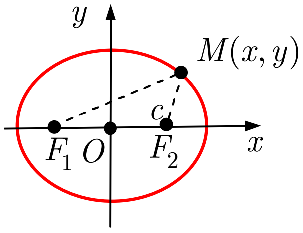


Рис. 14.3

❍Нехай F_1 та F_2 — фокуси еліпса. За початок координат візьмімо точку O — середину відрізка F_1F_2, а за вісь Ox — пряму F_1F_2 (рис. 14.3).

Фокуси у вибраній ПДСК матимуть координати $F_1(-c;0)$ та $F_2(c;0)$. За означенням еліпса точка $M(x;y)$ належатиме еліпсу, якщо

$$\left|MF_1\right|+\left|MF_2\right|=2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Після спрощення рівняння еліпса набуде вигляду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Оскільки $2a>2c$, то $a^2-c^2>0$. Позначаючи $a^2-c^2=b^2$, маємо

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad b=\sqrt{a^2-c^2}<a.$$●

Рівняння лінії в полярній системі координат

Вигляд рівняння лінії L залежить не лише від самої лінії, а й від вибору системи координат. Отже, для рівняння лінії суттєво вказувати систему координат, у якій це рівняння виписано.

Рівнянням лінії в полярній системі координат (п. 11.4) називають рівняння

$$\boxed{\Phi(\rho, \varphi) = 0,}$$

яке справджують полярні координати ρ та φ всіх точок цієї лінії й лише вони.

Зокрема, рівняння лінії в полярних координатах може мати вигляд

$$\boxed{\rho = \rho(\varphi).}$$

Приклад 14.2. Дослідімо і побудуймо кардіоїду — криву з рівнянням $\rho = a(1+\cos\varphi), a > 0$, у полярних координатах.

❍ Оскільки завжди $a(1+\cos\varphi) \geq 0$, то обмежень на полярний кут немає.

Завдяки парності функції $\rho = a(1+\cos\varphi)$ крива симетрична щодо полярної осі.

Якщо полярний кут φ змінювати від 0 до π, то полярний радіус ρ змінюватиметься від $2a$ до 0. Знайдімо кілька точок на кардіоїді:

φ	0	$\pi/3$	$\pi/2$	π
ρ	$2a$	$3a/2$	a	0

Будуємо кардіоїду (рис. 14.4). ●

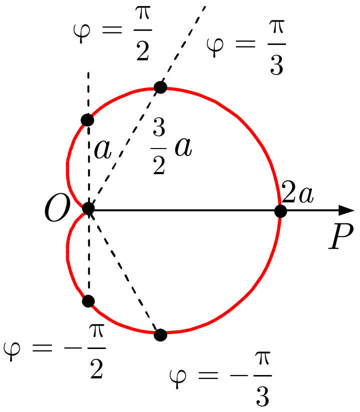


Рис. 14.4

Параметричні рівняння лінії у ПДСК

Нехай точка рухається вздовж деякої лінії L, а її декартові координати в кожний момент t справджують рівняння

$$\boxed{x = x(t), y = y(t), t \in T.}$$

Означення 14.2. *Параметричними рівняннями* лінії L у ПДСК називають співвідношення

$$\boxed{\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}}$$

де функції $x(t)$ та $y(t)$ мають спільну область означення T. Кожному значенню $t \in T$ відповідає точка $M(x(t); y(t)) \in L$ і для будь-якої точки $M(x; y) \in L$ знайдеться таке значення $t \in T$, що $x(t), y(t)$ є координатами точки M.

Параметричні рівняння лінії можна записати у векторному вигляді:

$$\boxed{\overline{r} = \overline{r}(t), t \in T, \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, t \in T.}$$

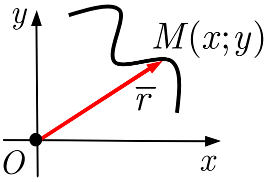


Рис. 14.5

Векторне параметричне рівняння використовують у механіці як рівняння руху точки M, яка в кожний момент t має певні координати x, y (рис. 14.5).

Загалом параметр t — не обов'язково час, це може бути будь-яка інша величина, що характеризує положення точки на лінії.

Приклад 14.3. Одержімо різні типи рівняння кола радіусом R із центром у початку координат.

❍ Запровадьмо полярну систему координат з полюсом у центрі кола (рис. 14.6). Тоді коло матиме полярне рівняння $\rho = R$. Ураховуючи зв'язок між полярними і декартовими координатами, у ПДСК, узгодженій з полярною системою координат, запишемо рівняння кола

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R \Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 = R^2.}$$

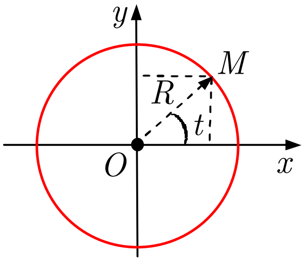


Рис. 14.6

Якщо за параметр t вибрати кут між радіусом-вектором точки M і додатною піввіссю осі абсцис, то дістанемо параметричні рівняння кола:

$$\boxed{\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} t \in [0; 2\pi).}$$ ●

Зауваження 14.1.

1. Рівняння $F(x, y) = 0$ може визначати множини точок, що не узгоджуються з інтуїтивним поняттям кривої або не визначати жодного геометричного образу. Приміром,

1) рівняння $x^2 + y^2 = 0$ у ПДСК на площині визначає точку $O(0; 0)$;

2) рівняння $|y| - y = 0$ у ПДСК на площині визначає верхню півплощину з віссю Ox;

3) рівняння $x^2 + y^2 + 1 = 0$ визначає порожню множину точок.

2. Рівняння кривої може містити лише одну з координат, але визначати криву. Приміром, рівняння $y = 0$ визначає на площині пряму — вісь Ox.

Координати точки перетину ліній

Щоб знайти координати всіх точок перетину ліній L_1 та L_2, заданих рівняннями $F_1(x, y) = 0$ та $F_2(x, y) = 0$, розв'язують систему рівнянь

$$\boxed{\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}}$$

Кожний розв'язок системи визначає точку перетину ліній L_1 та L_2. Якщо система не має розв'язків, то лінії L_1 та L_2 не перетинаються.

14.3. Поверхні

Рівняння поверхні у ПДСК

Виберімо ПДСК у просторі і розгляньмо деяку поверхню S.

Означення 14.3. *Рівнянням поверхні* S у заданій ПДСК називають рівняння

$$\boxed{F(x, y, z) = 0,}$$

яке справджують координати x, y та z усіх точок цієї поверхні й лише вони.

Зокрема, рівняння поверхні у ПДСК може мати вигляд

$$\boxed{z = f(x, y).}$$

Отже, в аналітичній геометрії, на відміну від елементарної геометрії, будь-яку поверхню S (у заданій системі координат) розглядають як множину точок, які справджують рівняння $F(x, y, z) = 0$.

Якщо систему координат вибрано, то будь-яка крива має рівняння. Щоб дістати рівняння деякої поверхні S у вибраній системі координат треба виразити геометричне означення (характерну властивість) поверхні через координати довільної точки поверхні.

Приклад 14.4. Складімо у ПДСК рівняння сфери радіусом R із центром у точці O (рис. 14.7).

❍ Виберімо за початок координат ПДСК точку O, центр сфери. Тоді точка $M(x; y; z)$ належатиме сфері, якщо

$$\left|OM\right| = R \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R.$$

Після перетворення маємо неявне рівняння сфери у ПДСК:

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2.} \bullet$$

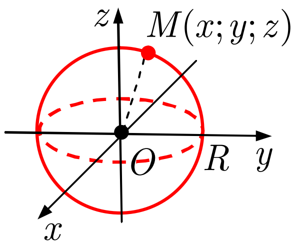


Рис. 14.7

Означення 14.4. *Параметричними рівняннями поверхні* S у ПДСК називають співвідношення

$$\boxed{\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases}}$$

де функції $x(u, v), y(u, v)$ та $z(u, v)$ мають спільну область означення D. Кожній парі чисел $(u, v) \in D$ відповідає точка $M(x(u, v); y(u, v); z(u, v)) \in S$ і для кожної точки $M \in S$ знайдеться така пара чисел $(u, v) \in D$, що $x(u, v), y(u, v)$ та $z(u, v)$ будуть координатами точки M.

Зауваження 14.2.

1. Рівняння $F(x, y, z) = 0$ може визначати множини точок, що не узгоджуються з інтуїтивним поняттям поверхні або не визначати жодного геометричного образу. Приміром,

1) рівняння $x^2 + y^2 = 0$ у ПДСК означує точки осі Oz;

2) рівняння $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ означує порожню множину точок.

2. Рівняння поверхні може не містити якоїсь координати чи координат, але визначати поверхню у просторі. Приміром, рівняння $z = 0$ означує у ПДСК площину Oxy.

14.4. Рівняння лінії у просторі

Лінію у просторі природно розглядати як переріз двох поверхонь, тобто як геометричне місце точок, що лежать одночасно на двох поверхнях.

Якщо $F_1(x, y, z) = 0$ та $F_2(x, y, z) = 0$ — рівняння двох поверхонь, перетином яких є лінія L, то: 1) координати будь-якої точки, що лежить на лінії L, справджують обидва рівняння одночасно; 2) обидва рівняння одночасно не справджують координати жодної точки, що не лежить на лінії L.

Отже, система рівнянь

$$\boxed{\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}}$$

означує лінію L, тобто є рівняннями цієї лінії.

Приміром, два рівняння

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

разом означують коло (як перетин двох сфер) (рис. 14.8).

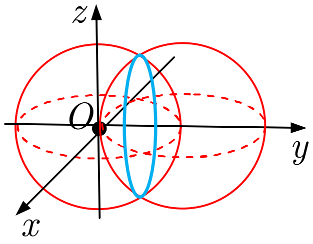


Рис. 14.8

Параметричні рівняння лінії у просторі

Лінію у просторі можна розглядати як шлях, пройдений матеріальною точкою, що неперервно рухається за певним законом. Як і для лінії на площині, це приводить до параметричного зображення лінії у просторі, тобто координати x, y та z будь-якої лінії задають як неперервні функції деякого параметра t:

$$\boxed{\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), t \in T. \end{cases}}$$

Параметричні рівняння лінії у просторі можна записати у векторному вигляді

$$\boxed{\overline{r} = \overline{r}(t), t \in T.}$$

14.5. Перетворення ПДСК на площині

Нехай на площині задано дві прямокутні декартові системи координат Oxy та $O'x'y'$ (рис. 14.9).

Нехай довільна точка M у системі Oxy має координати $(x;y)$, а в системі $O'x'y'$ — координати $(x';y')$. Установімо зв'язок між цими координатами.

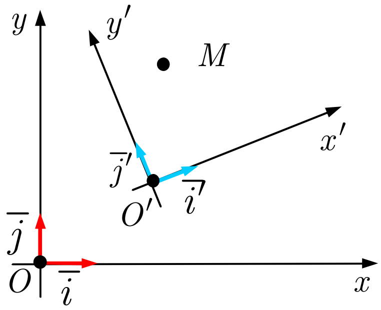


Рис. 14.9

Паралельне перенесення координатних осей

Припустімо, що ПДСК $O'x'y'$ одержана із ПДСК Oxy *паралельним перенесенням*. Це означає, що орти координатних осей рівні $\overline{i} = \overline{i'}, \overline{j} = \overline{j'}$, а початки координат різні (рис. 14.10) .

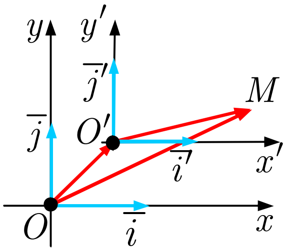


Рис. 14.10

Нехай $\overline{r}$ та $\overline{r}'$ — радіуси-вектори точки M щодо точок O та O', тобто

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j},$$
$$\overline{r}' = x'\overline{i} + y'\overline{j},$$

а $(a;b)$ — координати точки O' у ПДСК Oxy, тобто

$$\overline{OO'} = a\overline{i} + b\overline{j}.$$

Оскільки

$$\overline{r} = \overline{r}' + \overline{OO'},$$

то

$$x\overline{i} + y\overline{j} = (x'\overline{i} + y'\overline{j}) + (a\overline{i} + b\overline{j}),$$

або

$$\boxed{\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases}}$$

Повертання координатних осей

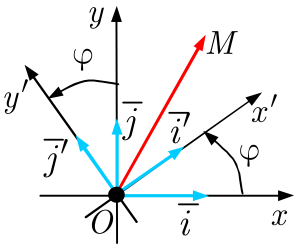


Рис. 14.11

Припустімо, що координатні осі ПДСК $Ox'y'$ одержано з координатних осей ПДСК Oxy *повертанням* на кут φ (рис. 14.11). Отже, системи мають різні базиси $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ та $\{\overline{i'}, \overline{j'}\}$, але спільні початки координат. Координатами орта $\overline{i'}$ в базисі $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ є косинуси кутів φ та $\dfrac{\pi}{2} - \varphi$, які утворює вектор $\overline{i'}$ відповідно з осями Ox та Oy:

$$\overline{i'} = \overline{i}\cos\varphi + \overline{j}\sin\varphi,$$

а координатами орта $\overline{j'}$ є косинуси кутів $\varphi + \dfrac{\pi}{2}$ та φ:

$$\overline{j'} = -\overline{i}\sin\varphi + \overline{j}\cos\varphi.$$

Оскільки радіуси-вектори $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j}$ та $\overline{r'} = x'\overline{i'} + y'\overline{j'}$ довільної точки M рівні, то

$$x\overline{i} + y\overline{j} = x'\overline{i'} + y'\overline{j'}.$$

Замінюючи вектори $\overline{i}$ та $\overline{j}$ їхніми виразами, дістанемо:

$$\begin{aligned} x\overline{i} + y\overline{j} &= x'(\overline{i}\cos\varphi + \overline{j}\sin\varphi) + y'(-\overline{i}\sin\varphi + \overline{j}\cos\varphi) = \\ &= (x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)\overline{i} + (x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)\overline{j}, \end{aligned}$$

або

$$\boxed{\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases}}$$

Ураховуючи, що стару систему координат можна одержати з нової повертанням на кут $-\varphi$, маємо, що нові координати виражаються через старі так:

$$\boxed{\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}}$$

Переорієнтування координатних осей

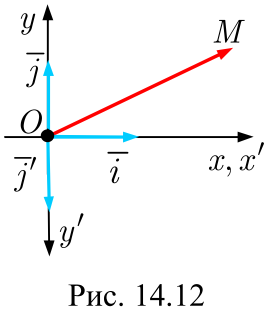


Рис. 14.12

Припустімо, що осі Ox та Ox' координатних систем збігаються, а осі ординат Oy та Oy' напрямлені протилежно (систему Oxy' одержано *переорієнтуванням* системи Oxy) (рис. 14.12).

Базисні вектори систем зв’язані співвідношеннями

$$\overline{i} = \overline{i'}, \quad \overline{j} = -\overline{j'},$$

а координати $(x;y)$ та $(x';y')$ довільної точки M зв'язані рівностями:

$$\boxed{\begin{cases} x = x', \\ y = -y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}}$$

Загальне перетворення

Твердження 14.1. Будь-яке перетворення прямокутних декартових координат (зі збереженням масштабу) можна подати як послідовність перенесень, повертань і переорієнтування.

Якщо систему $O'x'y'$ одержано із системи Oxy паралельним перенесенням початку координат $O(0;0)$ у точку $O'(a;b)$ та повертанням координатних осей на кут φ, то координати $(x;y)$ та $(x';y')$ довільної точки M зв'язані рівностями:

$$\boxed{\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + a, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + b. \end{cases}}$$

Якщо систему $O'x'y'$ одержано із системи Oxy паралельним перенесенням, повертанням та переорієнтуванням, то координати $(x;y)$ та $(x';y')$ довільної точки M зв'язані рівностями:

$$\boxed{\begin{cases} x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi + a, \\ y = x'\sin\varphi - y'\cos\varphi + b. \end{cases}}$$

Приклад 14.5. Знайдімо рівняння гіперболи $y = \dfrac{1}{x}$ у ПДСК, одержаній з початкової ПДСК повертанням на кут $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ (рис. 14.13).

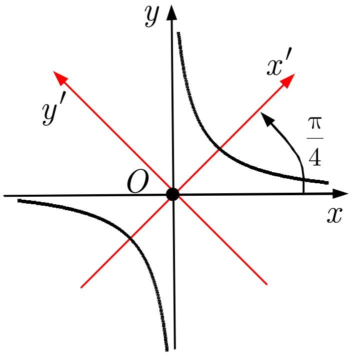


Рис. 14.13

❍ Підставляючи формули перетворення координат

$$\begin{cases} x = x'\cos\dfrac{\pi}{4} - y'\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{x'}{\sqrt{2}} - \dfrac{y'}{\sqrt{2}}, \\ y = x'\sin\dfrac{\pi}{4} + y'\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{x'}{\sqrt{2}} + \dfrac{y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

у рівняння гіперболи $xy = 1$, дістаємо:

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

— канонічне рівняння рівнобічної гіперболи (п. 16.4). ●

14.6. Лінійні перетворення на площині

Нехай на площині задано базис із двох неколінеарних векторів $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$.

Означення 14.5. Перетворення вектора

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 = \vec{x}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2\}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2\}}$$

у вектор

$$\overline{y} = y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 = \vec{y}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2\}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2\}},$$

означене співвідношенням

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{y} = A\vec{x},$$

називають *лінійним перетворенням* площини, а матрицю A — *матрицею перетворення*.

Це перетворення вектори базису

$$\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2\}}, \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\overline{e}_1,\overline{e}_2\}}$$

переводить у вектори

$$\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = a_{11}\overline{e}_1 + a_{21}\overline{e}_2;$$

$$\overline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = a_{12}\overline{e}_1 + a_{22}\overline{e}_2.$$

Отже, стовпці матриці лінійного перетворення є координатами образів базисних векторів.

Приклади лінійних перетворень: повертання на кут φ (рис. 14.14); розтягання в k разів (рис. 14.15).

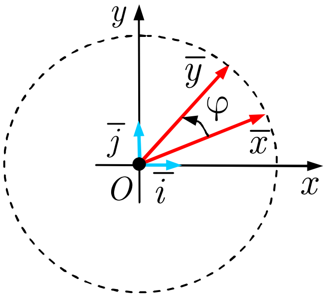


Рис. 14.14

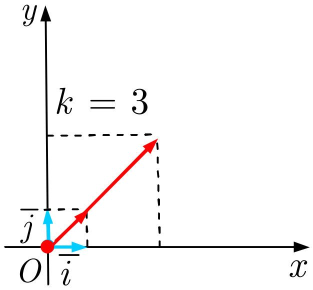


Рис. 14.15

Розгляньмо детальніше повертання на кут φ. Після такого перетворення ортонормований базис $\{\overline{i},\overline{j}\}$ ПДСК Oxy переходить у базис $\{\overline{i}',\overline{j}'\}$ ПДСК $Ox'y'$ (п. 14.5):

$$\overline{i}' = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_{\{\overline{i},\overline{j}\}}, \quad \overline{j}' = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}_{\{\overline{i},\overline{j}\}}.$$

Отже, матриця цього лінійного перетворення

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.}$$

Її визначник

$$\det A = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$$

а оберненою до неї є матриця

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = A^{\mathrm{T}}.$$

Квадратні оборотні матриці A^{-1}, які мають властивість

$$\boxed{A^{-1} = A^{\mathrm{T}},}$$

називають *ортогональними*. Вони задають *ортогональні* перетворення, які зберігають довжини і кути. Визначник таких матриць дорівнює 1 або -1. Справді,

$$AA^{-1} = AA^{\mathrm{T}} = E_n \Rightarrow (\det A)^2 = \det E_n = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1.$$

15. Геометрія прямої і площини

15.1. Пряма у просторі

Пряму L, що проходить через точку M_0 паралельно ненульовому векторові $\overline{s}$ (позначатимемо через $L(M_0;\overline{s})$), можна розглядати як множину точок M, таких, що вектори $\overline{M_0M}$ та $\overline{s}$ колінеарні (рис. 15.1):

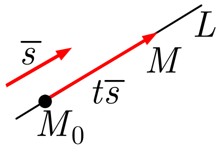


Рис. 15.1

$$M \in L(M_0;\overline{s}) \Leftrightarrow \overline{M_0M} = t\overline{s}, t \in \mathbb{R}.$$

Вектор $\overline{s}$ називають *напрямним вектором* прямої L.

Якщо N_0 — довільна точка прямої $L(M_0;\overline{s})$ і вектор $\overline{q} \neq \overline{0}$ — довільний вектор, колінеарний вектору $\overline{s}$, то точка N_0 і вектор $\overline{q}$ також задають пряму L.

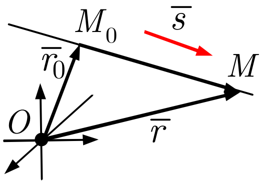
Твердження 15.1. Через будь-які дві різні точки M_0 та M_1 проходить одна й лише одна пряма.

Параметричні рівняння прямої у просторі

Нехай задано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Пряму $L(M_0;\overline{s})$ (рис. 15.2) задають точкою[*]

$$M_0(x_0;y_0;z_0)=M_0(\overline{r}_0)$$

і напрямним вектором



$$\overline{s}=\begin{pmatrix} l\\ m\\ n\end{pmatrix}.$$

Рис. 15.2

Нехай точка $M(x;y;z)=M(\overline{r})\in L(M_0;\overline{s})$. Тоді

$$\overline{M_0M}=\overline{OM}-\overline{OM_0}=\overline{r}-\overline{r}_0=t\overline{s}.$$

Рівняння

$$\boxed{\overline{r}=\overline{r}_0+t\overline{s}, t\in\mathbb{R}} \qquad (15.1)$$

називають *векторним параметричним рівнянням* прямої $L(M_0;\overline{s})$. Кожній точці прямої відповідає певне значення параметра t. Навпаки, кожному значенню параметра t відповідає певний радіус-вектор точки на прямій.

З рівняння (15.1) дістаємо *параметричні рівняння прямої*:

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} l\\ m\\ n\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}, \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x=x_0+lt,\\ y=y_0+mt, t\in\mathbb{R}.\\ z=z_0+nt,\end{cases}}$$

Канонічні рівняння прямої у просторі

З колінеарності векторів $\overline{r}-\overline{r}_0$ та $\overline{s}$ випливають співвідношення

$$\boxed{\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}},$$

які називають *канонічними рівняннями прямої*. Їх сприймають як умову колінеарності векторів, і якщо, приміром, $n=0$, то це означає, що

$$z-z_0=0,\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}.$$

Якщо ж, приміром, $m=n=0$, то це означає, що

$$y-y_0=0,\ z-z_0=0, x\in\mathbb{R}.$$

Зокрема:

---

[*] Запис $M(\overline{r})$ означає, що точці M відповідає її радіус-вектор $\overline{r}=\overline{OM}$.

$$L(M_0;\overline{i}):\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{0}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R},\ y=y_0,\ z=z_0;$$

$$L(M_0;\overline{j}):\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{1}=\frac{z-z_0}{0}\Leftrightarrow x=x_0,\ y\in\mathbb{R},\ z=z_0;$$

$$L(M_0;\overline{k}):\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{1}\Leftrightarrow x=x_0,\ y=y_0,\ z\in\mathbb{R}.$$

Напрямний вектор прямої, що проходить через дві різні точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ та $M_2(x_2;y_2;z_2)$,

$$\overline{s}=\overline{M_1M_2}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}.$$

Отже, канонічні рівняння прямої M_1M_2, що проходить через дві різні точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ та $M_2(x_2;y_2;z_2)$:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.}$$

15.2. Площина

Площину P, що проходить через точку M_0, паралельно двом неколінеарним векторам $\overline{u},\overline{v}$ (позначатимемо $P(M_0;\overline{u},\overline{v})$), можна розглядати як множину точок M, для яких вектори $\overline{M_0M},\overline{u},\overline{v}$ — компланарні (рис. 15.3):

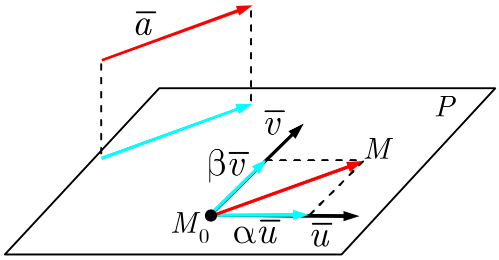


Рис. 15.3

$$M\in P(M_0;\overline{u},\overline{v})\Leftrightarrow\overline{M_0M}=\alpha\overline{u}+\beta\overline{v}.$$

Вектори $\overline{u}$ та $\overline{v}$ утворюють базис на площині P.

Вектор $\overline{a}$ називають *паралельним площині* $P(M_0;\overline{u},\overline{v})$, якщо вектори $\overline{a},\overline{u},\overline{v}$ — компланарні (рис. 15.3).

Якщо точка Q належить площині $P(M_0;\overline{u},\overline{v})$ та $\overline{p},\overline{q}$ — неколінеарні вектори, які паралельні площині P, то площина $P'(Q;\overline{p},\overline{q})$ зливається з площиною P.

Твердження 15.2. Через три точки, що не лежать на одній прямій, проходить одна й лише одна площина.

Параметричні рівняння площини

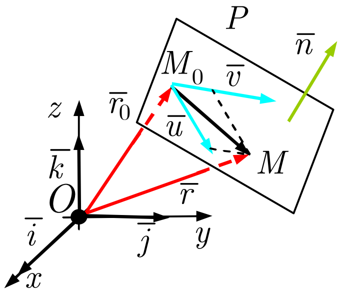


Рис. 15.4

Нехай задано ПДСК, площину P, що проходить через точку $M_0(\bar r_0) = M_0(x_0; y_0; z_0)$, і пару неколінеарних векторів $\bar u$ та $\bar v$, які паралельні площині P (рис. 15.4).

Точка $M(\bar r)$ належить площині $P(M_0; \bar u, \bar v)$ тоді й лише тоді, коли вектори

$$\bar r - \bar r_0 = \overline{M_0M},\ \bar u, \bar v \text{ — компланарні.}$$

Отже, знайдуться такі числа t_1 та t_2, що

$$\bar r - \bar r_0 = t_1\bar u + t_2\bar v, t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\bar r = \bar r_0 + t_1\bar u + t_2\bar v, t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}.} \qquad (15.2)$$

Рівняння (15.2) називають *векторним параметричним рівнянням площини*. Кожній точці площини відповідають певні значення двох параметрів t_1 та t_2. Навпаки, які б дійсні числа не підставити замість параметрів t_1 та t_2, рівняння (15.2) визначає певний радіус-вектор точки на площині.

Векторне параметричне рівняння площини еквівалентне *параметричним рівнянням площини*:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = t_1u_x + t_2v_x, \\ y - y_0 = t_1u_y + t_2v_y, \\ z - z_0 = t_1u_z + t_2v_z, \end{cases}$$

$$t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Загальне рівняння площини

Із компланарності векторів $\bar r - \bar r_0, \bar u, \bar v$ випливає (п. 10.5), що

$$(\bar r - \bar r_0, \bar u, \bar v) \equiv (\bar r - \bar r_0, [\bar u, \bar v]) = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислімо визначник, розкладаючи його за першим рядком (п. 2.1):

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \qquad (15.3)$$

де

$$a = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, b = -\begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}, c = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}.$$

Рівність (15.3) можна розглядати як скалярний добуток ортогональних векторів

$$(\bar n, \overline{M_0M}) = 0,$$

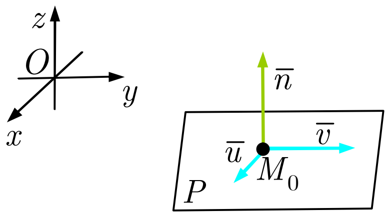


Рис. 15.5

де вектор

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = [\bar{u}, \bar{v}]$$

називають *нормальним вектором площини* $P \perp \bar{n}$ (рис. 15.5).

Рівність (15.3) можна перетворити на *загальне рівняння площини* P

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0,} \qquad (15.4)$$

де $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Зауваження 15.1.

1. Оскільки вектори $\bar{u}, \bar{v}$ утворюють базис на площині, тобто лінійно незалежні, то не всі коефіцієнти a, b, c дорівнюють нулеві.

2. У загальному рівнянні площини P коефіцієнти a, b, c при невідомих є координатами нормального вектора $\bar{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Ненульовий вектор називають *перпендикулярним до площини*, якщо він ортогональний до обох її базисних векторів або колінеарний її нормальному векторові.

Отже, площину в ПДСК можна задати лінійним рівнянням — її загальним рівнянням.

Теорема 15.3. У ПДСК у просторі будь-яке лінійне рівняння вигляду $ax + by + cz + d = 0$ задає площину.

►Доведімо, що лінійне рівняння вигляду (15.4), де не всі коефіцієнти a, b, c дорівнюють нулю, є рівнянням площини.

Матриця системи, що складається з рівняння (15.4), має ранг 1. Загальний розв'язок системи (15.4)

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2,$$

де $\vec{x}_0$ — частинний розв'язок системи (15.4); $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ — фундаментальна система розв'язків відповідної однорідної системи; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Отже, рівняння (15.4) задає площину $P(M(\bar{x}_0); \bar{e}_1, \bar{e}_2)$. ◄

Векторне рівняння площини

Площину можна однозначно задати її точкою $M_0(\bar{r}_0)$ і нормальним вектором $\bar{n}$:

$$P(M_0) \perp \bar{n}.$$

Нехай $M(\overline{r}) \in P$ (див. рис. 15.4). Тоді

$$\overline{M_0M} = \overline{r} - \overline{r}_0 \perp \overline{n}.$$

З ортогональності векторів дістанемо векторне рівняння площини P:

$$\boxed{(\overline{r} - \overline{r}_0, \overline{n}) = 0} \Leftrightarrow (\overline{r}, \overline{n}) - (\overline{r}_0, \overline{n}) = 0. \qquad (15.5)$$

Векторне рівняння (15.5) можна переписати так:

$$(\overline{r}, \overline{n}) + d = 0,$$

де $d = -(\overline{r}_0, \overline{n})$.

У координатній формі це рівняння має вигляд

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,}$$

де a, b, c — координати вектора $\overline{n}$; x, y, z — координати точки $M; x_0, y_0, z_0$ — координати точки M_0.

Окремі випадки загального рівняння площини

Координатні площини мають відповідно рівняння:

$$Oxy \perp \overline{k} : cz = 0 \Leftrightarrow z = 0;$$

$$Oxz \perp \overline{j} : by = 0 \Leftrightarrow y = 0;$$

$$Oyz \perp \overline{i} : ax = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Зауважимо, що вектор $\overline{a}$ паралельний площині $P(M_0) \perp \overline{n}$ тоді й лише тоді, коли він ортогональний до її нормального вектора:

$$\overline{a} \parallel P \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{n}.$$

Приміром, площина P паралельна векторові $\overline{i}$, а, отже, й осі Ox, тоді й лише тоді, коли її нормальний вектор $\overline{n} = (a; b; c)^{\mathrm{T}}$ ортогональний до $\overline{i}$:

$$(\overline{n}, \overline{i}) = a = 0 \Leftrightarrow P : by + cz + d = 0.$$

Якщо в загальному рівнянні площини (15.4) деякі коефіцієнти дорівнюють нулю, то маємо неповні рівняння площини. Зведімо всі випадки виродження (рівності нулю коефіцієнтів) рівняння площини до таблиці (рис. 15.6), де 0 означає, що відповідний коефіцієнт нульовий, а $\not 0$ — відповідний коефіцієнт ненульовий.

a	b	c	d	Висновок
0	0	0	$\not 0$	$P = \varnothing$
0	0	$\not 0$	0	$P = Oxy$
0	0	$\not 0$	$\not 0$	$P \parallel Oxy$
0	$\not 0$	0	0	$P = Oxz$
0	$\not 0$	0	$\not 0$	$P \parallel Oxz$
0	$\not 0$	$\not 0$	0	$Ox \subset P$
0	$\not 0$	$\not 0$	$\not 0$	$P \parallel Ox$

a	b	c	d	Висновок
$\not 0$	0	0	0	$P = Oyz$
$\not 0$	0	0	$\not 0$	$P \parallel Oyz$
$\not 0$	0	$\not 0$	0	$Oy \subset P$
$\not 0$	0	$\not 0$	$\not 0$	$P \parallel Oy$
$\not 0$	$\not 0$	0	0	$Oz \subset P$
$\not 0$	$\not 0$	0	$\not 0$	$P \parallel Oz$
$\not 0$	$\not 0$	$\not 0$	0	$O \in P$

Рис. 15.6

Рівняння площини у відрізках

Якщо всі коефіцієнти в загальному рівнянні площини (15.4) відмінні від нуля, тоді його можна перетворити на *рівняння площини у відрізках*:

$$ax + by + cz = -d;$$

$$\frac{x}{-d/a} + \frac{y}{-d/b} + \frac{z}{-d/c} = 1;$$

$$\boxed{\frac{x}{\tilde{a}} + \frac{y}{\tilde{b}} + \frac{z}{\tilde{c}} = 1.} \qquad (15.6)$$

Його називають так, бо рівняння (15.6) справджують координати точок $A(\tilde{a};0;0)$, $B(0;\tilde{b};0)$ та $C(0;0;\tilde{c})$, і $\left|\tilde{a}\right|, \left|\tilde{b}\right|, \left|\tilde{c}\right|$ — довжини відрізків, які відтинає площина P від осей координат (рис. 15.7).

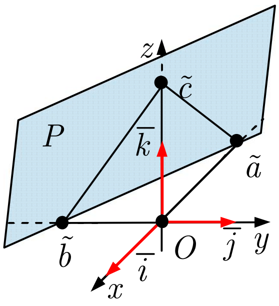


Рис. 15.7

Нормоване рівняння площини

Розгляньмо площину P. Нехай точка H — основа перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину P, а $\overline{OH}$ — радіус-вектор цієї точки (рис. 15.8).

Запишімо рівняння площини P у ПДСК з одиничним нормальним вектором

$$\overline{n}^0 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \uparrow\uparrow \overline{OH}$$

і віддаллю p від початку координат.

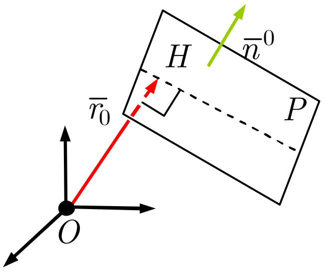


Рис. 15.8

Оскільки

$$\overline{OH} = p\overline{n}^0, p > 0,$$

то, підставляючи в рівняння (15.5) координати векторів $\overline{OH}$ та $\overline{n}^0$, дістанемо:

$$(\overline{r}, \overline{n}^0) - (p\overline{n}^0, \overline{n}^0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\overline{r}, \overline{n}^0) - p = 0 \Leftrightarrow \qquad (15.7)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.} \qquad (15.8)$$

Рівняння (15.7) називають *нормованим рівнянням площини у векторній формі*, а рівняння (15.8) — *нормованим рівнянням площини в координатній формі*.

У нормованому рівнянні всі коефіцієнти мають геометричний зміст: коефіцієнти при x, y та z є напрямними косинусами будь-якого вектора, перпендикулярного до площини, а вільний член — віддаль від початку координат до площини, узята зі знаком «мінус».

Зведімо загальне рівняння (15.4) площини до нормованого, помножуючи обидві частини загального рівняння площини на множник μ:

$$\mu ax + \mu by + \mu cz + \mu d = 0.$$

Підберімо його так, щоб вектор $\begin{pmatrix} \mu a \\ \mu b \\ \mu c \end{pmatrix}$ став одиничним, а $\mu d < 0$.

Тобто

$$\begin{cases} \mu^2 a^2 + \mu^2 b^2 + \mu^2 c^2 = 1, \\ \mu d < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \pm \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \\ \mu d < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = -\frac{\operatorname{sgn} d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \Rightarrow \overline{n}^0 = -\frac{\operatorname{sgn} d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Тим самим загальне рівняння площини перетворено на нормоване рівняння. Множник μ називають *нормувальним*.

15.3. Пряма на площині

Параметричні рівняння прямої на площині

Пряма лінія на площині має двоїсту природу — звісно, зберігаючи всі властивості прямої у просторі, вона набуває властивостей, притаманних площині: лінійне загальне рівняння, нормальний вектор, наявність нормованого рівняння та рівняння у відрізках.

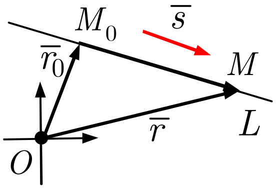


Рис. 15.9

Нехай задано ПДСК Oxy. Наслідком векторного параметричного рівняння прямої $L(M_0; \overline{s})$ (рис. 15.9)

$$\boxed{\overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{s}, t \in \mathbb{R}}$$

є *параметричні рівняння прямої на площині*:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, t \in \mathbb{R}. \end{cases}}$$

Канонічне рівняння прямої на площині

Канонічне рівняння прямої $L(M_0; \overline{s})$ на площині має вигляд

$$\boxed{\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m},} \tag{15.9}$$

де $M_0(x_0;y_0)\in L, \overline{s}=\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ — напрямний вектор прямої L.

Якщо $l=0$ рівняння (15.9) задає вертикальну пряму $x=x_0$, при $m=0$ — горизонтальну пряму $y=y_0$.

Загальне рівняння прямої на площині

Перетворімо рівняння (15.9):

$$m(x-x_0)-l(y-y_0)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \Leftrightarrow (\overline{n},\overline{M_0M})=0, \tag{15.10}$$

де $a=m, b=-l; \overline{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ — нормальний вектор прямої $L\perp\overline{n}$.

З рівняння (15.10) дістанемо *загальне рівняння прямої на площині*

$$\boxed{ax+by+c=0,} \tag{15.11}$$

де $c=-ax_0-by_0$.

Отже, будь-яку пряму на площині можна задати лінійним рівнянням. Правдиве і зворотне твердження — будь-яке лінійне рівняння (в якому або $a\neq 0$ або $b\neq 0$) у ПДСК на площині задає пряму.

Нехай у рівнянні (15.11) $b\neq 0$, тоді за напрямний вектор прямої візьмімо вектор $\overline{s}=\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$, а точка, що належить прямій, має координати $\left(0;-\frac{c}{b}\right)$.

Векторне рівняння прямої на площині

Задати пряму на площині можна її точкою $M_0(\overline{r}_0)$ і нормальним вектором $\overline{n}$. Нехай $M(\overline{r})\in L$ (рис. 15.10), тоді

$$\overline{M_0M}=\overline{r}-\overline{r}_0\perp\overline{n}.$$

З ортогональності векторів одержимо *векторне рівняння прямої на площині*

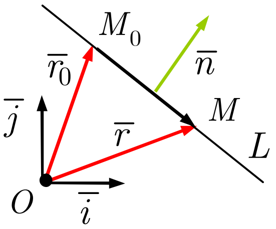


Рис. 15.10

$$\boxed{(\overline{r}-\overline{r}_0,\overline{n})=0} \Leftrightarrow (\overline{r},\overline{n})-(\overline{r}_0,\overline{n})=0. \tag{15.12}$$

Перепишімо рівняння (15.12) у координатній формі:

$$L:\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)=0,}$$

де a,b — координати $\overline{n}$; x,y — координати точки M; x_0,y_0 — координати точки M_0.

Окремі випадки загального рівняння прямої на площині

Пряма L паралельна вектору $\overline{i}$, а, отже, й осі Ox, тоді й лише тоді, коли її нормальний вектор $\overline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ортогональний до вектора $\overline{i}$:

$$(\overline{n}, \overline{i}) = a = 0 \Rightarrow L : by + c = 0.$$

Рівняння осей на площині відповідно:

$$Ox \perp \overline{j} : by = 0 \Leftrightarrow y = 0;$$

$$Oy \perp \overline{i} : ax = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Якщо в загальному рівнянні прямої (15.16) деякі коефіцієнти дорівнюють нулю, то маємо неповні рівняння прямої L. Зведімо всі випадки виродження (рівності нулю коефіцієнтів) рівняння прямої до таблиці (рис. 15.11), де 0 означає, що відповідний коефіцієнт нульовий, а $\not0$ — відповідний коефіцієнт ненульовий.

a	b	c	Висновок	a	b	c	Висновок
0	0	$\not0$	$L = \varnothing$	$\not0$	0	0	$L = Oy$
0	$\not0$	0	$L = Ox$	$\not0$	0	$\not0$	$L \parallel Oy$
0	$\not0$	$\not0$	$L \parallel Ox$	$\not0$	$\not0$	0	$O \in L$

Рис. 15.11

Рівняння прямої на площині з кутовим коефіцієнтом

Якщо в рівняння (15.9) прямої L коефіцієнт $l = 0$, то

$$L : x = x_0.$$

Якщо $l \neq 0$, то після перетворення дістаємо *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*:

$$y = y_0 + \frac{m}{l}(x - x_0) \Leftrightarrow y = y_0 + k(x - x_0) \Leftrightarrow \boxed{y = kx + b,}$$

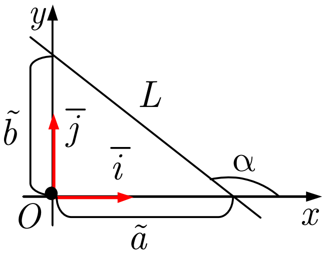


Рис. 15.12

де $k = \dfrac{m}{l}$; $b = y_0 - \dfrac{m}{l} x_0$.

Кутовий коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута α нахилу прямої до додатного напряму осі Ox (рис. 15.12).

Рівняння прямої на площині у відрізках

Нехай усі коефіцієнти в загальному рівнянні прямої (15.16) відмінні від нуля. Тоді після перетворень одержимо *рівняння прямої у відрізках* (рис. 15.12):

$$ax + by = -c;$$

$$\frac{x}{-c/a} + \frac{y}{-c/b} = 1;$$

$$\boxed{\frac{x}{\tilde{a}} + \frac{y}{\tilde{b}} = 1.} \qquad (15.13)$$

Нормоване рівняння прямої на площині

Нормованим рівнянням прямої на площині називають рівняння

$$\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,} \qquad (15.14)$$

де $\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\end{pmatrix}$ — орт нормального вектора прямої; p — віддаль від початку координат до прямої.

Загальне рівняння прямої (15.11) можна перетворити на нормоване, помноживши його на *нормувальний множник*

$$\mu = -\frac{\operatorname{sgn} c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

15.4. Взаємне розташування прямих і площин

Взаємне розташування прямих у просторі

Прямі $L_1(M_1; \overline{s}_1)$ та $L_2(M_2; \overline{s}_2)$ називають *паралельними*, якщо їхні напрямні вектори $\overline{s}_1$ та $\overline{s}_2$ колінеарні (і тому ці вектори можуть бути вибрані однаковими) (рис. 15.13):

$$L_1(M_1; \overline{s}_1) \parallel L_2(M_2; \overline{s}_2) \Leftrightarrow \overline{s}_1 \parallel \overline{s}_2.$$

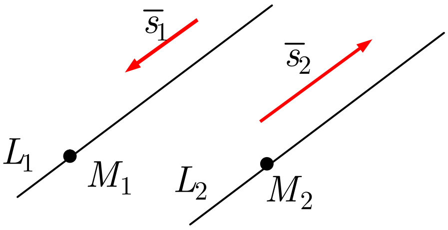


Рис. 15.13

Якщо паралельні прямі мають хоча б одну спільну точку, то вони збігаються, оскільки пряма однозначно задається точкою і напрямним вектором. Отже, різні паралельні прямі спільних точок не мають (не перетинаються).

Твердження 15.4. Через кожну точку B простору проходить одна й лише одна пряма, паралельна заданій прямій $L(A; \overline{s})$.

Дві непаралельні прямі не можуть мати більше ніж одну спільну точку (якщо б вони мали дві спільні точки, то збігались би і були паралельні).

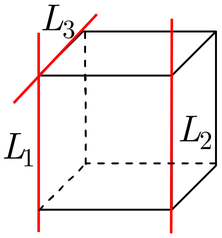


Рис. 15.14

Перетинними прямими називають непаралельні прямі, які мають спільну точку (перетинаються).

Мимобіжними прямими називають непаралельні прямі без спільних точок.

На рис. 15.14 прямі L_1, L_2 — паралельні; L_1, L_3 — перетинні; L_2, L_3 — мимобіжні.

Теорема 15.5. Прямі $L_1(M_1;\bar{s}_1)$ та $L_2(M_2;\bar{s}_2)$:

① мимобіжні $\Leftrightarrow (\overline{M_1M_2}, \bar{s}_1, \bar{s}_2) \neq 0$;

② перетинні $\Leftrightarrow (\overline{M_1M_2}, \bar{s}_1, \bar{s}_2) = 0, \bar{s}_1 \not\parallel \bar{s}_2$;

③ паралельні різні $\Leftrightarrow \bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2 \not\parallel \overline{M_1M_2}$;

④ збіжні $\Leftrightarrow \bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2 \parallel \overline{M_1M_2}$.

Нехай дві прямі задано канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ та } \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Позначмо:

$$\tilde{r} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix}; \quad r = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix}.$$

Наслідок з теореми 15.5. Прямі $L_1(M_1;\bar{s}_1)$ та $L_2(M_2;\bar{s}_2)$:

① мимобіжні $\Leftrightarrow \tilde{r} = 3, r = 2$;

② перетинні $\Leftrightarrow \tilde{r} = r = 2$;

③ паралельні різні $\Leftrightarrow \tilde{r} = 2, r = 1$;

④ збіжні $\Leftrightarrow \tilde{r} = r = 1$.

Взаємне розташування площин

Площини $P_1 \perp \bar{n}_1$ та $P_2 \perp \bar{n}_2$ називають *паралельними*, якщо їхні нормальні вектори колінеарні (рис. 15.15):

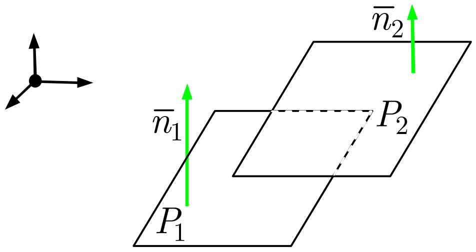


Рис. 15.15

$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2.$$

Нехай дві площини задано їхніми загальними рівняннями:

$$P_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$P_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Тоді нормальні вектори цих площин

$$\overline{n}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \text{ та } \overline{n}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Якщо паралельні площини мають хоча б одну спільну точку, то вони збігаються (оскільки площина однозначно задається своєю точкою і вектором нормалі). Отже, паралельні площини або не мають спільних точок, або збігаються.

Дві непаралельні площини перетинаються вздовж прямої. Отже, пряму в просторі можна задати перетином двох площин — *загальними рівняннями прямої у просторі*

$$L : \boxed{\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}} \tag{15.15}$$

Теорема 15.6. Дві площини

$$P_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ та } P_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0:$$

① перетинаються вздовж прямої $\Leftrightarrow \overline{n}_1 \nparallel \overline{n}_2$;

② паралельні різні $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \neq \dfrac{d_1}{d_2}$;

③ збіжні $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{d_1}{d_2}$.

Позначмо

$$\tilde{r} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \end{pmatrix}, \; r = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Наслідок з теореми 15.6. Площини P_1 та P_2:

① перетинаються вздовж однієї прямої $\Leftrightarrow \tilde{r} = r = 2$;

② паралельні різні $\Leftrightarrow \tilde{r} = 2, r = 1,;$

③ збіжні $\Leftrightarrow \tilde{r} = r = 1$.

Приклад 15.1. Покажімо, що дві площини

$$P_1 : x + y + z + 5 = 0 \text{ та } P_2 : 2x + 2y + 3z - 2 = 0$$

перетинаються вздовж прямої L і знайдімо канонічні рівняння цієї прямої.

❍Ця задача еквівалентна дослідженню і розв'язанню СЛАР із двох рівнянь:

$$\begin{cases} x + y + z + 5 = 0, \\ 2x + 2y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжімо її методом Ґауса — Йордана:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)_{\overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - 2\overleftarrow{a}_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \sim \ldots$$

Оскільки $r = \tilde{r} = 2$, то система сумісна і площини перетинаються вздовж прямої L:

$$\ldots \sim^{\overleftarrow{a}_1 \leftarrow \overleftarrow{a}_1 - \overleftarrow{a}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right).$$

Тут x, z — базисні змінні, $y = t \in \mathbb{R}$, — вільна змінна

$$\begin{cases} x + y = -17, \\ y = t, \\ z = 12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t - 17, \\ y = t, \\ z = 12, \end{cases} t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow L : \frac{x + 17}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z - 12}{0}. \bullet$$

Жмуток площин

Будь-яка система (15.15)

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0, \end{cases}$$

з умовою $\tilde{r} = r = 2$ задає у ПДСК пряму L.

Якщо пряму L задано канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

то її, скажімо, можна подати перетином двох площин

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}, \\ \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}, \end{cases}$$

паралельних відповідно осям Oz та Ox.

Жмутком площин, які перетинаються вздовж прямої L, називають сукупність усіх площин простору, що містять пряму L (рис. 15.16).

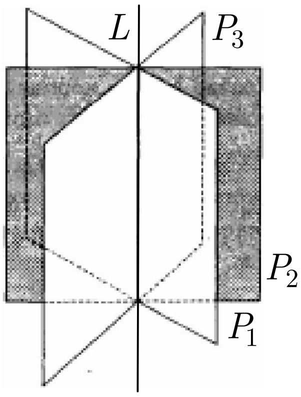


Рис. 15.16

Жмуток перетинних площин може бути заданий двома різними площинами, що належать цьому жмутку. Справді, дві різні перетинні площини, які проходять через L, визначають пряму L, а тим самим і весь жмуток.

Рівнянням жмутка (тобто будь-якої площини, яка належить цьому жмутку), що містить дві перетинні площини

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \text{ та } a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

буде

$$\alpha(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) + \beta(a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) = 0,$$

де α та β набувають усіляких значень, але не дорівнюють одночасно нулеві.

Взаємне розташування прямої і площини

Пряму $L(M_0;\overline{s})$ називають *паралельною площині* P, якщо вектор $\overline{s}$ паралельний площині P (рис. 15.17).

Твердження 15.7.

① Пряма L, яка паралельна площині P, або не має з нею жодної спільної точки, або лежить у ній.

② Якщо дві точки прямої L належать площині P, то ця пряма лежить у площині P.

③ Для довільних прямої і точки, яка їй не належить, існує єдина площина, яка містить цю пряму і точку.

④ Якщо пряма L не паралельна площині P, то вона має з цією площиною лише одну спільну точку.

Твердження 15.8.

① Якщо L_1 та L_2 — мимобіжні прямі, то не існує площини, яка містить обидві прямі L_1, L_2.

② Якщо L_1 та L_2 — різні паралельні або перетинні прямі, то існує єдина площина, яка містить обидві прямі L_1, L_2.

Пряму $L \parallel \overline{s}$ і площину $P \perp \overline{n}$ називають *перпендикулярними*, якщо вектори $\overline{s}, \overline{n}$ — колінеарні (рис. 15.18):

$$L \perp P \Leftrightarrow \overline{s} \parallel \overline{n}.$$

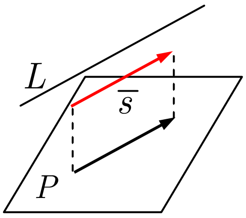


Рис. 15.17

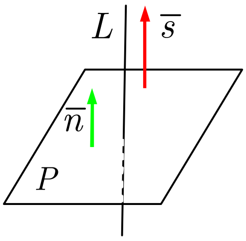


Рис. 15.18

Твердження 15.9.

① Через кожну точку M_0 проходить єдина пряма, перпендикулярна до площини P.

② Якщо пряма L перпендикулярна до площини P, то її ортогональна проекція на площину P є точкою. Якщо ж пряма L не перпендикулярна до площини P, то її ортогональна проекція на площину P є прямою.

Теорема 15.10. Площина $P \perp \overline{n}$ і пряма $L(M_0;\overline{s})$:

① перетинаються в одній точці $\Leftrightarrow \overline{n} \not\perp \overline{s}$;

② перпендикулярні $\Leftrightarrow \overline{n} \parallel \overline{s}$;

③ паралельні (без спільних точок) $\Leftrightarrow \overline{n} \perp \overline{s}, M_0 \notin P$;

④ пряма L лежить у площині $P \Leftrightarrow \overline{n} \perp \overline{s}, M_0 \in P$.

Наслідок із твердження 15.10. Площина $P \perp \overline{n} = (a; b; c)^{\mathrm{T}}$ і пряма $L \parallel \overline{s} = (l; m; n)^{\mathrm{T}}$:

① паралельні $\Leftrightarrow al + bm + cn = 0$;

② перпендикулярні $\Leftrightarrow \dfrac{a}{l} = \dfrac{b}{m} = \dfrac{c}{n}$.

Взаємне розташування прямих на площині

Нехай дві прямі на площині задано загальними рівняннями:

$$L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Розгляньмо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \tag{15.16}$$

Теорема 15.11. Дві прямі на площині L_1 та L_2:

① перетинаються в одній точці $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$;

② паралельні різні $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$;

③ збіжні $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

► ① Неколінеарність векторів $\overline{n}_1$ та $\overline{n}_2$ означає, що ранг матриці системи (15.16) дорівнює 2 і система (15.16) має єдиний розв’язок. Отже, непаралельні прямі на площині перетинаються лише в одній точці.

② Система (15.16) несумісна і паралельні прямі на площині не мають спільних точок.

③ Система (15.16) зводиться до одного рівняння — рівняння прямих $L_1 = L_2$. ◄

Позначмо:

$$\tilde{r} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \end{pmatrix}, \quad r = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Наслідок з теореми 15.11. Прямі L_1 та L_2:

① перетинаються в одній точці $\Leftrightarrow \tilde{r} = r = 2$;

② паралельні і різні $\Leftrightarrow \tilde{r} = 2, r = 1$,

③ зливаються $\Leftrightarrow \tilde{r} = r = 1$.

15.5. Кути між прямими і площинами

Кут між прямими

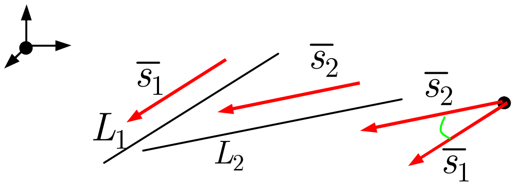


Рис. 15.19

Кутом $(\widehat{L_1, L_2})$ *між прямими* $L_1(M_1;\overline{s}_1)$ та $L_2(M_2;\overline{s}_2)$ називають кут між їхніми напрямними векторами (рис. 15.19). Отже,

$$\boxed{\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \cos(\widehat{\overline{s}_1, \overline{s}_2}) = \frac{(\overline{s}_1, \overline{s}_2)}{|\overline{s}_1||\overline{s}_2|}.}$$

Прямі $L_1(M_1;\overline{s}_1)$ та $L_2(M_2;\overline{s}_2)$ — *перпендикулярні,* якщо їхні напрямні вектори $\overline{s}_1, \overline{s}_2$ — перпендикулярні:

$$\boxed{L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overline{s}_1 \perp \overline{s}_2 \Leftrightarrow (\overline{s}_1, \overline{s}_2) = 0.}$$

Прямі $L_1(M_1;\overline{s}_1)$ та $L_2(M_2;\overline{s}_2)$ — *паралельні,* якщо їхні напрямні вектори $\overline{s}_1, \overline{s}_2$ — колінеарні:

$$\boxed{L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \overline{s}_1 \parallel \overline{s}_2.}$$

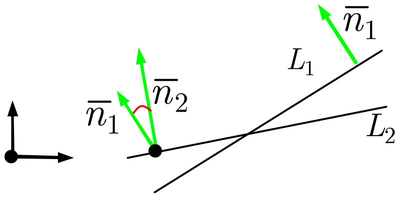


Рис. 15.20

Кутом $(\widehat{L_1, L_2})$ між прямими $L_1 \perp \overline{n}_1$ та $L_2 \perp \overline{n}_2$ на площині можна назвати і кут між їхніми нормальними векторами $\overline{n}_1$ та $\overline{n}_2$ (рис. 15.20):

$$\boxed{\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \cos(\widehat{\overline{n}_1, \overline{n}_2}) = \frac{(\overline{n}_1, \overline{n}_2)}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|}.}$$

Кут φ між прямими L_1 та L_2, які задані рівняннями $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$, можна визначити за формулою

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|.}$$

Кут між площинами

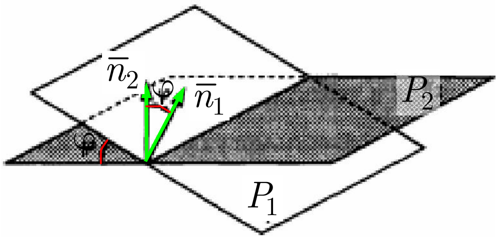


Рис. 15.21

Кутом $(\widehat{P_1, P_2})$ *між площинами* $P_1 \perp \overline{n}_1$ та $P_2 \perp \overline{n}_2$ називають кут між їхніми нормальними векторами (рис. 15.21):

$$\boxed{\cos(\widehat{P_1, P_2}) = \cos(\widehat{\overline{n}_1, \overline{n}_2}) = \frac{(\overline{n}_1, \overline{n}_2)}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|}.}$$

Площини $P_1(M_1) \perp \overline{n}_1$ та $P_2(M_2) \perp \overline{n}_2$ називають *перпендикулярними*, якщо їхні нормальні вектори перпендикулярні:

$$\boxed{P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \perp \overline{n}_2 \Leftrightarrow (\overline{n}_1, \overline{n}_2) = 0.}$$

Площини $P_1(M_1) \perp \overline{n}_1$ та $P_2(M_2) \perp \overline{n}_2$ паралельні, якщо їхні нормальні вектори колінеарні:

$$\boxed{P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2.}$$

Кут між площиною і прямою

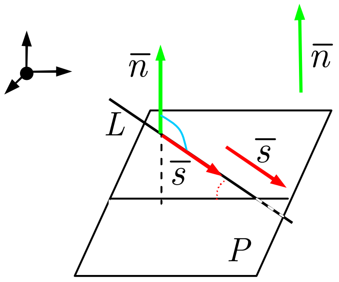


Рис. 15.22

Кутом $(\widehat{L,P})$ *між прямою* $L \parallel \overline{s}$ *і площиною* $P \perp \overline{n}$ називають менший із двох кутів між прямою L та її ортогональною проекцією на площину (рис. 15.22):

$$\boxed{\sin(\widehat{L,P}) = \left|\cos(\widehat{\overline{n},\overline{s}})\right| = \frac{\left|(\overline{n},\overline{s})\right|}{\left|\overline{n}\right|\left|\overline{s}\right|}.}$$

15.6. Віддалі між прямими і площинами

Віддаль від точки до прямої у просторі

Нехай M' — ортогональна проекція точки M_0 на пряму $L(M_1; \overline{s})$.

Віддаллю від точки M_0 *до прямої* L називають число

$$\boxed{d(M_0, L) = \left|M_0M'\right|,}$$

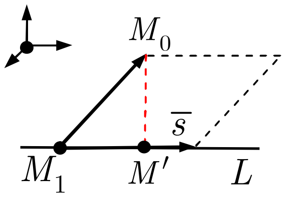


Рис. 15.23

де $\left|M_0M'\right|$ — висота паралелограма, побудованого на векторах $\overline{M_1M_0}$ та $\overline{s}$, відкладеного від точки M_1 (рис. 15.23). Отже,

$$\boxed{d(M_0, L) = \frac{\left|[\overline{M_1M_0}, \overline{s}]\right|}{\left|\overline{s}\right|}.}$$

Віддаль між прямими у просторі

Якщо прямі мають спільну точку, то вважають, що віддаль між ними дорівнює нулю.

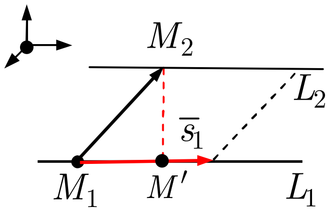


Рис. 15.24

Віддаллю між паралельними прямими $L_1(M_1; \overline{s}_1)$ та $L_2(M_2; \overline{s}_2)$ називають віддаль від будь-якої точки прямої L_1 до прямої L_2 (або від будь-якої точки прямої L_2 до L_1) (рис. 15.24):

$$\boxed{d(L_1, L_2) = \frac{\left|[\overline{M_1M_2}, \overline{s}_1]\right|}{\left|\overline{s}_1\right|} = \frac{\left|[\overline{M_1M_2}, \overline{s}_2]\right|}{\left|\overline{s}_2\right|}.}$$

Спільним перпендикуляром до мимобіжних прямих $L_1(M_1;\overline{s}_1)$ та $L_2(M_2;\overline{s}_2)$ називають пряму L, таку, що $L \perp L_1$ та $L \perp L_2$. Нехай $L \cap L_1 = N_1$ та $L \cap L_2 = N_2$.

Твердження 15.12. Існує лише одна пара точок $(N_1, N_2), N_1 \in L_1$, $N_2 \in L_2$, така, що пряма N_1N_2 є спільним перпендикуляром до прямих L_1 та L_2.

Віддаллю між мимобіжними прямими називають число $\left|\overline{N_1N_2}\right|$.

$\left|\overline{N_1N_2}\right|$ — висота паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{s}_1, \overline{s}_2$, $\overline{M_1M_2}$ (рис. 15.25). Отже,

$$d(L_1, L_2) = \frac{\left|(\overline{M_1M_2}, [\overline{s}_1, \overline{s}_2])\right|}{\left|[\overline{s}_1, \overline{s}_2]\right|}.$$

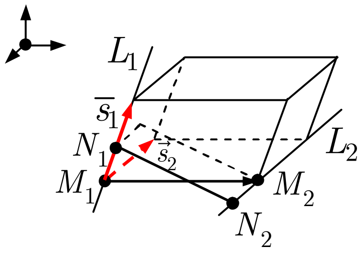


Рис. 15.25

Приклад 15.2. З'ясуймо взаємне розташування прямих у просторі

$$L_1 : \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2} \text{ та } L_2 : \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{3}$$

і знайдімо віддаль між прямими.

❍ З рівнянь прямих маємо напрямні вектори:

$$\overline{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \overline{s}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \overline{M_1M_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки вектори $\overline{s}_1$ та $\overline{s}_2$ не колінеарні, то прямі L_1 та L_2 можуть перетинатись або бути мимобіжними. Обчислімо векторний добуток векторів

$$[\overline{s}_1, \overline{s}_2] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -9\overline{i} - 5\overline{j} + 2\overline{k}$$

і мішаний добуток векторів

$$V = (\overline{M_1M_2}, [s_1, \overline{s}_2]) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 18.$$

Оскільки $V \neq 0$, то прямі L_1 та L_2 мимобіжні і віддаль між прямими

$$d(L_1, L_2) = \frac{|V|}{\left|[\overline{s}_1, \overline{s}_2]\right|} = \frac{18}{\sqrt{110}}. \bullet$$

Віддаль від точки до площини

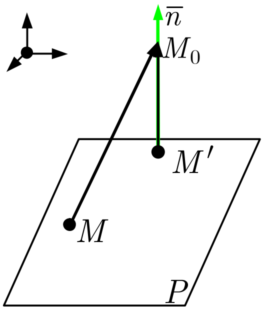


Рис. 15.26

Нехай M' — ортогональна проекція точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на площину P (рис. 15.26).

Віддалю від точки M_0 *до площини* P називають число

$$\boxed{d(M_0, P) = \left|\overline{M_0M'}\right|.}$$

Нехай точка $M(x; y; z)$ належить площині P із загальним рівнянням

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Тоді $\overline{n} = (a; b; c)^{\mathrm{T}}$ і

$$\left|\overline{M_0M'}\right| = \left|\operatorname{pr}_{\overline{n}} \overline{MM_0}\right| =$$

$$= \frac{\left|(\overline{MM_0}, \overline{n})\right|}{\left|\overline{n}\right|} = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$= \left|x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p\right|,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — напрямні косинуси нормального вектора $\overline{n}$; p — віддаль від площини до початку координат.

Отже,

$$\boxed{d(M_0, P) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.}$$

Нехай площину P задано нормованим рівнянням

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Відхиленням точки M_0 *від площини* P називають число

$$\boxed{\delta(M_0, P) = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p.}$$

Отже,

$$d(M_0, P) = |\delta(M_0, P)|.$$

Зауваження 15.2. Площина P розбиває множину всіх точок простору на три підмножини:

$$\boxed{\begin{array}{l} A^+ = \{M \notin P \mid \delta(M, P) > 0\}; \\ P = \{M \in P \mid \delta(M, P) = 0\}; \\ A^- = \{M \notin P \mid \delta(M, P) < 0\}. \end{array}}$$

Початок координат — точка $O \in \mathbb{A}^-$ або точка $O \in P$.

Вважають, що віддаль між площинами, що мають спільну точку дорівнює нулю.

Віддаллю між паралельними площинами називають віддаль від будь-якої точки однієї площини до другої площини.

Приклад 15.3. Знайдімо віддаль від точки $M_0(1;2;-3)$ до площини $5x-3y+z+14=0$. З'ясуймо, в одному чи різних підпросторах щодо заданої площини розташована точка M_0 та початок системи координат.

❍Щоб знайти шукану віддаль, скористаємось формулою

$$d(M_0,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|5\cdot 1-3\cdot 2+1\cdot(-3)+14|}{\sqrt{5^2+(-3)^2+1^2}}=$$

$$=\frac{|5-6-3+14|}{\sqrt{35}}=\frac{10}{\sqrt{35}}.$$

З'ясуймо знак відхилення точки M_0 від площини (п. 15.2):

$$\delta(M_0,P)=\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{-\operatorname{sgn} d\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{5-6-3+14}{-\sqrt{35}}=-\frac{10}{\sqrt{35}}<0.$$

Від'ємний знак відхилення вказує на те, що точка M_0 та початок системи координат лежать по один бік від заданої площини.●

Віддаль від точки до прямої на площині

Якщо пряму L на площині задано загальним рівнянням $ax+by+c=0$, то віддаль від точки M_0 до прямої L знаходять за формулою

$$\boxed{d(M_0,L)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}.}$$

Нехай пряму L задано нормованим рівнянням

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0.$$

Відхиленням точки M_0 від прямої L на площині називають число

$$\boxed{\delta(M_0,L)=x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p.}$$

Отже,

$$d(M_0,L)=|\delta(M_0,L)|.$$

Зауваження 15.3. Пряма L розбиває множину всіх точок площини на три підмножини:

$$\boxed{\begin{aligned}A^+&=\{M\notin L\mid\delta(M,L)>0\};\\ L&=\{M\in L\mid\delta(M,L)=0\};\\ A^-&=\{M\notin L\mid\delta(M,L)<0\}.\end{aligned}}$$

Початок координат — точка $O\in\mathbb{A}^-$ або $O\in L$.

16. Еліпс. Парабола. Гіпербола

16.1. Геометричний зміст алгебричних рівнянь у ПДСК на площині

В аналітичній геометрії передусім вивчають лінії, які у ПДСК мають алгебричні рівняння, приміром:

$$ax + by + c = 0; \tag{16.1}$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \tag{16.2}$$

Рівняння (16.1) є рівнянням 1-го порядку (коефіцієнти його можуть бути довільні, але хоча б один з коефіцієнтів a, b не дорівнює нулю); рівняння (16.2) є рівнянням 2-го порядку (хоча б один з коефіцієнтів a, b чи c має бути ненульовим.

Алгебричні рівняння можуть визначати: реальні криві, сукупності кривих, точки (вироджені криві) або порожню множину («уявні» криві).

Твердження 16.1. Лінія, що має алгебричне рівняння n-го степеня у ПДСК, у будь-якій іншій ПДСК має також алгебричне рівняння n-го степеня.

Із цього твердження випливає, що алгебричний характер рівняння і його порядок є властивостями, притаманними самій лінії, тобто вони не зв'язані з вибором системи координат (інваріантні щодо системи).

Означення 16.1. *Лінією 2-го порядку на площині* називають множину точок площини, прямокутні координати $(x; y)$ яких справджують алгебричне рівняння 2-го порядку:

$$\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,}$$

де a_{11}, a_{12}, a_{22} — не рівні разом нулю.

До кривих 2-го порядку належать: еліпс, парабола та гіпербола. Окремими випадком еліпса є коло.

16.2. Еліпс

Еліпсом називають криву на площині, яка в деякій ПДСК має рівняння

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0.} \tag{16.3}$$

Це рівняння називають *канонічним рівнянням* еліпса, а систему — *канонічною системою* еліпса.

Якщо $a = b$, рівняння еліпса переходить у рівняння кола з центром у точці O радіусом a.

Еліпс можна задати параметричними рівняннями:

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi).} \tag{16.4}$$

З рівнянь еліпса випливає, що:

1) еліпс міститься у прямокутнику $\{(x,y):\left|x\right|\le a,\left|y\right|\le b\}$ (рис. 16.1);

2) осі Ox і Oy є осями симетрії еліпса, а точка O — його центром симетрії, тобто якщо точка $M_0(x_0;y_0)$ належить еліпсу, то й точки $(-x_0;y_0)$, $(-x_0;-y_0)$ та $(x_0;-y_0)$ також йому належать;

3) еліпс перетинає осі координат у точках $A_1(-a;0), A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$;

Еліпс із рівнянням (16.3) можна одержати стисканням кола $x^2+y^2=a^2$ вздовж осі Oy з коефіцієнтом $\frac{b}{a}$ (рис. 16.2).

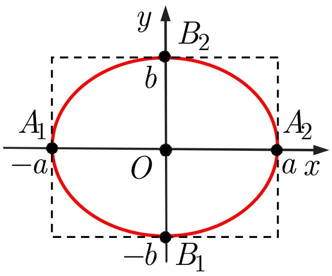


Рис. 16.1

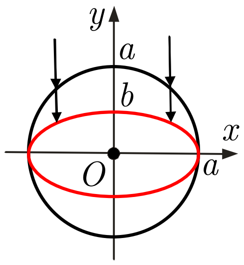


Рис. 16.2

Із п. 2) випливає, що еліпс із точністю до знаків (тобто орієнтації осей) визначає свої канонічні координати, з якими, за умови, що $b<a$ зв'язані такі характеристики (рис. 16.3):

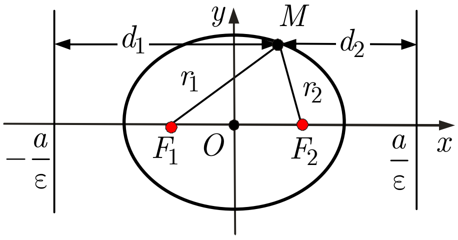


Рис. 16.3

число a — *велика піввісь*;
число b — *мала піввісь*;
число $c=\sqrt{a^2-b^2}$;
число $2c=\left|F_1F_2\right|$ — *фокусна віддаль*;
число $\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ — *ексцентриситет* $(0\le\varepsilon<1)$;
число $p=\frac{b^2}{a}$ — *фокальний параметр*;
вісь абсцис — *велика (фокальна) вісь*;
вісь ординат — *мала вісь*;
точка $O(0;0)$ — *центр*;
точки $(\pm a;0),(0;\pm b)$ — *вершини*;
точки $(\pm c;0)$ — *фокуси*;
прямі $x=\pm\frac{a}{\varepsilon},\varepsilon\ne 0$ — *директриси*.

Фокус $F_2(c;0)$ і директрису $x=\frac{a}{\varepsilon}$ називають *правими*, а фокус $F_1(-c;0)$ та директрису $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ — *лівими*.

Для будь-якого кола $b=a, c=0, \varepsilon=0, p=a$ фокуси збігаються з центром, директриси не означені.

Віддалі будь-якої точки $M(x;y)$ еліпса від фокусів називають *фокальними радіусами* цієї точки:

$$\left|F_1M\right| = a+\varepsilon x = r_1;$$
$$\left|MF_2\right| = a-\varepsilon x = r_2.$$

Зауваження 16.1. Еліпс є множиною точок, сума віддалей яких від фокусів стала і більша за віддаль між фокусами (рис. 16.3):

$$\boxed{r_1+r_2=2a>2c.}$$

Цю властивість еліпса називають *фокальною*.

16.3. Парабола

Параболою називають криву на площині, яка в деякій ПДСК має рівняння

$$y^2=2px, p>0. \tag{16.5}$$

Рівняння (16.5) називають *канонічним рівнянням* параболи, а ПДСК — *канонічною ПДСК* параболи.

З рівняння (16.5) параболи випливає, що:

1) парабола розташована у правій півплощині $x \geq 0$ (рис. 16.4);

2) вісь Ox — вісь симетрії;

3) парабола перетинає вісь абсцис у точці $O(0;0)$.

Із пп. 2) та 3) випливає, що з точністю до орієнтації осі ординат парабола визначає свої канонічні координати, з якими зв’язані такі характеристики (рис. 16.4):

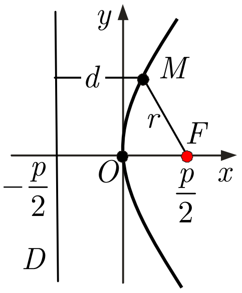


Рис. 16.4

число p — *фокальний параметр*;

число $\frac{p}{2}$ — *фокусна віддаль*;

вісь абсцис — *фокальна вісь*;

точка $A(0;0)$ — *вершина*;

точка $\left(\frac{p}{2};0\right)$ — *фокус*;

пряма $x=-\frac{p}{2}$ — *директриса*.

Ексцентриситет параболи $\varepsilon=1$. *Фокальний радіус* $r=x+\frac{p}{2}$.

Зауваження 16.2. Парабола є множиною точок, які рівновіддалені від фокуса і директриси (рис. 16.4):

$$\boxed{r = d.}$$

16.4. Гіпербола

Гіперболою називають криву на площині, яку в деякій ПДСК задає рівняння

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0.} \tag{16.6}$$

Рівняння (16.6) називають *канонічним рівнянням* гіперболи, а цю ПДСК — *канонічною ПДСК* гіперболи.

З канонічного рівняння гіперболи випливає, що гіперболу можна задати параметричними рівняннями:

$$\boxed{\left[\begin{aligned} x &= \pm a \operatorname{ch} t, \\ y &= b \operatorname{sh} t, t \in \mathbb{R} \end{aligned}\right.} \quad \text{або} \quad \boxed{\left[\begin{aligned} x &= \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \\ y &= \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right), \left|t\right| \geq 1. \end{aligned}\right.}$$

З рівняння (16.6) також випливає:

1) для всіх точок гіперболи $\left|x\right| \geq a$, тобто гіпербола розташована за межами смуги $\{(x, y) : \left|x\right| < a\}$ (рис. 16.5);

2) осі Ox та Oy є осями симетрії гіперболи, а точка O — її центром симетрії;

3) гіпербола перетинає лише вісь абсцис у точках $A_1(-a; 0), A_2(a; 0)$;

4) гіпербола має асимптоти $y = \pm\frac{b}{a}x$.

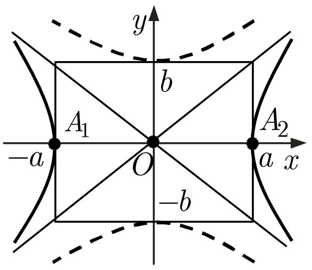


Рис. 16.5

Із п. 2) випливає, що гіпербола з точністю до знаків (тобто орієнтації осей) визначає свої канонічні координати, з якими зв'язані такі характеристики (рис. 16.6):

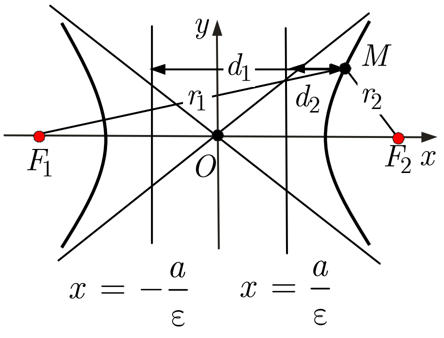


Рис. 16.6

число a — *дійсна піввісь*;
число b — *уявна піввісь*;
число $c = \sqrt{b^2 + a^2}$;
число $2c = \left|F_1F_2\right|$ — *фокусна віддаль*;
число $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ — *ексцентриситет* $(\varepsilon > 1)$;
число $p = \frac{b^2}{a}$ — *фокальний параметр*;
вісь абсцис — *дійсна (фокальна) вісь*;

вісь ординат — *уявна вісь*;
точка $O(0;0)$ — *центр*;
точки $(\pm a;0)$ — *вершини*;
точки $(\pm c;0)$ — *фокуси*;

прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}, \varepsilon \neq 0$ — *директриси*.

Лівий та правий *фокальні радіуси*:

$$r_1 = \begin{cases} a + \varepsilon x, & x > a, \\ -a - \varepsilon x, & x < -a; \end{cases} \quad r_2 = \begin{cases} -a + \varepsilon x, & x > a, \\ a - \varepsilon x, & x < -a; \end{cases}$$

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} 2a, & x > a, \\ -2a, & x < -a \end{cases} \Rightarrow \left| r_1 - r_2 \right| = 2a.$$

Зауваження 16.3. Гіпербола є множиною точок, модуль різниці віддалей яких від фокусів є сталою величиною, меншою за віддаль між фокусами (рис. 16.6).

$$\boxed{\left| r_1 - r_2 \right| = 2a < 2c.}$$

Цю властивість гіперболи називають *фокальною*.

16.5. Спільні властивості кривих 2-го порядку

Фокально-директоріальна властивість

Нехай точка $M(x;y)$ належить лінії 2-го порядку.

1. Віддалі від точки M до лівої та правої директрис еліпса (див. рис. 16.3):

$$d_1 = \left| x + \frac{a}{\varepsilon} \right| = \frac{\left| \varepsilon x + a \right|}{\varepsilon} = \frac{r_1}{\varepsilon}; d_2 = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right| = \frac{\left| \varepsilon x - a \right|}{\varepsilon} = \frac{r_2}{\varepsilon}.$$

Отже,

$$\boxed{\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon < 1.}$$

2. Віддаль точки M до директриси параболи (див. рис. 16.4)

$$d = x + \frac{p}{2} = r.$$

Отже,

$$\boxed{\frac{r}{d} = \varepsilon = 1.}$$

3. Для гіперболи правдиве співвідношення (рис. 16.6):

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon > 1.$$

Зауваження 16.4. Еліпс, парабола, гіпербола є множинами точок, для яких відношення фокального радіуса r до віддалі точки до відповідної директриси d є сталим і дорівнює ексцентриситету ε.

Оптичні властивості кривих

1. Якщо помістити в один з фокусів еліпса точкове джерело світла, то всі промені після відбиття від еліпса зійдуться в іншому його фокусі (рис. 16.7).

2. Якщо помістити у фокус параболи точкове джерело світла, то всі промені, відбиті від параболи, спрямуються паралельно фокальній осі параболи (рис. 16.8).

Ця властивість обґрунтовує форму параболічних антен, дзеркал для прожекторів тощо.

3. Якщо помістити в один з фокусів гіперболи точкове джерело світла, то кожний промінь після відбиття від гіперболи начебто виходить з іншого фокуса (рис. 16.9).

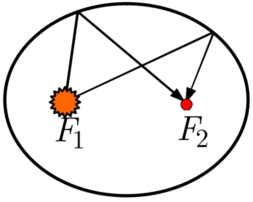


Рис. 16.7

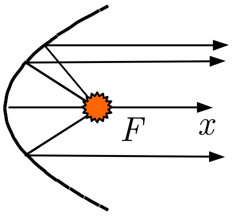


Рис. 16.8

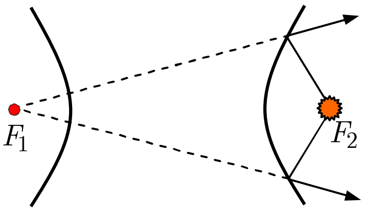


Рис. 16.9

Рівняння кривих 2-го порядку в полярних координатах

Якщо полюс полярної системи координат вибрати для еліпса в лівому фокусі, параболи — у фокусі, гіперболи — у правому фокусі; полярною віссю вибрати фокальну вісь і спрямувати її зліва направо (рис. 16.10), то еліпс, парабола та права гілка гіперболи в полярних координатах мають рівняння

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}.}$$

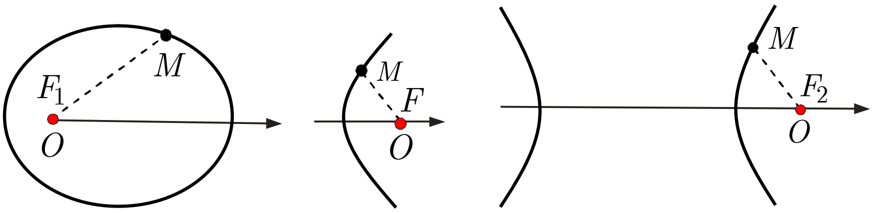


Рис. 16.10

17. Зведення рівняння ліній 2-го порядку до канонічного вигляду

17.1. Квадратичні форми

В аналітичній геометрії теорія квадратичних форм потрібна як засіб для дослідження ліній і поверхонь 2-го порядку.

Розгляньмо симетричну матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, тобто $a_{12} = a_{21}$.

Означення 17.1. Вираз

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$$

називають *квадратичною формою змінних* x_1, x_2. Матрицю A називають *матрицею квадратичної форми*.

Симетрична матриця A квадратичної форми задає певне лінійне перетворення (п. 14.6)

$$\vec{y} = A\vec{x}.$$

Упорядкований набір чисел x_1, x_2 можна розглядати як координати вектора $\overline{x} \in \mathbb{V}^2$ в деякому ортонормованому базисі $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ простору $\mathbb{V}^2$, тобто

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2.$$

Тоді квадратична форма

$$Q(\overline{x}) = Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2.$$

є числовою функцією векторного аргумента $\overline{x}$, яка означена в усьому просторі $\mathbb{V}^2$.

Приміром,

$$Q(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2$$

є квадратичною формою змінних $x_1 = x, x_2 = y$.

Тут

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = a_{21} = -\frac{3}{2}, \quad a_{22} = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратична форма $Q(\overline{x})$ має у вибраному базисі *канонічний вигляд*, якщо матриця квадратичної форми у цьому базисі діагональна, тобто $a_{12} = a_{21} = 0$.

Твердження 17.1. Для будь-якої квадратичної форми існує базис, у якому вона має канонічний вигляд.

17.2. Власні числа і власні вектори матриці

Означення 17.2. Ненульовий стовпець $\vec{x}$ називають *власним вектором* квадратної матриці $A_{n\times n}$, якщо існує таке число λ, що

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Число λ називають *власним числом* матриці A, що відповідає власному вектору $\vec{x}$.

Матричне рівняння $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ еквівалентне однорідній системі лінійних алгебричних рівнянь

$$(A - \lambda E_n)\vec{x} = \vec{0},$$

де E_n — одинична матриця.

На підставі теореми 4.3 ця система (а, отже, і матричне рівняння) матиме ненульові розв'язки, якщо

$$\operatorname{rang}(A - \lambda E_n) < n \Rightarrow \left|A - \lambda E_n\right| = 0.$$

Матрицю

$$A - \lambda E_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

де λ — незалежна змінна; називають *характеристичною матрицею* матриці A.

Визначник характеристичної матриці

$$\boxed{\left|A - \lambda E_n\right| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}}$$

називають *характеристичним многочленом* матриці A.

Рівняння $\left|A - \lambda E_n\right| = 0$ називають *характеристичним рівнянням* матриці A.

Твердження 17.2. Власні числа матриці A є коренями характеристичного многочлена $\left|A - \lambda E_n\right|$ цієї матриці. Власні вектори є ненульовими розв'язками однорідної СЛАР

$$\boxed{(A - \lambda E_n)\vec{x} = \vec{0}.}$$

Зауваження 17.1. Кількість власних чисел матриці скінченна, натомість кількість власних векторів — нескінченна, оскільки нескінченною є множина розв'язків виродженої однорідної системи, розв'язками якої і є власні вектори.

Приклад 17.1. Знайдімо власні числа матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

❍ Записуємо характеристичне рівняння для матриці A:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = 0;$$

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0.$$

Розв'язуючи характеристичне рівняння, дістаємо, що власними числами матриці A є $\lambda_1 = 4$ та $\lambda_2 = 9$. ●

17.3. Побудова канонічних систем координат для кривих 2-го порядку

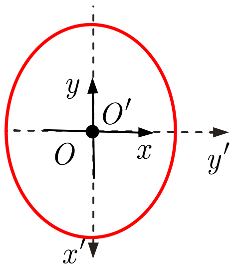


Рис. 17.1

1. Лінія з рівнянням

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, a \geq b > 0,$$

є еліпсом (рис. 17.1). Канонічну систему координат для цього еліпса дістаємо із заданої повертанням на кут $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

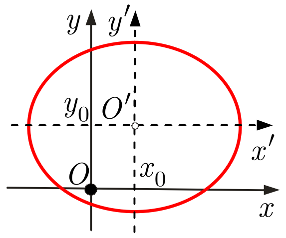


Рис. 17.2

2. Лінія з рівнянням

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1, a > b > 0,$$

є еліпсом (рис. 17.2). Канонічну систему координат для цього еліпса дістаємо із заданої паралельним перенесенням початку координат у точку $(x_0; y_0)$.

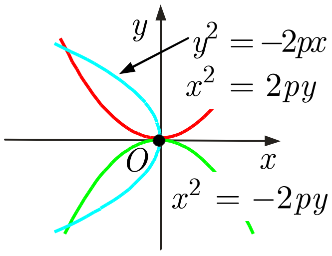


Рис. 17.3

3. Лінії, які задані рівняннями

$$y^2 = -2px, x^2 = 2py, \; x^2 = -2py, p > 0,$$

є параболами (рис. 17.3). Канонічну систему координат для цих парабол дістаємо із заданої переорієнтуванням або повертанням осей.

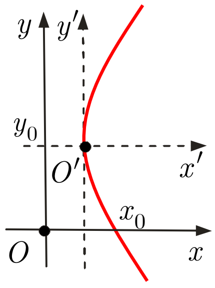


Рис. 17.4

4. Лінія з рівнянням

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0), p > 0,$$

є параболою (рис. 17.4). Канонічну систему координат для цієї параболи дістаємо із заданої паралельним перенесенням початку координат в точку $(x_0; y_0)$.

5. Лінія з рівнянням

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,\ a,b>0,$$

є гіперболою. Канонічну систему координат для цієї гіперболи дістаємо із заданої паралельним перенесенням початку в точку $(x_0;y_0)$.

6. Лінія з рівнянням

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1, b,a>0,$$

є гіперболою, *спряженою* до канонічної (рис. 17.5).

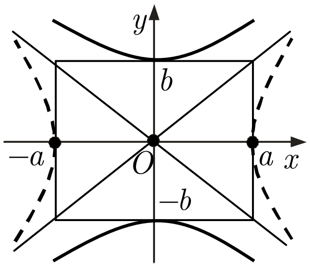


Рис. 17.5

Загальний випадок

Розгляньмо загальне рівняння геометричного образу 2-го порядку на площині

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0, \qquad (17.1)$$

де a_{11}, a_{12} та a_{22} не дорівнюють нулю одночасно.

У разі, якщо $a_{12}=0$, то це рівняння можна перетворити до канонічного вигляду (тим самим будуючи відповідну канонічну систему координат) паралельним перенесенням осей координат.

Отже, нехай $a_{12}\neq 0$. Розгляньмо матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ a_{21}=a_{12},$$

квадратичної форми

$$Q(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2.$$

Повертанням координатних осей на певний кут φ можна анулювати коефіцієнт при добуткові змінних. Для цього будують ортонормований базис площини із власних векторів матриці A, у якому матриця квадратичної форми набуде діагонального вигляду

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

де λ_1, λ_2 — власні числа матриці A.

Алгоритм зведення рівняння лінії 2-го порядку до канонічного вигляду

Крок 1. Записують матрицю квадратичною форми.

Крок 2. Знаходять власні числа λ_1 та λ_2 матриці A.

Крок 3. Знаходять одиничні власні вектори $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix}$ та $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix}$ матриці A.

Крок 4. Записують матрицю лінійного перетворення координат, що задає водночас і повертання координатних осей на кут φ:

$$H = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Тобто

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases} \qquad (17.2)$$

Крок 5. Переходячи до нових координат x' та y', з рівняння (17.1) дістають

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_{13}x' + 2b_{23}y' + b_{33} = 0, b_{33} = a_{33}. \qquad (17.3)$$

Крок 6. Паралельним перенесенням ПДСК знищують один або обидва лінійних доданки в рівнянні 17.3 і дістають канонічне рівняння лінії 2-го порядку.

17.4. Класифікація ліній 2-го порядку

Інваріантом рівняння ліній 2-го порядку (17.1) називають функцію від коефіцієнтів цього рівняння, значення якої не змінюється після переходу від однієї ПДСК до іншої. Величини

$$J_1 = a_{11} + a_{22}, \; J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \; J_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

де $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$, є інваріантами рівняння (17.1) лінії 2-го порядку.

Значення інваріантів визначають геометричні характеристики лінії.

Інваріантами є також характеристичний многочлен матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ і власні числа λ_1 та λ_2 матриці A.

Усі геометричні образи 2-го порядку поділяють на три типи:

1) якщо $J_2 > 0$, то геометричний образ еліптичного типу;

2) якщо $J_2 = 0$, то геометричний образ параболічного типу;

3) якщо $J_2 < 0$, то геометричний образ гіперболічного типу.

Тип лінії зберігається у разі зміни ПДСК.

За допомогою перетворення координат рівняння (17.1) можна звести до одного з таких типів:

1) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + m = 0$ (для еліпсів і гіпербол);

2) $\lambda_1 x^2 + 2ky = 0$ (для парабол);

3) $\lambda_1 x^2 + n = 0$ (для вироджених парабол),

а коефіцієнти цих рівнянь можна виразити через інваріанти:

$$J_1 = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2;$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2;$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 m.$$

З поданих рівностей і теореми Вієта випливає, що власні числа λ_1 та λ_2 є коренями квадратного рівняння

$$\lambda^2 - J_1 \lambda + J_2 = 0; \; m = \frac{J_3}{J_2}.$$

Зауважимо, що рівняння (17.1) може задавати:

1) порожню множину ($J_2 > 0, J_3 > 0$ або $J_2 = J_3 = 0$, $(a_{31})^2 - a_{11}a_{33} < 0$);

2) точку ($J_2 > 0, J_3 = 0$);

3) пару перетинних прямих ($J_2 < 0, J_3 = 0$);

4) пару паралельних прямих ($J_2 = J_3 = 0, (a_{31})^2 - a_{11}a_{33} > 0$);

5) еліпс ($J_2 > 0, J_3 < 0$);

6) параболу ($J_2 = 0, J_3 \neq 0$);

7) гіперболу ($J_2 < 0, J_3 \neq 0$).

Приклад 17.2. Визначмо, яку криву задає у ПДСК рівняння

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$$

Знайдімо її канонічне рівняння і побудуймо відповідну канонічну систему координат.

❍ *Крок 1.* Записуємо матрицю квадратичної форми

$$Q(x, y) = 9x^2 - 4xy + 6y^2$$

для рівняння геометричного образу 2-го порядку, враховуючи, що $-4 = 2a_{12} = 2a_{21}$:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Крок 2. Знаходимо власні числа матриці A як корені характеристичного многочлена матриці

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 5;\ \ \lambda_2 = 10.$$

Оскільки,

$$J_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 50 > 0.$$

то досліджувана крива еліптичного типу.

Крок 3. Знаходимо одиничні власні вектори матриці A, що відповідають власним числам.

Для $\lambda_1 = 5$ маємо:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_{11} - \frac{1}{2}\alpha_{12} = 0;\ \alpha_{11} = \frac{1}{2}\alpha_{12}.$$

$$\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};\ \left|\vec{z}_1\right| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5};$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{z}_1}{\left|\vec{z}_1\right|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_2 = 10$ маємо:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_{12} + 2\alpha_{22} = 0;\ \alpha_{12} = -2\alpha_{22}.$$

$$\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix};\ \ \left|\vec{z}_2\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5};$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{z}_2}{\left|z_2\right|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Крок 4. Отже, шукане перетворення координат задає матриця

$$H = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' - \dfrac{2}{\sqrt{5}}y'; \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y'. \end{cases}$$

Крок 5. Переходимо до нових координат у рівнянні кривої:

$$5x'^2 + 10y'^2 - 8\sqrt{5}y' - 2 = 0.$$

$$5x'^2 + 10\left(y' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 10 = 0.$$

Крок 6. Паралельно переносячи осі ПДСК за формулами:

$$\begin{cases} x' = x'', \\ y' = y'' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \end{cases}$$

дістаємо рівняння еліпса (рис. 17.6)

$$\frac{x''^2}{2} + \frac{y''^2}{1} = 1.$$

Систему координат Oxy перетворюємо на систему координат $O''x''y''$ за допомогою рівностей

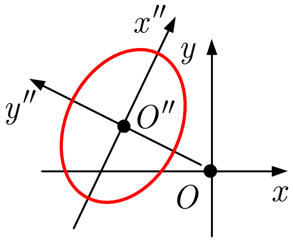


Рис. 17.6

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x'' - \dfrac{2}{\sqrt{5}}y'' - \dfrac{4}{5}, \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x'' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y'' + \dfrac{2}{5}, \end{cases}$$

які задають перенесення початку координат у точку $O''\left(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$ і повертання на кут $\varphi = \operatorname{arctg} 2$.

18. Поверхні 2-го порядку

18.1. Класифікація поверхонь і просторових кривих

Єдиною поверхнею 1-го порядку є площина.

Означення 18.1. *Геометричним образом 2-го порядку* у просторі називають множину точок простору, прямокутні координати $(x; y; z)$ яких справджують алгебричне рівняння 2-го порядку:

$$\boxed{\begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ &+2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \end{aligned}} \tag{18.1}$$

де $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ не дорівнюють нулю одночасно.

Рівняння (18.1) може задавати:

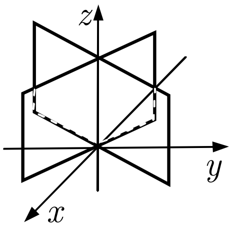


Рис. 18.1

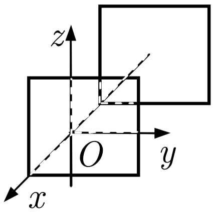


Рис. 18.2

1) порожню множину;
2) точку;
3) пару перетинних площин (рис. 18.1);
4) пару паралельних площин (рис. 18.2);
5) циліндри;
6) конус;
7) еліпсоїд;
8) гіперболоїди;
9) параболоїди.

18.2. Деякі класи поверхонь

Поверхні обертання

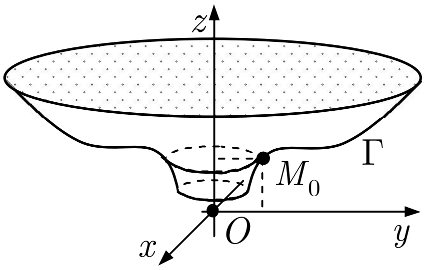


Рис. 18.3

Поверхню, яка разом з кожною своєю точкою містить усе коло, утворене обертанням цієї точки навколо деякої фіксованої прямої — осі обертання, називають *поверхнею обертання* (рис. 18.3).

Нехай Γ — крива на площині Oyz: $z = f(y)$, $y \geq 0$. Обертаючись навколо осі Oz, крива Γ утворює поверхню обертання (рис. 18.3).

Нехай $M_0(y_0; z_0)$ — довільна точка кривої Γ. Точка M_0 пробігає коло, проекцією якого на площину Oxy є

$$x^2 + y^2 = \left(y_0\right)^2.$$

Отже,

$$z_0 = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Завдяки довільності точки M_0 на кривій Γ поверхню обертання задає рівняння

$$\boxed{z = f(\sqrt{x^2 + y^2}).} \tag{18.2}$$

Запишімо рівняння поверхонь, утворених обертанням навколо осі Oz кривих 1-го та 2-го порядку, розміщених у площині Oyz:

1) прямої $az - cy = 0$;

2) еліпса $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

3) гіперболи $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

4) гіперболи $\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$;

5) параболи $y^2 = 2pz$.

1) Обертанням прямої навколо осі Oz одержимо коловий конус (рис. 18.4)

$$z=\pm\frac{c}{a}\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}.$$

Оскільки криві 2)–5) симетричні щодо осі Oz (змінна y входить у рівняння лише в парному степені), тому, скориставшись формулою (18.2), знайдімо рівняння відповідних поверхонь обертання:

2) еліпсоїд обертання (рис. 18.5)

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Якщо $a = c$, одержимо рівняння сфери радіусом a;

3) однопорожнинний гіперболоїд обертання (рис. 18.6)

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

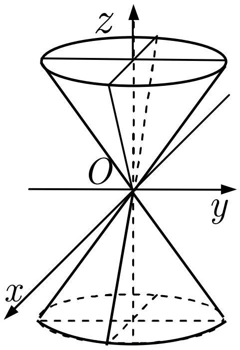
4) двопорожнинний гіперболоїд обертання (рис. 18.7)

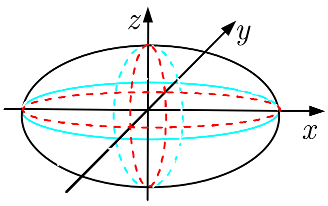
$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2}{a^2}=1;$$

5) параболоїд обертання (рис. 18.8)

$$\frac{x^2+y^2}{p}=2z.$$

Усі утворені поверхні є поверхнями 2-го порядку. Проте обертанням кривих 2-го порядку можна утворити і поверхні вищих порядків.





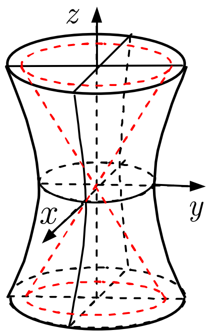


Рис. 18.4 Рис. 18.5 Рис. 18.6

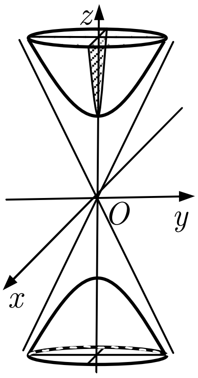


Рис. 18.7

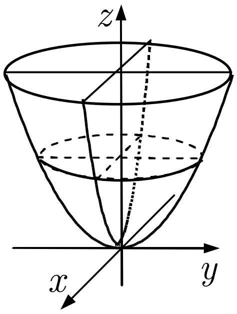


Рис. 18.8

Циліндричні поверхні

Поверхню називають *циліндричною* (*циліндром*), якщо вона разом з кожною своєю точкою M містить усю пряму — *твірну* циліндричної поверхні, яка проходить через точку M паралельно заданому вектору $\overline{p}$.

Нехай Γ — деяка лінія — *напрямна циліндричної поверхні*, а $\overline{p}$ — ненульовий вектор. Поверхня, утворена прямими, які проходять через усі точки лінії Γ паралельно вектору $\overline{p}$, буде циліндричною.

Візьмімо довільну точку O і проведімо площину Oxy перпендикулярно до твірної L і пряму Oz паралельно твірній L.

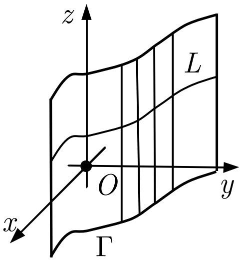


Рис. 18.9

Площина Oxy перетне циліндричну поверхню за напрямною Γ (рис. 18.9), яка має рівняння (що збігається з рівнянням циліндричної поверхні із твірною, паралельною осі Oz)

$$F(x, y) = 0.$$

Це й буде рівняння циліндричної поверхні у вибраній системі координат.

Рівняння $F(y, z) = 0$ описує циліндричну поверхню із твірною, паралельною осі Ox, а рівняння $F(x, z) = 0$ — із твірною, паралельною осі Oy.

Циліндричними поверхнями 2-го порядку із твірними, паралельними осі Oz, і напрямними — кривими 2-го порядку — є:

1) *еліптичний циліндр* (рис. 18.10)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0.$$

Якщо $a = b$, то дістанемо коловий циліндр $x^2 + y^2 = a^2$;

2) *параболічний циліндр* (рис. 18.11)

$$y^2 = 2px,\ p > 0.$$

3) *гіперболічний циліндр* (рис. 18.12)

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a,b>0.}$$

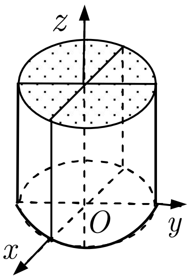


Рис. 18.10

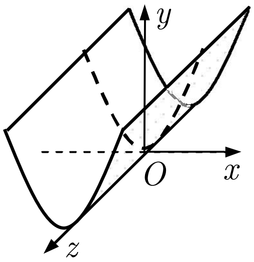


Рис. 18.11

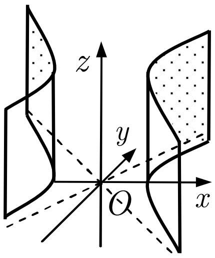


Рис. 18.12

Конічні поверхні

Поверхню, якій належить точка M_0, що разом з кожною точкою M, відмінною від M_0, містить пряму M_0M, називають *конічною поверхнею* (*конусом*).

Точку M_0 називають *вершиною конуса*, а прямі, які проходять через цю точку і належать поверхні,— її *твірними*. Конус може мати більше ніж одну вершину.

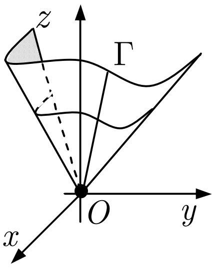


Рис. 18.13

Нехай Γ — довільна крива і точка O розташована поза нею. Через кожну точку кривої Γ і точку O проведімо прямі. Поверхня, утворена всіма цими прямими, буде конічною (рис. 18.13).

Точка O — вершина конуса, а прямі, що проходять через неї,— твірні конуса. Криву Γ називають *напрямною*.

Функцію $F(x,y,z)$ називають *однорідною функцією степеня* q, якщо

$$\forall t>0:\ F(tx,ty,tz)=t^qF(x,y,z).$$

Якщо $F(x,y,z)$ однорідна функція будь-якого степеня, то

$$\boxed{F(x,y,z)=0}$$

є рівнянням конічної поверхні S.

Нехай задано ПДСК, початок якої збігається з вершиною конуса O, і параметричні рівняння напрямної:

$$\begin{cases} x=f(u),\\ y=g(u),\\ z=h(u), u\in U. \end{cases}$$

Твірна, що проходить через довільну точку $M(x;y;z)$ на конусі, перетинає напрямну в точці $P(f(u);g(u);h(u))$, де u — відповідне значення параметра. Вектори $\overline{OM}$ та $\overline{OP}$ колінеарні, і тому існує таке число v, що

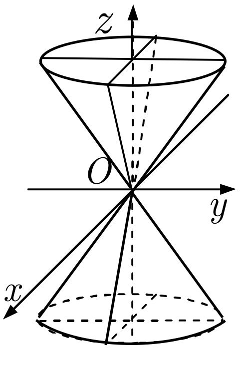


Рис. 18.14

$$\overline{OM} = v\overline{OP} \Leftrightarrow \begin{cases} x = vf(u), \\ y = vg(u), \\ z = vh(u), u \in U. \end{cases}$$

Можна переконатись, що точка, яка не лежить на конусі, ці параметричні рівняння не справджує.

Конічною поверхнею 2-го порядку буде *еліптичний конус* (рис. 18.14)

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.}$$

Коли $a = b$, то матимемо *коловий конус*.

Конічні перерізи

Еліпс, парабола, гіпербола є лініями перетину колового конуса із площинами, які не проходять через його вершину (рис. 18.15).

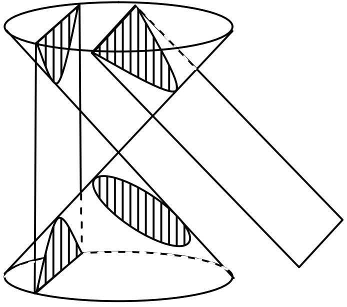


Рис. 18.15

Якщо січна площина перетинає всі твірні однієї порожнини конуса, то в перерізі дістанемо еліпс (зокрема, коло).

Якщо січна площина паралельна одній і лише одній із твірних конуса, то вона перетинає лише одну порожнину конуса вздовж параболи.

Якщо січна площина паралельна двом твірним поверхні конуса, то вона перетинає обидві порожнини конуса вздовж гіперболи.

Метод перерізів

Нехай S — деяка поверхня, задана у ПДСК. Щоб вивчити форму поверхні методом паралельних перерізів, поверхню S перетинають площинами, паралельними координатним, і визначають лінії перерізу поверхні з цими площинами.

Твердження 18.1. Якщо S — поверхня, задана у ПДСК рівнянням

$$F(x, y, z) = 0,$$

а $z = h$ — площина P, паралельна координатній площині Oxy, то проекція лінії перетину поверхні S із площиною P на площину Oxy має рівняння

$$\boxed{F(x, y, h) = 0.}$$

18.3. Еліпсоїд

Еліпсоїдом називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують рівняння

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a\ge b\ge c>0.} \tag{18.2}$$

Рівняння (18.2) називають *канонічним рівнянням* еліпсоїда, а систему координат — *канонічною системою*.

1. Еліпсоїд не проходить через початок координат канонічної системи координат, бо координати точки $O(0;0;0)$ не справджують рівняння (18.2).

2. Кожну вісь координат еліпсоїд перетинає у двох точках, симетричних щодо початку координат:

$$A_{1,2}(\pm a;0;0), B_{1,2}(0;\pm b;0); C_{1,2}(0;0;\pm c).$$

Точки перетину еліпсоїда з осями координат називають *вершинами еліпсоїда*, відрізки A_1A_2, B_1B_2 та C_1C_2 — *осями еліпсоїда*, а числа a, b та c — півосями еліпсоїда. Якщо всі ці числа різні, то еліпсоїд називають *тривісним*. Якщо дві півосі дорівнюють одна одній, то ми дістаємо *еліпсоїд обертання*. Якщо, нарешті, $a=b=c$, то поверхня є *сферою* з центром у початку координат.

3. Оскільки змінні x, y, z у рівняння еліпсоїда входять у парних степенях, то еліпсоїд симетричний щодо всіх координатних площин, координатних осей і початку координат.

4. З рівняння еліпсоїда випливає, що

$$\frac{x^2}{a^2}\le 1,\ \frac{y^2}{b^2}\le 1,\ \frac{z^2}{c^2}\le 1 \Leftrightarrow \left|x\right|\le a,\ \left|y\right|\le b,\ \left|z\right|\le c.$$

5. Обертанням еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

навколо осі Ox (рис.18.16) одержимо еліпсоїд обертання

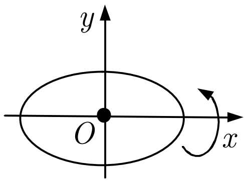


Рис. 18.16

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

а з нього — стисканням вздовж осі Oz з коефіцієнтом $\frac{c}{b}\le 1$ — еліпсоїд загального вигляду (рис. 18.17).

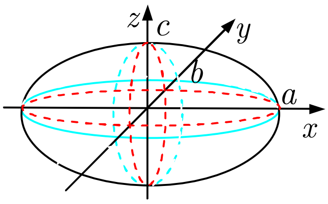


Рис. 18.17

6. Вивчімо форму еліпсоїда методом паралельних перерізів. Якщо еліпсоїд з рівнянням (18.2) перетнути площиною $z=h$, паралельною площині Oxy, то проекція перерізу на площину Oxy матиме рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}.$$

Можливі три випадки:

а) $-c < h < c$. У цьому разі в перерізах дістаємо еліпси з центрами на осі Oz. Справді, проекції цих ліній на площину Oxy мають рівняння

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1.$$

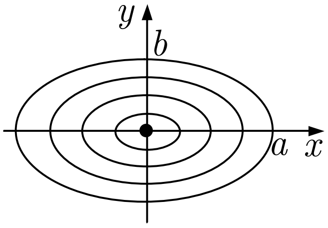


Рис. 18.18

Оскільки $1-\frac{h^2}{c^2}>0$, то це рівняння визначає еліпси (рис. 18.18) з півосями:

$$a^* = a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \quad b^* = b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$

б) $h = \pm c$. У цьому разі рівняння проекції перерізу на площину Oxy набуває вигляду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0.$$

Еліпс вироджується в точку $O(0;0)$.

в) $\left|h\right| > c$. У цьому разі в перерізі дістаємо порожню множину, бо площина $z = h$ при $\left|h\right| > c$ не має з еліпсоїдом спільних точок.

Перерізи, паралельні іншим координатним площинам, такі самі.

Зауваження 18.1. Рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

задає лише одну точку $O(0;0;0)$, а рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

— порожню множину (ще кажуть «уявний еліпсоїд»).

18.4. Гіперболоїди

Однопорожнинний гіперболоїд

Однопорожнинним гіперболоїдом називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують *канонічне рівняння*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, a,b,c>0.} \tag{18.4}$$

Систему координат, у якій однопорожнинний гіперболоїд має рівняння (18.4), називають *канонічною системою*.

1. Однопорожнинний гіперболоїд не проходить через початок канонічної системи координат, бо координати точки $O(0;0;0)$ не справджують рівняння (18.4).

2. Однопорожнинний гіперболоїд перетинає вісь Ox у вершинах — точках $A_{1,2}(\pm a;0;0)$, а вісь Oy — у точках $B_{1,2}(0;\pm b;0)$. Вісь Oz однопорожнинний гіперболоїд не перетинає. Відрізки A_1A_2 та B_1B_2 називають *дійсними осями* однопорожнинного гіперболоїда. Числа a, b, c називають *півосями* однопорожнинного гіперболоїда.

3. Рівняння поверхні містить змінні x, y, z у парних степенях, тому однопорожнинний гіперболоїд симетричний щодо всіх координатних площин, координатних осей і початку координат.

4. З рівняння однопорожнинного гіперболоїда випливає, що

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geq 1.$$

5. Обертанням гіперболи

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

навколо осі Oz (рис. 18.19) одержимо однопорожнинний гіперболоїд обертання

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

а з нього — стисканням уздовж осі Oy з коефіцієнтом $\frac{b}{a}$ — однопорожнинний гіперболоїд загального вигляду (рис. 18.20).

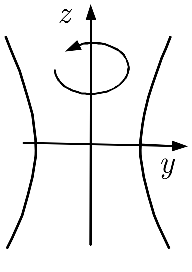


Рис. 18.19

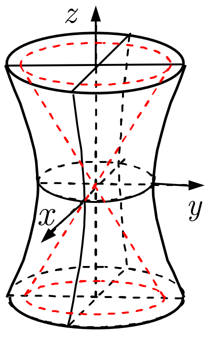


Рис. 18.20

6. Вивчімо форму поверхні однопорожнинного гіперболоїда методом перерізів. Якщо перетнути поверхню площиною $z=h$, паралельною площині Oxy, то проекція перерізу на площину Oxy має рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}.$$

За будь-якого значення h це рівняння еліпса (рис. 18.21) з півосями:

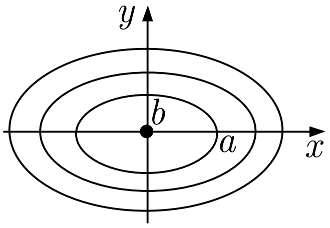


Рис. 18.21

$$a' = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 + h^2}, \quad b' = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 + h^2}.$$

Якщо $h = 0$, матимемо горловий еліпс однопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Якщо поверхню перетнути площиною $x = h$, яка паралельна площині Oyz, то проекція перерізу на площину Oyz має рівняння

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}.$$

Можливі три випадки:

а) $\left|h\right| < a$. У цьому разі $1 - \dfrac{h^2}{a^2} > 0$, тому проекції перерізів на площину Oyz є гіперболами з уявною віссю Oz (рис. 18.22, I).

б) $h = \pm a$. У цьому разі проекції перерізів збігаються. Їхнє рівняння

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

означає дві прямі, які перетинаються в початку координат (рис. 18.22, II).

в) $\left|h\right| > a$. У цьому разі $1 - \dfrac{h^2}{a^2} < 0$, тому в перерізі матимемо гіперболи, для яких вісь Oy є уявною віссю (рис. 18.22, III).

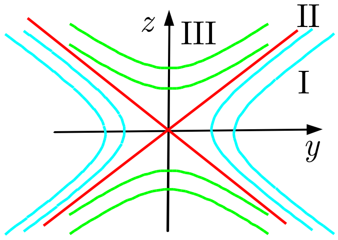


Рис. 18.22

Те саме матимемо в разі перерізання поверхні площинами $y = h$.

7. Асимптотичною поверхнею для однопорожнинного гіперболоїда є еліптичний конус (однопорожнинний гіперболоїд розташований ззовні конуса)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, a, b, c > 0.$$

Двопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинним гіперболоїдом називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують *канонічне рівняння*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, a, b, c > 0.} \tag{18.5}$$

Систему координат, у якій двопорожнинний гіперболоїд має рівняння (18.5), називають *канонічною системою*.

1. Двопорожнинний гіперболоїд не проходить через початок канонічної системи координат.

2. Двопорожнинний гіперболоїд перетинає вісь Oz у двох точках — вершинах — $C_{1,2}(0;0;\pm c)$. Осі Ox та Oy не перетинають поверхню. Відрізок C_1C_2 називають *дійсною віссю*. Числа a, b та c називають *півосями* двопорожнинного гіперболоїда.

3. Двопорожнинний гіперболоїд симетричний щодо всіх координатних площин, координатних осей і початку координат.

4. Двопорожнинний гіперболоїд міститься всередині асимптотичного конуса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, a, b, c>0$$

і за межами смуги $\left|z\right| \geq c$.

5. Обертанням гіперболи

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$$

навколо осі Oz (рис. 18.23) одержимо двопорожнинний гіперболоїд обертання

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

а з нього — стисканням уздовж осі Oy з коефіцієнтом $\frac{b}{a}$ — двопорожнинний гіперболоїд загального вигляду (рис. 18.24).

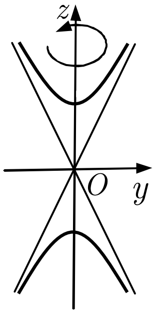


Рис. 18.23

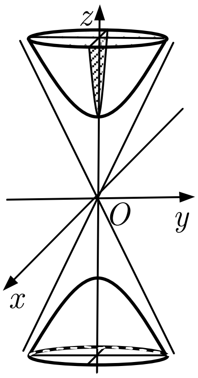


Рис. 18.24

18.5. Параболоїди

Еліптичний параболоїд

Еліптичним параболоїдом називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують *канонічне рівняння*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z, a, b>0.} \tag{18.6}$$

Систему координат, у якій еліптичний параболоїд має рівняння (18.6), називають *канонічною системою*.

1. Еліптичний параболоїд проходить через початок ПДСК.

2. Еліптичний параболоїд має з осями координат лише одну спільну точку — вершину — точку $O(0;0;0)$.

3. Оскільки рівняння (18.6) містить змінні x, y у парних степенях, то еліптичний параболоїд симетричний щодо площин Oxz та Oyz. Поверхня не симетрична щодо площини Oxy. Звідси випливає, що еліптичний параболоїд симетричний щодо координатної осі Oz і не симетричний щодо осей Ox та Oy і початку координат.

4. З рівняння (18.6) випливає, що для всіх точок поверхні $z \geq 0$, причому $z=0$ тоді й лише тоді, коли точка збігається з початком координат. Отже, всі точки еліптичного параболоїда, крім початку координат, розміщені по один бік від площини Oxy.

5. Обертанням параболи $2a^2z=y^2$ навколо осі Oz (рис. 18.25) одержимо параболоїд обертання

$$2z=\frac{x^2+y^2}{a^2},$$

а з нього — стисканням вздовж осі Oy з коефіцієнтом $\frac{b}{a}$ — еліптичний параболоїд загального вигляду (рис. 18.26).

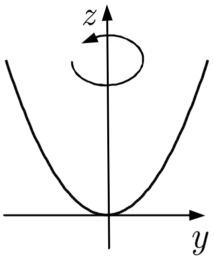


Рис. 18.25

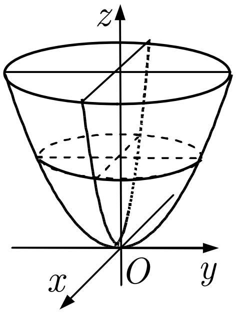


Рис. 18.26

Гіперболічний параболоїд

Гіперболічним параболоїдом називають множину всіх точок простору, координати яких у деякій ПДСК справджують *канонічне рівняння*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z, a, b>0.} \tag{18.7}$$

Систему координат, у якій гіперболічний параболоїд має рівняння (18.7), називають *канонічною системою*.

1. Гіперболічний параболоїд проходить через початок канонічної системи координат.

2. Гіперболічний параболоїд перетинає осі канонічної системи координат у єдиній точці — на початку координат.

3. Гіперболічний параболоїд симетричний щодо площин Oxz та Oyz і не симетричний щодо площини Oxy. Звідси поверхня симетрична щодо осі Oz і не симетрична щодо осей Ox та Oy і початку координат.

4. Перерізанням поверхні площинами $z=h$ одержимо гіперболи (рис. 18.27, I)

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{2h})^2}-\frac{y^2}{(b\sqrt{2h})^2}=1, h>0,$$

спряжені до них гіперболи (рис. 18.27, III)

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{-2h})^2}-\frac{y^2}{(b\sqrt{-2h})^2}=-1, h<0,$$

та пару перетинних прямих — асимптот гіпербол (рис. 18.27, II)

$$y=\pm\frac{b}{a}x, h=0.$$

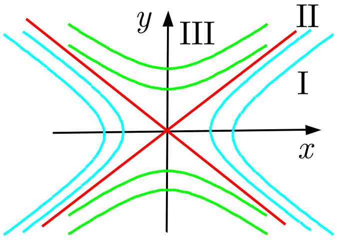


Рис. 18.27

Перерізанням поверхні площинами $y=h$ одержимо параболи (рис. 18.28)

$$x^2=2a^2\left(z+\frac{h^2}{2b^2}\right).$$

Перерізанням поверхні площинами $x=h$ одержимо параболи (рис. 18.29).

$$y^2=-2b^2\left(z-\frac{h^2}{2a^2}\right).$$

Гіперболічний параболоїд зображено на рис. 18.30.

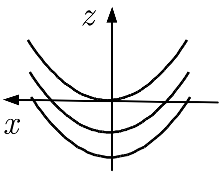


Рис. 18.28

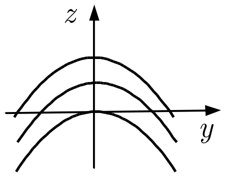


Рис. 18.29

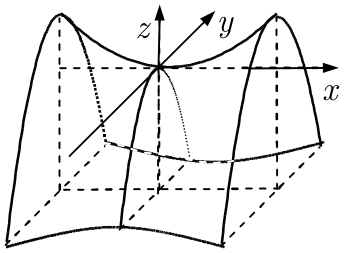


Рис. 18.30

Прямолінійні твірні поверхонь 2-го порядку

Деякі з розглянутих поверхонь 2-го порядку можна утворити рухом прямої лінії. Це очевидно для конуса та циліндра. Виявляється, що однопорожнинний гіперболоїд (рис. 18.31) і гіперболічний параболоїд (рис. 18.32) теж є поверхнями, що утворені прямолінійними твірними.

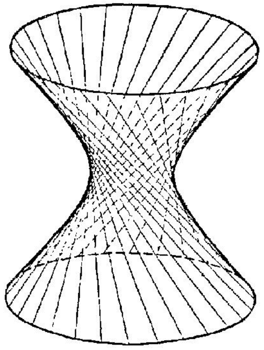


Рис. 18.31

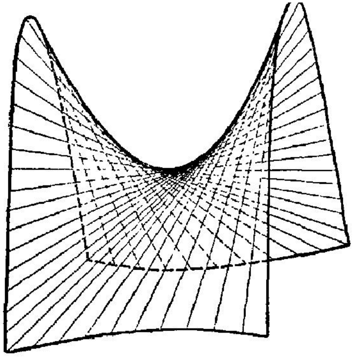


Рис. 18.32

19. Визначні криві та поверхні

19.1. Плоскі криві у ПДСК

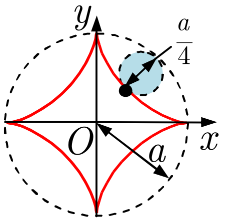


Рис. 19.1

1. *Астроїда* (рис. 19.1) — крива , яку задає в деякій ПДСК:

рівняння

$$\boxed{x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3};}$$

параметричні рівняння: $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, t \in [0;2\pi]. \end{cases}$

Астроїда — траєкторія руху точки M кола радіусом $\frac{a}{4}$, що котиться внутрішнім боком кола радіусом $a > 0$ (рис. 19.1).

2. *Циклоїда* (рис. 19.2) — крива, яку в деякій ПДСК задають параметричні рівняння:

$$\boxed{\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), t \in \mathbb{R}. \end{cases}}$$

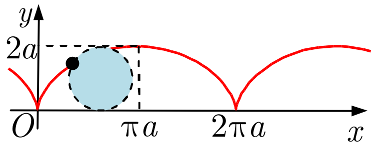


Рис. 19.2

Циклоїда — траєкторія руху точки кола, що котиться нерухомою прямою без ковзання.

Циклоїду утворює нескінченна кількість арок, кожна з яких відповідає одному обороту кола. Отже, першій арці від початку координат відповідає змінювання параметра t від 0 до 2π; другій — від 2π до 4π тощо.

3. *Декартів листок* (рис. 19.3) — крива, яку в деякій ПДСК задає рівняння

$$\boxed{x^3 + y^3 - 3axy = 0, a > 0;}$$

параметричні рівняння у ПДСК:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1 + t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3}, t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}. \end{cases}$$

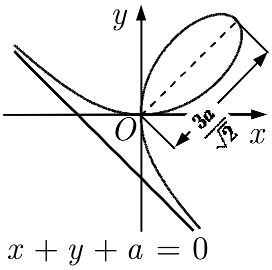


Рис. 19.3

4. *Кучер Аньєзі* (рис. 19.4) — крива , яку в деякій ПДСК задає рівняння

$$\boxed{y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}.}$$

5. *Петльова парабола* (рис. 19.5) — крива, яку в деякій ПДСК задає рівняння

$$\boxed{ay^2 = x(x - a)^2.}$$

6. *Розгортка кола* (рис. 19.6) — крива, яку в деякій ПДСК задають параметричні рівняння:

$$\boxed{\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), t \in [0; +\infty). \end{cases}}$$

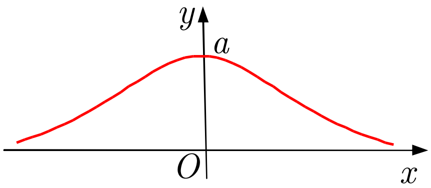


Рис. 19.4

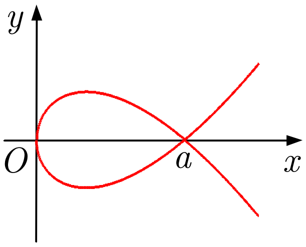


Рис. 19.5

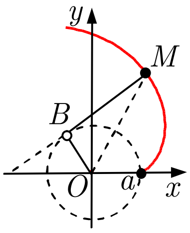


Рис. 19.6

19.2. Плоскі криві в полярній системі координат

1. *Паскалів завиток* (рис. 19.7–19.9) — крива, яка має в деякій полярній системі рівняння

$$\boxed{\rho = 2a\cos\varphi \pm l.}$$

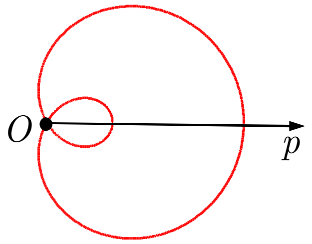


Рис. 19.7

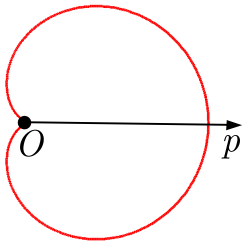


Рис. 19.8

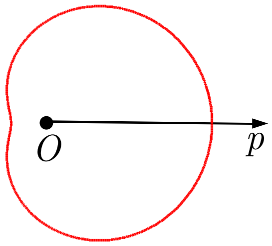


Рис. 19.9

Лінія симетрична щодо осі Ox; якщо $l < 2a$, то точка O — вузлова (в ній лінія перетинає себе), якщо $l = 2a$, то полюс є точкою вертання, якщо $l > 2a$, то точка O, яка належить кривій, є ізольованою особливою точкою.

Паскалів завиток використовують для креслення профілю ексцентрика, якщо потрібно, щоб стрижень, який ковзає профілем, коливався гармонічно.

2. *Кардіоїда* (рис. 19.10) — крива, яку в деякій полярній системі координат задає рівняння

$$\boxed{\rho = 2a(1 + \cos\varphi).}$$

Кардіоїда — траєкторія руху точки кола радіусом r, яке котиться зовнішнім боком кола з таким самим радіусом — окремий випадок паскалевого завитка.

3. *Лемніската Бернуллі* (рис. 19.11) — крива, яку в деякій ПДСК задає рівняння

$$\boxed{(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).}$$

Рівняння в полярній системі: $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$.

Лемніската Бернуллі — множина всіх точок площини, для яких добуток віддалей до двох заданих точок цієї площини є сталим і рівним квадрату половини віддалі між заданими точками: $\left|F_1M\right|\left|F_2M\right| = a^2$ (рис. 19.11).

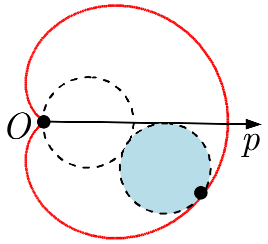


Рис. 19.10

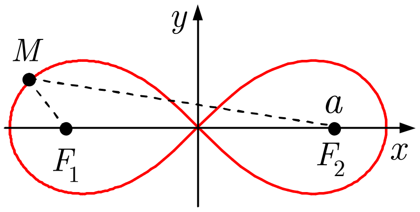


Рис. 19.11

4. *Архімедова спіраль* (рис. 19.12) — крива , яку в деякій полярній системі координат задає рівняння

$$\boxed{\rho = a\varphi.}$$

Архімедова спіраль — траєкторія руху точки, що рівномірно рухається прямою, яка рівномірно обертається навколо фіксованої точки.

5. *Гіперболічна спіраль* (рис. 19.13) — крива, яку в деякій полярній системі координат задає рівняння

$$\boxed{\rho = \frac{a}{\varphi}.}$$

6. *Логарифмічні спіралі*, права і ліва (рис. 19.14 і 19.15) — криві, які в деякій полярній системі координат задають рівняння

$\boxed{\rho = a^{\varphi}, a > 1}$ (для правої);

$\boxed{\rho = a^{\varphi}, 0 < a < 1}$ (для лівої).

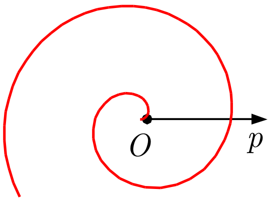


Рис. 19.12

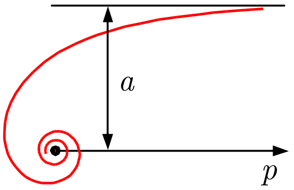


Рис. 19.13

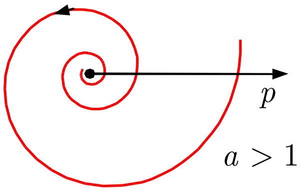


Рис. 19.14

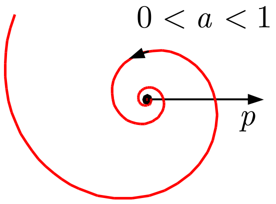
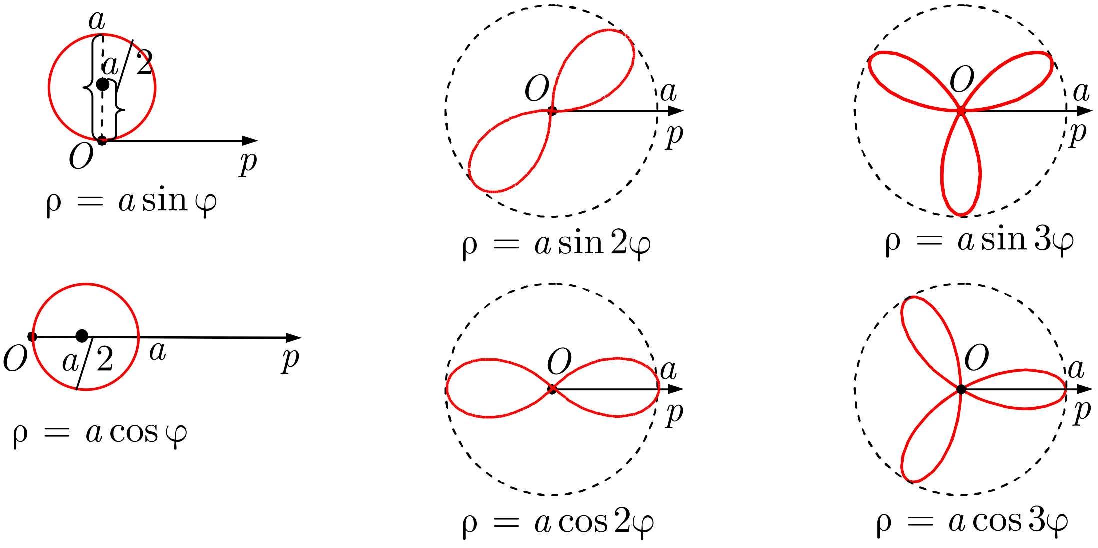


Рис. 19.15

7. *Рози* (рис. 19.16) — сукупність кривих, які в деякій полярній системі координат задають рівняннями:

$\boxed{\rho = a \sin n\varphi}$ або $\boxed{\rho = a \cos n\varphi, a > 0.}$

Рози містяться всередині кола радіусом a; коли n ціле, то мають n пелюсток.



$\rho = a \sin \varphi$ $\rho = a \sin 2\varphi$ $\rho = a \sin 3\varphi$

$\rho = a \cos \varphi$ $\rho = a \cos 2\varphi$ $\rho = a \cos 3\varphi$

Рис. 19.16

19.3. Просторові криві

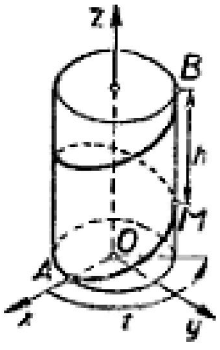


Рис. 19.17

1. *Циліндрична гвинтова лінія* (рис. 19.17) — просторова крива, яку описує точка, що обертається зі сталою кутовою швидкістю навколо нерухомої осі й одночасно переміщується поступально зі сталою швидкістю вздовж цієї осі.

Параметричні рівняння:

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = \dfrac{ht}{2\pi}, t \in [0;+\infty), \end{cases}}$$

де a — радіус циліндра; h — крок гвинтової лінії.

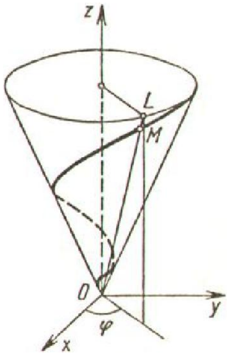


Рис. 19.18

2. *Конічна гвинтова лінія* (рис. 19.18) — лінія на поверхні колового конуса, що перетинає всі твірні під однаковим кутом.

Параметричні рівняння:

$$\boxed{\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t, \\ z = bt, t \in [0;+\infty). \end{cases}}$$

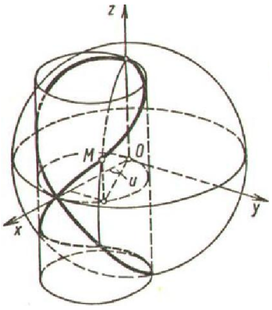


Рис. 19.19

3. *Крива Вівіані* (рис. 19.19) — лінія перетину сфери з коловим циліндром, удвічі меншого радіуса, ніж сфера.

Неявні рівняння:

$$\boxed{\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 = ax. \end{cases}}$$

19.4. Поверхні

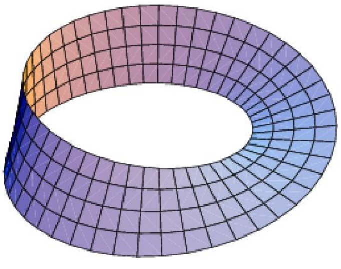


Рис. 19.20

1. *Мебіюсів листок* (рис. 19.20) — поверхня, яку можна одержати склеюванням двох протилежних боків перекрученої прямокутної смужки. Ця поверхня є прикладом однобічної неорієнтованої поверхні: якщо рухатись уздовж мебіюсова листка, не перетинаючи його межі, то (на відміну від двобічних поверхонь, приміром, сфери, циліндра) можна потрапити в початкову точку, опинившись у перевернутому положенні, тобто з «другого боку».

2. *Тор* (рис. 19.21) — поверхня, одержана обертанням кола навколо осі, що лежить у площині кола і її не перетинає.

Параметричні рівняння:

$$\boxed{\begin{cases} x = (a + b\cos u)\cos v, \\ y = (a + b\cos u)\sin v, \\ z = b\sin u, \quad u, v \in [0; 2\pi]. \end{cases}}$$

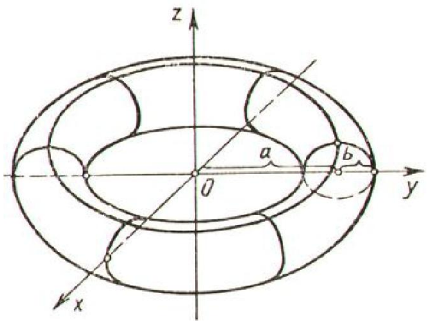


Рис. 19.21

3. *Гелікоїд* (рис. 19.22) — гвинтова поверхня, яку у просторовій ПДСК задають параметричні рівняння:

$$\boxed{\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = hv, \quad u, v \in \mathbb{R}. \end{cases}}$$

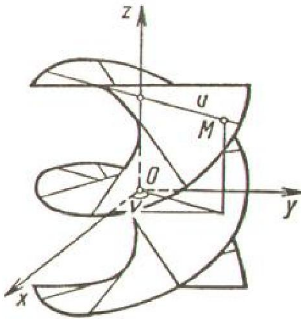


Рис. 19.22

20. Застосування аналітичної геометрії

20.1. Маневрування літака або космічного корабля (перетворення систем координат)

Рис. 20.1

В аеронавтиці та астронавтиці орієнтацію літака або космічного корабля у системі координат $Oxyz$ часто описують за допомогою кутів, які називають рисканням, тангажем та креном (рис. 20.1). Приміром, літак летить уздовж осі Oy і площина Oxy є горизонтальною, тоді кут повороту навколо осі Oz називають кутом *рискання*, кут повороту навколо осі Ox називають кутом *тангажа*, а кут повороту навколо осі Oy — кутом *крена*.

Комбінацію всіх трьох поворотів можна замінити єдиним обертанням навколо деякої осі, що проходить через початок координат. Саме так, визначаючи вісь і рухаючись навколо неї, космічний корабель набуває правильної просторової орієнтації.

Ейлерові кути

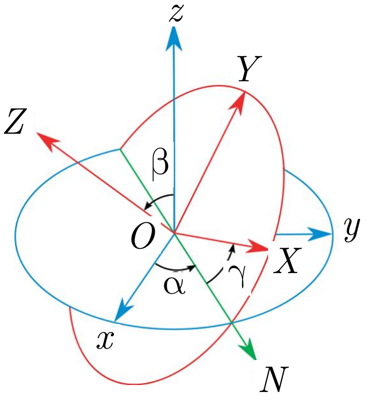


Рис. 20.2

Описати повертання тіла можна за допомогою *ейлерових кутів* — кутів, на які треба повернути ПДСК $OXYZ$, зв'язану з тілом, щоб сумістити її з нерухомою ПДСК $Oxyz$, яка має з першою спільний початок (рис. 20.2).

Оскільки ПДСК $Oxyz$ та $OXYZ$ мають спільний початок, то координатні площини Oxy та OXY перетинаються вздовж *вузлової лінії* ON.

Перше повертання відбувається навколо осі Oz, поки вісь OX не потрапить у площину Oxy. Кут повороту α називають *кутом прецесії*.

Наступне повертання відбувається вздовж нового початку осі OX, поки не сумістяться осі аплікат обох ПДСК, при цьому вісь OY потрапить у площину Oxy. Кут повороту β називають *кутом нутації*. Останнє повертання відбувається на кут γ, який називають *кутом власного обертання*.

20.2. Деформування еластичної мембрани (власні числа та власні вектори матриці)

Визначимо напрям (головний) напрям та величину деформації колової мембрани, за якої вона набуває еліптичної форми.

Головним напрямом деформації називають напрям радіуса-вектора $\overline{x}$ точки P при якому він переходить у колінеарний йому радіус-вектор $\overline{y}$ точки Q.

Приклад. Знайдімо головні напрями деформації еластичної мембрани, обмеженої колом $x_1^2 + x_2^2 = 1$ на площині Ox_1x_2, яку розтягнуто так, що точка $P(x_1;x_2)$ переходить у точку $Q(y_1;y_2)$ за допомогою лінійного перетворення

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5x_1 + 3x_2, \\ y_2 = 3x_1 + 5x_2. \end{cases}$$

Визначмо, якої форми набуде мембрана після такої деформування.

❍ Шукаймо вектори $\vec{x}$ такі, що $\vec{y} = \lambda\vec{x}$, звідки $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Таким чином задачу зведено до відшукання власних векторів матриці A.

Записуємо матрицю

$$A - \lambda E_2 = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{pmatrix}.$$

Знаходимо характеристичний многочлен матриці A

$$\det(A - \lambda E_2) = (5 - \lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 10\lambda + 16.$$

Знаходимо корені характеристичного многочлена — власні числа матриці:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 8, \lambda_2 = 2.$$

Знаходимо власний вектор, який відповідає власному числу $\lambda_1 = 8$:

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C, \\ x_2 = C \end{cases} \Rightarrow \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власний вектор, який відповідає власному числу $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -C, \\ x_2 = C \end{cases} \Rightarrow \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Власні вектори матриці A $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ утворюють відповідно кути $\frac{\pi}{4}$ та $\frac{3\pi}{4}$ з додатним напрямом осі Ox_1. Це і є головні напрями. Власні числа вказують, що у головних напрямах мембрана розтягується відповідно у 8 та 2 рази (рис. 20.3).

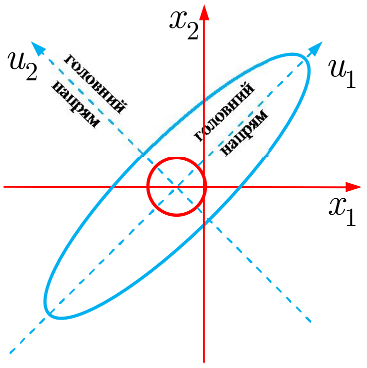


Рис. 20.3

Якщо взяти головні напрями як напрями осей нової ПДСК Ou_1u_2 і покласти $u_1 = \rho\cos\varphi, u_2 = \rho\sin\varphi$, то межові точки нерозтягнутої колової мембрани мають координати $(\cos\varphi; \sin\varphi)$. Після розтягнення маємо

$$u_1 = 8\cos\varphi, u_2 = 2\sin\varphi.$$

Здеформовану мембрану обмежено еліпсом

$$\frac{u_1^2}{8^2} + \frac{u_2^2}{2^2} = 1. \bullet$$

20.3. Модель рівноваги доходів і збитків компанії

Компанія випускає продукцію і продає її за ціною p гривень за одиницю. Керівництво компанії встановило, що зміна суми $y_{\text{в}}$ загальних щомісячних витрат на виготовлення x (тисяч одиниць) продукції має закономірність (рис. 20.4)

$$y_{\text{в}} = ax + b.$$

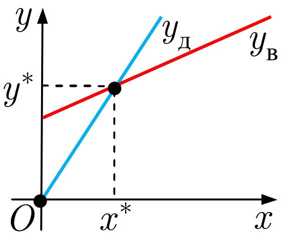


Рис. 20.4

Знайдімо точку рівноваги області прибутків і збитків компанії.

Оскільки дохід від продажу x (тисяч одиниць) продукції ціною p гривень за одиницю визначатиметься функцією доходу $y_д = px$, то для рівноваги доходів і витрат потрібно, щоб виконувалась умова рівноваги

$$y_в = y_д.$$

Розв'язуючи рівняння $px = ax + b$, знаходимо точку рівноваги

$$x^* = \frac{b}{p-a}.$$

Розгляньмо можливості компанії. Прибуток P компанії визначаємо за рівністю

$$P = y_д - y_в = px - ax - b = x(p-a) - b.$$

Отже, точка рівноваги — це коли прибуток компанії $P = 0$.

Якщо $0 \le x < x^*$, то графік функції доходу проходить нижче за графік функції витрат $y_в$, тобто $y_д < y_в$. Тоді $P < 0$, і компанія зазнає збитків.

Якщо $x > x^*$, то графік функції доходу проходить вище за графік функції витрат $y_в$, тобто $y_д > y_в$. Тоді $P > 0$, і компанія одержує прибуток.

Отже, область збитків компанії становить $[0; x^*)$, а область прибутків — $(x^*; +\infty)$.

20.4. Криві і поверхні у природі і техніці

Еліпс

Йоган Кеплер (1571–1630) показав, що орбіти планети Сонячної системи є еліпсами із Сонцем в одному з фокусів (рис. 20.5 та 20.6).

Оптичну властивість еліпса використовують для побудови «галерей шепотіння». У такій кімнаті слово, вимовлене пошепки в одному з фокусів можна добре почути, перебуваючи в іншому фокусі (рис. 20.7).

Ґрунтуючись на оптичній властивості, працює і медичний прилад — літотриптер. Він використовує ультразвукові ударні хвилі для подрібнення каміння у нирках. Хвилі створюють в одному з фокусів еліпса і відбивають їх на камінець, розташований у другому фокусі (рис. 20.8).

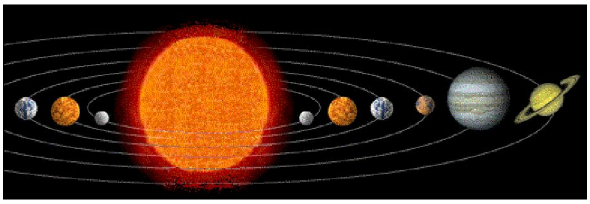


Рис. 20.5

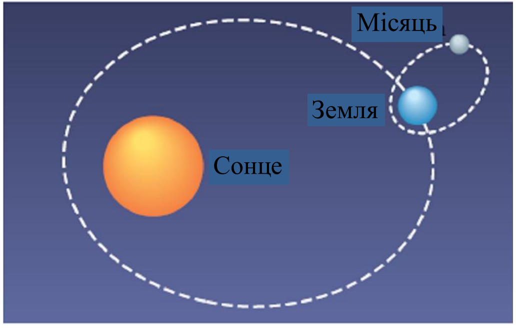


Рис. 20.6

Рис. 20.7

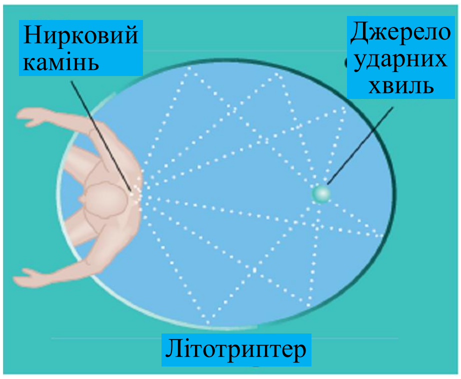


Рис. 20.8

Арки деяких мостів інколи будують еліптичними. Еліптичні шестерні використовують для деяких пристроїв, зокрема, де потрібне повільне, але потужне зусилля, таке як у перфораторі (рис. 20.9).

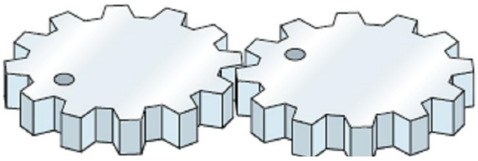


Рис. 20.9

Гіпербола

Коли реактивний літак летить з надзвуковою швидкістю, ударна хвиля створює звуковий удар. Хвиля має конічну форму, але досягає земної поверхні як гілка гіперболи.

Галеєва комета, яка стала складовою Сонячної системи, рухається навколо Сонця еліптичною орбітою. Інші комети пролітають Сонячну системи лише один раз, рухаючись гіперболічною орбітою із Сонцем у фокусі.

Охолоджувальні вежі атомних станцій мають у перерізі еліпси і гіперболи (тобто є однопорожнинними гіперболоїдами) (рис. 20.10). Інколи архітектурні перекриття мають гіперболічну форму.

Використовуючи гіперболи, працювала навігаційна система LORAN (до появи GPS-навігації). Ця система використовує передавальні станції у трьох точках і надсилає одночасні сигнали кораблю або літаку. Різниці часу проходження сигналу від першої та другої пар передавачів записують. Для кожної пари обчислюють різницю віддалей кожного члена пари від корабля або літака. Якщо кожна пара різниць є сталою, можна зобразити дві гіперболи. Кожна з них має пари передавачів своїми фокусами, корабель або літак тоді розташований на перетині двох їхніх гілок (рис. 20.11).

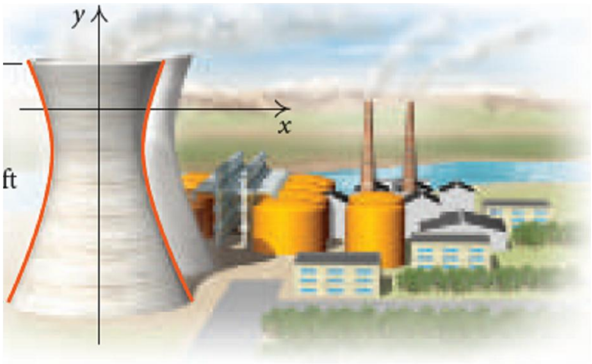


Рис. 20.10

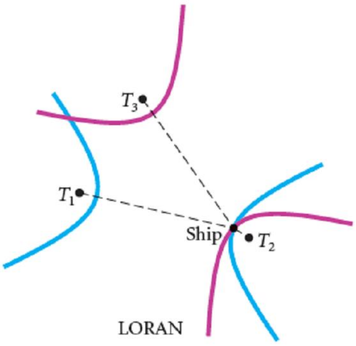


Рис. 20.11

Парабола

Світлові промені від фар машини, електричні ліхтарики (рис. 20.12), прожектори (рис. 20.13) мають параболічну форму. Параболічна антена та польові мікрофони, які використовують на спортивних змаганнях, мають параболічні перерізи (рис. 20.14). Оптичну властивість параболи збирати паралельні пучки світла у фокусі використовують у телескопах (рис. 20.15). Деякі ж телескопи мають і параболічні, і гіперболічні дзеркала (рис. 20.16).

Троси підвісних мостів мають форму парабол (у разі ж вільного провисання трос матиме форму ланцюгової лінії) (рис. 20.17).

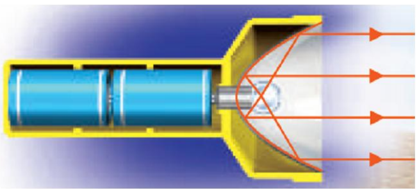


Рис. 20.12

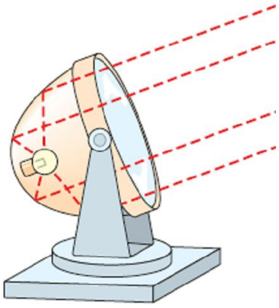


Рис. 20.13

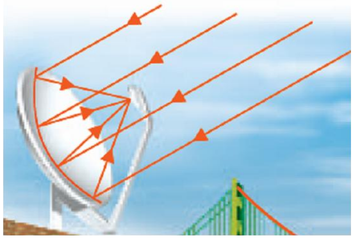


Рис. 20.14

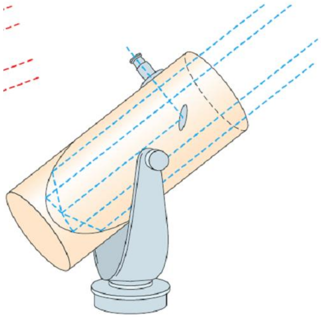


Рис. 20.15

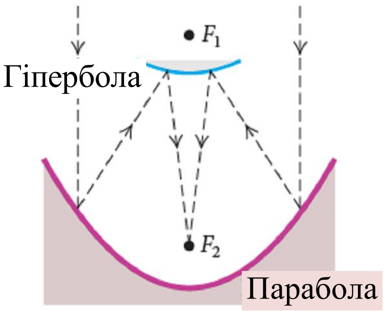


Рис. 20.16

Рис. 20.17

Кардіоїда

Форму кардіоїди має діаграма напрямленості мікрофона однобічного напрямлення (рис. 20.18)

Модифікації мікрофонів, що мають ще вужчу напрямленість, ніж кардіоїдні, називають *суперкардіоїдними* та *гіперкардіоїдними* (рис. 20.19), проте ці різновиди, на відміну від *кардіоїдних* мікрофонів також чутливі до сигналів з протилежного боку.

Кардіоїду можна побачити як відбиток від точкового джерела світла у чашці чорної кави (рис. 20.20).

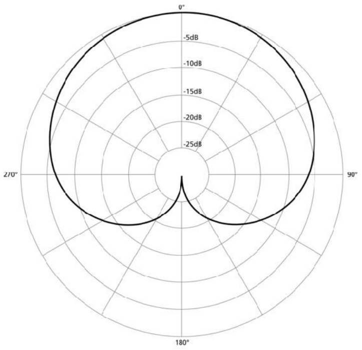


Рис. 20.18

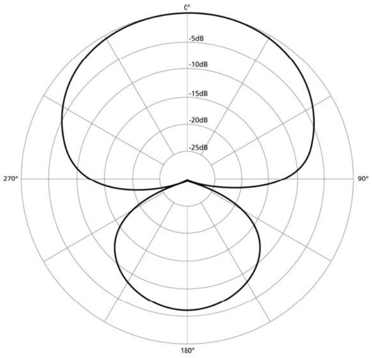


Рис. 20.19

Рис. 20.20

Циклоїда

Серед багатьох чудових властивостей циклоїди найважливіші дві — ця крива є брахістохроною (лінією найшвидшого спускання) і таутохроною (лінією однакового часу).

Виявляється, що кулька скотиться найшвидше саме циклоїдним жолобом (рис. 20.21, 20.22); з'їжджати на санчатах із циклоїдної гірки небезпечно — адже всі санчата досягнуть найнижчої точки одночасно (рис. 20.23), незалежно від точки старту.

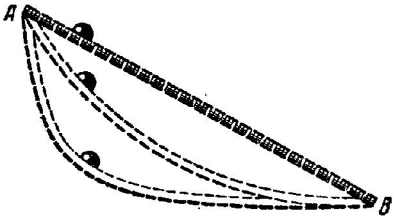


Рис. 20.21

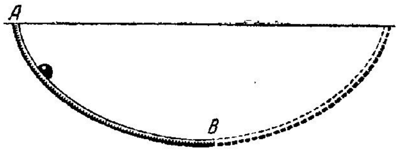


Рис. 20.22

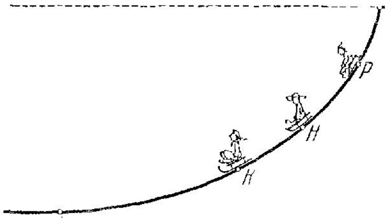


Рис. 20.23

Логарифмічна спіраль

У техніці часто використовують обертові ножі. Сила, з якою вони тиснуть на розрізуваний матеріал, залежить від кута різання, тобто кута між лезом ножа і напрямом швидкості обертання. Для сталості тиску потрібно, щоб кут різання зберігав стале значення, а для цього треба , щоб леза ножів мали форму логарифмічної спіралі (рис. 20.24).

У гідротехніці за логарифмічною спіраллю вигинають трубу, яка підводить потік води до лопатів турбіни. Завдяки такій формі труби втрати енергії на змінення напряму течії у трубі виявляються найменшими і тиск води у трубі використовують з найбільшою віддачею.

Пропорційність довжини дуги спіралі різниці довжин радіусів-векторів використовують під час проектування зубчастих коліс зі змінним передатним числом. Для цього беруть два квадрати (рис. 20.25), і через середину та кінець кожної сторони проводять дуги однакових логарифмічних спіралей з полюсами у центрах квадратів, причому одну спіраль закручують у напрямі за годинниковою стрілкою, а другу — проти годинникової стрілки. Тоді під час обертання цих квадратів дуги спіралей котитимуться одна по одній, не ковзаючись.

Живі істоти зазвичай ростуть, зберігаючи загальні обриси своєї форми, при цьому вони ростуть у всіх напрямах. Але мушлі морських тварин можуть рости лише в одному напрямі. Щоб не дуже витягуватись у довжину, їм доводиться скручуватись, причому кожен наступний виток подібний до попереднього. А такий ріст можливий лише вздовж логарифмічної спіралі або деяким її просторовим аналогам. Тому мушлі багатьох молюсків, равликів, а також роги гірських козлів закручені у вигляді логарифмічної спіралі (рис. 20.26).

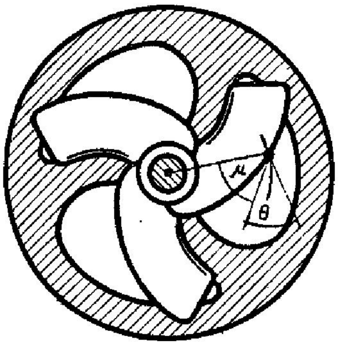


Рис. 20.24

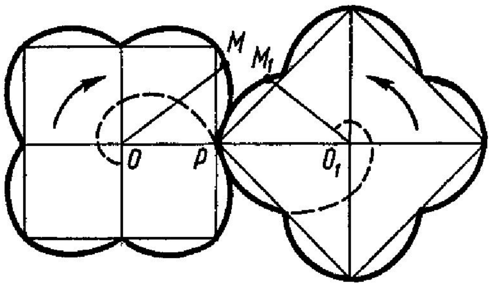


Рис. 20.25

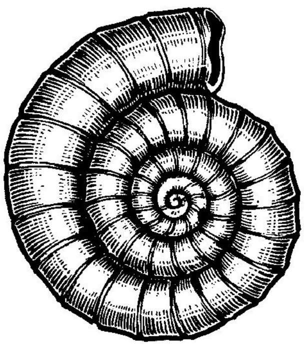


Рис. 20.26

Крім того, у вигляді логарифмічної спіралі:

1) закручуються тропічні шторми (рис. 20.27);

2) рукави спіральних галактик (рис. 20.28);

3) суцвіття деяких сортів цвітної капусти (рис. 20.29) — це, крім того, приклад фрактальної (самоподібної) структури;

4) яструб наздоганяє свою жертву. Його гострий зір дозволяє зберігати сталий кут закручування спіралі.

Рис. 20.27

Рис. 20.28

Рис. 20.29

Архімедова спіраль

Архімедова спіраль дозволяє перетворювати обертовий рух у рівномірний зворотно-поступальний рух. Для цього треба виготовити ексцентрик, профіль якого складають дві дуги архімедової спіралі (рис. 20.30). Під час рівномірного руху цього ексцентрика стрижень NM, який ковзає кінцем уздовж його профілю, рівномірно рухається то вгору, то вниз (віддаль OM пропорційна величині кута повороту).

Такий ексцентрик має одну ваду, спричинену загостреннями у точках перетину спіралей,— швидкість рухомої точки змінюється під час змінювання напрямку стрибком, що призводить до ударів і швидкого руйнуванню машини. Її можна усунути, скориставшись гладким ексцентриком у формі паскалевого завитка (20.31). Це дозволить швидкості змінюватися плавно, причому рівномірний рух ексцентрика перетвориться на гармонічні коливання стрижня.

Спіральні компресори, зроблені за допомогою двох вкладених архімедових спіралей того самого розміру використовують для стискання рідин та газів (рис. 20.32). Витки балансирної пружини годинника і борідки ранніх грамплатівок мали форму архімедової спіралі (рис. 20.33).

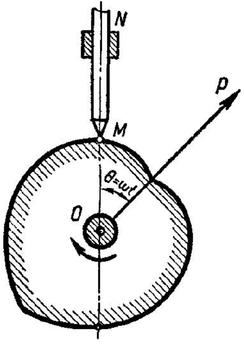


Рис. 20.30

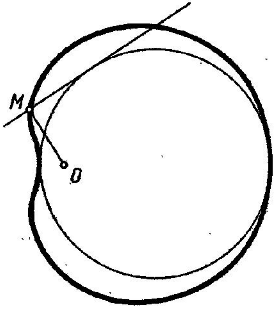


Рис. 20.31

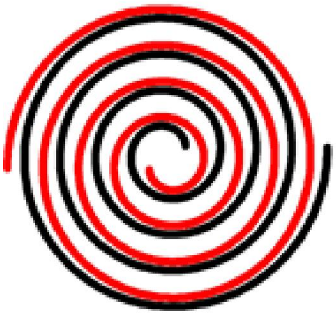


Рис. 20.32

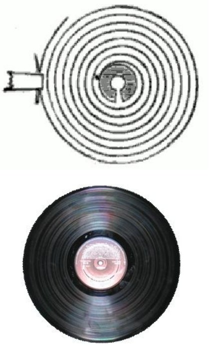


Рис. 20.33

Гвинтова лінія

Більшість рослин, які в'ються (приміром, в'юнок, квасоля), завиваючись навколо вертикальної опори, набувають форми правих гвинтових ліній (рис. 20.34). Натомість, хміль набуває форми лівої гвинтової лінії (рис. 20.35). Форму правих та лівих спіралей мають різні молекули ДНК (рис. 20.36).

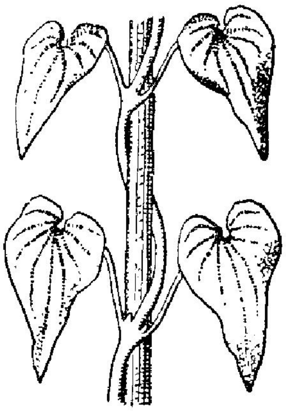


Рис. 20.34

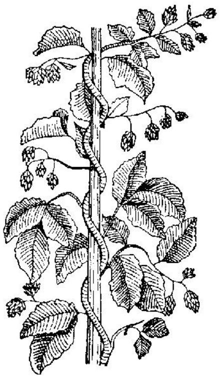


Рис. 20.35

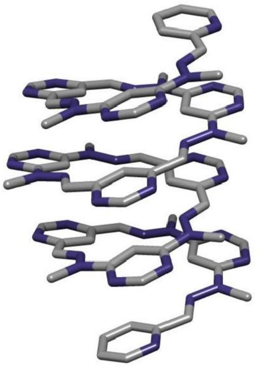


Рис. 20.36

Конструкції Шухова

Російському інженеру В. Г. Шухову належить ідея використати лінійчастий характер однопорожнинного гіперболоїда у будівництві. Він запропонував конструкції з металевих балок, розташованих як прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда (обертання). Такі конструкції виявились легкими, міцними. Їх широко використовують вже понад 110 років:

аджигольський маяк під Херсоном, побудований 1911 року (рис. 20.37);

вежа на Шаболовці в Москві (1919–1922) (рис. 20.38);

гиперболоїдна шухівська вежа порту Кобе (Японія) витримала землетрус у 7 балів за шкалою Рихтера, 2005 (рис. 20.39);

проект хмарочосу «Вортекс» — готель, який розміститься на межі лондонського Сіті (2004) (рис. 20.40).

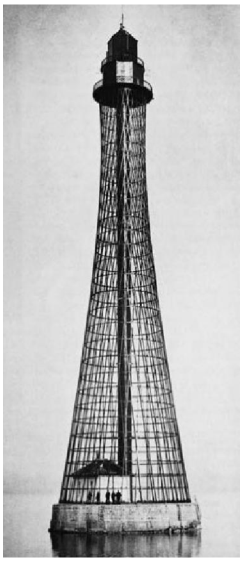


Рис. 20.37

Рис. 20.38

Рис. 20.39

Рис. 20.40

21. Обґрунтування й узагальнення понять аналітичної геометрії

21.1. Перетворення прямокутної декартової системи координат у просторі

Загальні формули перетворення

Нехай у просторі задано дві довільні декартові прямокутні системи координат: початкову $Oxyz$ з базисом $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$ і нову $O'x'y'z'$ з базисом $\{\overline{i}',\overline{j}',\overline{k}'\}$ (рис. 21.1).

Задано координати $(b_1;b_2;b_3)^{\mathrm{T}}$ радіуса-вектора точки O' та координати векторів ортонормованого базису $\{\overline{i}',\overline{j}',\overline{k}'\}$ в ортонормованому базисі $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$:

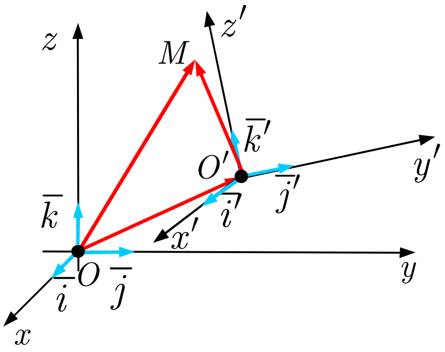


Рис. 21.1

$$\begin{cases}\overline{i}' = \alpha_{11}\overline{i} + \alpha_{21}\overline{j} + \alpha_{31}\overline{k},\\ \overline{j}' = \alpha_{12}\overline{i} + \alpha_{22}\overline{j} + \alpha_{32}\overline{k},\\ \overline{k}' = \alpha_{13}\overline{i} + \alpha_{23}\overline{j} + \alpha_{33}\overline{k}.\end{cases} \tag{21.1}$$

Виразімо координати x,y та z довільної точки M у початковій системі через координати x',y' та z' цієї ж точки M у новій системі.

Координати x,y,z збігаються з координатами вектора $\overline{OM}$ у розкладі за базисом $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$, і координати x',y',z' збігаються з координатами вектора $\overline{O'M}$ у розкладі за базисом $\{\overline{i}',\overline{j}',\overline{k}'\}$:

$$\overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k},$$
$$\overline{O'M} = x'\overline{i}' + y'\overline{j}' + z'\overline{k}'.$$

За правилом трикутника додавання векторів

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M},$$

причому

$$\overline{OO'} = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}.$$

Тому

$$\begin{aligned}\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M} &= b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k} + x'\overline{i}' + y'\overline{j}' + z'\overline{k}' =\\ &= b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k} + x'(\alpha_{11}\overline{i} + \alpha_{21}\overline{j} + \alpha_{31}\overline{k}) +\\ &+y'(\alpha_{12}\overline{i} + \alpha_{22}\overline{j} + \alpha_{32}\overline{k}) + z'(\alpha_{13}\overline{i} + \alpha_{23}\overline{j} + \alpha_{33}\overline{k}) =\\ &= \overline{i}(b_1 + \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z') +\\ &+\overline{j}(b_2 + \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z') +\\ &+\overline{k}(b_3 + \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z').\end{aligned}$$

Завдяки єдиності розкладу вектора за базисом одержимо формули перетворення координат:

$$\boxed{\begin{cases} x = b_1 + \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z', \\ y = b_2 + \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z', \\ z = b_3 + \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z'. \end{cases}} \tag{21.2}$$

Отже, для довільних ПДСК координати будь-якої точки простору в одній системі лінійно виражаються через координати тієї самої точки в іншій системі.

Формули (21.2) називають *формулами переходу* від системи координат $Oxyz$ до системи координат $O'x'y'z'$.

Набір коефіцієнтів $\alpha_{lm}, l, m = \overline{1,3}$, задає положення базису нової системи координат, а вільні члени b_1, b_2, b_3 характеризують положення початку координат. Можна показати, що лише три з дев'яти коефіцієнтів $\alpha_{lm}, l, m = \overline{1,3}$, незалежні.

Паралельне перенесення координатних осей

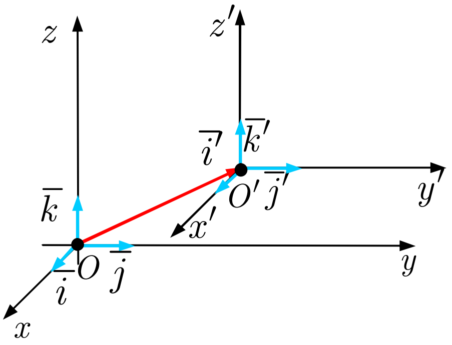


Рис. 21.2

Якщо базис $\{\overline{i}', \overline{j}', \overline{k}'\}$ нової ПДСК $O'x'y'z'$ зв'язаний з базисом $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ старої ПДСК $Oxyz$ співвідношеннями

$$\overline{i}' = \overline{i}, \overline{j}' = \overline{j}, \overline{k}' = \overline{k},$$

тобто напрями осей не змінюються, то кажуть, що нову ПДСК одержано з початкової паралельним перенесенням на вектор $\overline{OO'}$ (рис. 21.2).

Паралельне перенесення координатних осей на вектор

$$\overline{OO'} = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}$$

перетворює координати довільної точки простору за формулами:

$$\begin{cases} x = x' + b_1, \\ y = y' + b_2, \\ z = z' + b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - b_1, \\ y' = y - b_2, \\ z' = z - b_3. \end{cases}$$

Повертання координатних осей

Розгляньмо дві ПДСК зі спільним початком $Oxyz$ та $Ox'y'z'$.

Геометрично перехід від однієї ПДСК до другої ПДСК відповідає повертанню координатних осей. Із рівностей (21.2) випливає, що координати точки у старій і новій системах зв'язані співвідношеннями

$$\boxed{\begin{cases} x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z', \\ y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z', \\ z = \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Помножуючи кожну з рівностей (21.1) скалярно спочатку на вектор $\overline{i}$, а потім відповідно на вектори $\overline{j}$ та $\overline{k}$, дістаємо такі вирази для чисел α_{lm}:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \cos(\widehat{\overline{i}',\overline{i}}), & \alpha_{21} &= \cos(\widehat{\overline{i}',\overline{j}}), & \alpha_{31} &= \cos(\widehat{\overline{i}',\overline{k}}),\\
\alpha_{12} &= \cos(\widehat{\overline{j}',\overline{i}}), & \alpha_{22} &= \cos(\widehat{\overline{j}',\overline{j}}), & \alpha_{32} &= \cos(\widehat{\overline{j}',\overline{k}}),\\
\alpha_{13} &= \cos(\widehat{\overline{k}',\overline{i}}), & \alpha_{23} &= \cos(\widehat{\overline{k}',\overline{j}}), & \alpha_{33} &= \cos(\widehat{\overline{k}',\overline{k}}).
\end{aligned}$$

21.2. Заміна і орієнтація базисів

Розгляньмо два базиси $\{e\} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ та $\{e'\} = \{\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3'\}$ лінійного простору $\mathbb{V}^3$. Розкладімо вектори базису $\{e'\}$ за базисом $\{e\}$:

$$\begin{cases}
\overline{e}_1' = t_{11}\overline{e}_1 + t_{21}\overline{e}_2 + t_{31}\overline{e}_3,\\
\overline{e}_2' = t_{12}\overline{e}_1 + t_{22}\overline{e}_2 + t_{32}\overline{e}_3,\\
\overline{e}_3' = t_{13}\overline{e}_1 + t_{23}\overline{e}_2 + t_{33}\overline{e}_3
\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\overline{e}_1' & \overline{e}_2' & \overline{e}_3'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_{11} & t_{12} & t_{13}\\ t_{21} & t_{22} & t_{23}\\ t_{31} & t_{32} & t_{33}\end{pmatrix}.$$

Матрицю

$$\boxed{\begin{pmatrix}t_{11} & t_{12} & t_{13}\\ t_{21} & t_{22} & t_{23}\\ t_{31} & t_{32} & t_{33}\end{pmatrix} = T_{\{e\}\to\{e'\}}}$$

називають *матрицею переходу від базису* $\{e\}$ *до базису* $\{e'\}$. Її стовпці є координатними стовпцями векторів базису $\{e'\}$ за базисом $\{e\}$.

Твердження 21.1.

① Матриця $T_{\{e\}\to\{e'\}}$ — невироджена.

② Якщо $\vec{x}$ та $\vec{x}'$ — стовпці координат вектора $\overline{x}$ у базисах $\{e\}$ та $\{e'\}$ відповідно, то

$$\boxed{\vec{x} = T_{\{e\}\to\{e'\}}\vec{x}' \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_2'\end{pmatrix}.}$$

③ Обернена до матриці $T_{\{e\}\to\{e'\}}$ матриця є матрицею зворотного переходу від базису $\{e'\}$ до базису $\{e\}$.

Орієнтація базисів

Розгляньмо два базиси простору $\mathbb{V}^3$: $\{e\} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ та $\{e'\} = \{\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3'\}$. Визначники матриць переходу $T_{\{e\}\to\{e'\}}$ та $(T_{\{e\}\to\{e'\}})^{-1} = T_{\{e'\}\to\{e\}}$ від одного базису до другого мають однакові знаки.

Якщо, приміром, вектори двох базисів зв'язані співвідношеннями

$$\begin{aligned} \overline{e}_1' &= \overline{e}_2, & \overline{e}_1 &= \overline{e}_2', \\ \overline{e}_2' &= \overline{e}_1, & \overline{e}_2 &= \overline{e}_1', \\ \overline{e}_3' &= \overline{e}_3, & \overline{e}_3 &= \overline{e}_3', \end{aligned}$$

то

$$\det T_{\{e\}\to\{e'\}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \ \det T_{\{e'\}\to\{e\}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Якщо циклічно переставити вектори базису, тобто замінити другий вектор першим, третій — другим, а перший — третім, одержимо

$$\begin{aligned} \overline{e}_1' &= \overline{e}_2, & \overline{e}_1 &= \overline{e}_3', \\ \overline{e}_2' &= \overline{e}_3, & \overline{e}_2 &= \overline{e}_1', \\ \overline{e}_3' &= \overline{e}_1, & \overline{e}_3 &= \overline{e}_2'; \end{aligned}$$

$$\det T_{\{e\}\to\{e'\}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \ \det T_{\{e'\}\to\{e\}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Два базиси називають *однойменними* (базисами однакової орієнтації), якщо визначник матриці переходу від одного до другого додатний, і *різнойменними* (базисами протилежної орієнтації), якщо визначник матриці переходу від'ємний.

Множина всіх базисів простору розпадається на два неперетинні класи, що містять однойменні базиси.

Якщо один із двох класів базисів простору вибрано як додатний (а, отже, всі базиси, які він містить), а другий — як від'ємний, то кажуть, що цей простір *орієнтовано*.

Часто базиси одного класу називають *правими*, а другого — *лівими*.

21.3. Лінійні оператори

Розгляньмо лінійний простір $\mathbb{V}$ і перетворення $\hat{A}$ цього простору (надалі — оператор), тобто правило, за яким кожному векторові $\overline{x} \in \mathbb{V}$ відповідає деякий вектор $\overline{x}' \in \mathbb{V}$. *Образ* $\overline{x}'$ (перетвір) позначають через $\hat{A}(\overline{x})$.

Означення 21.1. Оператор $\hat{A}$ в лінійному просторі $\mathbb{V}$ називають *лінійним*, якщо для будь-яких векторів $\overline{x}$ та $\overline{y}$ і числа $\alpha \in \mathbb{R}$ виконано умови:

1) $\boxed{\hat{A}(\overline{x} + \overline{y}) = \hat{A}(\overline{x}) + \hat{A}(\overline{y});}$

2) $\boxed{\hat{A}(\alpha\overline{x}) = \alpha\hat{A}(\overline{x}).}$

Лінійний оператор (і лише він) перетворює лінійну комбінацію векторів на таку саму лінійну комбінацію їхніх образів:

$$\hat{A}(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = \alpha\hat{A}(\overline{x}) + \beta\hat{A}(\overline{y}) \ \forall\overline{x},\overline{y} \in \mathbb{V} \ \forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Приклади лінійних операторів

1. Нехай $\mathbb{V} = \mathbb{M}^n$ — простір многочленів степеня не вище n. Диференціювання — правило

$$\hat{D} = \frac{d}{dt} : \mathbb{M}^n \to \mathbb{M}^n,$$

за яким кожному многочленові з $\mathbb{M}^n$ відповідає його похідна, є лінійним перетворенням (похідна суми дорівнює сумі похідних, сталий множник можна виносити з-під знака похідної).

2. Правило $\hat{A}$, за яким кожному елементу $\overline{x}$ із $\mathbb{V}$ відповідає елемент $k\overline{x}$ із $\mathbb{V}$ $(k \neq 0$ — фіксоване), тобто оператор подібності є лінійним. Справді,

$$\hat{A}(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = k(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = \alpha(k\overline{x}) + \beta(k\overline{y}) =$$
$$= \alpha\hat{A}(\overline{x}) + \beta\hat{A}(\overline{y}) \;\; \forall\overline{x},\overline{y} \in \mathbb{V}\, \forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

3. Нехай $\{\overline{e}_1,\dots,\overline{e}_n\}$ — базис простору $\mathbb{V}$. Правило $\hat{P} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, за яким довільному елементу

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \dots + x_n\overline{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{e}_i$$

відповідає елемент

$$\hat{P}(\overline{x}) = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \dots + x_k\overline{e}_k = \sum_{i=1}^{k} x_i\overline{e}_i.$$

$(k < n$ — фіксоване), називають *операторов проектування*. Оператор проектування лінійний.

4. Нехай $\mathbb{R}^n$ — простір стовпців заввишки n і A — деяка фіксована матриця порядку n. Стовпцю $\vec{x}$ зіставляється стовпець $\vec{x}' = A\vec{x}$. Таке перетворення лінійне завдяки властивостям множення матриць:

$$\hat{A}(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha(A\vec{x}) + \beta(A\vec{y}) =$$
$$= \alpha\hat{A}(\overline{x}) + \beta\hat{A}(\overline{y}),\; \forall\overline{x},\overline{y} \in \mathbb{R}^n\, \forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

5. Оператор $\hat{E}$, який кожному вектору $\overline{x}$ простору $\mathbb{V}^3$ зіставляє сам вектор $\overline{x}$, є лінійним (оператор $\hat{E}$ — окремий випадок оператора подібності з коефіцієнтом $k = 1$). Його називають *одиничним оператором* або оператором *тотожного перетворення*.

21.4. Матриця лінійного оператора

Виберімо в лінійному просторі $\mathbb{V}^n$ базис $\{\overline{e}_1,\dots,\overline{e}_n\}$. Кожний вектор $\overline{x} \in \mathbb{V}$ можна подати у вигляді

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \dots + x_n\overline{e}_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\overline{e}_j.$$

Завдяки лінійності перетворення

$$\hat{A}(\overline{x}) = \hat{A}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \hat{A}(\overline{e}_j). \tag{21.3}$$

Вектори $\hat{A}(\overline{e}_j), j = \overline{1,n},$ не залежать від $\overline{x}$, а визначені за перетворенням і базисом. Кожен з векторів $\hat{A}(\overline{e}_j), j = \overline{1,n},$ розкладається за базисом $\{e\}$ з деякими коефіцієнтами a_{ij}. А саме,

$$\hat{A}(\overline{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \overline{e}_i, j = \overline{1,n}.$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (21.3), одержимо:

$$\hat{A}(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \overline{e}_i.$$

Тепер можна виразити координати вектора $\overline{y} = \hat{A}(\overline{x})$ у базисі $\{e\}$:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, i = \overline{1,n}, \Leftrightarrow \vec{y} = A\vec{x},$$

де

$$A = A(\{e\}) = \begin{pmatrix} \hat{A}\overline{e}_1 \ldots \hat{A}\overline{e}_n \\ \downarrow \qquad \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення 21.2. *Матрицею лінійного оператора* $\hat{A}$ в базисі $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ називають матрицю A, утворену з координатних стовпців образів базисних векторів $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n$ у перетворенні $\hat{A}$.

Твердження 21.2. Вибір базису лінійного простору $\mathbb{V}^n$ встановлює взаємно однозначну відповідність між лінійними перетвореннями цього простору і квадратними матрицями n -го порядку.

21.5. Матриця лінійного перетворення в базисі із власних векторів

Твердження 21.3 *(властивості власних векторів матриці).*

① Кожному власному вектору відповідає єдине власне число.

② Якщо $\overline{x}_1$ та $\overline{x}_2$ — власні вектори матриці A з одним і тим самим власним числом λ, то їхня сума $\overline{x}_1 + \overline{x}_2$ також є власним вектором матриці A із власним числом λ.

③ Якщо $\overline{x}$ — власний вектор матриці A із власним числом λ, то будь-який вектор $\alpha\overline{x}$, колінеарний векторові $\overline{x}$, також є власним вектором матриці A з тим самим власним числом λ.

▶ ① Справді, припустімо супротивне: нехай власному вектору $\overline{x}$ матриці A відповідає два власні числа λ_1 та λ_2. Це означає, що

$$A\vec{x} = \lambda_1\vec{x}, A\vec{x} = \lambda_2\vec{x} \Rightarrow \lambda_1\vec{x} - \lambda_2\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x} = \vec{0}.$$

Оскільки $\vec{x} \neq \vec{0}$, то $\lambda_1 = \lambda_2$.

② Справді, оскільки $A\vec{x}_1 = \lambda\vec{x}_1, A\vec{x}_2 = \lambda\vec{x}_2$, то

$$A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = \lambda\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2 = \lambda(\vec{x}_1 + \vec{x}_2).$$

③ Справді, маємо

$$A(\alpha\vec{x}) = \alpha A\vec{x} = \alpha\lambda\vec{x} = \lambda(\alpha\vec{x}). \blacktriangleleft$$

Зауважмо, що кожному власному числу λ відповідає безліч колінеарних власних векторів.

Розгляньмо випадок, коли всі корені характеристичного рівняння дійсні і різні. Позначмо їх через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Кожному власному числу λ відповідає власний вектор. Позначмо власні вектори через $\overline{v}_1, \overline{v}_2$.

Твердження 21.4. Якщо власні вектори $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ належать попарно різним власним значенням, то вони лінійно незалежні.

Візьмімо вектори $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ за базис простору $\mathbb{V}^2$.

Теорема 21.5. Матриця лінійного перетворення A в базисі $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ із власних векторів цієї матриці діагональна.

▶ Знайдімо матрицю A' лінійного перетворення, яке задане матрицею A в базисі $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$, в базисі із власних векторів $\overline{v}_1, \overline{v}_2$. Для такого перетворення виконано співвідношення:

$$A'\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1, A'\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2,$$

де

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}.$$

У базисі $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ можемо записати

$$\overline{v}_1 = 1 \cdot \overline{v}_1 + 0 \cdot \overline{v}_2 + = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\overline{v}_1$ перетворюється з допомогою матриці A' на вектор

$$A'\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}'_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так само

$$\vec{a}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.◄$$

Взагалі можна показати, що матриця A' лінійного перетворення в базисі $\{e'\}$ виражається через матрицю A в базисі $\{e\}$ за формулою

$$A' = (T_{\{e\}\to\{e'\}})^{-1} A T_{\{e\}\to\{e'\}}.$$

Твердження 21.6.

① Усі власні числа дійсної симетричної матриці дійсні.

② Власні вектори дійсної симетричної матриці, що відповідають різним власним числам, ортогональні.

③ Якщо матриця A симетрична, а матриця P — ортогональна, то матриця $P^{-1}AP$ симетрична.

► ① Доведімо це твердження для матриці 2-го порядку. Нехай задано дійсну симетричну матрицю 2-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, a_{12} = a_{21}.$$

Тоді характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 = 0.$$

Дискримінант цього рівняння

$$\begin{aligned} D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - (a_{12})^2) = \\ = (a_{11})^2 + 2a_{11}a_{22} + (a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22} + 4(a_{12})^2 = \\ = (a_{11} - a_{22})^2 + 4(a_{12})^2. \end{aligned}$$

Оскільки a_{11}, a_{12}, a_{22} дійсні, то

$$D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4(a_{12})^2 \geq 0,$$

а, отже, корені характеристичного рівняння дійсні.

② Нагадаймо, що в ортонормованому базисі

$$(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = \overleftarrow{x}_1 \cdot \vec{x}_2.$$

Нехай λ_1 та λ_2 — різні власні числа, а $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ — відповідні їм власні вектори симетричної матриці A. Оскільки

$$A\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1, A\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2$$

і для симетричної матриці A

$$(A\vec{x}_1)^{\mathrm{T}}\vec{x}_2 = \overleftarrow{x}_1 A^{\mathrm{T}}\vec{x}_2 = \overleftarrow{x}_1(A\vec{x}_2),$$

то

$$(\lambda_1\vec{x}_1)^{\mathrm{T}} \cdot \vec{x}_2 = \overleftarrow{x}_1 \cdot (\lambda_2\vec{x}_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\overleftarrow{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 0.$$

Але $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, отже, $\overleftarrow{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 0$. А це означає, що вектори $\overline{x}_1$ та $\overline{x}_2$ — ортогональні.

③ За правилом транспонування добутку матриць маємо

$$(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}} = (AP)^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}} = P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

За означенням ортогональної матриці

$$P^T = P^{-1},$$

а, отже,

$$(P^{-1})^{\mathrm{T}} = (P^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = P,$$

крім того, за умовою матриця A симетрична $(A^{\mathrm{T}} = A)$, то

$$(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}} = P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}} = P^{-1}AP. \blacktriangleleft$$

Екзаменаційна програма

з лінійної алгебри та аналітичної геометрії

1. Матриці. Означення, типи матриць, дії над матрицями.
2. Визначники. Означення і властивості. Способи обчислення.
3. Обернена матриця. Означення і властивості. Способи знаходження.
4. Ранг матриці. Лінійна залежність та незалежність стовпців матриці. Метод Ґауса.
5. Системи лінійних алгебричних рівнянь. Дослідження сумісності СЛАР. Однорідні й неоднорідні СЛАР.
6. Методи розв’язання СЛАР. Матричні рівняння.
7. Вектори. Означення і лінійні дії над векторами.
8. Лінійна залежність та незалежність системи векторів. Базис геометричного простору.
9. Координати вектора. Лінійні дії над векторами в координатній формі.
10. Прямокутна декартова система координат на площині й у просторі.
11. Скалярний добуток векторів. Означення і властивості.
12. Векторний добуток векторів. Означення і властивості.
13. Мішаний добуток векторів. Означення і властивості.
14. Застосування скалярного, векторного і мішаного добутків векторів.
15. Комплексні числа. Означення. Дії над комплексними числами в алгебричній формі.
16. Полярна система координат.
17. Дії над комплексними числами у тригонометричній та показниковій формах.
18. Основні задачі аналітичної геометрії. Різні типи рівнянь ліній та поверхонь.
19. Перетворення ПДСК на площині.
20. Лінійні перетворення. Квадратичні форми.
21. Рівняння прямої у просторі і на площині.
22. Рівняння площини. Загальні рівняння прямої у просторі.
23. Взаємне розташування прямих і площин.
24. Означення кривих 2-го порядку. Визначальні властивості.
25. Метод зведення геометричних образів 2-го порядку до канонічного вигляду.
26. Метод перерізів. Еліпсоїд. Параболоїди. Гіперболоїди.
27. Поверхні обертання. Конус і циліндри 2-го порядку.

Тест для самоконтролю

1.1. Укажіть, які з матриць можна додавати:
1) прямокутні, однакового розміру; 2) квадратні, однакового порядку;
3) квадратні, різних порядків; 4) узгоджені.

1.2. Укажіть, які з матриць можна перемножити:
1) прямокутні, однакового розміру; 2) квадратні, однакового порядку;
3) квадратні, різних порядків; 4) узгоджені.

1.3. Укажіть правдиві твердження.

1. Якщо матриці A та B розміром $m \times n$, то обидва добутки AB^{T} та $A^{\mathrm{T}}B$ визначені;
2. Якщо $AB = C$ і матриця C має 2 стовпці, то матриця A має 2 стовпці;
3. Якщо $BC = BD$, то $C = D$;
4. Якщо $AC = O$, то $A = O$ або $C = O$.

1.4. Укажіть правдиві тотожності.
1) $\det(A + B) = \det A + \det B$; 2) $\det(\lambda A) = \lambda \det A$;
3) $\det(\lambda A_n) = \lambda^n \det A_n$; 4) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;
5) $\det(A^k) = (\det A)^k$.

1.5. Укажіть правдиві твердження.
Визначник дорівнює нулю, якщо:
1) два його рядки пропорційні;
2) рядок дорівнює одному із стовпців;
3) один із рядків або стовпців визначника нульовий;
4) елементи його головної діагоналі нульові;
5) один із стовпців матриці дорівнює лінійній комбінації решти стовпців.

1.6. Укажіть елементарні перетворення матриці:
1) заміна стовпця на рядок з тим самим номером;
2) множення рядка на число $k \neq 0$;
3) множення стовпця на $k = 0$;
4) додавання до рядка матриці її стовпця, помноженого на деяке число.

1.7. Яке елементарне перетворення не змінює визначника:
1) переставляння рядків: 2) помноження рядка на число;
3) додавання до рядка іншого рядка; 4) переставляння стовпців.

1.8. Укажіть правдиві твердження.
Ранг матриці $A_{m \times n}$ — це:
1) найбільше з чисел m та n;
2) найбільший порядок невиродженої підматриці.
3) кількість рядків m матриці A;
4) найбільша кількість лінійно незалежних стовпців матриці A.

1.9. Укажіть правдиві твердження.

Обернена матриця існує, якщо матриця:

1) квадратна невироджена;
2) квадратна;
3) з однаковою кількістю рядків та стовпців;
4) вироджена.

1.10. Укажіть розв'язок матричного рівняння $AXB = C$, для оборотних матриць A та B.

1) $X = A^{-1}CB^{-1}$; 2) $X = CA^{-1}B^{-1}$;
3) $X = A^{-1}B^{-1}C$; 4) $X = B^{-1}CA^{-1}$.

1.11. Задано систему із трьох рівнянь із трьома невідомими. Ранги основної та розширеної матриць цієї системи дорівнюють одиниці. Визначте, скільки розв'язків має система:

1) не має розв'язків;
2) єдиний розв'язок;
3) указаних умов не досить для відповіді;
4) два розв'язки;
5) нескінченну множину розв'язків.

1.12. Вкажіть правдиві твердження.

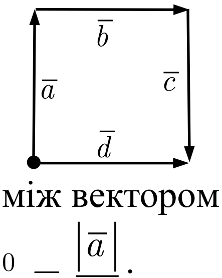
1. Якщо графічною ілюстрацією системи із двох рівнянь є пара паралельних прямих, то система рівнянь несумісна.
2. Якщо під час елементарних перетворень системи одержано рівняння вигляду $0 = 0$, то система не має розв'язків.
3. Якщо система двох лінійних алгебричних рівнянь із двома невідомими, то вона має рівно один розв'язок.

2.1. Які з поданих величин є векторними:

1) площа трикутника; 2) сила;
3) об'єм піраміди; 4) температура;
5) напруженість електричного поля; 6) прискорення;
7) робота.

2.2. Які з векторів на рисунку зображено:

1) колінеарними;
2) рівними;
3) ортогональними.



2.3. Укажіть рівність, що виражає зв'язок між вектором та його ортом.

1) $\bar{a}^0 = \dfrac{\bar{a}}{\left|\bar{a}\right|}$; 2) $\bar{a}^0 = \dfrac{\left|\bar{a}\right|}{\bar{a}}$;

3) $\bar{a}^0 = \left|\bar{a}\right|$; 4) $\bar{a}^0 = -\bar{a}$.

2.4. Виберіть правильне означення базису лінійного простору.

Базисом називають:

1) будь-який набір лінійно незалежних векторів простору;
2) найбільший можливий набір лінійно залежних векторів простору;
3) найбільший можливий набір лінійно незалежних векторів простору;
4) набір трьох лінійно незалежних векторів будь-якого простору.

2.5. Виберіть правильне означення вимірності лінійного простору.

Вимірність — це:

1) найбільша можлива кількість лінійно незалежних векторів простору;
2) найбільша можлива кількість лінійно залежних векторів простору;
3) кількість некомпланарних векторів простору.

2.6. Скільки векторів утворюють базис на прямій? на площині? у просторі?

2.7. Виберіть правильне твердження.

Проекцією вектора $\overline{a}$ на вісь $L(\overline{s})$ називають:

1) вектор;
2) число $\left|\overline{a}\right|$:
3) число $-\left|\overline{a}\right|$;
4) число $\left|\overline{a}\right|\cos(\overline{a},\overline{s})$.

2.8. Задано вектор $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$. Коефіцієнти a_x, a_y, a_z є:

1) координатами вектора $\overline{a}$ в базисі $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$;
2) проекціями вектора $\overline{a}$ на напрями векторів $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$;
3) напрямними косинусами вектора $\overline{a}$;
4) скалярними добутками вектора $\overline{a}$ на вектори $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$.

2.9. Укажіть правильне означення.

Скалярним добутком векторів $\overline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ та $\overline{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ в ортонормованому базисі називають:

1) вектор $\overline{c}$, довжина якого дорівнює $\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos(\overline{a},\overline{b})$;
2) число, що дорівнює $\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin(\overline{a},\overline{b})$;
3) число, що дорівнює $\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos(\overline{a},\overline{b})$;
4) число, що дорівнює $a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$.

2.10. Укажіть правильне означення.

Векторним добутком векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називають:

1) число, що дорівнює $\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin(\overline{a},\overline{b})$;

2) число, що дорівнює $\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos(\overline{a},\overline{b})$;

3) вектор, перпендикулярний до векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$;

4) вектор, що має довжину $\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin(\overline{a},\overline{b})$, напрямлений перпендикулярно до векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ і вектори $\overline{a},\overline{b},[\overline{a},\overline{b}]$ утворюють праву трійку.

2.11. Укажіть правильне означення мішаного добутку трьох векторів $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$.

1) $((\overline{a},\overline{b}),\overline{c})$;
2) $([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})$;
3) $[(\overline{a},\overline{b}),\overline{c}]$;
4) $[[\overline{a},b],\overline{c}]$.

2.12. Укажіть правильні вирази в ортонормованому базисі для скалярного добутку двох векторів $(\overline{a},\overline{b})$, векторного добутку двох векторів $[\overline{a},\overline{b}]$ та мішаного добутку трьох векторів $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$:

1) $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$;

2) $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$;

3) $\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

2.13. Укажіть умови колінеарності, ортогональності, компланарності векторів:

1) $[\overline{a},\overline{b}] = \overline{0}$;
2) $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 0$;
3) $(\overline{a},\overline{b}) = 0$.

2.14. Укажіть, які з формул виражають зв'язок між полярними $(\rho;\varphi)$ та узгодженими з ними декартовими координатами $(x;y)$ точок.

1) $\begin{cases} x = \rho\sin\varphi, \\ y = \rho\cos\varphi; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \end{cases}$ 4) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi : \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$

2.15. Укажіть, які з поданих записів є: а) алгебричною, б) тригонометричною, в) показниковою формами комплексного числа.

1. $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \rho \geq 0.$

2. $z = \rho e^{i\varphi}, \rho \geq 0.$

3. $z = a + bi.$

2.16. Скільки різних значень: а) кореня n-го степеня з числа $z \neq 0$; б) n-го степеня числа z $(n \in \mathbb{N})$ існує?

1) одне; 2) n;

3) жодного; 4) $n - 1$.

3.1. Визначте, до якого типу належить перетворення:

1) $\begin{cases} x = x', \\ y = -y'; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = b_1 + x', \\ y = b_2 + y'; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y', \\ y = a_{21}x' + a_{22}y'; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = \cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y', \\ y = \sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y'; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = a_{11}x'y' + a_{12}y', \\ y = a_{21}x' + a_{22}x'y'. \end{cases}$

Варіанти:

а) загальне лінійне перетворення;

б) переорієнтація координатних осей;

в) повертання координатних осей;

г) нелінійне перетворення;

ґ) паралельне перенесення координатних осей.

3.2. Знайдіть матрицю A повертання системи координат Oxy на кут $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$:

1) $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

3.3. Нехай точка M_0 належить прямій L, а вектор $\overline{s}$ паралельний цій прямій. Укажіть правильне твердження. Пряма L — це множина всіх:

1) векторів $\overline{M_0M}$, колінеарних ненульовому вектору $\overline{s}$;

2) точок M, для яких вектор $\overline{M_0M}$ колінеарний вектору $\overline{s}$;

3) точок M, для яких вектор $\overline{M_0M}$ ортогональний вектору $\overline{s}$.

3.4. Точка M_0 належить площині P; вектор $\overline{n}$ перпендикулярний до цієї площини; вектори $\overline{u}, \overline{v}$ компланарні площині P. Визначте правильні твердження. Площина P — це множина:

1) всіх точок M, таких, що вектори $\overline{M_0M}$ перпендикулярні до вектора $\overline{n}$;

2) векторів $\overline{M_0M}$, колінеарних вектору $\overline{n}$;

3) всіх точок M, таких, що вектори $\overline{M_0M}$ та $\overline{u}$ — колінеарні;

4) всіх точок M, таких, що вектори $\overline{M_0M}, \overline{u}, \overline{v}$ — компланарні.

3.5. Задано $\overline{n}_1 = (a_1; b_1; c_1)^T, \overline{n}_2 = (a_2; b_2; c_2)^T$ — нормальні вектори двох площин. Визначте правильне твердження. Якщо $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$, то площини:

1) збігаються;
2) перпендикулярні;
3) перетинні;
4) указаних умов замало для відповіді;
5) паралельні.

3.6. Укажіть, яка з формул визначає віддаль між прямими $L_1(M_1; \overline{s}_1)$ та $L_2(M_2; \overline{s}_2)$, якщо вони: а) паралельні; б) мимобіжні.

1) $d = \dfrac{\left|\left(\overline{M_1M_2}, \overline{s}_2\right)\right|}{\left|\overline{s}_2\right|}$;
2) $d = \dfrac{\left|\left(\overline{M_1M_2}, [\overline{s}_1, \overline{s}_2]\right)\right|}{\left|[\overline{s}_1, \overline{s}_2]\right|}$;
3) $d = \dfrac{\left|\left[\overline{M_1M_2}, \overline{s}_1\right]\right|}{\left|\overline{s}_1\right|}$.

3.7. Укажіть, які з поданих властивостей означають:

1) коло;
2) еліпс;
3) гіперболу;
4) параболу.

Варіанти:

а) множина точок, сума віддалей яких від фокусів стала і більша за віддаль між фокусами;

б) множина точок, які рівновіддалені від фокуса і директриси;

в) множина точок, модуль різниці віддалей яких від фокусів є сталою величиною, меншою за віддаль між фокусами;

г) множина точок, які рівновіддалені від однієї точки.

3.8. Укажіть тип кривої, заданої у ПДСК рівнянням:

а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1;$ б) $x^2=2py;$

в) $x^2+y^2=a^2;$ г) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

Варіанти*:*

1) еліпс; 2) гіпербола;

3) парабола; 4) коло.

3.9. Укажіть правильне означення. Число λ називають власним числом матриці A, якщо:

1) існує такий вектор $\vec{x}$, що $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$;

2) існує такий ненульовий вектор $\vec{x}$, що $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$;

3) для будь-якого вектора $\vec{x}$ правдива рівність $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$;

4) існує такий ненульовий вектор $\vec{x}$, що $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$.

3.10. Визначте тип геометричного образу, який задано рівнянням $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$.

1) еліптичний;

2) параболічний;

3) гіперболічний.

3.11. Визначте тип поверхні, заданої рівнянням:

1) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1;$ 2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1;$

3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1;$ 4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2pz;$

5) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2qz;$ 6) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1;$

Варіанти*:*

а) еліпсоїд; б) сфера;

в) однопорожнинний гіперболоїд; г) двопорожнинний гіперболоїд;

ґ) параболоїд еліптичний; д) параболоїд гіперболічний.

3.12. Укажіть, які оптичні властивості мають:

а) еліпс; б) парабола; в) гіпербола. Якщо помістити:

1) у фокус кривої точкове джерело світла, то всі промені, відбиті від кривої, спрямуються паралельно осі кривої;

2) в один з фокусів кривої точкове джерело світла, то кожний промінь після відбиття від кривої начебто виходить з іншого фокуса;

3) в один з фокусів кривої точкове джерело світла, то всі промені після відбиття від кривої зійдуться в іншому її фокусі.

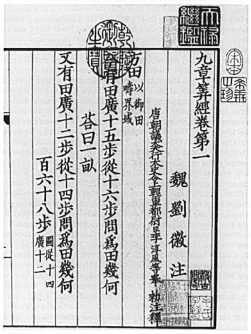
Відповіді

1.1. 1, 2.
1.2. 2, 4.
1.3. 1.
1.4. 3, 4, 5.
1.5. 1, 3, 5.
1.6. 2.
1.7. 3.
1.8. 2, 4.
1.9. 1.
1.10. 1.
1.11. 5.
1.12. 1.
2.1. 2, 5, 6.
2.2. 1) $\overline{a} \parallel \overline{c}$ та $\overline{b} \parallel \overline{d}$; 2) $\overline{b} = \overline{d}$; 3) $\overline{a} \perp \overline{b}, \overline{a} \perp \overline{d}, \overline{c} \perp \overline{b}, \overline{c} \perp \overline{d}$.
2.3. 1.
2.4. 3.
2.5. 1.
2.6. 1, 2, 3 відповідно.
2.7. 4.
2.8. 1, 2, 4.
2.9. 3, 4.
2.10. 4.
2.11. 2.
2.12. $(\overline{a}, \overline{b})$ — 2; $[\overline{a}, \overline{b}]$ — 3; $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ — 1, 4.
2.13. 1 — колінеарні; 2 — компланарні; 3 — ортогональні.
2.14. 2, 4.
2.15. 1 — тригонометрична; 2 — показникова; 3 — алгебрична.
2.16. а — 2; б — 1.
3.1. 1 — б; 2 — г; 3 — а; 4 — в; 5 — г.
3.2. 1.
3.3. 2.
3.4. 1, 4.
3.5. 5.
3.6. 3 — паралельні; 2 — мимобіжні.
3.7. 1 — г; 2 — а; 3 — в; 4 — б.
3.8. 1 — а; 2 — г; 3 — б; 4 — в.
3.9. 2, 4.
3.10. 3.
3.11. 1 — в; 2 — г; 3 — а; 4 — ґ; 5 — д; 6 — б.
3.12. 1 — парабола; 2 — гіпербола; 3 — еліпс.

Історичні відомості

Розвиток лінійної алгебри

4000 до н. е. — вавилоняни складають задачі на системи 2×2 і вже знають, як їх розв'язувати.



九章筭經卷第一

魏劉徽注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉　勅注釋

方田（以御田疇界域）

今有田廣十五步從十六步問爲田幾何

荅曰一畝

又有田廣十二步從十四步問爲田幾何

百六十八步（圖從十四廣十二）

200 до н. е. — у китайському трактаті «Математика у дев'яти книгах» розв'язувались системи 3×3, використовуючи лише значення їхніх числових коефіцієнтів, що є зародком ідеї матриці і методу виключення змінних.

«Є три сорти кукурудзи, таких, що три в'язки першого, дві другого та одна третього важать 39 мір. Дві першого, три другого і одна третього важать 34 міри. Одна першого, дві другого і три третього важать 26 мір. Скільки мір зерна важить одна в'язка кожного сорту?».

Автор далі записує коефіцієнти системи, на відміну від звичного натепер способу, у стовпці на лічильній дошці і дає вказівки читачеві:

1	2	3	Помнож середній стовпець на 3 і відніми від нього правий стовпець і також помнож лівий стовпець на 3 і відніми від нього середній стовпець *стільки разів скільки можна* (від'ємними числам тоді не оперували)	0	0	3	Від п'яти лівих стовпців відніми середній *стільки разів, скільки можна*	0	0	3
2	3	2		4	5	2		0	5	2
3	1	1		8	1	1		36	1	1
26	34	39		39	24	39		99	24	39

З цієї таблиці вже оберненим підставленням можна знайти вагу однієї в'язки кукурудзи кожного сорту.

1545 — Кардано у своїй праці «Видатне мистецтво або «Правила алгебри», де йдеться і про відому формулу Кардано розв'язання кубічного рівняння, подає фактично крамерове правило для розв'язання системи 2×2.

Джіроламо Кардано
G. Cardano
1501–1576

HIERONYMI CARDANI, PRÆSTANTISSIMI MATHEMATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neque ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſſimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

Титульний аркуш
«Видатного мистецтва»

1683 — японський математик Кова Секі у праці «Метод розв'язання таємних задач» уперше використовує ідею визначника. Він знав, як обчислити визначники квадратних матриць порядку від 2-го до 5-го, і застосовував визначники до розв'язання алгебричних рівнянь.

1693 — німецький математик і філософ Лейбніц уперше в Європі приходить до ідеї визначника. Він подав формальний опис визначників і застосував їх до дослідження систем 3×2 та 3×3.

28 квітня 1693 у листі до французького математика Гійома Лопіталя (G. L’Hôpital, 1661–1704) Лейбніц розв’язав задачу сумісності системи:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12}x + a_{13}y = 0, \\ a_{21} + a_{22}x + a_{23}y = 0, \\ a_{31} + a_{32}x + a_{33}y = 0, \end{cases}$$

сучасний запис

або

Кова Секі
бл. 1642–1708

Ґотфрід Лейбніц
G. W. Leibniz
1646–1716

$$\begin{cases} 10 + 11x + 12y = 0, \\ 20 + 21x + 22y = 0, \\ 30 + 31x + 32y = 0, \end{cases}$$

Лейбніців запис — числа виражають індекси коефіцієнтів!

Умовою сумісності такої системи є те, що її визначник, який він називає результантом, дорівнює нулю (він її записав розгорнуто — так, як би виразив визначник через елементи). Але ці ідеї Лейбніц чомусь не оприлюднив і вони не вплинули на розвиток тогочасної математики.

Ненадруковані праці Лейбніца містять понад 50 різних способів запису коефіцієнтів систем, над якими він працював протягом 50 років, починаючи з 1678.

Лейбніц використовував термін «результант» для певної суми членів визначника. Він фактично сформулював правило Крамера і те, що визначник можна розкласти за будь-яким стовпцем (правило Лапласа).

Колін Маклорен
C. Maclaurin
1698–1746

Ґабріель Крамер
G. Cramer
1704–1752

1748 — шотландський математик Колін Маклорен у «Курсі алгебри» вперше публікує результати про визначники, зокрема доведення правила Крамера для систем 2×2 та 3×3 і вказує, як застосувати його для системи 4×4.

1750 — швейцарський математик Ґабріель Крамер у праці «Вступ до аналізу алгебричних кривих» дає загальне правило розв’язання систем $n \times n$, розв’язуючи задачу про криву, проведену через певну кількість заданих точок. Цікаво, що правило подано у додатку, без доведення і чітких пояснень його застосування.

1772 — французький математик і астроном П’єр-Симон Лаплас у праці, присвяченій орбітам внутрішніх планет, дослідив розв’язки систем лінійних алгебричних рівнянь без їх безпосереднього знаходження, використовуючи визначники, які він, як і Лейбніц, назвав результантами.

П'єр-Симон Лаплас
P.-S. Laplace
1749–1827

Жозеф Луї Лаґранж
J. L. Lagrange
1736–1813

Лаплас подає спосіб розкладання визначника (яке, зокрема, містить і розкладання визначника за будь-яким його рядком або стовпцем) за визначниками меншого порядку.

1773 — французький математик Жозеф Луї Лаґранж вивчає властивості функціонального визначника 3-го порядку і тлумачить визначник 3-го порядку як об'єм паралелепіпеда.

1781 — Олександр Вандермонд (A.-T. Vandermonde, 1735–1796) уперше розглядає визначник як незалежну функцію, не спираючись на систему лінійних алгебричних рівнянь. Він також описує властивості визначника і вдосконалює позначення для визначників.

Карл Фрідріх Ґаус
C. F. Gauß
1777–1855

1801 — уперше термін «детермінант» (визначник), хоч і не в сучасному розумінні, використовує німецький математик, фізик і астрономом Карл Фрідріх Ґаус у праці, присвяченій теорії чисел (1801), досліджуючи квадратичні форми. У цій самій праці запропоновано запис коефіцієнтів квадратичної форми у прямокутні таблиці; опис множення матриць (які Ґаус вважав композицією перетворень, оскільки він ще не прийшов до ідеї матриць) і дію, яка відповідає оберненню матриць (таблиць коефіцієнтів квадратичних форм).

Метод виключення, схожий на використаний у «Математиці в дев'яти книгах», був використаний Ґаусом у праці, присвяченій вивченню орбіти астероїда Паллада до розв'язання системи 6×6.

Огюстен Луї Коші
A. L. Cauchy
1789–1857

1812 — французький математик Огюстен Луї Коші вперше використав термін «детермінант» у сучасному розумінні. Він обґрунтував одержані до нього результати і дістав нові результати про мінори і алгебричні доповнення, довів теорему про множення визначників.

1826 — Коші, вивчаючи квадратичні форми n змінних, використовує термін «таблиця» для матриці коефіцієнтів. Він запровадив власні числа матриці і одержав результати про діагоналізацію матриці, які відповідають зведенню форми до суми квадратів.

Коші запропонував ідею подібних матриць і показав, що дві подібні матриці мають одне й те саме характеристичне рівняння. Він довів, що будь-яку дійсну симетричну матрицю можна діагоналізувати.

Шарль Ерміт
Ch. Hermite
1822–1901

1841 — німецький математик Карл Якобі у праці «Про функціональні визначники» запроваджує якобіан (пізніше названий так Сілвестром).

1840–1850 — Сілвестр, Келі, французький математик Шарль Ерміт та інші розвинули теорію інваріантів.

1844 — німецький математик Фердінанд Ейзенштейн (F. Eisenstein, 1823–1852), позначаючи лінійне перетворення однією літерою, розглянув дії над лінійними перетвореннями, з'ясувавши некомутативність множення перетворень. Це фактично вже були дії над відповідними матрицями.

1844 — Келі у праці «Розділи з аналітичної геометрії n вимірів» запроваджує поняття n-вимірного простору.

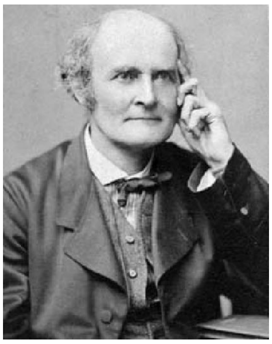
1850 — уперше термін «матриця» був використаний англійським математиком Джеймсом Сілвестром. Сілвестр означив матрицю як розміщені у прямокутнику елементи і встановив зв'язок квадратних матриць з визначниками.

Цю ідею він повідомив своєму другові Артуру Келі, який відразу усвідомив значущість ідеї матриці.

Сілвестр довів, що, якщо матриця A має власне число λ, то обернена до неї матриця A^{-1} має власне число $\frac{1}{\lambda}$.

Карл Якобі
C. Jacobi
1804–1851

Фердинанд
Ейзенштейн
F. Eisenstein
1823–1852



Артур Келі
A. Cayley
1821–1895

Джеймс Сілвестр
J. Sylvester
1814–1897

1853 — Келі одержав спосіб обернення матриці.

1858 — Келі публікує «Мемуар з теорії матриць», у якому вперше дає абстрактне означення матриці. Він показує, що таблиці коефіцієнтів, які вивчалися раніше для квадратичних форм і лінійних перетворень є окремими випадками матриць. Келі подає всю матричну алгебру, означуючи додавання, множення матриці на число, множення матриць й обернення матриць. Він подає явну конструкцію оберненої матриці за допомогою визначників.

Келі також довів, що квадратна матриця 2-го порядку справджує свої характеристичне рівняння і зазначив, що перевірив цю властивість для матриць 3-го порядку (теорему Гамілтона — Келі). Ірландський математик Вільям Гамілтон довів цю теорему для окремого випадку матриці 4-го порядку, досліджуючи кватерніони.

Карл Веєрштрас
K. Weierstraß
1815–1897

1860-ті — німецький математик Веєрштрас розглядає визначник аксіоматично як нормовану, лінійну, однорідну, антисиметричну функцію.

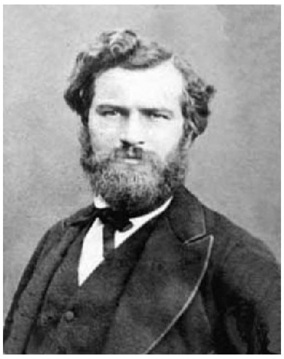
1867 — англійський письменник і математик Льюїс Керол (Ч. Л. Доджсон, 1832–1898) у праці «Елементарна теорія визначників» уперше публікує доведення теореми Кронекера — Капеллі.

1870 — французький математик Каміль Жордан, вивчаючи канонічну форму лінійних підставлянь, подає жорданову канонічну форму матриці.

Німецький математик Фердинанд Фробеніюс (F. Frobenius, 1849–1917) написав важливу працю про матриці «Про лінійні підставлення і білінійні форми», хоч він і не знав праць Келі і не використовував термін «матриця», де зокрема довів теорему Гамілтона — Келі в загальному випадку і подав означення рангу матриці.

1888 — німецький інженер і геодезист Вільгельм Йордан удосконалює Ґаусів метод виключення змінних.

Льюїс Керол
Lewis Carroll
1832–1898



Каміль Жордан
C. Jordan
1838–1922

Фердинанд
Фробеніюс
F. Frobenius,
1849–1917

Вільгельм Йордан
W. Jordan
1842–1899

Розвиток векторної алгебри і комплексних чисел

1484 — французький математик Ніколя Шуке (N. Chuquet, 1445–1500), розв’язуючи деякі алгебричні рівняння, дістає й уявні розв’язки, але відкидає їх.

1545 — Джіроламо Кардано у «Видатному мистецтві» розглядає задачу, яка приводить до комплексних чисел, навіть наводячи приклад оперування з комплексними числами, називає їх «несправжніми», «настільки ж витонченими, як і некорисними».

1572 — італійський математик Рафаель Бомбеллі (R. Bombelli, 1530–1590) публікує «Алгебру», в якій застосовує свою «дику ідею» — використати квадратні корені з від'ємних чисел, щоб одержати дійсні розв'язки алгебричних рівнянь (у незвідному випадку кубічного рівняння). Ці прийоми були відомі йому з 1550 року, але не були надруковані.

1586 — фламандський математик-універсал та інженер Симон Стевін (S. Stevin, 1548–1620) у праці «Принципи мистецтва зважування» подає правило додавання для перпендикулярних сил. Загальний випадок (який міг бути відомим ще грецькому філософу Аристотелю (384–322 до н. е.)) був розглянутий французьким математиком, фізиком і астрономом Жілем Робервалем (G. de Roberval, 1602–1675).

1629 — Альберт Жирар (A. Girard, 1595–1632) у праці «Нові винаходи в алгебрі» чітко формулює співвідношення між коренями і коефіцієнтами, розглядаючи від'ємні та уявні корені рівнянь. Уперше формулює основну теорему алгебри про те, що будь-яке алгебричне рівняння n-го степеня має n коренів.

1637 — французький математик, філософ, фізик і фізіолог Рене Декарт називає «уявними» вирази, які містять корені з від'ємних чисел, і вважає їхню появу ознакою нерозв'язності задачі.

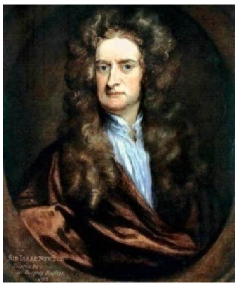
1673 — англійський математик Джон Воліс уперше у своїй «Алгебрі» пропонує геометричне зображення комплексних чисел.

1687 — видатний англійський фізик, математик і астроном Ісаак Ньютон у праці «Математичні основи натуральної філософії» висловив ідею, що сили, оскільки вони мають величину й напрям, можна комбінувати (додавати) і одержувати нову силу.

Симон Стевін
S. Stevin,
1548–1620

Джон Воліс
J. Wallis
1616 – 1703

Християн Гюйґенс
Ch. Huygens
1629–1695



Ісаак Ньютон
I. Newton
1643–1727

1707 — англійський математик Абрагам Муавр (A. de Moivre, 1667–1754) опублікував формулу $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

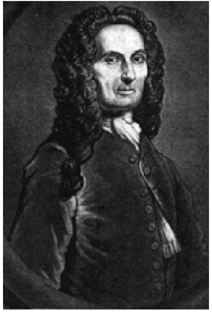
1710 — французький математик П'єр Вариньон сформулював закон паралелограма сил.

1714 — англійський математик і астроном Роджер Коутс (R. Cotes, 1682–1716) у праці «Логометрія» подає формулу $-i\varphi = \ln(\cos\varphi - i\sin\varphi)$.

1747 — видатний швейцарський математик і фізик Леонард Ейлер (L. Euler, 1707–1783) показав, що логарифм з від'ємного числа уявний.

1748 — Ейлер у «Вступі до аналізу нескінченно малих» за допомогою розвинення у степеневий ряд експоненти, синуса і косинуса виводить формулу $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

1749 — д'Аламбер виводить умови аналітичності функції комплексної змінної (умови Ейлера — д'Аламбера — Коші — Рімана).



Абрахам Муавр
A. de Moivre
1667–1754

П. Варіньон
P. Varignon
1654–1722

Леонард Ейлер
L. Euler
1707–1783

Жан-Лерон
д'Аламбер
J. R. d'Alembert
1717–1783

1797 (надруковано в 1799) — норвезький математик Каспар Вессель (C. Wessel, 1745–1818) друкує працю у мемуарах Королівської академії Данії, у якій він започатковує геометричне зображення комплексних чисел як точок комплексної площини; він досліджує також, «як можна аналітично задати напрям». Він розглядає геометричне тлумачення суми, різниці, добутку та частки комплексних чисел і розшукує (звісно, невдало) узагальнення подібних зображень для тривимірного простору. Ці дослідження залишились майже невідомими.

1799 — Карл Ґаус також вивчає геометричне тлумачення комплексних чисел і пробує узагальнити його на тривимірний простір, але результати друкує лише 1831 р.

1806 — француз Жан Арґан (J. Argand, 1768–1822) друкує геометричне тлумачення комплексних чисел і знову ж таки у праці 1813 вивчає подібний підхід для тривимірного простору.

1806 — француз Адрієн-Квент Бує (A.-Q. Buée, 1748–1826) друкує працю, присвячену геометричному зображанню комплексних чисел.

1814 (надруковано 1825) — Коші у своїх працях вперше подає чітко викладену теорію функцій комплексної змінної.

1827 — німецький математик і астроном Август Мебіюс у своїй книжці «Барицентричні координати» розглядає напрямлені відрізки, які він позначає літерами, і розвиває дії над напрямленими відрізками.

1828 — англійський математик Джон Ворен (J. Warren, 1796–1852) публікує працю «Геометричне зображення квадратних коренів із від'ємних чисел», яка і надихнула ірландського фізика, астронома і математика Вільяма Гамілтона на вивчення й узагальнення комплексних чисел.

1835 — італійський математик Дж. Белавітіс (G. Bellavitis, 1803–1880) розробляє систему еквіполентностей, яка дуже нагадує сучасну неформальну векторну алгебру, а саме: «два відрізки називають еквіполентними якщо вони мають однакову довжину, паралельні й однаково напрямлені».

1837 — ірландський математик, фізик та астроном Вільям Гамілтон публікує працю «Теорія спряжених функцій або алгебричних пар...», у якій розглядає комплексні числа як упорядковані пари дійсних чисел.

1840 — німецький енциклопедист, математик, лінгвіст та фізик Герман Ґрасман у праці «Теорія відпливів і припливів» розглядає дії над напрямленими відрізками і фактично числові еквіваленти векторного й скалярного добутків. Ця як і наступні праці Ґрасмана, вирізнялися глибиною і продуманістю, але ще довго не привертали уваги загалу математиків.

1843 — продовжуючи дослідження трійок дійсних чисел, Гамілтон розробляє теорію четвірок, які являють собою узагальнення комплексних чисел — кватерніони вигляду $a + x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

1844 — Ґрасман, незалежно від Гамілтона — опублікував «Учення про протяжні величини», у якій він запроваджує n-вимірну геометрію і системи гіперкомплексних чисел, загальніших за кватерніони.

Ця праця містить багато основних ідей векторної алгебри як позначення n-вимірного векторного простору, підпростору, лінійної оболонки, лінійної залежності і незалежності, базису, розмірності та лінійних перетворень.

Векторний простір Ґрасман означує як множину лінійних комбінацій $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i$, де a_i — дійсні числа; e_i — лінійно незалежні «одиниці».

Август Мебіюс
A.F. Möbius
1790–1868

Дж. Белавітіс
G. Bellavitis
1803–1880

Вільям Гамілтон
W. R. Hamilton
1788–1856

Герман Ґрасман
H. Grassmann
1809–1877

1845 — французький фізик, математик і інженер, Жан де Сен-Венан (J. C. de Saint-Venant, 1797–1886) публікує варіант векторного числення, подібний до ґрасманового (дослідження розпочав ще 1832 р.). Він розглядає векторний добуток як площу орієнтованого паралелограма.

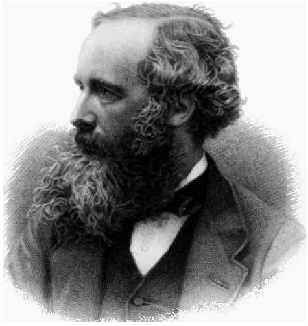
1846 — Гамілтон публікує працю, у якій пропонує терміни «скаляр» і «вектор» для дійсної і уявної частин кватерніона.

1873 — шотландський математик і фізик, творець теорії електромагнетизму Джеймс Максвел у «Курсі електрики і магнетизму» виклав свою теорію за допомогою векторів (деякі результати паралельно виражав через кватерніони). Він поділив усі фізичні величини на векторні й скалярні; був переконаним прибічником застосування векторів перед кватерніонанами.

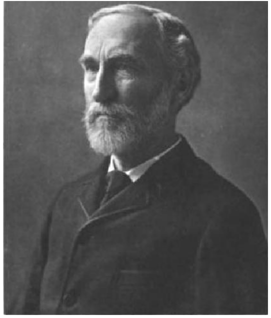
1877 — англійський математик і філософ Вільям Кліфорд у своїх «Елементах динаміки» (1878) запровадив скалярний і векторний добутки векторів.

1881 — спираючись на ідеяї Ґрасмана та Гамілтона, американський математик і фізик Джозая Ґібс (J. W. Gibbs, 1839–1903) у підручнику «Векторний аналіз» розвинув векторний аналіз майже до сучасного його стану.


Жан де Сен-Венан
J. C. de Saint-Venant
1797–1886


Джеймс Максвел
J. C. Maxwell
1831–1879


Вільям Кліфорд
W. K. Clifford
1845–1879


Джозая Ґібс
J. W. Gibbs
1839–1903

1885, 1893 — активно почав упроваджувати вектори у фізиці англійський математик, фізик і інженер Олівер Гевісайд.

1888 — спираючись на ґрасманові ідеї, сучасну аксіоматику векторного простору подав у своїй праці «Геометричне числення» італійський математик Джузепе Пеано (він називає його «лінійною системою»). Пеано подає приклади векторних просторів: дійсні числа та комплексні числа, вектори на площині й у просторі, множину лінійних перетворень з одного векторного простору в інший, множину многочленів від однієї змінної.

Але і праця Ґрасмана через її складність, і праця Пеано через її геометричний характер ще довго залишались маловідомими.

1890-ті — італійський математик Сальваторе Пінкерле розробляє формальну теорію лінійних операторів у нескінченновимірних просторах, не спираючись на працю Пеано.

1904, 1908 — німецькі математики Давид Гільберт та Ерхард Шмідт вивчають нескінченновимірні функціональні простори.


Олівер Гевісайд
O. Heaviside
1850–1925


Джузеппе Пеано
G. Peano
1858–1932


Сальваторе Пінкерле
S. Pincherle
1853–1936

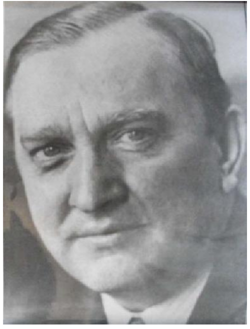

Давид Гільберт
D. Hilbert
1862–1943

1918 — німецький математик Герман Вейль у книжці «Простір. Час. Матерія» незалежно від Пеано аксіоматично запроваджує поняття скінченновимірного дійсного векторного простору.

1920 — польський й український математик Стефан Банах у докторській дисертації запроваджує поняття лінійного метричного простору.


Ергард Шмідт
E. Schmidt
1876–1959


Герман Вейль
H. Weyl
1885–1955


Стефан Банах
S. Banach
1892–1945

Розвиток аналітичної геометрії

Координати з’явились ще в давнину. Географічні координати — довгота і широта, характеризували положення пунктів земної поверхні, яку зображували у вигляді прямокутника, парою чисел. Подібними були й астрономічні координати, які використовували для визначення положення світил на небесній сфері.

IV ст. до н. е. — давньогрецький математик Менехм (380–320 до н. е.) відкрив конічні перерізи, вивчив їхні властивості; побудував прилади для креслення конічних перерізів.

Друга половина III ст.–перша половина II ст. до н. е. — давньогрецький геометр і астроном Аполоній Пергський (262–190 до н. е.) написав працю «Конічні перерізи», дослідивши еліпс, параболу і гіперболу.

Близько 1360 — французький філософ, математик і фізик Никола Орем (Nicole Oresme, 1323–1382) запровадив у математиці координатний метод; координати, за аналогією з географічними, назвав довготою і широтою.

Близько 1635 — французький математик П’єр Ферма поширює рукописи праці «Вступ до вивчення плоских та тілесних місць», де описує і обговорює рівняння різноманітних кривих 2-го порядку у прямокутних координатах. Для спрощення вигляду рівнянь широко використовує перетворення координат. Праця не була широковідома і надрукована лише 1679 р.

1637 — Декарт у «Геометрії» застосовує алгебричну символіку до геометрії, розроблює теорію алгебричних рівнянь. Він описує точку площини як пару дійсних чисел, прямі і криві — як їхні рівняннями.

Декарт включає до геометрії ширший клас кривих, зокрема «механічні» (трансцендентні, як спіралі) і вважає, що кожна крива має визначальне рівняння. Він пропонує класифікацію алгебричних кривих. Декарт зазначає, хоч і не доводить, що основні характеристики кривої не залежать від системи координат.

Середина XVII ст. — французький математик Блез Паскаль, Воліс, голландський математик Х. Гюйґенс дослідили властивості циклоїди та інших ліній, які утворюються коченням однієї кривої вздовж другої.

1655 — Воліс розвиває геометричні ідеї Декарта, будує графік синусоїди; розглядає конічні перерізи як плоскі лінії; розглядає від’ємні координати (Ферма і Декарт розглядали лише додатні) і косі (непрямокутні) координати.

1660 — голландський математик Ян де Віт (Jan de Witt, 1625–1672) у своїй праці «Елементи кривих», опублікованій як частина коментарів декартової «Геометрії» (1660), показав, як перетворення координатних осей зводить задане рівняння кривої 2-го порядку до канонічного вигляду.

1671 — Ньютон запровадив термін «аналітична геометрія».


П’єр Ферма
P. de Fermat
1601–1665


Рене Декарт
R. Descartes
1596–1650


Блез Паскаль
B. Pascal
1623–1662


Ян де Віт
Jan de Witt
1625–1672

1687 — швейцарський математик Якоб I Бернуллі розглянув логарифмічну спіраль і ланцюгову лінію.

Якоб I Бернуллі
J. Bernoulli
1654–1705

Джеймс Ґреґорі
J. Gregory
1638–1675

Близько 1700 — шотландський математик і астроном Дж. Ґреґорі пропонує формули перетворення координат, виводячи вперше рівняння деяких ліній. Розглядає полярні координати.

1700 — французький математик і механік Антуан Паран (A. Paren, 1666–1716) уперше розробляє аналітичну геометрію у просторі. Виводить загальне рівняння сфери; доводить, що гіперболоїд обертання породжується обертанням однієї прямої навколо другої.

1736 — у підсумковій (посмертній) праці «Метод флюксій і нескінченних рядів» Ньютона запроваджено полярну систему координат і ще 8 різних типів косокутних систем.

1748 — Ейлер у «Додатку про поверхні» до другого тому «Вступу в аналіз нескінченних» систематично запроваджує прямокутні Декартові координати у просторі і висловлює деякі загальні міркування про рівняння поверхонь. Також він роз’яснює метод перерізів вивчення поверхонь,зокрема, циліндра, конуса і сфери, розглядає перетворення просторових прямокутних координат.

Походження термінології

АБСЦИСА — лат. *abscissa* (відрізана, відокремлена).
АДИТИВНИЙ — лат. *additivus* (додавання).
АЛГЕБРА — араб. *al-ğabr, ал-джабр* (поновлення).
АПЛІКАТА — лат. *applicata* (приєднана, прикладена).
АРГУМЕНТ — лат. *argumentum* (довід, доказ).
АСИМПТОТА — гр. *άσύμπτωη* (зливаюся). Поняття «асимптота» вже вжив Архімед (III ст. до н. е.), а означення і термін — Аполлоній Пергський (III—II ст. до н. е.).
АСОЦІАТИВНИЙ — лат. *associativus* (з’єднувальний).
АСТРОЇДА — гр. *ἄστρον* (зірка), *είδος* (вигляд) — зіркоподібна.
БАЗИС — гр. *βάσις* (основа, підвалина).
ВЕКТОР — лат. *vector* (носій).
ГЕЛІКОЇД — гр. *έλίξ* (спіраль), *είδος* (вигляд).
ГЕОМЕТРІЯ — гр. *γεωμετρία* (вимірювання землі).
ГІПЕРБОЛА — гр. *ύπερβολή* (перебільшений).
ДЕТЕРМІНАНТ — лат. *determinans* (той, що визначає) — визначник.
ДИРЕКТРИСА — лат. *directrix* (напрямна).
ДИСТРИБУТИВНИЙ — лат. *distributivus* (розподільний).

ЕКСЦЕНТРИСИТЕТ — лат. *ex* (ззовні), *centrum* (середина) — позацентровність.

ЕЛІПС — гр. *ἔλειψις* (недостача).

ІНВАРІАНТ — лат. *in* (не), *vario* (змінюю) — незмінна величина.

КАНОНІЧНИЙ — гр. *κανονίκός* (утворений за правилами).

КАРДІОЇДА — гр. *καρδία* (серце), *είδος* (вигляд) — серцеподібна.

КВАДРАНТ — лат. *quadrans* (четверта частина, чверть).

КОЕФІЦІЄНТ — лат. *co* (спів...), *efficiens* (виробник, той що творить).

КОЛІНЕАРНИЙ — лат. *collinearis* (співлінійний).

КОМПЛАНАРНИЙ — лат. *complanarius* (розміщений на площині).

КОМПЛЕКСНИЙ — лат. *complexus* (складений).

КОМУТАТИВНИЙ — лат. *commutativus* (змінений).

КОНІЧНИЙ — гр. *κωνίκός* (гострокінцевий).

КООРДИНАТА — лат. *con* (спів-), *ordinatus* (упорядкований).

ЛЕМНІСКАТА — лат. *lemniscata* (оздоблена стрічками).

ЛІНІЯ — лат. *linea* (нитка, шнур).

МАТЕМАТИКА — гр. *μάθημα* (знання, наука), *лат. mathematica* (знання).

МАТРИЦЯ — лат. *matrix* (джерело).

МІНОР — лат. *minor* (менший) — визначник меншого порядку.

МОДУЛЬ — лат. *modulus* (міра, величина).

ОРДИНАТА — лат. *ordinatus* (упорядкований).

ОРІЄНТАЦІЯ — лат. *oriens* (схід).

ОРТ — гр. *όρθος* (прямий, прямовисний).

ОРТОГОНАЛЬНИЙ — гр. *όρθος* (прямий), *γωνία* (кут) — прямокутний. Цей термін вжив Евклід.

ПАРАБОЛА — гр. *παραβολή* (рівність).

ПАРАЛЕЛЬНИЙ — гр. *παρόλληλος* (той, що йде поряд, рівнобіжний). Паралельні прямі розглядались піфагорійцями (VII—VI ст. до н. е.).

ПЕРПЕДИКУЛЯР — лат. *perpendicularis* (прямовис).

ПОЛЮС — лат. *polus* з *гр. πολύς* (небесна вісь). Термін вживали Евклід і Паппа, полюси конічних перерізів — Аполлоній Пергський.

ПРОЕКЦІЯ — лат. *projectio* (викидання вперед).

РАНГ — нім. *Rang* (степінь, розряд).

СКАЛЯР — гр. *scalar* (східчастий). Термін запровадив Вієт.

СПІРАЛЬ — лат. *spira* (вигин, зігнута лінія).

ФОКУС — лат. *focus* (вогнище). Переклад з арабської терміна для фокуса параболи — «місце запалювання» (парабола в арабів називалась — «запалювальне дзеркало»).

ЦИКЛОЇДА — гр. *κύκλος* (коло), *είδος* (вигляд) — крива, пов’язана з рухом по колу.

Список використаної і рекомендованої літератури

Підручники і посібники

Jurlewicz T., Skoczylas Z. Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory. — Wrocław: Oficyna Wydawnicza GiS, 2003. — 163 str. — ISBN 83-89020-14-9.

Lay D. C. Linear Algebra and its Applications, 3rd updated edition. Addison Wesley, 2005. — 576 pp., ISBN: 0321287134.

Meyer C. D. Matrix analysis and applied linear algebra. — SIAM, 2000. — 718 p. — ISBN 0898714540.

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии [Текст] / Р. Ф. Апатенок*, А. М.* Маркина, Н. В. Попова, В. Б. Хейнман; под ред. Р. Ф. Апатенок. — Мн., Вышэйш. шк., 1986. — 272 с.

Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст]: учеб. / Д. В. Беклемишев. — М.: Физматлит, 2005. — 307 с. — ISBN 978-5-9221-0691-7.

Дубовик В. П. Вища математика [Текст]: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І.І. Юрик. — К: АСК, 2005. — 647 с. — ISBN 966-539-320-0.

Жевняк Р. М. Высшая математика. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Дифференциальное исчисление / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. — Мн.: Вышэйш. шк., 1992. — 384 с.

Ильин В. А. Аналитическая геометрия [Текст]: учеб. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М.: Физматлит, 2007. — 224 с. — ISBN 978-5-9221-0511-8.

Канатников А. Н. Аналитическая геометрия [Текст]: учеб. / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко; под ред. В. С. Зарубина и А. П. Крищенко. — М.: Академия, 2009. — 208 с. — ISBN 278-5-7695-4580-1.

Канатников А. Н. Линейная алгебра [Текст]: учеб. / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко; под ред. В. С. Зарубина и А. П. Крищенко. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. — 336 с. — ISBN 5-7038-1754-4.

Вся высшая математика [Текст]: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 1. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 328 с. — ISBN 5-354-00271-0.

Лінійна алгебра та аналітична геометрія [Текст]: навч. посібн. / Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій, Х. П. Луник, Д. В. Уханська, ДУ «Львівська політехніка», 1999. — 262 с.

Овчинников П. П. Вища математика [Текст] / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. — К.: Техніка, 2003. — 600 с. — ISBN: 966-575-055-0.

Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс [Текст] / Д. Письменный. — М.: Айрис-Пресс, 2008. — 608 с. ISBN 978-5-8112-3118-8, 978-5-8112-3480-6.

Задачники і розв'язники

Jurlewicz T., Skoczylas Z. Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania Wrocław: Oficyna Wydawnicza GiS, — 2003. — 167 str. — ISBN 83-89020-15-7.

Апатенок Р. Ф. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии [Текст] / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, В. Б. Хейнман; под ред. В. Т. Воднева. — Мн.: Вышэйш. шк., 1990. — 288 с. — ISBN 5-339-00329-9.

Беклимишева Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст]: учебн. пособие / Л. А. Беклимишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров; под. ред. Д. В. Беклемишева. — М.: Физматлит, 2001. — 496 с. — ISBN 5-9221-0010-6.

Бортаковский А. С. Аналитическая геометрия в примерах и задачах [Текст]: учеб. пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. — М.: Высш. шк., 2005. — 496 с. — ISBN 5-06-004761-X.

Бутузов В. Ф. Линейная алгебра в вопросах и задачах [Текст]: учеб. пособие / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, А. А. Шишкин; под ред. В. Ф. Бутузова. — СПб.: Лань, 2008. — 256 с. — ISBN 978-5-8114-0846-7.

Герасимчук В. С. Курс класичної математики в прикладах і задачах [Текст]: навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. — У 3 ч. Ч. 1. — Донецьк, ДонНТУ, 2005. — 584 с. — ISBN 966-7559-98-X (Ч. 1).

Збірник задач з аналітичної геометрії та векторної алгебри [Текст]: навч. посіб. / В. В. Булдигін, В. А. Жук, С. О. Рущицька, В. В. Ясінський. — К.: Вища шк., 1999. — 192 с. — ISBN: 5-11-004614-X.

Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. *Клетеник*. — М., Профессия, 2003. — 200 с. — ISBN: 5-93913-037-2.

Резниченко С. В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах (Алгебраические главы) [Текст]: учебн. пособие для вузов / С. В. Резниченко. — М.: Из-во МФТИ, 2001. — 576 с. — ISBN 5-89155-062-8.

Сборник задач по математике для втузов. — В 4 ч. Ч. 1 [Текст]: учеб. пособие / Под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. — М.: Физматлит, 2001. — 288 с. — ISBN 5-94052-034-0.

Студентські математичні олімпіади. Збірник задач [Текст] / В. В. Булдигін, В. А. Кушніревич, О. С. Шкабара, В. В. Ясінський. — К.: НТУУ «КПІ», 2002. — 176 с.

Навчальне видання

БУЛДИГІН Валерій Володимирович,
АЛЄКСЄЄВА Ірина Віталіївна,
ГАЙДЕЙ Віктор Олександрович,
ДИХОВИЧНИЙ Олександр Олександрович,
КОНОВАЛОВА Наталія Романівна,
ФЕДОРОВА Лідія Борисівна

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

В авторській редакції.