ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
СІЛЬСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені ПЕТРА ВАСИЛЕНКА

І. П. Стороженко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина І

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА І АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

Харків 2019

УДК 51(07), 373.167.1:51

Затверджено
Вченою радою Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка
протокол № 2 від 31 жовтня 2019 р.

Р е ц е н з е н т и:

Ю. В. Аркуша, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фізичної і біомедичної електроніки та комплексних інформаційних технологій Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

М. В. Кайдаш, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформаційних технологій Харківського національного університету повітряних сил імені Івана Кожедуба

Стороженко І. П.

Вища математика. [Текст]: Навчальний посібник в 2 частинах. Частина І. Лінійна алгебра і аналітична геометрія / І. П. Стороженко. – Харків., 2019. – 80 с. Іл. 48.

Навчальний посібник підготовлено згідно з програмою дисципліни «вища математика» для здобувачів вищої освіти, що здобувають освіту у вищих навчальних закладах III – IV рівня акредитації за спеціальностями «Економіка», «Публічне управління та адміністрування», «Туризм», «Зелений та екотуризм», «Менеджмент», «Облік і оподаткування», «Фінанси, банківська справа та страхування». Кожний розділ посібника містить виклад теоретичного матеріалу з лінійної алгебри і аналітичної геометрії, в якому дано необхідну кількість означень, формул та рекомендацій. По всім основним розділам представлені приклади розв'язування задач з поясненнями, дано перелік задач для самостійного розв'язання з відповідями.

Посібник призначено для організації аудиторної і самостійної роботи.

УДК 51 (07)

ЗМІСТ

ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ І. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

ТЕМА 1. МАТРИЦІ

Вступ до лінійної алгебри

Якщо що і дає ясне уявлення про математику, так це алгебра. Бар'єр повсякденності тут долається легко і просто. При цьому виявляється, що дивні речі знаходяться не в туманній дали, а зовсім поряд.

Алгебра вивчає математичні операції, відношення та утворення, що базуються на них. Такими утвореннями є многочлени, алгебраїчні рівняння і алгебраїчні структури. Вивчення властивостей композицій різного виду в XIX столітті привело до думки, що основне завдання алгебри – це вивчення властивостей операцій незалежно від об'єктів, до яких вони застосовуються. З того часу алгебру стали розглядати як загальну науку про властивості та закони композиції операцій. Алгебра складається з декілька розділів. Це елементарна алгебра, яка вивчає звичайні алгебраїчні рівняння від першого до четвертого порядку. Абстрактна або загальна алгебра – вивчає алгебраїчні структури такі як групи, кільця, поля; універсальна алгебра – алгебраїчні властивості спільні для всіх алгебраїчних структур; алгебраїчна теорія чисел – числа в різних алгебраїчних структурах; комутативна алгебра – комутативні кільця. Алгебраїчна геометрія – застосовує абстрактну алгебру до задач геометрії, а алгебраїчна комбінаторика до задач комбінаторики, і навпаки. Об’єктом вивчення даного курсу є лінійна алгебра. Лінійна алгебра – важлива частина алгебри, що вивчає лінійні простори, тобто вектори, векторні простори, лінійні відображення та системи лінійних рівнянь. Добре відомо, що вектора часто зустрічаються в математиці та її прикладних застосуваннях. Лінійна алгебра широко використовується у природничих та економічних науках. До лінійної алгебри в свою чергу відносять теорії лінійних рівнянь, визначників, матриць, векторних просторів та лінійних перетворень у них, форм (наприклад, квадратичних), інваріантів і тензорне числення. Деякі із цих теорій буде розглянуто.

1.1. Комплексні числа

Число – абстрактне поняття, що виказує кількісну відношення структур. Більш вищий ступень абстракції мають *змінні*, коли одному символу ставиться у відповідність безліч чисел. Змінні прийнято позначати літерами латинського або грецького алфавіту.

Розрізняють числа натуральні, цілі, раціональні, ірраціональні, дійсні, комплексні та кватерніони.

Дійсні числа, що включають раціональні та ірраціональні числа, призначені для кількісного опису безперервних величин.

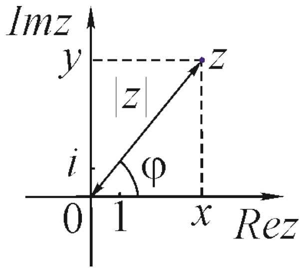
Комплексне число – впорядкована пара дійсних чисел (x, y).

Число $z = x + yi$, де x і y – будь-які дійсні числа, а $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця, називається комплексним числом. Дійсні числа x і y називаються відповідно дійсною і уявною частинами комплексного числа z і позначаються $x = \mathrm{Re}\, z$ та $y = \mathrm{Im}\, z$.

Форми комплексного числа:

1) Алгебраїчна $z = x + yi$;

2) Експоненціальна $z = |z| e^{i\varphi}$, де $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа, $\varphi = \arg(z) = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ – аргумент комплексного числа;



3) Тригонометрична $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

4) Матрична (дивись розділ 1.3) $z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$.

Формула Ейлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Операції над комплексними числами

1. *Еквівалентність*: $x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i$, якщо $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$

2. *Сума двох чисел* $z_1 = x_1 + y_1 i$ і $z_2 = x_2 + y_2 i$:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

3. *Добуток двох чисел* $z_1 = x_1 + y_1 i$ і $z_2 = x_2 + y_2 i$:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_2 y_1 + x_1 y_2)i = |z_1||z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

4. *Спряження числа* $z = x + yi$: $\bar{z} = x - yi$

5. *Ділення двох чисел* $z_1 = x_1 + y_1 i$ і $z_2 = x_2 + y_2 i$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

6. *Піднесення до степеня* (*Формула Муавра*): $z^n = |z|^n e^{in\varphi}$

7. *Добування кореня*: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)}$, де $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

8. *Логарифм* комплексного числа.

На практиці використовується майже виключно натуральний комплексний логарифм, визначений як безліч всіх чисел z таких, що $e^z = w$. Якщо представити $w = re^{i\varphi}$ то

$Ln(w) = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$ де $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Значення, що отримано при $k = 0$, називається *головним значенням комплексного натурального логарифма*.

Приклади операцій з комплексними числами

1. $3 + 5i + 3(2 - i) = 3 + 6 + (5 - 3)i = 9 + 2i$.

2. $(3 + 5i)\cdot(2 - i) = (3\cdot 2 - 5\cdot(-1)) + (3\cdot(-1) + 5\cdot 2)i = 11 + 7i$.

3. $\dfrac{3+5i}{2-i} = \dfrac{(3+5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{(6-5)+(3+10)i}{4+1} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{13}{5}i = 0{,}2 + 2{,}6i$.

4. $\left(1+\sqrt{3}i\right)^3 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 8e^{i\pi} = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = -8$, де модуль комплексного числа $\left|1+\sqrt{3}i\right| = \sqrt{1+3} = 2$ і аргумент комплексного числа $Arg\left(1+\sqrt{3}i\right) = arctg\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{\pi}{3}$.

5. $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i} = \sqrt[3]{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi/6+2\pi k}{3}}$, де k = 0, 1, 2, тобто $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{18}}$ при $k = 0$, $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{7\pi}{18}}$, при $k = 1$ і $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{13\pi}{18}}$, при $k = 2$.

6. Розв'язати рівняння $x^2 + 1 = 0$. $x = \sqrt{-1} = \sqrt{e^{-i\pi}} = e^{-i\frac{\pi+2\pi k}{2}}$, де $k = 0$, 1. Отже, існує два корені рівняння $x = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -i$ при k = 0 і $x = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = i$ при $k = 1$.

7. $\mathrm{Ln}\left(\sqrt{3}+i\right) = \mathrm{Ln}\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = \ln 2 + i\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$, де $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

1.2. Матриці

Матриці – прямокутна таблиця, заповнена математичними об'єктами. Тобто довільна система елементів сукупності *K*, розташована у вигляді прямокутної таблиці, що містить m рядків і n стовпців, називається (m, n) – матрицею або просто матрицею над *K*.

Щоб записати матрицю, виписують в належному порядку її елементи і таблицю, що вийшла, беруть в дужки або обмежують подвійними рисами. Таким чином, загальний вид (m,n) матриці буде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

де a_{ij} – елементи матриці. Часто замість такого докладного запису використовують скорочену $\|a_{ij}\|$ або $\|a_{ij}\|_{mn}$.

Матриці є наступним рівнем підвищення абстракції і узагальнення після змінної. Елементами матриці можуть бути не тільки числа, але змінні, функції і оператори, тобто однієї матриці ставиться у відповідність безліч чисел, змінних, функцій і операторів.

Матриці прийнято позначати великими літерами латинського алфавіту.

Якщо число рядків матриці дорівнює числу її стовпців, то матриця називається *квадратною*, а число її рядків (стовпців), називається порядком квадратної матриці. Зокрема, квадратна матриця порядку 1 – це просто один елемент з множини *K*.

Матрицю, що має лише один рядок (стовпець), називають *матрицею-рядком* (*стовпцем*).

Виділяють діагональні і одиничні матриці.

Діагональна матриця – квадратна матриця, в якій всі елементи, крім елементів, що стоять на головній діагоналі (пряма, що поєднує елементи a_{11} і a_{nn}) дорівнюють нулю.

Одинична матриця – діагональна матриця, в якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють 1. Одиничну матрицю прийнято позначати E або I:

$$E_1 = (1) \quad \text{або} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{або} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Основні операції над матрицями

1. Дві матриці називаються еквівалентними, якщо збігаються розміри матриць і елементи, які стоять на відповідних місцях цих матриць:

$$A_{nm} = B_{nm}, \text{ якщо } a_{ij} = b_{ij}$$

2. Операція добутку матриці на скаляр (дійсне число).

Щоб помножити число α на матрицю A або матрицю A на число α, потрібно помножити на α всі елементи матриці A:

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ . & . & . \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

3. Операція додавання матриць.

Щоб скласти дві матриці однакового розміру потрібно скласти між собою всі, відповідні елементи цих матриць:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ . & . & . \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ . & . & . \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

4. Операція добутку двох матриць.

Необхідна умова добутку двох матриць – кількість стовпців матриці, що стоїть зліва від знаку помножити, повинно дорівнювати числу рядків матриці, що стоїть з права від знаку помножити.

Щоб одержати елемент, що стоїть в i-му рядку і j-му стовпці добутку двох матриць, потрібно елементи i-го рядка першого матриці помножити на відповідні елементи j-го стовпця другої і отримані добутки скласти.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{ml} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{l1} & b_{l2} & \dots & b_{ln} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{l} a_{1i} b_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{l} a_{1i} b_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{l} a_{1i} b_{in} \\ \sum\limits_{i=1}^{l} a_{2i} b_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{l} a_{2i} b_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{l} a_{2i} b_{in} \\ . & . & . & . \\ \sum\limits_{i=1}^{l} a_{mi} b_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{l} a_{mi} b_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{l} a_{mi} b_{in} \end{pmatrix}$$

У загальному випадку $A \cdot B \neq B \cdot A$.

5. Операція транспонування – заміна рядків матриці її стовпцями.

Якщо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Властивості операцій:

1) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$ і $(A\alpha)\beta = A(\alpha\beta)$;
2) $0A = 0$ і $0 + A = A$;
3) $(A+B)+C = A+(B+C)$;
4) $A+B=B+A$;
5) $A+(-A)=0$;
6) $1A = A$;
7) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$;
8) $\alpha(A+B)=\alpha A + \alpha B$;
9) $(\alpha A)B = \alpha AB = A(\alpha B)$;
10) $(A+B)C = AC + BC$;
11) $C(A+B) = CA + CB$;
12) $(AB)C = A(BC)$;
13) $(AB)^T = B^T A^T$;
14) $(A+B)^T = A^T + B^T$;
15) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
16) $E_m A_{mn} = A_{mn} E_n = A_{mn}$.

Визначник матриці

Важливою характеристикою квадратної матриці є її *визначник*.

Визначником квадратної матриці називається алгебраїчна сума, всяких добутків елементів цієї матриці, узятих по одному з кожного рядка і по одному з кожного стовпця. Співмножники в кожному доданку записуються у порядку проходження рядків, тоді номери стовпців утворюють перестановки; доданки, відповідні парним перестановкам, беруться зі знаком «плюс», відповідні непарним – зі знаком «мінус».

Визначник матриці A позначають, як $\det A$ або обмежують матрицю вертикальними рисами.

Наприклад:

$$\det A_{11} = |a_{11}| = a_{11}; \qquad \det A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12};$$

$$\det A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - $$
$$- a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Властивості визначників:

1) $\det A^T = \det A$;

2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix};$$

3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$;

4) Визначник з двома однаковими або пропорціональними рядками (стовпцями) дорівнює нулю;

5) Якщо у визначнику поміняти місцями сусідні рядки (стовпці), то знак визначника зміниться;

6) Визначник не зміниться, якщо до якого-небудь рядку (стовпцю) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножений на яке завгодно число;

7) Для довільної квадратної матриці A_n справедлива формула

$$\det A_n = \sum_{i=1}^{n} a_{il} A_{il} = \sum_{i=1}^{n} a_{li} A_{li} ,$$

де l – яке завгодно натуральне число від 1 до n, A_{il} – алгебраїчне доповнення елемента a_{il} матриці A.

Алгебраїчне доповнення A_{il} дорівнює відповідному *мінору* M_{il} помноженому на $(-1)^{i+l}$: $A_{il} = (-1)^{i+l} M_{il}$.

Мінор M_{il} елемента a_{il} матриці A – визначник, який отримують із матриці A при «викреслюванні» i-строки та l-стовпця, відповідних елементу a_{il}.

Таким чином, $\det A_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{il} M_{il} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{li} M_{li}$.

Оборотна матриця.

Операція ділення в діях над матрицями відсутня. Аналогом цієї дії є помноження на оборотну матрицю.

Оборотною матрицею A^{-1} матриці A називається матриця, для якої справедливе наступне співвідношення $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$, де елементи A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

Таким чином необхідною умовою існування оборотної матриці A^{-1} є відмінність від нуля визначника матриці A $\det A \neq 0$.

Ранг матриці

Другим важливим числом, яке ставиться у відповідність матриці A є її ранг.

Ранг матриці – максимальне число лінійно незалежних рядків (стовпців) матриці.

Ранг матриці A позначається $rang(A)$ або $rank(A)$.

Наслідки теореми про базисний мінор:

1) Ранг матриці дорівнює порядку базисного мінору цієї матриці, тобто найвищому порядку відмінного від нуля мінору;

2) Базисні рядки (стовпці) матриці лінійно незалежні;

3) Будь-який рядок (стовпець) матриці є лінійною комбінацією її базисних рядків (стовпців).

Ранг матриці простіше всього находити за допомогою *елементарних перетворень*, тобто таких, які не змінюють ранг. Використовуючи елементарні перетворення, перетворюють початкову матрицю до трикутного вигляду (вигляду, коли під головною діагоналлю всі елементи рівні нулю). Тоді ранг матриці – це кількість не нульових рядків в одержаній трикутній матриці.

Елементарні перетворення матриці:

1) Транспонування;

2) Добуток рядка (або стовпця) на число, не рівне нулю;

3) Збільшення до рядка (або стовпця) лінійної комбінації інших рядків (або стовпців);

4) Видалення із матриці нульового рядка (або стовпця).

Наступний важливий параметр матриці є *слід* матриці.

Слід матриці

Слід матриці А – це сума її діагональних елементів a_{ii}:

$$TrA = SpA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

У наукових текстах зустрічається два позначення операції узяття сліду TrA (від англ. Trace – слід) і SpA (від нім. Spur – слід)

Власні значення і вектора матриці

Задача знаходження власних значень і власних векторів матриць є одним із основних задач для багатьох розділів фізики і хімії. З такою проблемою доводиться стикатися, наприклад, при дослідженні власних коливальних і електронних спектрів молекул і кристалів.

Нехай задана квадратна матриця A і деяка матриця-стовпець X, висота якої співпадає з порядком матриці A. У багатьох задачах доводиться розглядати рівняння відносно X: $A\cdot X = \cdot\lambda\cdot X$, де λ – деяке число. Зрозуміло, що при будь-якому λ це рівняння має нульовий розв'язок.

Число λ, при якому це рівняння $A\cdot X = \lambda\cdot X$ має ненульові розв'язки, називається *власним значенням матриці A*, а X при такому λ називається *власним вектором матриці A*.

Дане матричне рівняння можна переписати у вигляді $(A-\lambda E)\cdot X = \cdot 0$, де E – одинична матриця. Тобто має місце система однорідних лінійних рівнянь. Щоб ця система мала ненульові розв'язки необхідне і достатньо, щоб визначник системи був рівний нулю, тобто характеристичний поліном матриці прирівнюється нулю $\det(A-\lambda E)=0$. Це рівняння називається *характеристичним рівнянням матриці A*. *Характеристичний поліном* матриці A є $\det(A-xE)$. *При цьому матриця $A-xE$ називається характеристичною.*

Приклади операцій з матрицями

1. $3\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ln x & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3\ln x & 0 \\ 3\sqrt{2} & 0 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & x+y \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+4\cdot 3-1\cdot 5 & 1\cdot 2+4\cdot 4-1\cdot 6 \\ 2\cdot 1+3\cdot 3+5\cdot 5 & 2\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 36 & 46 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot 7 - 3\cdot 5 = -8.$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$

7. Знайти зоборотну матрицю матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$

Обчислюємо визначник матриці A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 8 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = -6+4+12+8-24-24=-30.$$

Знаходимо всі алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -6+4=-2;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = 12+8=20;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = -24-24=-48;\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 2-4=-2;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -2-8=-10;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = 4+8=12;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-3=-2;\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -1+6=5;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3-6=-3.$$

Складемо матрицю із алгебраїчних доповнень $\begin{pmatrix} -2 & 20 & -48 \\ -2 & -10 & 12 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} -2 & 20 & -48 \\ -2 & -10 & 12 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -20 & 10 & -5 \\ 48 & -12 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/15 & 1/15 & 1/15 \\ -2/3 & 1/3 & -1/6 \\ 8/5 & -2/5 & 1/10 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/15 & 1/15 & 1/15 \\ -2/3 & 1/3 & -1/6 \\ 8/5 & -2/5 & 1/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

8. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Перетворимо задану матрицю, використовуючи елементарні перетворення.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ I-II \\ 2I-III \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ II-III \end{matrix}$$

$rang\, A = 3$

9. Знайти слід матриці A з умови попередньої задачі.

$TrA = 1-1-2=-2$

10. Знайти власні значення матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Характеристичне рівняння матриці $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 9) - 2(-\lambda - 3) - 2(3+\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 9) = 0.$$

Розв'яжемо рівняння: $1 - \lambda = 0$; $\lambda^2 - 9 = 0$; $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -3$; $\lambda_3 = +3$.

Задачі до теми матриці

В задачах 1.1 – 1.10 дано комплексні числа z_1 и z_2. Знайти а) $z_1 + 2z_2$; б) $z_1 - \bar{z}_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) z_1/z_2.

1.1. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + i$.

1.2. $z_1 = -2 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$.

1.3. $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -2 - 2i$.

1.4. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$.

1.5. $z_1 = 6 + 10i$, $z_2 = 4 + 3i$

1.6. $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -1 - i$.

1.7. $z_1 = 6 - 2i$, $z_2 = 1 + i$.

1.8. $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 + 2i$.

1.9. $z_1 = 6 + 11i$, $z_2 = 7 + 3i$.

1.10. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -i$.

В задачах 1.11 – 1.20 комплексні числа, що задані в алгебраїчній формі представити у показниковій і тригонометричних формах.

1.11 $z = -i$.

1.12. $z = -3$.

1.13. $z = \sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}$.

1.14. $z = 1 - i$.

1.15. $z = -1 + i$.

1.16. $z = \sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}$

1.17. $z = 1 + i$.

1.18. $z = 1 - i \cdot \sqrt{3}$

1.19. $z = 3i$.

1.20. $z = 2$.

В задачах 1.21 – 1.30 добути всі значення коренів.

1.21 $\sqrt[3]{-i}$.

1.22. $\sqrt[4]{-16}$.

1.23. $\sqrt{\sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}}$.

1.24. $\sqrt[3]{1 - i}$.

1.25. $\sqrt[3]{-1 + i}$.

1.26. $\sqrt{\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}}$.

1.27. $\sqrt[3]{1 + i}$.

1.28. $\sqrt{1 - i \cdot \sqrt{3}}$.

1.29. $\sqrt[4]{16i}$.

1.30. $\sqrt[4]{16}$.

В задачах 1.31 – 1.40 комплексне число піднести до ступеня.

1.31. $(-i)^9$.

1.32. $(-3 + 3i)^3$.

1.33. $\left(\sqrt{2}-i\cdot\sqrt{2}\right)^6$.

1.34. $(1-i)^4$.

1.35. $(-1+i)^5$.

1.36. $\left(\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}\right)^6$.

1.37. $(1+i)^3$.

1.38. $\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)^3$.

1.39. $(3i)^3$.

1.40. $\left(\sqrt{3}+i\right)^3$.

В задачах 1.41 – 1.50 знайти всі корені рівняння.

1.41. $z^2-2z+5=0$.

1.42. $z^3+27=0$.

1.43. $z^2+2z+10=0$.

1.44. $z^4+16=0$.

1.45. $z^2+4z+5=0$.

1.46. $z^2-i=0$.

1.47. $z^2-4z+8=0$.

1.48. $e^{-z}=3-4i$.

1.49. $z^2-3z+9=0$.

1.50. $e^z=\sqrt{3}+i$.

В задачах 1.51 – 1.60 знайти логарифм комплексного числа.

1.51 $z=-i$.

1.52. $z=\sqrt{12}-2i$.

1.53. $z=\sqrt{2}-i\cdot\sqrt{2}$.

1.54. $z=1-i$.

1.55. $z=-1+i$.

1.56. $z=\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}$.

1.57. $z=1+i$.

1.58. $z=1-i\cdot\sqrt{3}$.

1.59. $z=4+3i$.

1.60. $z=-2$.

1.61. Сформулювати вимоги, які треба пред'явити до матриць для того, щоб їх можна було скласти.

1.62. Які із запропонованих матриць є діагональними:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1.63. Які із запропонованих матриць є: а) верхньою трикутною; б) нижньою трикутною; в) трапецієвидною; г) симетричною.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 9 & -5\\ 9 & 0 & 1\\ -5 & 1 & 2\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 7\\ 0 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\ C=\begin{pmatrix}2 & 4 & -6 & 3\\ 0 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 4 & 7 & 5\end{pmatrix}\ F=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ 5 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

1.64. Дані матриці A, B, C:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 5\\ 0 & 7 & -4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & 1 & 4\\ 5 & -7 & 4\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

Знайти: а) $2A+3B-C$; б) $A-B+2C$.

1.65. Довести, що сума двох симетричних матриць A і B є симетрична матриця C.

1.66. Знайти матриці Х, якщо

$$а)\ 2\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 2 & 8\\ 3 & -9\end{pmatrix};\ б)\ 3X-\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & -4\end{pmatrix}$$

1.67. Обчислити лінійну комбінацію матриць:

а) $3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; в) $2\begin{pmatrix}1 & 8 & 7\\ 1 & -5 & -6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 24 & -7\\ -1 & -2 & 7\end{pmatrix}$;

б) $2\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0\\ 5\\ 6\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 3 & 4\\ 2 & 7 & 5\end{pmatrix}$

1.68. Обчислити добуток матриць:

$$а)\ \begin{pmatrix}2 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 1\end{pmatrix};\ б)\ \begin{pmatrix}4\\ 3\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\end{pmatrix}.$$

1.69. Яким вимогам повинна задовольняти матриці A і B щоб:

а) існував добуток $A\ B$;

б) існував добуток $B\ A$;

в) існували добутки $A\ B$ і $B\ A$?

1.70. Перевірити, чи існує добуток, і якщо так, то знайти його:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}$;

1.71. Дані матриці A, B, C:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 9 & -5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 5 & 6 & 7\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Знайти: а) AC; б) $A\ B$.

1.72. Відомо, що $A_{5\times 9}B_{m\times n}=C_{5\times 1}$. Знайти m і n.

1.73. Відомо, що $A_{5\times m}B_{7\times n}=C_{5\times 6}$. Знайти m і n.

1.74. Дані матриці $A_{1\times 3}$, $B_{4\times 1}$ і $C_{3\times 5}$. Існує добуток: а) AB; б) AC; в) BA; г) CA; д) ABC?

1.75. Виконувати дії:

а) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}5 & -1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & - & 0\\ 3 & 2 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$; с) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\\ 5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

1.76. Виконувати дії: $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 5 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -4 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 7\\ 4 & 0 & 6\end{pmatrix}$

1.77. Знайти A^2, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

1.78. Обчислити: а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$

1.79. Знайти $f(A)$, якщо $f(x) = x^2 - 2x + 3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1.80. Показати, що матриця $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ є коренем багаточлена $x^2 - 3x + 5$.

1.81. Обчислити: а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^2$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3$; в) $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}^n$; г) $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$; д) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

1.82. Знайти матрицю A, якщо $(3A)^T = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ -3 & 0 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$

1.83. Дано матриці: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Знайти: а) $2A - B^T$; б) $2B^T + 3A$

1.84. Знайти матрицю B, якщо $(A + B)^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ і $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.85. Знайти BA, якщо $\left(A^T B^T\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

1.86. Обчислити визначники: а) $\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix}$

1.87. При якому значенні α дорівнює нулю наступні визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3-\alpha & 2 \\ 2 & -\alpha \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \alpha & -2 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix}$

1.88. Обчислити визначники: а) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

1.89. При якому значенні α дорівнює нулю наступні визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3-\alpha & 0 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 \\ 10 & -5 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

1.90. Обчислити визначники, користуючись властивості визначника:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 5 & -3 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 7 \\ 4 & -4 & 15 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 17 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -8 & 12 \\ 2 & 34 & 4 & 10 \\ 71 & 8 & 3 & -1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 121 & 283 \\ 221 & 183 \end{vmatrix}$.

1.91. Обчислити визначників, користуючись розкладанням по елементам будь-якого рядка (стовпця):

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

1.92. Знайти матриці оборотні до даних:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$.

1.93. Знайти матриці оборотні до даних:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Контрольні питання

1. Що таке матриця?
2. Які існують операції над матрицями і як вони здійснюються?
3. Яка матриця називається нульовою і одиничною?
4. Як обчислити визначник матриці? Які властивості визначників матриці?
5. Що таке мінор і алгебраїчне доповнення елементів матриці?
6. Яка матриця називається оборотною? Як знайти оборотну матрицю?
7. Що таке ранг матриці? Які перетворення не змінюють ранг матриці? Як обчислити ранг матриці
8. Що таке характеристичний поліном матриці?
9. Що таке комплексне число та уявна одиниця?
10. Які відомі форми комплексного числа?
11. Що таке модуль і аргумент комплексного числа? Напишіть формулу Ейлера.
12. Які відомі дії над комплексними числами?
13. Як знайти суму двох комплексних чисел?
14. Як знайти добуток двох комплексних чисел?
15. Як поділити два комплексних числа?
16. Що таке комплексно спряжено число?
17. Як знайти логарифм комплексного числа?
18. Як підвищити комплексно число до степеня (формула Муавра)?
19. Як добути корінь із комплексного числа?

ТЕМА 2. АЛГЕБРАЇЧНІ РІВНЯННЯ

2.1. Матричні рівняння

Основною задачею лінійної алгебри, як одного із розділів математики, є дослідження рівнянь та пошук універсальних методів їх розв’язання.

Алгебраїчним рівнянням називається рівняння виду $\mathrm{P_n}(x_1, x_2, ..., x_k) = 0$, де P – багаточлен порядку *n*, а $x_1, x_2, ..., x_k$ – невідомі. Алгебричні рівняння з одним невідомим степеня *n*, можна записати у вигляді:

$$a_n x^n + a_{n\text{-}1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = 0 \text{ або } \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0.$$

Якщо невідомою є матриця, то маємо матричне рівняння. Розглянемо докладніше матричні рівняння першого порядку, тобто при $n = 1$. В загальному вигляді такі рівняння можна записати так

$$A \cdot X = B \quad \text{або} \quad X \cdot A = B.$$

Тут враховується, що для матриць $A \cdot X \neq X \cdot A$.

Покажемо, як можна розв’язати такі рівняння.

Нехай матриця *A* – не нульова квадратна матриця з $\det(\mathrm{A}) \neq 0$.

Помножимо праву і ліву частини рівняння на оборотну матрицю A^{-1}:

$$A^{-1} A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \text{і} \quad X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A \cdot A^{-1}.$$

Матриця помножена на свою оборотну матрицю дає одиничну матрицю:

$$X = A^{-1} \cdot B \quad \text{і} \quad X = B \cdot A^{-1}.$$

Якщо матриця *A* прямокутна розміром $m \times n$, то для розв’язання рівняння використовують псевдооборотну матрицю, вивчення яких не входить в даний курс. Покажемо тільки, що розв’язок рівняння $A \cdot X = B$ буде наступним

$X = A^{+} \cdot B$, де A^{+} – псевдооборотна матриця:

$m = n = \mathrm{rank}(A)$, то $A^{+} = A^{-1}$;

$m > \mathrm{n} = \mathrm{rank}(A)$, то $A^{+} = (A^T A)^{-1} A^T$;

$\mathrm{rank}(A) = m < n$, то $A^{+} = A^T (A A^T)^{-1}$.

Приклад розв’язання матричного рівняння:

Нехай задано рівняння $A \cdot X = B$, де

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Відповідно $m < n$, rank $A = 2$.

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 21 \end{pmatrix};$$

$$\det AA^T = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 21 \end{vmatrix} = 69; \qquad \left(AA^T\right)^{-1} = \frac{1}{69}\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix};$$

$$A^+ = A^T\left(AA^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{69}\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{69}\begin{pmatrix} -3 & 14 \\ 12 & -10 \\ 36 & -7 \end{pmatrix};$$

$$X = A^+ B = \frac{1}{69}\begin{pmatrix} -3 & 14 \\ 12 & -10 \\ 36 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{69}\begin{pmatrix} 31 & 14 & 36 \\ -32 & -10 & -6 \\ -50 & -7 & 51 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{69}\begin{pmatrix} 31 & 14 & 36 \\ -32 & -10 & -6 \\ -50 & -7 & 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = B.$$

2.2. Квадратичні форми

Квадратичною формою $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від n змінних називається сума, кожен член якої є або квадратом однієї із змінних, або добутком двох різних змінних з деяким коефіцієнтом:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j .$$

Коефіцієнти квадратичної форми a_{ij} створюють матрицю квадратичній форми A. Квадратичну форму можна записати у вигляді $X^T \cdot A \cdot X$. Таким чином, ми отримали ще один частинний випадок матричних рівнянь: $X^T \cdot A \cdot X = B$, які відносяться до рівнянь другого порядку і виходять за рамки розгляду дисципліни.

2.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь є частинним випадком лінійних алгебраїчних рівнянь для випадку, коли невідома матриця являється матрицею стовбцем.

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з n невідомими – це система рівнянь виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

де коефіцієнти a_{ij}, b_i – відомі величини, а x_i – невідомі.

Запис СЛАР зручний в *матричній формі*:

$$AX = B \text{ або } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

де матриця *A* – *матриця системи рівнянь*, *B* – *матриця-стовпець вільних членів* системи рівнянь, *X* – невідома матриця-стовпець. Додатково запроваджують поняття *розширеної матриці* A|B – матриця системи рівнянь з добавленим стовпцем вільних членів.

СЛАР класифікуються по матриці вільних членів *B*:

1) Однорідна СЛАР – матриця *B* є нульовою;

2) Неоднорідна СЛАР – хоч один елемент матриці *B* відмінний від нуля.

Розв'язок СЛАР – набір елементів x_i невідомої матриці *X*, підстановка яких в кожне із рівнянь системи перетворює їх в тотожність.

Якщо система рівнянь має розв'язок, то вона *сумісна*.

Критерієм існування розв'язання СЛАР є теорема Кронекера-Капеллі.

Теорема Кронекера-Капеллі: система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг її основної матриці дорівнює рангу її розширеної матриці, причому система має єдине розв'язок, якщо ранг цих матриць дорівнює числу невідомих, і нескінченну безліч розв'язань, якщо ранг цих матриць менше числа невідомих. $rangA = rangA \mid B$.

Таблиця 1.

Існування розв'язань СЛАР

Рівняння	$\boldsymbol{AX = B}$	$\boldsymbol{AX = 0}$
$rangA = rangA \mid B = n$	Розв'язок єдиний	Розв'язок тривіальний
$rangA = rangA \mid B < n$	Розв'язок не єдиний	
$rangA \neq rangA \mid B$	Розв'язок не існує	–

У випадку якщо розв’язок СЛАР не єдиний розрізняють наступні типи розв’язків:

1) Загальний розв'язок – розв'язок, в якому залежні невідомі елементи виражені через незалежні елементи, число яких дорівнює $rangA = rangA \mid B$;

2) Частинний розв'язок – загальний розв'язок, в якому незалежні елементи приймають будь-яке значення;

3) Базисне розв'язок – загальний розв'язок, в якому незалежні елементи приймають значення 0;

4) Фундаментальна система розв'яззків – набір лінійно незалежних розв'язків однорідної системи рівнянь.

Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Метод Крамера

Метод Крамера заснований на теоремі Крамера і застосовується тільки для неоднорідних СЛАР, в яких число невідомих збігається з кількістю рівнянь.

Терема Крамера (правило Крамера): Якщо в неоднорідній системі *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими визначник матриці системи відмінний від нуля, то система має розв'язок і причому єдиний. Цей розв'язок задається формулами: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, де $\Delta = detA$ – визначник матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, Δ_i – визначник матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, в якій *i*-стовпець замінений матрицею-стовпцем вільних членів *B*.

Матричний метод

Матричний метод можна використовувати, як і метод Крамера для розв’язання неоднорідних СЛАР, в яких число невідомих збігається з кількістю рівнянь. Припустимо, що для матриці системи рівнянь *A* існує оборотна матриця A^{-1}. Тоді,

$$AX = B; \qquad XA = B;$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B; \qquad XAA^{-1} = BA^{-1};$$

$$X = A^{-1}B; \qquad X = BA^{-1}.$$

Метод Гауса

Метод Гауса – класичний метод розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Це метод послідовного виключення змінних, коли за допомогою елементарних перетворень система рівнянь приводиться до рівносильної системи трикутного виду, із якої послідовно, починаючи з останніх (по номеру) змінних, знаходиться вся решта змінних.

$$A \mid B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \sim H = \left(\begin{array}{ccccccc|c} h_{11} & h_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & h_{1n} & d_1 \\ 0 & h_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & h_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{rr} & \cdots & h_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + \cdots + h_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad\quad h_{22}x_2 + \cdots + h_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ \qquad\quad h_{rr}x_r + \cdots + h_{rn}x_n = d_r \end{cases}$$

$$x_r = \frac{1}{h_{rr}} \cdot \left(d_r - h_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - h_{rn}x_n\right)$$

$$x_i = \frac{1}{h_{ii}} \cdot \left(d_i - \sum_{j=i+1}^{n} h_{ij}x_j\right)$$

Метод Гауса можна використовувати для вирішення як однорідних, так і неоднорідних СЛАР.

Приклади розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

1. Методом Гауса розв'язати систему рівняння

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 16 \\ 2 & 1 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 16 \\ 0 & 5 & 2 & 16 \\ 0 & 7 & 8 & 38 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 16 \\ 0 & 5 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & -26 & -78 \end{array}\right)$$

$$x_3 = \frac{-78}{-26} = 3; \; x_2 = \frac{1}{5}(16 - 2 \cdot 3) = 2; \; x_1 = 16 - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1$$

2. Методом Крамера розв'язати систему рівняння задачі 1.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(6-3) - 3(3-12) + (1-8) = 26 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & 1 & 4 \\ 10 & 2 & 1 \\ 16 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 16\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 16\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 16(6-3) - 10(3-12) + 16(1-8) = 26;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 16 & 4 \\ 3 & 10 & 1 \\ 1 & 16 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 16 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 16 & 4 \\ 16 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 16 & 4 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = 2(30-16) - 3(48-64) + (16-40) = 52$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 16 \\ 3 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 16 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 3 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 4(16-15) - 48(1-3) + 2(5-16) = 78$$

$$x_3 = \frac{78}{26} = 3;\; x_2 = \frac{52}{26} = 2;\; x_1 = \frac{26}{26} = 1\,.$$

3. Матричним способом розв'язати систему рівняння задачі 1.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 9 & -7 \\ -8 & 2 & 10 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \text{ – оборотна матриця}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 9 & -7 \\ -8 & 2 & 10 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ 52 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Дані матриці A і B. Розв’язати систему рівнянь $AX = B$ відносно x_1, x_3, x_5. Знайти базисний і частинний розв'язок при $x_2 = x_4 = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & 0 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)_{3I+III} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right)_{3II+III} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

$rang(A) = rang(A \mid B) = 3$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 - \ x_5 = -1 \\ \quad 2x_2 + x_3 + 3x_4 + \ \ x_5 = -2; \\ \qquad -2x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \\ x_3 = -2 - 2x_2 - 3x_4 - x_5 \\ x_5 = -3 + x_3 - 2x_4 \end{cases}.$$

Загальний розв'язок: $\begin{cases} x_1 = -3 - x_4 \\ x_3 = 0{,}5 - x_2 - 0{,}5x_4 \\ x_5 = -2{,}5 - x_2 - 2{,}5x_4 \end{cases}$ Базисний розв'язок: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

Частинний розв'язок при $x_2 = x_4 = 1$:

$$\begin{cases} x_1 = -3 - 1 = -4 \\ x_3 = 0{,}5 - 1 - 0{,}5 \cdot 1 = -1 \\ x_5 = -2{,}5 - 1 - 2{,}5 \cdot 1 = -6 \end{cases}, \ X = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Фундаментальна система розв'язань:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\vec{x}^1$	–3	1	–0,5	0	–3,5
$\vec{x}^2$	–4	0	0	1	–5

або так $\vec{x}^1$=(–3, 1, –0.5, 0, –3.5) і $\vec{x}^2$=(–4, 0, 0, 1, –5)

Приклад знаходження власних значень і векторів матриці

Знайти власні числа і власні вектора матриці A. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 9) - (-2\lambda + 6) + (6 - 2\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 9) = 0$$

$1 - \lambda = 0;\ (\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0;\quad \lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = -3;\ \lambda_3 = 3$.

Координати власного вектора, відповідного числу λ_1:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda_1 & 3 \\ 1 & 3 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2z_1 \\ y_1 = z_1 \end{cases}.$$

Нехай $z_1 = 1$. Тоді координати власного вектора X, відповідного λ_1=1 буде наступним X = (–2, 1, 1).

Координати власного вектора, відповідного числу λ_2:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda_2 & 3 \\ 1 & 3 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x_2 = 1.2z_2 \\ y_2 = -1.4z_2 \end{cases}.$$

Нехай $z_2 = 5$. Тоді координати власного вектора, відповідного $\lambda_2 = -3$ є X = (6, –7, 5)

Координати власного вектора, відповідного числу λ_3:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_3 & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda_3 & 3 \\ 1 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = z_3 \end{cases}.$$

Нехай $z_3 = 1$. Тоді координати власного вектора, відповідного λ_3=3 є X = (0, 1, 1)

Задачі до теми системи лінійних рівнянь

При яких значеннях λ системи рівнянь мають єдиний розв’язок?

2.1. $\begin{cases} 6\lambda x_1 + 2x_2 = 5 \\ 9x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 = 3 \\ 8x_1 + 4\lambda x_2 = 9 \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} \lambda^2 x_1 + 3\lambda x_2 = 4 \\ 3x_1 + \lambda x_2 = 6 \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 9x_1 - 3\lambda x_2 = 1 \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + \lambda x_3 = 3 \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$

Розв’язати систему рівнянь матричним способом і методом Крамера.

2.7. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 8 \\ 6x_1 + 5x_2 = -8 \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 = 3 \\ 7x_1 - 2x_2 = 13 \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

Методом Гауса розв’язати системи рівнянь.

2.15. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 - 2 = 0 \end{cases}$

Знайти загальний і всі базисні розв'язки систем рівнянь.

2.21. $\begin{cases} x_1+3x_2=14 \\ 2x_1-3x_2-3x_3=7 \\ 2x_1-x_3=21 \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5 \\ 2x_1+x_2+x_3=8 \\ x_1+2x_2+2x_3=7 \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} 3x_1+x_2-9x_3=4 \\ x_1-3x_3+x_4=2 \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+3x_4=16 \\ -x_1+x_2+3x_3-x_4=8 \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} x_1+x_2+5x_3+x_4=24 \\ 3x_1-x_2-3x_3+x_4=0 \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} 4x_1+x_2-12x_3+x_4=6 \\ 2x_1+x_2-6x_3-x_4=2 \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} 7x_1-4x_2-4x_3+x_4=-1 \\ 5x_1-4x_3-x_4=5 \\ -x_1+2x_2-x_4=3 \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} 5x_1+x_2-x_3=2 \\ 10x_1+2x_2-x_3=7 \\ 5x_1+x_2+x_3=8 \end{cases}$

Знайти загальний і будь який частинний розв'язки:

2.29. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=5 \\ 2x_1-x_2-3x_3=-4 \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3-2x_4=-4 \\ x_1+x_2-x_3+2x_4=1 \end{cases}$

2.31. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4=1 \\ 4x_1-6x_2+2x_3+3x_4=2 \\ 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4=1 \end{cases}$

2.32. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2 \\ 2x_1+2x_2-x_3+2x_4=-2 \\ x_1-x_2-x_4=2 \end{cases}$

2.33. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=2 \\ 2x_1-x_2+3x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+x_2+x_3-2x_4=4 \\ 5x_1+2x_2-x_4=6 \end{cases}$

2.34. $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3+x_4+2x_5=-5 \\ 2x_1+4x_2+2x_3-2x_4+2x_5=1 \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=11 \\ x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=4 \end{cases}$

2.35. Знайти загальний розв'язок систем алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1+x_2+x_4=2 \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4=0 \end{cases}$

при незалежних x_1 і x_2

б) $\begin{cases} x_1-7x_2+x_3+x_4=28 \\ 5x_1-9x_2-x_3+x_4=20 \end{cases}$

при незалежних x_1 і x_3

в) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4=1 \\ 4x_1-6x_2+2x_3+3x_4=2 \\ 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4=1 \end{cases}$

при незалежних x_2 і x_3

г) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2 \\ 2x_1+2x_2-x_3+2x_4=-2 \\ x_1-x_2-x_4=2 \end{cases}$

при незалежному x_2

2.36. Знайдіть фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1+x_2-5x_3-7x_4=0 \\ 2x_1+x_2+4x_3+x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-x_3-6x_4=0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2-2x_3+2x_4=0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$

2.37. Знайдіть загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків системи однорідних рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$

2.38. Чи утворюють рядки матриць

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальну систему розв'язків системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Знайти власні числа і відповідні їм вектора матриць

2.39. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

2.40. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

2.41. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

2.42. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

2.43. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

2.44. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

2.45. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.46. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

2.47. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.48. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Дані вектора X_1, X_2, X_3 і матриця A. Визначити, які вектора є власними векторами. Знайти власні числа матриці A.

2.49. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; X_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$

2.50. $A = \begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

2.51. $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}; X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Контрольні питання

1. Що таке матричне рівняння?
2. Як розв’язати матричне рівняння $A \cdot X = B$ та $X \cdot A = B$, якщо A – квадратна?
3. Що таке система лінійних алгебраїчних рівнянь?
4. Яка система називається однорідною і неоднорідною?
5. Що називається розв’язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
6. Що таке загальний, частинний, базисний розв’язки?
7. Що таке фундаментальна система розв’язання?
8. Які системи рівнянь називаються сумісними і несумісними?
9. В чому суть теореми Кронекера – Капели?
10. Які існують методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь і в чому їх суть?
11. В чому суть метода Крамера?
12. В чому суть матричного метода?
13. В чому суть метода Гауса
14. Яким методом можна розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь у якої ранг матриці системи менше кількості невідомих?
15. Яким методом можна знайти нетривіальний розв’язок, якщо він є, однорідної системи алгебраїчних рівнянь.
16. Як знайти оборотну матрицю.
17. Що таке характеристичний поліном матриці?
18. Які числа є власними даної матриці? Як їх знайти
19. Що таке власні вектора матриці? Як їх знайти

ТЕМА 3. ВЕКТОРИ

3.1. Лінійний простір. Вектор

Лінійність представляє дуже загальне і найпростіше поняття. Це як би перша сходинка залежності однієї групи чисел від іншої: лінійні алгебраїчні поняття; лінійні диференціальні рівняння та інше. Що ж спільного у всіх лінійних моделях? Що ж таке – лінійність? Всі лінійні моделі мають властивості *адитивності* і *гомогенності*.

Адитивність означає, що якщо змінна величина x_1 призводить ефект α_1 при її одиночному використанні і змінна величина x_2 призводить ефект α_2 при її одиночному використанні, то змінні величини x_1 і x_2 при їх спільному використанні призводять ефект $\alpha_1+\alpha_2$.

Гомогенність означає, що якщо змінна величина x_1 призводить ефект α_1, то при будь-якому дійсному числі λ змінна λx_1 призводить ефект $\lambda\alpha_1$.

З математичної точки зору, лінійні моделі добре вивчені, легкі в обігу, достатньо прості. Проте однак переважна більшість явищ або не лінійні, або лінійні за певних умов. А це означає, що всі лінійні математичні моделі, що описують ті або інші явища, являються лише першим наближенням до реальності.

Розглянемо поняття лінійності докладніше.

Лінійний простір L. Безліч L елементів будь-якої природи називається *лінійним* (або *афінним*) простором, якщо для цієї множини визначені:

1) Операція суми елементів, тобто кожній парі елементів x і y із L поставлений у відповідність певний елемент z із Lтакій, що $z = x + y$;

2) Операція добутку елементів на скалярне число λ (у тому числі і комплексне), тобто кожному елементу x із L і числу λ поставлено у відповідність певний елемент y із L такій, що $y = \lambda x$.

А також вказані операції задовольняють наступним вимогам (*аксіоми лінійного простору*):

1) $x + y = y + x$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) Існує нульовий елемент 0 такий, що $x + 0= x$;

4) Існує протилежний елемент $\bar{x}$ такої, що $x+\bar{x}=0$;

5) Існує елемент одиниця такої, що $1\cdot x = x$;

6) Для будь-яких дійсних чисел α і β $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

8) $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Підкреслимо, що при введенні поняття лінійного простору ми абстрагуємося не тільки від природи об'єктів, що вивчаються, але і від конкретного виду правил утворення суми елементів і добутку елемента на число (важливо лише, щоб ці правила задовольняли восьми аксіомам, сформульованим в даному вище визначенні).

Якщо ж природа об'єктів, що вивчаються, і правила утворення суми елементів і добутку елементу на число вказані, то такий лінійний простір називається конкретним.

Лінійний простір над полем комплексних чисел називається комплексним лінійним простором, а над полем дійсних чисел – дійсним лінійним простором.

Прикладом конкретних просторів може служити безліч всіх вільних векторів в трьохмірному просторі, безліч впорядкованих дійсних чисел, безліч всіх функцій $x(t)$ визначених і безперервних в інтервалі $a \le t \le b$.

З поняттям лінійного простору дуже тісно зв'язано поняття вектора. Вектор в «вищій алгебрі» має більш ширше значення, ніж направлений відрізок.

Вектор – це будь-який елемент лінійного простору.

3.2. Лінійна залежність і незалежність векторів. Базис

Елементи $x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n$ простору L називаються *лінійно залежними*, якщо знайдуться такі дійсні числа $a_1, a_2, a_3,\ldots, a_n$, з яких хоч би одне відмінно від нуля, що лінійна комбінація елементів $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ з вказаними коефіцієнтами є нульовим елементом простору L, тобто має місце рівність $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = 0$ або $\sum_{i=1}^{n} a_ix_i = 0$, якщо хоч би один $a_i \neq 0$.

Елементи $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ простору L називаються *лінійно незалежними*, якщо лінійна комбінація цих елементів є нульовим елементом простору L лише при умові, що дійсні числа $a_1, a_2, a_3,\ldots, a_n$ рівні нулю, тобто має місце рівність

$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i = 0$ при умові, що всі $a_i = 0$

Для того, щоб елементи $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ простору L були лінійно залежні, необхідне і достатньо, щоб один з цих елементів був лінійною комбінацією решти елементів.

Введемо поняття *базису*.

Базис – сукупність лінійно незалежних елементів e_1, e_2, e_3,…, e_n простору L називається *базисом* цього простору, якщо для кожного елементу x простору L знайдуться дійсні числа x_1, x_2, x_3,…, x_n такі, що справедливо рівність

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x$$

При цьому така рівність називається *розкладанням елементу по базису* e_1, e_2, e_3,…, e_n, а числа x_1, x_2, x_3,…, x_n називаються *координатами елементу* (*вектору*) x (відносно базису e_1, e_2, e_3,…, e_n).

Лінійний простір характеризується *розмірністю*

Лінійний простір L називається *n-мірним*, якщо в ньому існує n лінійно незалежних елементів, а будь-які (n + 1) елементів вже є лінійно залежними. При цьому число n називається *розмірністю простору L*.

Тобто *розмірність лінійного простору L* визначається максимальним числом лінійно незалежних елементів цього лінійного простору. Розмірність простору позначається $dim\ L = n$.

Можливі випадки нескінченномірних просторів.

Лінійний простір L називається *нескінченномірним*, якщо в ньому існує будь-яке число лінійно незалежних елементів.

Справедливо таке важливе ствердження.

Якщо L – лінійний простір розмірності n, то будь-які n лінійно незалежних елементів цього простору утворюють його базис.

Використовуючи розкладання вектора по базису можна ввести операцію суми векторів і добутку вектора на число.

3.3. Операції над векторами

Сума векторів і добуток вектора на скаляр

Нехай дані два вектори x і y з координатами $\{x_1, x_2, x_3,…, x_n\}$ і $\{y_1, y_2, y_3,…, y_n\}$ в базисі $\{e_1, e_2, e_3,…, e_n\}$.

Сумою векторів x і y є вектор z, координати якого обчислюються як сума відповідних координат векторів x і y:

$$z = x + y = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) e_i$$

Добутком вектора x на скаляр λ (будь-яке дійсне число) є вектор z, координати якого обчислюються як добуток λ на відповідні координати вектора x:

$$z = \lambda x = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i e_i$$

Операція суми векторів і добутку вектора на скаляр повністю задовольняє аксіомам лінійності і повністю співпадає з такими ж операціями для матриць.

Евклідовий простір. Скалярний добуток векторів.

Розглянуті лінійні простори, в деякому розумінні, бідніше за властивостями, чим наш звичайний простір. Такі поняття, як довжина відрізка і величина кута, не знайшли відображення в загальній теорії лінійних просторів. Якщо ми хочемо, щоб загальна теорія охоплювала найбільш суттєві властивості звичайного простору, ми повинні, окрім операцій суми векторів і добутку їх на число, ввести ще операцію скалярного добутку.

Простір в яких існує скалярний добуток є *евклідовим простором*.

Означення дійсного евклідова простору. Дійсний лінійний простір L називається *дійсним евклідовим простором* (або просто *евклідовим простором*), якщо виконані такі дві вимоги.

I. Є правило, за допомогою якого будь-яким двом елементам цього простору x і y ставиться у відповідність дійсне число, зване скалярним добутком цих елементів і що позначається символом (x, y).

II. Вказане правило підпорядковане наступним чотирьом аксіомам:

1) $(x, y) = (y, x)$ (властивість переміщення або симетрія).

2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ (розподільна властивість).

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для будь-якого дійсного λ.

4) $(x, x) > 0$, якщо x – ненульовий елемент і $(x, x) = 0$, якщо x – нульовий елемент.

Підкреслимо, що при введенні поняття евклідова простору ми абстрагуємося не тільки від природи об'єктів, що вивчаються, але і від конкретного виду правил утворення суми елементів, добутку елементу на число і скалярного добутку елементів (важливо лише, щоб ці правила задовольняли восьми аксіомам лінійного простору і чотирьом аксіомам скалярного добутку).

Способи позначення – $(\vec{x}, \vec{y})$, $(\vec{x}\ \vec{y})$, $(\vec{x} \cdot \vec{y})$, $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

Якщо ж природа об'єктів, що вивчаються, і вид перерахованих правил вказані, то евклідовий простір називається *конкретним*.

Прикладом конкретних *евклідових* просторів може служити простір вільних векторів або нескінченномірний лінійний простір всіх функцій $x(t)$, визначених і безперервних в інтервалі $a \le t \le b$ з скалярним добутком $\int\limits_a^b x(t)y(t)dt$

Важливою властивістю евклідових просторів є його *нормування*.

Лінійний простір L називається *нормованим*, якщо виконані такі дві вимоги.

I. Є правило, за допомогою якого кожному елементу x простору L ставиться у відповідність дійсне число, зване *нормою* (або *довжиною*) вказаного елементу і що позначається символом $|x|$ або $||x||$.

II. Вказане правило підпорядковане наступним аксіомам:

1) $|x| > 0$, якщо x – ненульовий елемент і $|x| = 0$, якщо x – нульовий елемент
2) $|\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|$ для будь-якого елементу x і будь-якого дійсного числа λ.
3) Для будь-яких двох елементів x і y справедлива нерівність Мінковського $|x+y| \le |x| + |y|$.

При цьому справедливо таке ствердження.

Всякий евклідовий простір є нормованим, якщо в ньому норму будь-якого елементу x визначити рівністю $|x| = \sqrt{(x,x)}$

Норма (довжина) вектора дає можливість ввести поняття *кута* між векторами x і y.

Кут φ між векторами x і y визначається співвідношенням:

$$\cos(\varphi) = \frac{(x,y)}{|x||y|}$$

Умова ортогональності (перпендикулярності) векторів – $(x,y)=0$

Властивість ортогональності є зручною для обчислень і аналізу. Тому вектора, як правило, представляють за допомогою ортонормованих базисів (ортогональних і нормованих). У ортонормованому базисі кожний з лінійно незалежних векторів цього базису перпендикулярний до всієї решти векторів цього базису і має довжину 1.

Дотепер ми абстрагувалися не тільки від природи об'єктів, що вивчаються, але і від конкретного виду правила утворення скалярного добутку елементів.

Визначимо це правило, як правило, добутку матриць, тобто обмежимо евклідовий простір множеною матриць.

Тоді для векторів x і y з координатами $\{x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n\}$ і $\{y_1, y_2, y_3,\ldots, y_n\}$ справедливі такі формули.

1. *Сума векторів x* і *y*: $z = x + y = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) e_i$.

2. *Добуток вектора x на скаляр λ*: $z = \lambda x = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i e_i$.

3. *Скалярний добуток векторів x* і *y*: $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$.

4. Норма (довжина) вектора: $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

5. Косинус кута між векторами:

$$\cos(\varphi) = \frac{(x,y)}{|x||y|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}.$$

6. Координати x_i вектора x, що з'єднує точку A з координатами $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ з точкою B з координатами $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$: $x_i = b_i - a_i$.

Векторний добуток векторів

У багатьох задачах інженерії і фізики потрібно мати можливість «будувати» вектор, перпендикулярний двом існуючим. Цю можливість надає *векторний добуток* векторів.

Векторний добуток – це псевдовектор, перпендикулярний площині, побудованій по двох співмножниках і що є результатом операції «векторний добуток» над векторами в трьохмірному або семимірному евклідовому просторі.

Обмежимося розглядом трьохмірного простору з базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Нехай дані два вектори $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_2\vec{e}_3$ і $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_2\vec{e}_3$.

Тоді *векторним добутком* $[\vec{x}, \vec{y}]$ *векторів* $\vec{x}$ *і* $\vec{y}$ *називатиметься вектор, що обчислюється за формулою*:

$$\vec{z} = [\vec{x}, \vec{y}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

При цьому модуль (довжина або норма) вектора $\vec{z}$:

$$|\vec{z}| = |[\vec{x}, \vec{y}]| = |\vec{x}||\vec{y}|\sin(\varphi),$$

де φ – кут між векторами $\vec{x}$ *і* $\vec{y}$.

Способи позначення – $[\vec{x}, \vec{y}]$, $[\vec{x}\ \vec{y}]$, $[\vec{x} \cdot \vec{y}]$, $[\vec{x} \times \vec{y}]$, $\vec{x} \times \vec{y}$, $(\vec{x} \times \vec{y})$.

Властивості векторного добутку векторів:

1) $[\vec{x}, \vec{y}] = -[\vec{y}, \vec{x}]$ антикомутативність;

2) $[\lambda\vec{x}, \vec{y}] = [\vec{x}, \lambda\vec{y}] = \lambda[\vec{x}, \vec{y}]$ – асоціативність;

3) $[\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}] = [\vec{x}, \vec{z}] + [\vec{y}, \vec{z}]$ – дистрибутивність;

4) $[\vec{x}, \vec{x}] = 0$ – умова колінеарності;

5) $[\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]] = \vec{y}(\vec{x}, \vec{z}) - \vec{z}(\vec{x}, \vec{y})$ тотожність Лагранжа;

6) $[[\vec{x},\vec{y}],\vec{z}]+[[\vec{y},\vec{z}],\vec{x}]+[[\vec{z},\vec{x}],\vec{y}]=0$ – тотожність Якобі;

7) $[\vec{x},\vec{y}]^2+(\vec{x},\vec{y})^2=|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2$

8) $([\vec{x},\vec{y}],\vec{z})=(\vec{x},[\vec{y},\vec{z}])$ – властивість змішаного добутку векторів.

Для ортонормованого базису декартової системи координат $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ будь-який вектор $\vec{a}$ можна представити, як $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, де a_x, a_y, a_z проекції вектора $\vec{a}$ на вісь X, Y і Z. Тоді векторний добуток $[\vec{a},\vec{b}]$ прийме вид:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

Умова колінеарності векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$: $[\vec{a},\vec{b}]=0;\ \dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$: $S=\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|$.

Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$: $S=\dfrac{1}{2}\cdot\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|$.

Змішаний добуток векторів

Змішаний добуток векторів: $([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$.

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$ $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$: $V=\left|([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c})\right|$

Об'єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}$ $\vec{b}$ і $\vec{c}$: $V=\dfrac{1}{6}\cdot\left|([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c})\right|$.

Умова компланарності векторів $\vec{a}$ $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$: $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=0$.

Властивості змішаного добутку векторів:

$([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c})=(\vec{a}\cdot[\vec{b}\times\vec{c}])$;

$([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c})=-([\vec{b}\times\vec{a}]\cdot\vec{c})=-([\vec{c}\times\vec{b}]\cdot\vec{a})=-([\vec{a}\times\vec{c}]\cdot\vec{b})$;

$([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c})=([\vec{b}\times\vec{c}]\cdot\vec{a})=([\vec{c}\times\vec{a}]\cdot\vec{b}$;

$([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot(\vec{c}+\vec{d}))=([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c})+([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{d})$;

$([\lambda\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c})=\lambda([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c})$;

Способи позначання $([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Приклади розв'язання задач векторної алгебри

1. Задані вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Скалярний добуток векторів $(\vec{a},\vec{b}) = -2\cdot 2 + 3\cdot(-1) - 2\cdot(-1) = -3$

Кут між векторами $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{-3}{\sqrt{2+9+4}\sqrt{4+1+1}} = -\dfrac{3}{\sqrt{90}} = -\sqrt{0.1}$

$\varphi = \arccos(-\sqrt{0{,}1}) \approx 1{,}892$

2. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{2\cdot 1 + 4\cdot 2 - 6\cdot(-3)}{\sqrt{4+16+36}\sqrt{1+4+9}} = \frac{28}{\sqrt{56}\sqrt{14}} = \frac{28}{\sqrt{784}} = 1;\ \varphi = 0$$

3. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{b} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}$.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{2\cdot 4 + 3\cdot 4 - 4\cdot 7}{\sqrt{16+9+16}\sqrt{16+16+49}} = 0;\ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

4. Задані вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Знайти скалярний добуток векторів $-2\vec{a}$ і $3\vec{b}$.

$(-2\vec{a},3\vec{b}) = 4\cdot 6 - 6\cdot(-3) + 4\cdot(-3) = 30$

5. Задані точки $A(9\ -2,\ 7)$, $B(3,\ 5,\ 4)$ і $C(4,\ 6,\ 7)$. Знайти векторний добуток векторів $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$. Знайти модуль векторного добутку. Чому рівна площа трикутника, побудованого по даним точкам?

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{BA} = (9-3, -2-5, 7-4) = (6, -7,\ 3)$;

$\overrightarrow{BC} = (4-3, 6-5, 7-4) = (1, 1,\ 3)$.

Векторний добуток знайдемо по наступним чином

$$[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -7 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 6 & -7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -24\vec{i} - 15\vec{j} + 13\vec{k}$$

Довжина цього вектора буде

$$\left|[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}]\right| = \sqrt{24^2 + 15^2 + 13^2} = \sqrt{970} \approx 31{,}14$$

Площа трикутника:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}]\right| = \frac{\sqrt{970}}{2} \approx 15{,}57 .$$

6. Задані вектора $\vec{a} = -6\vec{i} - 7\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = -4\vec{i} - 5\vec{j} - 6\vec{k}$ і $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

Чи є вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарними. Якщо вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ не компланарні, то найти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Об’єм паралелепіпеда визначається змішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Умовою компланарності є рівність нулю змішаного добутку векторів.

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -7 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= 6(-5 \cdot 3 + 6 \cdot 1) + 4(-7 \cdot 3 - 1 \cdot 3) + (-7(-6) + 5 \cdot 3) = -93 \neq 0$$

Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ не є компланарними, тобто не лежать на одній площині.

Об’єм паралелепіпеда: $V = \left|([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})\right| = 93$.

7. Перевірити, що система векторів $\vec{a}_i$ складає базис і розкласти по ньому вектор $\vec{b}$

$\vec{a}_1 = (3;0;0)$; $\vec{a}_2 = (0;3;0)$; $\vec{a}_3 = (0;0;3)$; $\vec{b} = (1;-2;3)$

Перевіримо, що вектора $\vec{a}_1$ $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$ є базисом, тобто лінійно не залежні.

$\alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 + \gamma\vec{a}_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \neq 0$$

Система рівнянь має тільки тривіальне розв'язання. Вектора $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ лінійно не залежні і є базисом.

Розкладемо по цьому базису вектор $\vec{b}$: $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{b}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a}_1 - \frac{2}{3}\vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

Задачі до теми вектори

Знайти координати вектора, що з'єднує точку A з точкою B.

3.1. $A(4; -5; 2)$, $B(2; -3; 1)$

3.2. $A(7; 3; -2)$, $B(4; 3; 2)$

3.3. $A(9; 4)$, $B(3; -4)$

3.4. $A(1; 3; 5; 2)$, $B(6; 5; -1; 4)$

3.5. $A(1;0;1;3;2)$, $B(2;3;8;11;5)$

3.6. $A(4; \pi/2; \pi/6)$, $B(5; \pi; \pi/4)$

Перевірити наявність лінійної залежності системи векторів.

3.7. $\boldsymbol{X}_1=(2; -6; 2; -6)$, $\boldsymbol{X}_2=(1; 0; 1; 0)$, $\boldsymbol{X}_3=(1; -1; 1; -1)$, $\boldsymbol{X}_4=(0; -2; 5; 4)$.
3.8. $\boldsymbol{X}_1=(0; 1; 1; 2)$, $\boldsymbol{X}_2=(1; 2; 3; 1)$, $\boldsymbol{X}_3=(1; 2; 3; -4)$, $\boldsymbol{X}_4=(0; 2; 1; 1)$.
3.9. $\boldsymbol{X}_1=(1; 2; 0; -1)$, $\boldsymbol{X}_2=(2; -3; -1; 1)$, $\boldsymbol{X}_3=(0; 1; 1; 1)$, $\boldsymbol{X}_4=(-1;-1;-1;-1)$
3.10. $\boldsymbol{X}_1=(1; 0; 3; 4)$, $\boldsymbol{X}_2=(2; 1; 0; 3)$, $\boldsymbol{X}_3=(1; 0; 4; 3)$, $\boldsymbol{X}_4=(1; 2; 3; 4)$.

Знайти ранг системи векторів і зробити висновок о лінійній залежності

3.11. $\boldsymbol{X}_1=(0; 1; 1; 2)$, $\boldsymbol{X}_2=(1; 2; 3; 1)$, $\boldsymbol{X}_3=(1; 2; 3; -4)$, $\boldsymbol{X}_4=(0; 2; 1; 1)$.

3.12. $\boldsymbol{X}_1=(2; 1; 1)$, $\boldsymbol{X}_2=(2; 2; -2)$, $\boldsymbol{X}_3=(1; 0; 2)$.

3.13. $\boldsymbol{X}_1=(1; 1; 2)$, $\boldsymbol{X}_2=(1; 2; -1)$, $\boldsymbol{X}_3=(2; 2; 1)$.

3.14. $\boldsymbol{X}_1=(1; 2; 3; 1)$, $\boldsymbol{X}_2=(2; 0; 2; 0)$, $\boldsymbol{X}_3=(3; 2; 5; 1)$, $\boldsymbol{X}_4=(1; 0; 1; -2)$.

3.15. $\boldsymbol{X}_1=(2; -1; 3; -2; 4)$, $\boldsymbol{X}_2=(-4; -2; 5; 1; 7)$, $\boldsymbol{X}_3=(2; -1; 1; 8; 2)$.

Знайти ранг і всі базиси системи векторів.

3.16. $\boldsymbol{X}_1=(3; 5; 7)$, $\boldsymbol{X}_2=(1; 2; 3)$, $\boldsymbol{X}_3=(1; 3; 5)$, $\boldsymbol{X}_4=(1; 1; 1)$.

3.17. $\boldsymbol{X}_1=(1; 2; 0; 0)$, $\boldsymbol{X}_2=(1; 2; 3; 4)$, $\boldsymbol{X}_3=(3; 6; 0; 0)$.

3.18. $\boldsymbol{X}_1=(1; 2; 3; 4)$, $\boldsymbol{X}_2=(2; 3; 4; 5)$, $\boldsymbol{X}_3=(3; 4; 5; 6)$, $\boldsymbol{X}_4=(4; 5; 6; 7)$.

3.19. $\boldsymbol{X}_1=(1; 1; 2; 3)$, $\boldsymbol{X}_2=(0; 1; 2; 1)$, $\boldsymbol{X}_3=(1; 0; 1; 1)$, $\boldsymbol{X}_4=(2; 1; 0; 0)$.

3.20. Вектор $\boldsymbol{X}=(6; -1; 3)$, заданий в базисі $\boldsymbol{E}=(e_1; e_2; e_3)$. Знайти його координати в базисі $\boldsymbol{F}=(f_1; f_2; f_3)$, якщо базиси зв'язані співвідношеннями: $f_1= e_1+e_2+2e_3$; $f_2= 2e_1-e_2+2e_3$; $f_3=-e_1+e_2+e_3$.

3.21. Вектор $\boldsymbol{X}=(-1; 7; 14)$, заданий в базисі $\boldsymbol{E}=(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. Знайти його координати в базисі $\boldsymbol{F}=(\vec{f}_1;\vec{f}_2;\vec{f}_3)$, якщо базиси зв'язані співвідношеннями: $\vec{f}_1=\vec{i}+8\vec{j}/7-\vec{k}$; $\vec{f}_2=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{f}_3=8\vec{i}+\vec{k}$.

3.22. Вектор $\boldsymbol{X}=(2; 4; 3)$, заданий в базисі $\boldsymbol{E}=(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. Знайти його координати в базисі $\boldsymbol{F}=(\vec{f}_1;\vec{f}_2;\vec{f}_3)$, якщо базиси зв'язані співвідношеннями: $\vec{f}_1=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$; $\vec{f}_2=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$; $\vec{f}_3=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

Знайти норму векторів.

3.23. $\vec{a}$=(0; 7; –1) 3.24. $\vec{b}=3\vec{i}-4\vec{j}$

3.25. $\vec{c}=-2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ 3.26. **X** = (–2; 2; 6; 1)

3.27. $\vec{d}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ 3.28. **Y** = (1; 8; –4)

Знайти відстань між точками.

3.29. ***A***(–13; –8; 2), ***B***(12; 2; 0) 3.30. ***A***(7; –5; 5), ***B***(1; –1; 12)

3.31. ***A***(–10; –4; –5), ***B***(–6; –12; 8) 3.32. ***A***(–9; 11; –7), ***B***(–9; 2; 12)

3.33. ***A***(–9; –5; –4), ***B***(–10; –3; –10) 3.34. ***A***(8; –11; 3), ***B***(–1; –2; 3)

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ складає φ. Обчислити скалярний добуток $\vec{a}$ і $\vec{b}$

3.35. $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $\varphi=0$ 3.36. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\varphi=\pi/3$

3.37. $|\vec{a}|=7$, $|\vec{b}|=9$, $\varphi=\pi/2$ 3.38. $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$, $\varphi=3\pi/4$

3.39. $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $\varphi=5\pi/4$ 3.40. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\varphi=\pi/6$

Обчислити скалярний добуток векторів.

3.41. $\vec{a}$=(4; –3) і $\vec{b}$=(2; 1) 3.42. $\vec{a}$=(5; –4) і $\vec{b}$=(3; 8)

3.43. $\vec{a}$=(1; –3; 4) і $\vec{b}$=(5; 1; 2) 3.44. $\vec{a}$=(6; –2; 1) і $\vec{b}$=(1; 8; –3)

3.45. **X**$=\vec{i}-\vec{j}+6\vec{k}$ і **Y**$=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ 3.46. **X**=(1; 3; 5; 7) і **Y**=(3; 4;–2; 1)

Знайти кут між векторами **a** і **b**, які задані своїми координатами

3.47. **a**(1; –1; 1), **b**(–2; 2; –2) 3.48. **a**(1; –1; 1), **b**(3; –3; 3)

3.49. **a**(3; 1; –2), **b**(1; –1; 1) 3.50. **a**(–1; 1; 0), **b**(1; –2; 2)

3.51. **a**(–2; 1; 1), **b**(1; 2; 3) 3.52. **a**(2; –5; 1), **b**(–3; 1; 4)

Знайти скалярний добуток між векторами **a** і **b**, якщо

3.53. |**a**| = 3; |**b**| = 1; ∠(**a**, **b**) = 45 3.54. |**a**| = 6; |**b**| =7 ; ∠(**a**, **b**) = 120

3.55. |**a**| = 4; |**b**| = 2; ∠(**a**, **b**) = 90 3.56. |**a**| = 5; |**b**| = 1; ∠(**a**, **b**) = 0

3.57. |**a**| = 2; |**b**| = 3; ∠(**a**, **b**) = π 3.58. |**a**| = 3; |**b**| = 4; ∠(**a**, **b**) =3π/2

Дано три вектори **a** (1, –1, 1), **b**(5, 1, 1) і **c**(0, 3, –2). Обчислити вирази.

3.59. **b**·(**a**, **c**) – **c**·(**a**, **b**) 3.60. $|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{c}|^2-(\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b},\mathbf{c})$

3.61. $(\mathbf{a},\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a},\mathbf{b})-|\mathbf{a}|^2\cdot(\mathbf{b},\mathbf{c})$ 3.62. $|\mathbf{b}|^2+(\mathbf{b},\mathbf{a}+3\cdot\mathbf{c})$

Знайти довжину вектора **a** × **b**.

3.63. |**a**| = 3; |**b**| = 1; ∠(**a**, **b**) = 0 3.64. |**a**| = 4; |**b**| = 7 ; ∠(**a**, **b**) = 135°

3.65. |**a**| = 2; |**b**| = 3; ∠(**a**, **b**) = – 30° 3.66. |**a**| = 5; |**b**| = 2; ∠(**a**, **b**) = 5π/3

3.67. |**a**| = 7; |**b**| = 1; ∠(**a**, **b**) = 7π/6 3.68. |**a**| = 1; |**b**| = 3; ∠(**a**, **b**) =3π/2

Знайти векторний добуток між векторами **a** і **b**, які задані своїми координатами.

3.69. **a**(1; 2; 3), **b**(3; 2; 4)
3.70. **a**(–3; 1; 4), **b**(2; –1; 3)
3.71. **a**(3; 1; –1), **b**(–3; –1; 1)
3.72. **a**(1; 5; 2), **b**(1; 0; 3)
3.73. **a**(1; 4; 2), **b**(2; –2; 3)
3.74. **a**(–3; 2; 3), **b**(1; –2; 3)

Знайти змішаний добуток векторів **a**, **b** і **c**, які задані своїми координатами.

3.75. **a**(11;6;5),**b**(–5;–5;–11),**c**(10;–8;–10)
3.76. **a**(–1;–1; 0), **b**(4; 2;–13), **c**(–11; 9; 6)
3.77. **a**(4; 2; –2), **b**(0; –9; 7), **c**(9; 10; –5)
3.78. **a**(11; 11;–9), **b**(2; 12; 3), **c**(–6;–3; 8)
3.79. **a**(–9; 8; 3), **b**(–11;5;–10), **c**(–7;11;5)
3.80. **a**(–9;13;–9),**b**(–13;0;2),**c**(–9;–2;–12)

Знайти площу трикутника побудованого на точках A, B і C.

3.81. $A(7; 7; -7)$, $B(10; 5; -3)$, $C(-2;-8;2)$
3.82. $A(4;-4;-12)$,$B(-9;-5;-8)$,$C(-1;-2;2)$
3.83. $A(7; 0; 9)$, $B(12; 2; 0)$, $C(10; 8; 13)$
3.84. $A(-2;9;4)$,$B(-11;10;-5)$,$C(-12;-2;-12)$
3.85. $A(2; -7; 8)$, $B(-3; 5; -12)$, $C(-5; 3; 9)$
3.86. $A(-9;13;-9)$,$B(-13;0;2)$,$C(-9;-2;-12)$

Знайти об'єм піраміди побудованої на точках A, B,C і D.

3.87. $A(-13; -8; 2)$, $B(12; 2; 0)$, $C(-9; 13; -9)$, $D(-9; -2; -12)$
3.88. $A(7; -5; 5)$, $B(1; -1; 12)$, $C(5; -10; 8)$, $D(1; -1; 9)$
3.89. $A(-10; -4; -5)$, $B(-6; -12; 8)$, $C(-10; 8; 2)$, $D(-7; 2; -10)$
3.90. $A(-8; 2; -6)$, $B(7; 4; 8)$, $C(3; 3; 0)$, $D(1; 10; 5)$
3.91. $A(-9; -5; -4)$, $B(-10; -3; -10)$, $C(7; 0; 7)$, $D(-11; 2; 2)$
3.92. $A(8; -11; 3)$, $B(-1; -2; 3)$, $C(-8; 3; 2)$, $D(12; -2; -8)$

При якому значенні x вектори **a** і **b** ортогональні?

3.93. **a**(x; –2; 6), **b**(–7; 0; –6)
3.94. **a**(x; –2; 0), **b**(–4; 4; 2)
3.95. **a**(x; –6; –6), **b**($2x$; 0; 1)
3.96. **a**($7x$; –4; –2), **b**(1; $4x$; 1)
3.97. **a**($-2x$; 2; 2), **b**(2; $-2x$; 3)
3.98. **a**(0; 3; –1), **b**(1; $-4x$; 0)

При яких x та y вектори **a** і **b** колінеарні?

3.99. **a**($-x$; $2y$; –4), **b**(9; 1; 1)
3.100. **a**($-3x$; $-2y$; –6), **b**(3; –7; –4)
3.101. **a**($-4x$; 3; 3), **b**(–2; $-5y$; –8)
3.102. **a**($3x$; 5; 8), **b**(–5; $-3y$; –1)
3.103. **a**($2x$; $-9y$; 0), **b**(–2; 1; 1)
3.104. **a**($-10x$; –8; –8), **b**(–6; $3y$; –3)

При якому значенні x вектори **a**, **b** і **c** компланарні?

3.105. **a**($4x$; 0; 9), **b**(1; 5; –7), **c**(4; –7; 6)
3.106. **a**($3x$;–7;–9), **b**(–4; 8; 0), **c**(–8;–7;1)
3.107. **a**(5; 1; –2), **b**(4; $-4x$; 2), **c**(7; 5; –8)
3.108. **a**(–4; –1; 3), **b**(1; $3x$; 1), **c**(4; –1; 3)
3.109. **a**($3x$; 2; 1), **b**(0; $-x$; 0), **c**(–1; 1; 2)
3.110. **a**(x; 2; 0), **b**(1; x; 2), **c**(–1; 3; 2)

3.111. Обчислити об'єм паралелепіпеда, який побудовано на векторах
$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$

3.112. Показати, що точки A(2; –1; –2), B(1; 2; 1), C(2; 3; 0) і D((5; 0; –6) лежать на одній площині

3.113. Показати, що

1) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot[(\mathbf{a} + \mathbf{c})\times\mathbf{b}] = -\,\mathbf{abc}$;

2) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c})\cdot[(\mathbf{a} - \mathbf{b})\times(\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}) = 3\mathbf{abc}$.

3.114. Показати, що вектори $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ компланарні та розкласти вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Контрольні питання

1. Що таке лінійний простір? Що називається вектором?
2. Приведіть аксіоми лінійного простору.
3. Які вектора є лінійно залежними і які лінійно незалежними?
4. Що таке базисна система векторів?
5. Що таке координати вектора?
6. Як знайти координати вектора, що з’єднає точки A і B ?
7. Як здійснюється операція добутку вектора на скаляр?
8. Як знайти суму двох векторів?
9. Що таке евклідовий простір і норма евклідового простору?
10. Що таке скалярний добуток векторів?
11. Як визначити кут між векторами? Назвіть умову ортогональності векторів?
12. Приведіть формулу скалярного добутку векторів, якщо використовувати правила добутку матриць.
13. Приведіть формулу векторного добутку векторів?
14. Формула для довжини векторного добутку векторів?
15. Приведіть властивості векторного добутку векторів?
16. Що таке змішаний добуток векторів?
17. Приведіть властивості змішаного добутку векторів?
18. Чому дорівнює площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$?
19. Чому дорівнює об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах $\vec{a}$ $\vec{b}$ і $\vec{c}$?
20. Назвіть умови ортогональності, компланарності і колінеарності векторів?

ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ ІІ. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

ТЕМА 4. ПРЯМІ ТА ПЛОЩИНА

4.1. Вступ до аналітичної геометрії

Аналітична геометрія – розділ геометрії, в якому геометричні фігури та їх властивості досліджуються засобами алгебри за допомогою метода координат. Цей метод будь-яке геометричне сукупність точок ставить у відповідність деяке рівняння, яке пов'язує координати фігури або тіла.

Відповідно такого підходу дамо декілька загальних означень.

Крива лінія – це множина точок простору, координати яких є функціями однієї змінної: $x_i = f_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Термін «крива» в різних розділах математики визначається по різному. Наприклад, в накреслювальній геометрії криву розглядають як траєкторію, описану рухомою точкою, проекцію іншої кривої або лінію перетину двох поверхонь.

Криві підрозділяються на алгебраїчні і трансцендентні залежно від того чи є їх рівняння алгебраїчними або трансцендентними в прямокутній системі координат.

Множина алгебраїчних кривих в свою чергу підрозділяються на множину залежно від порядку кривої, що визначається ступенем її рівняння. Наприклад, алгебраїчну лінію, яка описується в системі Декартових координат рівнянням другого ступеня щодо відносно поточних координат, називають кривою лінією другого порядку. Криві лінії першого порядку називають ***прямою лінією***.

Крива називається *плоскою*, якщо всі її точки належать деякій площині, інакше вона називається просторовою.

Поверхня – традиційна назва для двовимірного різноманіття в просторі. Поверхня визначається як множина точок, координати яких задовольняють певному виду рівнянь: $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

Якщо функція $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ лінійна відносна всіх змінних, то поверхнею є ***площина***.

По аналогії з означенням лінії як одномірної множини точок можна дати означення поверхні.

Поверхня – це безперервна двовимірна (двопараметрична) множина точок: $x_i = f_i(u, v)$, $i = 1, 2, \ldots, n$..

У Декартовій системі координат положення точки на площині визначається задаванням двох параметрів – абсциси і ординати. Точка на довільній поверхні також визначатиметься двома параметрами – криволінійними координатами u і v.

Відповідно існує можливість ще одне означення поверхні. *Поверхня* – це безперервна однопараметрична (одномірна) множина ліній, які мають єдиний закон утворення. Залежно від виду ліній, закону їх утворення і розподілу отримуємо різні поверхні. Наприклад, площина може розглядатися як множина прямих або кривих утворюючих.

4.2. Лінії та поверхні першого порядку

Рівняння прямої лінії на площині

Однозначно задати пряму на площині можна декількома способами:

1) Задати будь-яку точку на прямій і вектор паралельний прямій;
2) Задати будь-які дві точки, які лежать на прямій;
3) Задати будь-яку точку на прямій і вектор перпендикулярний прямій;
4) Задати будь-яку точку і кут між прямою і віссю координат.

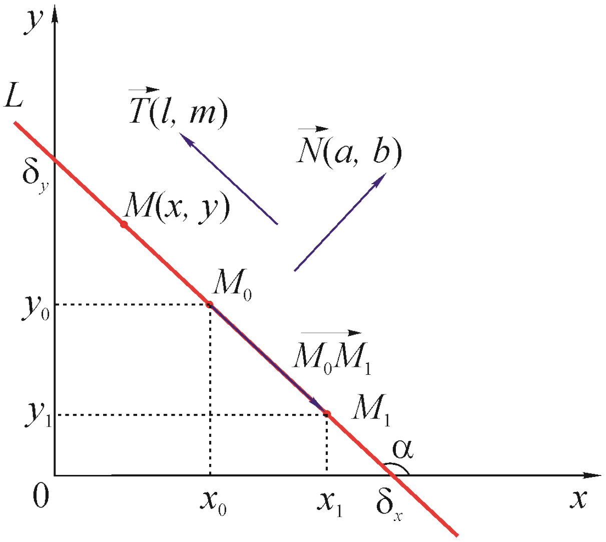


Рис. 1. Способи однозначно задати пряму на площині

Виходячи з названих способів задавання прямої є наступні рівняння.

Рівняння прямої лінії L на площині.

1. *Канонічне рівняння прямої* (що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\vec{T}(l,m)$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}.$$

2. Рівняння *прямої, що проходить через дві точки* $M_0(x_0, y_0)$ *і* $M_1(x_1, y_1)$:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

3. Якщо канонічне рівняння прямої лінії прирівняти деякому параметру t, то можна отримати *параметричне рівняння прямої.*

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \end{cases}$$

4. *Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і перпендикулярно вектору* $\vec{N}(a,b)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

5. *Загальне рівняння прямої*:

$$ax + by + c = 0, \text{ де } c = -ax_0 - by_0.$$

6. *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*, тобто що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і що має кут нахилу (кут з віссю абсцис x) α:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \text{ де } k = tg(\alpha) \text{ або, де } b = y_0 - kx_0.$$

7. *Рівняння прямої, що відсікає на осях x і y відрізки δ_x і δ_y*:

$$\frac{x}{\delta_x} + \frac{y}{\delta_y} = 1.$$

Знаючи будь-яке з приведених рівнянь прямих можна встановити взаємне розташування двох прямих (рис. 2).

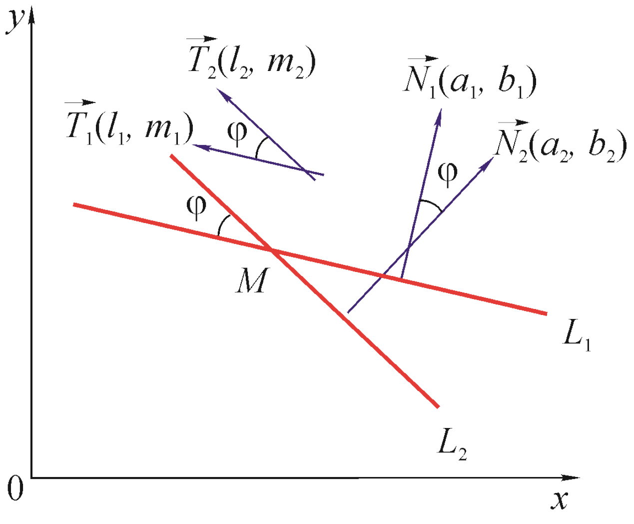


Рис. 2. Ілюстрація визначення кута між прямими

1. *Кут φ між двома прямими L_1 і L_2*:

- $tg(\varphi) = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$, якщо відоме рівняння з кутовим коефіцієнтом;
- $\cos(\varphi) = \dfrac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$, якщо відоме канонічне рівняння;
- $\cos(\varphi) = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$, якщо відоме загальне рівняння.

З цих формул витікає умови паралельності і перпендикулярності прямих L_1 і L_2.

Паралельність $L_1 \parallel L_2$ ($\varphi = 0$, $\varphi = \pi$)	*Ортогональність* $L_1 \perp L_2$ ($\varphi = \pi/2$, $\varphi = 3\pi/2$)
$k_1 = k_2$	$k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$
$\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$	$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0$
$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$	$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$

2. *Відстань ρ від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої L* ($ax + by + c = 0$):

$$\rho = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

3. *Перетин двох прямих L_1 і L_2* – точка $M(x, y)$:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Рівняння прямої лінії в просторі

Однозначно задати пряму в просторі можна, якщо вказати точку на прямій і вектор паралельний прямій або вказати перетин двох площин плоскості.

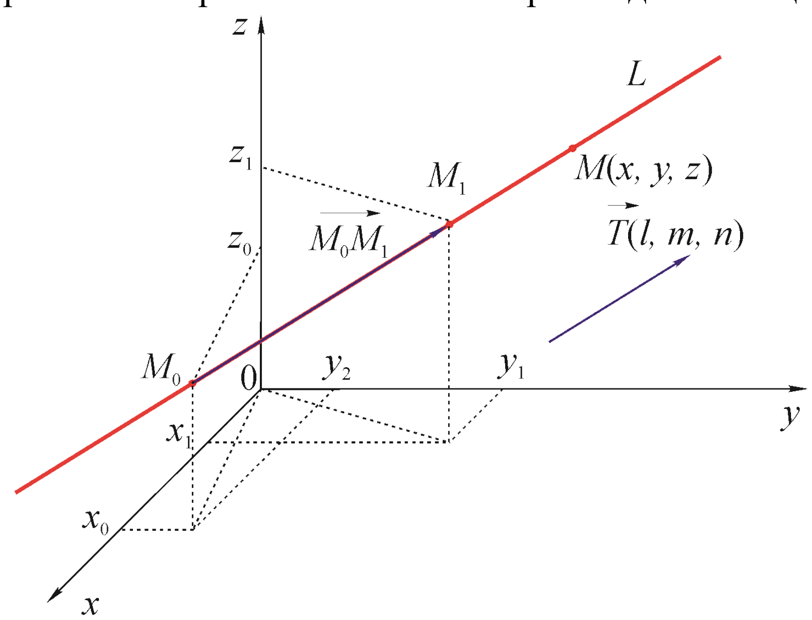


Рис. 3. Способи задати пряму L в трьохмірному просторі

Рівняння прямої L в просторі:

1. *Канонічне рівнянні прямої* (що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$) паралельно вектору $\vec{T}(l, m, n)$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

2. *Рівняння прямої, що проходить через дві точки* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

3. *Параметричне рівняння прямої*

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases}$$

4. *Рівняння прямої лінії, як перетин двох площин плоскості*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

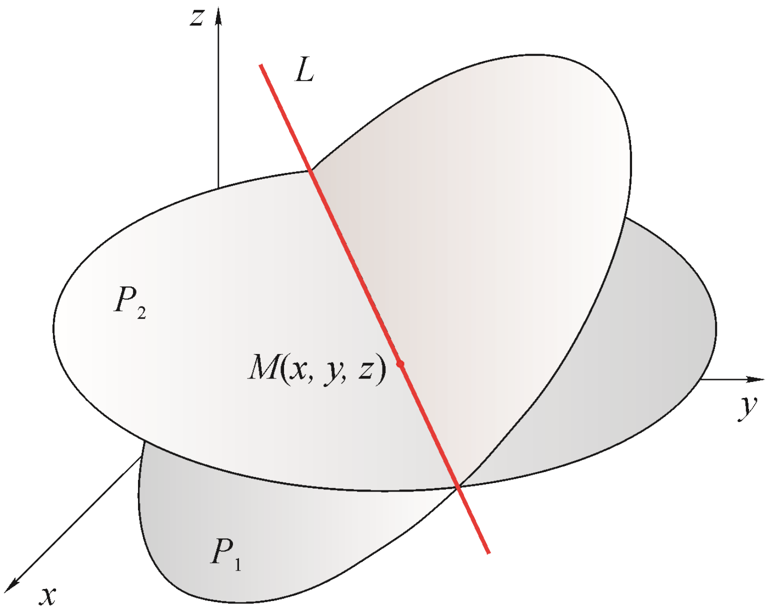


Рис. 4. Ілюстрація прямої L, як перетини двох площин

Знаючи будь-яке з приведених рівнянь прямих можна встановити взаємне розташування двох прямих.

1. *Кут φ між двома прямими L_1 і L_2*:

$$\cos(\varphi)=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

- Умова паралельності: $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$.
- Умова ортогональності: $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.

- Умова компланарності: $\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$.

2. *Відстань ρ від точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до прямої L* $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$:

$$\rho=\frac{\left|[\vec{T},\vec{r}_1]\right|}{|\vec{T}|},\ \text{де}\ \vec{T}(l,m,n)\ \text{і}\ \vec{r}_1=(x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0).$$

3. *Відстань d між мимобіжними прямими L_1 і L_2*

$$d=\frac{\left([\vec{r}_2-\vec{r}_1,\vec{T}_1],\vec{T}_2\right)}{|[\vec{T}_1,\vec{T}_2]|}\text{де}\ \vec{r}_2-\vec{r}_1=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1).$$

Рівняння площини

Площину можна однозначно задати, якщо задати будь-яку точку на площини і вектор перпендикулярний площині або задати будь-які три точки, які лежать на площині (рис. 5).

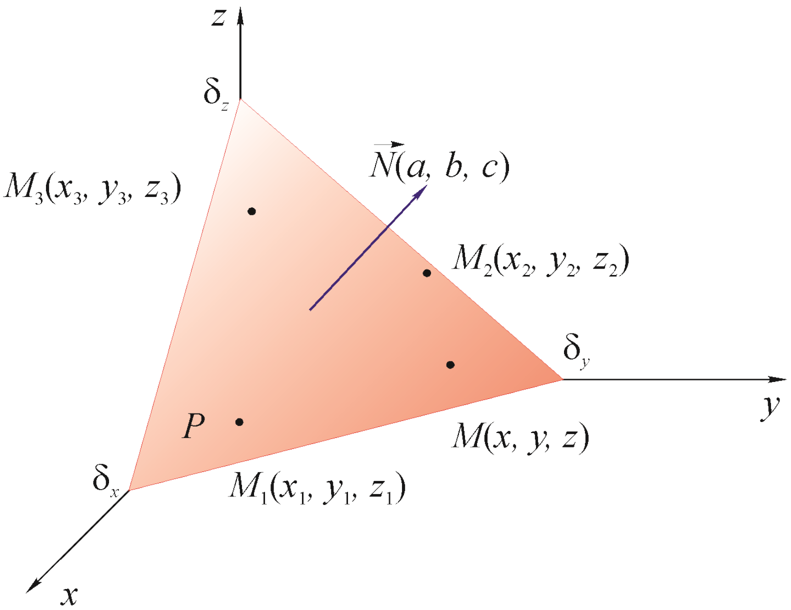


Рис. 5. Способи задати площину P

Рівняння площини P.

1. *Рівняння площини*, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і перпендикулярно вектору $\vec{N}(a,b,c)$:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

2. *Загальне рівняння площини*:

$$ax+by+cz+d=0,\ \text{де}\ d=-ax_0-by_0-cz_0.$$

3. Рівняння *площини, що проходить через три точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Рівняння площини у відрізках:

$$\frac{x}{\delta_x} + \frac{y}{\delta_y} + \frac{z}{\delta_z} = 1$$

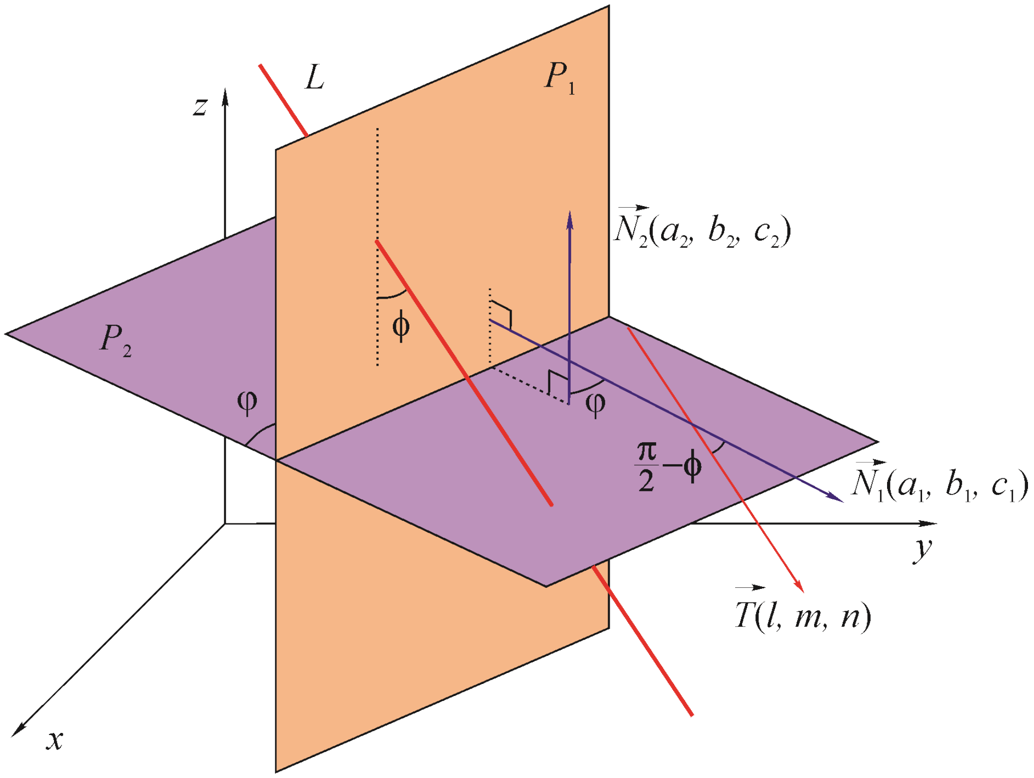


Рис. 6. Ілюстрація визначення кута між площинами, між площиною та прямою

Взаємне розташування двох площин.

Кут φ між двома площинами P_1 і P_2:

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Умова паралельності: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Умова перпендикулярності: $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Взаємне розташування площини і прямої.

Кут φ між площиною P і прямою лінією L:

$$\sin(\phi) = \frac{al + bm + cn}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Умова паралельності: $al + bm + cn = 0$.

Умова ортогональності: $\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}$.

Приклади розв'язання задач про пряму лінію і площину

1. Знайти рівняння прямої паралельної прямої $3x - 4y - 25 = 0$ і віддаленої від неї на відстань $d = 2$.

Загальне рівняння прямої на площині: $Ax + By + C = 0$.

Умова паралельності двох прямих $3x - 4y - 25 = 0$ і $Ax + By + C = 0$:

$$\frac{A}{3} = -\frac{B}{4}.$$

Нехай $A = 3,\ B = -4$.

Тоді шукане рівняння прямої приймає вигляд $3x - 4y + C = 0$.

Відстань від точки з координатами (x_0, y_0) до прямої $3x - 4y - 25 = 0$:

$$d = \frac{|3x_0 - 4y_0 - 25|}{\sqrt{9+16}} = 2.$$

Точка з координатами (x_0, y_0) лежить на прямій $3x - 4y + C = 0$.

Тобто необхідно розв'язати наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_0 - 4y_0 = 35 \\ 3x_0 - 4y_0 + C = 0 \end{cases};$$

$$C = -35.$$

Рівняння прямої, яке шукали $3x - 4y - 35 = 0$.

2. Знайти довжину AD висоти трикутника, вершини якого знаходяться в точках $A(2\ -1)$, $B(-1, -2)$ і $C(3,1)$.

Координати вектора $\overrightarrow{BC} = (3+1,\ 1+2) = (4,\ 3)$.

Координати вектора $\overrightarrow{AD} = (x_D - 2,\ y_D + 1)$.

Вектор $\overrightarrow{BC}$ повинен бути перпендикулярним вектору $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 4(x_D - 2) + 3(y_D + 1) = 0$$

Рівняння прямої, що проходить через точки B і C: $\frac{y+2}{1+2} = \frac{x+1}{3+1}$.

Отже рівняння прямої лінії, що проходить через точки B і C $\frac{y+2}{3} = \frac{x+1}{4}$.

Оскільки точка D лежить на прямій, що проходить через точки B і C, то координати точки D повинні задовольняти рівнянню $\frac{y_D+2}{3}=\frac{x_D+1}{4}$.

Розв’язуючи систему рівнянь, знайдемо невідомі координати точки D.

$$\begin{cases} 4(x_D-2)+3(y_D+1)=0 \\ \frac{y_D+2}{3}=\frac{x_D+1}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} 4x_D+3y_D=5 \\ 3x_D-4y_D=5 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4x_D+3y_D=5 \\ 25y_D=-5 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_D=1{,}4 \\ y_D=-0{,}2 \end{cases}$$

Довжина вектора, тобто висота трикутника

$$AD=\sqrt{(1{,}4-2)^2+(-0{,}2+1)^2}=1$$

3. Знайти кут між двома прямими:

$$\frac{x+4}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-7}{-2}; \qquad \frac{x-8}{1}=\frac{y+6}{2}=\frac{z-1}{2}.$$

Вектора, що направляють прямі: $\vec{P}_1=(2;\,1;\,-2)$; $\vec{P}_2=(1;2;\,2)$.

$$\cos\varphi=\frac{\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2}{|\vec{P}_1|\cdot|\vec{P}_2|}\frac{2\cdot1+1\cdot2-2\cdot2}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+4+4}}=0. \quad \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

4. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 (0; –1; 3) і перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, якщо M_2 (1; 3; 5).

Рівняння площини, що проходить через точку M_1:

$a(x-0)+b(y+1)+c(z-3)=0$ де a, b, і c координати вектора перпендикулярного площині, тобто вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0,\ 3+1,\ 5-3)=(1,\ 4,\ 2)$.

Рівняння площини, що шукали: $x+4(y+1)+2(z-3)=0$.

5. Знайти рівняння площини, яка проходить через вісь $0y$ і через точку M_0 (4; 0; 3) перпендикулярно вектору M_1M_2, якщо M_2 (1; 3; 5).

Рівняння площини, що проходить через точку M_0:

$A(x-4)+B(y-0)+C(z-3)=0$, де A, B, і C координати вектора перпендикулярного площині. Знайдемо їх із умови, що площина проходить через вісь 0y, тобто $x=0$, $z=0$.

Підставив $x=0$, $z=0$ в рівняння площини отримуємо вираз:

$$-4A+By-3C=0.$$

Візьмемо на площині при $x=0$, $z=0$ дві точки. Нехай $y_1=0$ і $y_2=1$. Тоді,

$$\begin{cases} -4A-3C=0 \\ -4A+B-3C=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} A=-3C/4=0 \\ B=0 \end{cases}.$$

Нехай $C = 4$. Тоді $A = -3$.

Рівняння площини, що шукали $-3(x-4)+4(z-3)=0$.

6. Знайти кут між площинами $x-2y+2z-8=0$ і $x+z-6=0$.

Вектора що направляють площини: $\vec{N}_1=(1;-2;2)$; $\vec{N}_2=(1;0;1)$.

$$\cos\varphi=\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{|\vec{N}_1|\cdot|\vec{N}_2|}\frac{1\cdot1-2\cdot0+2\cdot1}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{1+0+1}}=\frac{3}{\sqrt{9}\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}};\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Задачі до теми прямі та площини

4.1. При якому значенні C точка $M(3, -2)$ лежіть на прямій $2x+5y+C=0$.

4.2. При якому значенні C пряма $2x-Cy+3=0$ перпендикулярна прямій $5x+2y+7=0$

4.3. Визначити при якому значенні m пряма $(m-9)x+(3m-6)y+(m+3)=0$ паралельна осі OX

4.4. Визначити при якому значенні m пряма $(m-9)x+(3m-6)y+(m+3)=0$ паралельна осі OY

4.5. Визначити при якому значенні m пряма $(m-9)x+(3m-6)y+(m+3)=0$ проходить через початок координат

4.6. При якому значенні C пряма $2x-Cy+3=0$ паралельна прямій $5x+2y+7=0$

4.7. При якому значенні k пряма $y=kx+3$ перпендикулярна прямій $y=-5x+7$

4.8. При якому значенні k пряма $y=kx+3$ параллельна прямій $y=-5x+7$

4.9. При якому значенні l пряма $\frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{3}$ перпендикулярна прямої $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{6}$

4.10. При якому значенні l пряма $\frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{3}$ паралельна прямої $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{6}$

4.11. З точністю до одної тисячної знайти косинус кута між прямими $x+3y-2=0$ і $2x+5y-6=0$

4.12. Знайти косинус кута між прямими $\frac{x}{3}=\frac{y-3}{4}$ і $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{9}$

4.13. Знайти косинус кута між прямими $\frac{x}{3}=\frac{y-3}{4}$ і $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{9}$

4.14. Знайти тангенс кута між прямими $y=6x-10$ і $y=\frac{x}{3}+1$

4.15. Знайти відстань між точкою $M(4,\ 9)$ і прямою $x+3y-2=0$

4.16. Знайти точку перетину прямих $x+3y-2=0$ і $2x+5y-6=0$

4.17. При якому значенні n пряма $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{8}$ перпендикулярна прямої $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-1}{6}=\frac{z+2}{n}$

4.18. При якому значенні n пряма $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{8}$ паралельна прямої $\frac{x-4}{4}=\frac{y-1}{6}=\frac{z+2}{n}$

4.19. При якому значенні n пряма $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+5}{1}$ компланарна прямої $\frac{x-4}{4}=\frac{y-2}{6}=\frac{z+2}{n}$

4.20. Знайти косинус кута між площинами $x+3y-2z+6=0$ і $2x+5y-6z-9=0$

4.21. Знайти C, при якому площини $x+3y+Cz+6=0$ і $2x+5y-6z-9=0$ перпендикулярні

4.22. Знайти C, при якому площини $x+2.5y+Cz+6=0$ і $2x+5y-6z-9=0$ паралельні

4.23. Знайти кут між площиною $x+3y-2z+6=0$ і прямої $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+5}{8}$

4.24. Знайти С, при якому площина $x+3y-2z+6=0$ паралельна прямої $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+5}{C}$

4.25. Знайти С, при якому площина $x+0.5y-2z+6=0$ перпендикулярна прямої $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+5}{C}$

4.26. Знайти координати точки перетину прямої L і площини P, якщо:

а) $L:\ \frac{x-1}{8}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{12},\ \ P:\ x-2y-3z+36=0$;

б) $L:\ \frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{0},\ \ P:\ x+7y+3z+11=0$;

в) $L:\ \frac{x-7}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2},\ \ P:\ 2x+y+7z-3=0$

4.27. Знайти координати точки перетину трьох площини, якщо вони задані рівняннями:

а) $3x+y-z+1=0,\ 2x-y3z-19=0,\ -x+3y+z+7=0$;

б) $x+9y-3z+46=0,\ x-y-z+2=0,\ x+2z-5=0$;

в) $x+2y+3z+6=0,\ 3x+y+2z+5=0,\ 2x+3y+z-5=0$.

4.28. Дві сторони ромба мають рівняння $2x-5y-1=0$ і $2-5y-34=0$, а рівняння однієї з діагоналей $x+3y-6=0$. Знайти рівняння другої діагоналі.

4.29. Знайти відстань між прямими $x=-2y=z$ і $x=y=2$.

4.30. Знайти відстань від точки $M(3;\,0;\,4)$ до прямої $y=2x+1,\ z=2x$.

4.31. Знайти відстань від точки $M(4;\,3;\,0)$ до площини, яка проходить через точки $M_1(1;\,3;\,0)$, $M_2(4;\,-1;\,2)$ і $M_3(3;\,0;\,1)$

4.32. Знайти відстань між паралельними площинами $4x+3y-5z-8=0$ і $4x+3y-5z+12=0$

ТЕМА 5. КРИВІ ТА ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

5.1. Криві другого порядку

Крива другого порядку називається лінія на площині, яка в деякій системі координат визначається рівнянням

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

в якому принаймні один з коефіцієнтів a_{11}, a_{22} або a_{12} відмінний від нуля.

Рівняння кривої другого порядку можна записати в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ або } X \cdot A \cdot X^T = 0,$$

де $X = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}$ і $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матриця рівняння.

Матриця $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається матрицею квадратичної форми рівняння.

Вид кривої залежить від чотирьох інваріантів:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$;

2) $D = \det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$;

3) $I = trD = a_{11} + a_{22}$;

4) $C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$.

І двох корінь характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - I\lambda + D = 0.$$

Введенням нової системи координат можна привести рівняння кривих другого порядку до стандартного канонічного вигляду. Параметри канонічних рівнянь просто виражаються через інваріанти і коріння характеристичного рівняння. Можливі дійсні і уявні криві. Варіанти дійсних кривих представлені у таблиці 2.

Таблиця 2.

Криві другого порядку

Вид кривої	**Канонічне рівняння**	**Інваріанти**
Не вироджені криві $\Delta \neq 0$		
Еліпс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\begin{cases} a^2=-\frac{1}{\lambda_2}\frac{\Delta}{D}=-\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2^2} \\ b^2=-\frac{1}{\lambda_1}\frac{\Delta}{D}=-\frac{\Delta}{\lambda_2\lambda_1^2} \end{cases}$	$\Delta=-a^4b^4$ $D=a^2b^2$ $I=a^2+b^2$
Гіпербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\begin{cases} a^2=-\frac{1}{\lambda_1}\frac{\Delta}{D}=-\frac{\Delta}{\lambda_2\lambda_1^2} \\ b^2=\frac{1}{\lambda_2}\frac{\Delta}{D}=\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2^2} \end{cases}$	$\Delta=a^4b^4$ $D=-a^2b^2$ $I=a^2-b^2$
Парабола	$y^2=2px \quad \lambda_2=0$	$\Delta=p^2$ $D=0$ $I=1$
Вироджені криві $\Delta = 0$		
Точка	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	$D=a^2b^2$ $I=a^2+b^2$
Дві пересічні прямі	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	$D=-a^2b^2$ $I=a^2-b^2$
Дві паралельні прямі	$\frac{x^2}{a^2}=1$	$D=0$ $I=1$
Дві співпадаючі прямі	$x^2=0$	$D=0$ $I=1$

Канонічне рівняння будь-якої не виродженої кривої другого порядку за допомогою відповідного перетворення початку координат може бути приведено до вигляду:

$$y^2=2px-(1-\varepsilon^2)x^2 \ (p>0)$$ – в Декартовій системі координат;

$$\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$$ – в полярній системі координат.

В цьому випадку крива проходить через початок нової системи координат, а вісь Ox є віссю симетрії кривої. Дане рівняння виражає той факт, що не вироджена крива другого порядку є геометричним місцем точок, відношення відстаней яких $\varepsilon \geq 0$ (ексцентриситет) від даної точки (фокусу) і від даної прямої (директриси) постійним.

Крім того, при ε = 0 крива є *колом*, при 0 < ε < 1 – *еліпсом*, при ε = 1 – *параболою* і при ε > 1 – *гіперболою*.

Рівняння директриси кривої виражається рівнянням $x = -\dfrac{p}{\varepsilon(1+\varepsilon)}$, а координати фокусу $x = -\dfrac{p}{(1+\varepsilon)}$, $y = 0$. Директриса перпендикулярна осі симетрії, що проходить через фокус і вершину кривої (фокальна вісь). Відстань між фокусом і директрисою рівна $\dfrac{p}{\varepsilon}$.

Якщо крива другого порядку центральна (еліпс або гіпербола), то пряма $x = \dfrac{p}{(1-\varepsilon^2)}$ є віссю симетрії і, отже, крива має два фокуси і дві директриси.

Параметр p називається фокальним параметром.

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней від кожної з яких до двох даних точок F_1 і F_2 (фокусів) є величина постійна: $r_1 + r_2 = 2a$, де r_1 і r_2 – фокальні відстані, a – велика напіввісь (відстань від центру еліпса до найбільш віддаленої від неї точки кривої, рис. 5.1).

Гіперболою називається геометричне місце точок, різниця відстаней від кожної з яких до двох даних точок F_1 і F_2 (фокусів) є величина постійна: $r_1 - r_2 = 2a$ (рис. 5.2)

Параболою називається геометричне місце точок, однаково віддалених від даної точки (фокусу) і даної прямої (директриси, рис. 5.3).

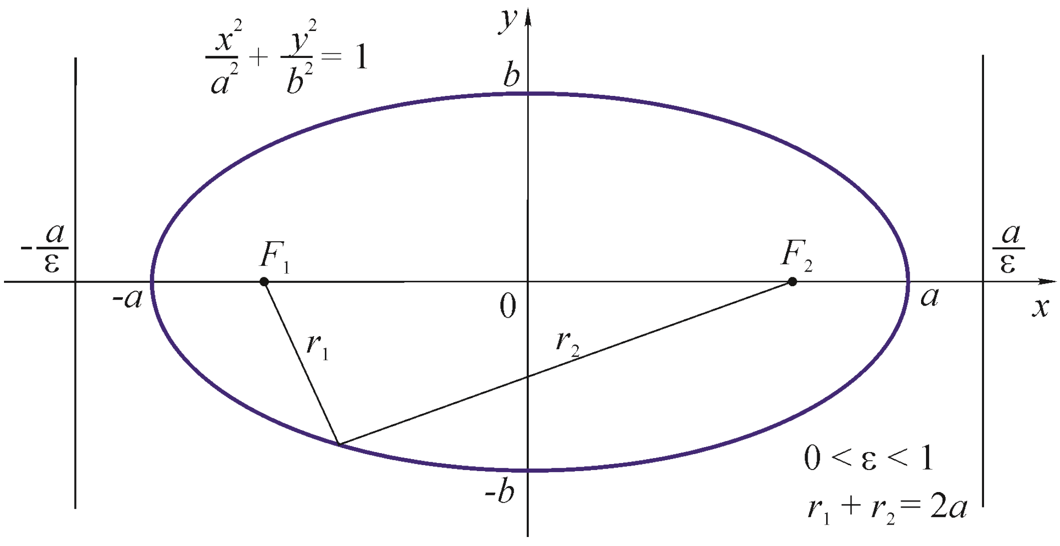


Рис. 5.1. Ілюстрація еліпсу

Таблиця 3.

Характеристики кривих другого порядку

Параметр кривої	**Еліпс**	**Гіпербола**	**Парабола**
Канонічне рівняння	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2=2px$
Міжфокусна відстань	$2c=2\sqrt{a^2-b^2}$	$2c=2\sqrt{a^2+b^2}$	–
Ексцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}<1$	$\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>1$	$\varepsilon=1$
Кількість фокусів	2	2	1
Фокальна відстань	$r_1=\|a-\varepsilon x\|$ і $r_2=\|a+\varepsilon x\|$		$r=x+\frac{p}{2}$
Директриси	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$		$x=-\frac{p}{2}$
Асимптоти	–	$y=\pm\frac{b}{a}x$	–

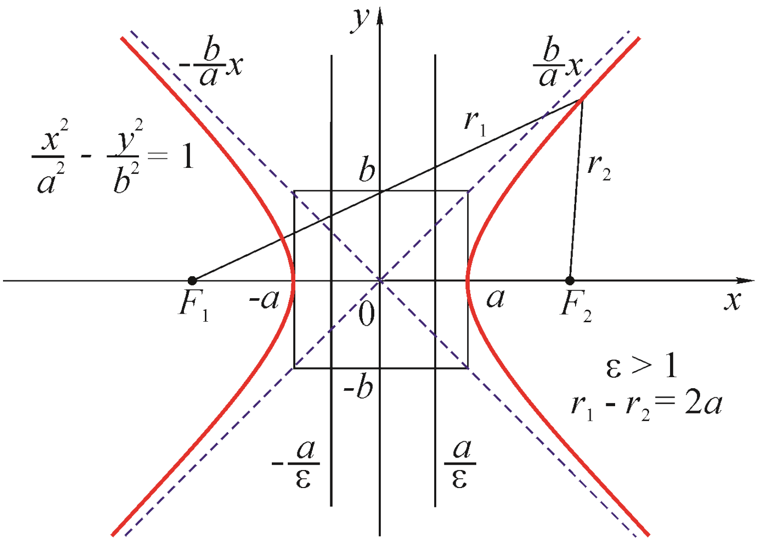


Рис. 5.2. Ілюстрація гіперболи

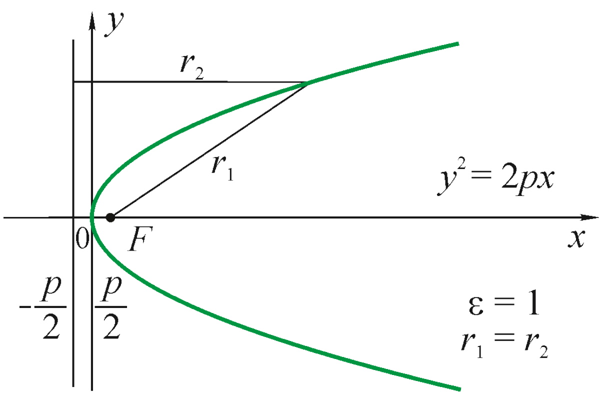


Рис. 5.3. Ілюстрація параболи

5.2. Поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називають геометричне місце точок в просторі, координати яких задовольняють наступному рівнянню

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0$$

причому серед коефіцієнтів a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} є ненульові.

Матрицею цього рівняння називають матрицю $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{30} \\ a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{00} \end{pmatrix}$

Матриця квадратичної форми $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Поверхня другого порядку, задана даним рівнянням у відповідній системі координат може бути задана одним з наступних рівнянь.

Еліпсоїди	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$	– уявний – вироджений (точка) – дійсний (рис. 5.4)
Гіперболоїди	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$	– конус (рис. 5.5) – односмуговий (рис. 5.6)
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	– двохсмуговий (рис. 5.7)
Параболоїди	$2pz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	– еліптичний (рис. 5.8)
	$2pz = \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}$	– гіперболічний (рис. 5.9)
Циліндри	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	– еліптичний (рис. 5.10)
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	– гіперболічний (рис. 5.11)
	$y = 2px^2$ або $x = 2py^2$	– параболічний (рис. 5.12)
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases}$	– уявний – вироджений еліптичний
Площини	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	– дві пересічні
	$\frac{x^2}{a^2} = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$	– дві уявних паралельних – дві співпадаючих – дві дійсних паралельних

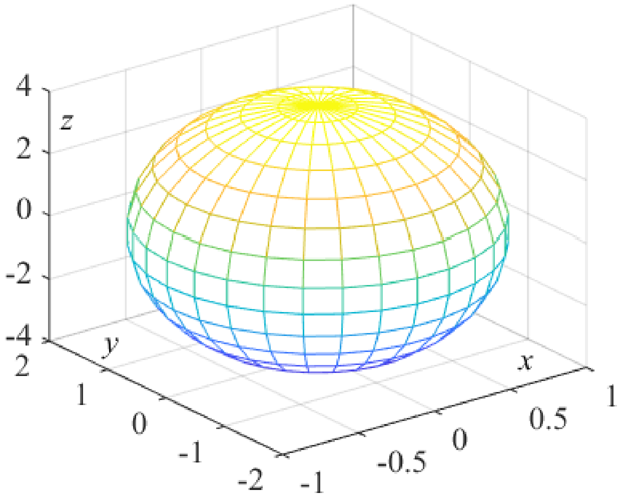


Рис. 5.4

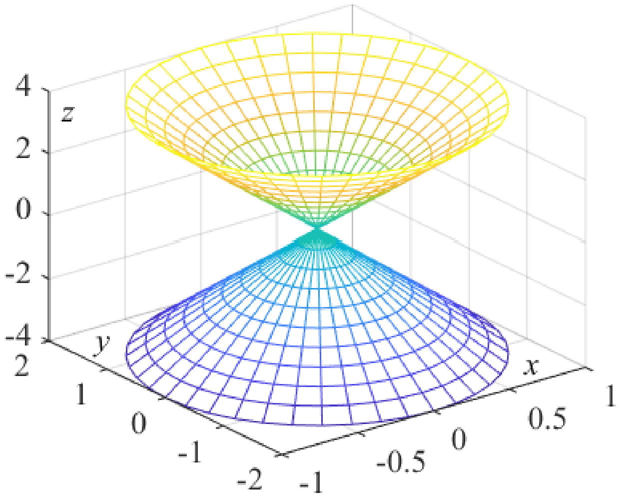


Рис. 5.5

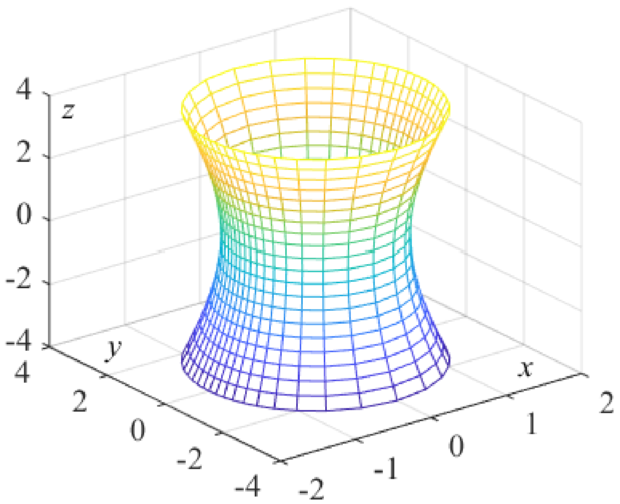


Рис. 5.6

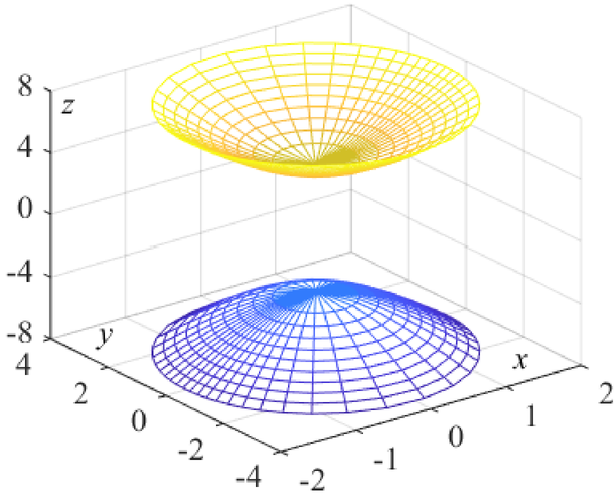


Рис. 5.7

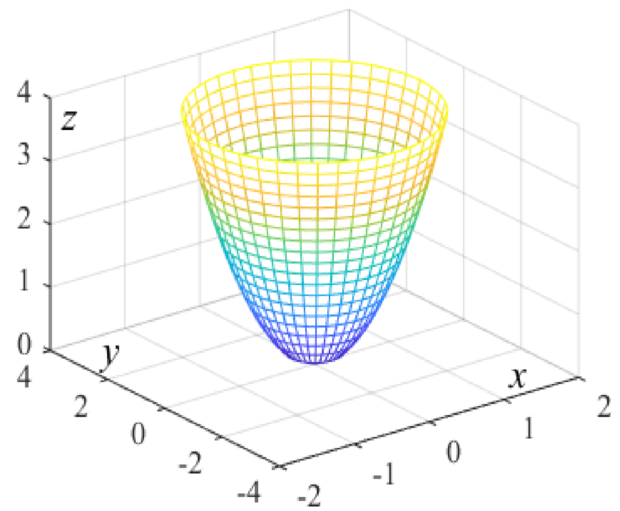


Рис. 5.8

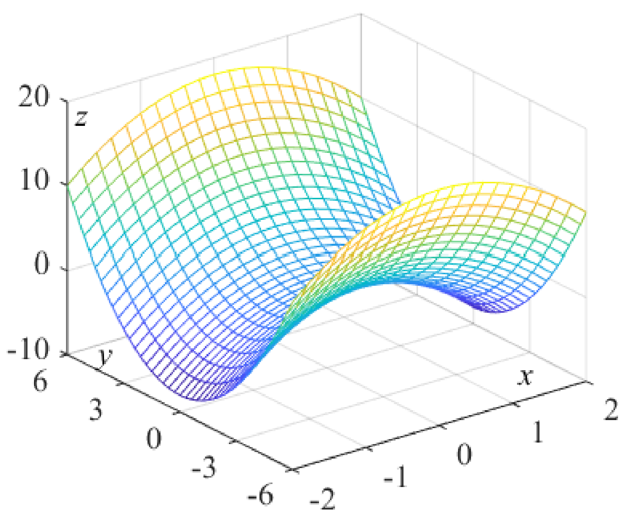


Рис. 5.9

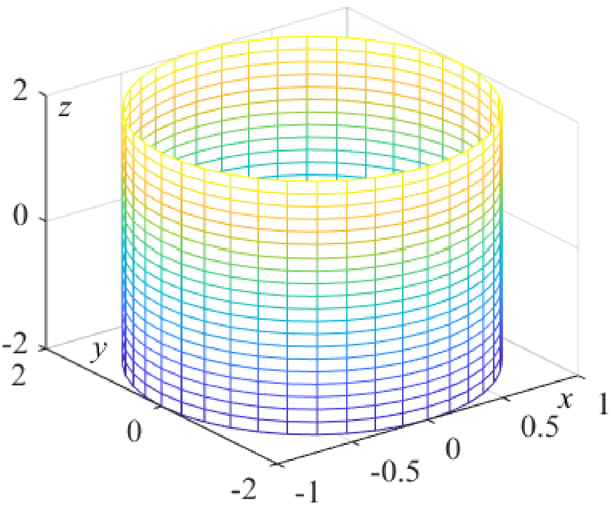


Рис. 5.10

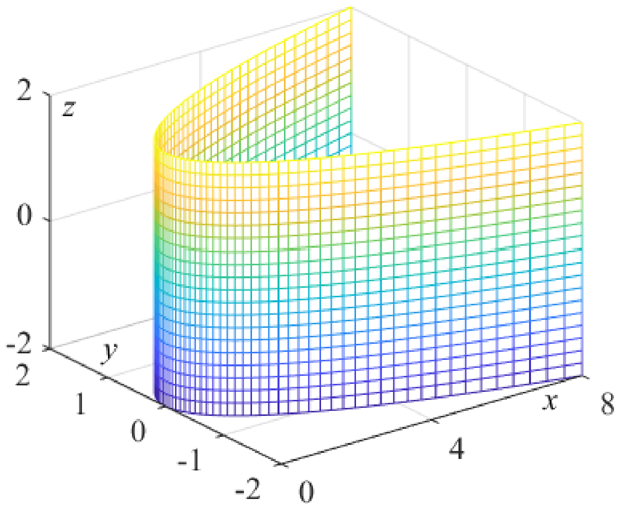


Рис. 5.11

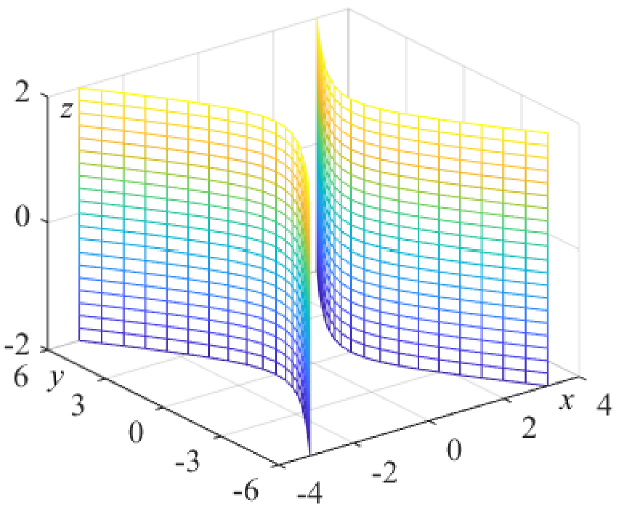
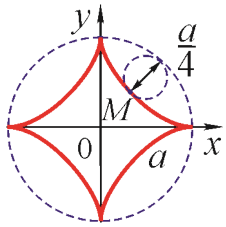


Рис. 5.12

5.3. Визначні криві та поверхні

Плоскі криві

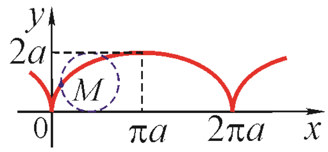


1. *Астроїда*:

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3};$$

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ x=a\sin^3 t,\ \ t\in[0;\,2\pi] \end{cases}$$

Атроїда – траєкторія руху точки M кола радіусом $a/4$, що котится внутрішнім боком кола радіусом $a>0$.



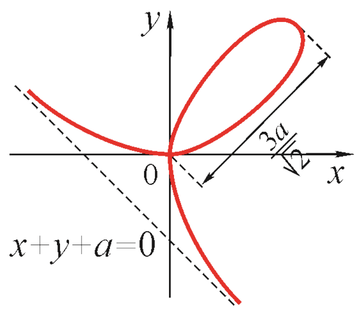
2. *Циклоїда*:

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ x=a(1-\cos t),\ \ t\in R \end{cases}$$

Циклоїда — траєкторія руху точки кола, що котиться нерухомою

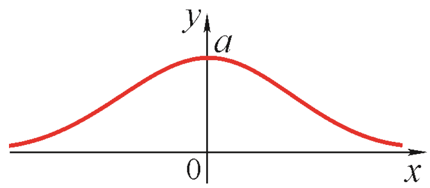
прямою без ковзання. Циклоїду утворює нескінченна кількість арок, кожна з яких відповідає одному обороту кола.

3. *Декартів листок:*

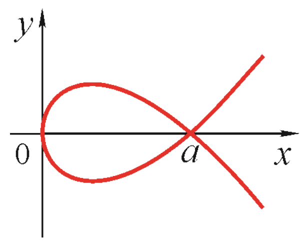


$$x^3+y^3-3axy=0,\ \ a>0\,.$$

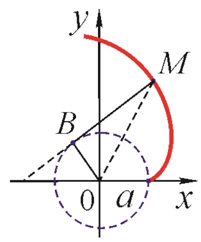
$$\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ x=\dfrac{3at^2}{1+t^3},\ \ t\in R\setminus\{-1\} \end{cases}$$



4. *Кучер Аньєзі*: $y=\dfrac{a^3}{x^2+a^2}\,.$



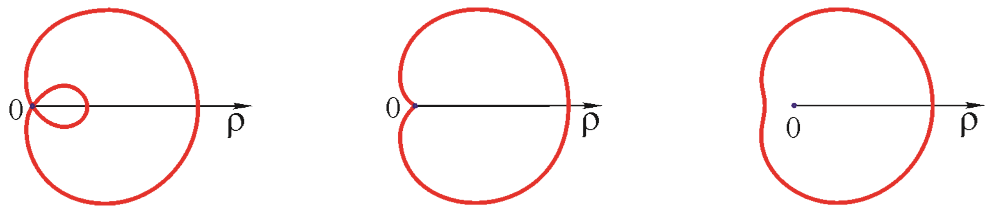
5. *Петльова парабола*: $ay^2=x(x-a)^2$



6. *Розгортка кола*:

$$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ x=a(\sin t-t\cos t),\ \ t\in[0;+\infty) \end{cases}$$

7. *Паскалів завиток*: $\rho = 2a\cos\varphi \pm l$

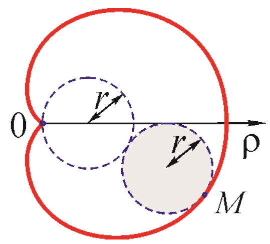


Лінія симетрична щодо осі Ox; якщо $l < 2a$, то точка O — вузлова (в ній лінія перетинає себе), якщо $l = 2a$, то полюс є точкою вертання, якщо $l > 2a$, то точка O, яка належить кривій, є ізольованою особливою точкою.

Паскалів завиток використовують для креслення профілю ексцентрика, якщо потрібно, щоб стрижень, який ковзає профілем, коливався гармонічно

8. *Кардіоїда*:

$$\rho = 2a(1+\cos\varphi).$$

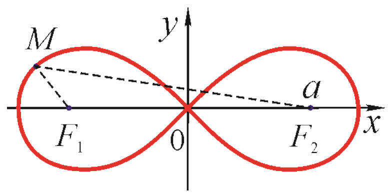


Кардіоїда – траєкторія руху точки кола радіусом r, яке котиться зовнішнім боком кола з таким самим радіусом – окремий випадок паскалевого завитка

9. *Лемніската Бернуллі:*

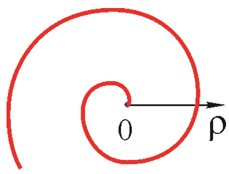
$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right);$$

$$\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}.$$



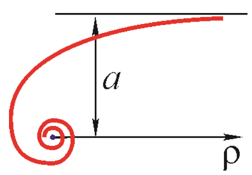
Лемніската Бернуллі – множина всіх точок площини, для яких добуток віддалей до двох заданих точок цієї площини є сталим і рівним квадрату половини віддалі між заданими точками

10. *Архімедова спіраль:* $\rho = a\varphi$.



Архімедова спіраль – траєкторія руху точки, що рівномірно рухається прямою, яка рівномірно обертається навколо фіксованої точки

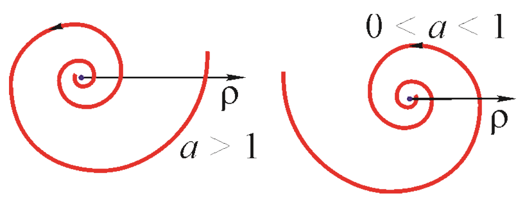
11. *Гіперболічна спіраль:* $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$.



12. *Логарифмічна спіраль:*

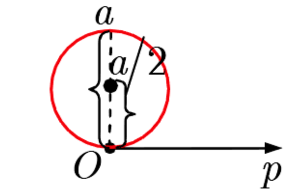
$\rho = a^{\varphi}$, $a > 1$ (для правої);

$\rho = a^{\varphi}$, $0 < a < 1$ (для лівої).

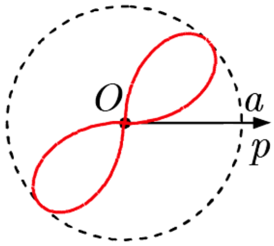


13. *Рози:* $\rho = a\sin n\varphi$ або $\rho = a\cos n\varphi$, $a > 0$;

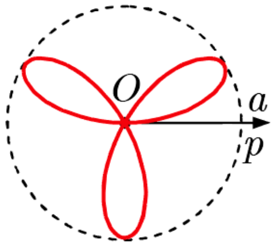
Рози містяться всередині кола радіусом *a*. Коли *n* ціле, то мають *n* пелюсток.



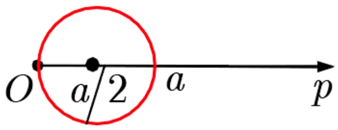
$\rho = a\sin\varphi$



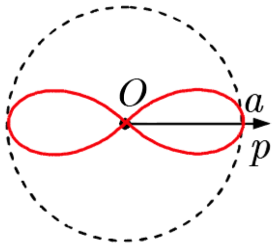
$\rho = a\sin 2\varphi$



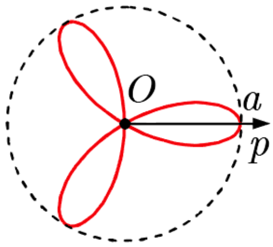
$\rho = a\sin 3\varphi$



$\rho = a\cos\varphi$



$\rho = a\cos 2\varphi$

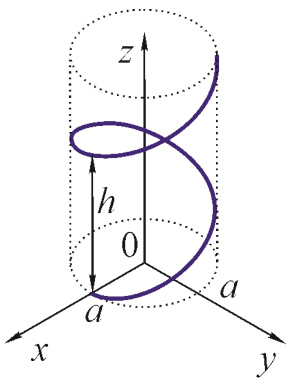


$\rho = a\cos 3\varphi$

Просторові криві

1. *Циліндрична гвинтова лінія* – просторова крива, яку описує точка, що обертається зі сталою кутовою швидкістю навколо нерухомої осі й одночасно переміщується поступально зі сталою швидкістю вздовж цієї осі:

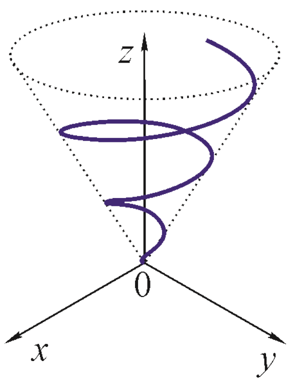
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = \dfrac{ht}{2\pi},\ t \in [0; +\infty) \end{cases},$$



де *a* – радіус циліндра; *h* – крок гвинтової лінії.

2. *Конічна гвинтова лінія* – лінія на поверхні колового конуса, що перетинає всі твірні під однаковим кутом:

$$\begin{cases} x = at\cos t \\ y = at\sin t \\ z = bt,\ t \in [0; +\infty) \end{cases}.$$

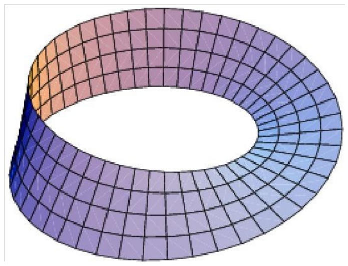


3. *Крива Вівіані* – лінія перетину сфери з коловим циліндром, удвічі меншого радіуса, ніж сфера:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

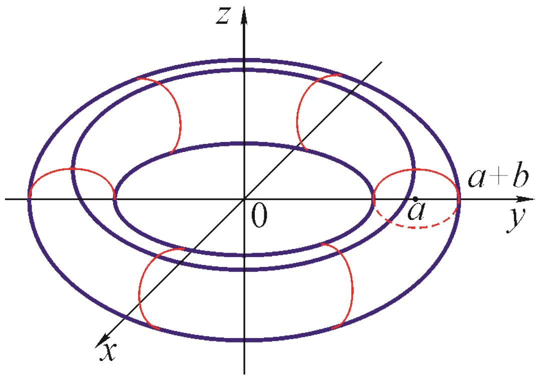
Поверхні

1. *Мебіюсів листок* – поверхня, яку можна одержати склеюванням двох протилежних боків перекрученої прямокутної смужки. Ця поверхня є прикладом однобічної неорієнтованої поверхні: якщо рухатись уздовж мебіюсова листка, не перетинаючи його межі, то (на відміну від двобічних поверхонь, приміром, сфери, циліндра) можна потрапити в початкову точку, опинившись у перевернутому положенні, тобто з «другого боку».



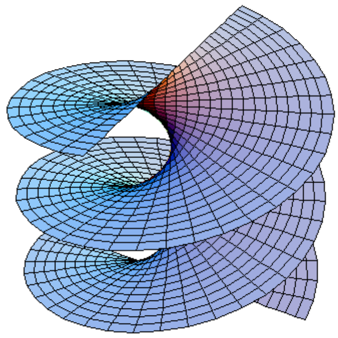
2. *Тор* – поверхня, одержана обертанням кола навколо осі, що лежить у площині кола і її не перетинає:

$$\begin{cases} x = (a + b\cos u)\cos v \\ y = (a + b\cos u)\sin v \\ z = b\sin u,\ u,\ v \in [0;\ 2\pi] \end{cases}$$



3. *Гелікоїд* – гвинтова поверхня, яку у просторовій задають параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = hv,\ u,\ v \in R \end{cases}.$$



Висновки по темі криві та поверхні другого порядку

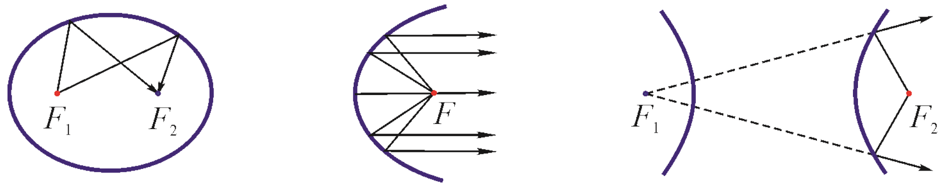
1. В аналітичній геометрії передусім вивчають лінії, які у Декартової системі координат мають алгебраїчні рівняння $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, в якому принаймні один з коефіцієнтів a_{11}, a_{22} або a_{12} відмінний від нуля.
2. Таке алгебричне рівняння може визначати: реальні криві, сукупності кривих другого порядку, точки (вироджені криві) або порожню множину («уявні» криві).

3. До кривих 2-го порядку належать: еліпс, парабола та гіпербола. Окремими випадком еліпса є коло.
4. Криві другого порядку можуть виро ждатися в точку або в дві прямі (паралельні, пересічені або співпадаючі)
5. Канонічне рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
6. Канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ або $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.
7. Канонічне рівняння параболи: $y^2=2px$ або $x^2=2py$.
8. Криві другого порядку мають важливі оптичні властивості:

а) Якщо помістити в один з фокусів еліпса точкове джерело світла, то всі промені після відбиття від еліпса зійдуться в іншому його фокусі;

б) Якщо помістити у фокус параболи точкове джерело світла, то всі промені, відбиті від параболи, спрямуються паралельно фокальній осі параболи (ця властивість обґрунтовує форму параболічних антен, дзеркал для прожекторів тощо);

в) Якщо помістити в один з фокусів гіперболи точкове джерело світла, то кожний промінь після відбиття від гіперболи начебто виходить з іншого фокуса.



9. Поверхнею другого порядку називають геометричне місце точок в просторі, координати яких задовольняють наступному рівнянню

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{10}x+2a_{20}y+2a_{30}z+a_{00}=0$$

причому серед коефіцієнтів a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} є ненульові.

10. Загальне рівняння поверхні другого порядку може задавати порожню множину, точку, пару перетин них площин, пару паралельних площин, циліндри, конус, еліпсоїд, гіперболоїди, параболоїди

Задачі по темі криві та поверхні другого порядку

5.1. Записати рівняння кола з радіусом $R = 7$ і центром в точці $C(2; 3)$.

5.2. Записати рівняння кола з радіусом $R = 5$ і центром в точці $C(–3; 4)$.

5.3. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від початку координат на 5 одиниць. Чи належать цьому геометричному місцю точки $C(1; 6)$ і $D(–3; 4)$?

5.4. Скласти рівняння геометричного місця точок площини, для кожної із яких сума відстаней до точок $F_1(0; -5)$, $F_2(0; 5)$ дорівнює 26.

5.5. Скласти рівняння геометричного місця точок площини, для кожної із яких сума відстаней до точок $F_1(-3; 0)$, $F_2(3; 0)$ дорівнює 10.

5.6. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі Oy симетрично відносно початку координат, якщо:

а) велика піввісь дорівнює $3\sqrt{2}$, мала піввісь дорівнює $2\sqrt{3}$;

б) відстань між фокусами дорівнює 24, мала вісь дорівнює 10;

в) мала вісь дорівнює 12, ексцентриситет дорівнює 0,8;

г) відстань між фокусами дорівнює 6, сума півосей дорівнює 9.

5.7. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо:

а) велика піввісь дорівнює 8, мала піввісь дорівнює 6;

б) відстань між фокусами дорівнює 10, велика піввісь дорівнює 26;

в) велика вісь дорівнює 20, ексцентриситет дорівнює 0,6;

г) відстань між фокусами дорівнює 14, ексцентриситет дорівнює 7/9.

5.8. Знайти півосі, фокуси і ексцентриситет еліпса, заданого рівнянням:
$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1.$$

5.9. Знайти півосі, фокуси і ексцентриситет еліпса, заданого рівнянням:
$$\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{64}=1.$$

5.10. Знайти півосі, фокуси і ексцентриситет еліпса, заданого рівнянням:
$$4x^2+9y^2=1.$$

5.11. Записати рівняння геометричного місця точок площини, для кожної із яких різниця відстаней до точок $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$ дорівнює 8.

5.12. Записати рівняння геометричного місця точок площини, для кожної із яких різниця відстаней до точок $F_1(0; -10)$, $F_2(0; 10)$ дорівнює 12.

5.13. Записати канонічне рівняння гіперболи, фокуси якого розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо:

а) дійсна вісь дорівнює 14, уявна вісь дорівнює 10;

б) відстань між фокусами дорівнює 20, дійсна вісь дорівнює 12;

в) дійсна вісь дорівнює 6, ексцентриситет дорівнює 5/3;

г) відстань між фокусами дорівнює 26, ексцентриситет дорівнює 2,6.

5.14. Знайти півосі, фокуси і ексцентриситет гіперболи, заданого рівнянням: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

5.15. Знайти півосі, фокуси і ексцентриситет гіперболи, заданого рівнянням: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

5.16. Знайти півосі, фокуси і ексцентриситет гіперболи, заданого рівнянням: $x^2-8y^2+8=0$.

5.17. Записати рівняння геометричного місця точок площини, рівно віддалених від указаної точки і прямої $F(1; 0)$, $x = -1$.

5.18. Записати рівняння геометричного місця точок площини, рівно віддалених від указаної точки і прямої $F(0; -3)$, $y = 3$.

5.19. Записати канонічне рівняння параболи, якщо відомо, що:
а) фокус знаходиться в точці $F(4; 0)$;
б) фокус знаходиться в точці $F(0; 3)$;
в) директриса має рівняння $x - 3 = 0$;
г) директриса має рівняння $y - 2 = 0$.

5.20. Задане рівняння параболи $5y^2 - 4x = 0$. Чи належить точка $M(5; -2)$ цій параболі?

5.21. Знайти ексцентриситет кривої другого порядку $4x^2+9y^2=1$

5.22. Знайти ексцентриситет кривої другого порядку $y^2=2x$

5.23. Знайти ексцентриситет кривої другого порядку $4x^2-9y^2=1$

5.24. При якому значенні b ексцентриситет кривої $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$ дорівнює 1,5.

5.25. При якому значенні b ексцентриситет кривої $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$ дорівнює 0,25.

5.26. Визначити, яку криву описує рівняння $x^2+4y^2+6x+8y+1=0$

5.27. Визначити, яку криву описує рівняння $4x^2+4y^2+12x+12y+17=0$

5.28. Визначити, яку криву описує рівняння $x^2-4y^2+12x+32y-28=0$.

5.29. Визначити, яку криву описує рівняння $4x^2-9y^2-8x+36y+32=0$

5.30. Визначити, яку криву описує рівняння $x^2 + y^2 + 3xy + 1 = 0$.

5.31. Визначити, яку криву описує рівняння $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$.

5.32. Записати рівняння кола, діаметром якого є відрізок прямої $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

5.33. Знайти відстань від центра кола $x^2 + y^2 + ay = 0$ до прямої $y = 2(a - x)$

5.34. Еліпс, симетричний щодо оси 0х і прямої х = –5, проходить через точки (–1; 1,8) і (–5; 3). Написати рівняння еліпса і побудувати його.

5.35. Знайти кут між діагоналями прямокутника, вершини якого знаходяться в точках пересічення еліпса $x^2 + 3y^2 = 12l^2$ і гіперболи $x^2 - 3y^2 = 6l^2$.

5.36. Побудувати еліпс $x^2 + 4y^2 = 4$ і параболу $x^2 = 6y$. Знайти площу трапеції, основами якої є велика піввісь еліпса і загальна хорда еліпса і параболи

5.37. Побудувати лінії: 1) $r = a\varphi$; 2) $r = a(1 - \cos\varphi)$; 3) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$; 4) $r = a/\varphi$; 5) $r = a(1 + 2\cos\varphi)$

5.38. Перетворити до полярних координат рівняння ліній: 1) $x^2 - y^2 = a$; 2) $x^2 + y^2 = a$; 3) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$; 4) $y = x$; 5) $x^2 + y^2 = ax$.

5.39. Написати канонічне рівняння кривих другого порядку: 1) $r = \frac{9}{5 - 4\cos\varphi}$;

2) $r = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$; 3) $r = \frac{3}{1 - \cos\varphi}$

5.40. Написати рівняння поверхні, яка утворюється обертанням еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ y = 0$ навколо осі 0*z*.

5.41. Написати рівняння поверхні, яка утворюється обертанням еліпса $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ y = 0$: 1) навколо осі 0*z*; 2) навколо осі 0*x*.

5.42. Написати рівняння поверхні, яка утворюється обертанням прямої $z = y$, $x = 0$: 1) навколо осі 0*y*; 2) навколо осі 0*z*.

5.43. Знайти центр і радіус сфери $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$.

5.44. Написати рівняння циліндричної поверхні з направляючою $y^2 = 4x,\ z = 0$ та утворюючою паралельною вектору **P**(1; 2; 3)

ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ

Відповіді до задач по темі матриці

	а)	б)	в)	г)
1.1.	$-1+i$	2	$2i$	-1
1.2.	$4-3i$	$-5+i$	$14+23i$	$-1.04+0.28i$
1.3.	$-5-5i$	$1-3i$	$4i$	0.5
1.4.	$-1+3i$	$2+2i$	-2	$-i$
1.5.	$14+16i$	$2+13i$	$-6+58i$	$2.16+0.88i$
1.6.	$-5i$	$3-4i$	$-5+i$	$0.5+2.5i$
1.7.	6	$5-i$	$8+4i$	$2-4i$
1.8.	$-3+6i$	$3+4i$	$-6-2i$	$0.25-0.75i$
1.9.	$20+17i$	$-1+14i$	$9+95i$	$1.29+1.02i$
1.10.	$1-i$	1	$1-i$	$-1+i$

1.11. $z=\exp\left(\frac{\pi}{2}i\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

1.12. $z=3\exp(\pi i)=3(\cos(\pi)+i\sin(\pi))$.

1.13. $z=2\exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

1.14. $z=\sqrt{2}\exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

1.15. $z=\sqrt{2}\exp\left(\frac{3\pi}{4}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

1.16. $z=2\exp\left(\frac{\pi}{4}i\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

1.17. $z=\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi}{4}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

1.18. $z=2\exp\left(-\frac{\pi}{3}i\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

1.19. $z=3\exp\left(\frac{\pi}{2}i\right)=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

1.20. $z=2\exp(0i)=2(\cos(0)+i\sin(0))$.

1.21. $k=0;\ e^{-\pi i/6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i;\ k=1; e^{\pi i/2}=i;\ k=2; e^{7\pi i/6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

1.22. $k=0$; $2\exp\left(\frac{\pi}{4}i\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$; $k=1$; $2\exp\left(\frac{3\pi}{4}i\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$; $k = 2$; $2\exp\left(\frac{5\pi}{4}i\right)=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; $k=3$; $2\exp\left(\frac{7\pi}{4}i\right)=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$.

1.23. $k=0$; $\sqrt{2}\exp\left(-\frac{\pi}{8}i\right)$; $k=1$; $\sqrt{2}\exp\left(\frac{7\pi}{8}i\right)$.

1.24. $k=0$; $\sqrt[3]{2}\exp\left(-\frac{\pi}{12}i\right)$; $k=1$; $\sqrt[3]{2}\exp\left(\frac{7\pi}{12}i\right)$; $k=2$; $\sqrt[3]{2}\exp\left(\frac{15\pi}{12}i\right)$.

1.25. $k=0$; $\sqrt[3]{2}\exp\left(\frac{3\pi}{12}i\right)$; $k=1$; $\sqrt[3]{2}\exp\left(\frac{11\pi}{12}i\right)$; $k=2$; $\sqrt[3]{2}\exp\left(\frac{19\pi}{12}i\right)$.

1.26. $k=0$; $\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi}{8}i\right)$; $k=1$; $\sqrt{2}\exp\left(\frac{9\pi}{8}i\right)$.

1.27. $k=0$; $\sqrt[3]{2}\exp\left(\frac{\pi}{12}i\right)$; $k=1$; $\sqrt[3]{2}\exp\left(\frac{9\pi}{12}i\right)$; $k=2$; $\sqrt[3]{2}\exp\left(\frac{17\pi}{12}i\right)$.

1.28. k=0; $\sqrt{2}\exp\left(-\frac{\pi}{6}i\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$; k=1; $\sqrt{2}\exp\left(\frac{5\pi}{6}i\right)=-\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

1.29. $k=0$; $2e^{\pi i/8}$; $k=1$; $2e^{5\pi i/8}$; $k=2$; $2e^{9\pi i/8}$; $k=3$; $2e^{13\pi i/8}$.

1.30. $k=0$; 2; $k=1$; $2e^{\pi i/2}=2i$; $k=2$; –2; $k=3$; $2e^{3\pi i/2}=-2i$.

1.31. $e^{-\pi i/2}=-i$. **1.32.** $54\sqrt{2}e^{\pi i/4}=54\sqrt{2}(1+i)$. **1.33.** $64e^{\pi i/2}=64i$. **1.34.** $4e^{\pi i}=-4$.
1.35. $4\sqrt{2}e^{-\pi i/4}=4\sqrt{2}(1-i)$. **1.36.** $64e^{3\pi i/2}=-64i$.
1.37. $2\sqrt{2}e^{3\pi i/4}=2\sqrt{2}(-1+i)$. **1.38.** $8e^{\pi i}=-8$. **1.39.** $27e^{3\pi i/2}=-27i$. **1.40.** $8e^{\pi i/2}=8i$.
1.41. $z = 1 \pm 2i$. **1.42.** $z_1 = 3$, $z_2 = 3e^{2\pi i/3}$, $z_3 = 3e^{4\pi i/3}$. **1.43.** $z = -1 \pm 3i$. **1.44.** $z_1=2e^{\pi i/4}=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$; $z_2=2e^{3\pi i/4}= =-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$; $z_3=2e^{5\pi i/4}=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; $z_4=2e^{7\pi i/4}=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$. **1.45.** $z = -2 \pm i$. **1.46.** $z_1=e^{\pi i/4}$; $z_2=e^{5\pi i/4}$. **1.47.** $z = 2 \pm 2i$. **1.48.** z = ln(0,2)+i(0,93+2πk), k = 0, ±1, ±2, … **1.49.** $z = 1.5 \pm 2.5i$. **1.50.** z = ln(2)+i(11π/6+2πk) k = 0, ±1, ±2, …. **1.51.** i(3π/2+2πk), k = 0, ±1, ±2, …**1.52.** ln(4)+i(11π/6+2πk), k = 0, ±1, ±2, … **1.53.** i(7π/4+2πk), k = 0, ±1, ±2, …**1.54.** 0,5ln(2)+i(7π/4+2πk), k = 0, ±1, ±2, …**1.55.** 0,5ln(2)+i(3π/4+2πk), k = 0, ±1, ±2, … **1.56.** ln(2)+i(π/4+2πk), k = 0, ±1, ±2, … **1.57.** 0,5ln(2)+i(π/4+2πk), k = 0, ±1, ±2, … **1.58.** ln(2)+i(5π/3+2πk), k = 0, ±1, ±2, … **1.59.** ln(5)+i(0,64+2πk), k = 0, ±1, ±2, … **1.60.** ln(2)+i(π+2πk), k = 0, ±1, ±2, … **1.61.** Однакова розмірність. **1.62.** A, C. **1.63.** **а)** B; **б)** D; **в)** C; **г)** A.

1.64. а) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 \\ -3 & 11 & 21 \\ 12 & -11 & -1 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 11 & -2 & 3 \\ 1 & 22 & 2 \end{pmatrix}$. **1.65.** Так як $a_{ij} = a_{ji}$ і $b_{ij} = b_{ji}$, то $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = c_{ji}$.

1.66. а) $X = \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ -2 & 0 \\ 3 & -19 \end{pmatrix}$; **б)** $X = \begin{pmatrix} -2 & 1/3 \\ 1/3 & -4 \end{pmatrix}$. **1.67. а)** 0; **б)** $\begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ -16 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -3 & -8 & 21 \\ 3 & -8 & -19 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 9 & 5 \end{pmatrix}$. **1.68. а)** (-1); **б)** $\begin{pmatrix} 8 & -12 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

1.69. а) Ширина *A* дорівнює висоті *B*; **б)** Висота *A* дорівнює ширині *B*; **в)** Ширина *A* дорівнює висоті *B*, Висота А дорівнює ширині В

1.70. а) Не існує; **б)** $8\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 8 & 16 \end{pmatrix}$. **1.71.** $AC = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$. $AB = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 6 \\ 42 & 45 & 80 \end{pmatrix}$.

1.72. $m = 9$, $n = 1$. **1.73.** $m = 7$, $n = 6$. **1.74. а)** Ні; **б)** Да; **в)** Да; **г)** Ні; **д)** Ні .

1.75. а) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 39 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 30 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$. **1.76.** $\begin{pmatrix} 39 & -14 & -1 \\ 48 & -8 & 38 \\ 37 & 22 & 149 \\ 112 & -32 & 32 \end{pmatrix}$. **1.77.** $\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$.

1.78. а) $2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **1.79.** $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

1.80. При підстановки матриці *A* в багаточлен отримуємо нульову матрицю.

1.81. а)$\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$; б)$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в)$\begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix}$; г)$\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$; д)$\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.82. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1.83. а)** $\begin{pmatrix} -4 & -4 & 7 \\ 10 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 7 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1.84. $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ -5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$. **1.85.** $BA = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

1.86. а) 34; **б)** –15; **в)** 0. **1.87. а)** 5/3; **б)** –1 и 4; **в)** $\pm 2i$. **1.88. а)** 55; **б)** –31; **в)** 18. **1.89. а)** –3; **б)** 0 і 3; **в)** не при якому α. **1.90. а)** 0; **б)** 0; **в)** 0; **г)** –42047. **1.91. а)** 50; **б)** 3; **в)** 300; **г)** 110.

1.92. а) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; **б)** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; **в)** не існує; **г)** $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

1.93. а) $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 8 & 12 & -6 \end{pmatrix}$; **б)** не існує; **в)** $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **г)** $\frac{1}{48}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Відповіді до задач по темі алгебраїчні рівняння

2.1. $\lambda \neq 1$. **2.2.** $\lambda \neq -2$ і $\lambda \neq 2$. **2.3.** $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -3$; $\lambda \neq 3$. **2.4.** $\lambda \neq -3$. **2.5.** $\lambda \neq -5$ і $\lambda \neq 2$. **2.6.** Будь яке. **2.7.** (2; –1). **2.8.** (–3; 2). **2.9.** (1; –3). **2.10.** (5; –4). **2.11.** (3; 1; 1). **2.12.** (1; 2; –2). **2.13.** (2; –2; 3). **2.14.** (3; 4; 5). **2.15.** (2; –2; 3). **2.16.** система не сумісна. **2.17.** (1; 2; –1). **2.18.** (3; 2; 1). **2.19.** (8/7; –1/7;–3/7). **2.20.** (3; –1; 2).

2.21. $x_1 = 14 - 3x_2$, $x_3 = 7 - 3x_2$ – загальний розв’язок, (14; 0; 7), (0; 14/3; –7), (7; 7/3; 0) – базисні розв’язки.

2.22. $x_1 = 3$, $x_2 = 2 - x_3$ – загальний і (3; 2; 0) – базисний розв’язки.

2.23. $x_1 = 2 + 3x_3 - x_4$, $x_2 = -2 + 3x_4$ – загальний розв’язок, (2; –2; 0; 0), (0; 0; –4/9; 2/3), (0; 4; 0; 2), (0; –2; –2/3; 0), (4/3; 0; 0; 2/3) – базисні розв’язки.

2.24. $x_1 = 4 + x_3 - 2x_4$, $x_2 = 12 - 2x_3 - x_4$ – загальний розв’язок, (4; 12; 0; 0), (10; 0; 6; 0), (0; 10; 0; 2), (0; 0; 4; 4), (0; 20; –4; 0), (20; 0; 0; 12) – базисні розв’язки.

2.25. $x_1 = -12 + x_2 + 4x_3$, $x_4 = 36 - 2x_2 - 9x_3$ – загальний розв’язок, (0; 12; 0; 12), (6; 18; 0; 0), (4; 0; 4; 0), (0; 0; 3; 9), (0; –36; 12; 0), (–12; 0; 0; 36) – базисні.

2.26. $x_1 = 2 - 2x_3 - x_4$, $x_2 = -2 + 10x_3 + 3x_4$ – загальний розв’язок, (0; 4; 0; 2), (2; –2; 0; 0), (4/3; 0; 0; 2/3), (0; 0; –4/9; 2/3), (0; –2; –2/3; 0) – базисні розв’язки.

2.27. $x_1 = 1 + 0{,}8x_3 + 0{,}2x_4$, $x_2 = 2 + 0{,}4x_3 + 0{,}6x_4$ – загальний розв’язок, (1; 2; 0; 0), (–3; 0; –5; 0), (1/3; 0; 0; –10/3), (0; 3/2; –5/4; 0), (0; –1; 0; –5), (0; 0; –1/2; –3) – базисні розв’язки.

2.28. $x_2 = 5 - 5x_1$, $x_3 = 3$ – загальний розв’язок, (0; 5; 3), (1; 0; 3) – базисні.

2.29. $x_1 = -3/5 + 7x_3/5$, $x_2 = 14/5 - x_3/5$ – загальний розв’язок, (–2; 3; –1).

2.30. $x_1 = 2{,}5 + 2x_4$, $x_2 = 3{,}5 + x_3 - 4x_4$ – загальний розв’язок, (2,5; 4,5; 1; 0).

2.31. $x_1 = 0{,}5 + 1{,}5x_2 - x_4/16$, $x_3 = -11x_4/8$ – загальний розв’язок, (1; 1; –22; 16).

2.32. $x_1 = 1$, $x_2 = -1 - x_4$, $x_3 = 2$ – загальний розв’язок, (1; –2; 2; 1).

2.33. $x_1 = 2/3 - 2x_3/3 + x_4$, $x_2 = 4/3 + 5x_3/3 - 2x_4$–загальний розв’язок,(0;3;1; 0)

2.34. $x_1 = -15/4 - 2x_2 - x_5/2$, $x_3 = -3/4 + x_5/2$, $x_4 = -5 + x_5$ – загальний розв’язок, (5; 0,5; 0,25; –3; 2).

2.35. а) $x_3 = 1 + x_1 - x_2$, $x_4 = 2 - x_1 - x_2$; **б)** $x_2 = 4 + 2x_1 - x_3$, $x_4 = 56 + 13x_1 - 8x_3$; **в)** $x_1 = 0{,}5 + 1{,}5x_2 + x_3/22$, $x_4 = -8x_3/11$; **г)** $x_1 = 1, x_3 = 2, x_4 = -1 - x_2$.

2.36. а) $\vec{x}^1$=(–9, 14, 1, 0) і $\vec{x}^2$=(22, –15, 0, 1); **б)** $\vec{x}^1$=(–1/3, 0, 5/6, 1); **в)** $\vec{x}^1$=(2, 1, 0, 0) і $\vec{x}^2$=(2/7, 0, –5/7, 1); **г)** $\vec{x}^1$=(3/7, 18/7, 16/7, 1); **д)** $\vec{x}^1$=(–1, –1, 1, 1, 1); **е)** $\vec{x}^1$=(–1/3, –3/2, 1, 0, 0).

2.37. а) Система має тільки нульовий розв'язок. Фундаментальної системи розв'язань не існує; **б)** $x_4 = (-9x_1 + 3x_2 - 10x_3)/11$, $x_5 = (-3x_1 + x_2 + 4x_3)/11$ – загальне розв'язання. Фундаментальна система розв'язань:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\vec{x}^1$	1	0	0	–9/11	–3/11
$\vec{x}^2$	0	1	0	3/11	1/11
$\vec{x}^3$	0	0	1	–10/11	4/11

в) Система має тільки нульове розв'язання. Фундаментальної системи розв'язань не існує;
г) $x_1 = x_4 - x_5$, $x_2 = x_4 - x_6$, $x_3 = x_4, x_5 = (-3x_1 + x_2 + 4x_3)/11$ – загальне розв'язання. Фундаментальна система розв'язань:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\vec{x}^1$	1	1	1	1	0	0
$\vec{x}^2$	–1	0	0	0	1	0
$\vec{x}^3$	0	–1	0	0	0	1

д) $x_1 = 8x_3 - 7x_4$, $x_2 = -6x_3 + 5x_4$ – загальне розв'язання. Фундаментальна система розв'язань:

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\vec{x}^1$	8	–6	1	0
$\vec{x}^2$	–7	5	0	1

е) $x_1 = -3x_3 - 5x_5$, $x_2 = 2x_3 + 3x_5$; $x_4 = 0$ – загальне розв'язання. Фундаментальна система розв'язань:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\vec{x}^1$	–3	2	1	0	0
$\vec{x}^2$	–5	3	0	0	1

2.38. Строки матриці *A* не утворюють, строки матриці *B* утворюють.
$\vec{x}^1$=(–1/3, 0, 5/6, 1); **в)** $\vec{x}^1$=(2, 1, 0, 0) і $\vec{x}^2$=(2/7, 0, –5/7, 1); **г)** $\vec{x}^1$=(3/7, 18/7, 16/7, 1); **д)** $\vec{x}^1$=(–1, –1, 1, 1, 1); **е)** $\vec{x}^1$=(–1/3, –3/2, 1, 0, 0).

2.39. Власні числа матриці λ_1=–3 і λ_2=3. Власний вектор матриці, що відповідає числу λ_1=–3: $X_1=(\alpha, -\alpha)$, α – *const* (загальний розв'язок системи рівнянь $x_1 = -x_2$). Власний вектор матриці, що відповідає числу λ_1= 3: $X_2=(\alpha, \alpha)$ (загальний розв'язок системи рівнянь $x_1 = x_2$)

2.40. Власні числа матриці λ_1=–3*i* і λ_2=3*i*. Власний вектор матриці, що відповідає числу λ_1=–3*i*: $X_1=(\alpha, -i\alpha)$, α – *const* (загальний розв'язок системи рівнянь $x_2 = -ix_1$). Власний вектор матриці, що відповідає числу λ_2= 3*i*: $X_2=(\alpha, i\alpha)$ (загальний розв'язок системи рівнянь $x_2 = ix_1$).

2.41. Власні числа матриці λ_1= 2 і λ_2= 3. Власний вектор матриці, що відповідає числу λ_1= 2: $X_1=(2\alpha, -\alpha)$, α – *const* (загальний розв'язок системи рівнянь $x_1 = -2x_2$). Власний вектор матриці, що відповідає числу λ_2= 3: $X_2=(\alpha, -\alpha)$ (загальний розв'язок системи рівнянь $x_1 = -x_2$).

2.42. Власні числа матриці $\lambda_1= 2$ і $\lambda_2= 4$. Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_1= 2$: $X_1=(\alpha, -\alpha)$, α – *const* (загальний розв'язок системи рівнянь $x_1= -x_2$). Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_2= 4$: $X_2=(\alpha, \alpha)$ (загальний розв'язок системи рівнянь $x_1= x_2$).

2.43. Власні числа матриці $\lambda_1= 3$ і $\lambda_2=\lambda_3=1$. Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_1= 3$: $X_1=(\alpha, \alpha, \alpha)$, α – *const*. Власний вектор матриці, що відповідає числам $\lambda_2=\lambda_3=1$: $X_2= X_3=(1-\alpha, 1, \alpha)$.

2.44. Власні числа матриці $\lambda_1= \lambda_2= 5$ і $\lambda_3=3$. Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_1= 5$: $X_1= X_2= (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2)$, α_1, α_2 – *const*. Власний вектор матриці, що відповідає числам $\lambda_3=3$: $X_3=(-\alpha, \alpha, -\alpha)$, α – *const*.

2.45. Власні числа матриці $\lambda_1= \lambda_2= 3$ і $\lambda_3=1$. Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_1= \lambda_2= 3$: $X_1= X_2= (\alpha, 0, 0)$, α – *const*. Власний вектор матриці, що відповідає числам $\lambda_3=1$: $X_3=(0, \alpha, \alpha)$.

2.46. Власні числа матриці $\lambda_1= 2$; $\lambda_2= 1-\sqrt{3}$ і $\lambda_3=1+\sqrt{3}$. Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_1= 2$: $X_1=(-2\alpha, \alpha, 0)$, α – *const*. Власний вектор матриці, що відповідає числам $\lambda_2= 1-\sqrt{3}$: $X_2=(-\sqrt{3}, \alpha, \alpha)$. Власний вектор матриці, що відповідає числам $\lambda_3=1+\sqrt{3}$: $X_3=(\sqrt{3}, \alpha, \alpha)$.

2.47. Власні числа матриці $\lambda_1= \lambda_2= 5$ і $\lambda_3=3$. Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_1= \lambda_2= 5$: $X_1= X_2= (0, \alpha, \alpha)$, α – *const*. Власний вектор матриці, що відповідає числам $\lambda_3= 3$: $X_3=(\alpha, 0, -\alpha)$.

2.48. Власні числа матриці $\lambda_1= 7$; $\lambda_2= 3$ і $\lambda_3=5$. Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_1= 7$: $X_1=(-\alpha, -\alpha, \alpha)$, α – *const*. Власний вектор матриці, що відповідає числам $\lambda_2= 3$: $X_2=(\alpha, -\alpha, \alpha)$. Власний вектор матриці, що відповідає числам $\lambda_3=5$: $X_3=(\alpha, \alpha, \alpha)$.

2.49. X_2 з власним значенням 3 і X_3 з власним значенням 2.

2.50. X_1 з власним значенням –3. **2.51.** X_2 з власним значенням 5.

Відповіді до задач по темі вектори

3.1. $\overrightarrow{AB}=(-2; 2; -1)$. **3.2.** $\overrightarrow{AB}=(-3; 0; 4)$. **3.3.** $\overrightarrow{AB}=(-6; -8)$. **3.4.** $\overrightarrow{AB}=(5; 2; -6; 2)$. **3.5.** $\overrightarrow{AB}=(1; 3; 7; 8; 3)$. **3.6.** $\overrightarrow{AB}=(1; \pi/2; \pi/3)$.

3.7. Лінійно незалежна. **3.8.** Лінійно незалежна. **3.9.** Лінійно незалежна. **3.10.** Лінійно незалежна. **3.11.** $r = 4$. **3.12.** $r = 2$. **3.13.** $r =3$. **3.14.** $r = 2$. **3.15.** $r = 3$. **3.16.** $r = 2$, $(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)$, $(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_3)$, $(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_4)$, $(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)$, $(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_4)$, $(\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_4)$. **3.17.** $r = 2$ $(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)$. **3.18.** $r = 2$, $(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)$, $(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_3)$, $(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_4)$, $(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)$, $(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_4)$, $(\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_4)$. **3.19.** $r = 4$, $(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_4)$. **3.20.** $\boldsymbol{X}_F = (1; 3; 1)$. **3.21.** $\boldsymbol{X}_F = (5; -28; -26)$. **3.22.** $\boldsymbol{X}_F = (-3.5; -6; 0.5)$. **3.23.** $5\sqrt{2}$. **3.24.** 5. **3.25.** 3. **3.26.** 12. **3.27.** 7. **3.28.** 9. **3.29.** 27. **3.30.** 10,05 **3.31.** 15,78. **3.32.** 21,02. **3.33.** 6,4. **3.34.** 12,73. **3.35.** 10. **3.36.** 6. **3.37.** 0. **3.38.** 6. **3.39.** $4\sqrt{2}$. **3.40.** $6\sqrt{3}$. **3.41.** 5. **3.42.** 17. **3.43.** 10. **3.44.** –13. **3.45.** 9. **3.46.** 20. **3.47.** π (180°). **3.48.** 0. **3.49.** $\pi/2$ (90°). **3.50.** $3\pi/4$ (135°). **3.51.** 1,24 рад (70,89°). **3.52.** 1,82 рад (104,52°). **3.53.** $3/\sqrt{2}$. **3.54.** –21. **3.55.** 0. **3.56.** 5. **3.57.** –6. **3.58.** 0. **3.59.** (–25,

–20, 5). **3.60.** 11. **3.61.** –28. **3.62.** 37.**3.63.** 0. **3.64.** 19,8. **3.65.** 3 **3.66.** 8,66. **3.67.** 3,5. **3.68.** 3. **3.69.** (2; 5; –4). **3.70.** (7; 17; 1). **3.71.** (0; 0; 0). **3.72.** (15; –1; –5). **3.73.** (2; 5; –4). **3.74.** (12; 12; 4). **3.75.** –768. **3.76.** –248. **3.77.** –136. **3.78.** 187. **3.79.** –473. **3.80.** –2532. **3.81.** 4851. **3.82.** 13844,5. **3.83.** 4882,5. **3.84.** 14011. **3.85.** 33562,2. **3.86.** 22680. **3.87.** 910. **3.88.** 19. **3.89.** 174. **3.90.** 69,5. **3.91.** 153,5. **3.92.** 52,5. **3.93.** 5,14. **3.94.** 19. **3.95.** 1,73. **3.96.** -0,2(2). **3.97.** 0,75. **3.98.** 0. **3.99.** x = 36, y = –2. **3.100.** x = –1,5, y = 5,25. **3.101** x = –0,1875, y = 1,6. **3.102.** x = –13,3(3), y = =0,208(3). **3.103.** x = 0, y = 0. **3.104.** x = 1,6, y = –1. **3.105.** x = –3,2. **3.106.** x = 35,6(6). **3.107** x = 0,423. **3.108.** x = 0,1(1). **3.109.** x_1 = –0,167, x_2= 0. **3.110.** x_1 = –0,873, x_2= 6,873. **3.111** V = 51. **3.114.** $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$.

Відповіді до задач по прямі та площини

4.1. 4. **4.2.** 5. **4.3.** 9. **4.4.** 2. **4.5.** –3. **4.6.** –0,8. **4.7** 0,2 **4.8.** –5. **4.9.** –9. **4.10.** 1. **4.11.** 0,998. **4.12.** 0,861. **4.13.** 1,889. **4.14.** 9,17. **4.15.** 8. **4.16.** (8; –2). **4.17.** –2. **4.18.** 16. **4.19.** –2. **4.20.** 0,96. **4.21.** 2,83. **4.22.** –3. **4.23.** 5,78. **4.24.** 2,5. **4.25.** –4. **4.26.** а) (17; –2; 19), б) (4; 0; –5), в) (10; 4; –3). **4.27.** а) 2; –3; 4), б) (–1; –2; 3), в) (0; 3; –4). **4.28.** $-3x + y + 23 = 0$. **4.29.** $6/\sqrt{5}$. **4.30.** $\sqrt{17}$. **4.31.** $\sqrt{6}$. **4.32.** $2\sqrt{2}$.

Відповіді до задач по темі криві та поверхні другого порядку

5.1. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 49$. **5.2.** $(x+5)^2 + (y+6)^2 = 25$. **5.3.** $x^2 + y^2 = 25$, ні, так. **5.4.** $x^2/144 + y^2/169 = 1$. **5.5.** $x^2/25 + y^2/16 = 1$. **5.6.** $x^2/25 + y^2/169 = 1$. **5.7** $x^2/64 +$ $+ y^2/36 = 1$. **5.8.** $a = 6$; $b = 2\sqrt{5}$; $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$; $\varepsilon = 2/3$. **5.9.** $a = 2\sqrt{7}$; $b = 8$; $F_1(0; -6)$, $F_2(0; 6)$; $\varepsilon = 3/4$. **5.10.** $a = 1/2$; $b = 1/3$; $F_1(-\sqrt{5}/6; 0)$, $F_2(\sqrt{5}/6; 0)$; $\varepsilon =$ $\sqrt{5}/3$. **5.11.** $x^2/16 - y^2/9 = 1$. **5.12.** $-x^2/64 + y^2/36 = 1$. **5.13.** $x^2/49 - y^2/25 = 1$. **5.14.** $a = 4$; $b = 3$; $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$; $\varepsilon = 5/4$, $y = \pm 3x/4$. **5.15.** $a = 8$; $b = 6$; $F_1(-10; 0)$, $F_2(10; 0)$; $\varepsilon = 5/4$, $y = \pm 3x/4$. **5.16.** $a = \sqrt{8}$; $b = 1$; $F_1(0; -3)$, $F_2(0; 3)$; $\varepsilon = 3/\sqrt{8}$, y $= \pm x/\sqrt{8}$. **5.17.** $y^2 = 4x$. **5.18.** $x^2 = -4y$. **5.19.** а) $y^2 = 16x$; б) $x^2 = 9y$; в) $y^2 = -6x$; г) x^2 $= -4x$. **5.20.** Так. **5.21.** 0,745. **5.22.** 1. **5.23.** 1,2. **5.24.** 2,24. **5.25.** 1,9. **5.26.** Еліпс. **5.27.** Окружність. **5.28.** Дві прямі $(x+6)^2 - 4(y-4)^2 = 0$. **5.29.** Гіпербола – $4x^2 + 9y^2 = 64$. **5.30.** Гіпербола. **5.31.** Точка $C(-1; 3)$. **5.32.** $x^2 + y^2 - ax - by = 0$. **5.33.** $a\sqrt{5/2}$. **5.34.** $(x^2 + 10x)/25 + y^2/9 = 0$. **5.35.** $\arctan(3/4)$. **5.36.** $1 + \sqrt{3}/2$. **5.37.** 1) Архімедові спіраль; 2) кардіоїда; 3) лемніската; 4) гіперболічна спіраль; равлик Паскаля. **5.38.** 1) $r^2 = a^2/\cos 2\varphi$; 2) $r = a$; 3) $r = p/\cos(\varphi - \alpha)$; 4) $\tan\varphi = 1$; 5) $r = a\cos\varphi$. **5.39.** 1) $x^2/25 + y^2/9 = 1$; 2) $x^2/16 - y^2/9 = 1$; 3) $y^2 = 6x$. **5.40.** $(x^2 + y^2)/a^2 + z^2/c^2 = 1$. **5.41.** $(x^2 + y^2)/a^2 - z^2/c^2 = 1$. **5.42.** 1) $x^2 + z^2 = y^2$; 2) $x^2 + y^2 = z^2$. **5.43.** $C(1{,}5; -2{,}5; 2)$, $R = 2{,}5\sqrt{2}$. **5.44.** $(3x^2 - 2z)^2 = 12(13x - z)$.

Навчальне видання

СТОРОЖЕНКО Ігор Петрович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЧАСТИНА І

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА І АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник