МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

У двох частинах

Частина 1

Київ 2021

УДК 517.1/.3 (075.8)
В 558

Автори: *О. П. Олійник* – старш. викладач;
Н. П. Тупко – канд. фіз.-мат. наук, доц.;
О. М. Гришко – старш. викладач;
В. О. Варивода – асистент

Рецензенти: *С. І. Ляшко* – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Київський національний університет імені Тараса Шевченка);
Д. Я. Требенко – канд. фіз.-мат. наук, доц. (Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова);
Н. В. Рева – кан. фіз.-мат. наук, доц. (Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»)

Рекомендовано вченою радою Національного авіаційного університету (протокол № 4 від 23.05.2018).

В 558 **Вища математика** : навч. посібник : у 2 ч. / О. П. Олійник, Н. П. Тупко, О. М. Гришко, В. О. Варивода. – Ч. 1. – К. : НАУ, 2021. – 216 с.

ISBN 978-966-932-155-8

Навчальний посібник містить три модулі: елементи лінійної і векторної алгебри та аналітичної геометрії; вступ до математичного аналізу та диференціальне числення функції однієї змінної; інтегральне числення функції однієї змінної. Наведено приклади розв’язання усіх типових задач. До кожного модуля розроблена контрольна робота, яка містить тридцять варіантів однотипних завдань до виділених задач. Подано рекомендації до розв’язання задач контрольних робіт.

Для здобувачів вищої освіти ОС «Бакалавр» заочної та дистанційної форм нав-чання.

УДК 517.1/.3 (075.8)

ISBN 978-966-932-155-8

ВСТУП

Курс «Вища математика» належить до фундаментальних дисциплін, що вивчаються на всіх технічних та економічних спеціальностях закладів вищої освіти.

Пропонований навчальний посібник розроблено для здобувачів вищої освіти ОС «Бакалавр» заочної форми навчання з урахуванням програм з вищої математики вищих технічних закладів освіти і розрахований на кредитно-модульну систему навчання. Він охоплює матеріал трьох модулів: елементи лінійної і векторної алгебри та аналітичної геометрії; вступ до математичного аналізу та диференціальне числення функції однієї змінної; інтегральне числення функції однієї змінної.

Теми модулів містять теоретичну та практичну частини. У теоретичній частині розглянуто основні положення, найбільш складний для розуміння студентами матеріал подано у вигляді зауважень. Наведено алгоритми розв'язання всіх типових задач до кожної теми, які демонструються на розв'язаних прикладах, з посиланням при цьому як на теоретичний, так і на ілюстрований матеріал, якщо такий було подано для наочності.

Для здобувачів вищої освіти заочної форми навчання навчальними планами передбачено домашні контрольні роботи (ДКР), які студенти виконують в міжсесійний період. Аудиторні контрольні роботи (АКР) можуть бути проведені під час практичних занять за присутності викладача у разі необхідності додаткового оцінення рівня знань студентів з тієї чи іншої теми. У зв'язку з цим до кожного модуля подано контрольну роботу, що охоплює відповідно усі його теми. Кожна контрольна робота містить 30 варіантів однотипних завдань до кожної задачі контрольної роботи, згрупованих здебільшого за методами розв'язання.

Оскільки для різних спеціальностей відводиться різна кількість годин для вивчення вищої математики, то ДКР визначаються робочими навчальними програмами. Вони являють собою окремо згруповані задачі з пропонованих у посібнику контрольних робіт. Викладач може визначати АКР на свій розсуд, як окремо підібрані задачі контрольних робіт з урахуванням робочих навчальних програм.

Кожна домашня контрольна робота містить 30 варіантів. Номер варіанта студенти визначають за двома останніми цифрами номера залікової книжки за такою схемою. Нехай $n = k_1 k_2$ – число, утворене з цих цифр, тоді

- якщо $00 < n \le 09$, то номер варіанта буде k_2 ;
- якщо $10 \le n \le 30$, то номер варіанта буде n ;
- якщо $30 < n \le 60$, то номер варіанта буде $n - 30$;
- якщо $60 < n \le 90$, то номер варіанта буде $n - 60$;
- якщо $90 < n \le 99$, то номер варіанта буде $n - 90$;
- якщо $n = 00$, то номер варіанта буде 30 .

Варіанти аудиторних контрольних робіт можуть визначатися викладачем у довільному порядку під час її проведення.

Виконану ДКР студент має оформити охайно у зошит або подати на стандартних скріплених аркушах А4. На титульному аркуші необхідно вказати дисципліну, номер контрольної роботи, прізвище, ім’я та по батькові студента, номер залікової книжки, спеціальність, курс та номер групи, номер варіанта. Після перевірки ДКР викладачем за наявності зауважень та грубих помилок студент зобов’язаний повторно розв’язати неправильно виконані задачі і знову подати їх на перевірку. У разі позитивної оцінки викладача робота обов’язково підлягає захисту.

Самостійне виконання контрольних робіт є важливим етапом у засвоєнні навчального матеріалу з цієї дисципліни. Для успішного самостійного виконання кожної контрольної роботи рекомендуємо спочатку ознайомитися із теоретичним матеріалом та розглянути наведені у цьому посібнику приклади розв’язання аналогічних задач. Щоб допомогти студентам в оформленні та розв’язанні контрольних робіт у посібнику наведено вказівки до розв’язання кожної із задач контрольних робіт. У разі потреби більш детально і ґрунтовно опанувати теоретичний матеріал студенти можуть звернутися до додаткових джерел, які наведені у списку рекомендованої літератури.

Навчальний посібник призначений для студентів заочної форми навчання, але може успішно використовуватись і студентами денної та дистанційної форм навчання, особливо для самостійного засвоєння навчального матеріалу.

МОДУЛЬ 1

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ І ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Для успішного самостійного виконання контрольної роботи 1 необхідно засвоїти основні теоретичні положення з теорії визначників, матриць, систем лінійних алгебраїчних рівнянь, векторної алгебри та аналітичної геометрії.

Даний модуль крім необхідного теоретичного матеріалу містить велику кількість розв'язаних задач, аналогічних тим, що пропонуються у контрольній роботі 1.

СТРУКТУРА МОДУЛЯ

1.1. Визначники та їх обчислення.
1.2. Матриці.
1.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
1.4. Вектори.
1.5. Пряма лінія на площині.
1.6. Площина.
1.7. Пряма лінія у просторі. Взаємне розташування прямої і площини.
1.8. Лінії другого порядку.

Базисні поняття. 1. Визначник. 2. Матриця. 3. Система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). 4. Вектор. 5. Проекція вектора. 6. Базис. Координати вектора. 7. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів. 8. Рівняння лінії на площині та у просторі. 9. Площина. 10. Лінії другого порядку.

Основні задачі. 1. Обчислення визначників. 2. Виконання операцій над матрицями. 3. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. 4. Дослідження СЛАР. 5. Виконання операцій над векторами. 6. Застосування скалярного, векторного та мішаного добутків до розв'язання геометричних задач. 7. Складання рівнянь прямих та площин за різними елементами. 8. Розгляд взаємного розташування прямих та площин. 9. Побудова кривих другого порядку.

ЗНАННЯ ТА ВМІННЯ, ЯКІ МАЄ НАБУТИ СТУДЕНТ

1. Знання на рівні понять, означень, формулювань

1.1. Визначники другого і третього порядків.

1.2. Матриці та дії над ними. Обернена матриця.

1.3. Мінор, ранг матриці.

1.4. Визначені, невизначені, сумісні, несумісні СЛАР.

1.5. Метод Гаусса розв’язання СЛАР.

1.6. Застосування теореми Кронекера−Капеллі до дослідження СЛАР.

1.7. Геометричний вектор, лінійні операції над векторами.

1.8. Лінійна залежність і незалежність векторів. Базис на площині та у просторі.

1.9. Координати вектора, лінійні операції над векторами в координатній формі.

1.10. Скалярний добуток двох векторів.

1.11. Векторний добуток двох векторів.

1.12. Мішаний добуток трьох векторів.

1.13. Різні рівняння прямої лінії на площині (типові задачі на складання рівняння прямої).

1.14. Криві другого порядку – коло, еліпс, гіпербола, парабола.

1.15. Площина. Різні рівняння площини.

1.16. Різні рівняння прямої лінії у просторі.

2. Вміння у розв’язанні задач

2.1. Обчислювати визначники другого і третього порядків, уміти розкладати визначник за елементами довільного рядка чи стовпчика.

2.2. Знаходити координати вектора, його модуль, орт, кут між векторами.

2.3. Знаходити суму, різницю векторів, їх скалярний, векторний та мішаний добутки.

2.4. Обчислювати за допомогою векторів площу трикутника, об’єм піраміди.

2.5. Вміти розкладати вектори за базисними векторами.

2.6. Знаходити суму, різницю, добуток матриць, обернену матрицю.

2.7. Знаходити ранг матриці.

2.8. Розв’язувати СЛАР методом Крамера, матричним методом.

2.9. Розв'язувати довільні СЛАР методом Гаусса.

2.10. Аналізувати сумісність СЛАР за теоремою Кронекера−Капеллі.

2.11. Складати рівняння прямих та площин за різними даними елементами.

2.12. Знаходити кути між прямими та між площинами, а також кут між прямою і площиною; досліджувати паралельність та перпендикулярність прямих (площин).

2.13. Знаходити точку перетину прямої і площини.

2.14. Зводити рівняння ліній другого порядку до канонічного вигляду і будувати їхні графіки.

1.1. ВИЗНАЧНИКИ

Визначники другого і третього порядків. Властивості визначників. Мінори та алгебраїчні доповнення елементів визначників. Обчислення визначників вищих порядків.

Література: [1, розд. 1], [3, розд. 2, п. 3], [6, мод. 1, пп. 1.1–1.4].

1.1.1. Визначники другого і третього порядків

Слід зауважити, що поняття визначника застосовують при розгляді кожної теми модуля 1.

Визначником другого порядку називають вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Наприклад, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 5 = 5.$

Числа a_{ij} $(i = \overline{1,2}; j = \overline{1,2})$ – *елементи визначника*, де i – номер рядка, j – номер стовпця.

Визначником третього порядку називають вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (1.1)$$

Аналогічно числа a_{ij} – *елементи визначника*, де i – номер рядка, j – номер стовпця, $i=\overline{1,3}$; $j=\overline{1,3}$. При цьому елементи a_{11}, a_{22}, a_{33} утворюють головну діагональ визначника, а елементи a_{13}, a_{22}, a_{31} – другорядну діагональ.

Для обчислення визначника третього порядку запропонуємо зручне правило – правило *Саррюса*.

У початковому визначнику за третім стовпцем слід дописати ще раз перший і другий стовпці: $\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$.

Для обчислення значення визначника необхідно утворити зі знаком «плюс» алгебраїчну суму добутків елементів, розташованих на головній діагоналі визначника, і на діагоналях, які проводять паралельно до неї, а зі знаком «мінус» узяти добутки елементів, розміщених на другорядній діагоналі та на паралельних до неї діагоналях.

1.1.2. Мінори та алгебраїчні доповнення елементів визначника

Нехай визначник має n рядків і n стовпців (визначник n-го порядку):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} $(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n})$ визначника Δ n-го порядку називають визначник $(n-1)$-го порядку, одержаний з Δ вилученням i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких міститься елемент a_{ij}.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ визначають за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Так, для одержання мінора M_{12} і алгебраїчного доповнення A_{12} елемента визначника a_{12} викреслюють перший рядок і другий стовпець. Наприклад, у визначнику четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \\ -3 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

мінор M_{12} і алгебраїчне доповнення A_{12} мають відповідно вигляд:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -M_{12}.$$

1.1.3. Основні властивості визначників

1. Визначник не зміниться, якщо всі його рядки замінити відповідними стовпцями (стовпці при цьому замінюються відповідними рядками).

2. Якщо всі елементи рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

3. Якщо два рядки або два стовпці визначника поміняти місцями, то визначник змінить знак на протилежний.

4. Визначник, який має два однакових рядки (стовпці), дорівнює нулю.

5. Спільний множник елементів будь-якого рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.

6. Якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) пропорційні елементам іншого рядка (стовпця), то визначник дорівнює нулю.

7. Якщо кожний елемент i-го рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник можна подати як суму двох визначників, один з яких у i-му рядку має перші зі згаданих доданків, а інший визначник – другі доданки, при цьому елементи інших рядків у всіх трьох визначників співпадають.

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), які помножили на одне й те саме число.

1.1.4. Обчислення визначників n-го порядку

Теорема 1.1 (*Лапласа*). Визначник дорівнює сумі добутків елементів довільного його рядка (або стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Ця властивість, яку називають *розкладанням визначника за елементами певного рядка* (*або стовпця*), є способом обчислення визначника будь-якого порядку. Наприклад, розкладання визначника n-го порядку за елементами i-го рядка має вигляд:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}. \tag{1.2}$$

Таким чином, теорема Лапласа зводить обчислення визначника n-го порядку до обчислення n відповідних алгебраїчних доповнень, які виражаються через визначники $(n-1)$-го порядку.

Зауваження 1.1. За наявності у визначнику нульових елементів відповідні їм алгебраїчні доповнення обчислювати не потрібно, оскільки добуток нуля на будь-яке число дорівнює нулю. При застосуванні теореми Лапласа для обчислення визначника доцільно спочатку збільшити кількість нульових елементів, використовуючи властивості визначників.

Приклад 1.1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання

Обчислення Δ за означенням

Знайдемо визначник третього порядку за формулою (1.1):

$$\Delta = 2\cdot(-2)\cdot 4 + 1\cdot 4\cdot 3 + (-3)\cdot 0\cdot(-1) - 1\cdot(-2)\cdot(-1) -$$

$$-2\cdot 0\cdot 3 - (-3)\cdot 4\cdot 4 = -16 + 12 - 2 + 48 = 42.$$

Обчислення Δ за теоремою Лапласа

Тепер за формулою (1.2) розкладемо визначник, наприклад, за елементами другого рядка (рядок обрали через наявність у ньому нульового елемента):

$$\Delta = -4\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot A_{23} = 60 - 18 = 42.$$

Обчислення Δ комбінованим методом

Оскільки в третьому стовпці заданого визначника вже міститься нульовий елемент, то для розкладання визначника оберемо цей стовпець і перед застосуванням теореми Лапласа здійснимо перетворення: додамо до елементів третього рядка відповідні елементи першого рядка, які попередньо помножили на (-4). Тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1-8 & 3+12 & 4-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -9 & 15 & 0 \end{vmatrix}.$$

Далі маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -9 & 15 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -9 & 15 \end{vmatrix} = 60 - 18 = 42.$$

1.2. МАТРИЦІ

Матриця, види матриць, дії над матрицями. Обернена матриця та її знаходження. Поняття мінора довільного порядку, ранг матриці та його обчислення.

Література: [1, розд. 2], [3, розд. 2, п. 2.3], [4, розд. 1, §2].

1.2.1. Означення та види матриць

Матрицею називають прямокутну таблицю чисел (*елементів матриці*). Термін «матриця» походить від латинського слова «matrix», яке означає початок, і вперше був запроваджений Дж. Сильвестром у 1850 році. Позначають матриці великими латинськими літерами A, B, C, … , а їхні елементи – відповідно $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \ldots$ $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n} \right)$. При цьому i – номер рядка, а j – номер стовпця, на перетині яких міститься елемент.

Якщо в матриці A поміняти місцями рядки і стовпці, то одержимо матрицю, яку називають *транспонованою* до матриці A та позначають A^{T}.

Матрицю A з елементами a_{ij} розміру $m \times n$, тобто таку, що має m рядків та n стовпців, позначають так:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Інколи матрицю A розміру $m\times n$ зручно записати компактно:

$$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n} \text{ або } A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right).$$

Якщо $m=n$, то утворюється квадратна матриця n-го порядку

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

в якій елементи $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ визначають головну діагональ, а елементи $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ – другорядну діагональ.

Квадратні матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

називають відповідно *трикутною, діагональною* та *одиничною.*

Матриці вигляду $A_{n\times 1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$ та $A_{1\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ мають назви *матриця-рядок* і *матриця-стовпець* відповідно.

Кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність певне число – визначник матриці A, який позначають Δ_A або $\det(A)$ і утворюють з елементів цієї матриці:

$$\det(A) = \Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Зауваження 1.2. Поняття визначник матриці A має сенс лише у випадку, коли A є квадратною матрицею.

1.2.2. Основні дії над матрицями

Сумою двох матриць A і B однакового розміру $m \times n$ називають матрицю $C = A + B$ того ж розміру $m \times n$, елементи якої c_{ij} дорівнюють сумам відповідних елементів матриць A і B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ де } i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}.$$

Добутком матриці A розміру $m \times n$ на число λ називають матрицю $B = \lambda A$ того ж розміру $m \times n$, елементи якої дорівнюють добутку відповідних елементів матриці A на число λ:

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \text{ де } i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}.$$

Операція множення матриць доцільна лише у випадку, коли кількість стовпців матриці, яку множимо, дорівнює кількості рядків матриці, на яку множимо. *Добутком* матриці A розміру $m \times n$ на матрицю B розміру $n \times p$ називають матрицю $C = AB$ розміру $m \times p$, кожен елемент c_{ij} якої дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Наслідком операції множення матриць є піднесення квадратної матриці до натурального степеня A^n, $n \in N$:

$$A^1 = A,\ A^2 = A \cdot A,\ A^3 = A^2 \cdot A, \dots .$$

При цьому беруть $A^0 = E$.

Безпосереднім множенням можна переконатись, що добуток довільної матриці на відповідну одиничну матрицю дорівнює даній матриці: $AE = EA = A$.

Зауваження 1.3. Множення матриць не комутативне, тобто у загальному випадку $AB \neq BA$ (за умови, що добутки AB та BA мають сенс).

Для виконання операції *транспонування* матриці (1.3) достатньо стовпці і рядки матриці $A_{m\times n}$ записати відповідно рядками і стовпцями транспонованої матриці $A^{\mathrm{T}}{}_{n\times m}$:

$$A^{\mathrm{T}}{}_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.2. Знайти матрицю $D = (2A - 3B)C^{\mathrm{T}}$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 6 & -8 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 6 & -3 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & -12 \end{pmatrix};$$

$$C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-2) + (-2)\cdot 1 + 5\cdot 0 & (-1)\cdot 3 + (-2)\cdot 2 + 5\cdot(-1) \\ 0\cdot(-2) + (-5)\cdot 1 + (-12)\cdot 0 & 0\cdot 3 + (-5)\cdot 2 + (-12)\cdot(-1) \end{pmatrix}.$$

Отже, шукана матриця $D = (2A - 3B)C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2.3. Обернена матриця. Матричні рівняння

Квадратну матрицю A називають *невиродженою*, якщо її визначник $\Delta_A \neq 0$. Кожна невироджена матриця A n-го порядку має *обернену матрицю* A^{-1} того ж порядку таку, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Обернену матрицю A^{-1} визначають за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \text{ де } \Delta_A \neq 0. \qquad (1.4)$$

Тобто, обернену матрицю A^{-1} знаходять як добуток числа $\dfrac{1}{\Delta_A}$ та транспонованої матриці, що утворена з алгебраїчних доповнень A_{ij} до елементів a_{ij} матриці A.

Нехай потрібно знайти невідому матрицю X, яка задовольняє рівняння $XA = B$, де A – невироджена матриця. Таке рівняння називають *матричним.*

Після множення справа обох частин розглянутого матричного рівняння на A^{-1} послідовно одержують:

$$(XA)A^{-1} = BA^{-1},\; X(AA^{-1}) = BA^{-1},\; XE = BA^{-1},\; X = BA^{-1}.$$

Отже, розв'язок рівняння $XA = B$ знаходять за формулою:

$$X = BA^{-1}. \qquad (1.5)$$

Аналогічно шукають розв'язок матричного рівняння $AX = B$, помноживши зліва обидві його частини на обернену матрицю A^{-1}:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B,\; (AA^{-1})X = A^{-1}B,\; EX = A^{-1}B, \text{ звідки маємо}$$

$$X = A^{-1}B. \qquad (1.6)$$

Приклад 1.3. Розв'язати матричне рівняння $XA = B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -13 & 4 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Обчислимо визначник матриці A:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -13 & 4 \\ 5 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -13 & 4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -13 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -27 + 53 = 26 \neq 0.$$

Оскільки $\Delta_A \neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1}. Знайдемо її.

Алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -13 & 4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -27; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -13 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 53;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -13 & 4 \end{vmatrix} = 13; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -13 \end{vmatrix} = -13.$$

Тому за формулою (1.4): $A^{-1} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} -27 & -3 & 13 \\ 8 & -2 & 0 \\ 53 & 3 & -13 \end{pmatrix}$, а за (1.5):

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{26}\begin{pmatrix} -27 & -3 & 13 \\ 8 & -2 & 0 \\ 53 & 3 & -13 \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 113 & 1 & -13 \\ 308 & 14 & -78 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{113}{26} & \frac{1}{26} & -\frac{1}{2} \\ \frac{154}{13} & \frac{7}{13} & -3 \end{pmatrix}.$$

Вказівка 1.1. При розв’язанні матричних рівнянь в задачі 1.5 контрольної роботи 1 актуальними будуть формули (1.4)–(1.6). При цьому рекомендуємо звернути увагу на приклад 1.3.

1.2.4. Ранг матриці

Розглянемо матрицю A розміру $m \times n$ (1.3). *Мінором* k*-го порядку* ($k \le \min\,(m,n)$) матриці A називають визначник k-го порядку, який утворюють з елементів матриці, що містяться на перетині довільних k рядків і k стовпців цієї матриці. Наприклад, для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ мінором третього порядку буде визначник самої матриці, а мінорами другого порядку будуть визначники:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Рангом $r(A)$ матриці A називають число, яке дорівнює найбільшому порядку відмінного від нуля мінора цієї матриці. Тобто, якщо серед усіх мінорів матриці A знайдеться хоча б один відмінний від нуля мінор k-го порядку, тоді як усі мінори $(k+1)$-го порядку дорівнюють нулю, то $r(A)=k.$

Одним зі способів обчислення рангу матриці є *метод обвідних мінорів*, за яким спочатку знаходять відмінний від нуля мінор k-го порядку $M^{(k)}$ і надалі розглядають лише ті мінори $(k+1)$-го порядку, що містять у собі (обводять) мінор $M^{(k)}$. Якщо всі вони дорівнюють нулю, то ранг матриці $r(A)=k.$ Якщо серед них трапився ненульовий мінор $(k+1)$-го порядку, то описану процедуру повторюють вже для цього мінору $(k+1)$-го порядку.

На практиці при великому розмірі матриці A для обчислення її рангу раціональніше застосовувати *метод елементарних перетворень*, до яких належать: перестановка двох рядків (стовпців); множення елементів рядка (стовпця) на один і той самий відмінний від нуля множник; додавання до елементів одного рядка (стовпця) елементів іншого рядка (стовпця), які попередньо помножили на один і той самий множник. Якщо над рядками або стовпцями матриці A виконати елементарне перетворення, то її ранг не зміниться, що випливає з основних властивостей визначників.

За допомогою елементарних перетворень вихідну матрицю зводять до *ступінчастої* матриці, тобто до такої, яка має таку властивість: якщо в деякому її рядку перший відмінний від нуля елемент знаходиться у s-му стовпчику, то у всіх розташованих нижче рядках перші s елементів дорівнюють нулю. Тоді ранг вихідної матриці дорівнює кількості ненульових рядків отриманої ступінчастої матриці (ненульовий рядок матриці – це рядок, який має хоча б один відмінний від нуля елемент).

Ранг матриці з усіма нульовими елементами вважають таким, що дорівнює нулю.

Зауваження 1.4. Для рангу матриці розміру $m \times n$, у якої хоча б один з її елементів відмінний від нуля, має місце обмеження $1 \le r\left(A_{m\times n}\right) \le \min\ (m,n)$.

Приклад 1.4. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & -4 & -21 \\ 3 & 3 & -8 & -31 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Метод елементарних перетворень

Для зручності поміняємо місцями перший та другий рядки матриці. Далі додамо до елементів другого і третього рядків відповідні елементи першого рядка, які попередньо помножимо відповідно на (-2) та (-3). Дістанемо

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -21 \\ 2 & -3 & -2 & 6 \\ 3 & 3 & -8 & -31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -21 \\ 2-2 & -3-6 & -2+8 & 6+42 \\ 3-3 & 3-9 & -8+12 & -31+63 \end{pmatrix},$$

де символ «~» – тільда; в даному випадку він означає, що над рядками матриці A виконані елементарні перетворення. Таким чином,

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -21 \\ 0 & -9 & 6 & 48 \\ 0 & -6 & 4 & 32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -21 \\ 0 & -3 & 2 & 16 \\ 0 & -3 & 2 & 16 \end{pmatrix}.$$

Для зведення отриманої матриці до ступінчастого вигляду помножимо елементи другого рядка на (-1) і додамо їх до відповідних елементів третього рядка. Тепер $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -21 \\ 0 & -3 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Кількість ненульових рядків одержаної ступінчастої матриці дорівнює двом, тому $r\left(A\right) = 2$.

Метод обвідних мінорів

Обчислимо мінор другого порядку, що розташований у лівому верхньому куті матриці A: $M^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 \ne 0.$

Обвідними для нього мінорами третього порядку є визначники

$$M_1^{(3)}=\begin{vmatrix}2 & -3 & -2\\ 1 & 3 & -4\\ 3 & 3 & -8\end{vmatrix}=0,\ M_2^{(3)}=\begin{vmatrix}2 & -3 & 6\\ 1 & 3 & -21\\ 3 & 3 & -31\end{vmatrix}=0.$$

Обидва мінори третього порядку дорівнюють нулю, а мінор другого порядку не дорівнює нулю, тому ранг матриці $r(A)=2$.

1.3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Система лінійних алгебраїчних рівнянь, її сумісність, дослідження сумісності системи за допомогою ранга матриць. Розв'язання систем за формулами Крамера, матричним способом, методом Гаусса. Невизначені системи та їх розв'язання. Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Література: [1, розд. 3], [3, розд. 2, п. 3, 4], [4, розд. 1, §3].

1.3.1. Основні поняття. Критерій сумісності систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, ..., x_n$ має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.7}$$

де задані числа a_{ij} $(i=\overline{1,n}; j=\overline{1,n})$ називають коефіцієнтами системи, а $b_1, b_2, ..., b_m$ – вільними (від невідомих) членами системи.

Матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ і } A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

називають відповідно *основною* та *розширеною* матрицями розглянутої системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).

Запишемо матриці-стовпці вільних членів системи і невідомих:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тоді, посилаючись на операцією множення матриць, СЛАР (1.7) можна подати у *матричному вигляді*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

або записати матричним рівнянням $AX = B$.

Розв'язком СЛАР називають упорядкований набір n дійсних чисел $(c_1; c_2; ...; c_n)$, у разі підстановки яких у систему (1.7) замість невідомих усі рівняння перетворюються на тотожності.

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має хоча б один розв'язок, називають *сумісною*, а СЛАР, що не має жодного розв'язку – *несумісною*.

Сумісну СЛАР називають *визначеною,* якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має безліч розв'язків.

Систему (1.7) називають *однорідною*, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю: $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0.$ Якщо хоча б один з вільних членів $b_1, b_2, ..., b_m$ відмінний від нуля, то систему (1.7) називають *неоднорідною*.

Розв'язати СЛАР – означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Дві СЛАР називають *еквівалентними* (або *рівносильними*), якщо вони або обидві несумісні, або мають однакові розв'язки.

Необхідну і достатню умови сумісності системи лінійних рівнянь (1.7) надає наступна теорема (критерій сумісності СЛАР).

Теорема 1.2 (*Кронекера–Капеллі*). Для того, щоб система лінійних рівнянь (1.7) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці системи A дорівнював рангу розширеної матриці цієї системи A^*, тобто $r(A) = r(A^*)$.

З наведеної теореми випливають умови визначення кількості розв'язків СЛАР:

– при $r(A)=r(A^*)=n$ СЛАР є сумісною і визначеною, тобто має єдиний розв'язок;

– при $r(A)=r(A^*)=r<n$ СЛАР є сумісною і невизначеною, тобто має безліч розв'язків;

– при $r(A)<r(A^*)$ СЛАР несумісна, тобто розв'язків немає.

1.3.2. Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Для знаходження розв′язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь застосовують:

1) матричний метод (метод оберненої матриці);
2) метод Крамера;
3) метод Гаусса.

Розглянемо ці методи докладніше.

Матричний метод

Нехай у СЛАР (1.7) кількість рівнянь збігається з кількістю невідомих, тобто $m=n$. Тоді її основна матриця є квадратною матрицею, яка має визначник:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};\Delta_A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta_A \neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1} до матриці системи A. Домноживши зліва на A^{-1} обидві частини матричного рівняння $AX=B$ системи (1.7) і виконавши очевидні перетворення, дістаємо формулу (1.6) для знаходження єдиного розв'язку СЛАР:

$$X=A^{-1}B.$$

Метод Крамера

Нехай у СЛАР (1.7) кількість рівнянь збігається з кількістю невідомих ($m=n$). Тоді її можна перетворити в еквівалентну систему

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_{x_1}, \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_{x_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta \cdot x_n = \Delta_{x_n}. \end{cases} \tag{1.8}$$

Тут $\Delta = \Delta_A$, а $\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$ – допоміжні визначники, що одержують заміною i-го стовпця визначника Δ стовпцем вільних членів $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

Проаналізуємо одержану систему.

1. Якщо $\Delta = \Delta_A \neq 0$, то система (1.8) має єдиний розв'язок, який визначають за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta};\ \dots;\ x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}. \tag{1.9}$$

2. Якщо $\Delta = 0$ і всі визначники $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ дорівнюють нулю, то СЛАР (1.8) має безліч розв'язків.

3. Якщо $\Delta = 0$, а серед визначників Δx_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ є принаймні один відмінний від нуля, то система (1.8) несумісна.

Метод Гаусса

Даний метод є універсальним, оскільки його можна застосовувати для розв'язання системи (1.7) довільного вигляду, тобто і у випадку коли $m \neq n$.

Зауваження 1.5. Елементарні перетворення, що виконують над рядками розширеної матриці системи A^*, рівносильні аналогічним елементарним перетворенням над рівняннями СЛАР (1.7). Тому при розв'язуванні систем за методом Гаусса можна працювати з їхніми розширеними матрицями.

Процес розв'язання СЛАР за методом Гаусса включає два етапи. Перший етап (прямий хід) полягає у тому, що виконуючи елементарні перетворення над рядками розширеної матриці системи, зводять її до еквівалентної матриці ступінчастого вигляду. До таких перетворень належать: перестановка двох рядків; множення елементів рядка на один і той же відмінний від нуля множник; додавання до елементів одного рядка елементів іншого рядка, які попередньо помножили на сталий множник. Від одержаної матриці ступінчастого вигляду переходять до відповідної їй ступінчастої СЛАР, сумісність якої можна встановити за теоремою Кронекера–Капеллі. Для сумісної ступінчастої СЛАР далі виконують другий етап методу Гаусса (зворотний хід).

Нехай результатом прямого ходу буде система трикутного вигляду:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a'_{nn}x_n = b'_n. \end{cases}$$

Це означає, що в системі (1.7) $r(A) = r(A^*) = n,$ тобто СЛАР визначена. Для знаходження єдиного розв'язку початкової, а відповідно і одержаної системи, спочатку з останнього рівняння визначають невідоме x_n і підставляють його у передостаннє рівняння для знаходження x_{n-1}, і т.д. Підіймаючись по трикутній системі знизу вгору поступово визначають всі інші невідомі.

У кінці першого етапу може бути одержана сумісна СЛАР ступінчастого трапецієподібного вигляду ($n < p$):

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1s}x_s + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2s}x_s + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a'_{ps}x_s + \ldots + a'_{pn}x_n = b'_p. \end{cases}$$

Це означає, що у системи (1.7) $r(A) = r(A^*) = r < n,$ тобто СЛАР має безліч розв'язків. При цьому невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_p$ вважають основними, а $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ вважають вільними невідомими, яким надають довільних значень. Наприклад,

$$x_{p+1} = t_1,\ t_1 \in R;\ \ x_{p+2} = t_2,\ t_2 \in R;\ \ldots;\ \ x_n = t_k,\ t_k \in R.$$

Тоді, підіймаючись від останнього рівняння до першого і виразивши основні невідомі через вільні, можна одержати всі розв'язки СЛАР у такому вигляді:

$$(x_1(t_1,\ t_2,\ ...,\ t_k);\ x_2(t_1,\ t_2,\ ...,\ t_k);\ ...\ ;\ t_1;\ t_2;\ ...\ ;\ t_k),$$

де $t_1 \in R,\ t_2 \in R,\ ...\ ,\ t_k \in R.$

Продемонструємо застосування всіх трьох методів на прикладі однієї визначеної системи.

Приклад 1.5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

Розв'язання

Матричний метод

Запишемо систему матричним рівнянням $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник основної матриці системи

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 1 - 36 - 3 - 6 - 8 = -56 \neq 0,$ тому для матриці A існує обернена матриця A^{-1}. Визначимо спочатку алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6;\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5;\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13;$$

$$A_{21} = -14;\quad A_{22} = 7;\quad A_{23} = -7;\quad A_{31} = -2;\quad A_{32} = -11;\quad A_{33} = -5.$$

Тоді за формулою (1.4) запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = -\frac{1}{56}\begin{pmatrix} -6 & -14 & -2 \\ -5 & 7 & -11 \\ 13 & -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

За формулою (1.6) дістанемо єдиний розв’язок даної системи:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{56}\begin{pmatrix} -6 & -14 & -2 \\ -5 & 7 & -11 \\ 13 & -7 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{56}\begin{pmatrix} -56 \\ 0 \\ 112 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

або $x_1 = 1;\ \ x_2 = 0;\ \ x_3 = -2.$

Метод Крамера

Визначник системи $\Delta = -56 \neq 0$. Допоміжні визначники відповідно дорівнюють: $\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -56,$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ \ \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 112.$$

За формулами Крамера (1.9) одержуємо:

$$x_1 = \frac{-56}{-56} = 1;\ x_2 = \frac{0}{-56} = 0;\ x_3 = \frac{112}{-56} = -2.$$

Тоді маємо єдиний розв’язок системи: $(1;\ 0; -2)$.

Метод Гаусса

Для зведення розширеної матриці системи A^* до ступінчастого вигляду виконаємо елементарні перетворення над її рядками. Переставимо місцями перший і третій рядки матриці:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Додамо до елементів другого і третього рядків останньої матриці елементи першого рядка, які попередньо домножимо відповідно на (-3) та (-2). У результаті одержимо:

$$A^* \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & -13 & -5 & 10 \\ 0 & -7 & -7 & 14 \end{pmatrix}.$$

Домножимо третій рядок отриманої матриці на $(-\frac{1}{7})$ і переставимо місцями з другим рядком:

$$A^* \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & -13 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -13 & -5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Додамо до елементів третього рядка останньої матриці відповідні елементи другогого рядка, які попередньо домножимо на 13:

$$A^* \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -13 & -5 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -16 \end{pmatrix}.$$

За виглядом отриманої матриці складемо трикутну систему, яка еквівалентна початковій: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -3, \\ x_2 + x_3 = -2, \\ 8x_3 = -16. \end{cases}$

Із останнього рівняння маємо $x_3 = -2$; із другого дістаємо $x_2 = -2 - x_3 = -2 + 2 = 0$, $x_2 = 0$; із першого рівняння знаходимо $x_1 = -3 - 4x_2 - 2x_3$, $x_1 = -3 - 0 + 4 = 1$, $x_1 = 1$.

Отже, єдиний розв'язок системи: $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = -2$. Його можна записати у вигляді впорядкованого набору чисел: $(1;\ 0;\ -2)$.

Вказівка 1.2. При розв'язанні СЛАР в задачі 1.6 контрольної роботи 1 можна застосовувати будь-який з наведених методів. При цьому рекомендуємо звернути увагу на приклад 1.5.

Приклад 1.6. Задану систему дослідити на сумісність за теоремою Кронекера–Капеллі та у разі сумісності знайти її розв'язки:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2z = 6, \\ x + 3y - 4z = -21, \\ 3x + 3y - 8z = -31. \end{cases}$$

Розв'язання

Основна та розширена матриці даної системи мають вигляд відповідно: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -8 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & -4 & -21 \\ 3 & 3 & -8 & -31 \end{pmatrix}$.

Виконуючи елементарні перетворення над рядками розширеної матриці (див. приклад 1.4), її можна звести до матриці ступінчастого вигляду:

$$A^* \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -21 \\ 2 & -3 & -2 & 6 \\ 3 & 3 & -8 & -31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -21 \\ 0 & -9 & 6 & 48 \\ 0 & -6 & 4 & 32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -21 \\ 0 & -3 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Домноживши другий рядок на (-1), дістанемо: $A^* \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -21 \\ 0 & 3 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Звідси $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Кількість ненульових рядків одержаних ступінчастих матриць дорівнює двом, тому ранги обох матриць дорівнюють 2.

Оскільки кількість невідомих $n=3$, а $r\left(A\right)=r\left(A^*\right)=2<3$, то за теоремою Кронекера–Капеллі задана система є сумісною і невизначеною, тобто має безліч розв'язків.

Знайдемо ці розв'язки. Еквівалентною початковій СЛАР є ступінчаста система: $\begin{cases} x+3y-4z=-21, \\ 3y-2z=-16, \\ 0\cdot z=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y+4z-21, \\ y=\dfrac{1}{3}(2z-16), \\ z=t, \text{ де } t\in R; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2(t-8)+4t-21, \\ y=\dfrac{2}{3}(t-8), \\ z=t, \text{ де } t\in R; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2t-5, \\ y=\dfrac{2}{3}(t-8), \\ z=t, \text{ де } t\in R. \end{cases}$$

Отже, система має безліч розв'язків виду $\left(2t-5;\ \dfrac{2}{3}(t-8);\ t\right)$, де $t\in R$.

Вказівка 1.3. При розв'язанні СЛАР в задачі 1.7 контрольної роботи 1 необхідно застосувати критерій сумісності СЛАР (теорему Кронекера–Капеллі). При цьому рекомендуємо попередньо ознайомитись з розв'язанням прикладу 1.6.

Приклад 1.7. Дослідити і розв'язати систему рівнянь з параметром: $\begin{cases} 2x + \lambda y = 1, \\ (3+\lambda)x + 2y = 2\lambda. \end{cases}$

Розв'язання

Дослідимо задану СЛАР з параметром за допомогою метода Крамера. Обчислимо визначник системи та допоміжні визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ 3+\lambda & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - \lambda(3+\lambda) = 4 - 3\lambda - \lambda^2 = -(\lambda-1)(\lambda+4),$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 2\lambda & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2\lambda^2 = -2(\lambda^2-1) = -2(\lambda-1)(\lambda+1),$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3+\lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda - (3+\lambda) = 3\lambda - 3 = 3(\lambda-1).$$

З'ясуємо, при яких значеннях параметра обчислені визначники дорівнюють нулю. Розв'язавши відповідні рівняння, визначаємо:

$\Delta = 0$ при значеннях $\lambda = 1$ або $\lambda = -4$;

$\Delta x = 0$ при $\lambda = 1$ або $\lambda = -1$; $\Delta y = 0$ лише при $\lambda = 1$.

Проаналізуємо вихідну систему, посилаючись на метод Крамера.

1. Якщо $\Delta \neq 0$, тобто $-(\lambda-1)(\lambda+4) \neq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lambda \in (-\infty;-4) \cup (-4;1) \cup (1;+\infty)$, то задана система має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$, що визначається формулами Крамера (1.9):

$$x_0 = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-2(\lambda-1)(\lambda+1)}{-(\lambda-1)(\lambda+4)} = \frac{2(\lambda+1)}{\lambda+4};$$

$$y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{3(\lambda-1)}{-(\lambda-1)(\lambda+4)} = -\frac{3}{\lambda+4}.$$

2. Якщо $\lambda = -4$, то $\Delta = 0$, а $\Delta x = -30 \neq 0$, $\Delta y = -15 \neq 0$. Тому СЛАР несумісна.

3. Якщо $\lambda = 1$, то всі визначники $\Delta = \Delta x = \Delta y = 0$. Тому система має безліч розв'язків. Дослідимо, якого вигляду набувають ці розв'язки, узявши в початковій системі $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 4x + 2y = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1, \\ 2x + y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow 2x + y = 1.$$

Отримана система рівносильна рівнянню $2x+y=1$. Якщо вважати, що $x=t$, то $y=1-2x=1-2t$. Тому при $\lambda=1$ вихідна система має безліч розв'язків вигляду $(t;\ 1-2t)$, де $t\in R$.

Отже, при $\lambda\in(-\infty;-4)\cup(-4;1)\cup(1;+\infty)$ вихідна СЛАР має єдиний розв'язок $\left(\frac{2(\lambda+1)}{\lambda+4};-\frac{3}{\lambda+4}\right)$; при $\lambda=-4$ система несумісна; при $\lambda=1$ система має безліч розв'язків: $(t;\ 1-2t)$, де $t\in R$.

Вказівка 1.4. Для дослідження СЛАР з параметром в задачі 1.8 контрольної роботи 1 доцільно застосувати метод Крамера. При цьому радимо попередньо ознайомитися з розв'язанням прикладу 1.7.

1.3.3. Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо однорідну систему n-го порядку, тобто СЛАР (1.7), у якої всі праві частини рівнянь дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$$

Оскільки у розширеної матриці A^* однорідної СЛАР немає додаткових відмінних від нуля мінорів (порівняно з матрицею A), то $r(A)=r(A^*)$, тобто за теоремою Кронекера–Капеллі однорідна система є сумісною. Довільна однорідна система завжди має нульовий (тривіальний) розв'язок $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

Якщо ранг матриці A однорідної системи дорівнює кількості невідомих, то система визначена і має єдиний (нульовий) розв'язок. Якщо ранг матриці A однорідної системи менший за кількість невідомих, то система має безліч розв'язків.

Приклад 1.8. Розв'язати однорідну систему $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3=0,\\ -x_1-4x_2+2x_3=0,\\ 2x_1+x_2+2x_3=0. \end{cases}$

Розв'язання

Для розв'язання системи застосуємо метод Гаусса. Виконаємо елементарні перетворення над рядками її розширеної матриці:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $r\left(A^*\right) = 2$ (у отриманної ступінчастої матриці лише два ненульових рядки, а кількість невідомих $n = 3$), то дійдемо висновку, що задана однорідна СЛАР має безліч розв'язків.

Відтворимо рівносильну їй систему: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ \quad -7x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

Рухаючись від другого рівняння до першого, дістаємо $-7x_2 + 6x_3 = 0,\ x_2 = \dfrac{6}{7}x_3;\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0,\ x_1 = 3x_2 - 4x_3,\ x_1 = -\dfrac{10}{7}x_3.$

Отже, задана СЛАР має безліч розв'язків вигляду $(-\dfrac{10}{7}t;\ \dfrac{6}{7}t;\ t)$, де $t \in R$. Якщо для зручності взяти $x_3 = 7t$, то $x_1 = -10t$, $x_2 = 6t$ і розв'язки можна подати у вигляді $(-10t;\ 6t;\ 7t)$, де $t \in R$.

1.4. ВЕКТОРИ

Поняття вектора, позначення, модуль вектора. Лінійні операції над векторами, проекція вектора на вісь. Вектори в прямокутній системі координат. Скалярний добуток векторів, векторний добуток та його геометричний зміст, мішаний добуток та його геометричний зміст.

Література: [1, розд. 4], [3, розд. 3, п. 3.2], [4, розд. 2, §1–3], [6, мод. 1, пп. 4.1–4.5].

1.4.1. Поняття вектора. Лінійні операції над векторами

Векторну величину на відміну від скалярної задають не лише числовим значенням, а й напрямом (наприклад, швидкість, прискорення, сила та ін.).

Вектором називають напрямлений відрізок (рис. 1.1) і позначають так: $\overline{a}$ або $\overline{AB}$, де точка A – початок вектора, а B – його кінець. Відстань між початком і кінцем вектора називають його *довжиною* або *модулем* і позначають $|\overline{a}|$ або $|\overline{AB}|$.

Вектор, довжина якого дорівнює 1, називають одиничним.

Вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називають *колінеарними.* Якщо вектор $\overline{a}$ колінеарний до вектора $\overline{b}$, то це записують так: $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ *рівні*, якщо вони колінеарні, мають однакові модулі й однакові напрями (рис. 1.2). *Протилежними* називають колінеарні, протилежно напрямлені вектори однакової довжини. Вектор, протилежний до вектора $\overline{a}$, позначають $-\overline{a}$.

Вектори називають *компланарними*, якщо вони лежать на одній або на паралельних площинах.

Лінійними операціями над векторами є додавання (віднімання) векторів і множення вектора на число (скаляр).

Сумою векторів $\overline{a}$ *і* $\overline{b}$ називають вектор $\overline{a}+\overline{b}$, який з’єднує початок вектора $\overline{a}$ з кінцем вектора $\overline{b}$ за умови, що початок вектора $\overline{b}$ прикладений до кінця вектора $\overline{a}$ (рис. 1.3) (правило трикутника).

З іншого боку, сума $\overline{a}+\overline{b}$ – вектор, який є діагоналлю паралелограма, побудованого на прикладених до спільного початку векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, і також прикладений до цього початку (рис. 1.4) (правило паралелограма).

Різницею векторів $\overline{a}$ *і* $\overline{b}$ називають вектор $\overline{a}-\overline{b}$, який в сумі з вектором $\overline{b}$ дає вектор $\overline{a}$ або це вектор, що сполучає кінець вектора $\overline{b}$ з кінцем вектора $\overline{a}$ за умови, що $\overline{a}$ і $\overline{b}$ прикладені до спільного початку (рис. 1.5).

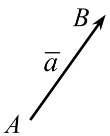

Рис. 1.1

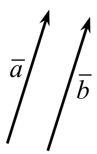

Рис. 1.2

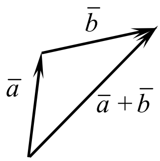

Рис. 1.3

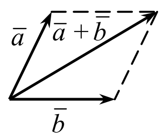

Рис. 1.4

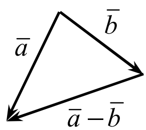

Рис. 1.5

Добутком вектора $\overline{a}$ *на число* λ називають вектор $\lambda\overline{a}$ $(\lambda\overline{a} \parallel \overline{a})$, модуль якого дорівнює $|\lambda||\overline{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\overline{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний до напряму $\overline{a}$, якщо $\lambda < 0$.

1.4.2. Проекція вектора на вісь. Вектори в прямокутній системі координат

Віссю (числовою віссю) називають пряму із заданим додатним напрямом і обраними початком відліку та одиницею довжини.

Нехай точка A' – проекція початку вектора $\overline{a}$ на вісь υ, точка B' – проекція його кінця, а кут φ – кут між додатним напрямом осі υ і напрямом вектора $\overline{a}$.

Проекцією вектора $\overline{a}$ *на вісь* υ називають додатне число $|\overline{A'B'}|$, якщо кут φ – гострий (рис. 1.6), від’ємне число $(-|\overline{A'B'}|)$, якщо кут φ – тупий (рис. 1.7), та число 0, якщо кут φ – прямий.

Проекцію вектора $\overline{a}$ на вісь υ обчислюють за формулою:

$$\text{пр}_{\upsilon}\overline{a} = |\overline{a}|\cos\varphi. \quad (1.10)$$

Три взаємно перпендикулярні координатні вісі Ox, Oy, Oz, які мають спільний початок – точку O і однакову масштабну одиницю, утворюють прямокутну декартову систему координат у просторі. Коли таких осей дві: Ox, Oy, то маємо декартову систему координат на площині. Якщо в прямокутній системі координат вектор $\overline{a}$ утворює з додатними напрямами Ox, Oy, Oz відповідно кути α, β, γ (рис. 1.8), то проекції вектора $\overline{a}$ на координатні вісі (позначимо їх a_x, a_y, a_z) дорівнюють

$$a_x = \text{пр}_x\overline{a} = |\overline{a}|\cos\alpha;$$
$$a_y = \text{пр}_y\overline{a} = |\overline{a}|\cos\beta;$$
$$a_z = \text{пр}_z\overline{a} = |\overline{a}|\cos\gamma.$$

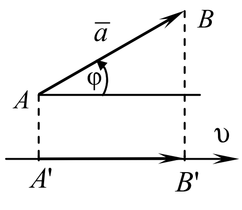

Рис. 1.6

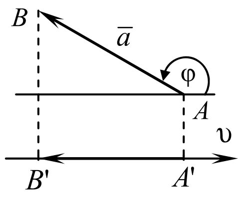

Рис. 1.7

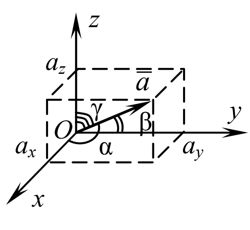

Рис. 1.8

Ці проекції називають *координатами вектора* $\overline{a}$ і позначають: $\overline{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ або $\overline{a}(a_x;\ a_y;\ a_z)$.

Якщо вектор $\overline{a}=\overline{AB}$ у прямокутній системі координат заданий координатами точок $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то проекції вектора на кожну з осей мають вигляд:

$$Ox: a_x = x_2 - x_1; \quad Oy: a_y = y_2 - y_1; \quad Oz: a_z = z_2 - z_1,$$

тобто координати вектора:

$$\overline{a}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}. \tag{1.11}$$

Довжину вектора як діагональ прямокутного паралелепіпеда можна подати формулою: $$|\overline{a}|=|\overline{AB}|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}. \tag{1.12}$$

Значення $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$, які називають *напрямними косинусами вектора* $\overline{a}$, визначають за формулами

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\overline{a}|};\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\overline{a}|};\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\overline{a}|} \tag{1.13}$$

і задовольняють умову: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ задані своїми координатами: $\overline{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\overline{b}=\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, то дії над ними виконують за правилами:

1) додавання: $\overline{a}+\overline{b}=\{a_x+b_x;\ a_y+b_y;\ a_z+b_z\}$;

2) множення вектора $\overline{a}$ на число λ: $\lambda\overline{a}=\{\lambda a_x;\ \lambda a_y;\ \lambda a_z\}$.

Нехай $\overline{a}\parallel\overline{b}$. За означенням колінеарності $\overline{b}=\lambda\overline{a}$ і тому $b_x=\lambda a_x$, $b_y=\lambda a_y$, $b_z=\lambda a_z$. Звідси випливає *умова колінеарності* векторів – вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні:

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=\lambda.$$

На площині (*у просторі* R^2) *базисом* вважають довільну впорядковану пару неколінеарних векторів.

Базисом у просторі R^3 називають довільну впорядковану трійку некомпланарних векторів.

Якщо $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – трійка взаємно перпендикулярних одиничних векторів, які за напрямом збігаються відповідно з координатними вісями Ox, Oy, Oz, то вектор $\overline{a}$ можна подати у вигляді суми

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}.$$

Наведену рівність називають розкладом вектора $\overline{a}$ за базисом $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

Приклад 1.9. Трикутник $A_1A_2A_3$ заданий координатами своїх вершин $A_1(5;\ 3;-2)$, $A_2(6;-10;\ 11)$, $A_3(0;\ 10;-3)$. Знайти довжину медіани A_1M та напрямні косинуси вектора $\overline{A_1M}$.

Розв'язання

Точка $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$ ділить відрізок A_2A_3 навпіл. Координати середини відрізка можна знайти за формулами:

$$x_M = \frac{x_2 + x_3}{2} = 3;\ y_M = \frac{y_2 + y_3}{2} = 0;\ z_M = \frac{z_2 + z_3}{2} = 4.$$

За формулою (1.11) $\overline{A_1M} = \{-2;-3;\ 6\}$, а за формулою (1.12) $|\overline{A_1M}| = \sqrt{4+9+36} = 7$.

Застосуємо формулу (1.13) для знаходження напрямних косинусів вектора $\overline{A_1M}$: $\cos\alpha = \frac{-2}{7}$, $\cos\beta = \frac{-3}{7}$, $\cos\gamma = \frac{6}{7}$.

Приклад 1.10. Показати, що вектори $\overline{a} = \{2;-3\}$ і $\overline{b} = \{1;-2\}$ можуть розглядатися як базис у просторі R^2.

Розв'язання

Координати векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ непропорційні: $\frac{2}{1} \neq \frac{-3}{-2}$. Отже, ці вектори неколінеарні, тому утворюють базис на площині.

1.4.3. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають число (скаляр), яке позначають $\overline{a} \cdot \overline{b}$ або ($\overline{ab}$). Він дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута φ між ними:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi.$$

За формулою (1.10) $|\overline{b}|\cos\varphi = \text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}$, тому скалярний добуток можна записати так:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b},$$

тобто скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ дорівнює добутку модуля одного з них на проекцію на нього іншого вектора.

Умовою перпендикулярності двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є те, що їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $\overline{a}\perp\overline{b}$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$ ($|\overline{a}|\neq 0, |\overline{b}|\neq 0$).

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ задані своїми координатами: $\overline{a}=\left\{a_x;\ a_y;\ a_z\right\}$, $\overline{b}=\left\{b_x;\ b_y;\ b_z\right\}$, то їхній скалярний добуток обчислюють за формулою:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{1.14}$$

Поняття скалярного добутку може бути застосоване для:

1) знаходження *кута між векторами:*

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}; \tag{1.15}$$

2) знаходження *проекції вектора на напрямок іншого вектора:*

$$\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|}. \tag{1.16}$$

Механічний зміст скалярного добутку полягає в тому, що робота A сили $\overline{F}$, під дією якої матеріальна точка прямолінійно переміщується на вектор $\overline{S}$, дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення: $A=\overline{F}\cdot\overline{S}$.

Зауважимо, що скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини: $\overline{a}\cdot\overline{a} = |\overline{a}||\overline{a}|\cos 0^{\circ} = (|\overline{a}|)^2 = a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2$.

Приклад 1.11. Встановити, який кут φ утворюють одиничні вектори $\overline{h}$ і $\overline{d}$, якщо вектори $\overline{a}=\overline{h}+3\overline{d}$ і $\overline{b}=5\overline{h}-4\overline{d}$ є взаємно перпендикулярними.

Розв'язання

За умовою перпендикулярності $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(\overline{h}+3\overline{d})\cdot(5\overline{h}-4\overline{d})=5\overline{h}\cdot\overline{h}-4\overline{h}\cdot\overline{d}+15\overline{d}\cdot\overline{h}-12\overline{d}\cdot\overline{d}=$$

$$=5\cdot 1^2+11\overline{d}\cdot\overline{h}-12\cdot 1^2=-7+11|\overline{d}||\overline{h}|\cos\varphi=-7+11\cdot 1\cdot 1\cos\varphi;$$

тоді $-7+11\cos\varphi=0$. Звідки знаходимо $\cos\varphi=\dfrac{7}{11}$, $\varphi=\arccos\dfrac{7}{11}$.

Приклад 1.12. Задано координати трьох точок $A(-1;\ 2;\ 3)$, $B(0;\ 1;\ 2)$ і $C(-2;\ 1;\ 1)$. Знайти проекцію вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$.

Розв'язання

Знайдемо координати векторів:
$\overline{AB}=\{1;-1;-1\}$, $\overline{AC}=\{-1;-1;-2\}$. Тоді за формулою (1.16)

$$\text{пр}_{\overline{AC}}\overline{AB}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AC}|}=\frac{1\cdot(-1)+(-1)(-1)+(-1)(-2)}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Вказівка 1.5. При розв'язанні задачі 1.1 контрольної роботи 1 актуальними будуть формули (1.12), (1.14) та (1.16). При цьому рекомендуємо звернути увагу на приклад 1.12.

1.4.4. Векторний добуток векторів

Векторним добутком векторів $\overline{a}$ *і* $\overline{b}$ називають вектор, який позначають $[\overline{a}\overline{b}]$ (або $\overline{a}\times\overline{b}$). Він задовольняє такі умови:

1) його модуль обчислюють за формулою:

$$|[\overline{a}\overline{b}]|=|\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi,$$

де φ – кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$;

2) вектор $[\overline{a}\overline{b}]$ перпендикулярний до кожного з векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$;

3) вектор $[\overline{a}\overline{b}]$ відносно векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ має такий напрям, що вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $[\overline{a}\overline{b}]$ утворюють праву трійку, або, іншими словами, якщо вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $[\overline{a}\overline{b}]$ зведені до спільного початку, то найкоротший поворот від $\overline{a}$ до $\overline{b}$ з кінця вектора $[\overline{a}\overline{b}]$ видно проти годинникової стрілки (рис. 1.9).

Геометрично модуль векторного добутку дорівнює *площі паралелограма*, побудованого на прикладених до спільного початку векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (рис. 1.10).

Нехай вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ задані своїми координатами: $\overline{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\overline{b}=\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$. Тоді їхній векторний добуток можна виразити через визначник третього порядку:

$$[\overline{a}\overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{1.17}$$

Розкладаючи визначник (1.17) за елементами першого рядка, одержуємо вираз для векторного добутку векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$:

$$[\overline{a}\overline{b}] = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\overline{i} - \left(a_x b_z - a_z b_x\right)\overline{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\overline{k}. \tag{1.18}$$

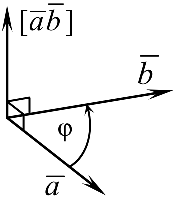

Рис. 1.9

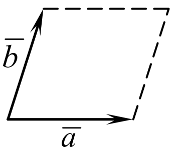

Рис. 1.10

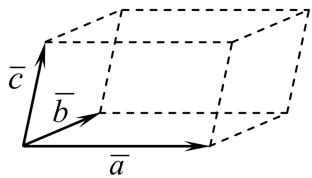

Рис. 1.11

Приклад 1.13. Обчислити площу трикутника, який заданий своїми вершинами $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(0;-2;\ 1)$ і $C(-1;\ 0;\ 2)$.

Розв'язання

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$.

За формулою (1.11) маємо координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$: $\overline{AB} = \{-1;-4;\ 1\}$, $\overline{AC} = \{-2;-2;\ 2\}$. Знайдемо їхній векторний добуток за формулами (1.17) та (1.18):

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-8+2)\overline{i} - (-2+2)\overline{j} + (2-8)\overline{k} =$$

$= -6\overline{i} - 0\overline{j} - 6\overline{k} = \{-6;\ 0;-6\}$. Оскільки

$|\overline{AB}\times\overline{AC}| = |\{-6;\ 0;-6\}| = \sqrt{(-6)^2 + 0^2 + (-6)^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$, то

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}| = \dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ (кв.од.).

Вказівка 1.6. При розв'язанні задачі 1.1.е) контрольної роботи 1 актуальними будуть формули (1.17) та (1.18). При цьому рекомендуємо попередньо ознайомитися із розв'язанням прикладу 1.13.

1.4.5. Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ називають число $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$, яке дорівнює значенню скалярного добутка вектора $[\overline{a}\overline{b}]$ на вектор $\overline{c}$: $$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = [\overline{a}\overline{b}] \cdot \overline{c}.$$

Геометричний зміст мішаного добутку: $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ дорівнює *об'єму паралелепіпеда,* побудованого на зведених до спільного початку векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$, взятому зі знаком плюс, якщо трійка векторів $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ – права, і зі знаком мінус, якщо ліва (рис. 1.11), тобто

$$V = |\,\overline{a}\overline{b}\overline{c}\,|.$$

Умова компланарності векторів:
вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$.

Якщо вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ задані своїми координатами: $\overline{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\overline{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, $\overline{c} = \{c_x;\ c_y;\ c_z\}$, то їхній мішаний добуток обчислюють за формулою

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Приклад 1.14. Дослідити, чи утворюють базис вектори $\overline{a} = \{-1;\ 1; -2\}$, $\overline{b} = \{3;\ 1; -5\}$ і $\overline{c} = \{0;\ 3; -7\}$.

Розв'язання

Знайдемо мішаний добуток цих векторів:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -7 \end{vmatrix} = -1 \cdot A_{11} + 3 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} + 3(-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -8 + 3 = -5 \neq 0.$$

З умови компланарності векторів випливає, що вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ є некомпланарними. А оскільки довільна впорядкована трійка некомпланарних векторів утворює базис у тривимірному просторі R^3, то вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ утворюють базис.

Вказівка 1.7. Навички дослідження векторів на компланарність необхідно буде продемонструвати під час розв'язання задачі 1.1 контрольної роботи 1. При цьому рекомендуємо звернути увагу на приклад 1.14.

1.5. ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

Загальне рівняння прямої, неповні рівняння. Канонічне та параметричні рівняння прямої. Пряма, яка проходить через дві задані точки. Рівняння прямої у відрізках на осях, пряма з кутовим коефіцієнтом. Кут між двома прямими, умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Нормальне рівняння прямої, визначення відстані від точки до прямої.

Література: [1, розд. 6], [3, розд. 3, п. 3.3], [6, мод. 2, п. 1.2].

1.5.1. Загальне рівняння прямої

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами, яким у прямокутній системі координат відповідають різні види рівнянь прямої.

Нехай пряма L проходить через точку $M_1(x_1; y_1)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n}=\{A; B\}$ (рис. 1.12). Вектор $\overline{n}$ називають *нормальним вектором* прямої L.

Зрозуміло, що для довільної точки $M(x; y)$ прямої L вектори $\overline{n}=\{A; B\}$ і $\overline{M_1M}=\{x-x_1; y-y_1\}$ будуть перпендикулярними. Отже, їхній скалярний добуток дорівнює нулю:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0. \tag{1.19}$$

Рівняння (1.19) називають рівнянням прямої, яка проходить через точку $M_1(x_1; y_1)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n}=\{A; B\}$.

Зауваження 1.6. Будь-який з перпендикулярних до заданої прямої векторів можна вважати за її нормальний вектор.

Після розкриття дужок в (1.19) та введення позначення для утвореного числового доданка $C=-Ax_1-By_1$ отримаємо *загальне рівняння прямої* L на площині:

$$Ax+By+C=0. \tag{1.20}$$

Якщо в практичному завданні немає додаткових вимог, то за домовленістю рівняння прямої у відповіді потрібно записувати в загальному вигляді.

***Приклад* 1.15.** Скласти загальне рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1;\ 2)$ паралельно до вектора $\overline{c} = \{3; -3\}$.

Розв'язання

Щоб скласти загальне рівняння прямої, знайдемо її нормальний вектор $\overline{n}$. Оскільки вектори $\overline{n} = \{A; B\}$ і $\overline{c} = \{3; -3\}$ перпендикулярні, то їхній скалярний добуток дорівнює нулю або за формулою (1.14): $3 \cdot A + (-3) \cdot B = 0$, тобто $A = B$. Тому за нормальний вектор прямої можемо обрати довільний вектор вигляду $\overline{n} = \{A; A\}$. Наприклад, $\overline{n}_1 = \{1; 1\}$ є нормальним вектором прямої, оскільки $\overline{n}_1 \cdot \overline{c} = 0$. Тоді за формулою (1.19) запишемо рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1;\ 2)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n}_1 = \{1; 1\}$:

$$x - 1 + y - 2 = 0 \text{ або } x + y - 3 = 0.$$

1.5.2. Канонічне рівняння прямої

Якщо пряма L проходить через точку $M_1(x_1; y_1)$ паралельно до *напрямного вектора* $\overline{a} = \{l;\ m\}$ (рис. 1.13), то для довільної точки $M(x; y)$ прямої L вектори $\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1\}$ та $\overline{a} = \{l;\ m\}$ є колінеарними. Оскільки розглянуті вектори колінеарні, то їх відповідні координати пропорційні:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}. \tag{1.21}$$

Одержане рівняння називають *канонічним рівнянням прямої* на площині.

1.5.3. Рівняння прямої, що проведена через дві задані точки

Нехай через дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ провели пряму L (рис. 1.14). За напрямний вектор прямої L оберемо вектор

$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}$; із формули (1.21) дістанемо *рівняння прямої, що проходить через дві задані точки*:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{1.22}$$

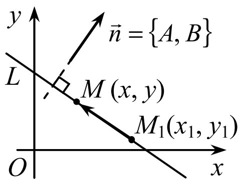

Рис. 1.12

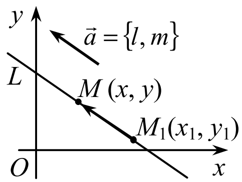

Рис. 1.13

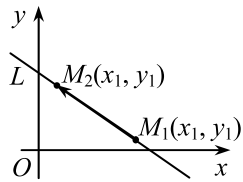

Рис. 1.14

Зокрема, якщо пряма L перетинає координатні вісі у точках $A(a,\ 0)$ і $B(0,\ b)$ (рис. 1.15), то з рівняння (1.22) маємо:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{1.23}$$

яке називають *рівнянням прямої у відрізках на осях*.

Щоб звести загальне рівняння прямої до вигляду (1.23), потрібно розділити (1.20) на ($-C$) та перенести коефіцієнти A і B до знаменника:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} - 1 = 0,\quad \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Таким чином, $a = -\dfrac{C}{A},\ b = -\dfrac{C}{B}.$

Зауваження 1.7. Паралельні координатним осям прямі або ті, що проходять через початок координат, неможливо подати рівнянням у відрізках на осях.

***Приклад* 1.16.** Обчислити периметр прямокутного трикутника, який обмежений координатними вісями та прямою, проведеною через точки $M(8;\ 6)$ і $N(2;-3)$.

Розв'язання

За формулою (1.22) записуємо рівняння прямої MN:

$$\frac{x-8}{2-8} = \frac{y-6}{-3-6},$$

звідки отримуємо

$$\frac{x-8}{-6}=\frac{y-6}{-9};\ \ \frac{x-8}{2}=\frac{y-6}{3};\ \ \frac{x}{2}-4=\frac{y}{3}-2;\ \ \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=2 \text{ або}$$

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}=1.$$

Отже, пряма MN відсікає на осях координат відрізки $|a|=4$, $|b|=6$. Довжина гіпотенузи MN прямокутного трикутника MNO (за теоремою Піфагора): $MN=\sqrt{16+36}=2\sqrt{13}$.

Таким чином, периметр трикутника

$$P_{\Delta MNO}=|a|+|b|+MN=4+6+2\sqrt{13}=10+2\sqrt{13} \text{ (лін.од.).}$$

1.5.4. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай пряма L задана своїм загальним рівнянням (1.20) і розташована неперпендикулярно до координатної вісі Ox (тобто, $B\neq 0$). Виконаємо у загальному рівнянні такі перетворення: $By=-Ax-C$, $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$. Введемо позначення $-\frac{A}{B}=k$, $-\frac{C}{B}=b$. Дістанемо *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом* k:

$$y=kx+b. \tag{1.24}$$

Кутовий коефіцієнт k прямої L дорівнює тангенсу кута α, який пряма утворює з додатним напрямом вісі Ox (рис. 1.16): $k=\operatorname{tg}\alpha$.

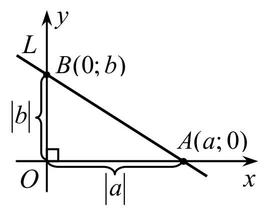

Рис. 1.15

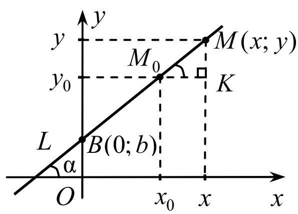

Рис. 1.16

***Приклад* 1.17.** Пряма L відтинає на координатних осях рівні додатні відрізки. Знайти кут α між цією прямою та додатним напрямом осі Ox, якщо площа трикутника, який обмежений прямою та осями координат, дорівнює 8 кв.од.

Розв'язання

Оскільки пряма L відтинає на координатних осях рівні додатні відрізки, то її рівняння вигляду (1.23): $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$. Оскільки площа рівнобедреного прямокутного трикутника з катетами, довжини яких дорівнюють a, $S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot a^2=8$, то $a=\sqrt{16}=4$.

Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої L: $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$ або $y=-x+4$, $k=-1$. Звідки $\mathrm{tg}\,\alpha=-1$, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

1.5.5. Нормальне рівняння прямої

Якщо рівняння вигляду (1.20) помножити на число $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, знак якого обирають протилежним до знака числа C, то отримуємо *нормальне рівняння* прямої:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0, \qquad (1.25)$$

де p – відстань від початку координат до прямої, інакше кажучи – довжина перпендикуляра, який проведено до прямої з початку координат, а α – кут, що утворює цей перпендикуляр з додатним напрямом осі Ox.

Відстань d від точки $M_1(x_1;y_1)$ до прямої L може бути обчислена за формулою: $d=|x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p|$.

***Приклад* 1.18.** В умовах прикладу 1.16 знайти довжину висоти, проведеної до гіпотенузи MN.

Розв'язання

Зведемо загальне рівняння $3x-2y-12=0$ прямої MN до рівняння вигляду (1.25), для чого домножимо його на число

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Нормальне рівняння прямої MN: $\frac{3}{\sqrt{13}}x-\frac{2}{\sqrt{13}}y-\frac{12}{\sqrt{13}}=0.$

Довжина шуканої висоти трикутника – це відстань від початку координат до прямої MN: $d = p = \dfrac{12}{\sqrt{13}}$ (лін.од.).

Вказівка 1.8. При розв'язуванні задачі 1.2 контрольної роботи 1 актуальними будуть рівняння прямої вигляду (1.23) та (1.25). При цьому рекомендуємо звернути увагу на приклади 1.16 та 1.18.

1.5.6. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Якщо прямі L_1 і L_2 задані своїми рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$, то кут між цими прямими визначається як гострий кут $\varphi = |\alpha_2 - \alpha_1|$, де $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$. За формулою: $\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$ маємо:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|. \qquad (1.26)$$

Якщо прямі L_1 і L_2 паралельні, то $\varphi = 0$; $\operatorname{tg}\varphi = 0$; $k_2 - k_1 = 0$. Звідки умова паралельності прямих: $k_1 = k_2$.

Якщо прямі L_1 і L_2 перпендикулярні, то $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}$ не існує, тому у формулі (1.26) $1 + k_1k_2 = 0$. Тоді умова перпендикулярності прямих: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

Якщо прямі L_1 і L_2 задані своїми загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то гострий кут φ між ними визначається через кут між їхніми нормальними векторами $\overline{n}_1 = \{A_1; B_1\}$ і $\overline{n}_2 = \{A_2; B_2\}$ з посиланням на формулу (1.15):

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Зауваження 1.8. За кут між прямими L_1 і L_2 приймають менший з кутів, що утворюються цими прямими.

Умова паралельності прямих L_1 і L_2, заданих загальними рівняннями, є умовою колінеарності їх нормальних векторів $\overline{n}_1$ і $\overline{n}_2$:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

а умова перпендикулярності L_1 і L_2 набуває вигляду

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

1.6. ПЛОЩИНА

Загальне рівняння площини, неповні рівняння. Рівняння площини, яка проходить через три точки. Рівняння площини у відрізках на осях. Нормальне рівняння площини, відстань від точки до площини. Кут між двома площинами, умови паралельності та перпендикулярності двох площин.

Література: [1, розд. 8, п. 8.2], [4, розд. 3, §4], [6, мод. 2, п. 2.1].

1.6.1. Загальне рівняння площини

Нехай площина Π проходить через задану точку $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n} = \left\{A; B; C\right\}$, який називають *нормальним* вектором площини Π (рис. 1.17).

Якщо $M\left(x; y; z\right)$ – довільна точка площини Π, то вектори $\overline{n} = \left\{A; B; C\right\}$ і $\overline{M_0 M} = \left\{x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0\right\}$ перпендикулярні, а їхній скалярний добуток дорівнює нулю:

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0.$$

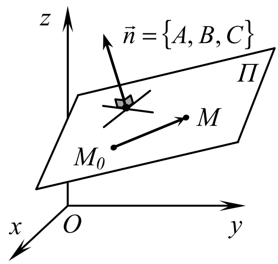

Рис.1.17

Це – рівняння площини, яка проходить через точку $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ і має нормальний вектор $\overline{n} = \left\{A; B; C\right\}$. Після розкриття дужок і позначення утвореного числового доданка $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$ літерою D одержимо рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1.27}$$

яке називають *загальним рівнянням площини* Π.

Розглянемо деякі окремі випадки розташування площини Π залежно від значень коефіцієнтів у рівнянні (1.27).

1. Нехай $D=0.$ Тоді площина проходить через початок координат.

2. Якщо, наприклад, коефіцієнт $A=0$ ($B\neq 0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$), то нормальний вектор $\overline{n}=\{0; B; C\}$ перпендикулярний до вісі Ox, тому площина $By+Cz+D=0$ паралельна до цієї вісі. Якщо ще додатково $D=0,$ то площина $By+Cz=0$ проходить через вісь Ox.

3. Нехай, наприклад, $A=B=0$ ($C\neq 0, D\neq 0$). Тоді площина $Cz+D=0$ паралельна осям Ox і Oy, тому вона паралельна площині Oxy і, як наслідок, перпендикулярна до вісі Oz. Якщо ж ще і $D=0,$ то $z=0$ — рівняння площини Oxy.

1.6.2. Рівняння площини, яка проходить через три точки

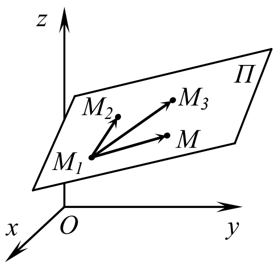

Рис. 1.18

Три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, які не належать одній прямій (рис. 1.18), однозначно визначають єдину площину $П$. Візьмемо довільну точку цієї площини $M(x; y; z)$ і розглянемо такі компланарні вектори:

$\overline{M_1M}=\{x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1\}$,

$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$ та

$\overline{M_1M_3}=\{x_3-x_1;\ y_3-y_1;\ z_3-z_1\}$.

З умови компланарності векторів випливає рівність нулю їхнього мішаного добутку:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (1.28)$$

Рівняння (1.28) – *рівняння площини, яка проходить через три* задані *точки*. Розкриваючи визначник, після спрощень одержимо загальне рівняння площини.

Якщо площина $П$ проходить через три точки – $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ b;\ 0)$ і $C(0;\ 0;\ c)$ (рис. 1.19), то рівняння (1.28) має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

або
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (1.29)$$

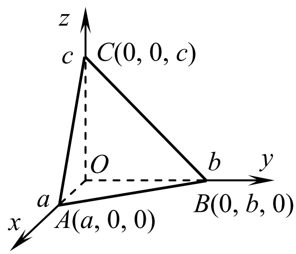

Рис. 1.19

Рівняння (1.29) називають *рівнянням площини у відрізках на осях*. Для зведення загального рівняння до вигляду (1.29) достатньо розділити рівняння (1.27) на $(-D)$ і перенести коефіцієнти A, B, C у знаменники:

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1, \text{ де } a=-\frac{D}{A},\ b=-\frac{D}{B},\ c=-\frac{D}{C}.$$

1.6.3. Нормальне рівняння площини

Якщо рівняння (1.27) помножити на нормуючий множник

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

знак якого обирають протилежним до знака числа D, то отримуємо *нормальне рівняння площини* Π:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \qquad (1.30)$$

де p – відстань від початку координат до площини або довжина перпендикуляра, який проведено до площини з початку координат; $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – кути, які утворює цей перпендикуляр з додатними напрямами осей $Ox,\ Oy,\ Oz$.

Рівняння (1.30) має такі особливості:

а) сума квадратів коефіцієнтів при x, y, z дорівнює одиниці;

б) вільний член входить у рівняння зі знаком мінус.

Нормальне рівняння (1.30) застосовують для знаходження відстані d від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до площини Π. Цю відстань обчислюють за формулою

$$d=\left|x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p\right|, \qquad (1.31)$$

тобто відстань d дорівнює абсолютній величині значення лівої частини нормального рівняння площини у точці M_1.

Приклад **1.19.** Піраміда обмежена координатними площинами та площиною, якій належать точки $A_1(1;\ 0;\ 3)$, $A_2(2;-1;\ 3)$, $A_3(2;\ 1;\ 1)$. Обчислити об'єм піраміди та знайти довжину проведеної з початку координат висоти.

Розв'язання.

За формулою (1.28) складемо рівняння площини, яка проходить через задані точки A_1, A_2 та A_3:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ 2-1 & -1-0 & 3-3 \\ 2-1 & 1-0 & 1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot(2-0) - y\cdot(-2-0) +$$

$$+(z-3)\cdot(1+1) = 2x-2+2y+2z-6=0,$$

з якого одержуємо загальне рівняння площини $A_1A_2A_3$:

$$2x+2y+2z-8=0 \text{ або } x+y+z-4=0.$$

Оскільки піраміда прямокутна (див. рис. 1.19), то її об'єм обчислимо за формулою $V_{ABCO} = \frac{1}{6}|AO|\cdot|OB|\cdot|OC|$, де A, B, C – точки перетину площини $A_1A_2A_3$ з осями координат Ox, Oy, Oz відповідно. Зведемо загальне рівняння площини $A_1A_2A_3$ до рівняння у відрізках на осях (1.29):

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1,$$

звідки $A(4;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 4;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 4)$; $|AO|=|OB|=|OC|=4$, а об'єм піраміди $V_{ABCO} = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$ (куб. од.).

Щоб знайти відстань від точки $O(0;\ 0;\ 0)$ до площини $A_1A_2A_3$, зведемо загальне рівняння цієї площини до нормального вигляду, домноживши його на нормуючий множник $\mu = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Дістанемо нормальне рівняння вигляду (1.30)

$$\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{\sqrt{3}}+\frac{z}{\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{3}}=0.$$

Висоту піраміди, яку проведено до площини $A_1A_2A_3$ з початку координат, визначимо за формулою (1.31) $d = p = \frac{4}{\sqrt{3}}$ (лін.од.).

Вказівка 1.9. При розв'язуванні задачі 1.3 контрольної роботи 1 актуальними будуть формули (1.28)–(1.31). При цьому рекомендуємо звернути увагу на приклад 1.19.

1.6.4. Кут між двома площинами. Умови паралельності та перпендикулярності площин

Нехай площини Π_1 і Π_2 задані своїми загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Тоді гострий кут φ між цими площинами можна виразити через кут між їхніми нормальними векторами $\bar{n}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ і $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$:

$$\cos\varphi = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{1.32}$$

Умовою паралельності площин є пропорційність відповідних координат нормальних векторів площин: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Якщо площини Π_1 і Π_2 перпендикулярні, то $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$, тобто умова перпендикулярності площин: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

***Приклад* 1.20.** Визначити кут між координатною площиною Oyz та площиною $3y - 2x + 1 = 0$.

Розв'язання

Координатна площина Oyz задається рівнянням $x = 0$, з якого випливає: $A_1 = 1$, $B_1 = 0$, $C_1 = 0$. Нормальний вектор площини Oyz $\bar{n}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\} = \{1;\ 0;\ 0\}$, а іншої площини – $\bar{n}_2 = \{-2;\ 3;\ 0\}$. За формулою (1.32) для гострого кута між площинами: $\cos\varphi = \frac{\left|1\cdot(-2) + 0\cdot 3 + 0\cdot 0\right|}{1\cdot\sqrt{4+9+0}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$, звідки $\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$.

1.7. ПРЯМА ЛІНІЯ У ПРОСТОРІ. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Загальні рівняння прямої у тривимірному просторі, канонічні і параметричні рівняння. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки. Кут між двома прямими, умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Точка перетину прямої і площини, кут між прямою і площиною, умови паралельності і перпендикулярності прямої та площини, умови належності прямої площині.

Література: [1, розд. 8, п. 8.3], [3, розд. 3, п. 3.5], [4, розд. 3, §5], [6, мод. 2, п. 2.2].

1.7.1. Різні види рівнянь прямої у просторі

У тривимірному просторі через задану точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ паралельно *напрямному вектору* $\overline{a}=\{l;\ m;\ n\}$ проходить єдина пряма L. Подібно до (1.12) складемо *канонічні рівняння прямої*:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (1.33)$$

У рівняннях прямої (1.33) позначимо через t кожне з рівних відношень. Тоді $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t,$ звідки одержимо *параметричні рівняння прямої*:

$$\begin{cases} x=x_1+lt, \\ y=y_1+mt, \\ z=z_1+nt, \end{cases} \qquad (1.34)$$

де $t\in R,$ t – *параметр,* який може набувати будь-яких значень.

Пряму L у просторі можна задати як геометричне місце точок перетину двох непаралельних площин:

$$L:\ \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (1.35)$$

Систему рівнянь (1.35) називають *загальним рівнянням прямої*.

У разі потреби рівняння (1.35) може бути зведене до канонічного (1.33). Для цього достатньо визначити точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ на прямій L і її напрямний вектор $\overline{a}=\{l;\ m;\ n\}$. Для знаходження точки M_0 обирають довільне значення однієї зі змінних, наприклад $z_0 = 0$, тоді із системи $\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 \end{cases}$ знаходять відповідні значення двох інших змінних x_0 і y_0. Напрямний вектор $\overline{a}$ прямої L одночасно перпендикулярний до обох нормальних векторів $\overline{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ і $\overline{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ площин, лінією перетину яких є пряма. Отже, $\overline{a} = [\overline{n}_1\overline{n}_2]$.

Якщо пряма L проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то, обравши за напрямний вектор прямої вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$, із канонічних рівнянь (1.33) виводимо *рівняння прямої, що проходить через дві задані точки*:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (1.36)$$

***Приклад* 1.21.** Записати параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x - y - 4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Задачу можна розв'язати у два способи.

Перший спосіб

Узявши $x_0 = 0$, одержимо систему $\begin{cases} y + z = 1, \\ -y - 4 = 0, \end{cases}$ розв'язок якої: $y_0 = -4$; $z_0 = 4$. Маємо точку $M_0(0; -4; 4)$. Напрямний вектор знайдемо за формулами (1.17) і (1.18):

$$\overline{a} = [\overline{n}_1\overline{n}_2] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k} \text{ або } \overline{a} = \{1;\ 2; -3\}.$$

Отже, параметричні рівняння вигляду (1.34) для заданої прямої:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = -4 + 2t, \\ z = 4 - 3t, \ t \in R. \end{cases}$$

Другий спосіб

Аналогічно беручи, наприклад $y_1 = 0$, знайдемо на прямій точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$: $\begin{cases} x + z = 0, \\ 2x - 4 = 0, \end{cases}$ звідки $x_1 = 2$, $z_1 = -2$. Маємо точку $M_1(2;\ 0; -2)$. Вектор $\overline{M_0M_1} = \{2;\ 4; -6\}$ є напрямним вектором прямої. Для спрощення за напрямний вектор можна взяти колінеарний до $\overline{M_0M_1}$ вектор $\overline{a} = \frac{1}{2}\overline{M_0M_1} = \frac{1}{2}\{2;\ 4; -6\} = \{1;\ 2; -3\}$. Тоді параметричні рівняння прямої будуть мати вигляд рівнянь, знайдених першим способом.

1.7.2. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих

Якщо прямі L_1 і L_2 задані канонічними рівняннями $L_1: \ \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$, $L_2: \ \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$, то кут φ між ними можна виразити через кут між їхніми напрямними векторами $\overline{a}_1 = \{l_1;\ m_1;\ n_1\}$ і $\overline{a}_2 = \{l_2;\ m_2;\ n_2\}$. Тому за формулою (1.15):

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2|}{|\overline{a}_1||\overline{a}_2|} = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Якщо прямі L_1 і L_2 паралельні, то їхні напрямні вектори колінеарні, тому відповідні координати цих векторів пропорційні. Звідки маємо умову паралельності прямих: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$.

Якщо прямі L_1 і L_2 перпендикулярні, то скалярний добуток їхніх напрямних векторів дорівнює нулю. Звідки випливає умова перпендикулярності прямих: $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

1.7.3. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини

Кут φ між прямою і площиною визначають як кут між прямою та її проекцією на цю площину (рис. 1.20). Нехай пряма L задана канонічними рівняннями (1.33), площина Π – загальним рівнянням (1.27), а ψ – кут між напрямним вектором $\overline{a} = \{l;\ m;\ n\}$ прямої і нормальним вектором $\overline{n} = \{A;\ B;\ C\}$ площини.

Якщо ψ – гострий, то $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ і $\cos\psi = \sin\varphi$, а якщо ψ – тупий, то $\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$ і $\cos\psi = -\sin\varphi$. Тому $\sin\varphi = |\cos\psi|$ і формула для визначення кута φ між прямою і площиною:

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (1.37)$$

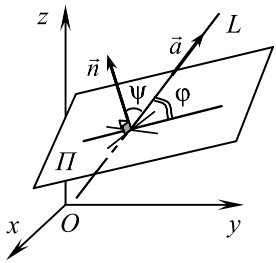

Рис. 1.20

Якщо пряма L паралельна площині $П$, то вектори $\overline{n}$ і $\overline{a}$ перпендикулярні, тому їхній скалярний добуток дорівнює нулю:

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

а якщо пряма перпендикулярна до площини, то вектори $\overline{n}$ і $\overline{a}$ колінеарні, тому їх відповідні координати пропорційні:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Належність прямої L площині $П$ описується двома умовами:

$$\begin{cases} Al + Bm + Cn = 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \end{cases}$$

перша з яких означає паралельність прямої і площини, а друга – належність площині точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, яка лежить на прямій L.

***Приклад* 1.22.** Визначити кут між координатною віссю Oz та площиною $3y - 2x - z + 1 = 0$.

Розв'язання

За напрямний вектор осі Oz обираємо її орт $\overline{k} = \overline{a} = \{0;\ 0;\ 1\}$, а за нормальний вектор площини $\overline{n} = \{-2;\ 3;\ -1\}$. Тоді кут між заданою площиною та віссю Oz виразимо через координати обраних векторів за формулою (1.37):

$$\sin\varphi = \frac{|-1|}{1 \cdot \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}};\ \ \varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{13}}.$$

☞ **Вказівка 1.10.** Під час розв’язування задачі 1.3.є) контрольної роботи 1 актуальними будуть формули (1.32) та (1.37). При цьому рекомендуємо звернути увагу на приклади 1.20 та 1.22.

1.8. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Еліпс, гіпербола: означення, канонічні рівняння, ексцентриситет, директриси та їх геометричний зміст, асимптоти гіперболи. Парабола: означення, канонічне рівняння, параметр та директриса параболи.

Література: [1, розд. 7], [3, розд. 3, п. 3.4], [4, розд. 3, §6], [6, мод. 2, пп. 3.1–3.4].

1.8.1. Еліпс

Еліпс – геометричне місце точок площини, для яких сума відстаней до двох фіксованих точок F_1 і F_2 (*фокусів*) цієї площини, є стала величина, що більша за відстань між фокусами.

Якщо систему координат обрано так, що вісь Ox проходить через фокуси F_1 і F_2, а початок координат ділить фокусну відстань $|F_1F_2| = 2c$ навпіл (рис. 1.21), то за означенням $r_1 + r_2 = 2a$, $2a > 2c$, де $r_1 = F_1M$ та $r_2 = F_2M$ називають *фокальними радіусами* еліпса.

Відстані між фокусами $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ і довільною точкою еліпса $M(x;\ y)$: $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$; $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Тоді за означенням: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$, де $a > c$. Звідки шляхом перетворень, пов’язаних з позбавленням від ірраціональностей, виводять *канонічне рівняння еліпса*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де a і b – *велика і мала півосі еліпса* за умови, що $a > b$, причому $b^2 = a^2 - c^2$.

Якщо $a = b$, то рівняння еліпса набуває вигляду $x^2 + y^2 = a^2$, що визначає коло з центром у початку координат та радіусом a. Тому коло є частинним випадком еліпса, в якому фокуси збігаються в одну точку – центр кола, а його рівні півосі визначають радіус кола.

Ексцентриситет ε еліпса визначає міру відхилення еліпса від кола, який обчислюють за формулою $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$. Оскільки за означенням $c < a$, то $\varepsilon < 1$. Якщо $\varepsilon \to 0$ $(a \to b)$, то еліпс наближається до кола. При $\varepsilon = 0$ $(a = b)$ еліпс стає колом. Якщо $\varepsilon \to 1$ $(b \to 0)$, то еліпс стискається до відрізка $[-a;\ a]$ на вісі Ox.

Осі Ox та Oy є осями симетрії еліпса, а точка O – центром симетрії. При цьому Ox називають *фокальною віссю* еліпса, оскільки на ній розміщені його фокуси.

Директриси або напрямні еліпса – дві прямі D_1 і D_2, що проходять паралельно осі Oy на відстані $\dfrac{a}{\varepsilon}$ від неї. Директриси задають рівняннями $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$.

Для характеристик еліпса має місце таке твердження: відношення фокального радіуса довільної точки $M(x;\ y)$ еліпса до відстані до відповідної директриси є стала величина, яка дорівнює ексцентриситету еліпса: $$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Рівняння $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, в якому $b > a$, визначає еліпс з фокальною віссю Oy, тому b – велика піввісь, a – мала піввісь еліпса. Фокусами у цьому випадку є точки $F_1(0; -c)$, $F_2(0;\ c)$, $c^2 = b^2 - a^2$. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$. Рівняння директрис D_1 та D_2: $y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$ (рис. 1.22).

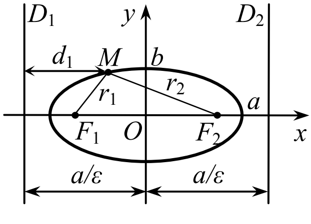

Рис. 1.21

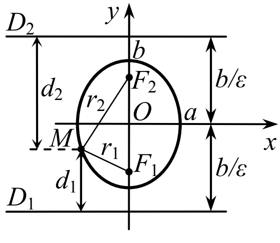

Рис. 1.22

1.8.2. Гіпербола

Гіпербола – геометричне місце точок площини, для яких абсолютна величина різниці відстаней до двох фіксованих точок F_1 і F_2 (*фокусів*), є сталою величиною, меншою за відстань між фокусами.

Якщо систему координат обрано так, що вісь Ox проходить через фокуси F_1 і F_2, а початок координат ділить фокусну відстань $|F_1F_2| = 2c$ навпіл (рис. 1.23), то $|r_1 - r_2| = 2a,\ \ c > a.$ Звідки дістаємо *канонічне рівняння гіперболи:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.38}$$

де a і b – *дійсна і уявна півосі* гіперболи, причому $b^2 = c^2 - a^2$.

Точки $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$ називають вершинами гіперболи. Координатні вісі Ox та Oy є осями симетрії гіперболи, точка O – центром симетрії. При цьому Ox називають *фокальною віссю* гіперболи, оскільки на ній розміщені її фокуси $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1,$ оскільки $c > a.$ Він характеризує форму гіперболи та відображає міру розтягування гілок гіперболи вздовж вісі Oy. Якщо $\varepsilon \to 1$ $(b \to 0),$ то гіпербола стискається до вісі Ox. При зростанні ексцентриситету ґілки гіперболи віддаляються від Ox (розтягуються вздовж осі Oy).

Директриси гіперболи D_1 і D_2 задають рівняннями: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}.$

Справедливими є рівності: $\dfrac{r_1}{d_1} = \dfrac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$

Гіпербола має дві *асимптоти* – пару прямих $y = \pm\dfrac{b}{a}x,$ до яких наближається графік кривої при віддаленні у нескінченність.

Дві гіперболи, в яких вісі співпадають і рівні, але дійсна вісь однієї є уявною віссю другої, і навпаки, називають спряженими. Рівняння гіперболи, *спряженої до гіперболи* (1.38) має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \ \text{ або } \ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

У цьому випадку: фокальною віссю є Oy, вершинами є точки $B_1(0;-b)$, $B_2(0;\ b)$, а фокусами – $F_1(0;-c)$, $F_2(0;\ c)$, де $c>b$. Півосі гіперболи: b – дійсна, a – уявна. Ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{c}{b}$. Рівняння директрис D_1 та D_2: $y=\pm\dfrac{b}{\varepsilon}$ (рис. 1.24).

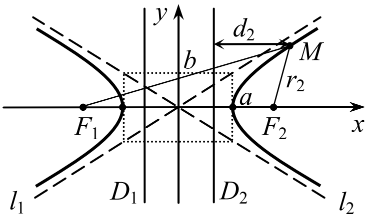

Рис. 1.23

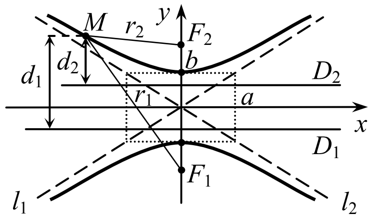

Рис. 1.24

1.8.3. Парабола

Парабола – геометричне місце точок площини, для яких відстань до фіксованої точки F, яку називають *фокусом*, дорівнює відстані до фіксованої прямої D, яку називають директрисою.

Нехай відстань від фокуса до директриси дорівнює p. Якщо систему координат обрано так, що вісь Ox проходить через фокус F перпендикулярно до директриси, вісь Oy ділить навпіл відстань між фокусом і директрисою (рис. 1.25), то фокус параболи: $F\left(\dfrac{p}{2};\ 0\right)$, а рівняння директриси: $x=-\dfrac{p}{2}$.

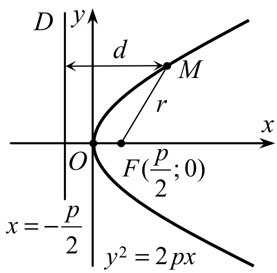

Рис. 1.25

Позначимо відстані від довільної точки параболи $M(x;\ y)$ до фокуса і директриси як r і d відповідно. За означенням параболи $r=d$ або $\sqrt{\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\dfrac{p}{2}$. Після піднесення до квадрата та відповідних спрощень дістаємо *канонічне рівняння параболи*:

$$y^2 = 2px, \text{ де } p > 0.$$

Дана парабола симетрична відносно осі Ox, яку називають *віссю параболи*, і проходить через початок координат – точку $O(0;\ 0)$, яка є вершиною параболи.

Оскільки за означенням $r = d$, то ексцентриситет параболи $\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$.

Додатну величину p називають *параметром параболи*. Вона характеризує міру стискання розглянутої параболи до осі Ox. Із зростанням параметра p гілки параболи віддаляються від осі Ox.

Рівняння $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ при $p > 0$ визначають параболи, графіки яких зображено на рис. 1.26, рис. 1.27 та рис. 1.28 відповідно.

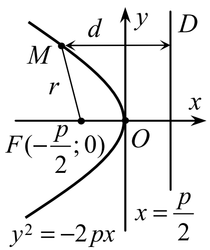

Рис. 1.26

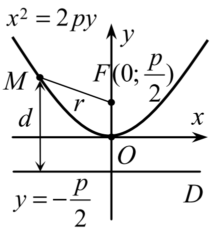

Рис. 1.27

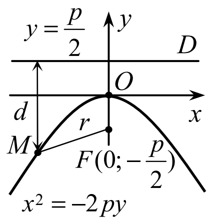

Рис. 1.28

***Приклад* 1.23.** За заданим рівнянням лінії другого порядку $9x^2 - 36y^2 + 324 = 0$ визначити вид кривої, знайти її фокуси, півосі, ексцентриситет, рівняння директрис і асимптот (для гіперболи) та виконати креслення.

Розв'язання

Дане рівняння кривої другого порядку зведемо до канонічного вигляду:

$$9x^2 - 36y^2 = -324,\ \ \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = -1,\ \ -\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Отримали рівняння спряженої гіперболи з дійсною піввіссю $b = 3$, яка розміщена на осі Oy, і уявною $a = 6$ на осі Ox. Вершинами гіперболи є точки $B_1(0;-3)$ та $B_2(0;\ 3)$.

З умови $b^2 = c^2 - a^2$ знаходимо половину фокусної відстані c: $c^2 = a^2 + b^2 = 6^2 + 3^2 = 45$; $c = 3\sqrt{5}$. Фокуси належать осі Oy і мають відповідно координати $F_1(0; -3\sqrt{5})$ та $F_2(0; 3\sqrt{5})$.

Ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{b} = \dfrac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$.

Рівняння директрис: $y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$ або $y = \pm\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Рівняння асимптот: $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ або $y = \pm\dfrac{1}{2}x$.

Графік гіперболи зображений на рис. 1.29.

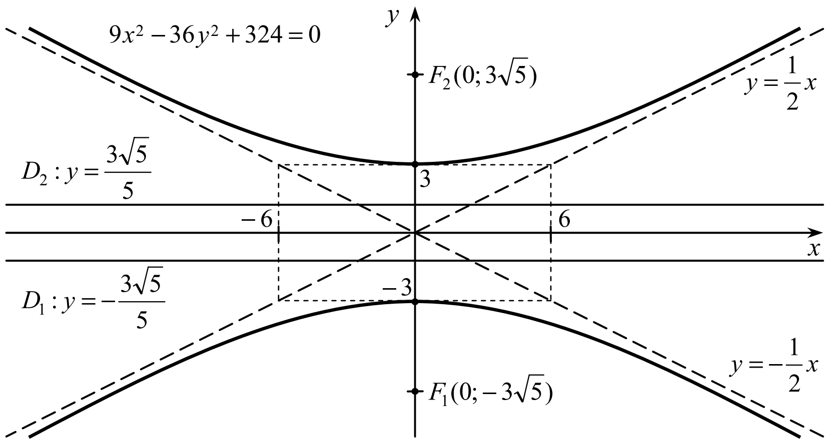

Рис. 1.29

Вказівка 1.11. Навички дослідження кривих другого порядку та побудови їхніх графіків необхідно буде продемонструвати під час розв’язання задачі 1.4 контрольної роботи 1. При цьому рекомендуємо попередньо розглянути приклад 1.23.

МОДУЛЬ 2

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Для виконання контрольної роботи 2 необхідно вивчити основні теоретичні питання, що стосуються елементарних функцій, границь послідовностей та функцій, неперервності функцій, означення похідної, її властивостей і правил обчислення похідних при різних видах задання функцій, а також застосування похідної до знаходження найбільших і найменших значень функції, розкриття невизначеностей різних видів при обчисленні границь функцій, повного дослідження функцій і побудови їх графіків.

Цей модуль допоможе розібратися в суті задач контрольної роботи 2 і розв'язати їх самостійно.

СТРУКТУРА МОДУЛЯ

2.1. Функції.

2.2. Границя функції однієї змінної.

2.3. Неперервність функцій.

2.4. Похідні функцій та їх обчислення.

2.5. Диференціал функції. Основні теореми диференціального числення.

2.6. Застосування похідної.

Базисні поняття. 1. Послідовності. 2. Границя послідовності. 3. Функція. 4. Границя функції. 5. Визначені та невизначені вирази. 6. Перша та друга важливі границі. 7. Нескінченно малі величини. 8. Неперервність функції в точці. 9. Розриви функцій та їх класифікація. 10. Похідна. 11. Диференціал. 12. Дотична. 13. Нормаль. 14. Зростання і спадання функцій. 15. Локальні екстремуми функцій. 16. Інтервали опуклості. 17. Точки перегину графіка функцій. 18. Асимптоти графіка функцій.

Основні задачі. 1. Знаходження границі послідовності. 2. Побудова графіків функцій шляхом елементарних перетворень. 3. Знаходження границь функцій. 4. Застосування еквівалентностей нескінченно малих величин для знаходження границь. 5. Дослідження неперервності функцій. 6. Відшукання похідних першого і вищих порядків функцій, заданих явно, неявно, параметрично. 7. Знаходження диференціалів першого і вищих порядків явно заданих функцій. 8. Застосування похідної. 9. Обчислення границь за правилом Лопіталя. 10. Повне дослідження функцій та побудова їх графіків.

ЗНАННЯ ТА ВМІННЯ, ЯКІ МАЄ НАБУТИ СТУДЕНТ

1. Знання на рівні понять, означень, формулювань

1.1. Послідовність. Границя послідовності.

1.2. Теореми про границі.

1.3. Функція. Класифікація функцій. Складена функція. Обернена функція. Елементарні функції.

1.4. Нескінченно малі та нескінченно великі величини.

1.5. Перша та друга важливі границі та їх наслідки.

1.6. Еквівалентні нескінченно малі величини.

1.7. Невизначені вирази та їх розкриття.

1.8. Неперервні функції у точці та їхні властивості.

1.9. Розриви функцій та їх класифікація.

1.10. Означення похідної, фізичний і геометричний зміст.

1.11. Таблиця похідних основних елементарних функцій.

1.12. Правила диференціювання.

1.13. Правила диференціювання неявно заданих функцій.

1.14. Диференціювання функцій, заданих параметрично.

1.15. Логарифмічне диференціювання.

1.16. Зв’язок між неперервністю і диференційовністю.

1.17. Диференціал функції, його геометричний зміст.

1.18. Визначення похідних та диференціалів вищих порядків.

1.19. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей.

1.20. Монотонність функцій на інтервалі.

1.21. Визначення екстремумів функції.

1.22. Правило відшукання екстремумів.

1.23. Визначення опуклості, точок перегину.

1.24. Вертикальні та похилі асимптоти графіків функцій.

1.25. Схема дослідження функції за допомогою похідної та побудова її графіка.

2. Вміння у розв'язанні задач

2.1. Знаходити границі числових послідовностей.

2.2. Проводити найпростіші дослідження елементарних функцій (область визначення, множина значень, зростання і спадання функцій, знаходження оберненої функції тощо).

2.3. Будувати графіки основних елементарних функцій.

2.4. Обчислювати границі, застосовуючи першу та другу важливі границі.

2.5. Застосовувати еквівалентності до обчислення границь.

2.6. Обчислювати односторонні границі.

2.7. Досліджувати функції на неперервність.

2.8. Знаходити похідні складених функцій, заданих явно.

2.9. Знаходити похідні складених функцій, заданих неявно і параметрично.

2.10. Застосовувати логарифмічне диференціювання.

2.11. Знаходити диференціали функцій.

2.12. Знаходити похідні та диференціали вищих порядків.

2.13. Складати рівняння дотичної і нормалі до кривої.

2.14. Застосовувати правило Лопіталя для розкриття невизначеності при обчисленні границь.

2.15. Знаходити інтервали зростання і спадання функцій.

2.16. Досліджувати функцію на екстремум.

2.17. Знаходити інтервали опуклості, точки перегину.

2.18. Знаходити асимптоти графіка функції.

2.19. Досліджувати функцію та будувати її графік.

2.1. ФУНКЦІЇ

Поняття функції. Способи задання функцій. Основні характеристики функцій. Обернена та складена функції. Види функцій за формою задання. Елементарні функції та їх класифікація.

Література: [6, мод. 3, пп. 1.2.1–1.2.6].

2.1.1. Поняття функції та її основні характеристики

Якщо кожному значенню змінної x, яке належить множині дійсних чисел D, за деяким правилом ставиться у відповідність єдине число y, яке належить множині дійсних чисел E, то кажуть, що y є функцією від x і відповідно записують $y = f(x)$. При цьому змінну x, де $x \in D$, називають незалежною змінною або аргументом функції, а змінну y, де $y \in E$, називають залежною змінною або функцією. Під символом f розуміють правило, за яким здійснюється відповідність або ті операції над аргументом, які необхідно виконати, щоб одержати відповідне значення функції. Множину D називають областю визначення функції $f(x)$ і позначають при цьому $D(f)$ або $D(y)$, а множину $E -$ областю значень функції $f(x)$ і позначають $E(f)$ або $E(y)$.

Графіком функції $y = f(x)$ називають множину всіх точок $M(x; y)$ площини Oxy, які задовольняють рівність $y = f(x)$, де $x \in D(f)$.

Виділяють три способи задання функцій:
1) *аналітичний*, який характеризується як задання функції за допомогою однієї або декількох формул чи рівнянь;
2) *табличний*, при якому залежність між змінними задається у вигляді таблиці, яка містить числові значення аргументу x і відповідні їм значення функції y;
3) *графічний*, коли задається графік функції.

Функцію $y = f(x)$ називають *парною*, якщо її область визначення $D(f)$ є симетричною відносно нуля (точки $x = 0$) і при цьому для кожного значення аргументу $x \in D(f)$ виконується рівність $f(-x) = f(x)$. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy.

Функцію $y = f(x)$ називають *непарною*, якщо її область визначення $D(f)$ є симетричною відносно нуля і при цьому для кожного значення аргументу $x \in D(f)$ виконується рівність $f(-x) = -f(x)$. Графік непарної функції симетричний відносно початку координат, тобто відносно точки $O(0;0)$.

Функцію $y = f(x)$, яка не є ні парною, ні непарною, називають функцією *загального вигляду*.

Функцію $y = f(x)$ називають *зростаючою* (*спадною*) на інтервалі $(a;b)$, якщо для довільних точок x_1 та x_2, де $x_1 \in (a;b)$ і $x_2 \in (a;b)$ та $x_1 < x_2$, виконується відповідна нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Функцію $y = f(x)$ називають *неспадною* (*незростаючою*) на інтервалі $(a;b)$, якщо для довільних точок x_1 та x_2, де $x_1 \in (a;b)$, $x_2 \in (a;b)$ та $x_1 < x_2$, виконується відповідна нерівність $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Зростаючі, спадні, незростаючі та неспадні функції називають *монотонними*, а зростаючі та спадні функції при цьому називають *строго монотонними*.

Функцію $y = f(x)$ називають *обмеженою* на множині D, якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in D$ функція $f(x)$ є визначеною і при цьому виконується нерівність $|f(x)| \leq M$. Графік обмеженої функції завжди розміщений у смузі між прямими $y = -M$ та $y = M$. Наприклад, функція $y = 2\sin x$ є обмеженою на всій своїй області визначення $x \in R$, оскільки нерівність $|2\sin x| \leq 2$ виконується при всіх $x \in (-\infty;\infty)$ і відповідно її графік розміщений між прямими $y = -2$ та $y = 2$.

Функцію $y = f(x)$, яка має область визначення $D(f)$, називають *періодичною* з періодом T, де $T \neq 0$, якщо для всіх значень аргументу $x \in D(f)$ виконується рівність $f(x) = f(x + kT)$, де $k \in \mathrm{Z}$, $(x + kT) \in D(f)$. При цьому найменший додатний період функції називають її основним періодом. Наприклад, функція $y = \cos kx$ при $k \neq 0$ є періодичною з періодом $T = \dfrac{2\pi}{k}$.

2.1.2. Обернена функція

Нехай задано функцію $y = f(x)$ з областю визначення $D(f): X$ та областю значень $E(f): Y$. Функцію $x = \varphi(y)$ називають *оберненою* до функції $y = f(x)$, якщо одночасно виконуються умови:

1) область визначення X функції $y = f(x)$ є областю значень функції $x = \varphi(y)$;

2) область значень Y функції $y = f(x)$ є областю визначення функції $x = \varphi(y)$;

3) кожному значенню змінної y, де $y \in Y$ відповідає одне і тільки одне значення змінної x, а $x \in X$.

Якщо для заданої функції $y = f(x)$ існує обернена функція $x = \varphi(y)$, то ці функції вважають взаємно оберненими. Для того, щоб знайти функцію $x = \varphi(y)$, обернену до заданої функції $y = f(x)$, достатньо розв'язати рівняння $f(x) = y$ відносно x за умови, що це можливо.

Якщо функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ є взаємно оберненими, то графіками цих функцій є одна й та сама крива. А якщо аргумент оберненої функції $x = \varphi(y)$ знову позначити x, а функцію y $(y \to x,\ x \to y)$, то одержимо функції $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$, графіки яких будуть симетричними відносно бісектриси першого і третього координатних кутів.

2.1.3. Складена функція

Нехай функція $y = f(u)$ визначена на деякій множині U, а функція $u = g(x)$ визначена на деякій множині X і при цьому для кожного значення $x \in X$ є відповідне значення $u = g(x) \in U$. Тоді кажуть, що на множині X визначена функція $y = f(g(x))$, яку називають *складеною* функцією від x або функцією від функції (операцією взяття функції від функції), або суперпозицією заданих функцій.

Змінну $y = f(u)$ називають зовнішньою функцією, а змінну $u = g(x)$ – внутрішньою функцією. Наприклад, функція $y = \sqrt{\ln x^2}$ є суперпозицією трьох функцій: $y = \sqrt{u}$, де $u = \ln v$, $v = x^2$. Тут функція $u = \ln v$ є внутрішньою функцією для функції $y = \sqrt{u}$ і одночасно є зовнішньою функцією до $v = x^2$.

2.1.4. Види функцій за формою задання

Функції, задані у прямокутній декартовій системі координат (на площині Oxy), поділяють на три види за формою задання: явно задані, неявно задані та параметрично задані.

Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, яке розв'язане відносно y, то кажуть, що функція *задана явно*. Якщо ж функціональну залежність y від x задано рівнянням $F(x, y) = 0$, яке не розв'язане відносно y, то функція *задана неявно*. Зауважимо, що рівняння $F(x,y)=0$ визначає на площині Oxy однозначну функцію лише тоді, коли для кожного значення x із деякої множини X знайдеться одне і тільки одне значення y таке, що $(x;y)$ є розв'язком цього рівняння. Наприклад, рівняння $x^2+y^2=5$ не визначає на площині Oxy деяку єдину конкретну однозначну функцію, оскільки значенню аргументу $x=0$ відповідає дві точки $(0;-\sqrt{5})$ та $(0;\sqrt{5})$, але визначає криву, яка є колом. При цьому, розв'язавши дане рівняння відносно y, одержимо сукупність двох рівнянь $y=\pm\sqrt{5-x^2}$, яка задає дві явно задані функції $y_1=-\sqrt{5-x^2}$ та $y_2=\sqrt{5-x^2}$, кожна з яких задовольняє рівняння $x^2+y^2=5$.

Кожну явно задану функцію $y=f(x)$ можна подати як неявно задану рівнянням $f(x)-y=0$, але не навпаки. Тому неявну форму запису функції можна вважати більш загальною, ніж явну. Наприклад, явно задану функцію $y=\frac{1}{2}(x-3)$ можна подати у неявному вигляді як $x-2y-3=0$. А функцію, яка задана в неявному вигляді рівнянням $e^{x-y}+\sin(x+y)+x=0$, явно записати неможливо.

Розглянемо, наприклад, рівняння $\ln(x^2+y^2)+xy=0$, яке не можна ототожнювати з деякою однозначною функцією, оскільки при $x=0$ маємо $\ln y^2=0 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm1$. Тобто на площині Oxy значенню аргументу $x=0$ відповідає дві точки $M_1(0;-1)$ та $M_2(0;1)$. При цьому воно визначає деяку криву і можуть існувати однозначні функції $y_i(x)$, де $i=1,2$, для даного випадку, які задовольняють задане рівняння, яке відповідно буде виражати функціональну залежність їх змінних, а тому може бути прийняте як неявна форма задання функції $y_i(x)$.

Якщо ж розглянути рівняння

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2-2y+1=0, \qquad (2.1)$$

яке визначає на площині Oxy коло з центром у точці $M(1;1)$ і радіусом $R=1$, то воно задає сукупність двох однозначних функцій:

$$(y-1)^2=1-(x-1)^2 \Leftrightarrow |y-1|=\sqrt{1-(x-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$y=1\pm\sqrt{1-(x-1)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1(x)=1+\sqrt{1-(x-1)^2}, \\ y_2(x)=1-\sqrt{1-(x-1)^2}, \end{array}\right.$$

кожна з яких задовольняє розглянуте рівняння. Тому рівняння (2.1) виражає функціональну залежність y від x одночасно для обох функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$, а тому може бути розглянуте як неявна форма задання для кожної з цих функцій.

Якщо функціональну залежність між змінними x та y функції $y=f(x)$ задано у вигляді двох функцій $x=\varphi(t)$ та $y=\psi(t)$, то таку форму задання функції називають параметричною. При цьому кажуть, що функція $y=f(x)$ *задана параметрично*, а допоміжну змінну t називають параметром, де $t\in(\alpha;\beta)$. Параметрично задану функцію можна подати у явному виді, якщо функція $x=\varphi(t)$ має обернену функцію $t=\Phi(x)$ і відповідно змінну y можна розглянути як складену функцію $y=\psi(t)=\psi(\Phi(x))=f(x)$.

Зауважимо, що функції $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, де $t\in(\alpha;\beta)$, визначають на площині Oxy деяку криву, але при цьому не кожна параметрично задана крива визначає однозначну функцію. Наприклад, функції $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, де $t\in[0;2\pi)$ і $R>0$, визначають на площині Oxy коло $x^2+y^2=R^2$ з центром у точці $O(0;0)$ і радіусом R.

2.1.5. Елементарні функції та їх класифікація

До основних елементарних функцій належать такі:

1) степенева функція $y=x^\alpha$, де $\alpha\in\mathrm{R}$;

2) показникова функція $y=a^x$, де $a>0$, $a\neq 1$;

3) логарифмічна функція $y=\log_a x$, де $a>0$, $a\neq 1$;

4) тригонометричні функції $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$, $y=\mathrm{ctg}x$;

5) обернені тригонометричні функції
$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}x$, $y=\mathrm{arcctg}x$.

Функцію називають *елементарною*, якщо вона задається одним аналітичним виразом (однією формулою), який утворений з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа алгебраїчних операцій та утворення складених функцій.

Наприклад, функція $y = \ln(\cos x^3) + \sqrt{x^3} \cdot \mathrm{tg}x \cdot (x^2 + 3)$ є елементарною. А функції $y = [x]$, $y = \{x\}$, $y = \begin{cases} 0, \ x < 0, \\ 1, \ x \ge 0, \end{cases}$ $y = \begin{cases} 0, \ x < 0, \\ x^2, \ x > 0, \end{cases}$ $y = x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$ та $y = x!$ не є елементарними.

Елементарні функції поділяють на *алгебраїчні* та *трансцендентні*.

До алгебраїчних функцій належать:

1) цілі раціональні функції (многочлени), тобто функції вигляду $y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_i \cdot x^i + ... + a_1 \cdot x + a_0$, де $n \in N \cup \{0\}$, $a_i \in R$, $i = \overline{0, n}$;

2) дробово-раціональні функції, тобто

$$y = \frac{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0}{b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + ... + b_1 \cdot x + b_0};$$

3) ірраціональні функції, що записуються виразами, які містять, крім додавання, віднімання, множення та ділення, ще й піднесення до степеня з раціональним нецілим показником.

Усі елементарні функції, які не є алгебраїчними, називають трансцендентними. До таких функцій належать показникові, логарифмічні, тригонометричні та обернені тригонометричні функції.

2.2. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Границя функції в точці і у нескінченності. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Властивості границь. Порівняння нескінченно малих. Перша і друга важливі границі та наслідки з них. Невизначені вирази та їх розкриття.

Література: [2, розд. 3, пп. 3.1–3.8], [3, розд. 4, пп. 4.1–4.3], [4, розд. 4, §3,4], [5, розд. 2, §1], [6, мод. 3, пп. 2.1–2.7].

2.2.1. Поняття границі функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому околі точки a, крім, можливо, самої точки a.

Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ при $x \to a$ (або у точці a), якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при всіх $x \neq a$, які задовольняють нерівність $|x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записують це так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Геометричне тлумачення означення границі функції у точці $x = a$: для усіх точок x, віддалених від точки $x = a$ менше, ніж на $\delta > 0$, графік функції $y = f(x)$ розміщений усередині смуги, обмеженої прямими $y = A - \varepsilon$ та $y = A + \varepsilon$ (рис. 2.1).

Якщо $x < a$ і $x \to a$, то пишуть $x \to a - 0$, якщо $x > a$ і $x \to a$, то пишуть $x \to a + 0$.

Якщо існують границі $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0) = A_1$ та $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) = A_2$, то числа A_1 та A_2 називають відповідно границею функції $f(x)$ зліва у точці $x = a$ (*лівою границею*) та границею функції $f(x)$ справа у точці $x = a$ (*правою границею*). Ліву і праву границі у точці називають односторонніми границями. (рис. 2.2).

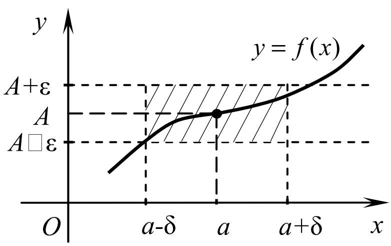

Рис. 2.1

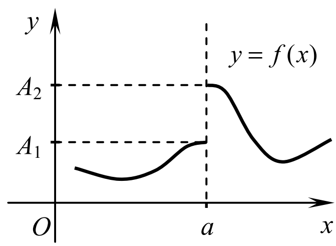

Рис. 2.2

Для існування границі функції $y = f(x)$ у точці $x = a$ необхідно і достатньо, щоб існували ліва і права границі функції у цій точці і були рівними між собою. При цьому, якщо функція $y = f(x)$ у точці $x = a$ має границю, то справедливими є рівності $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a - 0) = f(a + 0)$.

Цей факт легко зобразити графічно (див. рис. 2.1).

Число A називають границею функції $y=f\left(x\right)$ при $x\to\infty$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $K\left(\varepsilon\right)>0$ таке, що для всіх x, що задовольняють умову $\left|x\right|>K\left(\varepsilon\right)$, виконується нерівність $\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon$ (рис. 2.3).

При цьому записують $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=A$ або $f\left(x\right)\to A$ при $x\to\infty$.

Тут $x\to\infty$ означає, що або $x\to+\infty$, або $x\to-\infty$.

Функцію $y=f\left(x\right)$ називають *нескінченно великою* при $x\to a$, якщо для будь-якого числа $M>0$ існує число $\delta\left(M\right)>0$ таке, що для всіх x, які задовольняють подвійну нерівність $0<\left|x-a\right|<\delta$, виконується нерівність $\left|f(x)\right|>M$ (рис. 2.4). Записують це так: $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=\infty$.

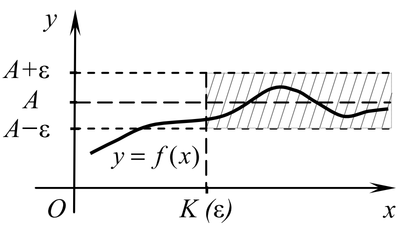

Рис. 2.3

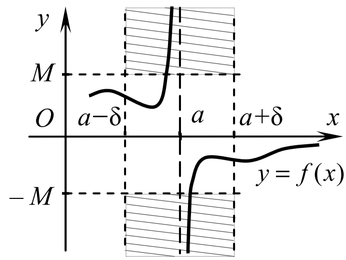

Рис. 2.4

Функцію $\alpha\left(x\right)$ називають *нескінченно малою* при $x\to a$ $\left(x\to\pm\infty\right)$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\alpha\left(x\right)=0$ $\left(\lim\limits_{x\to\pm\infty}\alpha\left(x\right)=0\right)$.

Розглянемо, наприклад, функцію $y=\dfrac{1}{x}$.

Вона одночасно є нескінченно великою величиною при $x\to 0$ та нескінченно малою величиною при $x\to\pm\infty$ (рис. 2.5).

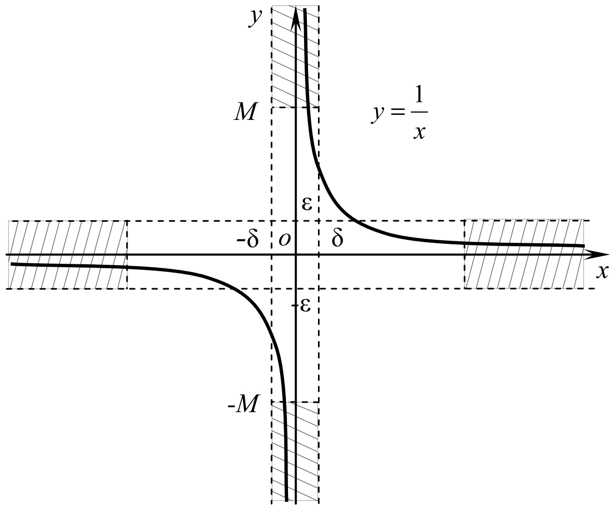

Рис. 2.5

2.2.2. Основні властивості нескінченно малих і нескінченно великих величин

1. Сума нескінченно великої величини і величини обмеженої є нескінченно велика величина. Символічно це записують так: $c+\infty=\infty$.

2. Сума двох нескінченно великих величин одного знака є нескінченно велика величина: $\infty+\infty=\infty$.

На відміну від цього сума двох нескінченно великих величин різних знаків не завжди буде нескінченно великою величиною, тому цю суму називають невизначеністю вигляду $\infty-\infty$.

3. Добуток двох нескінченно великих величин є нескінченно велика величина: $\infty\cdot\infty$.

4. Добуток нескінченно великої величини на величину, що більша за абсолютним значенням за деяке додатне число, також є нескінченно велика величина.

Частка двох нескінченно великих величин не завжди є нескінченно великою величиною, тому дробовий вираз, чисельник і знаменник якого нескінченно великі змінні величини, називають невизначеністю вигляду $\frac{\infty}{\infty}$.

5. Сума скінченного числа нескінченно малих величин є нескінченно мала величина.

6. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу функцію є нескінченно малою функцією.

Наприклад, при $x \to \infty$ функція $\alpha(x) = \dfrac{1}{x} \to 0$, а функція $f(x) = \sin x$ є обмеженою, оскільки $|\sin x| \le 1$ при всіх $x \in (-\infty; +\infty)$. Тому функція $p(x) = \alpha(x) \cdot f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sin x = \dfrac{\sin x}{x}$ є нескінченно малою при $x \to \infty$; відповідно маємо: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$

Частка від ділення двох нескінченно малих величин у загальному випадку не є нескінченно мала величина. У зв'язку з цим відношення двох нескінченно малих величин називають невизначеністю вигляду $\dfrac{0}{0}$. Те саме стосується добутку нескінченно великої на нескінченно малу величину, який називають невизначеністю вигляду $0 \cdot \infty$.

7. Для того, щоб число A було границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x) - A$ була нескінченно малою величиною.

8. Якщо функція $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина при $x \to x_0$ $(\alpha \ne 0)$, то функція $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою величиною при $x \to x_0$, і навпаки, якщо функція $\beta(x)$ – нескінченно велика величина при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{\beta(x)}$ є нескінченно малою величиною при $x \to x_0$.

2.2.3. Властивості границь

Якщо функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ у точці $x = a$ мають скінченні границі, а c – стала величина, то у цій точці справедливими є формули:

1) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\lim\limits_{x\to a}g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$;

5) $\lim\limits_{x\to a}c=c$;

6) $\lim\limits_{x\to a}cf(x)=c\lim\limits_{x\to a}f(x)$.

2.2.4. Перша важлива границя та наслідки з неї

Першою важливою границею називають границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{2.2}$$

Ця границя пов'язана з невизначеністю $\dfrac{0}{0}$.

Наслідки з першої важливої границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=1$, 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}kx}{x}=k$,

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{\sin mx}=\dfrac{k}{m}$, 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$, 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin kx}{x}=k$,

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}=1$, 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}kx}{x}=k$, 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

2.2.5. Друга важлива границя та наслідки з неї

Друга важлива границя –

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \quad \text{або} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e, \tag{2.3}$$

де e (число Непера) – трансцендентне число, його наближене значення з точністю до 10^{-15} дорівнює 2,718281828459045.

Друга важлива границя пов'язана з невизначеністю 1^{∞} (символ для скороченого позначення границі виразу $f(x)^{g(x)}$, де $f(x)\to 1$, а $g(x)\to\infty$).

Наслідки з другої важливої границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}=\ln a$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$, 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{k}-1}{x}=k$.

2.2.6. Порівняння нескінченно малих величин. Еквівалентні нескінченно малі

Дві нескінченно малі величини порівнюють між собою за допомогою дослідження їх відношення. Нехай $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – нескінченно малі функції при $x\to x_0$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

1. Функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають *нескінченно малими одного порядку* при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$, де $A\neq 0$, $A\neq\infty$ при $A\in R$.

2. Нескінченно малі одного порядку $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to x_0$ називають *еквівалентними нескінченно малими*, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

При цьому записують: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$. Еквівалентним нескінченно малим відведено особливе місце серед нескінченно малих функцій.

3. Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою вищого порядку*, ніж $\beta(x)$ при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$.

4. Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою нижчого порядку*, ніж $\beta(x)$ при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$.

5. Функцію $\alpha(x)$ називають нескінченно малою k*-го порядку* відносно $\beta(x)$ при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = A$, де $A \neq 0$, $A \neq \infty$ при $A \in R$.

Такі самі правила застосовують для порівняння нескінченно малих при $x \to \infty$.

При обчисленні границь часто застосовують такі властивості нескінченно малих і нескінченно великих величин:

1. Якщо $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$, $\beta(x) \sim \gamma(x)$ при $x \to a$, то $\alpha(x) \sim \gamma(x)$ при $x \to a$.

2. Якщо $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to a$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

3. Сума нескінченно малих різних порядків еквівалентна доданку нижчого порядку.

4. Сума нескінченно великих різних порядків еквівалентна доданку вищого порядку.

Аналогічно порівнюють нескінченно великі функції. Зокрема, якщо $f(x)$ і $g(x)$ – нескінченно великі функції при $x \to a$ і $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то їх називають еквівалентними нескінченно великими при $x \to a$ і записують $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$.

Застосовуючи важливі границі та наслідки з них, можна одержати такий ланцюжок еквівалентних нескінченно малих:

$$x \sim \sin x \sim \mathrm{tg} x \sim \arcsin x \sim \mathrm{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \text{ при } x \to 0,$$

або в більш загальному вигляді:

$$v(x) \sim \sin v(x) \sim \mathrm{tg} v(x) \sim \arcsin v(x) \sim \mathrm{arctg} v(x) \sim \ln(1+v(x)) \sim$$
$$\sim e^{v(x)} - 1, \text{ де } v(x) \to 0 \text{ при } x \to x_0.$$

Також мають місце такі еквівалентності:

$$\log_a(1+x) \sim x \log_a e,\ 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2,\ (1+x)^k - 1 \sim kx \text{ при } x \to 0.$$

Для нескінченно великих функцій раціонально застосовувати еквівалентність: $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \sim a_0 x^n$ при $x \to \infty$.

2.2.7. Обчислення границь

При обчисленні границь застосовують:

– властивості границь;

– графічний метод (границі деяких функцій можна знайти за графіком);

– правило граничного переходу під знаком неперервної функції: $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right) = f(\lim\limits_{x\to a} x)$;

– важливі границі та їх наслідки;

– ланцюжок еквівалентних нескінченно малих;

– еквівалентні нескінченно великі;

– властивості нескінченно малих та нескінченно великих величин.

При обчисленні границь у першу чергу необхідно аргумент функції замінити його граничним значенням. У результаті будуть одержані або визначені значення, або невизначеності різних типів.

Нехай $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left[\dfrac{a}{b}\right]$, $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta(x) = \left[a\cdot b\right]$, $\lim\limits_{x\to x_0}\big(\alpha(x)\pm\beta(x)\big) = \left[a\pm b\right]$, $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)^{\beta(x)} = \left[a^b\right]$, тоді виділимо такі основні співвідношення-визначеності при $c = const$:

1) $\left[c\cdot\infty\right] = \infty$ при $c \neq 0$; 2) $\left[\infty\cdot\infty\right] = \infty$; 3) $\left[\infty+\infty\right] = \infty$;

4) $\left[\dfrac{c}{0}\right] = \left[c\cdot\dfrac{1}{0}\right] = \left[c\cdot\infty\right] = \infty$ при $c \neq 0$; 5) $\left[\dfrac{\infty}{0}\right] = \left[\infty\cdot\dfrac{1}{0}\right] = \left[\infty\cdot\infty\right] = \left[\infty^2\right] = \infty$;

6) $\left[\dfrac{c}{\infty}\right] = \left[c\cdot\dfrac{1}{\infty}\right] = \left[c\cdot 0\right] = 0$; 7) $\left[\dfrac{0}{\infty}\right] = \left[0\cdot\dfrac{1}{\infty}\right] = \left[0\cdot 0\right] = 0$;

8) $\left[0^\infty\right] = 0$; 9) $\left[\infty^\infty\right] = \infty$.

2.2.8. Невизначені вирази та їх розкриття

Основними видами невизначеностей є: $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0\cdot\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$.

Знаходження границі у цих випадках називають *розкриттям невизначеності*, що здійснюється за допомогою зведення їх до визначених співвідношень.

Розглянемо деякі випадки розкриття невизначеностей.

1. *Невизначеність вигляду* $\frac{\infty}{\infty}$, утворена відношенням двох многочленів при $x \to \infty$.

Щоб розкрити таку невизначеність, достатньо чисельник і знаменник одночасно розділити на найвищий степінь x у цих многочленах. При цьому можна застосувати еквівалентні нескінченно великі, тобто

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \sim a_n x^n ,$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \sim b_m x^m \text{ при } x \to \infty.$$

Тоді маємо $$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0 \text{ при } n < m, \\ \dfrac{a_n}{b_n} \text{ при } n = m, \\ \infty \text{ при } n > m. \end{cases}$$

Приклад 2.1. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{5x-2}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{5x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{5-\frac{2}{x}} = \left[\frac{2+\frac{3}{\infty}}{5-\frac{2}{\infty}}\right] = \frac{2}{5}.$$

Приклад 2.2. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2+1}{7x^5+2x+3}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+1}{8x^5+2x+3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^5}}{8+\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^5}} = \left[\frac{\frac{5}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{8+\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty}}\right] = \frac{0}{8} = 0.$$

Вказівка 2.1. Навички розкриття невизначеності вигляду $\frac{\infty}{\infty}$, утвореної відношенням двох многочленів при $x \to \infty$, необхідно буде продемонструвати під час виконання завдання 2.1.а) контрольної роботи 2. При розв'язанні задачі 2.1.а) рекомендуємо звернути увагу на приклади 2.1 та 2.2.

2. *Невизначеність вигляду* $\frac{\infty}{\infty}$, утворена відношенням двох функцій, у яких многочлени знаходяться під знаками коренів різних степенів.

Для розкриття такої невизначеності використовують аналогічні прийоми.

Приклад 2.3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3}+x)^2}{\sqrt[3]{x^6+2}}$.

Розв'язання

Оскільки при $x\to+\infty$: $\sqrt{x^2+3}\sim\sqrt{x^2}=|x|=x$, $\sqrt[3]{x^6+2}\sim x^2$, то маємо $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3}+x)^2}{\sqrt[3]{x^6+2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2x)^2}{x^2}=4.$

3. *Невизначеність вигляду* $\frac{0}{0}$, утворена відношенням двох многочленів, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

Оскільки при $x=x_0$: $P_n(x_0)=0$ та $Q_m(x_0)=0$, то $x=x_0$ є коренем обох многочленів і відповідно кожен з них можна розкласти на множники, серед яких обов'язково буде множник $(x-x_0)$, тобто $P_n(x)=(x-x_0)\cdot P_{n-1}(x)$ та $Q_m(x)=(x-x_0)\cdot Q_{m-1}(x)$.

Зауважимо, що $x\neq x_0$, а лише $x\to x_0$, тому $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)P_{n-1}(x)}{(x-x_0)Q_{m-1}(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P_{n-1}(x)}{Q_{m-1}(x)}$ і відповідно невизначеність зміниться визначеністю.

При розкладанні многочленів на множники можуть стати у пригоді основні формули скороченого множення:
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$; $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ та розклад квадратного тричлена на лінійні множники $P_2(x)=ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, де x_1, x_2 – корені квадратного тричлена при $D=b^2-4ac\geq 0$.

Приклад 2.4. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=-9.$$

Вказівка 2.2. Навички розкриття невизначеності вигляду $\dfrac{0}{0}$, утвореної відношенням двох многочленів при $x\to x_0$, необхідно буде продемонструвати під час виконання завдання 2.1.б) контрольної роботи 2. При розв'язанні задачі 2.1.б) рекомендуємо звернути увагу на приклад 2.4.

4. *Невизначеність вигляду* $\dfrac{0}{0}$, яка містить ірраціональні вирази.

Щоб розкрити таку невизначеність, необхідно позбавитися від ірраціональності, яка утворює цю невизначеність. Для цього необхідно домножити і чисельник, і знаменник на відповідний спряжений множник та застосувати одну із формул скороченого множення. У результаті у чисельнику та у знаменнику з'явиться множник $(x-x_0)$, скоротивши на який, невизначеність зміниться визначеністю.

Приклад 2.5. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

5. *Невизначеність вигляду* $\infty-\infty$.

Таку невизначеність зводять до невизначеностей $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$ за допомогою тотожних перетворень.

Приклад 2.6. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

Розв'язання

Маємо невизначеність вигляду $\infty-\infty$. Домножимо і розділимо $\sqrt{x^2+x}-x$ на вираз $\sqrt{x^2+x}+x$ і застосуємо формулу різниці квадратів $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}.$$

6. *Невизначеністі вигляду* $\frac{0}{0}$, утворена виразами, які містять тригонометричні функції.

Приклад 2.7. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin 6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{x}-\frac{\sin 3x}{x}\right)\cdot\frac{x}{\sin 6x}=(5-3)\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

При обчисленні застосували першу важливу границю (2.2) та наслідок з неї.

Приклад 2.8. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos x}{\sin 3x\cdot\operatorname{arctg}5x}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos x}{\sin 3x\cdot\operatorname{arctg}5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 4x\cdot\sin 3x}{\sin 3x\cdot\operatorname{arctg}5x}=\left|\begin{array}{l}\text{при } x\to 0\\ \sin 4x\sim 4x\\ \operatorname{arctg}5x\sim 5x\end{array}\right|=$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\cdot 4x}{5x}=-\frac{8}{5}$. При обчисленні застосували тригонометричну формулу: $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

7. *Невизначеність вигляду* $0\cdot\infty$, утворена виразами, які містять тригонометричні функції.

Таку невизначеність зводять до невизначеностей $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ за допомогою тотожних перетворень.

Приклад 2.9. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 1}(1-x)\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\left|\begin{array}{l}\text{при}\, x=1\\ \sin\frac{\pi x}{2}=1\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}y=x-1,\ x=y+1\\ x\to 1,\ y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{\cos\frac{\pi}{2}(y+1)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{\cos\left(\frac{\pi}{2}y+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{-\sin\frac{\pi}{2}y}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Тут застосували формулу зведення $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

Вказівка 2.3. Навички застосування першої важливої границі або наслідків з неї необхідно буде продемонструвати під час виконання завдання 2.2.а) контрольної роботи 2. При розв'язанні задачі 2.2.а) рекомендуємо звернути увагу на приклади 2.7 та 2.9.

8. Для розкриття *невизначеності вигляду* 1^{∞} застосовують другу важливу границю (2.3) або її наслідки та властивості границь.

Розглянемо загальний випадок розкриття даної невизначеності. Нехай маємо границю $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}$, де $f(x)\to 1$, $g(x)\to\infty$ при $x\to x_0$.

Застосуємо другу важливу границю за такою схемою:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[\left(1+(f(x)-1)\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{(f(x)-1)g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)}.$$

Приклад 2.10. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$.

Розв'язання

Зауважимо, що $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1,$ тому маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)-2}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{-2}{x+1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}.$$

Приклад 2.11. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to 2}(1+(3x-5-1))^{\frac{1}{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}(1+(3x-6))^{\frac{1}{3x-6}\cdot\frac{3x-6}{x-2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{при } x\to 2\\ \alpha(x)=3x-6\to 0,\ \dfrac{1}{\alpha(x)}=\dfrac{1}{3x-6}\to\infty\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 2\\ \alpha(x)\to 0}}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}\cdot\frac{3(x-2)}{x-2}}=\left|\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e\right|=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{x-2}}=e^3.$$

Приклад 2.12. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\ln(x-4)}{x^2-4x-5}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 5}\frac{\ln(x-4)}{x^2-4x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{\ln(1+(x-5))}{(x-5)(x+1)}=\left|\begin{array}{ll}y=x-5, & x=y+5\\ x\to 5, & y\to 0\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y(y+6)}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}\cdot\frac{1}{y+6}=1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

Вказівка 2.4. Навички застосування другої важливої границі або наслідків з неї необхідно буде продемонструвати під час виконання завдання 2.2.б) контрольної роботи 2. При розв'язанні задачі 2.2.б) рекомендуємо звернути увагу на приклади 2.10–2.12.

Приклад 2.13. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\pi x}-1}{\ln(1+\sin x)}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\pi x}-1}{\ln(1+\sin x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{ll}\text{при } x\to 0 & e^{\pi x}-1\sim\pi x,\\ \sin x\sim x, & \ln(1+\sin x)\sim\sin x\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\pi x}{x}=\pi.$$

Вказівка 2.5. Навички застосування еквівалентностей при обчисленні границь необхідно буде продемонструвати під час виконання завдання 2.3 контрольної роботи 2. При розв'язанні задачі 2.3 рекомендуємо звернути увагу на приклади 2.3, 2.8 та 2.13.

2.3. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

Неперервність функцій у точці. Властивості функцій, неперервних у точці. Розриви та їх класифікація.

Література: [2, розд.3, пп.3.1–3.8], [3, розд.4, п.4.3], [4, розд.4, §5], [5, розд.2, §6–8], [6, мод.3, п.3.1,3.2].

2.3.1. Означення неперервності

Розглянемо графіки функцій $y=f(x)$ та $y=g(x)$, зображені на рис. 2.6 та 2.7.

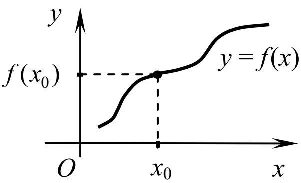

Рис. 2.6

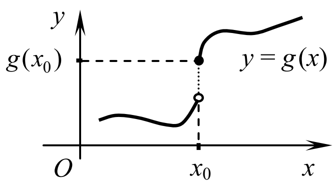

Рис. 2.7

Графік функції $f(x)$ (рис. 2.6) є суцільною кривою, яку можна провести, не відриваючи олівця від паперу. Графік функції $g(x)$ (рис. 2.7) не є суцільною кривою, оскільки у точці $x=x_0$ відбувається розрив лінії, що задає цей графік. При цьому кажуть, що функція $f(x)$ у точці $x=x_0$ є неперервною, а функція $g(x)$ у точці $x=x_0$ має розрив.

Наведені пояснення є зрозумілими, наочними та навіть очевидними, але не дають можливості досліджувати неперервність функції у точці. Дамо точні означення неперервності функції у точці.

Функцію $y=f\left(x\right)$ називають *неперервною* у точці x_0, якщо вона визначена у цій точці та деякому її околі і нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції (рис. 2.8): $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$ (2.4)

Оскільки приріст функції (рис. 2.8) $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$ то рівність (2.4) можна подати в іншому вигляді:

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right)=0$ або $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$ або

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0}x\right)=f(x_0). \qquad (2.5)$$

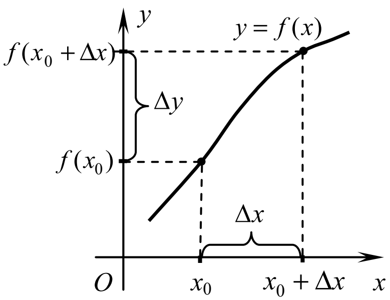

Рис. 2.8

Одержана рівність демонструє *правило граничного переходу*: при знаходженні границі неперервної функції можна переходити до границі під знаком функції, тобто у функції $f(x)$ замість x прийняти $x_0=\lim\limits_{x\to x_0}x.$

На основі рівності (2.5), яка є тотожною рівності (2.4), сформулюємо ще одне означення неперервності функції у точці, яке буде рівносильним до попереднього означення.

Функцію $y=f\left(x\right)$ називають *неперервною* у точці x_0, якщо одночасно виконуються умови:

1) вона визначена у точці $x=x_0$ та деякому її околі;

2) існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)$;

3) ця границя і значення функції при $x=x_0$ є рівними між собою, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.

При цьому, якщо границю функції у точці $x=x_0$ розписати через ліву та праву односторонні границі, то умову неперервності (2.5) можна записати у вигляді: $f\left(x_0+0\right)=f(x_0-0)=f(x_0)$.

2.3.2. Основні властивості функцій, неперервних у точці та на відрізку

Виділимо основні властивості неперервних у точці функцій.

1. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні у точці x_0, то у цій точці неперервними є функції $f(x)\pm\varphi(x)$, $f(x)\cdot\varphi(x)$, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ (остання – за умови $\varphi(x_0)\neq 0$).

2. Якщо функція $u=\varphi(x)$ неперервна у точці x_0, а функція $y=f(u)$ неперервна у точці $u_0=f(x_0)$, то складена функція $y=f(\varphi(x))$ неперервна у точці x_0.

3. Кожна елементарна функція є неперервною у будь-якій точці своєї області визначення.

Функцію $y=f(x)$ називають неперервною на інтервалі $x\in(a;b)$, якщо вона є неперервною у кожній точці цього інтервалу.

Із властивості 3 та останнього означення випливає ще одна властивість про неперервність елементарних функцій.

4. Кожна елементарна функція є неперервною на будь-якому інтервалі своєї області визначення.

Функцію $y=f(x)$ називають неперервною на відрізку $x\in[a;b]$, якщо вона є неперервною на інтервалі $x\in(a;b)$ і при цьому є неперервною справа у точці $x=a$ та зліва у точці $x=b$ (рис. 2.9): $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$ і $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$.

Виділимо важливі теореми про неперервність функції на відрізку.

Теорема 2.1 *(перша теорема Больцано–Коші)*. Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $x\in[a;b]$ і на кінцях відрізка x набуває різних знаків, тобто $f(a)\cdot f(b)<0$, то серед внутрішніх точок відрізка знайдеться хоча б одна точка $x=c\in[a;b]$, в якій $f(c)=0$ (рис. 2.9).

Теорема 2.2 *(друга теорема Больцано–Коші)*. Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $x\in[a;b]$ і у його межових точках набуває різних значень: $f(a)\neq f(b)$, то для кожного числа

$\mu \in [f(a); f(b)]$ знайдеться хоча б одне відповідне йому число $x = d \in [a;b]$: $f(d) = \mu$.

Зауважимо, що таких чисел може бути кілька $x = d_i \in [a;b]: f(d_i) = \mu$, де i – кількість таких чисел.

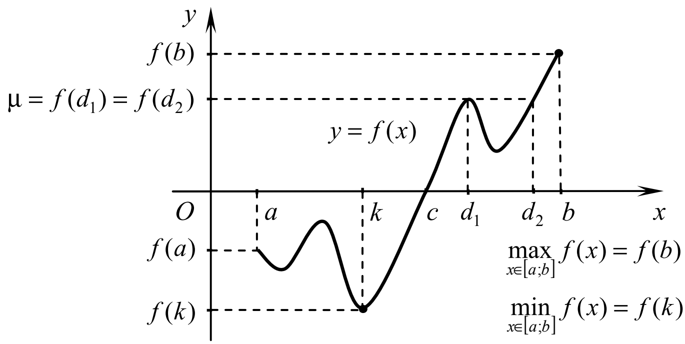

Рис. 2.9

Теорема 2.3 *(Вейєрштрасса).* Якщо функція $y = f\left(x\right)$ неперервна на відрізку $x \in [a;b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найбільше та найменше.

Зауважимо, що на основі теореми 2.3 можна сформулювати ще одну властивість про неперервність функції на відрізку.

5. Якщо функція $y = f\left(x\right)$ є неперервною на відрізку $x \in [a;b]$, то вона є обмеженою на цьому відрізку і набуває на ньому найбільшого та найменшого значення, яке відповідно позначають $\max\limits_{x\in\left[a;b\right]} f(x)$ та $\min\limits_{x\in\left[a;b\right]} f(x)$ (рис. 2.9).

2.3.3. Розриви функцій та їх класифікація

Якщо для функції $y = f\left(x\right)$ у точці $x = x_0$ не виконується хоча б одна з умов означення неперервності функції у точці, то точку $x = x_0$ називають точкою розриву даної функції, а саму функцію $f\left(x\right)$ при цьому називають розривною у точці $x = x_0$.

Розрізняють три види розривів функції у точці.

1. Якщо існують скінченні односторонні границі функції $y=f\left(x\right)$ у точці $x=x_0$: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f\left(x\right)=a_1$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f\left(x\right)=a_2$, де $a_1 = const$,

$a_2 = const$, $a_1 \neq a_2$, то точку $x = x_0$ називають *точкою розриву першого роду* і відповідно функція у точці $x = x_0$ має скінченний розрив («скінченний стрибок»); при цьому функція у точці $x = x_0$ може бути як визначена, так і невизначена (рис. 2.10, рис. 2.11, рис. 2.12).

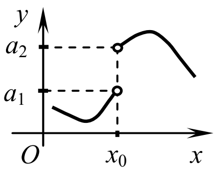

Рис. 2.10

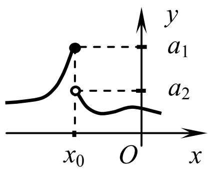

Рис. 2.11

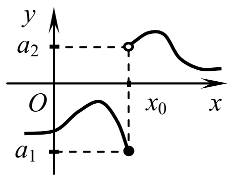

Рис. 2.12

Зауважимо, що число $h_c = |a_2 - a_1|$ визначає величину «стрибка».

2. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$, тобто існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, де $a = const$, але при цьому $f(x_0) = b$, де $b = const$ і $b \neq a$ або взагалі функція $f(x)$ у точці $x = x_0$ невизначена, то точку $x = x_0$ називають *точкою усувного розриву* і відповідно функція $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ має усувний розрив (рис. 2.13, рис. 2.14).

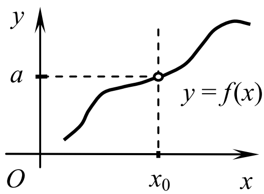

Рис. 2.13

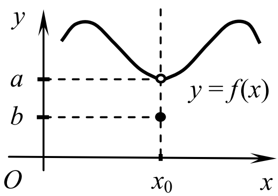

Рис. 2.14

3. Якщо хоча б одна з односторонніх границь $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, то точку $x = x_0$ називають *точкою розриву другого роду* і відповідно функція $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ має («нескінченний стрибок») нескінченний розрив (рис. 2.15, рис. 2.16, рис. 2.17).

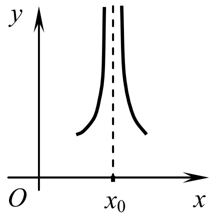

Рис. 2.15

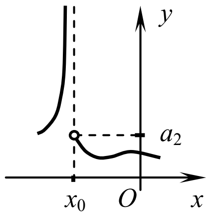

Рис. 2.16

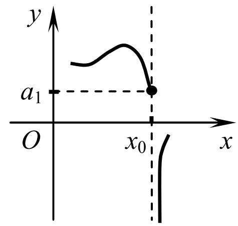

Рис. 2.17

Зауваження 2.1. Якщо функція $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ має усувний розрив, то достатньо довизначити задану функцію у цій точці, узявши $y(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right) = a = const$, щоб одержати у результаті неперервну у точці $x = x_0$ функцію $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \neq x_0, \\ a = \lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right) \text{ при } x = x_0. \end{cases}$

Приклад 2.14. Дослідити на неперервність функцію $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$ у точках $x_1 = 1$ та $x_2 = 3$.

Розв'язання

У точці $x_1 = 1$ функція є визначеною: $y\left(1\right) = 2^{\frac{1}{1-3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а тому, як елементарна, є і неперервною.

У точці $x_2 = 3$ функція невизначена, тому $x_2 = 3$ є точкою розриву. Щоб визначити характер точки розриву, обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \left[2^{\frac{1}{-0}}\right] = \left[2^{-\infty}\right] = \left[\frac{1}{2^{+\infty}}\right] = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0;\ \lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \left[2^{\frac{1}{0}}\right] = \left[2^{+\infty}\right] = \infty,$$

тому точка $x_2 = 3$ є точкою розриву другого роду і відповідно функція у цій точці має нескінченний розрив. Поведінку графіка функції в околі точки розриву ілюструє рис. 2.18.

Зауваження 2.2. Для одержання граничних обчислень $\left[2^{+\infty}\right] = \infty$ та $\left[2^{-\infty}\right] = 0$ в односторонніх границях, достатньо проаналізувати поведінку графіка функції $y = 2^x$ при $x \to +\infty$ та при $x \to -\infty$ (рис. 2.19).

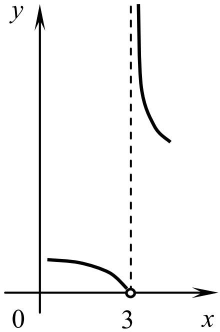

Рис. 2.18

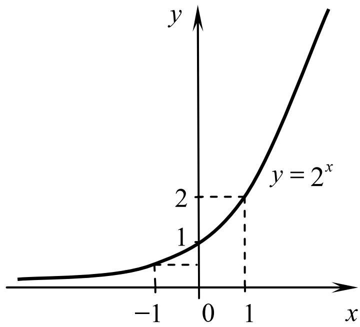

Рис. 2.19

Приклад 2.15. Дослідити на неперервність функцію

$$y = \begin{cases} x - 1 \text{ при } x \le 0, \\ x^2 - 1 \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 2 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання

Елементарні функції $y_1 = x - 1$ на інтервалі $x \in (-\infty; 0)$, $y_2 = x^2 - 1$ на інтервалі $x \in (0;1)$ та $y_3 = 2$ на інтервалі $x \in (1;\infty)$ є неперервними на вказаних інтервалах, оскільки є визначеними на них. Досліджувана функція задається трьома елементарними неперервними функціями на вказаних інтервалах, тому вона може мати розрив тільки у точках $x_1 = 0$ та $x_2 = 1$, в яких здійснюється перехід від однієї неперервної функції до іншої.

Дослідимо точку $x_1 = 0$:

$$\lim_{x \to 0-0} y(x) = \lim_{x \to 0-0} (x - 1) = -1, \ \lim_{x \to 0+0} y(x) = \lim_{x \to 0+0} (x^2 - 1) = -1, \quad y(0) = -1,$$

тому у точці $x_1 = 0$ функція є неперервною.

Дослідимо точку $x_2 = 1$:

$$\lim_{x \to 1-0} y(x) = \lim_{x \to 1-0} (x^2 - 1) = 0, \ \lim_{x \to 1+0} y(x) = \lim_{x \to 1+0} 2 = 2, \ \ y(1) = 0.$$

Оскільки ліва і права границі існують і є скінченними, але не рівними між собою, то точка $x_2 = 1$ є точкою розриву першого роду і відповідно функція у цій точці має скінченний розрив.

Отже, задана в умові функція є неперервною при $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ та має скінченний розрив у точці $x = 1$.

Графік даної функції ілюструє рис. 2.20.

Приклад 2.16. Дослідити на неперервність функцію $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Розв'язання

Дана функція визначена для всіх x, крім $x = 2$, а тому є неперервною, як елементарна, на кожному інтервалі своєї області визначення, тобто при $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. На області визначення $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$ при $x \neq 2$.

У точці $x = 2$ функція не існує, а тому має розрив. Дослідимо характер точки розриву, обчисливши відповідні односторонні границі: $\lim\limits_{x \to 2+0} (x+2) = 4$, $\lim\limits_{x \to 2-0} (x+2) = 4$.

Оскільки ліва та права границі у точці $x = 2$ існують, є скінченними і рівними, але при цьому функція при $x = 2$ не існує, то $x = 2$ є точкою усувного розриву.

Графік функції та його поведінку в околі точки розриву ілюструє рис. 2.21.

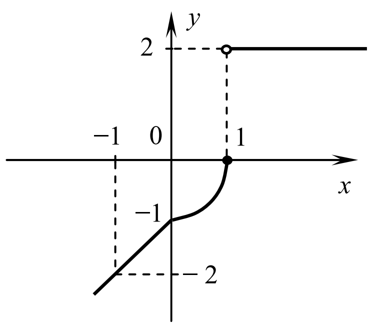

Рис. 2.20

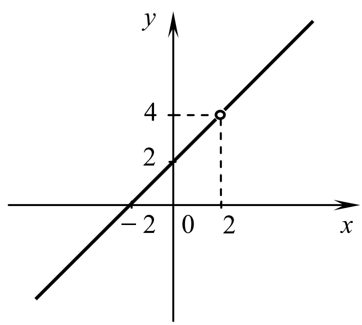

Рис. 2.21

Якщо довизначити дану функцію у точці $x=2$, узявши $y(2)=4$, то одержимо нову функцію $g(x)=x+2$, яка вже буде неперервною у точці $x=2$.

Вказівка 2.6. Навички дослідження функції на неперервність необхідно буде продемонструвати під час виконання завдання 2.4 контрольної роботи 2. При розв'язанні задачі 2.4 рекомендуємо звернути увагу на приклади 2.14–2.16.

2.4. ПОХІДНІ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ ОБЧИСЛЕННЯ

Похідна функції, її механічне та геометричне тлумачення; правила обчислення; похідна складеної функції; похідні основних елементарних функцій; похідні функцій, заданих неявно і параметрично; правило логарифмічного диференціювання. Похідні вищих порядків, їх обчислення.

Література: [2, розд. 4, пп. 4.1–4.2], [3, розд. 5, пп. 5.1–5.2], [4, розд. 5, §1,2,4], [5], [6, мод. 3, пп. 4.1–4.13].

2.4.1. Означення. Механічний та геометричний зміст похідної

Нехай на деякому проміжку $x\in[a;b]$ задано функцію $y=f\left(x\right)$. Виберемо на цьому проміжку довільну внутрішню точку $x=x_0$ і задамо їй приріст Δx такий, щоб точка $x=x_0+\Delta x$ також належала цьому проміжку (рис. 2.22).

Визначимо приріст функції $\Delta y=\Delta f(x_0)=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$.

Оскільки точка $x=x_0$ – фіксована, то приріст функції $\Delta f\left(x_0\right)$ є функцією приросту аргументу Δx. Розглянемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$, яке також є функцією приросту аргументу Δx.

Тепер розглянемо границю відношення приросту функції $\Delta y=\Delta f(x_0)$ у цій точці до приросту аргументу Δx при $\Delta x\to 0$. Якщо ця границя існує і є скінченним числом, то кажуть, що функція $f\left(x\right)$ має *похідну* у точці $x=x_0$ або, що функція $f\left(x\right)$ диференційовна у точці $x = x_0$, а границю називають значенням похідної у точці $x = x_0$ і позначають $f'(x_0)$. Отже, за означенням $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Похідну функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ ще позначають $f'(x)\big|_{x = x_0}$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, y'_{x_0}.

Якщо ж границя не існує, то не існує у цій точці і похідна $f'(x_0)$ і при цьому кажуть, що функція $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ не є диференційовною.

Якщо у точці $x = x_0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \infty$, то кажуть, що функція $f(x)$ у точці $x = x_0$ має нескінченну похідну.

Приклад 2.17. Знайти похідну функції $y = \dfrac{1}{x}$ у точці $x_0 = 1$.

Розв'язання

За означенням похідної функції у точці, маємо:

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{1 + \Delta x} - \frac{1}{1}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{1 + \Delta x} = -1.$$

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна у кожній внутрішній точці проміжку $x \in [a; b]$, то вона є диференційовною на інтервалі $x \in (a; b)$. При цьому похідну функції $y = f(x)$ у довільній внутрішній точці проміжку $x \in [a; b]$ позначають y', $y'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$, y'_x, f'_x.

Зауваження 2.3. Похідна $f'(x_0)$ є числом, а похідна $y' = f'(x)$ функції $y = f(x)$, диференційовної у кожній внутрішній точці проміжку $x \in [a; b]$, сама є функцією від x: $g(x) = f'(x)$, де $x \in [a; b]$.

Механічний зміст похідної: якщо $s = s(t)$ – закон прямолінійного руху матеріальної точки, то похідна $s'(t)$ – це швидкість v точки у момент часу t, тобто $v = s'(t)$.

Фізичний зміст похідної: якщо функція $y = f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $y' = f'(x)$ є швидкістю зміни цього процесу (миттєва швидкість зміни функції $y = f(x)$).

Геометричний зміст похідної: значення похідної функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ дорівнює кутовому коефіцієнту k дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x = x_0$, тобто $k = f'(x_0)$. Врахувавши, що $k = \mathrm{tg}\alpha$, маємо $k = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$, де α – кут, який утворює дана дотична з віссю Ox (рис. 2.23).

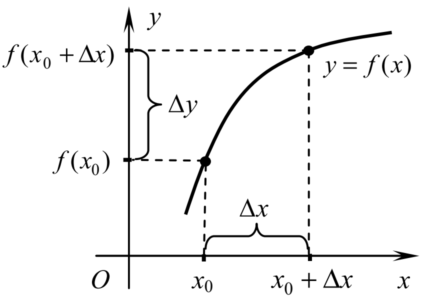

Рис. 2.22

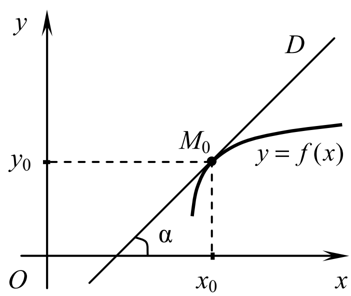

Рис. 2.23

Обчислювати похідну функції у точці за означенням досить важко, а тому і нераціонально. На практиці для диференціювання функцій застосовують правила диференціювання та базові формули, які виділяють як таблицю диференціювання основних елементарних функцій.

2.4.2. Правила диференціювання

Нехай $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ – функції, які диференційовними на деякому інтервалі $x \in (a;b)$, C – стала величина. Тоді на цьому інтервалі мають місце такі правила:

1) $C' = 0$;

2) $(C\cdot u)' = C\cdot(u)'$;

3) $(u\pm v)' = u'\pm v'$;

4) $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$;

5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$, де $v = v(x)\neq 0$;

6) $(u\cdot v\cdot w)' = u'\cdot v\cdot w + u\cdot v'\cdot w + u\cdot v\cdot w'$.

Нехай маємо складену функцію $y = f(\varphi(x))$, де $u=\varphi(x)$ – внутрішня функція, диференційовна на деякому інтервалі $x\in(a;b)\subset D(\varphi)$, $y = f(u)$ – зовнішня функція, яка диференційовна на відповідному інтервалі $u\in(\varphi(a);\varphi(b))\subset E(\varphi)$. Тоді похідну складеної функції $y = f(u)$, де $u=\varphi(x)$ шукають за формулою:

7) $(f(u(x)))'_x = f'_u(u(x))\cdot u'_x(x) = f'(u)\cdot u'(x)$.

Якщо складена функція є суперпозицією кількох функцій, наприклад, $f(u)$, $u(v)$ та $v(x)$, диференційовних на відповідних інтервалах, то її похідну на цьому інтервалі шукають за аналогічною формулою:

8) $\left[f(u(v(x)))\right]' = f'(u)\cdot u'(v)\cdot v'(x)$.

Нехай функція $y = f(x)$ строго монотонна та диференційовна на інтервалі $(a;b)\subset D(f)$ і при цьому $f'(x)\neq 0$ для кожного $x\in(a;b)$, тоді існує обернена функція $x=\varphi(y)$, яка також є диференційовною на відповідному їй інтервалі $(\alpha;\beta)\subset E(\varphi)$. При цьому на інтервалі $x\in(a;b)$, $y=f(x)$ та $x=\varphi(y)$ є взаємно оберненими функціями, графіками яких є одна крива і для них справджуються такі формули:

9) $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ при $f'(x)\neq 0 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$ при $\varphi'(y)\neq 0$ або $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$, де $y'_x\neq 0$ та $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$, де $x'_y\neq 0$.

2.4.3. Формули диференціювання основних елементарних функцій

У табл. 2.1 при $u(x)=x$ отримаємо базові формули, які демонструють диференціювання основних елементарних функцій і при цьому у формулах $u'(x)=x'=1$, тому множник u' буде відсутній.

Таблиця 2.1

1) $\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$;	10) $\left(\operatorname{arcctg}u\right)'=-\dfrac{1}{1+u^2}u'$;
2) $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'$;	11) $\left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u', a>0,\ a\neq 1$;
3) $\left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'$;	12) $\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$;
4) $\left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'$;	13) $\left(\log_a u\right)'=\dfrac{1}{u\ln a}u'$;
5) $\left(\operatorname{tg}u\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}u'$;	14) $\left(\ln u\right)'=\dfrac{1}{u}u'$;
6) $\left(\operatorname{ctg}u\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$;	15) $\left(\operatorname{sh}u\right)'=\operatorname{ch}u\cdot u'$;
7) $\left(\arcsin u\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$;	16) $\left(\operatorname{ch}u\right)'=\operatorname{sh}u\cdot u'$;
8) $\left(\arccos u\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$;	17) $\left(\operatorname{th}u\right)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u}u'$;
9) $\left(\operatorname{arctg}u\right)'=\dfrac{1}{1+u^2}u'$;	18) $\left(\operatorname{cth}u\right)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u}u'$.

Якщо $u(x)$ – довільна елементарна функція, то таблиця демонструє диференціювання складеної функції, зовнішньою функцією якої є відповідно одна з основних елементарних функцій, а внутрішньою – $u(x)$.

Приклад 2.18. Продиференціювати функцію $y=5x^7+4\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^2}$.

Розв’язання

Запишемо функцію у вигляді: $y = 5x^7 + 4x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-2}$;

$$y' = 5 \cdot 7x^6 + 4 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - 2(-2)x^{-3} = 35x^6 + 2x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-3}.$$

Приклад 2.19. Продиференціювати функцію $y = \sin 5x \cdot e^{\mathrm{tg}x}$.

Розв’язання

Застосуємо формулу $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

$$y' = (\sin 5x)' \cdot e^{\mathrm{tg}x} + \sin 5x \cdot \left(e^{\mathrm{tg}x}\right)' = \cos 5x \cdot (5x)' \cdot e^{\mathrm{tg}x} +$$

$$+ \sin 5x \cdot e^{\mathrm{tg}x} \cdot (\mathrm{tg}x)' = 5 \cdot \cos 5x \cdot e^{\mathrm{tg}x} + \frac{\sin 5x \cdot e^{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}.$$

Приклад 2.20. Продиференціювати функцію $y = \dfrac{x^2+4}{5-3x}$.

Розв’язання

Застосуємо формулу $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$y' = \frac{\left(x^2+4\right)' \cdot (5-3x) - \left(x^2+4\right) \cdot (5-3x)'}{(5-3x)^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot (5-3x) + 3\left(x^2+4\right)}{(5-3x)^2} = \frac{10x - 6x^2 + 3x^2 + 12}{(5-3x)^2} = \frac{10x - 3x^2 + 12}{(5-3x)^2}.$$

Приклад 2.21. Продиференціювати функцію $y = \left(x^2 + e^x\right)^9$.

Розв’язання

Застосуємо формулу $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

$y = u^9$, де $u = x^2 + e^x$; $y' = 9u^8 \cdot \left(x^2 + e^x\right)' = 9\left(x^2 + e^x\right)^8 \cdot \left(2x + e^x\right)$.

Приклад 2.22. Продиференціювати функцію $y = \dfrac{2^x}{\log_3 \cos 2x}$.

Розв’язання

Застосуємо формулу $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$y' = \frac{\left(2^x\right)' \cdot \log_3 \cos 2x - 2^x \left(\log_3 \cos 2x\right)'}{\left(\log_3 \cos 2x\right)^2} =$$

$$= \frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot \log_3 \cos 2x - \dfrac{2^x \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)'}{\ln 3 \cdot \cos 2x}}{\left(\log_3 \cos 2x\right)^2} =$$

$$= \frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot \log_3 \cos 2x \cdot \ln 3 + 2^{x+1} \cdot \mathrm{tg} 2x}{\left(\log_3 \cos 2x\right)^2 \cdot \ln 3}.$$

Вказівка 2.7. Навички диференціювання явно заданих функцій необхідно буде продемонструвати під час виконання завдання 2.5 контрольної роботи 2. При розв'язанні задачі 2.5 рекомендуємо звернути увагу на приклади 2.18–2.22.

2.4.4. Диференціювання неявно заданої функції

Якщо деяка однозначна функція $y = y(x)$ задовольняє рівняння

$$F(x, y) = 0, \tag{2.6}$$

яке не розв'язане відносно y, то це рівняння являє собою неявну форму задання цієї функції.

Нехай функція $y(x)$ задана неявно рівнянням (2.6). Щоб продиференціювати її, тобто знайти $y'(x)$, необхідно продиференціювати рівняння (2.6) за змінною x: $F'_x(x, y) = 0$, врахувавши при цьому, що $x' = 1$ та $(p(y))' = \left(p(y(x))\right)' = p'(y) \cdot y'(x) = p'(y) \cdot y'$. У результаті одержимо рівняння першого степеня відносно y': $R_1(x, y, y') = 0$, з якого легко виразити похідну y' через незалежну змінну x і саму функцію y: $y'(x) = \Phi(x, y)$.

Приклад 2.23. Знайти похідну функції $y(x)$, яка задана неявно рівнянням $y^2 + 2x^2 y - x^3 = 0$.

Розв'язання

Продиференціюємо дане рівняння за змінною x, урахувавши при цьому, що $y = y(x)$ і відповідно $(p(y))' = p'(y) \cdot y'$:

$$2y\cdot y'+4x\cdot y+2x^2\cdot y'-3x^2=0 \Leftrightarrow \left(2y+2x^2\right)\cdot y'=3x^2-4xy,$$

звідки $y'=\dfrac{3x^2-4xy}{2y+2x^2}.$

Приклад 2.24. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ функції $y(x)$, яка задовольняє рівняння $\ln(x+y)+y^2=0.$

Розв'язання

Продиференціюємо задане рівняння за змінною x, врахувавши при цьому, що $y=y(x)$:

$$\frac{1}{x+y}\cdot(x+y)'+2y\cdot y'=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+y}\cdot(1+y')+2y\cdot y'=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{x+y}+2y\right)\cdot y'=-\frac{1}{x+y} \Leftrightarrow \frac{1+2y\cdot(x+y)}{x+y}\cdot y'=-\frac{1}{x+y},$$ звідки

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{1}{1+2y\cdot(x+y)}.$$

Вказівка 2.8. Навички диференціювання неявно заданих функцій необхідно буде продемонструвати під час виконання завдання 2.6 контрольної роботи 2. При розв'язанні задачі 2.6 рекомендуємо звернути увагу на приклади 2.23 та 2.24.

2.4.5. Диференціювання функції, заданої параметрично

Нехай функціональна залежність між змінними x та y задається параметрично, тобто через парметр t:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \text{ де } t\in(\alpha;\beta). \end{cases} \tag{2.7}$$

Якщо функція $x=\varphi(t)$ на інтервалі $t\in(\alpha;\beta)$ має обернену функцію $t=\Phi(x)$, то у цьому випадку параметричні рівняння (2.7) визначають функцію $y=y(x)$, яку можна записати у явному вигляді як складену функцію $y=\psi(t)=\psi\left(\Phi(x)\right)=f(x)$ (див. п. 2.1.4).

При цьому за умови диференційовності функцій $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ при $t\in(\alpha;\beta)$, де $\varphi'(t)\neq 0$, маємо $t'_x=\dfrac{1}{x'_t}$ або $\Phi'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(t)}$ як похідна оберненої функції.

Тоді $y'(x)=\big(\psi(\Phi(x))\big)'=\psi'(\mathrm{t})\cdot\Phi'(x)=\dfrac{\psi'_t}{\varphi'_t}$ і маємо відповідно формули диференціювання функції $y=f(x)$, заданої параметрично рівняннями (2.7):

$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ \text{де } \varphi'(t)\neq 0 \text{ або } y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\ \text{де } x'_t\neq 0. \qquad (2.8)$$

Приклад 2.25. Знайти похідну $y'(x)$ функції, заданої параметрично $\begin{cases} x=t^2+4,\\ y=\sin t.\end{cases}$

Розв'язання

За формулою (2.8) $y'(x)=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, тому $y'(x)=\dfrac{(\sin t)'_t}{\left(t^2+4\right)'_t}=\dfrac{\cos t}{2t}$.

Приклад 2.26. Знайти похідну $y'(x)$ функції, заданої параметрично $\begin{cases} x=e^{-t},\\ y=e^{2t}.\end{cases}$

Розв'язання

Застосуємо формулу (2.8): $y'(x)=\dfrac{y'_t}{x'_t}$. Тоді маємо

$$y'(x)=\frac{\left(e^{2t}\right)'_t}{\left(e^{-t}\right)'_t}=\frac{e^{2t}\cdot(2t)'_t}{e^{-t}\cdot(-t)'_t}=\frac{2e^{2t}}{-e^{-t}}=-2e^{3t}.$$

Вказівка 2.9. Навички диференціювання параметрично заданих функцій необхідно буде продемонструвати під час виконання завдання 2.7 контрольної роботи 2. При розв'язанні задачі 2.7 рекомендуємо звернути увагу на приклади 2.25 та 2.26.

2.4.6. Логарифмічне диференціювання

У деяких випадках при знаходженні похідної раціонально задану функцію спочатку прологарифмувати, а потім знайти похідну як від неявно заданої функції. Таку операцію називають *логарифмічним диференціюванням*.

Приклад 2.27. Знайти похідну функції $y = \dfrac{2^x (3x-1)(x+1)^5}{\sqrt{x}(x-7)^4}$.

Розв'язання

Цю функцію можна диференціювати за правилом диференціювання частки. Проте такий спосіб дуже громіздкий. Застосуємо логарифмічне диференціювання:

$$\ln y = x\ln 2 + \ln(3x-1) + 5\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln x - 4\ln\left(x-7\right),$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln 2 + \frac{3}{3x-1} + \frac{5}{x+1} - \frac{1}{2x} - \frac{4}{x-7},$$

$$y' = y\cdot(\ln 2 + \frac{3}{3x-1} + \frac{5}{x+1} - \frac{1}{2x} - \frac{4}{x-7}).$$

Підставимо замість y задану функцію:

$$y' = \frac{2^x (3x-1)(x+1)^5}{\sqrt{x}(x-7)^4}\cdot(\ln 2 + \frac{3}{3x-1} + \frac{5}{x+1} - \frac{1}{2x} - \frac{4}{x-7}).$$

Існують функції, похідні яких знаходять логарифмічним диференціюванням. Прикладом такої функції є *показниково-степенева* функція $y = \left[u(x)\right]^{v(x)}$, де $u = u(x)$; $v = v(x)$ – деякі диференційовні функції від x. Знайдемо похідну цієї функції, використовуючи логарифмічне диференціювання: $\ln y = v\ln u$;

$$\frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{u'}{u},\quad y' = u^v\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v\ln u\cdot v' + vu^{v-1}\cdot u'.$$

Отже, похідна показниково-степеневої функції дорівнює сумі похідної показникової функції за умови, що $u = const$ і похідної степеневої функції за умови, що $v = const$: $(u^v)' = u^v\ln u\cdot v' + vu^{v-1}u'$.

Приклад 2.28. Знайти похідну функції $y = \left(2x+1\right)^{\cos 3x}$.

Розв'язання

Прологарифмуємо функцію: $\ln y = \cos 3x\ln(2x+1)$.

Продиференціюємо обидві частини рівняння за змінною x:

$$\frac{y'}{y}=-3\sin 3x\ln(2x+1)+\frac{2\cos 3x}{2x+1},$$

$$y'=y\left(-3\sin 3x\ln(2x+1)+\frac{2\cos 3x}{2x+1}\right),$$

$$y'=(2x+1)^{\cos 3x}\left(-3\sin 3x\ln(2x+1)+\frac{2\cos 3x}{2x+1}\right).$$

Вказівка 2.10. Навички логарифмічного диференціювання функцій необхідно буде продемонструвати під час виконання завдання 2.8 контрольної роботи 2. При розв'язанні задачі 2.8 рекомендуємо звернути увагу на приклади 2.27 та 2.28.

2.4.7. Похідні вищих порядків

Похідну y' називають *похідною першого порядку* (або першою похідною) функції $y=f(x)$, яка також є функцією від x.

Похідною другого порядку від функції $y=f(x)$ називають похідну від її першої похідної, тобто

$$\left(f'(x)\right)'=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=y''_{xx}.$$

Аналогічно визначають похідні більш високих порядків:

$$\left(f''(x)\right)'=f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}=y'''_{xxx},$$

....

$$\left(f^{(n-1)}(x)\right)'=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

Приклад 2.29. Знайти похідну другого порядку функції $y=\ln(\sin x)$.

Розв'язання

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\frac{\cos x}{\sin x}=\mathrm{ctg}x;\quad \frac{d^2y}{dx^2}=y''=(\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Приклад 2.30. Знайти похідну другого порядку функції $y=xe^{2x}$.

Розв'язання

$$y'=e^{2x}+2xe^{2x},\quad y''=2e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x}=4e^{2x}+4xe^{2x}.$$

Вказівка 2.11. При розв'язанні задачі 2.10 контрольної роботи 2 рекомендуємо звернути увагу на приклади 2.29 та 2.30.

2.5. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Диференціал функції та його застосування. Основні теореми диференціального числення (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші).

Література: [2, розд. 5], [4, розд. 5, §3–6], [6, мод. 3, пп. 5.1–5.6].

2.5.1. Диференціал функції та його застосування

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна у деякій точці $x = x_0 \in (a;b)$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тоді маємо: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, де $\alpha(\Delta x)\to 0$, $\Delta x \to 0$. Тоді $\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, де при $\Delta x\to 0$ доданок $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$ є нескінченно малою більш високого порядку, ніж $f'(x_0)\cdot\Delta x$. Головну, лінійну відносно Δx частину приросту функції $f'(x_0)\cdot\Delta x$ називають *диференціалом функції* $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ і позначають $dy = df(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x$.

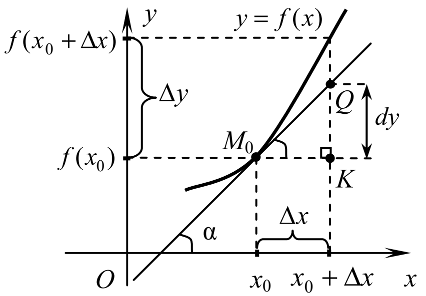

Рис. 2.24

Геометричний зміст диференціалу функції $y = f(x)$, обчисленого в точці $x = x_0$, легко усвідомити з рис. 2.24.

У прямокутному ΔM_0KQ ($\angle M_0KQ = 90^\circ$) маємо: $M_0K = \Delta x$, $\angle QM_0K = \alpha$, $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{KQ}{M_0K}$ і при цьому $\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$.

Тоді обчислимо у точці $x = x_0$:

$$df(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x = \mathrm{tg}\alpha\cdot M_0K = \frac{KQ}{M_0K}\cdot M_0K = KQ.$$

Отже, з геометричної точки зору диференціал функції $y = f(x)$, обчислений у точці $x = x_0$ із заданим приростом Δx, дорівнює приросту KQ ординати дотичної M_0K, проведеної до графіка функції у точці M_0, коли аргумент набуває відповідно приросту Δx.

Оскільки для функції $y = x$ маємо $dy = dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x$, то для довільної функції $y = f(x)$ справедлива формула $dy = f'(x) \cdot dx$.

Диференціал функції можна застосовувати у наближених обчисленнях. Так, при достатньо малих Δx правильною є наближена формула: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ або $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx$, де $dx = \Delta x = x - x_0$.

2.5.2. Основні теореми диференціального числення

Теорема 2.4 (*Ферма*). Нехай функція $y = f(x)$ визначенана на інтервалі $x \in (a;b)$ і набуває свого найбільшого або найменшого значення у деякій внутрішній точці цього інтервалу $x = c \in (a;b)$. Тоді, якщо у точці $x = c$ існує похідна $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Геометричне тлумачення теореми Ферма: якщо у точці $x = c$ функція $y = f(x)$ набуває найбільшого або найменшого значення (рис. 2.25 та 2.26 відповідно), то дотична, проведена до графіка цієї функції у точці $(c; f(c))$, буде паралельна до осі Ox.

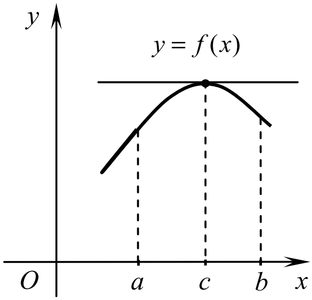

Рис. 2.25

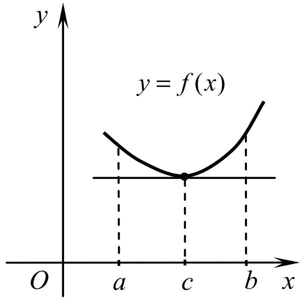

Рис. 2.26

Теорема 2.5 (*Ролля*). Якщо функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $x \in [a;b]$, має похідну у кожній точці інтервалу $x \in (a;b)$ і на кінцях відрізка набуває однакових значень $f(a) = f(b)$, то існує хоча б одна точка $x = c \in (a;b)$, у якій $f'(c) = 0$.

Геометричне тлумачення теореми Ролля легко усвідомити з рис. 2.27: якщо на кінцях відрізка $x \in [a;b]$ неперервна крива $y = f(x)$, яка має у кожній точці дотичну, набуває однакових значень, то на цій кривій знайдеться хоча б одна точка $x = c \in (a;b)$, в якій дотична буде паралельною осі Ox.

Теорема 2.6 (*Лагранжа*). Якщо функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $x \in [a;b]$ і диференційовною на інтервалі $x \in (a;b)$, то серед внутрішніх точок інтервалу знайдеться хоча б одна точка $x = c \in (a;b)$, для якої виконується рівність $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$, яку називають формулою скінченних приростів Лагранжа.

Геометричний зміст теореми Лагранжа: якщо функція $y = f(x)$ задовольняє умови теореми Лагранжа, то на графіку цієї функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична, проведена до графіка функції, буде паралельна хорді, що сполучає кінці кривої $A(a; f(a))$ та $B(b; f(b))$ (рис. 2.28).

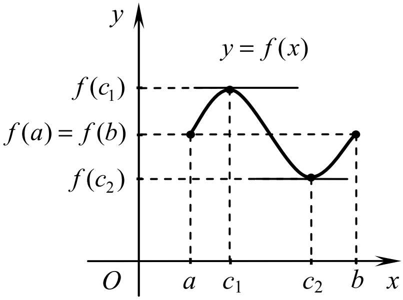

Рис. 2.27

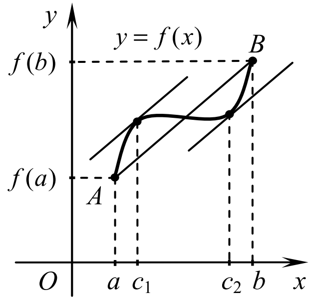

Рис. 2.28

З теореми Лагранжа випливають такі важливі наслідки:

1) якщо $f'(x) = 0$ для всіх $x \in (a;b)$, то на цьому інтервалі $f(x) = const$;

2) якщо функції $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ диференційовні в інтервалі $x \in (a;b)$ і при цьому $f_1'(x) = f_2'(x)$, а у точках $x = a$ та $x = b$ функції є неперервними, то $f_1(x) - f_2(x) = const$.

Теорема 2.7 (*Коші*). Якщо функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ є неперервними на відрізку $x \in [a;b]$, диференційовні в інтервалі $x \in (a;b)$, де $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a;b)$, то знайдеться хоча б одна точка $x = c \in (a;b)$, в якій виконується формула:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-f(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Зауваження 2.4. Теорема Лагранжа є частинним випадком теореми Коші, якщо взяти $\varphi(x) = x$.

Наведені теореми раціонально застосовувати при дослідженні поведінки функції та її графіка відповідно.

2.6. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції. Застосування похідної для розкриття невизначеностей при обчисленні границь (правила Лопіталя-Бернуллі). Застосування похідної для дослідження поведінки функцій: зростання і спадання функції; максимум і мінімум функції і їх знаходження за допомогою першої і другої похідної; найбільше і найменше значення функції на відрізку; опуклість кривої, точки перегину; асимтоти графіка функції; загальна схема дослідження функцій і побудова графіків.

Література: [2, розд. 5], [3, розд. 5, пп. 5.3–5.7], [4, розд. 5, §3–6], [5, розд. 3, §20, 26], [6, мод. 3, пп. 6.1–6.6].

2.6.1. Рівняння дотичної і нормалі

Рівняння *дотичної* M_0D (рис. 2.29), проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$, має вигляд:

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0). \qquad (2.9)$$

Рівняння *нормалі* M_0N (див. рис. 2.29), проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$, при $f'(x_0) \neq 0$ має вигляд:

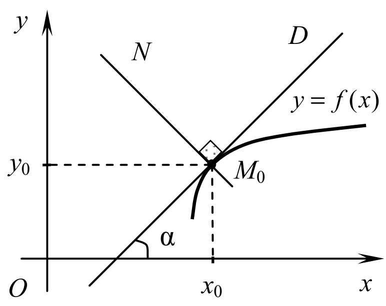

Рис. 2.29

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0). \qquad (2.10)$$

Приклад 2.31. Скласти рівняння дотичної і нормалі, які проведені до кривої $y = x^3 - 4x^2 + 7$ у точці з абсцисою $x = 1$.

Розв'язання

За умовою $x_0 = 1$, тоді ордината точки дотику:

$y_0 = f(x_0) = f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 7 = 4$.

Знайдемо $y'(x) = f'(x) = 3x^2 - 8x$, тоді кутовий коефіцієнт дотичної $k = f'(x_0) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 = -5$.

Прийнявши в рівнянні дотичної (2.9) обчислені значення x_0, y_0 та $f'(x_0)$, отримаємо $y = 4 - 5(x - 1) \Leftrightarrow y = -5x + 9$, яке є рівнянням дотичної, проведеної до заданої кривої у точці $x = 1$.

Аналогічно, взявши у рівнянні нормалі (2.10) обчислені значення x_0, y_0 та $f'(x_0)$, дістанемо $y = 4 - \dfrac{1}{-5}(x - 1) = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{19}{5}$, яке є рівнянням нормалі, проведеної до заданої кривої у точці $x = 1$.

Приклад 2.32. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ у точках, у яких дотичні паралельні прямій $y = 2x + 3$.

Розв'язання

Оскільки кутові коефіцієнти паралельних прямих рівні, то кутовий коефіцієнт дотичної $k = f'(x_0) = 2$. Знайдемо $y'(x) = f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x + 5)' = 3x^2 - 6x + 2$. Тоді точки, в яких виконується умова $f'(x_0) = 2$, знайдемо з рівняння

$$3x^2 - 6x + 2 = 2 \Leftrightarrow 3(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = 2. \end{array}\right.$$

Для знайдених абсцис обчислимо відповідні їм ординати: $y_1 = y(x_1) = f(0) = 5$, $y_2 = y(x_2) = f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 5 = 5$.

Запишемо тепер рівняння дотичних і нормалей, проведених до заданої кривої у знайдених точках $M_1(0;5)$ та $M_2(2;5)$, взявши для цього у формулах (2.9) та (2.10) відповідні значення x_0, y_0 та $k = f'(x_0) = 2$. Тоді маємо:

$M_1: \; y = 5 + 2(x - 0)$, $y = 2x + 5$ (дотична);

$M_1: \ y = 5 - \frac{1}{2}(x - 0), \ y = -\frac{1}{2}x + 5$ (нормаль);

$M_2: \ y = 5 + 2(x - 2), \ y = 2x + 1$ (дотична);

$M_2: \ y = 5 - \frac{1}{2}(x - 2), \ y = -\frac{1}{2}x + 6$ (нормаль).

Вказівка 2.12. Навички складання рівнянь дотичної і нормалі необхідно буде продемонструвати під час виконання завдання 2.11 контрольної роботи 2. При розв'язанні задачі 2.11 рекомендуємо звернути увагу на приклади 2.31 та 2.32.

2.6.2. Розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя

Теорема 2.8 (*правило Лопіталя*). Нехай в околі точки $x = a$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені та диференційовні, за винятком, можливо, самої точки $x = a$, і при цьому $\varphi'(x) \neq 0$ в даному околі. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ одночасно прямують до нуля або нескінченності при $x \to a$ (невизначеності вигляду $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$) та існує скінченна границя відношення їх похідних, то існує й границя відношення функцій, причому

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (2.11)$$

Розкриття невизначеностей при обчисленні границь за формулою (2.11) називають правилом Лопіталя. Правило виконується також і у випадку, коли $x \to \pm\infty$.

Правило Лопіталя може застосовуватись кілька разів. На кожному етапі застосування цього правила слід користуватись тотожними перетвореннями для того, щоб спростити процес обчислення похідної. Також це правило можна комбінувати з будь-якими іншими способами обчислення границь, зокрема, використовувати еквівалентні нескінченно малі і нескінченно великі.

Зауваження 2.5. Правило Лопіталя застосовують лише для розкриття невизначеностей вигляду $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$, які називають основними. Невизначеності $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 зводять до основних.

1. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=0,$ $\lim\limits_{x\to a}\varphi\left(x\right)=\infty,$ то невизначеність вигляду $0\cdot\infty$ можна звести до основних так:

$$\lim_{x\to a}\left[f\left(x\right)\cdot\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right] \tag{2.12}$$

або

$$\lim_{x\to a}\left[f\left(x\right)\cdot\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]. \tag{2.13}$$

2. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a}\varphi\left(x\right)=\infty,$ то невизначеність вигляду $\infty-\infty$ можна звести до невизначеності $\dfrac{0}{0}$ так:

$$\lim_{x\to a}\left[f\left(x\right)-\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]. \tag{2.14}$$

3. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a}\varphi\left(x\right)=0,$ то невизначеність вигляду 0^0 за допомогою основної логарифмічної тотожності $a^{\log_a b}=b$ можна звести до невизначеності $0\cdot\infty,$ розглянутої вище, яку ми отримаємо в показнику степеня:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{\varphi(x)}=\lim_{x\to a} e^{(\varphi(x)\cdot\ln f(x))}=e^{\lim\limits_{x\to a}(\varphi(x)\cdot\ln f(x))}=e^{[0\cdot\infty]}. \tag{2.15}$$

Аналогічно розкриваються невизначеності 1^{∞} і ∞^0.

Приклад 2.33. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x^3}$.

Розв'язання

Підставляючи граничне значення $x=0,$ дістаємо невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя, для чого перейдемо до границі відношення похідних чисельника і знаменника за формулою (2.11):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin 2x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos 2x}{3x^2}=-\infty.$$

Приклад 2.34. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6^x-4}{x^2+3}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6^x-4}{x^2+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(6^x-4)'}{(x^2+3)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6^x\ln 6}{2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(6^x\ln 6)'}{(2x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6^x\ln^2 6}{2}=\infty.$$

Приклад 2.35. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

Розв'язання

Оскільки $\dfrac{1}{x}\to 0$ при $x\to+\infty$, $e^0=1$, то дістанемо невизначеність вигляду $0\cdot\infty$. Перетворимо задану границю, звівши її до невизначеності $\dfrac{0}{0}$ за формулою (2.12):

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1.$$

Зауважимо, що застосування формули (2.13) при розв'язуванні цього прикладу не було б раціональним.

Приклад 2.36. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Розв'язання

Підставляючи граничне значення $x=0$, дістаємо невизначеність вигляду $\infty-\infty$, яку зведемо до невизначеності $\dfrac{0}{0}$ за формулою (2.14):

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-\sin x}{\sin x\cdot(e^x-1)}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-\sin x)'}{(\sin x\cdot(e^x-1))'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\cos x\cdot(e^x-1)+\sin x\cdot e^x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-\cos x)'}{(\cos x\cdot(e^x-1)+\sin x\cdot e^x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{-\sin x\cdot(e^x-1)+\cos x\cdot e^x+\cos x\cdot e^x+\sin x\cdot e^x}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 2.37. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

Розв'язання

При підстановці граничного значення $x=1$ одержуємо невизначеність вигляду 1^{∞}, яку своєю чергою зведемо до невизначеності $0\cdot\infty$ за формулою (2.15). Невизначеність $0\cdot\infty$ розкриємо за формулою (2.12).

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\left[1^{\infty}\right]=e^{\lim\limits_{x\to 1}(\ln x^{\frac{1}{1-x}})}.$$

$$\lim_{x\to 1}(\ln x^{\frac{1}{1-x}})=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\cdot\ln x=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1.$$

Тому остаточно отримаємо $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}$.

Вказівка 2.13. Навички застосування правила Лопіталя при обчисленні границь необхідно буде продемонструвати під час виконання завдання 2.9 контрольної роботи 2. При розв'язанні задачі 2.9 рекомендуємо звернути увагу на приклади 2.33–2.37.

2.6.3. Застосування похідної для дослідження функції на монотонність та екстремум

Нагадаємо означення строго монотонних функцій.

Функцію $y=f(x)$ називають *зростаючою* на інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-яких точок x_1 і x_2 із вказаного інтервалу з нерівності $x_1<x_2$ випливає нерівність $f(x_1)<f(x_2)$ (рис. 2.30).

Функцію $y=f(x)$ називають *спадною* на інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-яких точок x_1 і x_2 цього інтервалу з нерівності $x_1<x_2$ випливає нерівність $f(x_1)>f(x_2)$ (рис. 2.31).

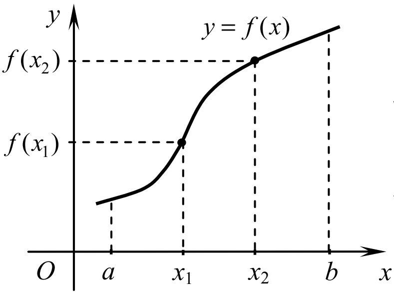

Рис. 2.30

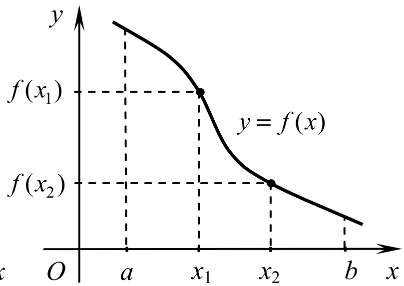

Рис. 2.31

Достатні умови зростання та спадання функції:

1) якщо на інтервалі $x\in(a;b)$ функція $y=f(x)$ є диференційовною і $f'(x)>0,$ то на цьому інтервалі вона зростає;

2) якщо на інтервалі $x\in(a;b)$ функція $y=f(x)$ є диференційовною і $f'(x)<0,$ то на цьому інтервалі вона спадає;

3) якщо на інтервалі $x\in(a;b)$ функція $y=f(x)$ є диференційовною і $f'(x)=0,$ то на цьому інтервалі вона стала.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена у деякому околі точки $x=x_1$. Тоді точку $x=x_1$ називають точкою *локального максимуму* функції $f(x)$, якщо $f(x_1)>f(x)$ для всіх x, які належать досить малому околу точки $x=x_1$ (рис. 2.32).

Нехай функція $y=f(x)$ визначена у деякому околі точки $x=x_2$. Тоді точку $x=x_2$ називають точкою *локального мінімуму* функції $f(x)$, якщо $f(x_2) < f(x)$ для всіх x, які належать досить малому околу точки $x = x_2$ (рис. 2.33).

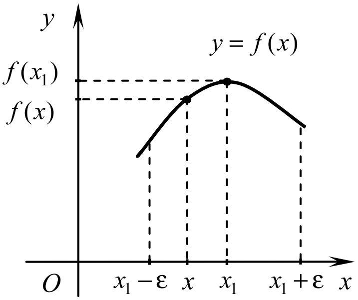

Рис. 2.32

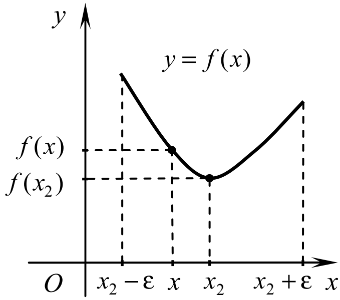

Рис. 2.33

Точки локального максимуму і локального мінімуму називають точками локального екстремуму, а значення функцій у цих точках називають відповідно локальним максимумом і локальним мінімумом або локальним екстремумом.

Зауваження 2.6. В означенні точок екстремуму розглядається деякий окіл цих точок, у яких мають виконуватися відповідні нерівності (див. рис. 2.32 та рис. 2.33). Тому точкою локального екстремуму може бути лише внутрішня точка області визначення функції.

Необхідна умова існування екстремуму:
якщо функція $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ має локальний екстремум, то її похідна у цій точці $f'(x_0) = 0$ або не існує.

Внутрішні точки $x = x_0$ області визначення $D(f)$ функції $y = f(x)$, у яких похідна $f'(x_0) = 0$ або не існує, називають критичними точками або критичними точками першого роду даної функції $f(x)$. При цьому критичні точки, в яких $f'(x) = 0$, називають стаціонарними точками функції $f(x)$. Критичні точки іноді ще називають точками можливого екстремуму.

Достатні умови існування екстремуму.

1. Якщо при переході зліва направо через критичну точку $x = x_0$ функції $y = f(x)$ її похідна $f'(x)$ змінює знак, то у точці $x = x_0$ функція $f(x)$ має локальний екстремум, а саме:

– локальний максимум при зміні знака з «+» на «–»;

– локальний мінімум при зміні знака з «–» на «+».

2. Якщо у стаціонарній точці $x = x_0$ ($f'(x_0) = 0$) функції $y = f(x)$, яка є двічі диференційовною у деякому околі цієї точки, $f''(x) \neq 0$, то $x = x_0$ – точка локального максимуму при $f''(x_0) < 0$ або $x = x_0$ – точка локального мінімуму при $f''(x_0) > 0$.

Алгоритм дослідження функції $y = f(x)$ ***на локальні екстремуми та інтервали монотонності:***

1) знайти критичні точки першого роду функції $y = f(x)$, які шукають серед внутрішніх точок області визначення, в яких перша похідна $f'(x) = 0$ або не існує;

2) знайденими критичними точками розбити область визначення функції $y = f(x)$ на інтервали знакосталості її похідної;

3) визначити знаки похідної $f'(x)$ на кожному з утворених інтервалів, обчисливши для цього похідну у будь-якій точці цього інтервалу;

4) за визначеними знаками похідної $f'(x)$ на інтервалах встановити інтервали монотонності функції $f(x)$;

5) визначити точки екстремумів і обчислити значення функції $f(x)$ у цих точках, які й будуть локальними екстремумами, проаналізувавши для цього як змінюється знак похідної $f'(x)$ при переході через критичні точки зліва направо.

Зауваження 2.7. Локальних максимумів та мінімумів функція може мати кілька і при цьому локальний мінімум може бути більшим за локальний максимум (рис. 2.34). При цьому не слід плутати локальний екстремум з найбільшим та найменшим значеннями функції, яких вона досягає на відрізку.

Найбільше значення функції ще називають абсолютним максимумом; якщо воно існує, то єдине. Аналогічно найменше значення функції, яке ще називають абсолютним мінімумом функції, може бути тільки єдине за умови, що воно взагалі існує (рис. 2.34).

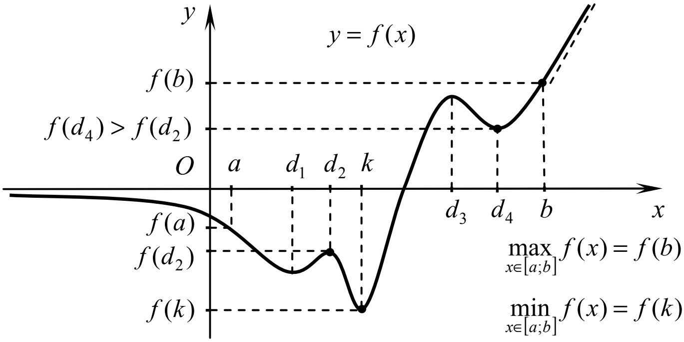

Рис. 2.34

Алгоритм знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної функції $y = f(x)$ ***на відрізку*** $x \in [a;b]$**:**

1) знайти похідну $f'(x)$ та критичні точки функції $f(x)$, які належать інтервалу $x \in (a;b)$;

2) обчислити значення функції $f(x)$ в усіх знайдених точках $x = x_i$ та у точках $x = a$ і $x = b$;

3) серед обчислених значень функції вибрати найбільше і найменше.

Приклад 2.38. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 16$.

Розв'язання

Задана функція визначена при $x \in R$, а тому, як елементарна, є неперервною при $x \in R$. Знайдемо похідну: $y' = 3x^2 - 18x + 15$. Визначимо стаціонарні точки функції з рівняння $y' = 0$: $3x^2 - 18x + 15 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ x-5=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=5. \end{array}\right.$ Оскільки функція $y'(x)$ визначена при $x \in R$, то критичними точками функції $y(x)$ будуть лише її стаціонарні точки, тобто $x_1 = 1$ та $x_2 = 5$.

Подальше дослідження функції подамо у вигляді таблиці, в першому рядку якої виділимо критичні точки та інтервали знакосталості похідної, на які ці точки розбивають область визначення функції. У другому рядку таблиці визначимо знак похідної на кожному інтервалі, обчисливши для цього похідну в будь-якій точці інтервалу.

Результати дослідження подамо у третьому рядку табл. 2.2, визначивши інтервали монотонності функції, характер локальних екстремумів та їх числові значення.

Таблиця 2.2

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;5)$	5	$(5;\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$y_{\max}=-9$	$\searrow$	$y_{\min}=-41$	$\nearrow$

Отже, дана функція зростає при $x\in(-\infty;1)\cup(5;\infty)$ та спадає при $x\in(1;5)$; у точці $x=1$ функція має локальний максимум $y_{\max}=y(1)=-9$, а у точці $x=5$ – локальний мінімум $y_{\min}=y(5)=-41$.

2.6.4. Опуклість графіка функції, точки перегину

Графік диференційовної функції $y=f(x)$ називають *опуклим вгору* на інтервалі $(a;b)$, якщо він розміщений нижче від дотичної, проведеної у будь-якій точці цього інтервалу (рис. 2.35).

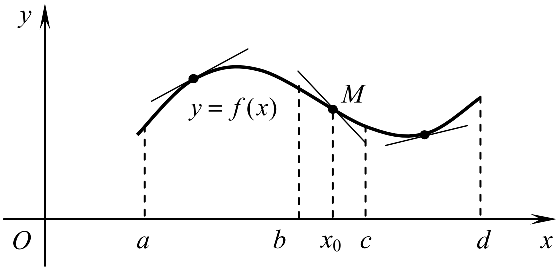

Рис. 2.35

Графік диференційовної функції $y=f(x)$ називають *опуклим вниз* на інтервалі $(c;d)$, якщо він розміщений вище дотичної, проведеної у будь-якій точці цього інтервалу (див. рис. 2.35).

Точку $M\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ графіка функції $y = f(x)$, яка відділяє його частини різної опуклості, називають *точкою перегину*.

Достатня умова опуклості вгору:
якщо функція $y = f(x)$ на інтервалі $x \in (a;b)$ є двічі диференційовною і задовольняє нерівність $f''(x) < 0$, то її графік на цьому інтервалі є опуклим вгору.

Достатня умова опуклості вниз:
якщо функція $y = f(x)$ на інтервалі $x \in (c;d)$ є двічі диференційовною і задовольняє нерівність $f''(x) > 0$, то її графік на цьому інтервалі є опуклим вниз.

Необхідна умова існування перегину:
якщо у точці $M\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ графік функції $y = f(x)$ має перегин, то у цій точці друга похідна $f''\left(x_0\right) = 0$ або не існує.

Внутрішні точки області визначення $D(f)$ функції $y = f(x)$, у яких друга похідна $f''(x) = 0$ або не існує, називають критичними точками другого роду.

Достатня умова існування перегину:
якщо при переході через критичну точку другого роду $x = x_0$ функції $y = f(x)$ її друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $M\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ є точкою перегину графіка функції $f(x)$. Якщо ж зміна знаку не відбувається, то в точці M відповідно графік функції $f(x)$ перегину не має.

Алгоритм знаходження інтервалів опуклості та точок перегину:

1) знайти критичні точки другого роду функції $y = f(x)$, шукаючи їх серед внутрішніх точок області визначення, в яких друга похідна $f''(x) = 0$ або не існує;

2) знайденими критичними точками розбити область визначення функції $y = f(x)$ на інтервали знакосталості другої похідної;

3) визначити знаки другої похідної $f''(x)$ на кожному з утворених інтервалів, обчисливши для цього другу похідну у будь-якій точці цього інтервалу;

4) за визначеними знаками другої похідної на інтервалах встановити вид опуклості на кожному інтервалі та наявність точок перегину.

Приклад 2.39. Знайти інтервали опуклості та точки перегину графіка функції $y = e^{-x^2}$.

Розв'язання

Задана функція є визначеною на всій числовій вісі, тобто при $x \in (-\infty; +\infty)$. Знайдемо першу та другу похідні функції:

$y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = 2e^{-x^2} \cdot (2x^2 - 1)$, кожна з яких визначена при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Тоді критичні точки другого роду заданої в умові функції можуть існувати лише серед точок, у яких $y'' = 0 \Leftrightarrow$

$$2e^{-x^2} \cdot (2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Знайденими критичними точками $x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ розіб'ємо область визначення функції відповідно на три інтервали знакосталості другої похідної $y''(x)$.

Визначимо знак другої похідної на кожному з утворених інтервалів, обчисливши для цього другу похідну у будь-якій точці цього інтервалу. Обчислимо значення функції $y(x)$ у критичних точках другого роду. Отримані результати наведемо у табл. 2.3.

Таблиця 2.3

x	$\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty\right)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\smile$	$y_{\text{пер.}} = e^{-\frac{1}{2}}$	$\frown$	$y_{\text{пер.}} = e^{-\frac{1}{2}}$	$\smile$

Отже, графік даної функції при $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$ є опуклим вниз, а при $x \in \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ є опуклим вгору.

При цьому точками перегину є $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};e^{-\frac{1}{2}}\right)$ та $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}};e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

2.6.5. Асимптоти графіка функції

Асимптотою графіка функції $y=f(x)$ називають таку пряму, відстань до якої від змінної точки $M(x;f(x))$ графіка наближається до нуля при необмеженому віддаленні цієї точки від початку координат.

Розрізняють асимптоти вертикальні і невертикальні (похилі та горизонтальні).

Пряма $x=a$ буде *вертикальною* асимптотою графіка функції $y=f(x)$, якщо у цій точці хоча б одна з односторонніх границь дорівнює нескінченності:

$$\lim_{x\to a-0} f\left(x\right)=\pm\infty \quad \text{або} \quad \lim_{x\to a+0} f\left(x\right)=\pm\infty. \qquad (2.16)$$

Вертикальні асимптоти графіка функції варто шукати серед її точок розриву другого роду або на скінченних межах області визначення. Наприклад, графік функції $y=\frac{1}{x}$ у точці $x=0$ має вертикальну асимптоту (див. рис. 2.5).

Неперервні функції не мають вертикальних асимптот.

Пряма $y=kx+b$ буде *похилою асимптотою* графіка функції $y=f(x)$, якщо існують скінченні границі

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=k \ \ (k\neq 0), \ \ \lim_{x\to\pm\infty}\left[f\left(x\right)-kx\right]=b. \qquad (2.17)$$

Зауваження 2.8. Якщо хоча б одна з двох границь формул (2.17) не існує або дорівнює нескінченності, то графік функції похилої асимптоти не має.

Зауваження 2.9. При обчисленні границь за формулами (2.17) необхідно окремо розглядати випадки при $x\to-\infty$ та при $x\to+\infty$, оскільки вони можуть давати різні результати, а відповідно і різні асимптоти. Лише для раціональних функцій ці границі при їх обчисленні можна об'єднувати і брати $x\to\pm\infty$.

Пряма $y = b$ буде *горизонтальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо існує скінченна хоча б одна з границь:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \text{ або } \lim_{x\to+\infty} f(x) = b.$$

Горизонтальна асимптота є частинним випадком похилої асимптоти при $k = 0$.

Приклад 2.40. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{7x^4 + 3x^3}{6x^3 + 1}$.

Розв'язання

Задана функція невизначена при $6x^3 + 1 = 0$, тому $x = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$ є точкою розриву. Знайдемо лівосторонню і правосторонню границі в цій точці: $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{\sqrt[3]{6}}+0} \dfrac{7x^4 + 3x^3}{6x^3 + 1} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{\sqrt[3]{6}}-0} \dfrac{7x^4 + 3x^3}{6x^3 + 1} = -\infty.$

Згідно з формулами (2.16) доходимо висновку, що пряма $x = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$ є вертикальною асимптотою.

Обчислимо границі за формулами (2.17):

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{7x^4 + 3x^3}{x(6x^3 + 1)} = \frac{7}{6};$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{7x^4 + 3x^3}{6x^3 + 1} - \frac{7}{6}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6(7x^4 + 3x^3) - 7x(6x^3 - 1)}{6x^3 + 1} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{42x^4 + 18x^3 - 42x^4 + 7x}{6x^3 + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{18x^3 + 7x}{6x^3 + 1} = 3.$$

Тоді $y = kx + b = \dfrac{7}{6}x + 3$ є похилою асимптотою.

2.6.6. Загальний алгоритм повного дослідження функції та побудова її графіка

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність і непарність, періодичність (див. п. 2.1.1).
3. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат, якщо вони існують.

4. Дослідити функцію на неперервність: знайти інтервали неперервності та точки розриву, встановити їх характер (див. пп. 2.3.2 – 2.3.3).

5. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції (див. п. 2.6.3).

6. Знайти інтервали опуклості та точки перегину (див. п. 2.6.4).

7. Знайти асимптоти графіка функції (див. п. 2.6.5).

8. Обчислити, якщо це необхідно, значення функції у додаткових контрольних точках.

9. Побудувати графік функції за одержаними результатами проведених досліджень.

Вказівка 2.14. Алгоритм повного дослідження функції за допомогою похідної необхідно буде застосувати під час виконання завдання 2.12 контрольної роботи 2. При розв'язанні задачі 2.12 рекомендуємо звернути увагу на розглянутий нижче приклад 2.41.

Приклад 2.41. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ та побудувати її графік.

Розв'язання

1. Задана функція не існує при $x=1,$ тому її область визначення $x\in\left(-\infty;1\right)\cup(1;\infty).$

2. Знайдемо $y\left(-x\right)=\dfrac{(-x)^2-2(-x)+2}{-x-1}=-\dfrac{x^2+2x+2}{x+1},$ тобто $y\left(-x\right)\neq y\left(x\right)$ і $y\left(-x\right)\neq -y\left(x\right).$ При цьому область визначення не є симетричною відносно нуля. Тому маємо функцію загального вигляду. Функція не є періодичною.

3. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат.

При $x=0$: $y(0)=\dfrac{2}{0-1}=-2,$ тому $(0;-2)$ – точка перетину графіка функції з віссю Oy.

При $y=0$: $\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+1=-1,\\ x\neq 1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2=-1,\\ x\neq 1;\end{cases}$

$\Leftrightarrow x\in\varnothing,$ тому графік функції не перетинає вісь Ox.

4. Дослідимо функцію на неперервність.

Дана функція, як елементарна, є неперервною на кожному інтервалі своєї області визначення, тобто є неперервною при $x\in\left(-\infty;1\right)\cup(1;\infty).$

Розглянемо точку $x = 1$, у якій функція не існує. Знайдемо у цій точці односторонні границі функції:

$$\lim_{x\to 1-0} y(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \left[\frac{1}{-0}\right] = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0} y(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty.$$

Оскільки границі нескінченні, то $x = 1$ є точкою розриву другого роду і відповідно функція у цій точці має нескінченний розрив.

5. Знайдемо інтервали монотонності та екстремуми функції. Для цього знайдемо першу похідну:

$$y' = \frac{(2x-2)\cdot(x-1) - (x^2 - 2x + 2)\cdot 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x\cdot(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Знайдемо критичні точки функції першого роду (внутрішні точки області визначення, в яких $y' = 0$ або y' не існує):

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x\cdot(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot(x-2) = 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2; \end{array}\right.$$

внутрішніх точок області визначення, в яких y' не існує, немає.

Тому маємо лише дві критичні точки першого роду $x = 0$ та $x = 2$, якими розбиваємо область визначення на чотири інтервали знакосталості похідної $y'(x)$. На кожному з утворених інтервалів визначимо знак похідної, обчисливши для цього похідну у будь-якій точці відповідного інтервалу. За визначеними знаками похідної $y'(x)$ на інтервалах можна встановити інтервали монотонності, характер локальних екстремумів та їх числові значення. Результати дослідження наведемо у табл. 2.4.

Таблиця 2.4

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;\infty)$
y'	+	0	–	не існує	–	0	+
y	$\nearrow$	$y_{\max} =$ $= -2$	$\searrow$	не існує	$\searrow$	$y_{\min} =$ $= 2$	$\nearrow$

Тому досліджувана функція зростає при $x \in (-\infty;0) \cup (2;\infty)$ та спадає при $x \in (0;1) \cup (1;2)$; у точці $x=0$ вона має локальний максимум $y_{\max} = y(0) = -2$, а у точці $x=2$ – локальний мінімум $y_{\min} = y(2) = 2$.

6. Знайдемо інтервали опуклості та точки перегину. Для цього знайдемо другу похідну:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-(x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2\cdot(x-1)^3-2x\cdot(x-1)(x-2)}{(x-1)^4} = \frac{2\cdot((x-1)^2-x(x-2))}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2\cdot(x^2-2x+1-x^2+2x)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Знайдемо критичні точки другого роду функції $y(x)$, тобто внутрішні точки області визначення, у яких $y''=0$ або y'' не існує: $y''=0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{(x-1)^3}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \varnothing$; y'' існує в усіх точках області визначення функції. Тому функція критичних точок другого роду, а відповідно і точок перегину не має.

Тоді визначимо знаки другої похідної $y''(x)$ на кожному з двох інтервалів області визначення функції $y(x)$, за якими встановимо вид опуклості на кожному з цих інтервалів.

Результати дослідження наведемо у табл. 2.5.

Таблиця 2.5

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;\infty)$
y''	–	не існує	+
y	$\frown$	не існує	$\smile$

Тому графік функції є опуклим вгору при $x \in (-\infty;1)$ та опуклим вниз при $x \in (1;\infty)$.

7. Знайдемо асимптоти графіка функції.

За результатами дослідження функції на неперервність у точці $x=1$ маємо, що її графік має вертикальну асимптоту $x=1$.

Знайдемо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+2}{x\cdot(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^2-x)-(x-1)+1}{x^2-x} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x(x-1)}\right)=1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(y(x)-kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x-1}+\frac{1}{x-1}-x\right)=$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x-1)^2}{x-1}+\frac{1}{x-1}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x-1}-1\right)=-1.$$

Тоді $y=kx+b=x-1$, тобто $y=x-1$ є похилою асимптотою.

8. Обчислимо значення функції в додаткових точках і виділимо відповідно додаткові контрольні точки графіка функції:

$$y(3)=\frac{5}{2}\Rightarrow(3;\ \frac{5}{2}),\ \ y(\frac{3}{2})=\frac{5}{2}\Rightarrow(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}),$$

$$y(\frac{1}{2})=-\frac{5}{2}\Rightarrow(\frac{1}{2};\ -\frac{5}{2}),\ \ y(-1)=-\frac{5}{2}\Rightarrow(-1;\ -\frac{5}{2}).$$

9. Побудуємо графік функції за одержаними результатами проведенного дослідження (рис. 2.36).

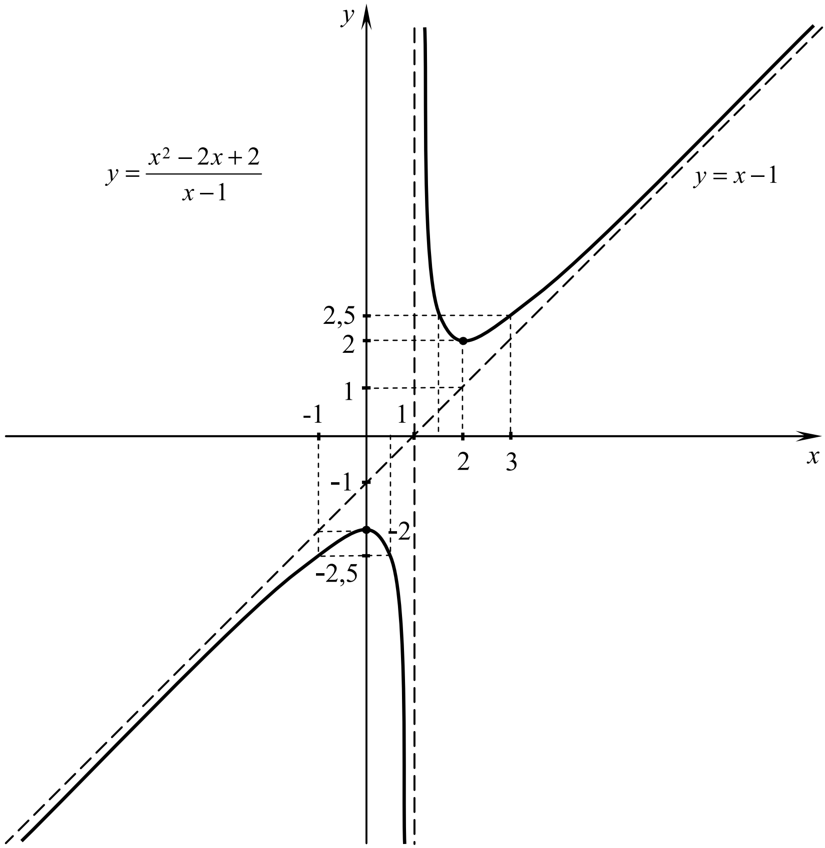

Рис. 2.36

МОДУЛЬ 3

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Для виконання контрольної роботи 3 необхідно вивчити теоретичні питання, що стосуються інтегрального числення. У цьому модулі студент знайде весь необхідний матеріал для опанування інтегрування функцій та приклади розв'язання типових задач, що пропонуються в контрольній роботі 3.

СТРУКТУРА МОДУЛЯ

3.1. Комплексні числа та їх властивості.
3.2. Невизначений інтеграл.
3.3. Визначений інтеграл та його застосування. Невласні інтеграли.

Базисні поняття. 1. Поняття комплексного числа. 2. Модуль і аргумент комплексного числа. 3. Алгебраїчна, тригонометрична і показникова форми комплексного числа. 4. Первісна. 5. Невизначений інтеграл. 6. Інтегральна сума. 7. Визначений інтеграл та його застосування. 8. Дослідження невласних інтегралів.

Основні задачі. 1. Дії над комплексними числами в різних формах. 2. Знаходження невизначених інтегралів. 3. Обчислення визначених інтегралів. 4. Застосування визначених інтегралів. 5. Дослідження невласних інтегралів.

ЗНАННЯ ТА ВМІННЯ, ЯКІ МАЄ НАБУТИ СТУДЕНТ

1. Знання на рівні понять, означень, формулювань

1.1. Комплексні числа в алгебраїчній формі, геометрична інтерпретація.
1.2. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа.
1.3. Дії над комплексними числами, формула Муавра.
1.4. Первісна. Невизначений інтеграл, властивості.
1.5. Таблиця невизначених інтегралів.
1.6. Методи інтегрування (безпосереднє інтегрування, метод підстановок, інтегрування частинами).

1.7. Задача про площу криволінійної трапеції.
1.8. Означення визначеного інтеграла, властивості.
1.9. Формула Ньютона-Лейбніца.
1.10. Невласні інтеграли першого і другого роду.
1.11. Обчислення площ, довжин дуг плоских кривих.

2. Вміння у розв'язанні задач

2.1. Виконувати дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.
2.2. Підносити комплексні числа до натурального степеня, добувати корінь n-го степеня.
2.3. Зводити інтеграли до табличних, застосовуючи властивості лінійності і внесення функції під знак диференціала.
2.4. Застосовувати потрібну заміну в інтегралах відомих типів.
2.5. Інтегрувати найпростіші вирази, що містять квадратні тричлени.
2.6. Застосовувати формулу інтегрування частинами.
2.7. Інтегрувати раціональні дроби.
2.8. Інтегрувати ірраціональні вирази.
2.9. Інтегрувати тригонометричні функції.
2.10. Обчислювати визначений інтеграл, використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, заміну змінної, формулу інтегрування частинами.
2.11. Досліджувати на збіжність невласні інтеграли.
2.12. Обчислювати площу плоскої області, довжину дуги плоскої кривої.

3.1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Означення комплексного числа, його властивості, модуль і аргумент, алгебраїчна та тригонометрична форма комплексного числа, основні дії над комплексними числами.

Література: [3, розд. 1, пп. 1.2.7–1.2.12]; [4, §3]; [5, розд. 3, §6]; [7, мод. 1, п. 4.1–4.6].

3.1.1. Означення комплексного числа

Комплексним числом називають вираз вигляду
$z = a + bi$, де $a, b \in R$, $i = \sqrt{-1}$ $\left(i^2 = -1\right)$ – *уявна одиниця*.

Число a називають *дійсною* частиною комплексного числа z, b – *уявною* частиною комплексного числа і позначають відповідно $a = \operatorname{Re} z$; $b = \operatorname{Im} z$.

Запис комплексного числа у вигляді $z = a + bi$ називають *алгебраїчною формою комплексного числа*.

Комплексне число *дорівнює нулю* тоді і лише тоді, коли $a = b = 0$.

Якщо $a = 0$, то число $z = bi$ називають *чисто уявним*; якщо $b = 0$, то отримаємо *дійсне* число $z = a$.

Два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ є *рівними* тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$ і $b_1 = b_2$.

Спряженим до комплексного числа $z = a + bi$ називають число виду $\overline{z} = a - bi$.

3.1.2. Тригонометрична та показникова форми комплексного числа

Кожному комплексному числу $z = a + bi$ можна поставити у відповідність на площині Oxy точку $A(a;b)$ (рис. 3.1).

Модулем комплексного числа z називають довжину вектора $\overrightarrow{OA}$ і позначають $|z|$, тобто

$$|z| = \left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (3.1)$$

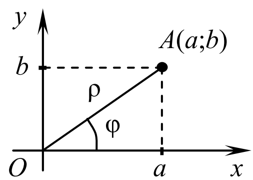

Рис. 3.1

Кут φ між додатним напрямком осі Ox і вектором $\overrightarrow{OA}$ називають *аргументом* комплексного числа z $(z \neq 0)$ і позначають $\varphi = \arg z$ (рис. 3.1).

Оскільки величину кута визначають з точністю до $2\pi n$, де $n \in Z$, то всі його значення задають формулою $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$, де $n \in Z$. При цьому $\operatorname{Arg} z$ – загальне значення аргументу, а $\arg z$ – *головне значення аргументу*, яке обмежують умовою $-\pi < \arg z \leq \pi$. Головне значення $\varphi = \arg z$ комплексного числа $z = a + bi$ можна визначити з умов: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, при цьому рекомендовано розпочинати з геометричного зображення комплексного числа.

Обчислювати $\arg z$ можна також за формулою:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, \text{якщо } a > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, \text{якщо } a < 0,\ b \geq 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, \text{якщо } a < 0,\ b < 0; \\ \frac{\pi}{2}, \text{якщо } a = 0,\ b > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, \text{якщо } a = 0,\ b < 0. \end{cases} \qquad (3.2)$$

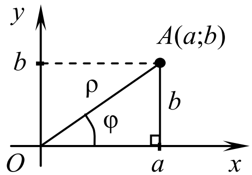

Рис. 3.2

Із прямокутного трикутника (рис. 3.2) маємо $\sin\varphi = \frac{b}{\rho}$, $\cos\varphi = \frac{a}{\rho}$, звідки $a = \rho\cos\varphi$, $b = \rho\sin\varphi$, де $\rho = |z|$. Тоді комплексне число можна записати у вигляді

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (3.3)$$

який називають *тригонометричною формою* комплексного числа.

Застосовуючи формулу Ейлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, комплексне число можна записати у вигляді $z = |z|e^{i\varphi}$, який називають показниковою формою комплексного числа.

3.1.3. Дії над комплексними числами

1. Якщо два комплексних числа задані в алгебраїчній формі $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$, то арифметичні операції над ними виконують за правилами:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

2. Якщо два комплексних числа задані в тригонометричній формі $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то операції множення і ділення виконують за правилами:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right);$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

Піднесення комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ до натурального степеня n виконують за *формулою Муавра:*

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (3.4)$$

Корінь n-го степеня з комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ має n різних значень, які знаходять за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \text{ при } k = 0,\ 1,\ ...,\ n-1. \qquad (3.5)$$

3. Нехай два комплексних числа задані показниковою формою $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}$, $z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}$. Тоді операції множення і ділення виконують за правилами:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};\ \ \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};\ \ z_1^n = |z_1|^n e^{in\varphi_1},\ \ n \in N.$$

Приклад 3.1. Дано: комплексні числа $z_1 = 2-3i$, $z_2 = -1+i$, $z_3 = -i$. Знайти: а) добуток $z_1 \cdot z_2$; б) частку $\frac{z_1}{z_2}$; в) модуль і аргумент комплексного числа z_1; г) піднести z_2 до п'ятого степеня; д) знайти кубічний корінь із z_3.

Розв'язання

а) $z_1 \cdot z_2 = (4-3i)(-1+i) = -4+4i+3i-3i^2 = -4+7i+3 = -1+7i;$

б) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{4-3i}{-1+i} = \dfrac{(4-3i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \dfrac{-4-4i+3i-3}{1+1} = -\dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}i;$

в) визначимо модуль і аргументи комплексного числа за формулами (3.1) та (3.2): $|z_1| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{-3}{4} = -\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4};$

г) для знаходження п'ятого степеня $(z_2)^5$ застосуємо формулу *Муавра* (3.4), попередньо записавши z_2 в тригонометричній формі

(3.3): $|z_2|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}, \quad \varphi = arctg\dfrac{1}{-1}=\pi - arctg1=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4},$

тоді $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ і відповідно

$$(z_2)^5=\left(\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\left(5\cdot\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(5\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=4+i(-4);$$

д) запишемо z_3 у тригонометричній формі, попередньо обчисливши його модуль та аргумент: $|z_3|=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1, \quad \varphi=-\dfrac{\pi}{2}$ і відповідно $z_3=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$. Існує три значення $z_3^0,\ z_3^1,\ z_3^2$ кореня третього степеня із комплексного числа z_3:

$$\sqrt[3]{z_3}=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right), \text{ де } k=0,1,2.$$

Якщо $k=0$, то маємо $z_3^0=\sqrt[3]{1}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\left(-\dfrac{1}{2}\right).$

Якщо $k=1$, то маємо $z_3^1=\sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=i.$

Якщо $k=2$, то маємо $z_3^2=\sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\left(-\dfrac{1}{2}\right).$

3.2. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Первісна. Невизначений інтеграл і його властивості. Загальні методи інтегрування. Інтегрування раціональних дробів. Інтеграли від ірраціональних функцій. Інтегрування деяких класів тригонометричних функцій.

Література: [2, розд. 6, пп. 6.1–6.3], [4, розд. 7, §22], [7, мод. 2, пп. 1.1–1.5, 2.1–2.2, 3.1–3.2, 4.1–4.2, 5.1–5.8].

3.2.1. Невизначений інтеграл і його властивості. Таблиця інтегралів

Диференційовну функцію $F(x)$ називають *первісною* функції $f(x)$ на деякому проміжку $(a;b)$, якщо для всіх значень $x \in (a;b)$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Якщо $F(x)$ первісна функції $f(x)$, то $\Phi(x)$ буде також її первісною тоді і тільки тоді, коли $\Phi(x) = F(x) + C$, де C – деяка стала.

Сукупність усіх первісних $F(x) + C$, де $C \in R$, функції $f(x)$ на проміжку $x \in (a;b)$ називають *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначають $\int f(x)dx$. Тому маємо: $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$, а C – довільна стала.

Слово «інтеграл» походить від латинського слова «integralis», що означає цілісний, а символ $\int$ був прийнятий як перша літера слова «summa», яке розуміють як об’єднання.

Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції $f(x)$ називають інтегруванням цієї функції і вона є оберненою до диференціювання. При цьому в записаному інтегралі $\int f(x)dx$ функцію $f(x)$ називають підінтегральною, а вираз $f(x)dx$ – підінтегральним виразом. У математичному аналізі застосування символу $\int$ без диференціала незалежної змінної не осмислюється.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $\int F'(x)dx = \int d\left(F(x)\right) = F(x) + C$;
3. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
4. $\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx, k \in R$;
5. $\int\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$;
6. $\int f\left(\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x)dx = F\left(\varphi(x)\right) + C$.

Таблиця основних невизначених інтегралів

Якщо $u(x)$ – довільна функція, для якої на деякому проміжку існує неперервна похідна $u'(x)$, то справедливими є формули, наведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

1. $\int du = u + C$	11. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\| \operatorname{tg}\frac{u}{2}\right\| + C$
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\| \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C$	13. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$
4. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	14. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+u}{a-u}\right\| + C$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	15. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$
6. $\int e^u du = e^u + C$	16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$
7. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$	17. $\int \operatorname{sh} u\, dx = \operatorname{ch} u + C$
8. $\int \cos u\, du = \sin u + C$	18. $\int \operatorname{ch} u\, dx = \operatorname{sh} u + C$
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$	19. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$	20. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$

У табл. 3.1 наведено найважливіші інтеграли, що демонструють результати інтегрування окремих функцій. Ці інтеграли назвали табличними. Для інтегрування функцій, які не належать до табличних інтегралів, застосовують загальні методи, які працюють для великої групи інтегралів, та штучні прийоми, що мають вузькі межі дії, а інколи актуальні лише для конкретного інтеграла. Але при цьому вони мають спростити заданий інтеграл та звести його до табличного. Тому важливо добре орієнтуватися у таблиці інтегралів, а ще краще знати їх напам'ять, щоб під час інтегрування вміти розпізнати табличний інтеграл і відрізнити його від інших.

3.2.2. Основні методи інтегрування

Виділяють три основні методи інтегрування: безпосереднього інтегрування, підстановки та інтегрування частинами.

Перед тим як розпочати інтегрування функції за допомогою того чи іншого методу або штучного прийому, завжди буде доцільним спробувати спростити, якщо це можливо, підінтегральну функцію.

I. Метод безпосереднього інтегрування

Даний метод грунтується на застосуванні таблиці інтегралів та властивостей лінійності інтеграла.

Приклад 3.2. Знайти інтеграл $\int(2\sin x+3\cos x)dx$.

Розв'язання

Застосувавши властивості 4 і 5, табличні формули 7 і 8, отримаємо:

$$\int(2\sin x+3\cos x)\,dx=2\int\sin x\,dx+3\int\cos x\,dx=-2\cos x+3\sin x+C.$$

Приклад 3.3. Знайти інтеграл $\int e^x\left(2+3e^{-x}\right)dx$.

Розв'язання

Спочатку спростимо підінтегральну функцію, розкривши в ній дужки. Застосувавши властивості 4 і 5 невизначеного інтеграла та табличні інтеграли 1 і 6, одержимо:

$$\int e^x\left(2+3e^{-x}\right)dx=\int\left(2e^x+3\right)dx=2\int e^x dx+3\int dx=2e^x+3x+C.$$

Вказівка 3.1. Метод безпосереднього інтегрування необхідно буде застосувати при розв'язуванні задачі 3.1 контрольної роботи 3. При цьому рекомендуємо звернути увагу на приклади 3.2 і 3.3.

II. Метод підстановки

Суть методу підстановки полягає у введенні нової змінної, яка б забезпечила зведення заданого інтеграла до табличного або простішого інтеграла.

Для знаходження інтеграла $\int f(x)dx$ виокремлюють дві принципово різні підстановки:

1) $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервно-диференційовна функція на відповідному інтервалі $t\in(\alpha;\beta)$, тобто незалежну змінну заміняють деякою функцією від нової змінної;

2) $p(x)=t$, де $p(x)$ – неперервно-диференційовна функція на відповідному інтервалі $x\in(a;b)$, тобто за нову змінну беруть деяку функцію від старої змінної.

В обох випадках, після знаходження інтеграла, необхідно здійснити зворотний перехід до старої змінної x.

Проаналізуємо кожну з цих підстановок та продемонструємо їх застосування на відповідних конкретних прикладах.

1. Винесення функції з-під знака диференціала

$$\int f(x)\,dx=\left|\begin{array}{l}x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)\,dt\end{array}\right|=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt=\left|f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=z(t)\right|=$$

$$=\int z(t)\,dt=Z(t)+C=\left|\begin{array}{l}x=\varphi(t)\\ t=\psi(x)\end{array}\right|=Z(\psi(x))+C=F(x)+C,\text{ де } \varphi(t),\ \psi(x)$$

є взаємно оберненими неперервно-диференційовними функціями.

Приклад 3.4. Знайти інтеграл $I=\int\sqrt{9-x^2}\,dx$.

Розв'язання

$$I=\int\sqrt{9-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}x=3\sin t\\ dx=3\cos t\,dt\end{array}\right|=\int\sqrt{9-(3\sin t)^2}\cdot 3\cos t\,dt=$$

$$=3\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot 3\cos t\,dt=9\int\cos^2 t\,dt=\frac{9}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{9}{2}\int dt+\frac{9}{2}\int\cos 2t\,dt=\frac{9}{2}t+\frac{9}{4}\sin 2t+C=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x=3\sin t,\ \sin t=\dfrac{x}{3},\ t=\arcsin\dfrac{x}{3},\\ \sin 2t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=2\cdot\dfrac{x}{3}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}}=2x\sqrt{9-x^2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{4}\cdot 2x\cdot\sqrt{9-x^2}+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{2}x\sqrt{9-x^2}+C=$$

$$=\frac{9}{2}\left(\arcsin\frac{x}{3}+x\sqrt{9-x^2}\right)+C.$$

2. Внесення функції під знак диференціала

Якщо існує функція $p(x)$ така, що підінтегральний вираз можна подати у вигляді $f(x)dx = g(p(x))\cdot p'(x)dx,$ (3.6)

то раціональною буде заміна $p(x)=t$:

$$\int f(x)dx = \int g(p(x))\cdot p'(x)dx = \int g(p(x))d(p(x)) = \begin{vmatrix} p(x)=t \\ p'(x)dx = dt \end{vmatrix} =$$

$$= \int g(t)dt = G(t)+C = \left| t = p(x) \right| = G(p(x))+C = F(x)+C.$$

При цьому вводити змінну t не обов'язково, а достатньо провести інтегрування відносно функції $p(x)$.

Наведемо приклади внесення під знак диференціала деяких найбільш поширених функцій за формулою $d(f(x)) = (f(x))' dx \Leftrightarrow f'(x)dx = d(f(x))$ (табл. 3.2).

Нехай a, b – деякі сталі, $n \in Q$.

Таблиця 3.2

$d(x \pm b) = dx$	$dx = d(x \pm b)$
$d(ax \pm b) = a \cdot dx$	$dx = \frac{1}{a} d(ax \pm b)$
$d(x^2) = 2x\,dx$	$x\,dx = \frac{1}{2} d(x^2)$
$d(x^3) = 3x^2\,dx$	$x^2\,dx = \frac{1}{3} d(x^3)$
$d(x^n) = n\,x^{n-1}\,dx$	$x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n} d(x^n)$
$d(ax^n \pm b) = a \cdot n \cdot x^{n-1}\,dx$	$x^{n-1}\,dx = \frac{1}{a \cdot n} d(ax^n \pm b)$
$d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$	$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$
$d(\sqrt{ax \pm b}) = \frac{a}{2\sqrt{ax \pm b}} dx$	$\frac{dx}{\sqrt{ax \pm b}} = \frac{2}{a} d(\sqrt{ax \pm b})$
$d(e^x) = e^x dx$	$e^x dx = d(e^x)$

$d\left(a^{x}\right)=a^{x}\cdot\ln a\cdot dx$	$a^{x}\cdot dx=\frac{1}{\ln a}d\left(a^{x}\right)$
$d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$	$\frac{1}{x}dx=d(\ln x)$
$d(\log_{a}x)=\frac{1}{x\cdot\ln a}dx$	$\frac{1}{x}dx=\ln a\cdot d(\log_{a}x)$
$d(\sin x)=\cos x\,dx$	$\cos x\,dx=d(\sin x)$
$d(\sin ax)=a\cdot\cos ax\,dx$	$\cos ax\,dx=\frac{1}{a}d(\sin ax)$
$d(\cos x)=-\sin x\,dx$	$\sin x\,dx=-d(\cos x)$
$d(\cos ax)=-a\cdot\sin ax\,dx$	$\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}d(\cos ax)$
$d(\operatorname{tg}x)=\frac{1}{\cos^{2}x}dx$	$\frac{dx}{\cos^{2}x}=d(\operatorname{tg}x)$
$d(\operatorname{tg}ax)=\frac{a}{\cos^{2}ax}dx$	$\frac{dx}{\cos^{2}ax}=\frac{1}{a}d(\operatorname{tg}ax)$
$d(\operatorname{ctg}x)=-\frac{1}{\sin^{2}x}dx$	$\frac{dx}{\sin^{2}x}=-d(\operatorname{ctg}x)$
$d(\operatorname{ctg}ax)=-\frac{a}{\sin^{2}ax}dx$	$\frac{dx}{\sin^{2}ax}=-\frac{1}{a}d(\operatorname{ctg}ax)$
$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=d(\arcsin x)$
$d(\arcsin ax)=\frac{a}{\sqrt{1-(ax)^{2}}}dx$	$\frac{dx}{\sqrt{1-(ax)^{2}}}=\frac{1}{a}d(\arcsin ax)$
$d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=-d(\arccos x)$
$d(\arccos ax)=-\frac{a}{\sqrt{1-(ax)^{2}}}dx$	$\frac{dx}{\sqrt{1-(ax)^{2}}}=-\frac{1}{a}d(\arccos ax)$
$d(\operatorname{arctg}x)=\frac{1}{x^{2}+1}dx$	$\frac{1}{x^{2}+1}dx=d(\operatorname{arctg}x)$

Закінчення табл. 3.2

$d(\operatorname{arctg} ax)=\dfrac{a}{(ax)^2+1}dx$	$\dfrac{dx}{(ax)^2+1}=\dfrac{1}{a}d(\operatorname{arctg} ax)$
$d(\operatorname{arcctg} x)=-\dfrac{1}{x^2+1}dx$	$\dfrac{dx}{x^2+1}=-d(\operatorname{arcctg} x)$
$d(\operatorname{arcctg} ax)=-\dfrac{a}{(ax)^2+1}dx$	$\dfrac{dx}{(ax)^2+1}=-\dfrac{1}{a}d(\operatorname{arcctg} ax)$

Вказівка 3.2. Внесення функції під знак диференціала необхідно буде продемонструвати при виконанні завдання 3.2 контрольної роботи 3. При розв'язанні задачі 3.2 рекомендуємо звернути увагу на табл. 3.2 та приклади 3.5–3.7.

Приклад 3.5. Знайти інтеграл $I=\int e^{2\sin x+3}\cdot\cos x\,dx.$

Розв'язання

Оскільки $d(2\sin x+3)=(2\sin x+3)'\,dx=2\cos x\,dx,$ то маємо:

– перший спосіб (внесення функції під знак диференціала з уведенням нової змінної)

$$I=\left|\begin{array}{l}2\sin x+3=t\\ 2\cos x\,dx=dt,\cos x\,dx=\dfrac{1}{2}dt\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int e^t\,dt=\frac{1}{2}e^t+C=$$

$$=\left|\,t=2\sin x+3\,\right|=\frac{1}{2}e^{2\sin x+3}+C;$$

– другий спосіб (внесення функції під знак диференціала без уведення нової змінної)

$$I=\int e^{2\sin x+3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cos x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int e^{2\sin x+3}\cdot(2\sin x+3)'\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int e^{2\sin x+3}\,d(2\sin x+3)=\frac{1}{2}e^{2\sin x+3}+C.$$

Приклад 3.6. Знайти інтеграл $I=\int\dfrac{\ln^2 x}{x}dx.$

Розв'язання

Оскільки $d(\ln x)=(\ln x)'\,dx=\dfrac{1}{x}dx,$ то маємо:

– перший спосіб (з уведенням нової змінної)

$$I=\int \ln^2 x\cdot\frac{dx}{x}=\left|\begin{array}{l}\ln x=t\\ \dfrac{dx}{x}=dt\end{array}\right|=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C=\left|\,t=\ln x\,\right|=\frac{1}{3}\ln^3 x+C;$$

– другий спосіб (без уведення нової змінної)

$$I=\int \ln^2 x\cdot\frac{1}{x}dx=\int \ln^2 x\cdot\left(\ln x\right)'dx=\int \ln^2 x\cdot d\left(\ln x\right)=\frac{1}{3}\ln^3 x+C.$$

Приклад 3.7. Знайти інтеграл $I=\int\dfrac{\mathrm{tg}^4 x}{\cos^2 x}dx.$

Розв'язання

Оскільки $d\left(\mathrm{tg}\,x\right)=\left(\mathrm{tg}\,x\right)'dx=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx,$ то маємо:

– перший спосіб (з уведенням нової змінної)

$$I=\int \mathrm{tg}^4 x\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\left|\begin{array}{l}\mathrm{tg}\,x=t\\ \dfrac{dx}{\cos^2 x}=dt\end{array}\right|=\int t^4dt=\frac{1}{5}t^5+C=\left|\,t=\mathrm{tg}\,x\,\right|=$$

$$=\frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x+C;$$

– другий спосіб (без уведення нової змінної)

$$I=\int \mathrm{tg}^4 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int \mathrm{tg}^4 x\cdot\left(\mathrm{tg}\,x\right)'dx=\int \mathrm{tg}^4 x\,d\left(\mathrm{tg}\,x\right)=\frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x+C.$$

Оскільки при інтегруванні функцій керуються пошуком найраціональніших шляхів, то не обов'язково нову змінну вводити лише за одним з двох наведених алгоритмів у повному обсязі. Наприклад, вони можуть комбінуватися або застосовуватися частково. Розглянемо окремі такі випадки у вигляді зауважень та наведемо приклади до них.

Зауваження 3.1. Інколи винесення функції $\varphi(t)$ з-під знака диференціала раціональніше розпочати з підстановки $\psi\left(x\right)=t,$ звідки виразити $x=\varphi(t)$ і відповідно $dx=\varphi'\left(t\right)dt.$

Приклад 3.8. Знайти інтеграл $I=\int x^2\sqrt{5-x}\,dx.$

Розв'язання

Продемонструємо винесення функції $\varphi(t)$ з-під знака диференціала, зробивши підстановку $\sqrt{5-x}=t:$

$$I=\int x^2\sqrt{5-x}\,dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{5-x}=t, x=5-t^2\\ 5-x=t^2,\ dx=-2t\,dt\end{array}\right|=\int\left(5-t^2\right)^2\cdot t\,(-2t)\,dt=$$

$$=\int\left(25-10t^2+t^4\right)\left(-2t^2\right)dt=-2\int\left(t^6-10t^4+25t^2\right)dt=-2\left(\frac{t^7}{7}-2t^5+\right.$$

$$\left.+\frac{25}{3}t^3\right)+C=\left|t=\sqrt{5-x}\right|=-\frac{2}{7}\sqrt{(5-x)^7}+4\sqrt{(5-x)^5}-\frac{50}{3}\sqrt{(5-x)^3}+C.$$

Зауваження 3.2. Для внесення функції $p(x)$ під знак диференціала не завжди підінтегральний вираз $f(x)dx$ необхідно розписувати у вигляді (3.6). Інколи достатньо лише зробити підстановку $p(x)=t$ та виразити підінтегральний вираз через t без відокремлення у ньому множника $p'(x)\,dx$.

Приклад 3.9. Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{e^x-1}$.

Розв'язання

Розв'яжемо даний інтеграл двома способами:

– перший спосіб (за скороченим алгоритмом без відокремлення множника $p'(x)dx$)

$$I=\int\frac{dx}{e^x-1}=\left|\begin{array}{l}e^x-1=t, e^x=t+1\\ e^x dx=dt, dx=\dfrac{dt}{t+1}\end{array}\right|=\int\frac{dt}{t(t+1)}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\int\frac{dt}{t}-$$

$$-\int\frac{d\,(t+1)}{t+1}=\ln|\,t\,|-\ln|\,t+1\,|+C=\left|\begin{array}{l}t=e^x-1\\ t+1=e^x\end{array}\right|=\ln\left|\,e^x-1\,\right|-\ln e^x+C=$$

$$=\ln\left|\,e^x-1\,\right|-x+C;$$

– другий спосіб (за повним алгоритмом з відокремленням множника $p'(x)dx$)

$$I=\int\frac{e^x dx}{\left(e^x-1\right)\cdot e^x}=\int\frac{e^x dx}{\left(e^x-1\right)\cdot\left(\left(e^x-1\right)+1\right)}=\left|\begin{array}{l}e^x-1=t\\ e^x dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{dt}{t\,(t+1)}=$$

$$=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\int\frac{dt}{t}-\int\frac{d(t+1)}{t+1}=\ln|t|-\ln|t+1|+C=\left|\begin{array}{l}t=e^x-1\\ t+1=e^x\end{array}\right|=$$

$$=\ln\left|\,e^x-1\,\right|-\ln e^x+C=\ln\left|\,e^x-1\,\right|-x+C.$$

Зауваження 3.3. Інколи обидва алгоритми можна застосовувати до одного й того ж інтеграла, але при цьому необхідно керуватися раціональністю.

Приклад 3.10. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}}$.

Розв'язання

Продемонструємо розв'язання даного інтеграла обома алгоритмами:

– перший спосіб (за допомогою винесення функції з-під знака диференціала)

$$I=\left|\begin{matrix}\sqrt{x+3}=t, x=t^2-3=\varphi(t)\\ x+3=t^2, dx=2t\,dt=\varphi'(t)\,dt\end{matrix}\right|=\int\frac{\left(t^2-3\right)\cdot 2t}{t}dt=2\int\left(t^2-3\right)dt=$$

$$=\frac{2}{3}t^3-6t+C=\left|t=\sqrt{x+3}\right|=\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}-6\sqrt{x+3}+C;$$

– другий спосіб (за допомогою внесення функції під знак диференціала)

$$I=2\int x\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x+3}}=2\int((x+3)-3)\cdot\left(\sqrt{x+3}\right)'dx=$$

$$=2\int\left(\left(\sqrt{x+3}\right)^2-3\right)d\left(\sqrt{x+3}\right)==\left|\begin{matrix}p(x)=\sqrt{x+3}=t\\ d(p(x))=d\left(\sqrt{x+3}\right)=dt\end{matrix}\right|=$$

$$=2\int\left(t^2-3\right)dt=\frac{2}{3}t^3-6t+C=\left|t=\sqrt{x+3}\right|=\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}-6\sqrt{x+3}+C.$$

Зауваження 3.4. Пізніше для багатьох груп функцій, інтегрування яких розглядатиметься окремо, будуть рекомендовані відповідні найраціональніші для них підстановки.

ІІІ. Метод інтегрування частинами

Нехай функції $u=u(x)$ і $v=v(x)$ є неперервно-диференційовними на деякому проміжку. Тоді для цих функцій справедлива *формула інтегрування частинами*

$$\int u dv=u v-\int v du, \qquad (3.7)$$

яка дає можливість замінити відповідно інтеграл $\int udv$ на інтеграл $\int vdu$. Застосування методу інтегрування частинами до інтеграла

$\int f(x)dx$ буде раціональним, якщо існують неперервно-диференційовні функції $u(x)$ і $v(x)$ такі, що підінтегральний вираз $f(x)dx = u(x)\cdot d(v(x))$ і при цьому $\int v\,du$ інтегрується простіше, ніж $\int u\,dv$.

Розглянемо деякі основні види інтегралів з рекомендованими для них частинами u та dv, згрупувавши їх у табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Види інтегралів	Вибір u та dv	
$\int P_n(x)\cdot e^{ax+b}dx$		$dv = e^{ax+b}dx$
$\int P_n(x)\cdot \sin(ax+b)dx$	$u = P_n(x)$	$dv = \sin(ax+b)dx$
$\int P_n(x)\cdot \cos(ax+b)dx$		$dv = \cos(ax+b)dx$
$\int P_n(x)\cdot \arcsin(ax+b)dx$	$u = \arcsin(ax+b)$	
$\int P_n(x)\cdot \arccos(ax+b)dx$	$u = \arccos(ax+b)$	
$\int P_n(x)\cdot \mathrm{arctg}(ax+b)dx$	$u = \mathrm{arctg}(ax+b)$	$dv = P_n(x)dx$
$\int P_n(x)\cdot \mathrm{arcctg}(ax+b)dx$	$u = \mathrm{arcctg}(ax+b)$	
$\int P_n(x)\cdot \ln(ax+b)dx$	$u = \ln(ax+b)$	
$\int e^{ax}\cdot \sin bx\,dx$	$u = e^{ax}$ або $u = \sin bx$	$dv = \sin bx\,dx$ або $dv = e^{ax}dx$
$\int e^{ax}\cdot \cos bx\,dx$	$u = e^{ax}$ або $u = \cos bx$	$dv = \cos bx\,dx$ або $dv = e^{ax}dx$

Приклад 3.11. Знайти $I = \int (2-x)\cdot \sin 2x\,dx$.

Розв'язання

Продемонструємо метод інтегрування частинами, застосувавши формулу (3.7):

$$I = \left| \begin{array}{l} u = 2-x, \quad du = (2-x)'dx = -dx \\ dv = \sin 2x\,dx, \; v = \int \sin 2x\,dx = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| = \int u\,dv = u\,v - \int v\,du =$$

$$= (2-x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}(x-2)\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Приклад 3.12. Знайти інтеграл $I = \int x\cdot \ln x\,dx$.

Розв'язання

Застосуємо метод інтегрування частинами:

$$I=\left|\begin{matrix} u=\ln x, du=(\ln x)'\,dx=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=xdx, \mathrm{v}=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=\int u\,dv=u\,v-\int v\,du=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C=\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C.$$

Зауваження 3.5. Інколи інтегрування частинами доводиться застосовувати повторно.

Приклад 3.13. Знайти інтеграл $I=\int\ln^2 x\,dx$.

Розв'язання

Застосуємо метод інтегрування частинами, причому двічі:

$$I=\left|\begin{matrix} u_1=\ln^2 x, du_1=\left(\ln^2 x\right)'dx=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}dx \\ dv_1=dx, \mathrm{v}_1=\int dx=x\end{matrix}\right|=\int u_1dv_1=u_1\,v_1-\int v_1du_1=$$

$$=x\cdot\ln^2 x-2\int\ln x\,dx=\left|\begin{matrix} u_2=\ln x, du_2=(\ln x)'\,dx=\dfrac{1}{x}dx \\ dv_2=dx, \mathrm{v}_2=\int dx=x\end{matrix}\right|=x\cdot\ln^2 x-$$

$$-2\int u_2dv_2=x\cdot\ln^2 x-2\left(u_2\,v_2-\int v_2du_2\right)=x\cdot\ln^2 x-2x\cdot\ln x+2\int dx=$$

$$=x\cdot\ln^2 x-2x\cdot\ln x+2x+C=x\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)+C.$$

Зауваження 3.6. Для інтегралів вигляду $\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx$ та $\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx$ також необхідно двічі застосовувати інтегрування частинами. Але при цьому утвориться лінійне рівняння відносно заданого інтеграла, розв'язавши яке, інтеграл буде знайдено.

Приклад 3.14. Знайти інтеграл $\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx$.

Розв'язання

Застосуємо двічі метод інтегрування частинами:

$$I=\left|\begin{matrix} u_1=e^{2x}, du_1=2e^{2x}dx \\ dv_1=\sin 3x\,dx, \mathrm{v}_1=-\dfrac{1}{3}\cos 3x\end{matrix}\right|=\int u_1dv_1=u_1\,v_1-\int v_1du_1=$$

$$=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx=\begin{vmatrix} u_2=e^{2x}, & du_2=2e^{2x}dx \\ dv_2=\cos 3x\,dx, & \nu_2=\frac{1}{3}\sin 3x \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int u_2dv_2=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\left(u_2\,v_2-\int v_2du_2\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx.$$

У результаті інтегрування заданий в умові інтеграл I виразився через самого себе, тобто одержали лінійне рівняння відносно I:

$$I=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x-\frac{4}{9}I \Leftrightarrow \frac{13}{9}I=\frac{1}{9}e^{2x}\left(2\sin 3x-3\cos 3x\right)$$

$$\Leftrightarrow I=\frac{1}{13}e^{2x}\left(2\sin 3x-3\cos 3x\right).$$

Вказівка 3.3. Метод інтегрування частинами необхідно буде застосувати при розв’язуванні задачі 3.6 контрольної роботи 3. При цьому рекомендуємо звернути увагу на табл. 3.3 та приклади 3.11–3.14.

3.2.3. Інтегрування раціональних дробів

Дробово-раціональною функцією або раціональним дробом називають функцію вигляду $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени відносно x степенів n і m відповідно. Якщо $n<m$, то маємо правильний раціональний дріб. Якщо $m\ge n$, то маємо неправильний раціональний дріб і при цьому його можна подати у вигляді:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=M_{n-m}(x)+\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}, \tag{3.8}$$

де $k<m$, $M_{n-m}(x)$ – ціла частина раціонального дробу.

Для виділення цілої частини раціонального дробу $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ при $n\ge m$ достатньо виконати ділення «кутом» многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$.

Щоб проінтегрувати неправильний раціональний дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ при $n \geq m,$ необхідно спочатку виділити його цілу частину, тобто записати його у вигляді (3.8). Після чого дістанемо $\int \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int P_{n-m}(x)dx + \int \dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}dx,$ де $k < m$ і відповідно $P_{n-m}(x)$ – многочлен; $\dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ – правильний раціональний дріб.

Щоб проінтегрувати правильний раціональний дріб $\dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ при $k < m,$ необхідно попередньо розкласти його в суму елементарних дробів.

Розклад правильного раціонального дробу у суму елементарних дробів

Виділяють чотири основні види елементарних раціональних дробів: 1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$; 3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$; 4) $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}$, (3.9)

де A, B, a, p, q – дійсні числа; $n \in N, n \neq 1,$ $D = p^2 - 4q < 0.$

Теорема 3.1. Кожен правильний раціональний дріб можна розкласти у скінченну суму елементарних дробів. При цьому структуру розкладення визначають коренями його знаменника.

Нехай знаменник $Q_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $(a_m \neq 0)$ правильного раціонального дробу $\dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ має дійсні корені $x = a_1, x = a_2, \ldots, x = a_k$ кратності відповідно $s_1, s_2, \ldots, s_k$ та комплексно-спряжені пари коренів $x = \alpha_1 \pm i\beta_1,$ $x = \alpha_2 \pm i\beta_2,$ $\ldots, x = \alpha_l \pm i\beta_l$ кратності відповідно $t_1,$ $t_2,$ $\ldots,$ $t_l,$ де $s_1 + s_2 + \ldots + s_k + 2(t_1 + \ldots + t_l) = m.$ Тоді знаменник $Q_m(x)$ можна розкласти на множники:

$$Q_m(x) = a_m (x - a_1)^{s_1} \ldots (x - a_k)^{s_k} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{t_1} \ldots \left(x^2 + p_l x + q_l\right)^{t_l},$$

де $x^2 + p_j x + q_j = \left(x - \left(\alpha_j + i\beta_j\right)\right)\left(x - \left(\alpha_j - i\beta_j\right)\right),$ $j = 1, 2, \ldots, l.$

При цьому розклад правильного раціонального дробу $\dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ при $k<m$ у скінченну суму елементарних дробів має вигляд:

$$\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_{s_1}}{(x-a_1)^{s_1}}+\ldots+\frac{B_1}{x-a_k}+\frac{B_2}{(x-a_k)^2}+$$

$$+\ldots+\frac{B_{s_k}}{(x-a_k)^{s_k}}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{M_{t_1}x+N_{t_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}}+\ldots+$$

$$+\frac{P_1x+L_1}{x^2+p_lx+q_l}+\frac{P_2x+L_2}{(x^2+p_lx+q_l)^2}+\ldots+\frac{P_{t_l}x+L_{t_l}}{(x^2+p_lx+q_l)^{t_l}}, \qquad (3.10)$$

де $A_1, A_2, ..., A_{s_1}, ..., B_1, B_2, ..., B_{s_k}, M_1, M_2, ..., M_{t_1}, N_1, N_2, \ldots, N_{t_1}, ...,$ $P_1, P_2, ..., P_{t_l}, L_1, L_2, ..., L_{t_l}$ – деякі невизначені дійсні сталі коефіцієнти.

Зауваження 3.7. Невідомі дійсні коефіцієнти з розкладення (3.10) можна визначити за допомогою *методу невизначених коефіцієнтів*, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у многочлена $P_k(x)$ і многочлена, який утвориться у чисельнику правої частини розкладу (3.10) після зведення її до спільного знаменника.

Зауваження 3.8. Визначити невідомі коефіцієнти з розкладення (3.10) можна також за допомогою *методу окремих значень аргументу*, прийнявши для цього в розглянутих чисельниках розкладу (3.10) значення змінної x таким, що дорівнює значенням m різних дійсних чисел, зокрема й з однаковим значенням дійсних коренів знаменника $Q_m(x)$. При цьому для визначення невідомих коефіцієнтів можна комбінувати метод невизначених коефіцієнтів з методом окремих значень.

Приклад 3.15. Розкласти правильний раціональний дріб $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{(x-1)(x^2+1)}$ в суму елементарних дробів.

Розв'язання

Врахувавши структуру розкладу (3.10) правильного раціонального дробу та застосувавши метод невизначених коефіцієнтів, маємо

$$\frac{2x^2+3}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}=$$

$$=\frac{A\left(x^2+1\right)+Bx^2+\left(C-B\right)x-C}{\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{\left(A+B\right)x^2+\left(C-B\right)x+\left(A-C\right)}{\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)}.$$

Оскільки знаменники є однаковими, то прирівнюємо чисельники:
$2x^2+3=\left(A+B\right)x^2+\left(C-B\right)x+\left(A-C\right)\ \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}A+B=2,\\ C-B=0,\\ A-C=3;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=2,\\ A-B=3,\\ C=B;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2A=5,\\ B=A-3,\\ C=B;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{5}{2},\\ B=-\frac{1}{2},\\ C=-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Отже, $f\left(x\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+1}.$

Інтегрування правильних, а відповідно і неправильних, раціональних дробів за допомогою розкладу у суму елементарних, зводиться до інтегрування елементарних раціональних дробів. Тому розглянемо інтегрування раніше виділених основних видів елементарних дробів вигляду (3.9), проаналізувавши кожен вид окремо.

Якщо врахувати, що $dx=d\left(x\pm a\right)$, де a – довільне дійсне число, то інтегрування двох перших видів елементарних дробів зводиться до табличних інтегралів:

1) $\int\frac{A}{x\pm a}dx=A\cdot\int\frac{d\left(x\pm a\right)}{x\pm a}=A\cdot\ln\left|x\pm a\right|+C;$

2) $\int\frac{A}{(x\pm a)^n}dx=A\cdot\int(x\pm a)^{-n}d(x\pm a)=A\cdot\frac{(x\pm a)^{-n+1}}{-n+1}+C=$

$=-\frac{A}{n-1}\cdot\frac{1}{\left(x\pm a\right)^{n-1}}+C$, якщо $n\neq 1$.

Приклад 3.16. Знайти інтеграл $I=\int\frac{5dx}{(2x-3)^2}.$

Розв'язання

Оскільки $dx = \frac{1}{2} d\left(2x - 3\right)$, то маємо $I = \frac{5}{2} \int \frac{d(2x-3)}{(2x-3)^2} =$

$$= 5 \cdot \frac{1}{2} \int \left(2x - 3\right)^{-2} d\left(2x - 3\right) = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2x-3} + C = -\frac{5}{2\left(2x-3\right)} + C.$$

Вказівка 3.4. Навички з інтегрування елементарних дробів другого виду необхідно буде продемонструвати при виконанні завдання 3.3.а) контрольної роботи 3. Під час розв'язання задачі 3.3.а) рекомендуємо звернути увагу на приклад 3.16.

Інтегрування елементарних дробів третього виду $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$, де $D = p^2 - 4q < 0$ розглянемо на більш загальному інтегралі $I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$, який зводиться до інтеграла $I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$. Розглянемо кожен з інтегралів I_1 та I_2 окремо.

Інтеграл I_1 зводиться до табличних інтегралів за допомогою виділення повного квадрата у знаменнику підінтегральної функції:

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a}} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(x + \frac{b}{2a}\right)}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x + \frac{b}{2a} = t \\ -\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = r = \pm m^2 \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 + r} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm m^2}.$$

Залежно від знака та числового значення отриманого числа $r = \pm m^2 = -\frac{D}{4a^2}$ інтеграл I_1 зводиться до одного з трьох випадків, які визначаються відповідно знаком дискримінанта $D = b^2 - 4ac$ квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$:

1) якщо $D<0$, то $I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{a\cdot m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}+C$;

2) якщо $D=0$, то $I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{a\cdot t}+C$;

3) якщо $D>0$, то $I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2-m^2}=\frac{1}{2a\cdot m}\ln\left|\frac{t-m}{t+m}\right|+C.$

Приклад 3.17. Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{x^2+2x+9}$.

Розв'язання

Оскільки $x^2+2x+9=x^2+2x+1+8=(x+1)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2$ і $dx=d(x+1)$, то маємо

$$I=\int\frac{dx}{(x+1)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2\sqrt{2}}+C.$$

Приклад 3.18. Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{x^2+10x+25}$.

Розв'язання

$$I=\int\frac{dx}{x^2+2\cdot x\cdot 5+5^2}=\int\frac{d(x+5)}{(x+5)^2}=\left|t=x+5\right|=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=$$

$$=-\frac{1}{x+5}+C.$$

Приклад 3.19. Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{3x^2+9x+4}$.

Розв'язання

Оскільки $3x^2+9x+4=3\left(x^2+3x+\frac{4}{3}\right)=3\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\frac{4}{3}\right)=$

$$=3\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{4}{3}\right)=3\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{11}{12}\right)=3\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}\right)^2\right)$$ і

$dx=d\left(x+\frac{3}{2}\right)$, то маємо

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}\ln\left|\frac{x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}}{x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}}\right|+C=$$

$$=\frac{\sqrt{33}}{33}\ln\left|\frac{x+\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}}{x+\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}}\right|+C.$$

Вказівка 3.5. Навички з розв'язування інтеграла I_1 необхідно буде продемонструвати при виконанні завдання 3.3.б) контрольної роботи 3. При розв'язанні задачі 3.3.б) рекомендуємо звернути увагу на приклади 3.17–3.19.

Інтеграл I_2 зводиться до інтеграла I_1 за допомогою виділення у чисельнику похідної його знаменника:

$$I_2=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)-\frac{Ab}{2a}+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+$$

$$+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{2a}\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot I_1=$$

$$=\frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot I_1.$$

Приклад 3.20. Знайти інтеграл $I=\int\frac{3x+5}{x^2+2x+9}dx.$

Розв'язання

Оскільки $\left(x^2+2x+9\right)'=2x+2$ і $d\left(x^2+2x+9\right)=(2x+2)dx$, то маємо

$$I=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)-6+5}{x^2+2x+9}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+9}-\int\frac{dx}{x^2+2x+9}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d\left(x^2+2x+9\right)}{x^2+2x+9}-\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+9\right|-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2\sqrt{2}}+C=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+9\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2\sqrt{2}}+C.$$

Вказівка 3.6. Навички з розв'язування інтеграла I_2 потрібно буде продемонструвати при виконанні завдання 3.3.в) контрольної роботи 3. Під час розв'язання задачі 3.3.в) рекомендуємо звернути увагу на приклад 3.20.

З інтегруванням дробів четвертого виду $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}$, де $D=p^2-4q<0$ і $n\geq 2$, $n\in N$, можна ознайомитись у рекомендованій літературі [7, с. 111].

Продемонструємо на прикладах інтегрування раціональних дробів, яке відповідно зводиться до інтегрування елементарних дробів.

Приклад 3.21. Знайти інтеграл $I=\int\dfrac{2x-7}{\left(x^2-5x+6\right)(x+1)}dx.$

Розв'язання

Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{2x-7}{\left(x^2-5x+6\right)(x+1)}$ є правильним раціональним дробом, який не є елементарним. Тому спочатку необхідно розкласти цей дріб у суму елементарних дробів. При цьому структуру розкладу визначаємо коренями многочлена його знаменника $Q_3(x)=\left(x^2-5x+6\right)(x+1)=(x-2)(x-3)(x+1)$, який відповідно має три дійсні корені $x_1=2, x_2=3$ та $x_3=-1$, кожен з яких кратний 1. Тоді за формулою (3.10) цей розклад має вигляд $\dfrac{2x-7}{(x-2)(x-3)(x+1)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{x+1}$, де A, B, C – невідомі коефіцієнти, які визначимо за допомогою методу окремих значень аргументу, звівши попередньо праву частину розкладу до спільного знаменника. Тому маємо

$$\frac{2x-7}{(x-2)(x-3)(x+1)}=\frac{A(x-3)(x+1)+B(x-2)(x+1)+C(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x+1)},$$

звідки $2x-7\equiv A(x-3)(x+1)+B(x-2)(x+1)+C(x-2)(x-3)$.

Оскільки отримана рівність є справедливою за всіх значень аргументу, то вона має виконуватись і за будь-яких конкретних значень x цього аргументу. Візьмемо у цій рівності три значення аргументу $x=-1, x=2$ та $x=3$, які є коренями знаменника $Q_3(x)$. У результаті цього дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll|l} \text{при} & x=-1 & -9=12C, \\ \text{при} & x=2 & -3=-3A, \\ \text{при} & x=3 & -1=4B; \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=-\dfrac{1}{4}, \\ C=-\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Отже,

$$I=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{-\frac{1}{4}}{x-3}+\frac{-\frac{3}{4}}{x+1}\right)dx=\int\frac{d(x-2)}{x-2}-\frac{1}{4}\int\frac{d(x-3)}{x-3}-\frac{3}{4}\int\frac{d(x+1)}{x+1}=$$

$$=\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x-3|-\frac{3}{4}\ln|x+1|+C.$$

Приклад 3.22. Знайти інтеграл $I=\int\dfrac{2x^2+3}{(x-1)\left(x^2+1\right)}\,dx.$

Розв'язання

Підінтегральна функція є правильним раціональним дробом, який не є елементарним. Тому спочатку необхідно розкласти цей дріб у суму елементарних дробів. При цьому структуру розкладу визначаємо коренями многочлена його знаменника $Q_3(x)=(x-1)\left(x^2+1\right)$. Тоді за формулою (3.10) цей розклад має вигляд $\dfrac{2x^2+3}{(x-1)\left(x^2+1\right)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$, де A, B, C – невідомі коефіцієнти, які відшукамо за допомогою метода окремих значень аргументу, звівши попередньо праву частину розкладу до спільного знаменника. Тому маємо $\dfrac{2x^2+3}{(x-1)(x^2+1)}=\dfrac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$, звідки $2x^2+3\equiv A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$.

Оскільки остання рівність є справедливою за всіх значень аргументу, то вона має виконуватись і за будь-яких конкретних значень цього аргументу. Візьмемо у цій рівності три значень аргументу $x=0$ та $x=\pm 1$, у результаті чого одержимо систему рівнянь:

$$\begin{array}{l|l} x=1 & 5=2A, \\ x=0 & 3=A-C, \\ x=-1 & 5=2A-2(C-B); \end{array} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{5}{2}, \\ C=A-3, \\ B=C; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{5}{2}, \\ C=-\dfrac{1}{2}, \\ B=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Тоді $I=\int\dfrac{2x^2+3}{(x-1)(x^2+1)}dx=\int\left(\dfrac{\frac{5}{2}}{x-1}+\dfrac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right)dx=\dfrac{5}{2}\int\dfrac{dx}{x-1}-$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+1}dx=\frac{5}{2}\int\frac{d(x-1)}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{5}{2}\ln|x-1|-$$

$$-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Вказівка 3.7. Навички інтегрування правильних раціональних дробів необхідно буде продемонструвати під час виконання завдання 3.4 контрольної роботи 3. Під час розв'язання задачі 3.4 рекомендуємо звернути увагу на приклади 3.15, 3.21 та 3.22.

Приклад 3.23. Знайти інтеграл $I=\int\dfrac{x^4}{x^2-4}dx.$

Розв'язання

Підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом, оскільки степінь його чисельника вищий за степінь знаменника. Тому даний дріб необхідно спочатку розкласти у суму його цілої частини та елементарних дробів. У даному випадку немає потреби виділяти цілу частину за допомогою ділення чисельника $P_4(x)=x^4$ на знаменник $Q_2(x)=x^2-4$ «кутом», а достатньо лише виконати необхідні перетворення у його чисельнику:

$$x^4=x^4-16+16=\left(x^2\right)^2-(4)^2+16=\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)+16.$$

Тоді маємо

$$\frac{x^4}{x^2-4}=\frac{(x^2-4)(x^2+4)+16}{x^2-4}=x^2+4+\frac{16}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=x^2+4+4\cdot\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right).$$

Отже, $I=\int\left(x^2+4+4\cdot\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)\right)dx=\int(x^2+4)dx+4\int\frac{d(x-2)}{x-2}-$

$$-4\int\frac{d(x+2)}{x+2}=\frac{1}{3}x^3+4x+4\ln|x-2|-4\ln|x+2|+C.$$

Зауваження 3.9. Інтегрування тригонометричних та ірраціональних функцій інколи зводиться до інтегрування раціональних дробів, якщо після відповідних підстановок під інтегралом з’явиться дробово-раціональна функція.

3.2.4. Інтегрування тригонометричних функцій

Оскільки тригонометричні функції, включаючи $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ та $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, можна виразити через $\sin\alpha$ та $\cos\alpha$, то раціональні функції від тригонометричних функцій можна розглядати як раціональну функцію $R(\sin x,\cos x)$. Виділимо основні підстановки, які будуть актуальними під час інтегрування таких функцій і визначатимуться зовнішнім виглядом цих функцій.

1.Універсальна тригонометрична підстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ завжди зводить інтеграл $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ до інтегралів від раціональних функцій відносно нової змінної t і тому є універсальною:

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t,\;\; x=2\operatorname{arctg}t, \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},\, \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\; dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int K(t)\,dt,$$

де $K(t)$ – раціональна функція відносно t. Але при цьому її застосування часто призводить до інтегрування раціональних дробів з великими степенями і тому рідко виявляється раціональною.

Зауваження 3.10. Універсальну тригонометричну підстановку рекомендовано застосовувати до інтегралів вигляду $\int\dfrac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$, але за умови, що не буде знайдено раціональнішого способу.

Приклад 3.24. Знайти інтеграл $I=\int\dfrac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x}$.

Розв'язання

Оскільки $\sin x=\dfrac{1}{2}(2\sin x\pm\cos x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x-$ $-(\cos x-\sin x))=\dfrac{1}{2}\left(\sin x+\cos x-(\sin x+\cos x)'\right)$, то маємо

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{2\sin x+\cos x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\sin x+\cos x-\cos x+\sin x}{\sin x+\cos x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C.$$

Приклад 3.25. Знайти інтеграл $I=\int\dfrac{dx}{\sin x+1}$.

Розв'язання

Продемонструємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$I=\int\frac{dx}{\sin x+1}=\left| \begin{array}{l} t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2},\, dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| =\int\frac{\dfrac{2}{1+t^2}dt}{\dfrac{2t}{1+t^2}+1}=\int\frac{2}{t^2+2t+1}dt=$$

$$=2\int\frac{dt}{(t+1)^2}=-\frac{2}{t+1}+C=-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}+C.$$

2. Якщо раціональна функція $R(\sin x,\cos x)$ є непарною відносно $\sin x$ чи $\cos x$ або парною відносно $\sin x$ і $\cos x$ одночасно, то при її інтегруванні раціонально застосовувати відповідні підстановки $\cos x=t$, $\sin x=t$ та $\operatorname{tg} x=t$. Проаналізуємо кожен із цих випадків окремо, навівши відповідні підстановки у табл. 3.4.

Таблиця 3.4

Властивості функції $R(\sin x,\cos x)$	Підстановка
$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, тобто є непарною відносно $\sin x$	$\cos x=t \quad -\sin x\,dx=dt$
$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, тобто є парною відносно $\cos x$	$\sin x=t \quad \cos x\,dx=dt$
$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, тобто є парною відносно $\sin x$ і $\cos x$ одночасно	$\operatorname{tg} x=t \quad \frac{dx}{\cos^2 x}=dt$

Приклад 3.26. Знайти інтеграл $I=\int\frac{\cos x}{4\sin^2 x+1}dx.$

Розв'язання

Оскільки підінтегральна функція непарна відносно $\cos x$, то раціонально застосувати підстановку $\sin x=t$:

$$I=\int\frac{\cos x}{4\sin^2 x+1}dx=\left|\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos x\,dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{4t^2+1}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 2\operatorname{arctg}(2t)+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\sin x)+C.$$

Приклад 3.27. Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}.$

Розв'язання

Оскільки підінтегральна функція є одночасно парною відносно $\sin x$ і $\cos x$, то раціонально застосувати підстановку $\operatorname{tg} x=t$:

$$I=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}+\operatorname{tg}^2 x}=\left|\begin{matrix}\operatorname{tg} x=t\\ \frac{dx}{\cos^2 x}=dt,\ \frac{1}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}^2 x+1\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{2t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{\left(\sqrt{2}t\right)^2+1}==\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}t\right)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x\right)+C.$$

3. Якщо раціональна функція $R(\sin x,\cos x)=\sin^m x\cdot\cos^n x$, де $m\in Z$ і $n\in Z$, то під час її інтегрування аналогічно застосовують підстановки $\cos x=t$, $\sin x=t$, $\operatorname{tg}x=t$. Проаналізуємо кожну з цих підстановок, продемонструвавши їх залежність від чисел m і n у табл. 3.5.

Таблиця 3.5

Властивості функції $\sin^m x\cdot\cos^n x$	Актуальні перетворення	Підстановка
$m=2k-1,\ k\in N$	$\sin^{2k+1}x=\sin x\cdot\sin^{2k}x$ $\sin^{2k}x=\left(1-\cos^2 x\right)^k$	$\cos x=t$, $-\sin x\,dx=dt$
$n=2k-1,\ k\in N$	$\cos^{2k+1}x=\cos x\cdot\cos^{2k}x$ $\cos^{2k}x=\left(1-\sin^2 x\right)^k$	$\sin x=t$, $\cos x\,dx=dt$
$m=2k,\ k\in N$ $n=2l,\ l\in N$	$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$	Після застосування формул пониження степеня потреби у підстановці, як правило, не виникає
$m=2k,\ k\in Z$ $n=2l,\ l\in Z$ хоча б одне серед m і n від'ємне	$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$, $\frac{1}{\sin^2 x}=1+\operatorname{ctg}^2 x$, $\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$	$\operatorname{tg}x=t$, $\frac{dx}{\cos^2 x}=dt$
$m=-(2k-1),\ k\in N$ $n=-(2l-1),\ l\in N$		

Приклад 3.28. Знайти інтеграл $I=\int\sin^2 x\cdot\cos^5 x dx.$

Розв'язання

Оскільки $n=5$, то $\cos^5 x=\left(\cos^2 x\right)^2\cdot\cos x=\left(1-\sin^2 x\right)^2\cdot\cos x$; вводимо підстановку $\sin x=t$, $\cos x\,dx=dt$:

$$I=\int \sin^2 x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)^2\cdot\cos x\,dx=\left|\begin{array}{l}\sin x=t\\ \cos x\,dx=dt\end{array}\right|=\int t^2\cdot\left(1-t^2\right)^2 dt=$$

$$=\int\left(t^6-2t^4+t^2\right)dt=\frac{1}{7}t^7-\frac{2}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3+C=\left|\,t=\sin x\,\right|=\frac{1}{7}\sin^7 x-$$

$$-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$$

Приклад 3.29. Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{\sin^4 x\cdot\cos^2 x}.$

Розв'язання

Оскільки $m=-4$ і $n=-2$, то раціонально застосувати підстановку $\operatorname{tg}x=t$, тобто внести функцію $p(x)=\operatorname{tg}x$ під знак диференціала:

$$I=\int\frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}}=\int\frac{\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^2 d(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}^4 x}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=t\\ \dfrac{dx}{\cos^2 x}=dt\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\left(1+t^2\right)^2 dt}{t^4}=\int\frac{t^4+2t^2+1}{t^4}dt=\int\left(1+2t^{-2}+t^{-4}\right)dt=t-\frac{2}{t}-\frac{1}{3}\frac{1}{t^3}+C=$$

$$=\left|\begin{array}{l}t=\operatorname{tg}x\\ \dfrac{1}{t}=\operatorname{ctg}x\end{array}\right|=-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-2\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x+C.$$

4. Якщо підінтегральна функція $R(\sin x,\cos x)$ має вигляд $\sin\alpha x\cdot\sin\beta x$ або $\sin\alpha x\cdot\cos\beta x$ або $\cos\alpha x\cdot\cos\beta x$, то раціонально застосувати відповідні формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму:

$$\sin\alpha x\cdot\sin\beta x=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\right),$$

$$\sin\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x\right),$$

$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x\right).$$

Приклад 3.30. Знайти інтеграл $I=\int\sin 3x\cos 5x\,dx.$

Розв'язання

Оскільки $\sin 3x\cos 5x=\frac{1}{2}\left(\sin 8x+\sin\left(-2x\right)\right),$ то маємо

$$I=\frac{1}{2}\int\left(\sin 8x+\sin(-2x)\right)dx=\frac{1}{2}\int\left(\sin 8x-\sin 2x\right)dx=\frac{1}{2}\int\sin 8x dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\sin 2x dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos 8x\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C=-\frac{1}{16}\cos 8x+$$

$$+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

5. Якщо підінтегральна функція $R\left(\sin x,\cos x\right)=R_1\left(\operatorname{tg}x\right),$ то раціонально застосувати підстановку $\operatorname{tg}x=t.$ Якщо підінтегральна функція $R\left(\sin x,\cos x\right)=R_2\left(\operatorname{ctg}x\right),$ то раціонально виконати підстановку $\operatorname{ctg}x=t.$

При цьому, якщо $R_1(\operatorname{tg}x)=\operatorname{tg}^n x$ або $R_2\left(\operatorname{ctg}x\right)=\operatorname{ctg}^n x,$ де $n\in N$ і $n\geq 2,$ то під час їх інтегрування інколи достатньо застосувати формули $\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$ або $\operatorname{ctg}^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}-1$ без застосування підстановок.

Приклад 3.31. Знайти інтеграл $I=\int\operatorname{ctg}^3 x\,dx.$

Розв'язання

$$I=\int\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}^2 x\,dx=\int\operatorname{ctg}x\cdot\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=-\int\operatorname{ctg}x\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx-$$

$$-\int\operatorname{ctg}x\,dx=-\int\operatorname{ctg}x\,d\left(\operatorname{ctg}x\right)-\int\frac{d\left(\sin x\right)}{\sin x}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-\ln\left|\sin x\right|+C.$$

Вказівка 3.8. Розглянуті в п. 3.2.4. підстановки для інтегрування тригонометричних функцій можуть бути актуальними під час розв'язання задачі 3.5 контрольної роботи 3.

3.2.5. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

1. Інтеграл вигляду $J_2=\int\dfrac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ при $a\neq 0$ і $D=b^2-4ac\neq 0$ знаходять так само, як інтеграл I_2 в п. 3.2.3, за допомогою

виділення у чисельнику $d\left(ax^2+bx+c\right)$, після чого його зводять до інтеграла $J_1=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Інтеграл J_1 знаходять так само, як інтеграл I_1 в п. 3.2.3, за допомогою виділення повного квадрата під коренем у знаменнику. А після заміни $x+\frac{b}{2a}=t$ інтеграл J_1 зводять до одного із табличних інтегралів: $\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm m^2}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm m^2}\right|+C$ при $a>0$,

$$\int\frac{dt}{\sqrt{m^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{m}+C \text{ при } a<0.$$

Приклад 3.32. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x-3}{\sqrt{4x^2-12x+3}}dx$.

Розв'язання

Оскільки $\left(4x^2-12x+3\right)'=8x-12$, то $x-3=\frac{1}{8}(8x-12)+\frac{3}{2}-3=$ $=\frac{1}{8}(8x-12)-\frac{3}{2}$, то відповідно

$$I=\int\frac{\frac{1}{8}(8x-12)-\frac{3}{2}}{\sqrt{4x^2-12x+3}}dx=\frac{1}{8}\int\frac{d\left(4x^2-12x+3\right)}{\sqrt{4x^2-12x+3}}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-12x+3}}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(4x^2-12x+3\right)}{2\sqrt{4x^2-12x+3}}-\frac{3}{4}\int\frac{d(2x-3)}{\sqrt{(2x-3)^2-6}}=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2-12x+3}-$$

$$-\frac{3}{4}\ln\left|2x-3+\sqrt{4x^2-12x+3}\right|+C.$$

2. В інтегралах вигляду $\int R\left(x,\sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}},\ldots,\sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right)dx$, де R – раціональна функція своїх аргументів, $n_i\in N$ та $m_i\in N$ при $i=\overline{1,k}$, завжди раціональною буде підстановка $\frac{ax+b}{cx+d}=t^\lambda$, де $\lambda=\text{НСК}(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ – найменше спільне кратне чисел $n_1,n_2,\ldots,n_k$.

Приклад 3.33. Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+5}-2\sqrt[3]{x+5}}$.

Розв'язання

Оскільки $n_1=2$, $n_2=3$ і $\text{НСК}(n_1,\ n_2)=\text{НСК}(2,\ 3)=6$, тобто $\lambda=6$, то раціональною буде підстановка $x+5=t^6$, звідки $x=t^6-1$, $dx=6t^5dt$:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+5}-2\sqrt[3]{x+5}}=\left|\begin{array}{l}x+5=t^6\\ x=t^6-1,dx=6t^5dt\end{array}\right|=\int\frac{6t^5dt}{t^3-2t^2}=6\int\frac{t^3}{t-2}dt=$$

$$=6\int\frac{t^3-2^3+8}{t-2}dt=6\int\frac{(t-2)\left(t^2+2t+4\right)+8}{t-2}dt=6\int\left(t^2+2t+4\right)dt+$$

$$+48\int\frac{d(t-2)}{t-2}=6\left(\frac{t^3}{3}+t^2+4t\right)+48\ln|t-2|+C=2t^3+6t^2+24t+$$

$$+48\ln|t-2|+C=\left|\begin{array}{l}t^6=x+5,\quad t^2=\sqrt[3]{x+5}\\ t^3=\sqrt{x+5},t=\sqrt[6]{x+5}\end{array}\right|=2\sqrt{x+5}+6\sqrt[3]{x+5}+$$

$$+24\sqrt[6]{x+5}+48\ln\left|\sqrt[6]{x+5}-2\right|+C.$$

3. Інтеграли вигляду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ можна знаходити за допомогою тригонометричних підстановок, виділивши попередньо з квадратичного тричлена повний квадрат і зробивши заміну $x+\frac{b}{2a}=t.$ Після таких перетворень одержимо один з наступних інтегралів: $\int R\left(t,\sqrt{m^2-t^2}\right)dt$; $\int R\left(t,\sqrt{m^2+t^2}\right)dt$; $\int R\left(t,\sqrt{t^2-m^2}\right)dt$, до яких і застосовують відповідні тригонометричні підстановки: $t=m\cdot\sin u$; $t=m\cdot\operatorname{tg}u$; $t=\frac{m}{\cos u}$, які і приведуть до інтегралів виду $\int R(\sin u,\cos u)du.$

Приклад 3.34. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Розв'язання

$$I=\left|\begin{array}{ll} x=2\sin u, & u=\arcsin\dfrac{x}{2} \\ dx=2\cos u\,du, \sqrt{4-x^2}=2\cos u & \end{array}\right|=\int\frac{4\sin^2 u\cdot 2\cos u}{2\cos u}du=$$

$$=4\int\sin^2 u du=4\cdot\frac{1}{2}\int(1-\cos 2u)du=2\left(u-\frac{1}{2}\sin 2u\right)+C=2u-$$

$$-2\sin u\cdot\cos u+C=\left|\begin{array}{l} u=\arcsin\dfrac{x}{2}, \\ \sin u=\dfrac{x}{2}, \cos u=\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2} \end{array}\right|=$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}-2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}+C=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+C.$$

Вказівка 3.9. Розглянуті в п. 3.2.5 підстановки для інтегрування деяких ірраціональних функцій можуть бути актуальними під час розв'язування задач 3.7 та 3.8 контрольної роботи 3.

3.3. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Визначений інтеграл як границя інтегральної суми. Формула Ньютона–Лейбніца. Властивості визначеного інтеграла. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Інтегрування частинами. Невласні інтеграли. Геометричні застосування визначеного інтеграла.

Література: [2, розд. 7], [4, розд. 7, § 23], [7, мод. 2, пп. 6.1–6.3, 7.1–7.2, 8.1–8.2].

3.3.1. Визначений інтеграл. Формула Ньютона–Лейбніца

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$. Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин точками $a=x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n=b$. Довжину найдовшого відрізка $[x_{i-1}, x_i]$, $i=\overline{1,n}$ позначимо $\lambda=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\Delta x_i$, де $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. На кожному частинному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ візьмемо довільну точку $c_i\in[x_{i-1}, x_i]$ і утворимо суму $S_n=f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+.....+f(c_n)\Delta x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i$.

Суму S_n називають *інтегральною сумою* функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Геометрично S_n є алгебраїчною сумою площ прямокутників, що мають основи $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і висоту $f(c_i)$, де $i = \overline{1,n}$ (рис. 3.3).

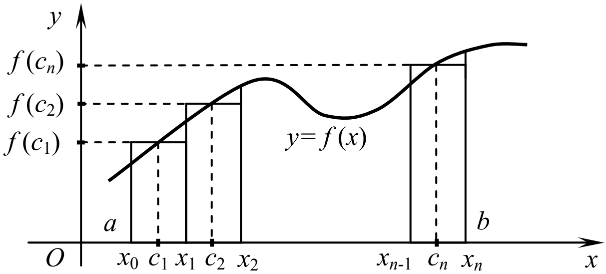

Рис. 3.3

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми S_n, яка не залежить від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частини і вибору точок c_i, то цю границю при $\lambda \to 0$ називають *визначеним інтегралом* функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначають

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

У цьому випадку функцію $f(x)$ називають інтегровною на відрізку $[a;b]$. Числа a і b називають відповідно нижньою і верхньою межами інтегрування, відрізок $[a;b]$ – відрізком інтегрування.

З означення безпосередньо випливає *геометричний зміст* визначеного інтеграла: якщо на відрізку $[a;b]$ неперервна функція $f(x) \geq 0$, то числове значення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої прямими $x = a$, $x = b$, де $a < b$, віссю Ox та графіком функції $f(x)$ (рис.3.3).

Виділимо окремі види функцій, які є інтегровними на відрізку $[a;b]$:

1) функції, які обмежені на відрізку $[a;b]$ і мають не більше ніж скінченне число точок розриву;

2) неперервні на відрізку $[a;b]$ функції;

3) обмежені і монотонні на відрізку $[a;b]$ функції.

Нехай функція $F(x)$ – одна із первісних неперервної на $[a;b]$ функції $f(x)$, тоді справедливою є *формула Ньютона–Лейбніца*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{3.11}$$

Її ще називають основною формулою інтегрального числення.

Приклад 3.35. Обчислити $I = \int_0^1 \frac{dx}{3+x^2}$.

Розв'язання

Врахувавши формулу (3.11), одержимо:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} 0\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{18}.$$

Вказівка 3.10. Формулу Ньютона–Лейбніца застосовують при обчисленні всіх визначених інтегралів та безпосередньо під час виконання задач 3.7–3.9 контрольної роботи 3. При цьому актуальними можуть бути методи безпосереднього інтегрування, заміни змінної та інтегрування частинами.

3.3.2. Властивості визначених інтегралів

1. Якщо функція $f(x)$ на $[a;b]$, де $a<b$, є інтегровною і $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

2. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ на $[a;b]$, де $a<b$, є інтегровними і $f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

3. Якщо функція $f(x)$ на $[a;b]$, де $a<b$, є інтегровною, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$

4. Якщо функція $f(x)$ на $[a;b]$, де $a<b$, є інтегровною і $m_1 \le f(x) \le m_2$ при $x \in [a;b]$, то $m_1(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le m_2(b-a).$

5. Якщо функція $f(x)$ на $[a;b]$, де $a<b$, є неперервною, то існує таке число $c \in [a;b]$, що виконується рівність $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$, число $f(c)$ при цьому називають середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

6. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю: $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

7. Від перестановки меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний: $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

8. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ на $[a;b]$, де $a<b$, є інтегровними, то справедлива властивість лінійності ($A_1 = const, A_2 = const$):

$$\int\limits_a^b \left(A_1 \cdot f(x) \pm A_2 \cdot g(x)\right)dx = A_1\int\limits_a^b f(x)\,dx + A_2\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

9. Якщо функція $f(x)$ на $(\alpha;\beta)$, де $\alpha<\beta$, є інтегровною, то для будь-яких трьох внутрішніх точок $a \in (\alpha;\beta)$, $b \in (\alpha;\beta)$, $c \in (\alpha;\beta)$ і за будь-якого їх розміщення між собою справедлива властивість адитивності: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$

10. Якщо функція $f(x)$ на $[-a;a]$, де $a>0$, є інтегровною і парною, то $\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx.$

11. Якщо функція $f(x)$ на $[-a;a]$, де $a>0$, є інтегровною і непарною, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=0.$

12. Якщо функція $f(x)$ на $[a;b]$, де $a<b$, є інтегровною, то при $x\in[a;b]$ інтеграл із змінною верхньою межею $\Phi(x)=\int\limits_{a}^{x} f(t)dt$ є первісною функції $f(x)$ і відповідно $\Phi'(x)=\left(\int\limits_{a}^{x} f(t)dt\right)'_x=f(x)$ при $x\in[a;b]$.

3.3.3. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, а функція $x=\varphi(t)$ має неперервну похідну $\varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha;\beta]$, причому $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ і для будь-якого $t\in[\alpha;\beta]$ значення $\varphi(t)\in[a;b]$, тоді має місце формула заміни змінної у визначеному інтегралі:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Якщо застосовують заміну $p(x)=t$, де $x\in[a;b]$, то межі нової змінної: $\alpha=p(a)$, $\beta=p(b)$, тобто маємо

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\int\limits_{a}^{b} g(p(x))p'(x)dx=\left|\begin{matrix} p(x)=t, & a\le x\le b \\ p'(x)dx=dt, & p(a)\le t\le p(b)\end{matrix}\right|=\int\limits_{p(a)}^{p(b)} g(t)dt\,.$$

Зауваження 3.11. При застосуванні методу підстановки у визначеному інтегралі немає потреби повертатись до старої змінної, але обов'язково необхідно змінити межі інтегрування стосовно нової змінної.

Приклад 3.36. Обчислити $I=\int\limits_{0}^{\sqrt{8}} x\sqrt{x^2+1}\,dx.$

Розв'язання

$$I=\int\limits_{0}^{\sqrt{8}} \sqrt{x^2+1}\cdot x\,dx=\left|\begin{matrix} x^2+1=t, \quad 0\le x\le\sqrt{8}, \\ 2x\,dx=dt, 1\le x^2+1\le 9, 1\le t\le 9\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{9}\sqrt{t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^9=\frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Bigg|_1^9==\frac{1}{3}(27-1)=\frac{26}{3}.$$

Приклад 3.37. Обчислити $I=\int\limits_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$

Розв'язання

$$I=\int\limits_1^e\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\cdot\frac{dx}{x}=\left|\begin{array}{l}\ln x=t,\quad 1\le x\le e\\ \dfrac{dx}{x}=dt,\ \ln 1\le\ln x\le\ln e,\ 0\le t\le 1\end{array}\right|=\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=\arcsin t\Big|_0^1=\arcsin 1-\arcsin 0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

3.3.4. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції $u=u(x)$ та $v=v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a;b]$, то має місце формула інтегрування частинами

$$\int\limits_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu. \tag{3.12}$$

Умови застосування даного методу та види інтегралів, до яких рекомендовано його застосовувати, зазначено в п. 3.2.2.

Приклад 3.38. Обчислити $I=\int\limits_0^1 x\cdot\operatorname{arctg}x\,dx.$

Розв'язання

Урахувавши таблицю 3.3 та формулу (3.12), маємо

$$I=\left|\begin{array}{l}u=\operatorname{arctg}x,\ du=(\operatorname{arctg}x)'\,dx=\dfrac{dx}{1+x^2}\\ dv=x\,dx,\quad v=\int x\,dx=\dfrac{1}{2}x^2\end{array}\right|=u\cdot v\Big|_0^1-\int\limits_0^1 vdu=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\cdot\operatorname{arctg}x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2\cdot\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}1-0)-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}x\Big|_0^1+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(1-0)+$$

$$+\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\pi-2}{4}=\frac{1}{4}(\pi-2).$$

3.3.5. Невласні інтеграли

Невласні інтеграли є розширенням поняття визначеного інтеграла, коли проміжок інтегрування нескінченний (невласний інтеграл I роду) та підінтегральна функція необмежена на скінченному відрізку інтегрування (невласний інтеграл II роду).

Невласні інтеграли першого роду

Нехай функція $f(x)$ визначена на нескінченному проміжку $x\in[a,\infty)$ та інтегровна на будь-якому скінченному відрізку $x\in[a,A]$, де $a<A<\infty$ (рис. 3.4).

Невласним інтегралом першого роду від функції $f(x)$ називають границю $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$ і позначають

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx. \qquad (3.13)$$

Аналогічно визначають невласні інтеграли на проміжках $x\in(-\infty;b]$ та $x\in(-\infty;\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{B\to-\infty}\int\limits_B^b f(x)dx; \qquad (3.14)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim_{B\to-\infty}\int\limits_B^c f(x)dx+\lim_{A\to\infty}\int\limits_c^A f(x)\,dx,\ \text{де}\ c\in R. \qquad (3.15)$$

Якщо розглянуті границі існують та є скінченними, то відповідні невласні інтеграли називають збіжними. В іншому випадку невласні інтеграли називають розбіжними.

Приклад 3.39. Обчислити невласний інтеграл першого роду або довести його розбіжність: $I=\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x\left(4+\ln^2 x\right)}$.

Розв'язання

За формулою (3.13) маємо:

$$I=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_1^A\frac{dx}{x(4+\ln^2 x)}=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_1^A\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x+2^2}=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\ln x}{2}\right)\Bigg|_1^A=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\ln A}{2}\right)-\operatorname{arctg}0\right)=\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}(+\infty)-\operatorname{arctg}0\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Отже, даний невласний інтеграл першого роду збіжний. Геометрично це означає, що площа необмеженої криволінійної трапеції скінченна і дорівнює $\frac{\pi}{4}$ (рис. 3.5).

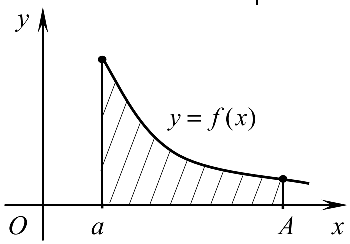

Рис. 3.4

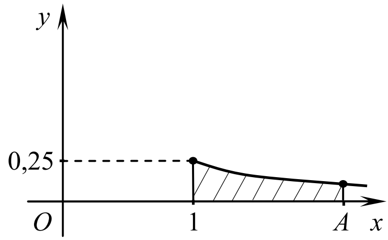

Рис 3.5

Невласні інтеграли другого роду

Точки $x = x_0$, у яких функція $f(x)$ необмежена, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, називають особливими точками функції $f(x)$.

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $x \in [a;b)$ та інтегровна на кожному відрізку $[a;b-\varepsilon]$, де $\varepsilon > 0$ і $b - \varepsilon > a$; при цьому у точці $x = b$ функція $f(x)$ необмежена, тобто $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$ (рис. 3.6).

Невласним інтегралом другого роду від функції $f(x)$ називають границю $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ і позначають $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$ (3.16)

Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $x \in (a;b]$, $x = a$ – особлива точка функції $f(x)$, інтегровна на кожному відрізку $x \in [a+\varepsilon;b]$, де $\varepsilon > 0$ і $a + \varepsilon < b$ (рис. 3.7), то невласним інтегралом другого роду від функції $f(x)$ називають границю $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ і позначають

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (3.17)$$

Якщо $x = c$ – особлива точка функції $f(x)$ і при цьому $c \in (a;b)$ (рис. 3.8), то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta \to 0} \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx. \qquad (3.18)$$

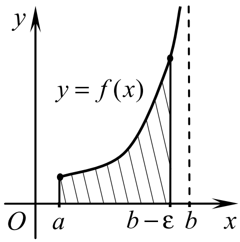

Рис. 3.6

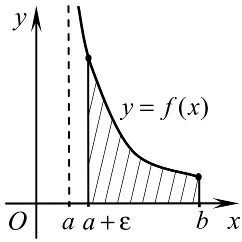

Рис. 3.7

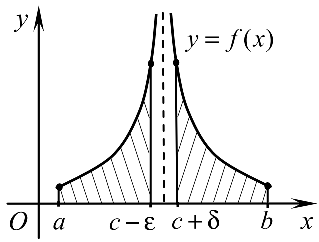

Рис. 3.8

Якщо розглянуті границі існують і є скінченними, то відповідні невласні інтеграли називають збіжними. В іншому випадку невласні інтеграли називають розбіжними.

Приклад 3.40. Обчислити невласний інтеграл $I = \int_0^{2/3} \frac{dx}{(3x-2)^2}$ або довести його розбіжність.

Розв'язання

Маємо невласний інтеграл від необмеженої функції $f(x) = \frac{1}{(3x-2)^2}$. Оскільки $\lim_{x \to \frac{2}{3}} f(x) = \lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{1}{(3x-2)^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$, то $x = \frac{2}{3}$ – особлива точка функції $f(x)$. Тоді за формулою (3.16)

$$I = \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{(3x-2)^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\frac{2}{3}-\varepsilon} (3x-2)^{-2}\,dx = \frac{1}{3}\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\frac{2}{3}-\varepsilon} (3x-2)^{-2}\,d(3x-2) =$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{1}{3x-2}\right)\Bigg|_0^{\frac{2}{3}-\varepsilon} = -\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon \to 0}\left(-\frac{1}{3\varepsilon} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon \to 0}\left(-\infty + \frac{1}{2}\right) = \infty.$$

Отже, даний невласний інтеграл другого роду розбіжний.

Вказівка 3.11. Формули (3.13)–(3.18) будуть актуальними під час розв'язування задачі 3.8 контрольної роботи 3. При цьому рекомендуємо звернути увагу на приклади 3.39 та 3.40.

3.3.6. Обчислення площ плоских фігур

Площа у прямокутних декартових координатах

Якщо плоска фігура обмежена неперервною на відрізку $x \in [a;b]$ кривою $y = f(x)$, де $f(x) \geq 0$ при $x \in [a;b]$, вертикальними прямими $x = a$, $x = b$ та віссю абсцис $y = 0$ (рис. 3.9), то її площу обчислюють за формулою

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{3.19}$$

Якщо функція $y = f(x)$ скінченну кількість раз змінює знак на відрізку $x \in [a;b]$, то площу плоскої фігури (рис. 3.10) обчислюють за формулою $S = \int_a^b |f(x)|\,dx.$

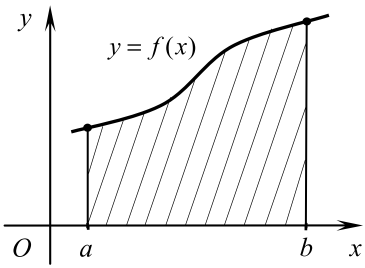

Рис. 3.9

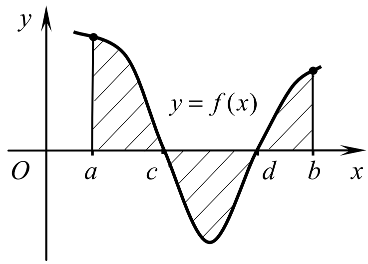

Рис. 3.10

Якщо плоска фігура обмежена прямими $x = a$, $x = b$ і кривими $y = f(x)$ та $y = g(x)$, де $g(x) \leq f(x)$ при $x \in [a;b]$ (рис. 3.11), то її площу обчислюють за формулою

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx. \tag{3.20}$$

Зауваження 3.12. В окремих випадках прямі $x = a$ та $x = b$ можуть вироджуватись у точку перетину кривих $y = f(x)$ та $y = g(x)$ (рис. 3.12). У цьому випадку фігура може задаватися лише кривими $y = f(x)$ та $y = g(x)$ і відповідно величини $x = a$ та $x = b$ шукають як абсциси точок перетину вказаних кривих з рівняння $f(x) = g(x)$.

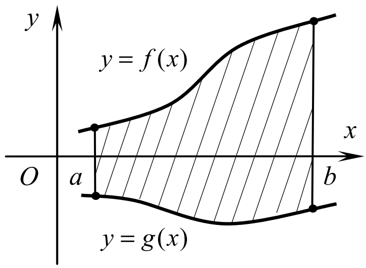

Рис. 3.11

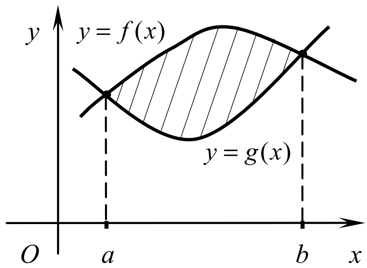

Рис. 3.12

Якщо плоска фігура обмежена прямими $y=c, y=d$ і кривими $x=\varphi(y)$ та $x=\psi(y)$, де $\varphi(y)\le\psi(y)$ при $y\in[c;d]$ (рис. 3.13, 3.14), то її площу обчислюють за формулою

$$S=\int_c^d\left(\psi(y)-\varphi(y)\right)dy. \tag{3.21}$$

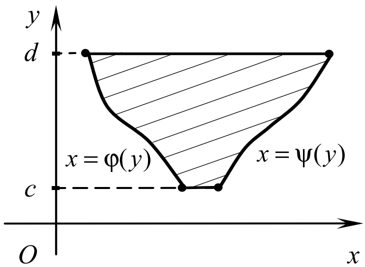

Рис. 3.13

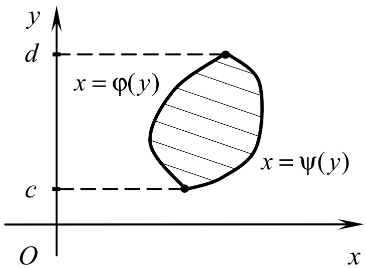

Рис. 3.14

Зауваження 3.13. Якщо хоча б одна з прямих $y=c$ або $y=d$ вироджується в точку (рис. 3.14), то величини $y=c$ або $y=d$ шукають як ординати точок перетину кривих $x=\varphi(y)$ та $x=\psi(y)$ з рівняння $\varphi(y)=\psi(y)$.

Площа плоскої фігури при параметричному заданні контура

Якщо крива $y=f(x)$ задана параметричними рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)\ge 0$ при $t\in[\alpha;\beta]$, то площу криволінійної трапеції, обмеженої цією кривою, прямими $x=a, x=b$ при $a<b$ та віссю абсцис (рис. 3.15), обчислюють за формулою

$$S=\int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)\,dx(t)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)\cdot x'(t)\,dt, \qquad (3.22)$$

де межі α та β визначають із рівнянь $x(\alpha)=a$ та $x(\beta)=b$.

Площа криволінійного сектора у полярних координатах

Площу криволінійного сектора, обмеженого неперервною кривою $\rho=\rho(\varphi)$ та променями $\varphi_1=\alpha$ та $\varphi_2=\beta$ (рис. 3.16), обчислюють за формулою $S=\dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi$.

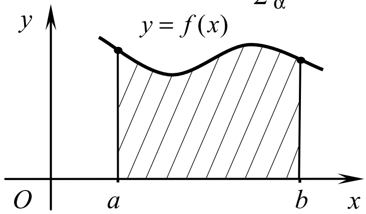

Рис. 3.15

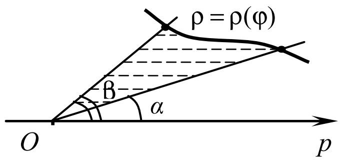

Рис. 3.16

Приклад 3.41. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y=x^2-3$, $y=-x^2+2x+1$.

Розв'язання

Графіком функції $y_1=x^2-3$ є парабола з вершиною у точці $(0;-3)$, гілки якої напрямлені вгору. Графіком функції $y_2=-x^2+2x+1=-(x-1)^2+2$ є парабола з вершиною у точці $(1;2)$, гілки якої напрямлені вниз.

Знайдемо абсциси точок перетину даних парабол з рівняння $y_1=y_2$: $x^2-3=-x^2+2x+1 \Leftrightarrow 2x^2-2x-4=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1, \\ x_2=2. \end{array}\right.$

Оскільки $y_1(-1)=-2$, $y_1(2)=1$, то маємо точки перетину парабол $M_1(-1;-2)$ та $M_2(2;1)$.

Побудуємо схематично графіки парабол $y_1(x)=x^2-3$ та $y_2(x)=-x^2+2x+1$, виділивши їх точки перетину (рис. 3.17).

Тоді площу фігури, обмежену графіками функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$, де $y_1(x) \le y_2(x)$, обчислимо за формулою (3.20):

$$S = \int_a^b \left(y_2(x) - y_1(x)\right)dx = \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + 2x + 1 - \left(x^2 - 3\right)\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(-2x^2 + 2x + 4\right)dx = \left(-2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = -\frac{16}{3} + 4 + 8 - \left(\frac{2}{3} + 1 - 4\right) =$$

$$= -\frac{16}{3} + 12 - \frac{2}{3} + 3 = 9 \text{ (кв. од.).}$$

Приклад 3.42. Знайти площу еліпса $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

Розв'язання

Оскільки еліпс є симетричною фігурою відносно координатних осей, то спочатку обчислимо площу S_1 його четвертої частини, розміщеної в першій чверті (рис. 3.18), після чого результат збільшимо в четверо.

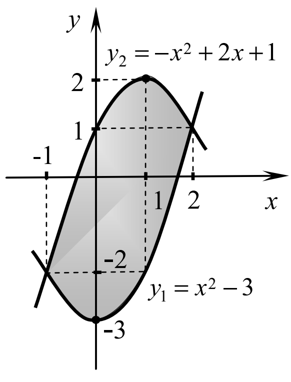

Рис. 3.17

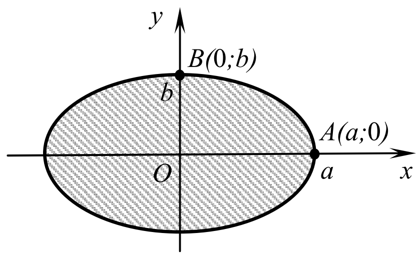

Рис. 3.18

Знайдемо значення параметрів t, які відповідають точкам A і B (див. рис. 3.18).

У точці B: $\begin{cases} x = 0, \\ y = b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot \cos t = 0, \\ b \cdot \sin t = b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = 0, \\ \sin t = 1; \end{cases} \Rightarrow t_B = \frac{\pi}{2}$.

У точці A: $\begin{cases} x = a, \\ y = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot \cos t = a, \\ b \cdot \sin t = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = 1, \\ \sin t = 0; \end{cases} \Rightarrow t_A = 0$.

Межі інтегрування α і β знайдемо з умов

$$\begin{cases} x(\alpha) = 0, \\ x(\beta) = a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot \cos\alpha = 0, \\ a \cdot \cos\beta = a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 0, \\ \cos\beta = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\pi}{2}, \\ \beta = 0. \end{cases}$$

За формулою (3.22) маємо:

$$S_1 = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b \sin t \cdot (a \cos t)' dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b \sin t \cdot (-a \sin t) dt =$$

$$= -ab \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\, dt = -\frac{ab}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1 - \cos 2t) dt = -\frac{ab}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

$$= -\frac{ab}{2} \left(0 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) = \frac{1}{4} \pi ab \text{ (кв. од.).}$$

Тоді площа еліпса $S = 4S_1 = \pi ab$ (кв. од.).

Вказівка 3.12. При розв’язуванні задачі 3.9 контрольної роботи 3 актуальними будуть формули (3.19)–(3.21). При цьому рекомендуємо звернути увагу на приклад 3.41.

3.3.7. Довжина дуги кривої

Якщо плоска крива задана рівнянням $y = f(x)$ при $x \in [a; b]$ і похідна $f'(x)$ є неперервною при $x \in [a; b]$, то довжину l дуги цієї кривої обчислюють за формулою:

$$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(f'(x) \right)^2} dx. \qquad (3.23)$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, де $t \in [t_1; t_2]$ і похідні $x'(t)$, $y'(t)$ є неперервними при $t \in [t_1; t_2]$, то довжину l дуги кривої визначають так:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t) \right)^2 + \left(y'(t) \right)^2} dt.$$

Якщо крива задана у полярних координатах рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, де $\varphi\in[\alpha;\beta]$, то довжину l дуги кривої розраховують за формулою:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

Приклад 3.43. Знайти довжину дуги кривої $y=\frac{1}{2}\ln(\sin 2x)$ при $x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$.

Розв'язання

Знайдемо спочатку $y'(x)=\left(\frac{1}{2}\ln(\sin 2x)\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}=\operatorname{ctg}2x$,

тоді $1+(y'(x))^2=1+\operatorname{ctg}^2 2x=\frac{1}{\sin^2 2x}$. За формулою (3.23) визначимо

$$l=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 2x}}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin 2x}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x\cdot\cos x}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\frac{\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x}}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\left|\begin{array}{ll}\operatorname{tg}x=t, & \frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{3},\\ \frac{dx}{\cos^2 x}=dt, & \frac{1}{\sqrt{3}}\le\operatorname{tg}x\le\sqrt{3},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\le t\le\sqrt{3}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t|\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\left(\ln\sqrt{3}-\ln\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\sqrt{3}+\ln\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln 3.$$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА 1

Задача 1.1. Задано вектори

$\vec{a}=\{k+3;k-2;k\},\vec{b}=\{k+1;k-3;k+2\},\vec{c}=4\vec{a}-\vec{b},\ \vec{d}=3\vec{a}+\vec{b}$,

де k – номер варіанта контрольної роботи. Знайти вектори $\vec{c},\vec{d}$ та перевірити чи є вони колінеарними. Обчислити:

а) $\vec{c}\cdot\vec{d}$; б) $|\vec{c}|$ та $|\vec{d}|$;

в) кут між векторами $\vec{c}$ і $\vec{d}$;

г) $\text{пр}_{\vec d}\,\vec c$; д) $(\vec a - \vec b)\cdot(\vec a + 2\vec b)$;

е) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec c$ та $\vec d$. Перевірити чи утворюють базис трійки векторів $\vec a, \vec b, \vec c$ та $\vec a, \vec b, \vec d$.

Задача 1.2. На площині Oxy задано трикутник, обмежений осями координат та прямою $(k+3)x+(k+1)y-(k^2+1)=0$, де k – номер варіанта контрольної роботи. Обчислити периметр та площу трикутника, довжину висоти, опущеної з вершини прямого кута.

Задача 1.3. У просторі задано точки A_1, A_2, A_3. Виконати завдання:

а) записати параметричні рівняння прямої L, яка проходить через точки A_1 та A_2;

б) скласти рівняння площини α, яка проходить через точки A_1, A_2, A_3;

в) рівняння площини α звести до вигляду у відрізках на осях;

г) знайти точки перетину площини α з осями координат;

д) обчислити об'єм піраміди, яка обмежена координатними осями та площиною α;

е) обчислити відстань від початку координат до площини α;

є) визначити кути, під якими площина α перетинає відповідно координатну площину Oxy та вісь Oy.

1.3.1. $A_1(3;1;-2),\ A_2(1;4;1),\ A_3(-1;-1;5)$.

1.3.2. $A_1(5;2;1),\ A_2(1;2;-1),\ A_3(-2;0;5)$.

1.3.3. $A_1(-1;3;2),\ A_2(0;2;4),\ A_3(4;-1;1)$.

1.3.4. $A_1(3;1;-1),\ A_2(-2;3;1),\ A_3(-1;-2;4)$.

1.3.5. $A_1(3;0;1),\ A_2(-1;3;-1),\ A_3(1;0;7)$.

1.3.6. $A_1(-1;3;2),\ A_2(1;2;-1),\ A_3(-2;0;5)$.

1.3.7. $A_1(4;0;3),\ A_2(1;-1;5),\ A_3(0;3;2)$.

1.3.8. $A_1(3;-1;2),\ A_2(1;-1;3),\ A_3(-1;1;-2)$.

1.3.9. $A_1(1;-2;1),\ A_2(-2;1;0),\ A_3(-4;2;-3)$.

1.3.10. $A_1(3;0;3),\ A_2(0;2;4),\ A_3(-1;-1;5)$.

1.3.11. $A_1(2;2;-2),\ A_2(1;1;4),\ A_3(-3;5;0)$.

1.3.12. $A_1(2;0;7)$, $A_2(1;3;1)$, $A_3(4;8;-1)$.

1.3.13. $A_1(5;-1;2)$, $A_2(-1;3;1)$, $A_3(-2;-2;7)$.

1.3.14. $A_1(3;0;5)$, $A_2(1;3;3)$, $A_3(5;4;-1)$.

1.3.15. $A_1(2;5;-1)$, $A_2(3;-1;3)$, $A_3(-2;4;3)$.

1.3.16. $A_1(3;-1;3)$, $A_2(1;2;1)$, $A_3(-3;5;0)$.

1.3.17. $A_1(1;-2;2)$, $A_2(-2;-1;-3)$, $A_3(-3;2;1)$.

1.3.18. $A_1(5;1;-1)$, $A_2(2;3;1)$, $A_3(-2;-2;3)$.

1.3.19. $A_1(2;3;-1)$, $A_2(1;-1;1)$, $A_3(-1;2;3)$.

1.3.20. $A_1(5;3;-1)$, $A_2(2;-1;1)$, $A_3(-1;1;4)$.

1.3.21. $A_1(3;4;-3)$, $A_2(1;-3;4)$, $A_3(-2;5;-1)$.

1.3.22. $A_1(5;2;-1)$, $A_2(-1;2;2)$, $A_3(-3;1;7)$.

1.3.23. $A_1(3;0;5)$, $A_2(-1;1;2)$, $A_3(-2;5;-1)$.

1.3.24. $A_1(2;-3;4)$, $A_2(-2;1;2)$, $A_3(-4;5;-2)$.

1.3.25. $A_1(6;0;3)$, $A_2(2;3;1)$, $A_3(-1;4;-3)$.

1.3.26. $A_1(4;-4;5)$, $A_2(1;1;2)$, $A_3(-1;3;-1)$.

1.3.27. $A_1(5;-3;3)$, $A_2(2;1;1)$, $A_3(1;5;-4)$.

1.3.28. $A_1(3;-2;4)$, $A_2(1;2;2)$, $A_3(-2;6;-3)$.

1.3.29. $A_1(7;-3;5)$, $A_2(3;1;1)$, $A_3(1;4;-3)$.

1.3.30. $A_1(1;-5;5)$, $A_2(0;1;2)$, $A_3(-2;5;-1)$.

Задача 1.4. Задано рівняння кривої другого порядку. Виконати наступні завдання:

а) звести рівняння до канонічного виду та визначити вид кривої;

б) у випадку еліпса знайти величину півосей, координати фокусів, ексцентриситет та скласти рівняння директрис;

в) у випадку гіперболи визначити величину півосей, координати фокусів, ексцентриситет та скласти рівняння директрис та асимтот;

г) у випадку параболи знайти значення параметра, координати фокуса та скласти рівняння директрис;

д) побудувати графік кривої, показавши на ньому за наявності відповідно фокуси, директриси та асимптоти.

1.4.1. $4x^2+9y^2-36=0$. **1.4.2.** $4x^2-9y^2+36=0$.

1.4.3. $9x^2+4y^2-36=0$. **1.4.4.** $16x^2-25y^2-400=0$.

1.4.5. $x^2+4y^2-4=0$.

1.4.6. $-16x^2+25y^2-400=0$.

1.4.7. $x^2+10y=0$.

1.4.8. $x^2+9y^2-9=0$.

1.4.9. $25x^2-36y^2+900=0$.

1.4.10. $16x^2+25y^2-400=0$.

1.4.11. $9x^2-16y^2+144=0$.

1.4.12. $25x^2+16y^2-400=0$.

1.4.13. $x^2-4y^2-4=0$.

1.4.14. $x^2-4y^2+4=0$.

1.4.15. $y^2-4x=0$.

1.4.16. $4x^2+25y^2-100=0$.

1.4.17. $16x^2-36y^2-576=0$.

1.4.18. $5x^2+4y^2-20=0$.

1.4.19. $16x^2-9y^2+144=0$.

1.4.20. $x^2-20y=0$.

1.4.21. $36x^2+16y^2-576=0$.

1.4.22. $9x^2-4y^2-36=0$.

1.4.23. $25x^2+4y^2-100=0$.

1.4.24. $25x^2-36y^2-900=0$.

1.4.25. $x^2-12y=0$.

1.4.26. $9x^2+16y^2-144=0$.

1.4.27. $9x^2+36y^2-324=0$.

1.4.28. $36x^2+25y^2-900=0$.

1.4.29. $5x^2-4y^2+20=0$.

1.4.30. $y^2+8x=0$.

Задача 1.5. Розв'язати матричне рівняння.

1.5.1. $X\cdot A=B$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -3 & 9 & 3\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

1.5.2. $X\cdot A=B$, де $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 6\\ 5 & 4 & 7\\ 6 & 5 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

1.5.3. $A\cdot X=B$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 8 & 5\\ 2 & 7 & 6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$.

1.5.4. $A\cdot X=B$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & -1\\ 2 & 7\end{pmatrix}$.

1.5.5. $X\cdot A=B$, де $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 7\\ 6 & 5 & 9\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

1.5.6. $X\cdot A=B$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

1.5.7. $A\cdot X=B$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -7 & -3\\ 3 & 3 & -4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & -1\\ 2 & 7\end{pmatrix}$.

1.5.8. $A\cdot X=B$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 4 & 7 & -11\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 4 & 7\end{pmatrix}$.

1.5.9. $X\cdot A=B$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 4 & -8 & 4\\ 5 & -5 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ -3 & 5 & -4\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1.5.10. $X\cdot A=B$, де $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 5 & 8 & 1\\ -1 & -7 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -5\end{pmatrix}$.

1.5.11. $A\cdot X=B$, де $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ -5 & 6 & 1\\ -3 & 3 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 4 & 1 & 5\end{pmatrix}$.

1.5.12. $A\cdot X=B$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 3 & -3\end{pmatrix}$.

1.5.13. $X\cdot A=B$, де $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

1.5.14. $X\cdot A=B$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 4 & 7 & 3\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

1.5.15. $A\cdot X=B$, де $A=\begin{pmatrix}-1 & 7 & 0\\ 1 & 9 & 3\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$.

1.5.16. $A\cdot X=B$, де $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 4 & -4 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 3 & -6 & 3\\ 1 & 5 & 0\end{pmatrix}$.

1.5.17. $A\cdot X=B$, де $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 0 & -5 & -3\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 10 & 2 & 7\\ 5 & 7 & 2\end{pmatrix}$.

1.5.18. $A\cdot X=B$, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & -1\\ 2 & 5\end{pmatrix}$.

1.5.19. $X \cdot A = B$, де $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

1.5.20. $X \cdot A = B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.5.21. $A \cdot X = B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.5.22. $A \cdot X = B$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -5 & 6 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1.5.23. $X \cdot A = B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 \\ 2 & -7 & -9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.5.24. $X \cdot A = B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.5.25. $A \cdot X = B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

1.5.26. $A \cdot X = B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1.5.27. $X \cdot A = B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.5.28. $X \cdot A = B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1.5.29. $A \cdot X = B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -13 & 4 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1.5.30. $A \cdot X = B$, де $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 1.6. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь
$$\begin{cases}(k-15)x+(k-10)y+(14-k)z=14,\\ (k-17)x+(k-12)y+(k-8)z=2k-10,\\ (k-16)x+(k-11)y+5z=k+4,\end{cases}$$
де k – номер варіанта контрольної роботи.

Задача 1.7. Задану систему дослідити на сумісність за теоремою Кронекера – Капеллі та у разі сумісності знайти її розв'язки.

1.7.1. $\begin{cases}x+3y+2z=-1,\\ 3x-2y+z=4,\\ 5x+4y+5z=2;\end{cases}$ **1.7.2.** $\begin{cases}x+3y+2z=-1,\\ 3x-2y+z=4,\\ 5x+4y+5z=2;\end{cases}$

1.7.3. $\begin{cases}2x+3y-z=10,\\ x+5y+2z=0,\\ 3x+8y+z=10;\end{cases}$ **1.7.4.** $\begin{cases}2x-2y+3z=14,\\ x+y+2z=2,\\ 3x-y+5z=16;\end{cases}$

1.7.5. $\begin{cases}x-y-z=2,\\ 3x+y-2z=3,\\ 2x+2y-z=1;\end{cases}$ **1.7.6.** $\begin{cases}x+2y-z=-1,\\ 2x-2y+z=7,\\ x-4y+2z=8;\end{cases}$

1.7.7. $\begin{cases}x+2y+2z=-1,\\ 3x+3y-2z=-10,\\ 2x+y-4z=-9;\end{cases}$ **1.7.8.** $\begin{cases}3x+2y+z=1,\\ 2x+y-2z=-5,\\ x+y+3z=6;\end{cases}$

1.7.9. $\begin{cases}3x-y+2z=-10,\\ 4x+2y-z=-3,\\ x+3y-3z=7;\end{cases}$ **1.7.10.** $\begin{cases}2x-3y+2z=-3,\\ x+2y-z=4,\\ -x+5y-3z=7;\end{cases}$

1.7.11. $\begin{cases}5x-7y-3z=-11,\\ 2x-3y+2z=-1,\\ x-y-7z=-9;\end{cases}$ **1.7.12.** $\begin{cases}5x-2y+2z=-1,\\ 4x+2y-z=-4,\\ x-4y+3z=3;\end{cases}$

1.7.13. $\begin{cases}4x-3y-4z=-5,\\ x+2y+3z=-1,\\ 3x-5y-7z=-4;\end{cases}$ **1.7.14.** $\begin{cases}x+2y-3z=3,\\ x-2y+4z=-6,\\ 3x+2y-2z=0;\end{cases}$

1.7.15. $\begin{cases}2x+4y+z=-8,\\ 5x+7y-z=-18,\\ x-y-3z=-2;\end{cases}$ **1.7.16.** $\begin{cases}4x-2y-z=3,\\ 3x+2y+2z=-13,\\ x-4y-3z=16;\end{cases}$

1.7.17. $\begin{cases} x+4y+z=3, \\ 3x-2y-3z=-1, \\ 4x+2y-2z=-2; \end{cases}$

1.7.18. $\begin{cases} 6x-4y-z=-5, \\ 5x-3y+2z=5, \\ x-y-3z=-10; \end{cases}$

1.7.19. $\begin{cases} 3x-2y-z=0, \\ x+y-2z=-5, \\ 4x-y-3z=-5; \end{cases}$

1.7.20. $\begin{cases} 2x+3y+z=-1, \\ x+2y-3z=-3, \\ 4x+7y-5z=-7; \end{cases}$

1.7.21. $\begin{cases} 2x-y+z=-4, \\ x-3y+2z=0, \\ 3x-4y+3z=-4; \end{cases}$

1.7.22. $\begin{cases} 4x+y-3z=2, \\ 5x+2y-z=3, \\ x+y+2z=1; \end{cases}$

1.7.23. $\begin{cases} 3x+2y-z=-1, \\ x+2y-4z=-0, \\ 4x+4y-5z=-1; \end{cases}$

1.7.24. $\begin{cases} 2x-y-2z=1, \\ 3x+2y+3z=3, \\ x+3y+5z=2; \end{cases}$

1.7.25. $\begin{cases} 5x+4y+z=-4, \\ 2x+y-2z=5, \\ x+2y+5z=-14; \end{cases}$

1.7.26. $\begin{cases} 4x+3y+2z=5, \\ 3x-y+3z=-3, \\ x+4y-z=8; \end{cases}$

1.7.27. $\begin{cases} 2x+3y+z=1, \\ 3x+3y-2z=-5, \\ x+0\cdot y-3z=-6; \end{cases}$

1.7.28. $\begin{cases} 2x-3y-2z=1, \\ 5x+y-z=-7, \\ x+7y+3z=-9; \end{cases}$

1.7.29. $\begin{cases} 4x+3y-2z=-5, \\ 3x+2y+z=2, \\ x+y-3z=-7; \end{cases}$

1.7.30. $\begin{cases} x+4y+3z=0, \\ 2x+2y+z=-2, \\ x-2y-2z=-2. \end{cases}$

Задача 1.8. Розв'язати задачі на системи лінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими та параметрами.

1.8.1. Визначити, за яких значень параметра p система рівнянь має безліч розв'язків $\begin{cases} 2x+(p+5)y=8, \\ (p+3)x+4y=5-3p. \end{cases}$

1.8.2. Визначити, за яких значень параметра m система рівнянь несумісна $\begin{cases} mx+y=m, \\ 2mx+my=4. \end{cases}$

1.8.3. Визначити, за яких значень параметра p система рівнянь має безліч розв'язків $\begin{cases} (p+1)x+8y=4p, \\ px+(p+3)y=3p-1. \end{cases}$

1.8.4. Визначити, за яких значень параметра m система рівнянь несумісна $\begin{cases}(m-2)x+6y=15,\\ 3x+(2m-4)y=15.\end{cases}$

1.8.5. Визначити, за яких значень параметра p система рівнянь має безліч розв'язків $\begin{cases}px+y=p,\\ 2px+py=4.\end{cases}$

1.8.6. Визначити, за яких значень параметра m система рівнянь несумісна $\begin{cases}(3m-1)x-my=1,\\ 3x+2my=1.\end{cases}$

1.8.7. Визначити, за яких значень параметра p система рівнянь має безліч розв'язків $\begin{cases}px+y=p^2,\\ x+py=1\ .\end{cases}$

1.8.8. Визначити, за яких значень параметра m система рівнянь несумісна $\begin{cases}2x+my=5,\\ 4x+3y=12.\end{cases}$

1.8.9. Визначити, за яких значень параметра p система рівнянь має безліч розв'язків $\begin{cases}(p+4)x+3y=p+1,\\ px+(p-1)y=p-1.\end{cases}$

1.8.10. Визначити при яких значеннях параметра m система рівнянь несумісна $\begin{cases}2x+(9m^2-2)y=3m,\\ x+y=1.\end{cases}$

1.8.11. Визначити, за яких значень параметра m система рівнянь має безліч розв'язків $\begin{cases}mx+y=2,\\ x+y=2m.\end{cases}$ Знайти ці розв'язки.

1.8.12. Визначити, за яких значень параметра a система рівнянь має єдиний розв'язок $\begin{cases}(a+3)x+4y=5-3a,\\ 2x+(5+a)y=8.\end{cases}$ Знайти цей розв'язок.

1.8.13. Визначити, за яких значень параметра a система рівнянь має єдиний розв'язок $\begin{cases}2ax+2y=2a,\\ 2ax+ay=4.\end{cases}$ Знайти цей розв'язок.

1.8.14. Визначити, за яких значень параметра a система рівнянь має єдиний розв'язок $\begin{cases} 3x+(a-1)y=12, \\ (a-1)x+12y=24. \end{cases}$ Знайти цей розв'язок.

1.8.15. Визначити, за яких значень параметра b система рівнянь має єдиний розв'язок $\begin{cases} (b-1)x+3y=b, \\ x+(b+1)y=2. \end{cases}$ Знайти цей розв'язок.

1.8.16. Визначити, за яких значень параметра a система рівнянь $\begin{cases} 3x+ay=3, \\ 2x-4y=1 \end{cases}$ має розв'язок, який задовольняє умови $x<0$ і $y<0$.

1.8.17. Визначити, за яких значень параметра a система рівнянь $\begin{cases} 3x-y=1-a, \\ x+y=2a+1 \end{cases}$ має розв'язок, який задовольняє умови $x\geq 1$ і $y\leq 4$.

1.8.18. Визначити, за яких значень параметра a система рівнянь має єдиний розв'язок $\begin{cases} x+ay=3, \\ ax+4y=6. \end{cases}$ Знайти цей розв'язок.

1.8.19. Визначити, за яких значень параметра b система рівнянь має єдиний розв'язок $\begin{cases} (b-1)x+2by=-2, \\ 2bx+(b-1)y=b-1. \end{cases}$ Знайти цей розв'язок.

1.8.20. Визначити, за яких значень параметра b система рівнянь має єдиний розв'язок $\begin{cases} (2b-3)x-by=3b-2, \\ 5x-(2b+3)y=5. \end{cases}$ Знайти цей розв'язок.

1.8.21. Визначити, за яких значень a і b система рівнянь несумісна $\begin{cases} 5x-(a+1)y=3b, \\ x-2y=3. \end{cases}$

1.8.22. Визначити, за яких значень a і b система рівнянь невизначена $\begin{cases} ax+(b-1)y=2, \\ 3x+10y=-1. \end{cases}$

1.8.23. Визначити, за яких значень a і b система рівнянь $\begin{cases} (a+1)^2x-(b+1)y=-a, \\ (b-1)x+(5-2b)y=a+4 \end{cases}$ має єдиний розв'язок $(1;1)$.

1.8.24. Визначити, за яких значень параметра a система рівнянь невизначена $\begin{cases} ax+y=a, \\ 2ax+ay=4. \end{cases}$

1.8.25. Визначити, за яких значень параметра b система рівнянь невизначена $\begin{cases} (b-2)x+6y=15, \\ 3x+(2b-4)y=15. \end{cases}$

1.8.26. Визначити, за яких значень параметра c система рівнянь невизначена $\begin{cases} (3c-1)x-cy=1, \\ 3x+2cy=1. \end{cases}$

1.8.27. Визначити, за яких значень параметра c система рівнянь невизначена $\begin{cases} 2x+cy=5, \\ 4x+3y=12. \end{cases}$

1.8.28. Визначити, за яких значень параметра c система рівнянь має безліч розв'язків $\begin{cases} 2x+(9c^2-2)y=3c, \\ x+y=1. \end{cases}$

1.8.29. Визначити, за яких значень параметра a система рівнянь має єдиний розв'язок $\begin{cases} x+y=2a, \\ ax+y=2. \end{cases}$ Знайти цей розв'язок.

1.8.30. Визначити, за яких значень параметра a система рівнянь має єдиний розв'язок $\begin{cases} x+2y=a, \\ 2x-ay=4. \end{cases}$ Знайти цей розв'язок.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА 2

Задача 2.1. Обчислити границі функцій.

2.1.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{3x^3-x^2+3}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-3x-2}{2x^2-10x+12}$.

2.1.2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+x^5}{x^3-2x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{3x^2-24x+21}$.

2.1.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3x+x^2-x^3}{x^5+x^3-x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^3-9x^2+20x}$.

2.1.4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2-x+2}{2x^2+3x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-4x-30}$.

2.1.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{5x^3+2x^2+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+2x^2+x}{2x^2-4x-6}$.

2.1.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3x+5x^2-x^3}{x^4+2x^3+x+\pi}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{2x^2-26x+44}$.

2.1.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+3x^2-2x+1}{2+x+x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^3-7x^2+12x}$.

2.1.8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x-4x^4+x^6}{x^3+2x^2+5x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^3-\pi^2x}{x^2-(2+\pi)x+2\pi}$.

2.1.9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+2x+3x^2+x^3}{4-x^4+3x^3+x}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-6x^2+5x}{3x^2-12x+9}$.

2.1.10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-x+x^2-x^3}{2x^2+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-9x+4}{4x^2-1}$.

2.1.11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3x+x^2+x^5}{3x^3+x^2-x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{9x-x^3}{2x^2-16x+30}$.

2.1.12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-3x+x^2+x^7}{3x^2+5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+6x+3}{2x^2-16x-18}$.

2.1.13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-x^2+x^3-x^5}{4x^3+2x^2+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{x-9x^3}{9x^2-28x+27}$.

2.1.14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-x+2x^2-x^3}{x^4+3x^3-5x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^3+8x^2+8x}{2x^2-8x-24}$.

2.1.15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-5x^2+3x^3}{4x^4-5x^3+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2+4x+1}{5+9x-2x^2}$.

2.1.16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3x+5x^2-x^3}{2+3x^2+5x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{16x-x^3}{2x^2-14x+24}$.

2.1.17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi+3x+x^3-5x^4}{\pi+3x-x^3+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+4x+2}{2x^3-18x^2-20x}$.

2.1.18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-3x^3+2x^2+7}{3x^4+2x^2-x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+4x+4}{2x^3-16x^2-40x}$.

2.1.19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x+x^3-x^4}{1-2x^2+x^3+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{3x^3+30x^2+75x}{100+10x-2x^2}$.

2.1.20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{21+3x+x^4}{5x^4-3x^3+x-21}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^3-10x^2+3x}{3x^2-16x+5}$.

2.1.21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+x^5-x^3+11}{6x^4-3x^3+11x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{x-16x^3}{4x^2-33x+8}$.

2.1.22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-x^2+5x^3+x^4}{5x^3-3x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{9x^3+6x^2+x}{1-9x^2}$.

2.1.23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x^2-3x^3+x^4}{1-2x+x^3-2x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-5x^2+4x}{12-14x+2x^2}$.

2.1.24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-x+x^3+5x^4}{5+x^2+3x^3-x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-24x-26}{x^3-5x^2-6x}$.

2.1.25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-3x+2}{4x^3-3x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2-20x-48}{x^3+3x^2+2x}$.

2.1.26. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-x^2+x^5-x^7}{3+x+x^3-x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^3+14x^2+40x}{2x^2-6x-56}$.

2.1.27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+\pi}{1+5x-x^2+2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-14x+33}{2x^2+8x-42}$.

2.1.28. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+3x^3-x+1}{2x^3-x^2+7}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-19x+6}$.

2.1.29. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7+x^2-x^4+3x^5}{\pi-x+x^3+x^7}$; б) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-19x-10}{14x^2+9x+1}$.

2.1.30. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x^3+x-1}{x^4+x^2-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+9x^2+18x}{2x^2+7x+3}$.

Задача 2.2. Обчислити границі функцій, застосовуючи першу та другу важливі границі або наслідки з них.

2.2.1. а) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\,\mathrm{tg}\,\pi x$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\ln(5x-19)}{x^2-5x+4}$.

2.2.2. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 5x}{3x\cdot\mathrm{tg}3x}$; б) $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{1}{x^2-1}}$.

2.2.3. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-\cos 2x}{\mathrm{tg}^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to3}(2x-5)^{\frac{3}{x^2-9}}$.

2.2.4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x+\arcsin 5x}{\operatorname{tg}2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}(2x-13)^{\frac{1}{x-7}}$.

2.2.5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 6x}{\sin 3x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{\arcsin 5x}$.

2.2.6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 2x}{\operatorname{arctg}4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\ln(x-6)}{x-7}$.

2.2.7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{x^2\cdot\operatorname{tg}4x}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x+5}{2x+8}\right)^{\frac{4}{x+3}}$.

2.2.8. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\arcsin(x-5)}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\left(\dfrac{x+5}{2x+9}\right)^{\frac{3}{x+4}}$.

2.2.9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 5x-\operatorname{tg}^2 x}{\arcsin x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{x+2}$.

2.2.10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\pi x+\operatorname{tg}2x}{\operatorname{arctg}5x+\arcsin\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{\pi}{x^2-9}}$.

2.2.11. а) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 7x}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi^{2x}-1}{\pi x}$.

2.2.11. а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(3x-5)}{x^2-4}$.

2.2.13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 2x}{\operatorname{tg}x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-2}{2-x}\right)^{\frac{\pi}{x^2-1}}$.

2.2.14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 3x-\arcsin^2 2x}{\pi x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x+3}$.

2.2.15. а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(2x-\pi)\operatorname{tg}x$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+3}\right)^{x-1}$.

2.2.16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\operatorname{arctg}\pi x}{2\operatorname{tg}2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-3^x}{\arcsin\pi x}$.

2.2.17. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x+2}{x+4}\right)^{\frac{2}{x^2-1}}$.

2.2.18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x-\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}(3x+7)^{\frac{3}{x^2-4}}$.

2.2.19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{x\cdot\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{1}{x^2-9}}$.

2.2.20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 5x}{\pi x\cdot\arcsin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(4x-3)}{x^2-1}$.

2.2.21. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\operatorname{tg}3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(3x-8)}{x-3}$.

2.2.22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin 9x}{\operatorname{arctg}\pi x+\arcsin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-1)}{x^2-3x+2}$.

2.2.23. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}3x}{\arcsin^3\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}(3x+4)^{\frac{2}{x+1}}$.

2.2.24. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x-\pi}{\operatorname{tg}5x}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}(4x+13)^{\frac{\pi}{x+3}}$.

2.2.25. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\ln(x-4)}{x-5}$.

2.2.26. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\operatorname{arctg}5x}{5\operatorname{tg}\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\pi x}-1}{5x}$.

2.2.27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}x\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2^{2x-1}-1}{2x^2-3x+1}$.

2.2.28. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos 4x}{\operatorname{tg}^2 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x+2}{x+4}\right)^{\frac{5}{x^2-1}}$.

2.2.29. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-5^x}{\operatorname{arctg}\pi x}$.

2.2.30. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 5x}{\arcsin 2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-5^x}{2\operatorname{tg}3x}$.

Задача 2.3. Обчислити границю функції, застосовуючи еквівалентності.

2.3.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\arcsin 2x}{\operatorname{tg} 3x+\operatorname{arctg} x}$.

2.3.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+\operatorname{arctg} 2x}{3x^3+5\operatorname{arctg} 5x}$.

2.3.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\operatorname{arctg} 3x-\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{tg}^2 5x}$.

2.3.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(\operatorname{tg} 5x-\sin 2x)}{\ln(1+\operatorname{arctg} x)}$.

2.3.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2x-\operatorname{arctg} x)}{\arcsin^2 7x}$.

2.3.6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin^2(x-3)}{x^2-4x+3}$.

2.3.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2\sin x}{\arcsin^2 3x}$.

2.3.8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\pi^{x-2}-1}{x^2-3x+2}$.

2.3.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x^3+\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} x^3+\sin x^2}$.

2.3.10. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\arcsin(x-5)}$.

2.3.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)+\ln(1+x)}{\operatorname{tg}^2 x+\sin^2 3x}$.

2.3.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\ln(1+\operatorname{arctg} x)}$.

2.3.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-5x}{\operatorname{arctg} 3x+\arcsin^2 3x}$.

2.3.14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{2\operatorname{arctg}(x-2)}$.

2.3.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\operatorname{arctg} ex+\arcsin \pi x}$.

2.3.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x^2}-1}$.

2.3.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)+\ln(1+5x)}{\operatorname{arctg}^2 3x}$.

2.3.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3\operatorname{arctg} 2x}{\ln^2(1+\operatorname{arctg} 3x)}$.

2.3.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x+5}{\operatorname{arctg} 2x+\arcsin^2 3x}$.

2.3.20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\pi^{x-2}-1}{\arcsin^2(x-2)}$.

2.3.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 3x)+\sin^2 3x}{(1+\sin x)^2}$.

2.3.22. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{arctg}^2(x-2)}{x+\ln^2(x-1)-2}$.

2.3.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x}-2^{-x}}{\sin \pi^2 x+\sin \pi x}$.

2.3.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x+\arcsin x}{\ln^2(1+\arcsin x)}$.

2.3.25. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln(x-3)+3(x-4)^2}{\arcsin^3(2x-8)}$.

2.3.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{x}-3^{x}+5x^{3}}{\arcsin^2 3x}$.

2.3.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(\sin 3x-\sin x)}{\sin^2(\operatorname{arctg} 2x)}$. **2.3.28.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^{\pi x}-1)}{\sin^2 x+\sin \pi x}$.

2.3.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin 2x+\sin x}{(e^{x^2}-1)\ln(1+\operatorname{arctg} x)}$. **2.3.30.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-\arcsin^3 2x}{\sin^3 \pi x-\sin x^2}$.

Задача 2.4. Дослідити на неперервність функцію $y=f(x)$.

2.4.1. $f(x)=3^{\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x-1}}$. **2.4.2.** $f(x)=5^{\frac{1}{x-2}+\frac{\pi}{x+2}}$.

2.4.3. $f(x)=3^{\frac{1}{x-1}}+2^{\frac{1}{x-3}}$. **2.4.4.** $f(x)=5^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x-2}}$.

2.4.5. $f(x)=3^{\frac{1}{x-1}}+\dfrac{1}{x}$. **2.4.6.** $f(x)=7^{\frac{1}{x}}+\dfrac{5}{x-3}$.

2.4.7. $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}+\dfrac{3}{x+2}$. **2.4.8.** $f(x)=2^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x-5}+1$.

2.4.9. $f(x)=3^{\frac{1}{x^2-3}}-2x$. **2.4.10.** $f(x)=2^{\frac{1}{x+1}}+5^{\frac{3}{x-1}}$.

2.4.11. $f(x)=\dfrac{2+\frac{1}{x}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$. **2.4.12.** $f(x)=\dfrac{3-\frac{2}{x}}{3^{\frac{1}{x}}+2}$.

2.4.13. $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+1}+\dfrac{5}{x-3}$. **2.4.14.** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}+\dfrac{1}{x}$.

2.4.15. $f(x)=\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{1}{x+1}$. **2.4.16.** $f(x)=\dfrac{4}{x-4}+\dfrac{5}{x-5}$.

2.4.17. $f(x)=2^{\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}}$. **2.4.18.** $f(x)=3^{\frac{5}{x}}+2^{\frac{2}{x-2}}$.

2.4.19. $f(x)=\dfrac{\pi}{x+1}+\dfrac{2}{x-2}$. **2.4.20.** $f(x)=\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x-3}$.

2.4.21. $f(x)=4^{\frac{3}{x^2-9}}+2$. **2.4.22.** $f(x)=2^{\frac{1}{x^2-4}}+x$.

2.4.23. $f(x)=7^{\frac{1}{x+1}}+\dfrac{5}{x-3}$. **2.4.24.** $f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x-3}}+3^{\frac{1}{x-1}}}$.

2.4.25. $f(x)=\dfrac{\pi}{x+5}+\dfrac{3}{x-5}$.

2.4.26. $f(x)=\dfrac{5}{x+6}+\dfrac{1}{x-3}$

2.4.27. $f(x)=\dfrac{x-4}{x+1}+\dfrac{3}{x-2}$

2.4.28. $f(x)=\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{5}{x+5}$

2.4.29. $f(x)=\dfrac{11}{x+1}-\dfrac{7}{x-1}$.

2.4.30. $f(x)=\dfrac{2}{x+9}-\dfrac{3\pi}{x-4}$.

Задача 2.5. За заданими функцією $y=f(x)$ та числом a знайти $y'(x)$ та обчислити $y'(a)$.

2.5.1. $y=\ln^2(x-2)+x\cdot e^x,\ a=3$.

2.5.2. $y=1+x^2+e^x\cdot\cos x^2,\ a=0$.

2.5.3. $y=\pi+x\cdot\ln x+\cos 2x,\ a=e$.

2.5.4. $y=2+3\mathrm{tg}^2 x+e^x\cdot\sqrt{x},\ a=\dfrac{\pi}{4}$.

2.5.5. $y=3+\sin^2 3x+x\cdot\cos\dfrac{1}{x},\ a=\dfrac{2}{\pi}$.

2.5.6. $y=3\cos^2(x-5)+x\sqrt{x},\ a=5$.

2.5.7. $y=1+(x+1)\sqrt{x-2},\ a=3$.

2.5.8. $y=3+x+\ln(x^2+1),\ a=1$.

2.5.9. $y=\pi+x+x\cdot\ln^2 x,\ a=e$.

2.5.10. $y=3x^9+\ln^2\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x},\ a=1$.

2.5.11. $y=\pi+x\cdot\sin x+\cos 2x,\ a=0$.

2.5.12. $y=1+\mathrm{arctg}\ln^2 x+\pi,\ a=e$.

2.5.13. $y=\sqrt{x^2+1}+\mathrm{tg}\sin x,\ a=0$.

2.5.14. $y=\log_2\log_3(2x+3)+x,\ a=0$.

2.5.15. $y=(x^2+1)\,\mathrm{arctg}\dfrac{x}{e},\ a=e$.

2.5.16. $y=x+\ln(x^2+\sqrt{x^2+1}),\ a=1$.

2.5.17. $y=5x^2\cdot\arcsin\sqrt{1-x^2},\ a=\dfrac{1}{2}$.

2.5.18. $y=\ln\frac{1-x}{1+x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2(x+1),\ \ a=0$.

2.5.19. $y=\ln(e^x+\sin^2(x+\frac{\pi}{2})),\ \ a=0$.

2.5.20. $y=e^{\cos(x+\pi)}+x\cdot\sin(x-\pi),\ \ a=-\pi$.

2.5.21. $y=\cos^3(2x-\pi)+\ln\frac{e^x}{x},\ \ a=\pi$.

2.5.22. $y=x+\arcsin^4\ln\sqrt{x},\ \ a=e$.

2.5.23. $y=\frac{x}{1+x^2}+\ln^2(x^2+e),\ \ a=0$.

2.5.24. $y=x^2\cdot e^x+\cos^2\pi x,\ \ a=1$.

2.5.25. $y=e^x-\cos^2 2x,\ \ a=\pi$.

2.5.26. $y=\sin\frac{2}{x}+\ln^3(2x+e),\ \ a=\frac{2}{\pi}$.

2.5.27. $y=\pi+\sqrt{2x\cdot\operatorname{arctg}x},\ \ a=1$.

2.5.28. $y=\log_2\frac{x}{1-x^2}+\sin^2(\pi x+2),\ \ a=\frac{1}{2}$.

2.5.29. $y=5+e^{\sin x+\cos x}+\ln\sin(x+1),\ \ a=0$.

2.5.30. $y=1+e^{\operatorname{arctg}x}+\cos e^x+\frac{x}{\pi},\ \ a=0$.

Задача 2.6. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ функції, заданої неявно.

2.6.1. $y=x\cdot e^{x-y}+y\cdot e^{-x}$.

2.6.2. $e^{\cos(x+y)}+\ln\frac{y}{x}=0$.

2.6.3. $y^2=\frac{xy+y}{y-x}$.

2.6.4. $\arcsin(y-x)+\frac{x}{y}=1$.

2.6.5. $y=\frac{y}{x}+\operatorname{arctg}(y-x)$.

2.6.6. $y=e^{\cos(x-y)}-\ln\frac{y}{x}$.

2.6.7. $y=x\cdot e^{x+y}-y^2\cdot e^{-x}$.

2.6.8. $x^2+y^2=3^{\operatorname{tg}(x-y)}$.

2.6.9. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\cos(y-x)+y$.

2.6.10. $\ln^2(y-x)=e^{-x}+\cos(xy)$.

2.6.11. $y^3 = \dfrac{x^2y - x}{x - y}$.

2.6.12. $e^{-\sin(x+y)} + \ln(y - x) = \pi$.

2.6.13. $y = e^{-y} + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

2.6.14. $\arcsin x + \arcsin y = \ln\dfrac{y}{x}$.

2.6.15. $x + y^3x^2 = (x - y)^2$.

2.6.16. $\arccos(y - x) = x^2 + y^2$.

2.6.17. $xy \cdot e^x + x^2 \cdot e^{y-x} + x = 0$.

2.6.18. $\pi^{\cos(x+y)} + x^3y^2 = 0$.

2.6.19. $y^2 = \dfrac{x^2y - x^2}{x + y}$.

2.6.20. $3^{\arccos(x-y)} + xy = 3^{x-y}$.

2.6.21. $\ln\dfrac{y}{x} + \sin(x^2 - y) = e^{\pi}$.

2.6.22. $y^2x + x^2\sin y = \cos(x + y)$.

2.6.23. $y = e^{-\cos(x-y)} + xy$.

2.2.24. $\operatorname{arctg}(x^2 + y^2) = x + y$.

2.6.25. $x^2\ln y = (x - 2)(y + 1)$.

2.6.26. $(x + y)^3 = \cos(xy) + xy$.

2.6.27. $e^{-y+x} + \operatorname{arctg} y = xy^2$.

2.6.28. $x(y^2 - 2) = \cos(xy) + e$.

2.6.29. $\dfrac{y}{x} = \sin(x - y) + \cos x$.

2.6.30. $x - y^2 = 4xy + e^{-2x}$.

Задача 2.7. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ функції, заданої параметрично.

2.7.1. $\begin{cases} x = 5^t \cdot \cos t, \\ y = 5^t \cdot \sin t. \end{cases}$

2.7.2. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}\sqrt{t}, \\ y = \arcsin\sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

2.7.3. $\begin{cases} x = \cos t - \sin t, \\ y = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{ctg}^3 t. \end{cases}$

2.7.4. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t^2, \\ y = \ln(1 + t^4). \end{cases}$

2.7.5. $\begin{cases} x = e^{\cos^2 t}, \\ y = e^{\sin^2 t}. \end{cases}$

2.7.6. $\begin{cases} x = 2\sin t, \\ y = \cos t + \sin t. \end{cases}$

2.7.7. $\begin{cases} x = \cos 2t + 2t\sin 2t, \\ y = \sin 2t - 2t\cos 2t. \end{cases}$

2.7.8. $\begin{cases} x = \ln(t + 1), \\ y = \operatorname{arctg}\sqrt{t}. \end{cases}$

2.7.9. $\begin{cases} x = e^t \cdot \sin^3 t, \\ y = e^t \cdot \cos^3 t. \end{cases}$

2.7.10. $\begin{cases} x = \sin e^t, \\ y = \cos e^t. \end{cases}$

2.7.11. $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1 + t^2}, \\ y = \dfrac{t}{1 + t^2}. \end{cases}$

2.7.12. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}^2 e^t, \\ y = \dfrac{1}{\sin e^t}. \end{cases}$

2.7.13. $\begin{cases} x = 5\arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

2.7.14. $\begin{cases} x = \arcsin e^t, \\ y = \sqrt{1-e^{2t}}. \end{cases}$

2.7.15. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \operatorname{tg} t - t. \end{cases}$

2.7.16. $\begin{cases} x = \ln(1+t), \\ y = \operatorname{arctg}\sqrt{t}. \end{cases}$

2.7.17. $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t. \end{cases}$

2.7.18. $\begin{cases} x = e^{2t}\cdot\cos^2 t, \\ y = e^{2t}\cdot\sin^2 t. \end{cases}$

2.7.19. $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 10\sin^2 t. \end{cases}$

2.7.20. $\begin{cases} x = 2t^2 + 3t, \\ y = t^2 + 2t^3. \end{cases}$

2.7.21. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \sin^2 t + \sin 2t. \end{cases}$

2.7.22. $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

2.7.23. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3}. \end{cases}$

2.7.24. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sin t}, \\ y = \operatorname{ctg} t + t. \end{cases}$

2.7.25. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

2.7.26. $\begin{cases} x = t^2 - 3t, \\ y = 5t^2 - 3t^2 + t. \end{cases}$

2.7.27. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \dfrac{t-1}{t+1}. \end{cases}$

2.7.28. $\begin{cases} x = \ln\cos t, \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$

2.7.29. $\begin{cases} x = 2\ln t, \\ y = t - \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

2.7.30. $\begin{cases} x = \ln\operatorname{tg} t, \\ y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} t}. \end{cases}$

Задача 2.8. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ функції, застосувавши логарифмічне диференціювання.

2.8.1. $y = (\operatorname{arctg} x)^{2x+1}$.

2.8.2. $y = (\arcsin x)^{2\operatorname{tg}^2 x+1}$.

2.8.3. $y = (x^2\cdot\sin x)^{2x+1}$.

2.8.4. $y = e^{-x}(x-3)^2\cos^3 5x$.

2.8.5. $y = (x+1)^{-\cos x}$.

2.8.6. $y = (x^2-1)^{\ln x}$.

2.8.7. $y = (x\cdot\cos x)^{\ln^2 x}$.

2.8.8. $y = e^{-x}(x^2+1)\operatorname{arctg}^2 3x$.

2.8.9. $y = (x+4)^{-2\sin x}$.

2.8.10. $y = (x^4-3)^{2+\operatorname{ctg} x}$.

2.8.11. $y = (\sin\pi x)^{2x+3}$.

2.8.12. $y = (x\cdot\sin x)^{2x-3}$.

2.8.13. $y = (x^4+3x+1)^{2\cos(x+1)}$.

2.8.14. $y = (x^3-2)^{5\operatorname{arctg}^3 x}$.

2.8.15. $y=(1+\ln^2 x)^{x\cdot\cos x}$.
2.8.16. $y=(1+\operatorname{tg} x^2)^{\ln x}$.

2.8.17. $y=(x+7)^{3-2\sin x}$.
2.8.18. $y=(e^{-x}\cdot x^2)^{2+x^2}$.

2.8.19. $y=(\arccos 3x)^{\ln x}$.
2.8.20. $y=e^{-x}(x^2+\pi)\operatorname{tg}^2(x+5)$.

2.8.21. $y=(3+e^{\pi x})^{5\cos^2 x+1}$.
2.8.22. $y=e^{-2x}\sqrt{x+5}\,\operatorname{arctg}^2(x+1)$.

2.8.23. $y=(\pi\sin \pi x)^{2x^2-1}$.
2.8.24. $y=(x\cdot\sin x)^{2x-3}$.

2.8.25. $y=(\arccos(x-2))^{3-x}$.
2.8.26. $y=\pi^x\sqrt{x-2}\,\operatorname{tg}^2(2x+1)$.

2.8.27. $y=(2+e^{-\pi x})^{5x^2+3x}$.
2.8.28. $y=(x+\cos x)^{\ln x}$.

2.8.29. $y=(x-1)^{\pi+\cos x}$.
2.8.30. $y=(x^2+1)^{5-x^2}$.

Задача 2.9. Обчислити границю, застосовуючи правило Лопіталя.

2.9.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi^x}{x^2-5x+2}$.
2.9.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cdot\cos x}$.

2.9.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^{-x})}{x}$.
2.9.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(2x^2+\pi^x)}{2x}$.

2.9.5. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\ln^2(x-1)$.
2.9.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-e^x+\sin 2x}{\pi x^2-x}$.

2.9.7. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\,\ln^2 x$.
2.9.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-\cos x+2\sin x}{2x^3+5x}$.

2.9.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^4}$.
2.9.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x+1}{e^x}$.

2.9.11. $\lim\limits_{x\to 0}x^3\ln x$.
2.9.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\cos x+\sin x)}{5x^3+2x}$.

2.9.13. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln^2 x$.
2.9.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\cos 2x+\pi\sin 3x}{5x^2+x}$.

2.9.15. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+3x+5)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.
2.9.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+x+e}{\pi^x}$.

2.9.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{2x}}{x^3+3x^2+e}$.
2.9.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\ln x}$.

2.9.19. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x^3)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.
2.9.20. $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2x+x^2)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

2.9.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot e^{2x-1}}{\ln(1+2x)}$.

2.9.22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

2.9.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 2x}$.

2.9.24. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} x)^{(\ln x)^{-1}}$.

2.9.25. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{x}$.

2.9.26. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^{x}$.

2.9.27. $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-5x^2)\cdot\pi^{-x}$.

2.9.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{x}$.

2.9.29. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\arcsin x}$.

2.9.30. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+5x-2x^3)\cdot\pi^{-x}$.

Задача 2.10. Для заданої функції $y=f(x)$ знайти похідну другого порядку $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

2.10.1. $f(x)=e^3+e^{-2}\cdot\arccos(x-1)$.

2.10.2. $f(x)=\pi+x^2+\ln^2\sqrt{x-3}$.

2.10.3. $f(x)=1+2\ln^2(x-1)+\dfrac{1}{\pi}\cos^2\pi x$.

2.10.4. $f(x)=e^2+(x^2+1)\operatorname{arctg}(\pi^2+1)$.

2.10.5. $f(x)=\pi^3+e^{-3}\sqrt{x^2+1}+\ln^2\sqrt{x}$.

2.10.6. $f(x)=e^{-1}+e^4\cdot\cos^2 5x+\sqrt{x^2+1}$.

2.10.7. $f(x)=e+\sqrt{x^2+5}+\arcsin(x^2+1)$.

2.10.8. $f(x)=\pi+e^{-3}\cdot\ln^2(x^2+e)$.

2.10.9. $f(x)=e^{\pi}+\dfrac{1}{e^{-\pi}\sqrt{x^2+1}}$.

2.10.10. $f(x)=e+\ln(\operatorname{tg}^2 x+2)$.

2.10.11. $f(x)=e^{-1}+(x^2+1)(e^x+1)+\sqrt{\pi^2+1}$.

2.10.12. $f(x)=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{e^2+1}\cos^2 3x+\arcsin(\pi^2-9)$.

2.10.13. $f(x)=e^2+\dfrac{e^{-3}}{x^2+1}+\cos^2 3x+\sin^2 3x$.

2.10.14. $f(x)=4+\pi e^{-x}+\ln(x^2+3)$.

2.10.15. $f(x)=x^2\cdot e^{2x}+(x^4+1)\cdot \operatorname{arctg}(\pi+1).$

2.10.16. $f(x)=e^{-x}+\dfrac{\operatorname{arctg}(\pi^2+1)}{x^2+1}+\cos^2 x+\sin^2 x.$

2.10.17. $f(x)=e^{-1}+\dfrac{(\pi^2-4)}{\sin x+1}+\ln^2(\pi^2-8).$

2.10.18. $f(x)=\operatorname{arctg}(\pi-1)+(e^2+1)\sqrt{1-x^2}.$

2.10.19. $f(x)=e^{\pi}+e^{-2x}+\operatorname{arctg}^2 \pi x.$

2.10.20. $f(x)=e+\pi^4\cdot\cos^2 2x+x^2\sqrt{e^2+1}.$

2.10.21. $f(x)=\pi+e^{-5x}\cdot\ln(e^2+1).$

2.10.22. $f(x)=\pi e^{-x}+x^2\cdot\ln(\pi^2-3).$

2.10.23. $f(x)=e^{-1}+\dfrac{(\pi-1)}{\cos x+1}+\ln(\pi-1).$

2.10.24. $f(x)=\operatorname{arctg}^2(2x-\pi)+(e^2+1)\sqrt{10-e^2}.$

2.10.25. $f(x)=\operatorname{arctg}(x^2+1)+\pi(x^2+1).$

2.10.26. $f(x)=\operatorname{arctg}(e^x+\pi)+\dfrac{1}{e}(x^2+1).$

2.10.27. $f(x)=\pi+x^2e^{-x}+\ln(x^2+e).$

2.10.28. $f(x)=\pi+x^2e^{-x}+\ln^2(\pi^2+1).$

2.10.29. $f(x)=e^{-x}+\pi e^{-x}+\ln(x^2+\pi).$

2.10.30. $f(x)=e^{x-e}+\cos^2(x-e)+\log_2\pi.$

Задача 2.11. Розв'язати задачі на складання рівняння дотичної і нормалі, проведених до заданої кривої у вказаних точках.

2.11.1. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y=2x^3-x$ у точці її перетину з віссю ординат.

2.11.2. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y=\ln(2e-x)$ у точці її перетину з прямою $y=1$.

2.11.3. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y=x^2\cdot\ln x$ у точках, у яких дотична перетинає вісь Ox під кутом $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

2.11.4. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y=x^3-3x^2-2x+1$ у точках, у яких дотичні паралельні прямій $y=-2x+1$.

2.11.5. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = e^x(x-3)$ у точці її перетину з віссю абсцис.

2.11.6. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = \frac{1}{3}\sin(4x - \frac{\pi}{3})$ у точці її перетину з прямою $x = \frac{\pi}{3}$.

2.11.7. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2}$ у точці з абсцисою $x_\circ = 2$.

2.11.8. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 5x + 1$ у точках, у яких кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 1.

2.11.9. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = x\,e^{-x}$ у точці її перетину з віссю ординат.

2.11.10. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = x^3 - 7x^2 + 11x$ у точках, у яких нормалі паралельні прямій $y = -\frac{1}{3}x + \pi$.

2.11.11. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = x^3 + 7x^2 + 11x + 1$ у точках, у яких дотичні паралельні прямій $y = 3x + 2$.

2.11.12. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = x + \ln(1 - 2x)$ у точках, у яких дотичні паралельні прямій $y = 3x + \pi$.

2.11.13. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = 3x^4 + x$ у точках, у яких дотичні перпендикулярні до прямої $y = 3 - \frac{1}{13}x$.

2.11.14. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x + 1$ у точках, у яких дотичні утворюють з віссю Ox кут $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2.11.15. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = \frac{1}{2}\cos(2x - \pi)$ у точці її перетину з прямою $x = \frac{3\pi}{4}$.

2.11.16. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = 2x^3 + 6x^2 + e$ у точках, у яких кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює -6.

2.11.17. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = 3x^4 + x^3$ у точках, у яких нормалі перпендикулярні до прямої $y = 1$.

2.11.18. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = (x+2)^2\sqrt{1-x}$ у точці її перетину з віссю ординат.

2.11.19. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = x^2 e^{-x}$ у точці її перетину з прямою $x = 1$.

2.11.20. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = 0{,}5\,x^4 - x$ у точках, у яких дотичні паралельні прямій $y = \pi - \frac{3}{4}x$.

2.11.21. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = e^{-x}(x^2 - 9)$ у точках її перетину з віссю абсцис.

2.11.22. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = x^3 - 5x^2 + x - \frac{1}{27}$ у точках, у яких дотичні перпендикулярні до прямої $y = \pi - \frac{x}{2}$.

2.11.23. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = 2\cos(2x - \pi)$ у точці її перетину з прямою $x = \frac{\pi}{4}$.

2.11.24. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2}$ у точках її перетину з віссю абсцис.

2.11.25. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = 3x^3 - 6x^2 + x + 1$ у точках, у яких дотичні паралельні прямій $y = e - 2x$.

2.11.26. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = x^3 + 2x^2 + 2$ у точках, у яких дотичні утворюють з віссю Ox кут $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

2.11.27. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = (x-1)^3\sqrt{4-x^2}$ у точці її перетину з прямою $x = \sqrt{3}$.

2.11.28. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = (x^2+1)\ln(e - \frac{x}{\pi})$ у точках її перетину з віссю абсцис.

2.11.29. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = \frac{4}{3}x^3 - 5x^2 + 3x + \frac{1}{3}$ у точках, у яких дотичні паралельні прямій $y = e - x$.

2.11.30. Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 5x + e - 1$ у точках, у яких дотичні утворюють з віссю Ox кут $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Задача 2.12. Провести повне дослідження функції $y = f(x)$ та побудувати її графік.

2.12.1. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

2.12.2. $y = \dfrac{x}{4-x^2}$.

2.12.3. $y = \dfrac{x^2-4}{x-1}$.

2.12.4. $y = \dfrac{3-2x+x^2}{2+x}$.

2.12.5. $y = \dfrac{x^2-1}{x}$.

2.12.6. $y = \dfrac{3}{2+x^2}$.

2.12.7. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$.

2.12.8. $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$.

2.12.9. $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$.

2.12.10. $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$.

2.12.11. $y = \dfrac{8}{x^2-4}$.

2.12.12. $y = \dfrac{4x^2}{3-x}$.

2.12.13. $y=\frac{x}{9-x^2}$.

2.12.14. $y=\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$.

2.12.15. $y=\frac{4x}{x^2+4}$.

2.12.16. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

2.12.17. $y=\frac{2}{9-x^2}$.

2.12.18. $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$.

2.12.19. $y=\frac{1}{3+x^3}$.

2.12.20. $y=\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}+x$.

2.12.21. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$.

2.12.22. $y=\frac{x-5}{(x+1)^2}$.

2.12.23. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

2.12.24. $y=\frac{4x^3}{x^3-1}$.

2.12.25. $y=\frac{x^4}{x^3-1}$.

2.12.26. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

2.12.27. $y=\frac{2x^2+1}{x-1}$.

2.12.28. $y=\frac{4x-12}{(x-2)^2}$.

2.12.29. $y=\frac{x^2+4x+5}{x-2}$.

2.12.30. $y=\frac{x+1}{(x+3)^2}$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА 3

Задача 3.1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування.

3.1.1. а) $\int (e^{\pi x}+x^3+\frac{3}{4-x^2})dx$; б) $\int \sqrt[4]{x^3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}dx$.

3.1.2. а) $\int (5\operatorname{tg}3x+\frac{3}{\cos^2 x})dx$; б) $\int \frac{x^3-8}{x-2}dx$.

3.1.3. а) $\int (\sqrt[3]{x^2}+e^{\pi x})dx$; б) $\int \sin^2 x\, dx$.

3.1.4. а) $\int (\pi e^{-x}+3\cos 3x)dx$; б) $\int \sqrt[3]{x^5}\cdot\sqrt{x}\, dx$.

3.1.5. а) $\int (e^{2x}-5\sin\frac{x}{2}+5)dx$; б) $\int \frac{x^4+1}{x}dx$.

3.1.6. а) $\int (\pi-e^{-x}+\frac{5}{\cos^2 x})dx$; б) $\int \frac{x^3-27}{x-3}dx$.

3.1.7. а) $\int(2\cos 5x-5\sin \pi x)dx$; б) $\int\cos^2 x\,dx$.

3.1.8. а) $\int(\frac{\pi}{x^2+9}+\frac{3}{x^2-9})dx$; б) $\int\frac{(x-1)^3}{x}dx$.

3.1.9. а) $\int(2x^3-5x^2+7x+5)dx$; б) $\int(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$.

3.1.10. а) $\int(3\cos 2x-2\sin 3x)dx$; б) $\int x\sqrt[3]{x^2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}dx$.

3.1.11. а) $\int(e^{-2x}-4\sin\frac{x}{3}+3)dx$; б) $\int\frac{x^9-9}{x}dx$.

3.1.12. а) $\int(e+\pi e^x+\pi\cos 2x)dx$; б) $\int\pi^x\cdot e^{-x}\,dx$.

3.1.13. а) $\int(4\cos 3x-2\sin 2x)dx$; б) $\int(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^2dx$.

3.1.14. а) $\int(\frac{5}{\sqrt{16-x^2}}+\frac{5}{\sqrt{16+x^2}})dx$; б) $\int\frac{(x+2)^3}{x}dx$.

3.1.15. а) $\int(\frac{\pi}{x^2+25}-\frac{\pi}{x^3}+e^2)dx$; б) $\int(2-x^2)^3dx$.

3.1.16. а) $\int(9\sin 3x-\cos 3x-\ln 2)dx$; б) $\int\frac{2x+3}{x+1}dx$.

3.1.17. а) $\int(e^{-3x}+\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}+\ln\pi)dx$; б) $\int x\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$.

3.1.18. а) $\int(\frac{7}{\cos^2 x}-\frac{3}{\sin^2 x}+ex)dx$; б) $\int\frac{x^3+5x^2-x-1}{\sqrt{x}}dx$.

3.1.19. а) $\int(\sin 4x+3\cos 2x-e^{-2})dx$; б) $\int(3x-2)(9x^2+6x+4)dx$.

3.1.20. а) $\int(\frac{3}{x^2+4}+\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{e})dx$; б) $\int\frac{x^3-2x^2+3x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

3.1.21. а) $\int(e+e^{3x}-\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{x})dx$; б) $\int\frac{x^3-1}{x-1}dx$.

3.1.22. а) $\int(\frac{2}{9x^2+4}+\frac{4}{\sqrt{9-16x^2}})dx$; б) $\int\frac{(x^3+1)^2}{x^3}dx$.

3.1.23. а) $\int(e^x-5\sqrt[4]{x^5}+\frac{\pi}{x}+\frac{3}{\pi})dx$; б) $\int\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x^2+1}dx$.

3.1.24. а) $\int(2\sin 2x+\frac{2}{\sin^2 x}+2e)dx$; б) $\int\frac{x-1}{\sqrt{x}-x}dx$.

3.1.25. а) $\int(3\sqrt[5]{x^3}+\frac{e}{\sqrt{x}}+\frac{7}{x}-1)dx$; б) $\int 4\sin^2 x\,dx$.

3.1.26. а) $\int(\frac{3}{25x^2+9}+\frac{2}{\sqrt{4-9x^2}})dx$; б) $\int\frac{e^{-3x}-1}{e^{-2x}+e^{-x}+1}dx$.

3.1.27. а) $\int(3\cos ex-3\sin ex+e^{-2x})dx$; б) $\int e^x(3-e^{-x})\,dx$.

3.1.28. а) $\int(\frac{3}{9+4x^2}-\frac{2}{\cos^2 2x})dx$; б) $\int\frac{x^2+2x-3}{\sqrt[3]{x}}dx$.

3.1.29. а) $\int(\pi\sin\pi x+\pi\cos\pi x-e^{\pi})dx$; б) $\int\sqrt[4]{x^3}(1-\sqrt{x})x\,dx$.

3.1.30. а) $\int(\frac{3}{\cos^2 3x}+\frac{5}{\cos^2 5x}+x^e)dx$; б) $\int(\sqrt[3]{x}-1)(2\sqrt[4]{x}+3)dx$.

Задача 3.2. Знайти невизначений інтеграл.

3.2.1. $\int(x\cos(x^2)dx$.

3.2.2. $\int x^4\sqrt[3]{x^5-5}\,dx$.

3.2.3. $\int\frac{2x}{x^2+8}dx$.

3.2.4. $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx$.

3.2.5. $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}e^{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

3.2.6. $\int\frac{x}{x^2+3}dx$.

3.2.7. $\int\frac{\ln^3 x}{x}dx$.

3.2.8. $\int\sin x\cdot e^{3\cos x}\,dx$.

3.2.9. $\int\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}dx$.

3.2.10. $\int 2xe^{x^2+1}\,dx$.

3.2.11. $\int\frac{\cos x}{\sin^2 x-2\sin x+2}dx$.

3.2.12. $\int\sin^5 2x\cdot\cos 2x\,dx$.

3.2.13. $\int\cos x\cdot e^{\pi\sin x+1}\,dx$.

3.2.14. $\int\frac{(5\ln x+e)^2}{x}dx$.

3.2.15. $\int\frac{x^4}{\sqrt{x^5+1}}dx$.

3.2.16. $\int x^2\sin(5x^3+\pi)\,dx$.

3.2.17. $\int xe^{x^2-3}\,dx$.

3.2.18. $\int\frac{x^3}{x^8+3}dx$.

3.2.19. $\int \sqrt{x\ln x}\,(1+\ln x)\,dx$.

3.2.20. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1}\,dx$.

3.2.21. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{3+4\sin x}}\,dx$.

3.2.22. $\int \frac{\ln^2 x}{3x}\,dx$.

3.2.23. $\int \frac{3x}{x^4+5}\,dx$.

3.2.24. $\int x^2\sqrt[3]{x^3-1}\,dx$.

3.2.25. $\int \sin x\cdot e^{\cos x+1}\,dx$.

3.2.26. $\int \sqrt{x^2+x+3}\,(4x+2)\,dx$.

3.2.27. $\int \frac{\ln x}{x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}\,dx$.

3.2.28. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$.

3.2.29. $\int \cos(\sin x)\cdot\cos x\,dx$.

3.2.30. $\int \frac{e^{\sqrt{3x+2}}}{\sqrt{3x+2}}\,dx$.

Задача 3.3. Знайти невизначені інтеграли.

3.3.1. а) $\int \frac{3\,dx}{(x+3)^2}$; б) $\int \frac{dx}{4x^2-4x+5}$; в) $\int \frac{2x+3}{4x^2-4x+5}\,dx.$

3.3.2. а) $\int \frac{dx}{(x-1)^3}$; б) $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$; в) $\int \frac{2x+1}{x^2+6x+13}\,dx.$

3.3.3. а) $\int \frac{4\,dx}{(x+2)^3}$; б) $\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$; в) $\int \frac{2x+1}{x^2-4x+5}\,dx.$

3.3.4. а) $\int \frac{2\,dx}{(x-\pi)^2}$; б) $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$; в) $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+5}\,dx.$

3.3.5. а) $\int \frac{\pi\,dx}{(x+5)^3}$; б) $\int \frac{dx}{x^2-8x+16}$; в) $\int \frac{2x+3}{x^2-8x+16}\,dx.$

3.3.6. а) $\int \frac{5\,dx}{(x-3)^4}$; б) $\int \frac{dx}{x^2+16x+63}$; в) $\int \frac{2x+15}{x^2+16x+63}\,dx.$

3.3.7. а) $\int \frac{dx}{(x-4)^5}$; б) $\int \frac{dx}{x^2-8x+20}$; в) $\int \frac{2x-9}{x^2-8x+20}\,dx.$

3.3.8. а) $\int \frac{3\,dx}{(x-2)^7}$; б) $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$; в) $\int \frac{2x+5}{x^2+4x+3}\,dx.$

3.3.9. а) $\int \frac{e\,dx}{(x+7)^2}$; б) $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$; в) $\int \frac{2x-5}{x^2-4x+8}\,dx.$

3.3.10. а) $\int\frac{4\,dx}{(x-7)^3}$; б) $\int\frac{dx}{x^2-2x+1}$; в) $\int\frac{2x-1}{x^2-2x+1}dx$.

3.3.11. а) $\int\frac{dx}{(x-2)^5}$; б) $\int\frac{dx}{x^2+10x+21}$; в) $\int\frac{2x+9}{x^2+10x+21}dx$.

3.3.12. а) $\int\frac{dx}{(x+3)^4}$; б) $\int\frac{dx}{x^2+4x+4}$; в) $\int\frac{2x+5}{x^2+4x+4}dx$.

3.3.13. а) $\int\frac{dx}{(x+2)^4}$; б) $\int\frac{dx}{x^2-2x+2}$; в) $\int\frac{2x-3}{x^2-2x+2}dx$.

3.3.14. а) $\int\frac{3\,dx}{(x-5)^2}$; б) $\int\frac{dx}{x^2-2x-3}$; в) $\int\frac{2x+1}{x^2-2x-3}dx$.

3.3.15. а) $\int\frac{dx}{(x-6)^3}$; б) $\int\frac{dx}{x^2+6x+8}$; в) $\int\frac{2x+5}{x^2+6x+8}dx$.

3.3.16. а) $\int\frac{3\,dx}{(x-1)^5}$; б) $\int\frac{dx}{x^2-12x+35}$; в) $\int\frac{2x-10}{x^2-12x+35}dx$.

3.3.17. а) $\int\frac{3\,dx}{(x+6)^5}$; б) $\int\frac{dx}{x^2-6x+10}$; в) $\int\frac{2x-5}{x^2+6x+10}dx$.

3.3.18. а) $\int\frac{dx}{(x-9)^3}$; б) $\int\frac{dx}{x^2-8x+15}$; в) $\int\frac{2x-9}{x^2-8x+15}dx$.

3.3.19. а) $\int\frac{\pi\,dx}{(x+1)^4}$; б) $\int\frac{dx}{x^2-12x+37}$; в) $\int\frac{2x-11}{x^2-12x+37}dx$.

3.3.20. а) $\int\frac{dx}{(x+1)^7}$; б) $\int\frac{dx}{x^2-20x+99}$; в) $\int\frac{2x-19}{x^2-20x+99}dx$.

3.3.21. а) $\int\frac{dx}{(x+e)^2}$; б) $\int\frac{dx}{x^2-14x+49}$; в) $\int\frac{2x-11}{x^2-14x+49}dx$.

3.3.22. а) $\int\frac{2\,dx}{(x-8)^4}$; б) $\int\frac{dx}{2x^2+24x+70}$; в) $\int\frac{2x+15}{2x^2+24x+70}dx$.

3.3.23. а) $\int\frac{11dx}{(x-2)^2}$; б) $\int\frac{dx}{x^2-10x+26}$; в) $\int\frac{2x-9}{x^2-10x+26}dx$.

3.3.24. а) $\int\frac{4\,dx}{(x-10)^3}$; б) $\int\frac{dx}{x^2-18x+82}$; в) $\int\frac{2x-15}{x^2-18x+82}dx$.

3.3.25. а) $\int \frac{dx}{(x-e)^2}$; б) $\int \frac{dx}{8x^2-8x+4}$; в) $\int \frac{2x-1}{8x^2-8x+4}dx$.

3.3.26. а) $\int \frac{dx}{(x-11)^3}$; б) $\int \frac{dx}{2x^2-12x+22}$; в) $\int \frac{2x-5}{2x^2-12x+22}dx$.

3.3.27. а) $\int \frac{5dx}{(x+13)^2}$; б) $\int \frac{dx}{x^2+20x+101}$; в) $\int \frac{2x+11}{x^2+20x+101}dx$.

3.3.28. а) $\int \frac{2dx}{(x-e)^2}$; б) $\int \frac{dx}{x^2+14x+50}$; в) $\int \frac{2x+15}{x^2+14x+50}dx$.

3.3.29. а) $\int \frac{6dx}{(x+10)^4}$; б) $\int \frac{dx}{x^2-18x+81}$; в) $\int \frac{2x-17}{x^2-18x+81}dx$.

3.3.30. а) $\int \frac{3dx}{(x-15)^2}$; б) $\int \frac{dx}{x^2-20x+100}$; в) $\int \frac{x-9}{x^2-20x+100}dx$.

Задача 3.4. Знайти невизначені інтеграли за допомогою розкладання правильного раціонального дробу в суму елементарних дробів.

3.4.1. а) $\int \frac{dx}{(x-2)(x+3)^2}$; б) $\int \frac{5x^2+3}{(x-5)(x^3+x)}dx$.

3.4.2. а) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-1)^2}$; б) $\int \frac{2x-1}{2x^3+x}dx$.

3.4.3. а) $\int \frac{dx}{(x+2)(x-3)^2}$; б) $\int \frac{5x}{x^4+2x^2}dx$.

3.4.4. а) $\int \frac{dx}{(x-3)(x+5)^2}$; б) $\int \frac{2x^2-x+1}{(x-5)(x^3+3x)}dx$.

3.4.5. а) $\int \frac{dx}{(x^2-4)(x+5)}$; б) $\int \frac{x}{x^3+x^2+4x+4}dx$.

3.4.6. а) $\int \frac{dx}{(x-2)(x+1)^2}$; б) $\int \frac{3x^2+20x+9}{(x+5)(x^2+4x+1)}dx$.

3.4.7. а) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+5)^2}$; б) $\int \frac{2x+5}{x^3+9x}dx$.

3.4.8. а) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2-4)}$; б) $\int \frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+8)}dx$.

3.4.9. а) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2}$; б) $\int \frac{2x^2-1}{(x^2+3)(x-3)}dx.$

3.4.10. а) $\int \frac{dx}{(x+5)(x^2-1)}$; б) $\int \frac{3x+2}{(2x^2+1)(x-1)}dx.$

3.4.11. а) $\int \frac{dx}{(x-5)(x-1)^2}$; б) $\int \frac{3-x}{3x^3+2x}dx.$

3.4.12. а) $\int \frac{dx}{(x-4)(x+3)^2}$; б) $\int \frac{2x^2+x-1}{(2x^2+9)(x-2)}dx.$

3.4.13. а) $\int \frac{dx}{(x+7)(x-2)^2}$; б) $\int \frac{2x+5}{5x^3+x}dx.$

3.4.14. а) $\int \frac{dx}{(x+3)(x^2-9)}$; б) $\int \frac{3x+1}{(x-1)(x^2+2x+10)}dx.$

3.4.15. а) $\int \frac{dx}{(x+4)(x^2-1)}$; б) $\int \frac{12x+3}{(3x^2+4)(x-2)}dx.$

3.4.16. а) $\int \frac{dx}{(x+4)(x-1)^2}$; б) $\int \frac{2x^2+x+1}{x^3+2x^2+3x}dx.$

3.4.17. а) $\int \frac{dx}{(x^2-16)(x+4)}$; б) $\int \frac{4-9x}{(2x^2+5)(x+1)}dx.$

3.4.18. а) $\int \frac{dx}{(x+7)(x-3)}$; б) $\int \frac{3x+3}{x^3+2x^2+2x}dx.$

3.4.19. а) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-5)}$; б) $\int \frac{4x+2}{(6+x^2)(x-6)}dx.$

3.4.20. а) $\int \frac{dx}{(x-9)(x+2)}$; б) $\int \frac{2x^2+3x+1}{(5x^2+3)x}dx.$

3.4.21. а) $\int \frac{dx}{x^2(x-2)}$; б) $\int \frac{2x-1}{(x^3+x)x}dx.$

3.4.22. а) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+3)}$; б) $\int \frac{3x-1}{(x^2+2)(x-1)}dx.$

3.4.23. а) $\int \frac{dx}{(x^2-25)(x+5)}$; б) $\int \frac{4x+2}{x^3+6x^2+13x}dx.$

3.4.24. а) $\int \frac{dx}{(x+2)(x-3)}$; б) $\int \frac{2x+5}{x^3+2x^2+8x}dx$.

3.4.25. а) $\int \frac{dx}{(x+3)(x-5)^2}$; б) $\int \frac{3x+3}{(5x^2+1)(x-2)}dx$.

3.4.26. а) $\int \frac{dx}{(x+3)(x-4)}$; б) $\int \frac{2x^2+2}{x^3-2x^2+5x}dx$.

3.4.27. а) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-e)}$; б) $\int \frac{4x+1}{(2x^2+1)(x-5)}dx$.

3.4.28. а) $\int \frac{dx}{x^2-36}$; б) $\int \frac{2x^2+x}{3x^3+4x}dx$.

3.4.29. а) $\int \frac{dx}{(x+2)(x-1)}$; б) $\int \frac{3x^2-1}{(2x^2+5)x}dx$.

3.4.30. а) $\int \frac{dx}{(x^2-9)(x+1)}$; б) $\int \frac{3-2x}{x^3+2x}dx$.

Задача 3.5. Знайти невизначений інтеграл.

3.5.1. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$. **3.5.2.** $\int \sin 2x \cos 5x\, dx$.

3.5.3. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx$. **3.5.4.** $\int \cos 3x \cos 9x\, dx$.

3.5.5. $\int (\sin x + \cos x)^4 dx$. **3.5.6.** $\int \sin x \sin 3x\, dx$.

3.5.7. $\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx$. **3.5.8.** $\int \sin 2x \cos 9x\, dx$.

3.5.9. $\int (2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x)^2 dx$. **3.5.10.** $\int \cos 4x \cos 6x\, dx$.

3.5.11. $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}dx$. **3.5.12.** $\int \sin 3x \sin 4x\, dx$.

3.5.13. $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx$. **3.5.14.** $\int \sin 7x \cos 3x\, dx$.

3.5.15. $\int \frac{1}{1-\cos 2x}dx$. **3.5.16.** $\int \cos 5x \cos 4x\, dx$.

3.5.17. $\int \operatorname{ctg}^2 2x\, dx$. **3.5.18.** $\int \sin 2x \sin 5x\, dx$.

3.5.19. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx.$ **3.5.20.** $\int \sin 4x \cos x \, dx.$

3.5.21. $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx.$ **3.5.22.** $\int \cos 7x \cos x \, dx.$

3.5.23. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$ **3.5.24.** $\int \sin 4x \sin 11x \, dx.$

3.5.25. $\int \sin 2x \cos^2 x \, dx.$ **3.5.26.** $\int \sin 5x \cos 2x \, dx.$

3.5.27. $\int \frac{1}{(\cos^2 x - \sin^2 x)^4} dx.$ **3.5.28.** $\int \cos 5x \cos 11x \, dx.$

3.5.29. $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 dx.$ **3.5.30.** $\int \sin 6x \sin x \, dx.$

Задача 3.6. Знайти невизначений інтеграл методом інтегрування частинами.

3.6.1. $\int e^{2x} \cos x \, dx.$ **3.6.2.** $\int x^2 \sin x \, dx.$

3.6.3. $\int (2x-1) e^x \, dx.$ **3.6.4.** $\int x \cos 3x \, dx.$

3.6.5. $\int e^x x^2 \, dx.$ **3.6.6.** $\int (x^2+2x+3) \cos x \, dx.$

3.6.7. $\int e^{-x} x^2 \, dx.$ **3.6.8.** $\int (x^2+x+1) \sin 2x \, dx.$

3.6.9. $\int e^{-x} \cos x \, dx.$ **3.6.10.** $\int (5x-1) e^{-x} \, dx.$

3.6.11. $\int x^2 \operatorname{arctg} x \, dx.$ **3.6.12.** $\int x^2 \cos x \, dx.$

3.6.13. $\int x^5 \cdot e^{x^2} \, dx.$ **3.6.14.** $\int e^{-x} (x^2-1) \, dx.$

3.6.15. $\int (x+1) e^x \, dx.$ **3.6.16.** $\int x \sin x \, dx.$

3.6.17. $\int e^x \sin x \, dx.$ **3.6.18.** $\int e^{-x} \cos 3x \, dx.$

3.6.19. $\int (x-5) e^x \, dx.$ **3.6.20.** $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx.$

3.6.21. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx.$ **3.6.22.** $\int (2x+1) \sin 3x \, dx.$

3.6.23. $\int x \cos x \, dx.$ **3.6.24.** $\int \ln(3x+1) \, dx.$

3.6.25. $\int \arcsin^2 x \, dx.$ **3.6.26.** $\int \sin x \ln(\cos x) \, dx.$

3.6.27. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx.$ **3.6.28.** $\int (x+2) e^{-2x} \, dx.$

3.6.29. $\int e^{2x} \sin x \, dx.$ **3.6.30.** $\int x \cdot e^x \, dx.$

Задача 3.7. Обчислити визначений інтеграл.

3.7.1. $\int\limits_0^{2\sqrt{2}} x\sqrt{x^2+1}\,dx.$

3.7.2. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\,dx.$

3.7.3. $\int\limits_0^5 \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx.$

3.7.4. $\int\limits_2^{\frac{4}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx.$

3.7.5. $\int\limits_0^5 \frac{1}{2x+\sqrt{3x+1}}\,dx.$

3.7.6. $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$

3.7.7. $\int\limits_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx.$

3.7.8. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx.$

3.7.9. $\int\limits_0^5 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\,dx.$

3.7.10. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx.$

3.7.11. $\int\limits_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}}\,dx.$

3.7.12. $\int\limits_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{3}} \frac{x}{\sqrt{3x+2}}\,dx.$

3.7.13. $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x\sqrt{1+e^{-2x}}}\,dx.$

3.7.14. $\int\limits_1^6 \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+3}-1}\,dx.$

3.7.15. $\int\limits_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx.$

3.7.16. $\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{x+1}}\,dx.$

3.7.17. $\int\limits_1^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2+5x+1}}\,dx.$

3.7.18. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}\,dx.$

3.7.19. $\int\limits_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}\,dx.$

3.7.20. $\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx.$

3.7.21. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx.$

3.7.22. $\int\limits_1^{16} \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}\,dx.$

3.7.23. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$

3.7.24. $\int\limits_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx.$

3.7.25. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx.$

3.7.26. $\int\limits_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx.$

3.7.27. $\int_{2}^{14} \frac{x}{\sqrt{2+x}} dx.$ **3.7.28.** $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx.$

3.7.29. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^5 \sqrt{x^2-1}} dx.$ **3.7.30.** $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx.$

Задача 3.8. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність.

3.8.1. $\int_{0}^{2} \frac{3x}{\sqrt{16-x^4}} dx.$ **3.8.2.** $\int_{0}^{\infty} e^{-5x} dx.$

3.8.3. $\int_{0}^{\infty} \frac{5x}{(x^2+1)^2} dx.$ **3.8.4.** $\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx.$

3.8.5. $\int_{0}^{5} \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} dx.$ **3.8.6.** $\int_{1}^{\infty} 5^{-x^2} \cdot x\, dx$

3.8.7. $\int_{2}^{\infty} \frac{\pi x}{(2x^2+1)^2} dx.$ **3.8.8.** $\int_{3}^{5} \frac{\pi x}{\sqrt{x^2-9}} dx.$

3.8.9. $\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x \ln^3 x} dx.$ **3.8.10.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+6x+10} dx.$

3.8.11. $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{3-x^2}} dx.$ **3.8.12.** $\int_{1}^{\infty} e^{-2x} dx.$

3.8.13. $\int_{0}^{\infty} \frac{3x}{(x^2+4)^2} dx.$ **3.8.14.** $\int_{0}^{1} \frac{\pi}{\sqrt[3]{2-4x}} dx.$

3.8.15. $\int_{1}^{e^2} \frac{\pi}{x\sqrt{\ln x}} dx.$ **3.8.16.** $\int_{1}^{\infty} \frac{x}{(x^2-\pi)^3} dx.$

3.8.17. $\int_{4}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx.$ **3.8.18.** $\int_{-5}^{0} \frac{2}{(x+5)^2} dx.$

3.8.19. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+8x+17} dx.$ **3.8.20.** $\int_{9}^{10} \frac{x}{\sqrt{x^2-81}} dx.$

3.8.21. $\int_{0}^{\pi} \frac{3}{(x-\pi)^3} dx.$ **3.8.22.** $\int_{0}^{\infty} \frac{3x}{(x^2-6)^2} dx.$

3.8.23. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+10x+26} dx.$ **3.8.24.** $\int_{-3}^{0} \frac{2}{(x+3)^3} dx.$

3.8.25. $\int_{5}^{7}\frac{\pi x}{\sqrt{x^2-25}}dx.$ **3.8.26.** $\int_{-\infty}^{1}\frac{\pi x}{(x^2-1)^2}dx.$ **3.8.27.** $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+4x+8}dx.$

3.8.28. $\int_{-5}^{0}\frac{1}{(x+5)^3}dx.$ **3.8.29.** $\int_{-\infty}^{2}\frac{x}{(x^2+5)^3}dx.$ **3.8.30.** $\int_{1}^{3}\frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}dx.$

Задача 3.9. Обчислити площу фігури, обмежену заданими лініями.

3.9.1. $y=2-2x^2,\ y=2(x-5).$

3.9.2. $y=x^2-5x+4,\ y=-x^2+7x-6.$

3.9.3. $y=1-x^2,\ y=-x-5.$

3.9.4. $y=x^2-2x+3,\ y=-x^2+10x-7.$

3.9.5. $y=5x^2-2,\ y=2.$

3.9.6. $y=x^2+3x+2,\ y=-x^2-5x-4.$

3.9.7. $y=12-x^2,\ y=4+x^2.$

3.9.8. $y=2-2x^2,\ y=-12x+12.$

3.9.9. $y=5-2x^2,\ y=2x-7.$

3.9.10. $y=x^2-6x+15,\ y=-x^2+14x-3.$

3.9.11. $y=-x^2+10,\ y=2+x^2.$

3.9.12. $y=3-x^2,\ y=x-3.$

3.9.13. $y=x^2-9x+2,\ y=-x^2+3x-8.$

3.9.14. $y=4-x^2,\ y=2+x^2.$

3.9.15. $y=-2x^2+1,\ y=-2x-11.$

3.9.16. $y=1-x^2,\ y=x-5.$

3.9.17. $y=x^2+6x+9,\ y=-x^2-4x+1.$

3.9.18. $y=8-3x^2,\ y=1.$

3.9.19. $y=3-2x^2,\ y=2x-1.$

3.9.20. $y=x^2+5x+1,\ y=-x^2-3x-5.$

3.9.21. $y=1-x^2,\ y=-6x+6.$

3.9.22. $y=4x+5,\ y=-x^2+2.$

3.9.23. $y=x^2+4x+3,\ y=-x^2-4x-3.$

3.9.24. $y=6-x^2,\ y=-x.$

3.9.25. $y=3-2x^2,\ y=-12x+13.$

3.9.26. $y=x^2-5x+1,\ y=-x^2-3x+13.$

3.9.27. $y=5-x^2,\ y=15-7x.$

3.9.28. $y=x^2-2x+1,\ y=-x^2-13.$

3.9.29. $y=-x^2+5,\ y=10-6x.$

3.9.30. $y=x^2-4x+3,\ y=-x^2+4x-3.$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Буйвол В. М.* Елементи лінійної і векторної алгебри та аналітичної геометрії / В. М. Буйвол. – К. : КМУЦА, 1996. – 200 с.

2. *Буйвол В. М.* Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної / В. М. Буйвол. – К. : НАУ, 2000. – 312 с.

3. *Валєєв К. Г.* Вища математика : навч. посібник. У 2 ч. / К. Г. Валєєв, І. Л. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2001. – Ч.1. – 546 с.

4. *Дубовик В. П.* Вища математика : навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : А.С.К., 2001. – 648 с.

5. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 456 с.

6. *Денисюк В. П.* Вища математика (Модульна технологія навчання): навч. посібник. У 4 ч. / В. П. Денисюк, В. К. Репета. – К. : НАУ, 2009. – Ч. 1. – 320 с.

7. *Денисюк В. П.* Вища математика (Модульна технологія навчання): навч. посібник. У 4 ч. / В. П. Денисюк, В. К. Репета. – К. : НАУ, 2009. – Ч. 2. – 276 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ОЛІЙНИК Олег Петрович
ТУПКО Наталія Петрівна
ГРИШКО Олена Миколаївна
ВАРИВОДА Вікторія Олександрівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

У двох частинах

Частина 1

Редактор *Н. М. Гурович*
Технічний редактор *А. І. Лавринович*
Коректор *В. І. Куксов*
Комп’ютерна верстка *Н. В. Чорної*

Підп. до друку 14.05.2021. Формат 60х84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 12,56. Обл.-вид. арк. 13,5.
Тираж 50 прим. Замовлення № 82-1.

Видавець і виготівник
Національний авіаційний університет
03680. Київ-58, проспект Любомира Гузара, 1.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002